Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma propriedade das álgebras de Grassmann não-unitárias sobre um corpo de característica prima e suas aplicações

por

Bruno Trindade Reis

Brasília

2016

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma propriedade das álgebras de Grassmann não-unitárias sobre um corpo de característica prima e suas aplicações.

por

Bruno Trindade Reis

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de junho de 2016.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov – Orientador (MAT-UnB)

Prof. Dr. José Antônio Oliveira de Freitas (MAT-UnB)

Profa. Dra. Irina Sviridova (MAT-UnB)

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov (UNICAMP)

Profa. Dra. Shirlei Serconek (UFG)

* O autor foi bolsista CNPq durante a elaboração desta tese.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Reis, Bruno Trindade
RR375p Uma propriedade das álgebras de Grassmann não unitárias sobre um corpo de característica prima e suas aplicações / Bruno Trindade Reis; orientador Alexei Krassilnikov. -- Brasília, 2016.
66 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2016.

1. Álgebra de Grassmann. 2. Identidades polinomiais. 3. Álgebras livres. 4. Álgebras graduadas. I. Krassilnikov, Alexei, orient. II. Título.

À minha família.

"Se as portas da percepção estivessem limpas, tudo se mostraria ao homem tal como é: infinito". (William Blake)

Agradecimentos

Agradeço à minha família, pelo apoio. À minha esposa Renata, que esteve sempre ao meu lado. Agradeço ao meu orientador, Professor Alexei Krassilnikov, por ter me orientado e por ter confiado no meu trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos, pelo companheirismo: Alex Teló, Benedito, Agenor, Sílvio, Adriano, Claud, Eudes, Raimundo, Marcos Duarte, Aramis, Daiane, Ludimila, Hiuri, Laís, Gustavo Tiveron e todos que contribuíram para essa conquista.

Resumo

Seja K um corpo de característica $p > 2$. Sejam H a álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão infinita e H_n a álgebra de Grassmann não unitária de um espaço vetorial de dimensão finita n, ambas sobre K. Seja $\mathcal{A} = K\langle Y, Z\rangle/T_2(H)$ a álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_2$-graduada da variedade de K-álgebras associativas $\mathbb{Z}_2$-graduadas não-unitárias determinada por H. Seja $\mathcal{D} = K\langle X\rangle/T(H)$ a álgebra relativamente livre da variedade de álgebras associativas não-unitárias (sem graduação) determinada por H. Nesse trabalho construímos um mergulho de $\mathcal{A}$ em H, que determina um mergulho de $\mathcal{D}$ em H. Isso nos permite dar demonstrações simples e unificadas de resultados sobre identidades polinomiais e polinômios centrais de H e H_n obtidos anteriormente por vários autores. Os resultados obtidos também são válidos se K é um domínio de integridade de característica $p > 2$.

Estudamos também a álgebra de Grassmann unitária E de dimensão infinita sobre um corpo finito. Seja K um corpo finito e $K_1\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre unitária, livremente gerada por X. Damos uma representação de $K_1\langle X\rangle/T(E)$ como produto tensorial da álgebra comutativa $A = K[t_i | i \in \Lambda]/I$, onde I é o ideal de $K[t_i | i \in \Lambda]$ gerado por $t_i^q - t_i$, $i \in \Lambda$, e a álgebra $B = K_1\langle Y\rangle/V$, onde V é o T-ideal de $K\langle Y\rangle$ (ou seja, da álgebra associativa livre não-unitária) gerado por y_1^p e pelo comutador triplo $[y_1, y_2, y_3]$. Essa representação nos permite dar uma demonstração mais simples do resultado de Bekh-Ochir e Rankin sobre uma base de identidades polinomiais de E sobre um corpo finito.

Palavras-chave: Álgebra de Grassmann; Identidades polinomiais; Álgebras livres; Álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Abstract

Let K be a field of characteristic $p > 2$. Let H be the infinite dimensional non-unitary Grassmann algebra and H_n the non-unitary Grassmann algebra of a vector space of dimension n, both over K. Let $\mathcal{A} = K\langle Y, Z\rangle/T_2(H)$ be the $\mathbb{Z}_2$-graded relatively free algebra of the variety of $\mathbb{Z}_2$-graded non-unitary associative algebras determined by H. Let $\mathcal{D} = K\langle X\rangle/T(H)$ be the relatively free algebra of the variety of non-unitary associative algebras (without grading) determined by H. In this work we construct an embedding of $\mathcal{A}$ in H, determining an embedding of $\mathcal{D}$ in H. This allows us to give simple and unified proofs of results about polynomial identities and central polynomials of H e H_n obtained previously by several authors. The results obtained are also valid if K is an integral domain of characteristic $p > 2$.

We study also the infinite dimensional unitary Grassmann algebra E over a finite field. Let K be a finite field and $K_1\langle X\rangle$ the unitary associative free algebra, freely generated by X. We give a representation of $K_1\langle X\rangle/T(E)$ as a tensor product of the commutative algebra $A = K[t_i|i \in \Lambda]/I$, where I is the ideal of $K[t_i|i \in \Lambda]$ generated by $t_i^q - t_i$, $i \in \Lambda$, and the algebra $B = K_1\langle Y\rangle/V$, where V is the T-ideal of $K\langle Y\rangle$ (that is, of the free associative non-unitary algebra) generated by y_1^p and $[y_1, y_2, y_3]$. This representation allows us to give a simple proof of the result of Bekh-Ochir and Rankin on a basis of the polynomial identities of E over a finite field.

Keywords: Grassmann algebras; Polynomial identities; Free algebras; $\mathbb{Z}_2$-graded algebras.

Sumário

1 Introdução **9**

2 Preliminares **15**

2.1 PI-álgebras 15

2.2 Álgebras $\mathbb{Z}_2$-Graduadas e álgebras de Grassmann 22

3 Álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão infinita **28**

3.1 Identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de H 28

3.2 Identidades de H 31

3.3 Polinômios Centrais de H 35

4 Álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão finita **45**

4.1 Identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de H_n 45

4.2 Identidades de H_{2n} 49

4.3 Identidades de H_{2n-1} 53

5 Álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita **58**

Referências Bibliográficas **64**

Capítulo 1

Introdução

A álgebra de Grassmann aparece naturalmente em muitos campos da matemática e da física. Ela é muito importante na teoria de álgebras com identidades polinomiais (PI-álgebras). Mais precisamente, sejam X um conjunto infinito enumerável, K um corpo e $K\langle X\rangle$ a álgebra livre não unitária sobre K, livremente gerada por X. Dada uma K-álgebra R, dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ de $K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial para R se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todos $a_1, \ldots, a_n \in R$. Se a álgebra R satisfaz uma identidade polinomial não-trivial, dizemos que R é uma PI-álgebra. Para uma introdução à PI-teoria, ver, por exemplo, [10, 11, 13, 20, 22, 29].

Dada uma K-álgebra R, uma das importantes questões da PI-teoria é descrever as identidades de R. Outra questão é saber se R possui uma base finita para suas identidades polinomiais. Para álgebras sobre um corpo K de característica zero, esse problema foi proposto por Specht [33]. Um famoso resultado de Kemer [21], [23] (ver também [22]) deu uma solução afirmativa para o problema de Specht (para álgebras sobre um corpo de característica zero). Por outro lado, para álgebras associativas sobre um corpo K de característica $p > 0$, o análogo do problema de Specht tem solução negativa, ou seja, existem álgebras sobre K cujas identidades polinomiais não possuem nenhuma base finita. Isso foi demonstrado em 1999, independentemente por Belov [5], Grishin [16] e Shchigolev [31] (ver também [4], [18], [32]). No caso em que K tem característica $p > 2$, as demonstrações foram baseadas no resultado de Shchigolev [30] sobre T-subespaços não finitamente gerados em álgebras que satisfazem as identidades da álgebra de Grassmann unitária E de dimensão infinita. Mais ainda, como foi descoberto depois em [1], [6] e [17], o resultado de Shchigolev é equivalente ao fato de que o T-subespaço de polinômios centrais da álgebra E não é finitamente gerado.

Latyshev [26] provou que sobre um corpo de característica zero, o T-ideal da álgebra associativa livre unitária $K_1\langle X\rangle$ gerado por $[x_1, x_2, x_3]$ tem uma base finita. Em [25], Krakowski e Regev encontraram uma base para as identidades da álgebra de Grassmann unitária E de dimensão infinita sobre um corpo de característica zero. Eles mostraram que as identidades da álgebra de Grassamnn E sobre tal corpo seguem do comutador $[x_1, x_2, x_3]$. Observamos que as identidades da álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão infinita sobre um corpo de característica zero também seguem do comutador $[x_1, x_2, x_3]$. Para a álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita sobre um corpo infinito de característica $p > 2$, vários autores (ver, por exemplo, Giambruno e Koshlukov [12]) mostraram que toda identidade segue do comutador $[x_1, x_2, x_3]$. Bekh-Ochir e Rankin, em [3], estudaram as identidades da álgebra E de dimensão infinita sobre um corpo finito. Nesse caso, as identidades da álgebra de Grassmann segue do comutador $[x_1, x_2, x_3]$ e do polinômio $x_1^{pq} - x_1^p$, onde p e q são a característica e o número de elementos do corpo, respectivamente. Em [34] Stojanova-Venkova exibiu uma base para as identidades da álgebra de Grassmann não-unitária de um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo de característica prima. Chiripov e Siderov em [8] encontraram uma base para as identidades da álgebra de Grassmann não unitária de dimensão infinita H sobre um corpo de característica $p > 2$. Essa base é formanda pelos polinômios $[x_1, x_2, x_3]$ e x_1^p. Em [6], [2] e [17], independentemente, foram descritos os polinômios centrais para a álgebra de Grassmann unitária e não-unitária de dimensão infinita sobre um corpo de característica diferente de 2.

Observamos que foram publicados vários trabalhos sobre as identidades e os polinômios centrais da álgebra de Grassmann unitária e assuntos relacionados, ver, por exemplo, [1, 2, 3, 6, 7, 12, 14, 15, 17, 19, 25, 28, 36]. Por outro lado, as identidades polinomiais e os polinômios centrais da álgebra de Grassmann não-unitária foram estudados com menos frequência, ver, por exemplo, [2, 6, 8, 24, 28, 34]. Observamos também que as demonstrações dos resultados no caso da álgebra de Grassmann não-unitária são em geral mais complicadas que no caso da álgebra de Grassmann unitária. No nosso trabalho, vamos apresentar versões mais simples dessas demonstrações.

Começamos com o seguinte: Sejam K um domínio de integridade de característica $p > 2$, $K_1\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre unitária e $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre não-unitária. Apesar do título desse trabalho, vamos considerar o caso mais geral quando K é domínio de integridade. No segundo capítulo, definiremos os conceitos básicos para o entendimento do restante desse trabalho. Enunciaremos e demonstraremos alguns resultados sobre álgebras livres e PI-álgebras sobre um domínio de integridade K. A seguir, apresentaremos vários resultados sobre álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas e identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Definiremos álgebra de Grassmann e veremos como ela possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Veremos também como as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas podem ser utilizadas para encontrar as identidades ordinárias de uma álgebra.

No terceiro capítulo, demonstraremos nosso principal resultado. Sejam K um domínio de integridade de característica $p > 2$ e H a álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão infinita sobre K. Seja $\mathcal{D} = K\langle X\rangle/T(H)$ a álgebra relativamente livre da variedade de álgebras associativas determinada por H.

Teorema 1.1. *A álgebra $\mathcal{D}$ pode ser mergulhada em H, isto é, $\mathcal{D} \subset H$.*

Esse mergulho permite dar uma demonstração simples do seguinte resultado já obtido por um método mais complicado por Chiripov e Siderov [8] quando K é um corpo.

Corolário 1.2. *Seja H a álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão infinita sobre um domínio de integridade de característica $p > 2$. O conjunto das identidades de H é o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por $[x_1, x_2, x_3]$ e x^p.*

Obtemos também de forma simples uma K-base para o quociente $K\langle X\rangle/T(H)$, a mesma base que foi descrita por Kireeva e Krasilnikov em [24] com uma demonstração mais complicada, quando K é um corpo.

Corolário 1.3. *Seja K um domínio de integridade de característica $p > 2$. O quociente $K\langle X\rangle/T(H)$ é um K-módulo livre com uma K-base formada pelos polinômios*

$$x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + T(H), \tag{1.1}$$

onde $k \geq 0, l \geq 0, k + l > 0, i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_{2l}, 0 < m_i < p$.

Para mostrar isso, trabalharemos com a álgebra de Grassmann $H = H_0 \oplus H_1$ vista como álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Sejam $K\langle Y, Z\rangle$ a álgebra livre não-unitária $\mathbb{Z}_2$-graduada e T_2 o T_2-ideal de $K\langle Y, Z\rangle$ gerado pelos seguintes polinômios

$$[y_1, y_2], \quad [y_1, z_1], \quad z_1z_2 + z_2z_1, \quad y_1^p. \tag{1.2}$$

Começaremos demonstrando o seguinte:

Teorema 1.4. *Seja K um domínio de integridade de característica $p > 2$. A álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_2$-graduada da variedade determinada por T_2 pode ser mergulhada em H, isto é, $K\langle Y, Z\rangle/T_2 \subset H$.*

Mais precisamente, dividimos os geradores de H em duas famílias

$$e_1, e_2, \ldots; f_1, f_2, \ldots.$$

A seguir mostramos que o homomorfismo

$$\begin{aligned}
&\phi : K\langle Y, Z\rangle/T_2 \longrightarrow H\\
&z_i + T_2 \mapsto f_i\\
&y_i + T_2 \mapsto e_{\lambda_i+1}e_{\lambda_i+2} + e_{\lambda_i+3}e_{\lambda_i+4} + \ldots + e_{\lambda_i+(2p-3)}e_{\lambda_i+(2p-2)},
\end{aligned}$$

onde $\lambda_i = (i-1)(2p-2)$, é um homomorfismo injetor.

Esse teorema implica dois resultados que provavelmente são bem conhecidos quando K é um corpo, embora não tenhamos encontrado as referências.

Corolário 1.5. *O conjunto das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de H é o T_2-ideal gerado pelos seguintes polinômios de $K\langle Y, Z\rangle$:*

$$[y_1, y_2], \quad [y_1, z_1], \quad z_1z_2 + z_2z_1, \quad y_1^p. \tag{1.3}$$

Corolário 1.6. *Seja K um domínio de integridade de característica $p > 2$. O quociente $K\langle Y, Z\rangle/T_2(H)$ é um K-módulo livre com uma K-base formada pelos monômios*

$$y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_l} + T_2(H),$$

onde $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_l$; $0 < m_1, \ldots, m_k < p$; $k, l \geq 0$ e $k + l > 0$.

Usaremos esses dois últimos corolários para demonstrar os corolários 1.2 e 1.3. Como $\mathcal{D}$ é isomorfo à subálgebra de $K\langle Y, Z\rangle/T_2(H)$ gerada por $x_i + T_2(H)$, onde $x_i = y_i + z_i$, trabalharemos com $\mathcal{D}$ como subálgebra do quociente $K\langle Y, Z\rangle/T_2(H)$. Mostraremos que se V é o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios $[x_1, x_2, x_3]$ e x_1^p, então $\mathcal{D} \simeq K\langle X\rangle/V$.

A seguir, usando os resultados de [6] encontraremos uma base para o T-subespaço de polinômios centrais de H. Obtemos também uma nova demonstração simples do fato de que o T-subespaço de polinômios centrais de H não é finitamente gerado como um T-espaço. Esse resultado foi demonstrado de modo mais complicado em [1] e [6] usando o resultado sofisticado de Shchigolev [30]. A importância desse resultado se deve ao fato que a partir de $C(H)$ foram construídos exemplos de T-ideais não finitamente gerados obtidos por Belov [20], Grishin [17] e Shchigolev [30]. Esses exemplos resolveram o análogo do problema de Specht para álgebras sobre corpos de característica $p > 2$ que ficou em aberto por um longo período.

No capítulo 4, estudaremos as álgebras de Grassmann de um K-módulo livre de dimensão n, H_n, sobre um domínio de integridade de característica $p > 2$. Seguiremos o mesmo caminho do capítulo 3. Primeiro, encontraremos uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de H_n e uma K-base para o quociente $K\langle Y, Z\rangle/T_2(H_n)$. Como $H_n \subset H$, temos que H_n satisfaz as identidades (1.2). Como o grau dos elementos da K-base de H_n é limitado, é de se esperar que monômios de $K\langle Y, Z\rangle$ com grau suficientemente grande sejam identidades de H_n. Para isso, definiremos peso de um monômio de $K\langle Y, Z\rangle$ como sendo a soma dos pesos das variáveis que compôem o monômio, onde as variáveis $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ tem peso igual a 2 e as variáveis $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ tem peso igual a 1. Assim temos o seguinte teorema, que provavelmente é bem conhecido quando K é um corpo.

Teorema 1.7. *Seja K um domínio de integridade de característica $p > 2$. O quociente $K\langle Y, Z\rangle/T_2(H_n)$ é um K-módulo livre com uma K-base formada pelos monômios, módulo $T_2(H_n)$,*

$$y_{i_1}^{m_1} \ldots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \ldots z_{j_l}, \tag{1.4}$$

onde $2(m_1 + \cdots + m_k) + l \leq n$, $k + l > 0$, $k, l \geq 0$ $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_l$, $0 < m_1, \ldots, m_k < p$.

Assim todo monômio de $K\langle Y, Z\rangle$ com peso maior do que n é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para H_n. Para encontrar uma K-base para $K\langle X\rangle/T(H_n)$ e o T-ideal $T(H_n)$, teremos que considerar dois casos separadamente: n é par e n ímpar. Isso foi feito em [34] por Stojanova-Venkova quando K é um corpo de característica $p > 2$. Seja $x_1 \circ x_2 = x_1x_2 + x_2x_1 \in K\langle X\rangle$. Definimos o polinômios v_{n+1} do seguinte modo:

$$v_{n+1} = (\cdots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \ldots \circ x_{n+1}) \circ x_{n+1}.$$

Então temos

Teorema 1.8. *Seja H_{2n} a álgebra de Grassmann de um K-módulo livre de dimensão $2n$, não-unitária, sobre um domínio de integridade de característica $p > 2$. O T-ideal das identidades de H_{2n} é o T-ideal gerado pelos polinômios*

$$[x_1, x_2, x_3],\ x_1^p \text{ e } v_{n+1}.$$

Teorema 1.9. *Seja H_{2n-1} a álgebra de Grassmann de um K-módulo livre de dimensão $2n-1$, não-unitária, sobre um domínio de integridade de característica $p > 2$. O T-ideal das identidades de H_{2n-1} é o T-ideal gerado pelo polinômios*

$$[x_1, x_2, x_3],\ x_1^p,\ v_n x_{n+1},\ x_{n+1} v_n.$$

Se $s = n/(2p-1)$ é um número inteiro, incluímos o polinômio

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2s-1}, x_{2s}] x_1^{p-1} \cdots x_{2s}^{p-1}.$$

No capítulo 5, consideraremos a álgebra de Grassmann unitária E, de um espaço de dimensão infinita, sobre um corpo finito K. Esse caso foi estudado por Bekh-Ochir e Rankin em [3]. Nesse artigo eles mostraram que o T-ideal das identidades de E é o T-ideal gerado pelos polinômios $[x_1, x_2, x_3]$ e $x_1^{qp} - x_1^p$, onde p é a característica do corpo K e q é a quantidade de elementos de K. O principal teorema desse capítulo consiste no seguinte. Seja U o T-ideal de $K_1\langle X\rangle$ gerado por $[x_1, x_2, x_3]$ e $x_1^{qp} - x_1^p$, então

Teorema 1.10. *$K_1\langle X\rangle/U \simeq A \bigotimes_K B$, onde $A = K_1[t_i | i \in \Lambda]/I$ e $B = K_1\langle Y\rangle/V$. Aqui, I é o ideal de $K_1[t_i | i \in \Lambda]$ gerado por $t_i^{qp} - t_i^p$, $i \in \Lambda$, e V é o T-ideal de $K\langle Y\rangle$ gerado por $[y_1, y_2, y_3]$ e y_1^p.*

Por fim, concluiremos pelo teorema acima que o T-ideal das identidades de E é U, isto é, $U = T(E)$, dando assim uma demonstração mais simples do resultado de Bekh-Ochir e Rankin [3].

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, recordaremos alguns resultados de álgebras associativas livres, álgebras com identidades polinomiais e álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas que serão importantes para nosso trabalho. Neste capítulo, a menos que dito o contrário, K será um domínio de integridade.

2.1 PI-álgebras

Começamos definindo álgebras associativas livres e álgebras relativamente livres.

Definição 2.1. *Sejam $\mathfrak{D}$ uma classe de álgebras associativas sobre um domínio de integridade K e $F \in \mathfrak{D}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra F é chamada livre na classe $\mathfrak{D}$, livremente gerada pelo conjunto X, se para qualquer álgebra $R \in \mathfrak{D}$, toda aplicação $\phi : X \to R$ pode ser estendida a um homomorfismo $\overline{\phi} : F \to R$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada posto de F.*

Se $\mathfrak{D}$ é a classe de todas as álgebras associativas, então F é simplesmente chamada de álgebra associativa livre. Caso contrário, F é chamada de álgebra associativa relativamente livre na classe $\mathfrak{D}$.

Sejam K um corpo e X um conjunto infinito enumerável. A álgebra $K_1\langle X\rangle$ tendo como base o conjunto

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}, \quad x_{i_l} \in X, n = 0, 1, 2, 3 \ldots ,$$

e multiplicação definida por

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$$

é livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias.

Seja $K\langle X\rangle$ o K-submódulo de $K_1\langle X\rangle$ gerado por todas as palavras $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, $x_{i_l} \in X$, $n = 1, 2, 3\ldots$, isto é, todas as palavras com comprimento maior ou igual a 1. Então $K\langle X\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras associativas não-unitárias.

Agora podemos definir identidades polinomiais de uma álgebra associativa.

Definição 2.2. *Seja $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$ e R uma álgebra associativa sobre K. Dizemos que $f = 0$ é uma identidade polinomial para R se $f(r_1,\ldots,r_n) = 0$ para todos $r_1,\ldots,r_n \in R$.*

Diremos que $f = 0$ é uma identidade para R (ou simplesmente f é identidade para R), ou R satisfaz f.

Definição 2.3. *Se R satisfaz uma identidade polinomial não trivial, dizemos que R é uma PI-álgebra.*

Exemplo 2.4. *Se R é uma K-álgebra associativa de dimensão n, então R satisfaz a identidade standard de grau $n+1$,*

$$s_{n+1} = \sum_{\sigma\in S_{n+1}} sign(\sigma)x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n+1)}.$$

Exemplo 2.5 (Amitsur-Levitzki)**.** *A álgebra de matrizes de ordem n, $M_n(K)$, satisfaz o polinômio standard de grau $2n$, $s_{2n} = \sum_{\sigma\in S_{2n}} sign(\sigma)x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(2n)}$.*

Seja Φ o conjunto de todos os homomorfismos $\phi : K\langle X\rangle \longrightarrow R$. Então é claro que $f = 0$ é uma identidade polinomial para R se, e somente se, $f \in \bigcap_{\phi\in\Phi} Ker\ \ \phi$.

Definição 2.6. *Sejam R uma K-álgebra com centro $Z(R)$ e seja $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$. O polinômio f é central em R se $f(r_1,\ldots,r_n) \in Z(R)$ para todos $r_1,\ldots,r_n \in R$.*

Dada uma álgebra R, denotaremos por $C(R)$ o conjunto de polinômios centrais de R.

Dada uma álgebra R, seja

$$T(R) = \{f \in K\langle X\rangle | f \ \text{ é identidade para } \ R\}$$

o conjunto de todas as identidades polinomiais de R. Claramente, $T(R)$ é um ideal bilateral de $K\langle X\rangle$. Além disso, se $f(x_1, \dots, x_n) \in T(R)$ e $g_1, \dots, g_n$ são polinômios arbitrários de $K\langle X\rangle$, então $f(g_1, \dots, g_n) \in T(R)$. Como todo endomorfismo de $K\langle X\rangle$ é determinado por aplicações $x \mapsto g$, $x \in X$, $g \in K\langle X\rangle$, segue que $T(R)$ é fechado por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$. Ideais com essa propriedade são chamados de T-ideais.

Definição 2.7. *Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é um T-ideal se $\phi(I) \subseteq I$ para todos os endomorfismos ϕ de $K\langle X\rangle$.*

Portanto, para toda álgebra R, $T(R)$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Por outro lado, todo T-ideal I é conjunto de identidades polinomiais de alguma álgebra, pois $T(K\langle X\rangle/I) = I$.

Analogamente define-se um T-subespaço como sendo um K-submódulo de $K\langle X\rangle$ fechado por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$. Embora a palavra T-subespaços seja usada quando K é um corpo, isto é, para K-subespaços fechados por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$, aqui ela será usada no mesmo sentido.

Definição 2.8. *Um K-submódulo J de $K\langle X\rangle$ é um T-subespaço se $\phi(J) \subseteq J$ para todos os endomorfismos ϕ de $K\langle X\rangle$.*

Temos também que para toda álgebra R, o conjunto de polinômios centrais $C(R)$ é um T-subespaço de $K\langle X\rangle$. Mas a recíproca não vale.

Seja $S = \{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios. O T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por S será denotado por $\langle S\rangle^T$. É fácil ver que $\langle S\rangle^T$ é o ideal gerado por

$$f_i(g_1, \dots, g_{n_i})$$

onde $f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in S$ e $g_1, \dots, g_{n_i}$ são polinômios arbitrários de $K\langle X\rangle$.

Vimos que toda álgebra R determina um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Introduziremos agora o conceito de variedade de álgebras.

Definição 2.9. *Seja $\{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in \Lambda\}$ um conjunto de polinômios de $K\langle X\rangle$. A classe de todas as álgebras R tais que $f_i = 0$, $i \in \Lambda$, são identidades polinomiais para R é chamada de variedade determinada por $\{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in \Lambda\}$.*

Note que se $S = \{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in \Lambda\}$, a variedade determinada por S é igual a variedade determinada por $\langle S\rangle^T$.

O próximo teorema fornece um critério para saber se uma dada classe de álgebras é uma variedade.

Teorema 2.10 (Birkhoff). *Uma classe de álgebras $\mathfrak{D}$ é uma variedade se, e somente se, $\mathfrak{D}$ é fechada para produtos diretos, subálgebras e álgebras quocientes.*

Seja $\mathcal{V}$ a variedade determinada por um T-ideal I. A próxima proposição, que pode ser encontrada em [10], nos mostra a existência de uma álgebra relativamente livre na classe $\mathcal{V}$.

Proposição 2.11. *Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre, livremente gerada pelo conjunto X. Seja $\mathcal{V}$ a variedade determinada por um T-ideal $I \in K\langle X\rangle$. Então $K\langle X\rangle/I$ é uma álgebra relativamente livre, livremente gerada por $\overline{X} = \{x + I | x \in X\}$, na classe $\mathcal{V}$. Além disso, duas álgebras relativamente livres na classe $\mathcal{V}$, de mesmo posto, são isomorfas.*

Demonstração. Sejam R uma álgebra que pertence à variedade $\mathcal{V}$ e uma aplicação $\phi : \overline{X} \to R$ onde $\phi(x + I) = r$, $r \in R$. Defina uma aplicação $\psi : X \to R$ colocando $\psi(x) = \phi(x + I)$. Como $K\langle X\rangle$ é álgebra livre sobre X, ψ pode ser estendida a um homomorfismo $\overline{\psi} : K\langle X\rangle \to R$, onde $\overline{\psi}(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(r_1, \ldots, r_n)$. Mas $I \subseteq T(R) \subseteq \ker(\overline{\psi})$. Assim o homomorfismo

$$\begin{aligned} &K\langle X\rangle/I \to R \\ &\overline{\phi}(f(x_1, \ldots, x_n) + I) = f(r_1, \ldots, r_n) \end{aligned}$$

está bem definido e estende ϕ.

Sejam $R_1, R_2 \in \mathcal{V}$ álgebras relativamente livres de mesmo posto sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e $X' = \{x'_1, x'_2, \ldots\}$, respectivamente. Como R_1 e R_2 são álgebras relativamente livres na variedade $\mathcal{V}$, existem homomorfismos $\phi_1 : R_1 \to R_2$ e $\phi_2 : R_2 \to R_1$ tais que $\phi_1(x_i) = x'_i$ e $\phi_2(x'_i) = x_i$ para $i = 1, 2, \ldots$. É fácil ver que $\phi_1\phi_2$ é a aplicação identidade de X' e $\phi_2\phi_1$ é a aplicação identidade de X. Portanto, R_1 e R_2 são isomorfas. $\square$

A proposicão acima diz que se R pertence a variedade $\mathcal{V}$, então toda aplicação

$$\begin{aligned} \overline{X} &\to R \\ x_i + I &\mapsto g_i, \end{aligned}$$

pode ser estendida a um homomorfismo

$$K\langle X\rangle/I \longrightarrow R.$$

Vamos agora introduzir os conceitos de identidades multi-homogêneas, identidades multilineares.

Definição 2.12. *Dizemos que um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$ é homogêneo com respeito à variável x_1, se ele pode ser representado como combinação linear de monômios de mesmo grau, relativamente a x_1.*

Definição 2.13. *Um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$ é multi-homogêneo se for homogêneo com respeito a todas as variáveis.*

Definição 2.14. *Um polinômio multi-homogêneo $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$ tem multi-grau $(d_1,\ldots,d_n)$ se o grau de x_i em f é d_i, $i = 1,\ldots,n$.*

Assim cada $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$ pode ser escrito de maneira única como combinação linear de suas componentes multi-homogêneas,

$$f = \sum_{d_1\geq 0,\ldots,d_n\geq 0} f^{(d_1,\ldots,d_n)}$$

onde $f^{(d_1,\ldots,d_n)}$ é a componente multi-homogênea de f com multi-grau $(d_1,\ldots,d_n)$. Portanto $K\langle X\rangle$ é graduada pelos seus multi-graus, isto é,

$$K\langle X\rangle = \bigoplus_{d=(d_1,\ldots,d_n)} K\langle X\rangle^{(d_1,\ldots,d_n)},$$

onde $K\langle X\rangle^{(d_1,\ldots,d_n)}$ é o K-submódulo de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os polinômios com multi-grau $(d_1,\ldots,d_n)$.

Definição 2.15. *Um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$ é multilinear se o grau com respeito a cada variável $x_1,\ldots,x_n$ é um.*

Definição 2.16. *Um polinômio $g \in K\langle X\rangle$ é consequência dos polinômios $f_i \in K\langle X\rangle$, $i \in \Lambda$, se $g \in \langle f_i \mid i \in \Lambda\rangle^T$.*

Definição 2.17. *Dois sistemas de identidades, S_1, S_2, são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal, isto é, $\langle S_1\rangle^T = \langle S_2\rangle^T$.*

Um importante teorema relacionado com identidades multi-homogêneas é o seguinte. Ele pode ser encontrado por exemplo em [10] e [13].

Proposição 2.18. *Seja*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} f_i \in K\langle X\rangle$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1. Se existe um corpo contido em K com mais que m elementos, então os polinômios f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, são consequências de f.

Demonstração. Seja $I = \langle f\rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por f. Como K possui um corpo com mais de m elementos, escolhemos $m+1$ elementos distintos desse corpo, $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$. Como I é um T-ideal,

$$f(\alpha_j x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_j^i f_i(x_1, \ldots, x_n) \in I, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Escrevendo essas m equações na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} f(\alpha_0 x_1, \ldots, x_n) \\ f(\alpha_1 x_1, \ldots, x_n) \\ f(\alpha_2 x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f(\alpha_m x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^m \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^m \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \cdots & \alpha_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(x_1, \ldots, x_n) \\ f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

O determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^m \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^m \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \cdots & \alpha_m^m \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

é o determinante de Vandermonde e é diferente de zero. Assim, pela equação (2.1), podemos escrever cada $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ como uma combinação linear dos polinômios $f(\alpha_j x_1, \ldots, x_n)$, $i = 0, \ldots, m$. Logo, cada $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ pertence a I, isto é, as identidades f_i são consequências de f. $\square$

Uma das consequências mais importantes desse teorema é que sobre um corpo infinito todo T-ideal é gerado pelos seus polinômios multi-homogêneos. Assim temos a seguinte definição.

Definição 2.19. *Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é multi-homogêneo se para todo $f \in I$, todas as componentes multi-homogêneas de f também pertencem a I.*

Analogamente define-se um K-submódulo multi-homogêneo de $K\langle X\rangle$.

Vimos que $K\langle X\rangle$ pode ser escrito como soma direta de K-submódulos

$$K\langle X\rangle = \bigoplus_{d=(d_1,\ldots,d_n)} K\langle X\rangle^{(d_1,\ldots,d_n)},$$

onde $K\langle X\rangle^{(d_1,\ldots,d_n)}$ é o K-submódulo de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os polinômios com multi-grau $(d_1,\ldots,d_n)$. Para uma álgebra quociente $K\langle X\rangle/I$, onde I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, definimos o seguinte.

Definição 2.20. *Uma álgebra quociente $K\langle X\rangle/I$, onde I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, é graduada pelos seus multi-graus se*

$$K\langle X\rangle/I = \bigoplus_{d=(d_1,\ldots,d_n)} K\langle X\rangle^{(d_1,\ldots,d_n)} + I,$$

onde $K\langle X\rangle^{(d_1,\ldots,d_n)} + I$ é o K-submódulo de $K\langle X\rangle/I$ gerado por todos $f + I \in K\langle X\rangle/I$ onde f tem multi-grau $(d_1,\ldots,d_n)$.

Com isso, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.21. *Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é multi-homogêneo se, e somente se, $K\langle X\rangle/I$ é graduado pelos seus multi-graus.*

Demonstração. Suponha que I não é multi-homogêneo. Então existe $f \in I$ tal que pelo menos duas componentes multi-homogêneas de f não pertencem a I. Suponha, por exemplo, que $f^{(d_1,\ldots,d_k)}$ e $f^{(d'_1,\ldots,d'_{k'})}$ não pertencem a I e que todas as outras componentes multi-homogêneas de f pertencem a I. Assim,

$$\begin{aligned} f + I = I \quad &\Rightarrow \quad f^{(d_1,\ldots,d_k)} + f^{(d'_1,\ldots,d'_{k'})} + I = I \\ &\Rightarrow \quad (f^{(d_1,\ldots,d_k)} + I) + (f^{(d'_1,\ldots,d'_{k'})} + I) = I \end{aligned}$$

Logo, a soma de $K\langle X\rangle^{(d_1,\ldots,d_n)}+I$ e $K\langle X\rangle^{(d'_1,\ldots,d'_{n'})}+I$ não é direta. Assim, $K\langle X\rangle/I$ não é graduada pelos seus multi-graus. O mesmo raciocínio é válido supondo que mais de duas componentes multi-homogêneas de f não pertencem a I.

Agora suponha que $K\langle X\rangle/I$ não é graduada pelos seus multi-graus. Assim, existem polinômios multi-homogêneos, não nulos em $K\langle X\rangle/I$, $f^{(d_1,\ldots,d_k)}+I$ e $f^{(d'_1,\ldots,d'_{k'})}+I$, tais que

$$f^{(d_1,\ldots,d_k)}+I = f^{(d'_1,\ldots,d'_{k'})}+I.$$

Logo, $f^{(d_1,\ldots,d_k)} - f^{(d'_1,\ldots,d'_{k'})} \in I$. Como $f^{(d_1,\ldots,d_k)} \notin I$ e $f^{(d'_1,\ldots,d'_{k'})} \notin I$, temos que I não é multi-homogêneo. $\square$

2.2 Álgebras $\mathbb{Z}_2$-Graduadas e álgebras de Grassmann

Introduziremos nessa seção os conceitos de álgebras associativas $\mathbb{Z}_2$-graduadas e álgebras de Grassmann. Começaremos definindo álgebras de Grassmann.

Definição 2.22. *Sejam X um conjunto infinito enumerável, K um domínio de integridade de característica $p>2$ e $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre não-unitária, livremente gerada por X. Seja I o ideal bilateral de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios $\{x_ix_j+x_jx_i \mid i,j\geq 1\}$. A álgebra $H=K\langle X\rangle/I$ é chamada álgebra de Grassmann, não-unitária, de um K-módulo livre de dimensão infinita. Analogamente define-se a álgebra de Grassmann unitária como $E=K_1\langle X\rangle/I$, onde I é o ideal bilateral de $K_1\langle X\rangle$ gerado por $\{x_ix_j+x_jx_i \mid i,j\geq 1\}$.*

Se escrevermos $e_i=x_i+I$, $i=1,2,\ldots$, então H tem a seguinte apresentação:

$$H=\langle e_1,e_2,\ldots \mid e_ie_j=-e_je_i \quad ,i,j\geq 1\rangle.$$

Uma base de H como K-espaço vetorial é o conjunto

$$\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \mid i_1<i_2<\cdots<i_k, k>0\}.$$

Definição 2.23. *A subálgebra H_n da álgebra H, gerada por $e_1,e_2,\ldots,e_n$, é chamada de álgebra de Grassmann, não-unitária, de um K-módulo livre de dimensão n.*

Logo, H_n tem uma apresentação

$$H_n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \mid e_i e_j = -e_j e_i \quad , 1 \leq i, j \leq n \rangle,$$

e tem como uma K-base o conjunto

$$\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}.$$

A seguir, definiremos álgebras G-graduadas, onde G é um grupo, e veremos que H tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural.

Definição 2.24. *Seja G um grupo. Uma K-álgebra R é G-graduada se admite uma decomposição como uma soma direta $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$, onde cada R_g é um K-submódulo de R e $R_{g_1} R_{g_2} \subseteq R_{g_1 g_2}$, para todos $g_1, g_2 \in G$. Os submódulos R_g são chamados submódulos homogêneos de R.*

Definição 2.25. *Um ideal I de uma álgebra G-graduada R é um ideal G-graduado se*

$$I = \bigoplus_{g \in G} I_g, \textit{ onde } \quad I_g = I \cap R_g.$$

Seja I um ideal G-graduado de uma álgebra G-graduada R. A álgebra R/I também é uma álgebra G-graduada, com $(R/I)_g = \{r + I | r \in R_g\}$ sendo seus submódulos homogêneos.

Definição 2.26. *Um homomorfismo $\phi : R \to R'$ entre álgebras G-graduadas é G-graduado se $\phi(R_g) \subseteq R'_g$ para todo $g \in G$.*

A álgebra de Grassmann H é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. De fato, seja

$$H_0 = span\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{2k}} \quad | i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k > 0\}$$

e

$$H_1 = span\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{2k+1}} \quad | i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 0\}$$

Assim, $H = H_0 \oplus H_1$. O submódulo H_0 é chamado de parte par de H e H_1 de parte ímpar.

Sejam Y e Z conjuntos infinitos enumeráveis disjuntos e seja K um domínio de integridade de característica $p > 2$. A álgebra livre $K\langle Y, Z\rangle$, livremente gerada por $Y \cup Z$, é chamada de álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada. De fato, $K\langle Y, Z\rangle$ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural

$$K\langle Y, Z\rangle = K\langle Y, Z\rangle_0 \oplus K\langle Y, Z\rangle_1,$$

onde $K\langle Y, Z\rangle_0$ (respectivamente $K\langle Y, Z\rangle_1$) é o subespaço gerado por todos os monômios que contem um número par (respectivamente ímpar) de variáveis de Z.

Agora podemos definir identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Definição 2.27. *Seja $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in K\langle Y, Z\rangle$ e seja $R = R_0 \bigoplus R_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. O polinômio f é uma identidade polinomial $\mathbb{Z}_2$-graduada da álgebra R se $f(r_1, \ldots, r_n, r'_1, \ldots, r'_m) = 0$ para todos $r_1, \ldots, r_n \in R_0$ e $r'_1, \ldots, r'_m \in R_1$.*

Exemplo 2.28. *A álgebra de Grassmann H satisfaz as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas $[y_1, y_2]$ e $[y_1, z_1]$, pois os elementos de H_0 são centrais em H.*

As seguintes proposições mostram que H satisfaz outras identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Proposição 2.29. *A álgebra de Grassmann H satisfaz a identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada $z_1z_2 + z_2z_1$.*

Demonstração. O resultado segue da igualdade

$$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l} = (-1)^{kl}e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l}e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}.$$

De fato, todo elemento de H_1 é combinação linear de monômios de comprimento ímpar e se k e l são ímpares, então lk é ímpar. □

Proposição 2.30. *A álgebra de Grassmann H satisfaz a identidade y_1^p.*

Demonstração. Seja $u = m_1 + m_2$, onde m_1 e m_2 são monômios de comprimento par em H. Como m_1 e m_2 comutam temos

$$\begin{aligned} u^p &= (m_1 + m_2)^p \\ &= m_1^p + \alpha_1 m_1^{p-1}m_2 + \ldots + \alpha_{p-1}m_1m_2^{p-1} + m_2^p, \end{aligned}$$

onde $\alpha_i = \binom{p}{i}$, $i = 1, \ldots, p-1$. Como a característica de K é p e os α_i são múltiplos de p, temos que $u^p = m_1^p + m_2^p = 0$. Procedendo por indução, seja $u = m_1 + \ldots + m_k \in H$,

$k > 2$ onde $m_1, \ldots, m_k$ são monômios de comprimento par em H. Suponha que $(u')^p = 0$, onde $u' = m_1 + \ldots + m_{k-1}$. Assim

$$\begin{aligned} u^p &= (u' + m_k)^p \\ &= (u')^p + m_k^p \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como todo elemento de H_0 é combinação linear de monômios de comprimento par, o resultado segue. $\square$

Agora, como $K\langle Y, Z\rangle$ é a álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, dada uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $R = R_0 \bigoplus R_1$, toda aplicação

$$\begin{aligned} Y \cup Z &\to R \\ y_i &\mapsto g_i^{(0)} \\ z_i &\mapsto g_i^{(1)} \end{aligned}$$

onde $g_i^{(0)} \in R_0$ e $g_i^{(1)} \in R_1$, pode ser estendida de maneira única a um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado $K\langle Y, Z\rangle \to R$.

Definição 2.31. *Seja I um ideal bilateral $\mathbb{Z}_2$-graduado de $K\langle Y, Z\rangle$. O ideal I é um T_2-ideal se $\phi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de $K\langle Y, Z\rangle$.*

Dada uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada R, seja

$$T_2(R) = \{f \in K\langle Y, Z\rangle | f \text{ é identidade } \mathbb{Z}_2\text{-graduada de } R\}.$$

O ideal $T_2(R)$ é um T_2-ideal. Também $T_2(R) = \bigcap_{\phi \in \Omega} \ker(\phi)$, onde Ω é o conjunto de todos os homomorfismos $\mathbb{Z}_2$-graduados de $K\langle Y, Z\rangle$ em R.

Definição 2.32. *Seja I um T_2-ideal de $K\langle Y, Z\rangle$. A variedade de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas determinada por I é a classe de todas as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas R tais que $I \subseteq T_2(R)$.*

Em álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas, também temos a existência de álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Proposição 2.33. *Seja $K\langle Y, Z\rangle$ a álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada. Seja $\mathcal{V}_I$ a variedade determinada por um T_2-ideal $I \in K\langle Y, Z\rangle$. Então $K\langle Y, Z\rangle/I$ é uma álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, livremente gerada por $\overline{Y} \cup \overline{Z} = \{y + I, z + I \mid y \in Y, z \in Z\}$, na classe $\mathcal{V}_I$.*

Demonstração. A demonstração é análoga ao caso de álgebras não-graduadas. □

Logo, se R é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada que pertence à variedade $\mathcal{V}_I$, então toda aplicação

$$\begin{aligned} \overline{Y} \cup \overline{Z} &\to R \\ y_i + I &\mapsto g_i^{(0)} \\ z_i + I &\mapsto g_i^{(1)} \end{aligned}$$

onde $g_i^{(0)} \in R_0$, $g_i^{(1)} \in R_1$, pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas $K\langle Y, Z\rangle/I \to R$.

O próximo teorema mostra como o conhecimento das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas pode ajudar a encontrar as identidade ordinárias de uma dada álgebra R.

Teorema 2.34. *Sejam $R = R_0 \oplus R_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e $T_2(R)$ o T_2-ideal das identidades de R. Seja $\mathcal{D}$ a subálgebra de $K\langle Y, Z\rangle/T_2(R)$ gerada por $x_i + T_2(R)$ onde $x_i = y_i + z_i$. Então $\mathcal{D}$ é a álgebra relativamente livre da variedade determinada por R, isto é, $\mathcal{D} \simeq K\langle X\rangle/T(R)$.*

Demonstração. Sejam $T_2 = T_2(R)$ e $X + T_2 = \{x_i + T_2\}$. Primeiro vamos mostrar que toda aplicação $X + T_2 \to R$ pode ser estendida a um homomorfismo $\mathcal{D} \to R$. Suponha então que temos uma aplicação

$$\begin{aligned} \theta : X + T_2 &\to R \\ x_i + T_2 &\mapsto g_i \end{aligned}$$

Como $g_i \in R$, $g_i = g_i^{(0)} + g_i^{(1)}$, onde $g_i^{(0)}$ e $g_i^{(1)}$ pertencem a parte par e ímpar de R, respectivamente. Defina o homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado

$$\begin{aligned} \phi : K\langle Y, Z\rangle/T_2 &\to R \\ y_i + T_2 &\mapsto g_i^{(0)} \\ z_i + T_2 &\mapsto g_i^{(1)} \end{aligned}$$

A restrição de ϕ a $\mathcal{D}$, $\phi|_{\mathcal{D}}$, é um homomorfismo. Além disso, $\phi(x_i + T_2) = g_i$, isto é, $\phi|_{\mathcal{D}}$ estende θ.

Vemos que todo homomorfismo de $\mathcal{D} \to R$ é restrição de um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado $K\langle Y, Z\rangle/T_2 \to R$. Também, todo homomorfismo $K\langle Y, Z\rangle/T_2 \to R$ define um homomorfismo $\mathcal{D} \to R$. Logo,

$$\bigcap_{\theta:\mathcal{D}\to R} Ker(\phi) \subseteq \bigcap_{\phi:K\langle Y,Z\rangle/T_2\to R} Ker(\phi) = 0$$

onde $\{\theta : \mathcal{D} \to R\}$ são todos os homomorfismos de $\mathcal{D}$ em R e $\{\phi : K\langle Y, Z\rangle/T_2 \to R\}$ são todos homomorfismos $\mathbb{Z}_2$-graduados de $K\langle Y, Z\rangle/T_2$ em R. Note que essa última igualdade é zero porque $K\langle Y, Z\rangle/T_2$ é a álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_2$-graduada da variedade determinada por R. Mas

$$\bigcap_{\theta:\mathcal{D}\to R} Ker(\phi) = 0$$

implica que $\mathcal{D} \simeq K\langle X\rangle/T(R)$. $\square$

Capítulo 3

Álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão infinita

Neste capítulo, estudaremos a álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão infinita sobre um domínio de integridade K de característica prima $p > 2$. Demonstraremos nosso resultado principal, que diz que a álgebra relativamente livre da variedade de álgebras associativas determinada por $T(H)$ pode ser mergulhada em H. Faremos isso exibindo um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado injetor de $K\langle Y, Z\rangle/T_2(H)$ em H. A seguir, se $\mathcal{D}$ é a subálgebra de $K\langle Y, Z\rangle/T_2(H)$ gerada por $x_i + T_2(H)$, onde $x_i = y_i + z_i$, então $\mathcal{D} \simeq K\langle X\rangle/T(H)$, isto é, $\mathcal{D}$ é a álgebra relativamente livre da variedade determinada por $T(H)$. Mostraremos que a subálgebra $\mathcal{D}$ pode ser mergulhada em H. Usando esse mergulho, encontraremos de forma simples um conjunto gerador para o T-ideal das identidades ordinárias de H e uma K-base para o K-módulo livre $K\langle X\rangle/T(H)$, resultados já obtidos em [8] e [24], respectivamente, quando K é um corpo.

3.1 Identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de H

Seja K um domínio de integridade de característica prima $p > 2$. Sejam Y e Z conjuntos infinitos enumeráveis disjuntos e $K\langle Y, Z\rangle$ a K-álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada. Definimos $\mathcal{A} = K\langle Y, Z\rangle/T_2$, onde T_2 é o T_2-ideal de $K\langle Y, Z\rangle$ gerado pelos seguintes polinômios:

$$[y_1, y_2], \quad [y_1, z_1], \quad z_1z_2 + z_2z_1, \quad y_1^p. \tag{3.1}$$

É fácil verificar que um conjunto gerador de $\mathcal{A}$ visto como K-módulo é formado pelos monômios

$$y_{i_1}^{m_1}\cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1}\cdots z_{j_l} + T_2, \tag{3.2}$$

onde $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_l$; $0 < m_1, \ldots, m_k < p$; $k, l \geq 0$ e $k + l > 0$. De fato, uma K-base do K-módulo livre $K\langle Y, Z\rangle$ é formada por todos os monômios em Y e Z. As relações $[y_1, y_2]$ e $[y_1, z_1]$ significam que os elementos $y_i + T_2$ são centrais em $\mathcal{A}$ e a relação $z_1 \circ z_2$ implica que os elementos $z_i + T_2$ anti-comutam e que $z_i^2 + T_2 = 0$. Portanto se $u = u(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}, z_{j_1}, \ldots, z_{j_l})$ é um monômio de $K\langle Y, Z\rangle$, então podemos reordenar as variáveis de $u + T_2$ de modo que

$$u + T_2 = y_{i_1}^{m_1}\cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1}\cdots z_{j_l} + T_2,$$

onde $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_l$; $0 < m_1, \ldots, m_k < p$; $k, l \geq 0$ e $k + l > 0$.

Agora escreveremos uma base para H visto como K-módulo livre da seguinte forma. Dividimos os geradores de H em dois subconjuntos

$$e_1, e_2, \ldots; f_1, f_2, \ldots.$$

Definimos a seguinte ordem nos geradores:

$$e_1 < e_2 < e_3 < \ldots; \; f_1 < f_2 < f_3 < \ldots; \; e_i < f_j, \text{ para todos } i, j.$$

Logo, o conjunto

$$\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} f_{j_1} f_{j_2}\cdots f_{j_l} \;\mid\; i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_l, k + l > 0\}$$

forma uma base para H visto como K-módulo livre.

No capítulo 2 vimos que H, como álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, satisfaz as identidades (3.1). Assim, H pertence à variedade determinada por T_2. Vamos demonstrar o seguinte teorema (ver introdução).

Teorema 1.4 *Seja K um domínio de integridade de característica $p > 2$. A álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_2$-graduada $\mathcal{A}$, da variedade determinada por T_2, pode ser imersa em H, isto é, $\mathcal{A} \subset H$.*

Demonstração. Demonstraremos esse teorema exibindo um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado injetor de $\mathcal{A}$ em H. Seja

$$\begin{aligned}
&\phi : \mathcal{A} \longrightarrow H \\
&\phi(z_i + T_2) = f_i \\
&\phi(y_i + T_2) = e_{\lambda_i+1}e_{\lambda_i+2} + e_{\lambda_i+3}e_{\lambda_i+4} + \ldots + e_{\lambda_i+(2p-3)}e_{\lambda_i+(2p-2)},
\end{aligned}$$

onde $\lambda_i = (i-1)(2p-2)$. Note que basta definirmos ϕ nos geradores livres de $\mathcal{A}$, pois H pertence a variedade de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas determinada por T_2 e $\mathcal{A}$ é a álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_2$-graduada dessa variedade.

Primeiro, para $m < p$, $\phi(y_i + T_2)^m$ é combinação linear de elementos da K-base de H de comprimento $2m$,

$$e_{r_1}e_{r_2}\cdots e_{r_{2m-1}}e_{r_{2m}}$$

onde $r_j \in \{\lambda+1, \lambda+2, \ldots, \lambda+(2p-2)\}$, $r_1 < \ldots < r_{2m}$.

Suponha que $\phi(\sum \alpha_s u_s + T_2) = 0$, onde

$$u_s + T_2 = y_{i_{s1}}^{m_{s1}} \cdots y_{i_{sk}}^{m_{sk}} z_{j_{s1}} \cdots z_{j_{sl}} + T_2$$

são monômios no conjunto (3.2) e $\alpha_s \in K$. Assim

$$\begin{aligned}
\phi(u_s + T_2) &= (\sum_{r(1)} \alpha_{r1} w_{i_{r(1)}}) \cdots (\sum_{r(k)} \alpha_{r(k)} w_{i_{r(k)}}) f_{j_{s1}} \cdots f_{j_{sl}} \\
&= \sum \alpha_{(r(1),\ldots,r(k))} w_{i_{r(1)}} \cdots w_{i_{r(k)}} f_{j_{s_1}} \cdots f_{j_{s_l}}
\end{aligned}$$

onde $w_{i_{r(j)}}$ são monômios da K-base de H em $e_{\lambda_{i_{sj}}+1}, e_{\lambda_{i_{sj}}+2}, \ldots, e_{\lambda_{i_{sj}}+(2p-3)}, e_{\lambda_{i_{sj}}+(2p-2)}$, de comprimento $2m_{sj}$, com $\lambda_{i_{sj}} = (i_{sj}-1)(2p-2)$. Logo os elementos $w_{i_{r(1)}} \cdots w_{i_{r(k)}} f_{j_{s_1}} \cdots f_{j_{s_l}}$ estão na base linear de H, pois cada $w_{r(j)}$ depende dos índices i_{sj}, que estão ordenados. Além disso, cada w_{rj} também depende do expoente m_{sj}. Com isso temos que os monômios $w_{i_{r(1)}} \cdots w_{i_{r(k)}} f_{j_{s_1}} \cdots f_{j_{s_l}}$ são unicamente determinados por $u_s + T_2$, isto é, eles são linearmente independentes em H.

$$\begin{aligned}
\phi(\sum \alpha_s u_s + T_2) &= \sum \alpha_s (\sum \alpha_{(r(1),\ldots,r(k))} w_{i_{r(1)}} \cdots w_{i_{r(k)}} f_{j_{s_1}} \cdots f_{j_{s_l}}) \\
&= \sum \alpha_s \alpha_{(r(1),\ldots,r(k))} w_{i_{r(1)}} \cdots w_{i_{r(k)}} f_{j_{s_1}} \cdots f_{j_{s_l}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

implica que $\alpha_s = 0$, pois os $w_{i_{r(1)}} \cdots w_{i_{r(k)}} f_{j_{s_1}} \cdots f_{j_{s_l}}$ são distintos e pertencem a base de H, e os $\alpha_{(r(1),\ldots,r(k))} \neq 0$. Logo, ϕ é injetora. $\square$

Os seguintes resultados provavelmente são bem conhecidos quando K é um corpo, mas não conseguimos encontrar as referências.

Corolário 3.1. *$\mathcal{A}$ é um K-módulo livre com uma K-base formada pelos monômios*

$$y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_l} + T_2,$$

onde $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_l$; $0 < m_1, \ldots, m_k < p$; $k, l \geq 0$ e $k + l > 0$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, as imagens dos monômios $y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_l} + T_2$ pela ϕ são linearmente independentes sobre K em H. Como eles são geradores de $\mathcal{A}$, eles são linearmente independentes sobre K em $\mathcal{A}$. $\square$

Corolário 3.2. *As identidades (3.1) formam uma conjunto gerador para o T_2-ideal das identidades de H, isto é, $T_2(H) = T_2$.*

Demonstração. Como $\mathcal{A} \subseteq H$ pelo teorema anterior, temos que $T_2(H) \subseteq T_2(\mathcal{A}) = T_2$. Mas H satisfaz (3.1), logo $T_2 \subseteq T_2(H)$. Assim, $T = T_2(H)$. $\square$

3.2 Identidades de H

Nessa seção, usaremos o Teorema 1.4 para encontrar uma base para as identidades ordinárias de H e uma K-base para o quociente $K\langle X\rangle/T(H)$. O T-ideal das identidades de H já foi descrito em [8] por Chiripov e Siderov quando K é um corpo.

Seja V o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios $[x_1, x_2, x_3]$ e x^p. O seguinte lema é bem conhecido quando K é um corpo. Mas o lema continua verdadeiro mesmo quando K é domínio de integridade, e a demonstração permanece a mesma (ver, por exemplo, [10]).

Lema 3.3. *Seja K um domínio de integridade de característica $p > 2$. Para todos $g_1, g_2, g_3, g_4 \in K\langle X\rangle$, temos o seguinte:*

i) Os elementos $[g_1, g_2] + V$ são centrais em $K\langle X\rangle/V$.

ii) $[g_1, g_2][g_3, g_4] + V = -[g_1, g_3][g_2, g_4] + V$.

iii) $[g_1, g_2][g_2, g_3] + V = V$.

Usando esse lema, podemos encontrar um conjunto gerador para $K\langle X\rangle/V$.

Proposição 3.4. *Um conjunto gerador de $K\langle X\rangle/V$ visto como K-módulo é*

$$x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + V,$$

onde $k \geq 0, l \geq 0, k + l > 0, i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_k, 0 < m_i < p$.

Demonstração. De fato, uma base de $K\langle X\rangle$ é composta por todos os monômios

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

onde $i_1, \ldots, i_k$ são inteiros positivos. Como $[x_{i_1}, x_{i_2}] + V$ é central em $K\langle X\rangle$,

$$\begin{aligned} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} + V &= (x_{i_2} x_{i_1} + [x_{i_1}, x_{i_2}]) x_{i_3} \cdots x_{i_k} + V \\ &= x_{i_2} x_{i_1} x_{i_3} \cdots x_{i_k} + [x_{i_1}, x_{i_2}] x_{i_3} \cdots x_{i_k} + V \\ &= x_{i_2} x_{i_1} x_{i_3} \cdots x_{i_k} + x_{i_3} \cdots x_{i_k} [x_{i_1}, x_{i_2}] + V \end{aligned}$$

Usando esse procedimento várias vezes e o lema 3.3, podemos escrever cada monômio $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} + V$ como combinação linear de polinômios do tipo

$$x_{i'_1}^{m_1} \cdots x_{i'_k}^{m_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + V$$

onde $i'_1 < \ldots < i'_k$. A seguir, usando os itens (ii) e (iii) do lema (3.3), podemos ordenar os índices da parte comutador

$$[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + V$$

de modo que $j_1 < \ldots < j_{2l}$. Assim podemos escrever o monômio $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} + V$ como uma combinação linear de polinômios

$$x_{i'_1}^{m_1} \cdots x_{i'_k}^{m_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + V$$

onde $i'_1 < \ldots < i'_k$, $j_1 < \ldots < j_{2l}$, $m_1, \ldots, m_k < p$, $k + l > 0$, $k, l \geq 0$. $\square$

Agora seja $\mathcal{D}$ a subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada por $x_i + T_2(H)$, onde $x_i = y_i + z_i$. Como já vimos, D é a álgebra relativamente livre da variedade determinada por H. Como isso temos o teorema (ver introdução).

Teorema 1.1 *A álgebra $\mathcal{D}$ pode ser mergulhada em H, isto é, $\mathcal{D} \subset H$.*

Demonstração. De fato $\mathcal{D} \simeq K\langle X\rangle/T(H)$ e $\mathcal{D} \subset K\langle Y, Z\rangle/T_2(H) \subset H$. □

Mostraremos que $\mathcal{D}$ tem uma base semelhante ao conjunto gerador de $K\langle X\rangle/V$.

Proposição 3.5. *Os elementos de $\mathcal{D}$ da forma*

$$x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + T_2, \tag{3.3}$$

onde $k \geq 0, l \geq 0, k + l > 0, i_1 < \ldots < i_k, j_i < \ldots < j_k, 0 < m_i < p$, são linearmente independentes em $\mathcal{D}$.

Demonstração. Primeiro, note que como a característica de K é p e $y_i + T_2$ e $z_i + T_2$ comutam em $\mathcal{A}$, temos que $x_i^p + T_2 = (y_i + z_i)^p + T_2 = y_i^p + z_i^p + T_2 = 0$. Também, para $m < p$, $x_i^m + T_2 = y_i^m + m y_i^{m-1} z_i + T_2 \neq 0$ em $\mathcal{A}$. Assim,

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2] + T_2 &= [y_1 + z_1, y_2 + z_2] + T_2 \\
&= [y_1, y_2] + [y_1, z_2] + [z_1, y_2] + [z_1, z_2] + T_2 \\
&= 2z_1 z_2 + T_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + T_2 = 2^l y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_{2l}} + \cdots + T_2.$$

Note que $y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_{2l}}$ tem grau total nas varáveis Y igual a $m_1 + \ldots + m_k$ e todos os outros monômios na soma do segundo membro da equação tem grau total nas variáveis Y menor que $m_1 + \ldots + m_k$. Chamaremos $y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_{2l}} + T_2$ de monômio líder. Note que dois elementos distintos do tipo (3.3) tem monômios líderes distintos.

Se tivermos uma combinação linear de elementos (3.3), no conjunto dos monômios líderes $y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_{2l}} + T_2$ que aparecem nessa combinação linear, considere a seguinte ordem: $u_1 + T_2 > u_2 + T_2$ se no monômio u_1, o grau total nas variáveis Y é maior que o grau total nas variáveis Y do monômio u_2. Se o grau total nas variáveis Y de u_1 e

u_2 são iguais, $u_1 + T_2 > u_2 + T_2$ se o grau total nas variáveis Z de u_1 é maior que o grau total nas variáveis Z de u_2. Por exemplo, $y_1^2 y_2 + T_2 > y_3 y_4 + T_2$ e $y_1^2 y_3 z_1 + T_2 < y_1^2 y_2 + T_2$.

Como os monômios $u = y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_{2l}} + T_2$ são linearmente independentes em $\mathcal{A}$ e não podem ser combinação linear de monômios $u' + T_2$ com $u' < u$, temos que os coeficientes que multiplicam esses monômios devem ser zero. Logo, os elementos (3.3) são linearmente independentes. $\square$

Proposição 3.6. *A álgebra $\mathcal{D}$ satisfaz as identidades $[x_1, x_2, x_3]$ e x_1^p.*

Demonstração. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) + T_2 \in \mathcal{D}$. Como $x_i = y_i + z_i$, podemos escrever $f + T_2 = f^{(0)} + f^{(1)} + T_2$, onde $f^{(0)}$ pertence a parte par e $f^{(1)}$ pertence a parte ímpar de $K\langle Y, Z\rangle$. Seja $f_1 + T_2, f_2 + T_2, f_3 + T_2 \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}
[f_1, f_2, f_3] + T_2 &= [f_1^{(0)} + f_1^{(1)}, f_2^{(0)} + f_2^{(1)}, f_3] + T_2 \\
&= [2 f_1^{(1)} f_2^{(1)}, f_3] + T_2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $f_1^{(1)} f_2^{(1)}$ pertence a parte par de $K\langle Y, Z\rangle / T_2$. Também,

$$\begin{aligned}
f_1^p + T_2 &= (f_1^{(0)} + f_1^{(1)})^p + T_2 \\
&= (f_1^{(0)})^p + (f_1^{(1)})^p + T_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Assim, pelas proposições 3.5 e 3.4, concluímos que (3.3) formam uma base de $\mathcal{D}$.

Considere agora o seguinte homomorfismo,

$$\begin{aligned}
K\langle X\rangle &\longrightarrow \mathcal{D} \\
x_i &\mapsto x_i + T_2,
\end{aligned}$$

isto é, $f(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) + T_2$. Pela proposição 3.6 , V está contido no núcleo desse homomorfismo. Logo, o homomorfismo

$$\begin{aligned}
\Psi : K\langle X\rangle / V &\longrightarrow \mathcal{D} \\
f(x_1, \ldots, x_n) + V &\mapsto f(x_1, \ldots, x_n) + T_2.
\end{aligned}$$

está bem definido.

Mas então,

$$\begin{aligned} &\Psi : K\langle X\rangle/V \longrightarrow \mathcal{D} \\ &x_{i_1}^{m_1}\cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\cdots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]+V \mapsto x_{i_1}^{m_1}\cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\cdots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]+T_2. \end{aligned}$$

leva geradores de $K\langle X\rangle/V$ em base de $\mathcal{D}$. Portanto, Ψ é um isomorfismo.

Com isso, temos os seguintes corolários do teorema (1.1).

Corolário 1.2 *Seja H a álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão infinita sobre um domínio de integridade de característica $p > 2$. O conjunto das identidades de H é o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por $[x_1, x_2, x_3]$ e x^p.*

Demonstração. De fato, $K\langle X\rangle/V \simeq \mathcal{D} \simeq K\langle X\rangle/T(H)$. Logo $T(H) = V$. □

Obtemos então uma demonstração simples do teorema que já foi demonstrado por Chiripov e Siderov em [8] quando K é um corpo.

Corolário 1.3 *$K\langle X\rangle/V$ é um K-módulo livre com uma K-base formada pelos polinômios*

$$x_{i_1}^{m_1}\cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\cdots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]+V, \tag{3.4}$$

onde$k \geq 0, l \geq 0, k+l > 0, i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_k, 0 < m_i < p.$

3.3 Polinômios Centrais de H

Nessa seção encontraremos o T-subespaço de polinômios centrais de H. Usaremos vários resultados de [6]. Mostraremos também que o T-subespaço de polinômios centrais de H não é finitamente gerado como T-subespaço.

Começamos observando que

Lema 3.7. *V é um T-ideal multi-homogêneo.*

Demonstração. De fato, como todo polinômio de $K\langle X\rangle/V$ pode ser escrito como combinação linear de elementos da forma (3.4), temos que $K\langle X\rangle/V$ é graduado pelos seus multi-graus. □

Com isso temos

Lema 1. *O T-subespaço de polinômios centrais de H, $C(H)$, é multi-homogêneo.*

Demonstração. Seja $f \in C(H)$. Decomponha $f = \sum f_i$ como soma de suas componentes multi-homogêneas. Então

$$[f, x_1] = \sum [f_i, x_1] \in T(H).$$

Como as componentes multi-homogêneas de $[f, x_1]$ são $[f_i, x_1]$, temos que $[f_i, x_1] \in T(H)$. Assim $f_i \in C(H)$. □

Os lemas 3.8, 3.9, 3.10 e o teorema 3.13 que apresentaremos a seguir podem ser encontrados em [6]. Embora estamos considerando K um domínio de integridade de característica $p > 2$, as demonstrações são as mesmas.

Lema 3.8. *Seja K um domínio de integridade de característica $p > 2$ e seja $g = g(x_3, \ldots, x_l) \in K\langle X\rangle$ um polinômio que não depende de x_2. Suponha que $x_2 g + V$ é central em $K\langle X\rangle/V$. Então $g \in V$.*

Demonstração. Primeiro, como $x_2 g + V$ é central em $K\langle X\rangle/V$, temos que $0 = [x_1, x_2 g] + V = x_2[x_1, g] + [x_1, x_2]g + V$. Assim,

$$x_2[x_1, g] + V = -[x_1, x_2]g + V.$$

Suponha que $g + V = \sum_t \beta_t b_t$, onde $\beta \in K$ e b_t são elementos distintos da forma (3.4). Como $g = g(x_3, \ldots, x_l)$ não depende de x_1 e x_2, temos que os elementos b_t também não dependem. Para cada t,

$$[x_1, b_t] + V = \sum_k \alpha_k^{(t)} c_k^{(t)},$$

onde $\alpha_t \in K$ e $c_k^{(t)}$ são elementos da forma (3.4) que não dependem de x_2. Pelo lema 3.3, podemos assumir que $j_1 = 1$ na expressão (3.4). Segue que

$$x_2[x_1, g] + V = \sum_t \sum_k \alpha_k^{(t)} x_2 c_k^{(t)}.$$

Note que para cada t e k, $x_2c_k^{(t)}$ é um elemento da forma (3.4) com $i_1 = 2$ e $2 \notin \{j_1, \ldots, j_{2l}\}$. Logo, $x_2[x_1, g] + V$ é combinação linear de elementos da forma (3.4),

$$x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + V,$$

tal que x_2 está contido na parte não-comutador $x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k}$ e a parte comutador

$$[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]$$

não depende de x_2.

Por outro lado, $[x_1, x_2]g + V = \sum_t \beta_t[x_1, x_2]b_t$. Como os elementos b_t não dependem de x_1 e x_2, e $[x_1, x_2] + V$ é central em $K\langle X\rangle/V$, os produtos $[x_1, x_2]b_t$ são elementos distintos da forma (3.4). Logo, $[x_1, x_2]g + V$ é uma combinação linear de elementos da forma (3.4) com $j_2 = 2$ e $2 \notin \{i_1, \ldots, i_{2k}\}$. Em outras palavras, $[x_1, x_2]g + V$ é uma combinação linear de elementos da forma (3.4) com x_2 contido na parte comutador do produto e a parte não-comutador não depende de x_2. Mas os elementos da forma (3.4) formam uma base de $K\langle X\rangle/V$, assim devemos ter

$$x_2[x_1, g + V] = -[x_1, x_2]g + V = 0.$$

Portanto, $\sum_t \beta_t[x_1, x_2]b_t = [x_1, x_2]g + V = 0$. Assim, $\beta_t = 0$ para todo t e $g + V = \sum_t \beta_t b_t = 0$, isto é, $g \in V$. □

Lema 3.9. *Seja K um domínio de integridade de característica $p > 2$. Suponha que $f = f(x_2, \ldots, x_l) \in K\langle X\rangle$ é um polinômio homogêneo de grau 1 em x_2 e que $f+V$ é central em $K\langle X\rangle/V$. Então $f + V$ pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1, x_2] + V$.*

Demonstração. Seja $f = \sum_i \alpha_i a_i x_2 b_i$ onde $\alpha_i \in K$ e a_i, b_i são monômios. Como $ax_2b = x_2ab + [a, x_2b]$, temos

$$f = x_2 g(x_3, \ldots, x_l) + h(x_1, \ldots, x_l)$$

onde $h(x_1, \ldots, x_l) = \sum_i \alpha_i[a_i, x_2b_i]$ pertence ao T-espaço gerado por $[x_1, x_2]$ e $g = g(x_3, \ldots, x_l)$ não depende de x_2. Mas como $f + V$ e $h + V$ são centrais em $K\langle X\rangle/V$, temos que $x_2g + V$ também é central. Pelo lema anterior, $g \in V$. Segue que

$$f + V = h + V.$$

Assim, $f+V$ pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1,x_2]+V$. $\square$

Lema 3.10. *Suponha que $char(K)=p>2$ e seja $f(x_2,\dots,x_l)\in K\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau m em x_2, $0<m<p$. Suponha que $f+V$ é central em $K\langle X\rangle/V$. Então $f+V$ pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1,x_2]+V$.*

Demonstração. Seja $h=h(x'_1,\dots,x'_m,x_3,\dots,x_l)$ a componente homogênea de $f(x'_1+\dots+x'_m,x_3,\dots,x_l)$ que é multilinear com relação a $x'_1,\dots,x'_m$. Como $f+V$ é central em $K\langle X\rangle/V$, assim é $h+V$. Também, como

$$h(x_2,\dots,x_2,x_3,\dots,x_l)=m!f(x_2,x_3,\dots,x_l),$$

é suficiente mostrar que $h+V$ pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1,x_2]+V$. Mas

$$h=h(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+l})$$

é homogêneo de grau 1 em x_2. O resultado segue pelo lema anterior. $\square$

Agora seja C o K-submódulo de $K\langle X\rangle$ gerado por $[g_1,g_2]$, onde g_1,g_2 são monômios. Temos os seguintes lemas.

Lema 3.11. *C é gerado como K-módulo por todos os comutadores $[x,g]$, onde g é um monômio de $K\langle X\rangle$ e $x\in X$.*

Demonstração. Seja C' o K-submódulo de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os comutadores $[x,g]$, onde g é um monômio de $K\langle X\rangle$ e $x\in X$. Então $C'\subseteq C$. Para provar a inclusão $C\subseteq C'$, considere a seguinte igualdade em $K\langle X\rangle$:

$$[ax,b]+[xb,a]+[ba,x]=0$$

onde $a,b\in K\langle X\rangle$ e $x\in X$. Logo,

$$[ax,b]+C'=[a,xb]+C'.$$

Sejam a, b monômios de $K\langle X\rangle$ onde $a = x_{i_1}\cdots x_{i_k}$, $x_i \in X$. Então

$$\begin{aligned}
[a,b] + C' &= [x_{i_1}\cdots x_{i_k}, b] + C' \\
&= [x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}, x_{i_k}b] + C' \\
&= \qquad \vdots \\
&= [x_{i_1}, x_{i_2}\cdots x_{i_k}b] + C' \\
&= C'.
\end{aligned}$$

Portanto $[a,b] \in C'$, ou seja, $C \subseteq C'$. □

Lema 3.12. *Seja $[x_{i_1}, g] \in K\langle X\rangle$ onde $x_{i_1} \in X$ e $g = x_{j_1}\cdots x_{j_k}$ é um monômio de $K\langle X\rangle$. Se $[x_{i_1}, g]$ tem grau p em relação a todas as variáveis $x_{i_1}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$, então $[x_{i_1}, g] \in V$.*

Demonstração. Usando que $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$, onde $a, b, c \in K\langle X\rangle$ temos

$$[x_{i_1}, x_{j_1}\cdots x_{j_k}] = \sum_{s=1}^{k} x_{j_1}\cdots x_{j_{s-1}}[x_{i_1}, x_{j_s}]x_{j_{s+1}}\cdots x_{j_k}.$$

Se $j_s = i_1$ então $[x_{1_1}, x_{j_s}] = 0$. Como o grau de x_{j_1} é p, suponha que $j_{s_1}, \ldots, j_{s_p} = j_1$. Em

$$\sum_{s=1}^{k} x_{j_1}\cdots x_{j_{s-1}}[x_{i_1}, x_{j_s}]x_{j_{s+1}}\cdots x_{j_k}.$$

vamos tomar apenas as parcelas onde $[x_{i_1}, x_{j_1}]$ aparece, isto é,

$$\sum_{r=1}^{p} x_{j_1}\cdots x_{j_{s_r-1}}[x_{i_1}, x_{j_1}]x_{j_{s_r+1}}\cdots x_{j_k}.$$

Temos então que, módulo V,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{p} x_{j_1}\cdots x_{j_{s_r-1}}[x_{i_1}, x_{j_1}]x_{j_{s_r+1}}\cdots x_{j_k} + V &= pg'x_{j_2}^{p-1}[x_{i_1}, x_{j_1}] + V \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde g' é obtido de g por exclusão de todas as variáveis x_{j_1}. Podemos fazer isso pois temos a igualdade

$$
\begin{aligned}
x_1x_2[x_1,x_3]+V &= (x_2x_1+[x_1,x_2])[x_1,x_3]+V \\
&= x_2x_1[x_1,x_3]+[x_1,x_2][x_1,x_3]+V \\
&= x_2x_1[x_1,x_3]+V,
\end{aligned}
$$

isto é, se uma variável aparece na parte comutador e na parte não comutador, então essa variável comuta com qualquer outra, módulo V.

Como as variáveis $x_{j_2},\ldots,x_{j_k}$ também têm grau p, podemos fazer o mesmo considerando as parcelas de $[x_{i_1},g]$ onde $[x_{i_1},x_{j_2}]$ aparece e assim por diante. Assim, $[x_{i_1},g]\in V$. □

Teorema 3.13. *O K-módulo $C(H)$ é gerado, módulo V, por*

$$
\begin{aligned}
&[g_1,g_2]+V, \\
&x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}\cdots x_{2k-1}^{p-1}[x_{2k-1},x_{2k}]x_{2k}^{p-1}+V,
\end{aligned}
$$

onde $k=1,2,\ldots$, g_1,g_2 são monômios em $K\langle X\rangle$ e $x_i\in X$ para cada i.

Demonstração. Seja $f=f(x_1,\ldots,x_l)\in C(H)$ um polinômio multi-homogêneo de grau m_i em x_i, $i=1,\ldots,l$. Então, $f+V$ é central em $K\langle X\rangle/V$. Suponha que em f, $0<m_i<p$ para algum i. Sem perda de generalidade, podemos supor que $i=1$. Logo, pelo lema anterior, $f+V$ pertence ao T-subespaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1,x_2]+V$.

Agora suponha que $m_i=p$ para todo i. Então pela proposição (3.4), $f+V$ é uma combinação linear de elementos da forma (3.4). Mas todos os elementos da forma (3.4) com $m_i=p$ para todo i são do tipo

$$x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}\cdots x_{2k-1}^{p-1}[x_{2k-1},x_{2k}]x_{2k}^{p-1}+V, \tag{3.5}$$

com $k=1,2,\ldots$.

Note que pelo lema anterior, os polinômios

$$x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}\cdots x_{2k-1}^{p-1}[x_{2k-1},x_{2k}]x_{2k}^{p-1}, \tag{3.6}$$

não pertencem à C, pois tem grau p em relação a todas as variáveis. □

Note que pelos lemas e teorema anterior temos que

$$C(H)/V = (C+V)/V \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty}(C_k+V)/V,$$

onde C é o K-submódulo gerado por $[g_1, g_2]$, onde g_1, g_2 são monômios, e C_k é o K-subespaço gerado por $x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1} \cdots x_{2k-1}^{p-1}[x_{2k-1}, x_{2k}]x_{2k}^{p-1}$ $(x_i \in X)$.

Agora demonstraremos que $C(H)$ não é finitamente gerado como um T-espaço. Começaremos com alguns lemas.

Lema 3.14. *Seja $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2)^{p-1}[x_1+x_2, x_3]x_3^{p-1}$, onde $x_1, x_2, x_3 \in X$. Então*

$$h+V = x_1^{p-1}[x_1, x_3]x_3^{p-1} + x_2^{p-1}[x_2, x_3]x_3^{p-1} + f + V,$$

onde $f+V$ pertence ao T-subespaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1, x_2]+V$.

Demonstração. Seja $g(x_1, x_2) = (x_1+x_2)^{p-1}$. Então,

$$g(x_1, x_2) = x_1^{p-1} + g_{(p-2,1)} + g_{(p-3,2)} + \ldots + g_{(1,p-2)} + x_2^{p-1},$$

onde $g_{(i,j)}$ é um polinômio em x_1, x_2 com multi-grau (i, j). Logo

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3) &= g(x_1, x_2)[x_1, x_3]x_3^{p-1} + g(x_1, x_2)[x_2, x_3]x_3^{p-1} \\ &= x_1^{p-1}[x_1, x_3]x_3^{p-1} + x_2^{p-1}[x_2, x_3]x_3^{p-1} + f(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (g_{(p-2,1)} + g_{(p-3,2)} + \ldots + g_{(1,p-2)} + x_2^{p-1})[x_1, x_3]x_3^{p-1} \\ &\quad +(x_1^{p-1} + g_{(p-2,1)} + g_{(p-3,2)} + \ldots + g_{(1,p-2)})[x_2, x_3]x_3^{p-1}. \end{aligned}$$

Como $h(x_1, x_2, x_3)+V$, $x_1^{p-1}[x_1, x_3]x_3^{p-1}+V$, $x_2^{p-1}[x_2, x_3]x_3^{p-1}+V$ são centrais em $K\langle X\rangle/V$, temos que $f(x_1, x_2, x_3)+V$ é central. Mas pelo corolário **??**, todas as componentes multi-homogêneas de $f(x_1, x_2, x_3)+V$ são centrais em $K\langle X\rangle/V$. Mas todas as componentes multi-homogêneas de $f(x_1, x_2, x_3)+V$ tem grau m em x_2 onde $0 < m < p$. Portanto, pelo lema 3.10, todas essas componentes pertencem ao T-espaço gerado por $[x_1, x_2]+V$. Assim $f(x_1, x_2, x_3)+V$ pertence ao T-espaço gerado por $[x_1, x_2]+V$ em $K\langle X\rangle/V$. $\square$

Analogamente, temos que

$$x_1^{p-1}[x_1, x_2 + x_3](x_2 + x_3)^{p-1} + V = x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1} + x_1^{p-1}[x_1, x_3]x_3^{p-1} + f + V$$

onde f pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1, x_2] + V$.

Pelo lema anterior,

$$(x_1 + x_2)^{p-1}[x_1 + x_2, x_3]x_3^{p-1} - x_1^{p-1}[x_1, x_3]x_3^{p-1} - x_2^{p-1}[x_2, x_3]x_3^{p-1} - f \in V.$$

Como V é um T-ideal, para todos f_1, f_2, f_3 em $K\langle X\rangle$, fazendo a substituição $x_1 \mapsto f_1, x_2 \mapsto f_2, x_3 \mapsto f_3$ temos

$$(f_1 + f_2)^{p-1}[f_1 + f_2, f_3]f_3^{p-1} - f_1^{p-1}[f_1, f_3]f_3^{p-1} - f_2^{p-1}[f_2, f_3]f_3^{p-1} - f' \in V.$$

onde f' pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1, x_2] + V$.

Logo, temos o seguinte corolário

Corolário 3.15. *Sejam f_1, f_2 polinômios de $K\langle X\rangle$. Então,*

$$f_1^{p-1}[f_1, f_2]f_2^{p-1} + V = \sum_i \alpha_i u_{i_1}^{p-1}[u_{i_1}, u_{i_2}]u_{i_2}^{p-1} + f + V,$$

onde u_{i_j} são monômios e f pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1, x_2] + V$.

Demonstração. Seja $f_1 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \in K\langle X\rangle$ onde u_1 e u_2 são monômios e $\beta_1, \beta_2 \in K$. Pelo que foi dito acima,

$$\begin{aligned} f_1^{p-1}[f_1, f_2]f_2^{p-1} + V &= (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2)^{p-1}[\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, f_2]f_2^{p-1} \\ &= (\beta_1 u_1)^{p-1}[\beta_1 u_1, f_2]f_2^{p-1} + (\beta_2 u_2)^{p-1}[\beta_2 u_2, f_2]f_2^{p-1} + f + V \\ &= \beta_1^p u_1^{p-1}[u_1, f_2]f_2^{p-1} + \beta_2^p u_2^{p-1}[u_2, f_2]f_2^{p-1} + f + V, \end{aligned}$$

onde f pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1, x_2] + V$.

Por indução no número de parcelas de f_1 temos que se $f_1 = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_k u_k$, onde $u_1, \ldots, u_k$ são monômios e $\beta_1, \ldots, \beta_k \in K$, então

$$f_1^{p-1}[f_1, f_2]f_2^{p-1} + V = \beta_1^p u_1^{p-1}[u_1, f_2]f_2^{p-1} + \ldots \beta_k^p u_k^{p-1}[u_k, f_2]f_2^{p-1} + f + V,$$

onde f pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1,x_2]+V$. Fazendo o mesmo para f_2, obtemos o resultado desejado. $\square$

Agora, mostraremos que os monômios u_{i_j} que aparecem no corolário acima tem grau 1, isto é, $u_{i_j}\in X$.

Lema 3.16. *$h(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2)^{p-1}[x_1x_2,x_3]x_3^{p-1}\in V$ para todos $x_1,x_2,x_3\in X$.*

Demonstração. Primeiro, como $[x_1,x_2]+V$ é central em $K\langle X\rangle/V$,

$$\begin{aligned} h+V &= (x_1x_2)^{p-1}x_1[x_2,x_3]x_3^{p-1}+(x_1x_2)^{p-1}[x_1,x_3]x_2x_3^{p-1}+V\\ &= (x_1x_2)^{p-1}x_1[x_2,x_3]x_3^{p-1}+(x_1x_2)^{p-1}x_2[x_1,x_3]x_3^{p-1}+V,\\ &= h_1+h_2+V \end{aligned}$$

onde $h_1=(x_1x_2)^{p-1}x_1[x_2,x_3]x_3^{p-1}$ e $h_2=(x_1x_2)^{p-1}x_2[x_1,x_3]x_3^{p-1}$.

Agora, como $[x_1,x_2][x_2,x_3]\in V$, temos que

$$\begin{aligned} h_1+V &= \underbrace{x_1x_2\cdots x_1x_2\cdots x_1x_2}_{(p-1)vezes}x_1[x_2,x_3]x_3^{p-1}+V\\ &= x_1x_2\cdots(x_2x_1+[x_1,x_2])\cdots x_1x_2x_1[x_2,x_3]x_3^{p-1}+V\\ &= x_1x_2\cdots x_2x_1\cdots x_1x_2x_1[x_2,x_3]x_3^{p-1}+(x_1x_2)^{p-2}x_1[x_1,x_2][x_2,x_3]x_3^{p-1}+V\\ &= x_1x_2\cdots x_2x_1\cdots x_1x_2x_1[x_2,x_3]x_3^{p-1}+V\\ &\vdots\\ &= x_2^{p-1}x_1^{p-1}x_1[x_2,x_3]x_3^{p-1}+V\\ &= x_2^{p-1}x_1^{p}[x_2,x_3]x_3^{p-1}+V\\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $x_1^p\in V$. Logo $h_1\in V$. Analogamente,mostra-se que $h_2\in V$. $\square$

Usando o mesmo método, mostra-se também que $x_1^{p-1}[x_1,x_2x_3](x_2x_3)^{p-1}\in V$ para todos $x_1,x_2,x_3\in X$. Logo, para todos os monômios u_1 e u_2 de $K\langle X\rangle$ (a menos dos monômios u_1 e u_2 de grau 1), temos que $u_1^{p-1}[u_1,u_2]u_2^{p-1}\in V$. De fato, se u_1 tem grau maior que 1, então $u_1=u_1'u_1''$, onde u' e u_1'' são monômios. Como $(x_1x_2)^{p-1}[x_1x_2,x_3]x_3^{p-1}\in V$ e V é um T-ideal, fazendo a substituição $x_1\mapsto u_1', x_2\mapsto u_1'', x_3\mapsto u_2$, onde u_2 é um monômio, temos que $u_1^{p-1}[u_1,u_2]u_2^{p-1}\in V$.

Corolário 3.17. *Sejam f_1, f_2 polinômios de $K\langle X\rangle$ tais que $f_1^{p-1}[f_1,f_2]f_2^{p-1}+V\neq 0$. Então,*

$$f_1^{p-1}[f_1,f_2]f_2^{p-1}+V=\sum_i \alpha_i x_{i_1}^{p-1}[x_{i_1},x_{i_2}]x_{i_2}^{p-1}+f+V,$$

onde $x_i\in X$ para cada i e f pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1,x_2]+V$.

Pelo corolário acima, todo elemento do T-subespaço gerado por

$$q_k(x_1,\ldots,x_{2k})=x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}\cdots x_{2k-1}^{p-1}[x_{2k-1},x_{2k}]x_{2k}^{p-1}$$

será uma combinação linear de elementos do tipo

$$x_{i_1}^{p-1}[x_{i_1},x_{i_2}]x_{i_2}^{p-1}\cdots x_{i_{2k-1}}^{p-1}[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}]x_{i_{2k}}^{p-1}+V$$

e um polinômio f, onde f pertence ao T-espaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $[x_1,x_2]+V$.

Assim, temos o seguinte teorema (Ver [1] e [6]).

Teorema 3.18. *O T-subespaço $C(H)$ dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann não é finitamente gerado como T-espaço.*

Demonstração. Seja $q_k(x_1,\ldots,x_{2k})=x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}\cdots x_{2k-1}^{p-1}[x_{2k-1},x_{2k}]x_{2k}^{p-1}$. Pelo que foi dito acima, q_l+V não pertence ao T-subespaço de $K\langle X\rangle/V$ gerado por $q_1+V,q_2+V,\ldots,q_{l-1}+V,q_{l+1}+V,q_{l+2}+V,\ldots$.Logo, $C(G^*)/V$ não é finitamente gerado como T-subespaço. $\square$

Capítulo 4

Álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão finita

Trabalharemos nesse capítulo com a álgebra de Grassmann não unitária H_n, de um K-módulo livre de dimensão n, sobre um domínio de integridade K de característica $p > 2$.

4.1 Identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de H_n

Primeiramente, observamos que como $H_n \subset H$, temos que H satisfaz as identidades

$$y_1y_2 - y_2y_1, \quad y_1z_1 - z_1y_1, \quad z_1z_2 + z_2z_1, \quad y_1^p. \tag{4.1}$$

Para encontrar as identidades de H_n, definiremos o peso de um monômio de $K\langle Y, Z\rangle$.

Definição 4.1. *Dizemos que os elementos de Y em $K\langle Y, Z\rangle$ tem peso igual a 2 e os elementos de Z tem peso igual a 1. Se u é um monômio em $K\langle Y, Z\rangle$, o peso de u é a soma dos pesos das variáveis que aparecem em u. Denotaremos o peso de u por $\rho(u)$.*

Exemplo 4.2. $\rho(y_1y_2z_3) = 5$, $\rho(y_1z_1z_2) = 4$.

Seja $f \in K\langle Y, Z\rangle$. Pelo corolário 3.1, $f + T_2(H)$ pode ser escrito unicamente como combinação linear dos elementos

$$y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_l} + T_2(H),$$

onde $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_l$; $0 < m_1, \ldots, m_k < p$; $k, l \geq 0$ e $k + l > 0$. Definimos $\rho_{min}(f + T_2(H))$ como o menor peso desses monômios $y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_l} \in K\langle Y, Z\rangle$ que aparecem em $f + T_2(H)$.

Exemplo 4.3. $\rho_{min}(y_1y_2 + y_1z_1 + T_2(H)) = 3$, *pois* $\rho(y_1y_2) = 4$ *e* $\rho(y_1z_1) = 3$.

Agora, demonstraremos que monômios com peso suficientemente grande são identidades de H_n.

Proposição 4.4. *Seja* $u = y_{i_1}^{m_1} \ldots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \ldots z_{j_l} \in K\langle Y, Z\rangle$, $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_l$, $0 < m_1, \ldots, m_k < p$, $k + l > 0$, $k, l \geq 0$. *O monômio* u *é uma identidade* $\mathbb{Z}_2$*-graduada de* H_n *se, e somente se,* $\rho(u) > n$.

Demonstração. De fato, se $\rho(u) \leq n$, faça a seguinte substituição:

$$
\begin{aligned}
y_{i_1} &\mapsto e_1e_2 + \cdots + e_{2m_1-1}e_{2m_1} \\
y_{i_2} &\mapsto e_{2m_1+1}e_{2m_1+2} + \cdots + e_{2(m_1+m_2)-1}e_{2(m_1+m_2)} \\
&\vdots \\
y_{i_k} &\mapsto e_{2(m_1+\cdots+m_{k-1})+1}e_{2(m_1+\cdots+m_{k-1})+2} + \cdots + e_{2(m_1+\cdots+m_k)-1}e_{2(m_1+\cdots+m_k)} \\
z_{j_1} &\mapsto e_{2(m_1+\cdots+m_k)+1} \\
&\vdots \\
z_{j_l} &\mapsto e_{2(m_1+\cdots+m_k)+l}.
\end{aligned}
$$

Logo $u \mapsto m_1! \cdots m_k! e_1 \cdots e_{2(m_1+\cdots+m_k)+l}$. Como

$$\rho(u) = 2(m_1 + \cdots + m_k) + l \leq n,$$

temos que u não é identidade de H_n.

Por outro lado, suponha que $\rho(u) > n$. Toda substituição dos y_i e z_j de u, por elementos pares e ímpares de H_n, respectivamente, será combinação linear de elementos da base de H_n de comprimento maior que n. Como H_n é gerada como álgebra por $e_1, \ldots, e_n$ e $e_i^2 = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, todo monômio de comprimento maior que n é igual a 0. Logo, m é uma identidade se $\rho(u) > n$. $\square$

Agora, demonstraremos o seguinte

Teorema 4.5. *$K\langle Y,Z\rangle/T_2(H_n)$ é um K-módulo livre com uma K-base formada pelos monômios,*

$$y_{i_1}^{m_1}\dots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1}\dots z_{j_l} + T_2(H_n), \tag{4.2}$$

onde $2(m_1+\cdots+m_k)+l \leq n$, $k+l>0$, $k,l \geq 0$ $i_1<\cdots<i_k$, $j_1<\cdots<j_l$, $0<m_1,\dots,m_k<p$.

Demonstração. Primeiro, K possui um subcorpo de p elementos. Portanto, como o grau de cada variável dos monômios do tipo (4.2) é menor que p, pela proposição 2.18 do capítulo 2, se uma combinação linear desses elementos está em $T_2(H)$, então cada elemento da forma (4.2) pertence a $T_2(H)$. Mas isso não pode acontecer, pela proposição anterior. Além disso, é fácil ver que esses elementos geram $K\langle Y,Z\rangle/T_2(H_n)$. Logo, os elementos do tipo (4.2) formam uma K-base de $K\langle Y,Z\rangle/T_2(H_n)$. □

Teorema 4.6. *As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de H_n é o T_2-ideal de $K\langle Y,Z\rangle$ gerado por (4.1) e pelos monômios u com $\rho(u)>n$.*

Demonstração. De fato, se $f\in T_2(H_n)$ e $f\notin T_2(H)$, f é uma combinação linear de monômios (4.2) com peso maior que n. □

Agora, seja $\mathcal{D}_n$ a subálgebra de $K\langle Y,Z\rangle/T_2(H_n)$ gerada por $x_i+T_2(H_n)$, onde $x_i = y_i+z_i$. Como $T_2(H)\subset T_2(H_n)$, temos que $\mathcal{D}_n$ também satisfaz as identidades $[x_1,x_2,x_2]$ e x_1^p.

Seja v_n o polinômio definido por

$$v_n = (\cdots((x_1\circ x_2)\circ x_3)\circ\cdots\circ x_{n-1})\circ x_n,$$

onde $x_1\circ x_2 = x_1x_2+x_2x_1$.

Proposição 4.7. *$\rho_{min}(v_{n+1}+T_2(H))>2n$ para todo $n=1,2,\dots$.*

Demonstração. Vamos demonstrar por indução em n. Primeiro, para $n=1$ temos, módulo $T_2(H)$

$$\begin{aligned} v_2 &= x_1x_2 + x_2x_1 \\ &= (y_1+z_1)(y_2+z_2) + (y_2+z_2)(y_1+z_1) \\ &= 2(y_1y_2 + y_1z_2 + y_2z_1) + z_1z_2 + z_2z_1 \\ &= 2(y_1y_2 + y_1z_2 + y_2z_1). \end{aligned}$$

Logo, $\rho_{min}(v_2 + T_2(H)) = 3$. Agora suponha que $\rho_{min}(v_n + T_2(H)) > 2n-2$. Escreva $v_n = v_n^{(0)} + v_n^{(1)}$, onde $v_n^{(0)}$ é a parte par de v_n e $v_n^{(1)}$ é a parte ímpar de v_n. Assim temos que, módulo $T_2(H)$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n \circ x_{n+1} \\ &= v_nx_{n+1} + x_{n+1}v_n \\ &= v_n(y_{n+1}+z_{n+1}) + (y_{n+1}+z_{n+1})v_n \\ &= 2(v_ny_{n+1}) + v_nz_{n+1} + z_{n+1}v_n \\ &= 2(v_ny_{n+1}) + (v_n^{(0)} + v_n^{(1)})z_{n+1} + z_{n+1}(v_n^{(0)} + v_n^{(1)}) \\ &= 2(v_ny_{n+1}) + 2(v_n^{(0)}z_{n+1}). \end{aligned}$$

Mas $\rho_{min}(v_ny_{n+1} + T_2(H)) > (2n-2)+2 = 2n$. Também,

$$\rho_{min}(v_n^{(0)} + T_2(H)) > 2n-2$$

e $\rho_{min}(v_n^{(0)} + T_2(H))$ é par, desde que monômios pares têm peso par. Portanto, $\rho_{min}(v_n^{(0)} + T_2(H)) \geq 2n$. Assim, $\rho_{min}(v_n^{(0)}z_{n+1} + T_2(H)) > 2n$. □

Assim, temos os seguintes corolários.

Corolário 4.8. *$\mathcal{D}_{2n}$ satisfaz a identidade v_{n+1}.*

Corolário 4.9. *$\mathcal{D}_{2n-1}$ satisfaz as identidades v_nx_{n+1} e $x_{n+1}v_n$.*

Demonstração. De fato, $\rho_{min}(v_n + T_2(H)) > 2n-2$. Logo

$$\rho_{min}(v_nx_{n+1} + T_2(H)) = \rho_{min}(x_{n+1}v_n + T_2(H)) > (2n-2)+1 = 2n-1.$$

□

Proposição 4.10. *Se $s = n/(2p-1)$ é um número inteiro, então $\mathcal{D}_{2n-1}$ satisfaz a identidade*

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2s-1}, x_{2s}] x_1^{p-1} \cdots x_{2s}^{p-1}.$$

Demonstração. De fato,

$$s = n/(2p-1) \Rightarrow 2(s(2p-1)) = 2n$$

e

$$\rho([x_1, x_2] \cdots [x_{2s-1}, x_{2s}] x_1^{p-1} \cdots x_{2s}^{p-1} + T_2(H)) \quad = \quad 2(s(2p-1)).$$

De fato,

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] x_1^{p-1} x_2^{p-1} + T_2(H) &= 2 z_1 z_2 (y_1^{p-1} + (p-1) y_1^{p-2} z_1)(y_2^{p-1} + (p-1) y_2^{p-2} z_2) + T_2(H) \\ &= 2 y_1^{p-1} y_2^{p-1} z_1 z_2 + T_2(H), \end{aligned}$$

logo

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2s-1}, x_{2s}] x_1^{p-1} \cdots x_{2s}^{p-1} + T_2(H) \quad = \quad 2^s y_1^{p-1} \cdots y_{2s}^{p-1} z_1 \cdots z_{2s} + T_2(H)$$

□

4.2 Identidades de H_{2n}

Seja V_{n+1} o T-ideal gerado por $V = T(H)$ e pelo polinômio v_{n+1} em $K\langle X \rangle$. Vamos começar demonstrando alguns lemas.

Lema 4.11. $[x_1 \cdots x_n, f] = \sum_{i=1}^{n} [x_i, f] x_1 x_2 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n$ *módulo $T(H)$, onde $\widehat{x_i}$ significa que x_i não aparece no produto.*

Demonstração. Vamos demonstrar usando indução sobre n. Primeiro, vamos fazer para $n = 2$.

$$\begin{aligned} [x_1 x_2, f] + T(H) &= [x_1, f] x_2 + x_1 [x_2, f] + T(H) \\ &= [x_1, f] x_2 + [x_2, f] x_1 + T(H). \end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que o comutador é central módulo $T(H)$.

Agora suponha que

$$[x_1\cdots x_{n-1},f]=\sum_{i=1}^{n-1}[x_i,f]x_1x_2\cdots\widehat{x_i}\cdots x_{n-1}.$$

Então

$$\begin{aligned}
[x_1\cdots x_n,f] &= [x_n,f]x_1\cdots x_{n-1}+[x_1\cdots x_{n-1},f]x_n\\
&= [x_n,f]x_1\cdots x_{n-1}+(\sum_{i=1}^{n-1}[x_i,f]x_1x_2\cdots\widehat{x_i}\cdots x_{n-1})x_n\\
&= [x_n,f]x_1\cdots x_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}[x_i,f]x_1x_2\cdots\widehat{x_i}\cdots x_{n-1}x_n\\
&= \sum_{i=1}^{n}[x_i,f]x_1x_2\cdots\widehat{x_i}\cdots x_n.
\end{aligned}$$

□

Como $[x_i,f]x_1x_2\cdots\widehat{x_i}\cdots x_n$ tem n fatores, $[x_1\cdots x_n,f]$ é um somatório de polinômios de n fatores.

Corolário 4.12. *$(x_1\cdots x_n)\circ x_{n+1}=2x_1\cdots x_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}[x_i,x_{n+1}]x_1x_2\cdots\widehat{x_i}\cdots x_n$ módulo $T(H)$.*

Demonstração. De fato, $(x_1\cdots x_n)\circ x_{n+1}=2x_1\cdots x_{n+1}-[x_1\cdots x_n,x_{n+1}]$. □

Proposição 4.13. *Módulo $T(H)$, temos que*

$$x_1\circ\ldots\circ x_{n+1}=2^{\eta}x_1\cdots x_{n+1}+\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_{2k}\\ i_{2k+1}<\ldots<i_{n+1}\\ 1\le k\le(n+1)/2}}\xi_{i_1\cdots i_{n+1}}2^{\eta_k}[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}]x_{i_{2k+1}}\cdots x_{n+1},$$

onde $\xi_{i_1\cdots i_{n+1}}=\pm1$, η, $\eta_k\in\mathbb{N}$.

Demonstração. A demonstração será por indução sobre n. Para $n=2$,

$$x_1\circ x_2=2x_1x_2-[x_1,x_2].$$

Suponhamos que

$$x_1 \circ \ldots \circ x_n = 2^{\eta} x_1 \cdots x_n + \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \ldots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} \xi_{i_1 \cdots i_{n+1}} 2^{\eta_k} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] x_{i_{2k+1}} \cdots x_n.$$

Então,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= (x_1 \circ \ldots \circ x_n) x_{n+1} + x_{n+1} (x_1 \circ \ldots \circ x_n) \\
&= (2^{\eta} x_1 \cdots x_n + \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \ldots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} \xi_{i_1 \cdots i_{n+1}} 2^{\eta_k} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] x_{i_{2k+1}} \cdots x_n) x_{n+1} \\
&\quad + x_{n+1} (2^{\eta} x_1 \cdots x_n + \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \ldots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} \xi_{i_1 \cdots i_{n+1}} 2^{\eta_k} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] x_{i_{2k+1}} \cdots x_n) \\
&= 2^{\eta} (x_1 \cdots x_n) \circ x_{n+1} + \\
&\quad + \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \ldots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} \xi_{i_1 \cdots i_{n+1}} 2^{\eta_k} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] ((x_{i_{2k+1}} \cdots x_n) \circ x_{n+1}) \\
&= 2^{\eta+1} x_1 \cdots x_{n+1} - 2^{\eta} \sum_{j=1}^{n} [x_j, x_{n+1}] x_1 x_2 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n + \\
&\quad + \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \ldots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} \xi_{i_1 \cdots i_{n+1}} 2^{\eta_k + 1} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] x_{2k+1} \cdots x_{n+1} - \\
&\quad - \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \ldots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} (\xi_{i_1 \cdots i_{n+1}} 2^{\eta_k} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] \sum_{j=2k+1}^{n} [x_j, x_{n+1}] x_{2k+1} x_2 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n) \\
&= 2^{\eta+1} x_1 \cdots x_{n+1} + \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_{2k'} \\ i_{2k'+1} < \ldots < i_n \\ 1 \leq k' \leq n/2}} \xi_{i_1 \cdots i_{n+1}} 2^{\eta'_k} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k'-1}}, x_{i_{2k}}] x_{i_{2k'+1}} \cdots x_{i_{n+1}}.
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.14. *Todo produto de elementos de $K\langle X \rangle$ pode ser reescrito, módulo V_{n+1}, como combinação linear de produtos com no máximo n fatores.*

Seja

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= \{x_{i_1}^{m1} \cdots x_{i_k}^{m_k} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] | i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_{2l}, \\
&\quad 0 < m_1, \ldots, m_k < p, k + l > 0, m_1 + \ldots + m_k + l \leq n\}
\end{aligned}$$

Corolário 4.15. *O conjunto* $\{b + V_{n+1} \mid b \in B_{n+1}\}$ *gera* $K\langle X\rangle/V_{n+1}$.

Demonstração. Como já vimos, módulo V, o conjunto de polinômios

$$x_{i_1}^{m1} \cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] \tag{4.3}$$

onde $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_{2l}$, $0 < m_1, \ldots, m_k < p, k + l > 0$, gera $K\langle X\rangle/V$. Como $V \subset V_{n+1}$, temos que (4.3) gera $K\langle X\rangle/V_{n+1}$. Pelo corolário 4.14, os elementos de 4.3 podem ser reescritos como combinação linear de produtos com no máximo n fatores. Logo, $\{b + V_{n+1} \mid b \in B_{n+1}\}$ gera $K\langle X\rangle/V_{n+1}$. □

Seja

$$\begin{aligned} \phi : K\langle X\rangle &\longrightarrow \mathcal{D}_{2n} \\ x_i &\mapsto x_i + T_2(H_{2n}) \end{aligned}$$

isto é, $\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n) + T_2(H_{2n})$. Pelo corolário 4.8, o T-ideal V_{n+1} está contido no núcleo de Φ. Logo,

$$\begin{aligned} \Phi : K\langle X\rangle/V_{n+1} &\longrightarrow \mathcal{D}_{2n} \\ f(x_1, \ldots, x_n) + V_{n+1} &\mapsto f(x_1, \ldots, x_n) + T_2(H_{2n}) \end{aligned}$$

está bem definido.

Proposição 4.16. *Os elementos de* $\mathcal{D}_{2n}$ *da forma*

$$b + T_2(H_{2n}), \tag{4.4}$$

onde $x_i = y_i + z_i$, *são linearmente independentes em* $\mathcal{D}_{2n}$.

Demonstração. A prova é análoga à proposição 3.5, pois

$$x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + T_2(H_{2n}) = 2^l y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_{2l}} + \cdots + T_2(H_{2n})$$

e $\rho(y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_{2l}}) = 2(m_1 + \ldots + m_k + l) \leq 2n$, isto é,

$$y_{i_1}^{m_1} \cdots y_{i_k}^{m_k} z_{j_1} \cdots z_{j_{2l}} + T_2(H_{2n}) \neq T_2(H_{2n})$$

. □

Logo, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.17. *O homomorfismo*

$$\begin{aligned}\Phi : K\langle X\rangle/V_{n+1} &\to \mathcal{D}_{2n}\\ f(x_1,\ldots,x_n)+V_{n+1} &\mapsto f(x_1,\ldots,x_n)+T_2(H_{2n})\end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Logo $K\langle X\rangle/V_{n+1} \simeq \mathcal{D}_{2n} \simeq K\langle X\rangle/T(H_{2n})$. Portanto, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.18. *O T-ideal da identidades de H_{2n} é o T-ideal gerado pelos polinômios $[x_1,x_2,x_3]$, x_1^p e v_{n+1}.*

4.3 Identidades de H_{2n-1}

Definição 4.19. *W_{n+1} é o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por $T(H)$ e pelos polinômios*

$$x_{n+1}v_n, v_nx_{n+1}$$

e se $s = n/(2p-1)$ é um número inteiro incluímos o polinômio

$$[x_1,x_2]\cdots[x_{2s-1},x_{2s}]x_1^{p-1}\cdots x_{2s}^{p-1}.$$

Considere o seguinte homomorfismo

$$\begin{aligned}\phi : K\langle X\rangle &\to \mathcal{D}_{2n-1}\\ x_i &\mapsto x_i+T_2(H_{2n-1}),\end{aligned}$$

isto é, $\phi(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(x_1,\ldots,x_n)+T_2(H_{2n-1})$.

Pelo corolário 4.9 e proposição 4.10, temos que

$$\begin{aligned}\Phi : K\langle X\rangle/W_{n+1} &\to \mathcal{D}_{2n-1}\\ f(x_1,\ldots,x_n)+W_{n+1} &\mapsto f(x_1,\ldots,x_n)+T_2(H_{2n-1})\end{aligned}$$

está bem definido, pois $W_{n+1} \subset Ker(\phi)$.

Vamos mostrar agora que Φ é um isomorfismo. Para isso, vamos demonstrar alguns fatos.

Primeiro, vamos encontrar um conjunto gerador para $K\langle X\rangle/W_{n+1}$. Como $x_{n+1}v_n$ e v_nx_{n+1} pertencem a W_{n+1}, temos que

$$v_{n+1} = x_{n+1}v_n + v_nx_{n+1} \in W_{n+1}.$$

isto é, $V_{n+1} \subset W_{n+1}$. Logo temos o seguinte lema.

Lema 4.20. *O conjunto* $\{b + W_{n+1} | b \in B_{n+1}\}$ *gera* $K\langle X\rangle/W_{n+1}$.

Demonstração. O conjunto $\{b + V_{n+1} \mid b \in B_{n+1}\}$ gera $K\langle X\rangle/V_{n+1}$. Como $V_{n+1} \subset W_{n+1}$, temos que $\{b + W_{n+1} \mid b \in B_{n+1}\}$ gera $K\langle X\rangle/W_{n+1}$. □

A partir de agora escreveremos o conjunto B_{n+1} da seguinte forma

$$\begin{aligned} B_{n+1} \;\; = \;\; & \{x_{i_1}^{\epsilon_1}\cdots x_{i_k}^{\epsilon_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\cdots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]x_{j_1}^{\delta_1}\cdots x_{j_{2l}}^{\delta_{2l}}|i_1<\ldots<i_k, j_1<\ldots<j_{2l}, \\ & 0<\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k<p, 0\le\delta_1,\ldots,\delta_{2l}<p, i_r\ne j_s(1\le r\le k, 1\le s\le 2l,)k+l>0, \\ & \epsilon_1+\ldots+\epsilon_k+\delta_1+\ldots+\delta_{2l}+l\le n\}. \end{aligned}$$

Escreveremos B_{n+1} dessa maneira, pois módulo W_{n+1}, toda variável que pertence a parte comutador comuta com qualquer outra variável. Por exemplo, módulo W_{n+1},

$$\begin{aligned} x_1x_2[x_1,x_3] &= (x_2x_1+[x_1,x_2])[x_1,x_3] \\ &= x_2x_1[x_1,x_3]+[x_1,x_2][x_1,x_3] \\ &= x_2x_1[x_1,x_3] \\ &= x_2[x_1,x_3]x_1, \end{aligned}$$

isto é, podemos colocar, módulo W_{n+1}, as variáveis que pertencem à parte comutador por último.

Como já foi dito, todo elemento de B_{n+1} tem no máximo n fatores. Considere então a seguinte definição, que pode ser encontrada em [34].

Definição 4.21. *Seja* B'_{n+1} *o subconjunto de* B_{n+1} *formado pelos elementos:*

i) $b \in B_{n+1}$ *com número de fatores menor que* n*, isto é,*

$$b = x_{i_1}^{\epsilon_1}\cdots x_{i_k}^{\epsilon_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\cdots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]x_{j_1}^{\delta_1}\cdots x_{j_{2l}}^{\delta_{2l}}$$

onde $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_{2l}$, $0 < m_1, \ldots, m_k < p, k+l > 0$ *e* $m_1+\ldots+m_k+l < n$.

ii) Se $b = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_k}^{\epsilon_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_{2l}}^{\delta_{2l}} \in B_{n+1}$ *tem* n *fatores, então* x_{i_1} *é a variável de menor índice que tem grau menor que* p*, isto é, toda variável* x_{j_t} *com* $j_t < i_1$ *tem grau* p.

O seguinte lema pode ser encontrado em [35].

Lema 4.22. *Seja* $b \in B_{n+1}$ *um elemento com* n *fatores. Então* b *pode ser reescrito, módulo* W_{n+1}*, como combinação linear de elementos de* B'_{n+1}.

Pelos dois últimos lemas temos

Proposição 4.23. *O conjunto* $\{b + W_{n+1} \mid b \in B'_{n+1}\}$ *gera* $K\langle X\rangle/W_{n+1}$.

Seja $b = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_k}^{\epsilon_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_{2l}}^{\delta_{2l}} \in B'_{n+1}$, onde b tem n fatores, isto é, $(\epsilon_1 + \ldots \epsilon_k + \delta_1 + \ldots + \delta_{2l} + l) = n$. Assim, em $\mathcal{D}_{2n-1}$,

$$b + T_2(H_{2n-1}) \quad = \quad 2^l(y_{i_1}^{\epsilon_1} + \epsilon_1 y_{i_1}^{\epsilon_1 - 1} z_{i_1}) \cdots (y_{i_k}^{\epsilon_k} + \epsilon_k y_{i_k}^{\epsilon_k-1} z_{i_k}) z_{j_1} \cdots z_{j_{2l}} y_{j_1}^{\delta_1} \cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}} + T_2(H_{2n-1}).$$

Note que o monômio de maior peso que aparece em $b + T_2(H_{2n-1})$ é

$$y_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{i_k}^{\epsilon_k} y_{j_1}^{\delta_1} \cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}} z_{j_1} \cdots z_{2l} + T_2(H_{2n-1}).$$

Como $\rho(y_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{i_k}^{\epsilon_k} y_{j_1}^{\delta_1} \cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}} z_{j_1} \cdots z_{2l}) = 2(\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_k + \delta_1 + \ldots + \delta_{2l} + l) = 2n$, temos que

$$y_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{i_k}^{\epsilon_k} y_{j_1}^{\delta_1} \cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}} z_{j_1} \cdots z_{2l} + T_2(H_{2n-1}) = 0.$$

A lista de monômios com peso igual a $2n - 1$ é

$$\begin{gathered}
2^l \epsilon_1 y_{i_1}^{\epsilon_1 - 1} y_{i_2}^{\epsilon_2} y_{i_3}^{\epsilon_3} \cdots y_{i_k}^{\epsilon_k} y_{j_1}^{\delta_1} \cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}} z_{i_1} z_{j_1} \cdots z_{2l}, \\
2^l \epsilon_2 y_{i_1}^{\epsilon_1} y_{i_2}^{\epsilon_2 - 1} y_{i_3}^{\epsilon_3} \cdots y_{i_k}^{\epsilon_k} y_{j_1}^{\delta_1} \cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}} z_{i_2} z_{j_1} \cdots z_{2l}, \\
2^l \epsilon_3 y_{i_1}^{\epsilon_1} y_{i_2}^{\epsilon_2} y_{i_3}^{\epsilon_3 - 1} \cdots y_{i_k}^{\epsilon_k} y_{j_1}^{\delta_1} \cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}} z_{i_3} z_{j_1} \cdots z_{2l}, \\
\vdots \\
2^l \epsilon_k y_{i_1}^{\epsilon_1} y_{i_2}^{\epsilon_2} y_{i_3}^{\epsilon_3} \cdots y_{i_k}^{\epsilon_k - 1} y_{j_1}^{\delta_1} \cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}} z_{i_k} z_{j_1} \cdots z_{2l}.
\end{gathered}$$

Nessa lista, escolhemos o monômio líder como sendo $y_{i_1}^{\epsilon_1-1}y_{i_2}^{\epsilon_2}y_{i_3}^{\epsilon_3}\cdots y_{i_k}^{\epsilon_k}y_{j_1}^{\delta_1}\cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}}z_{i_1}z_{j_1}\cdots z_{2l}$. Vamos mostrar que nenhum outro polinômio de $\{b+T_2(H_{2n-1})|b\in B'_{n+1}\}$ tem

$$y_{i_1}^{\epsilon_1-1}y_{i_2}^{\epsilon_2}y_{i_3}^{\epsilon_3}\cdots y_{i_k}^{\epsilon_k}y_{j_1}^{\delta_1}\cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}}z_{i_1}z_{j_1}\cdots z_{2l} \tag{4.5}$$

como monômio líder.

Primeiro, um polinômio com menos de n fatores não pode ter um monômio com peso igual a $2n-1$. De fato, se um polinômio $b+T_2(H_{2n-1})$, onde $b\in B'_{n+1}$, tem $n-1$ fatores, então o monômio de maior peso que aparece em $b+T_2(H_{2n-1})$ tem peso igual a $2n-2$.

Agora note que se (4.5) é o monômio líder de um outro polinômio $b'+T_2(H_{2n-1})$, onde b' tem n fatores, então no conjunto $\{x_{i_1},x_{j_1},\ldots,x_{j_{2l}}\}$, $2l$ variáveis pertencem à parte comutador e uma variável não pertence à parte comutador de b'. De fato, o número de $z's$ em (4.5) é $2l+1$, no qual podemos formar no máximo l comutadores usando a relação $[x_i,x_j]=2z_iz_j$. Suponha que formamos $l-1$ comutadores, digamos $[x_{j_3},x_{j_4}]\cdots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]$. Logo, a menos de múltiplo, (4.5) é

$$y_{i_1}^{\epsilon_1-1}y_{i_2}^{\epsilon_2}y_{i_3}^{\epsilon_3}\cdots y_{i_k}^{\epsilon_k}y_{j_1}^{\delta_1}\cdots y_{j_{2l}}^{\delta_{2l}}z_{i_1}z_{j_1}z_{j_2}[x_{j_3},x_{j_4}]\cdots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}].$$

Agora, com o índice i_1 sobrou $y_{i_1}^{\epsilon_1-1}z_{i_1}$. Logo $x_{i_1}^{\epsilon_1}$ tem que aparecer em $b'+T_2(H_{2n-1})$. Analogamente, $y_{j_1}^{\delta_1}z_{j_1}$ e $y_{j_2}^{\delta_2}z_{j_2}$ implica que $x_{j_1}^{\delta_1+1}$ e $x_{j_2}^{\delta_1+1}$ tem que aparecer em $b'+T_2(H_{2n-1})$, respectivamente. Assim, os seguintes fatores compõe $b'+T_2(H_{2n-1})$:

$$x_{i_1}^{\epsilon_1},x_{i_2}^{\epsilon_2},\ldots,x_{i_k}^{\epsilon_k},x_{j_1}^{\delta_1+1},x_{j_2}^{\delta_1+1},x_{j_3}^{\delta_3},\cdots,x_{j_{2l}}^{\delta_{2l}},[x_{j_3},x_{j_4}],\cdots,[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}].$$

Mas isso implica que b' tem $\epsilon_1+\ldots+\epsilon_k+(\delta_1+1)+(\delta_2+1)+\delta_3+\ldots+\delta_{2l}+(l-1)=n+1$ fatores.

Logo, (4.5) aparece em $b'+T_2(H_{2n-1})$ se no conjunto $\{x_{i_1},x_{j_1},\ldots,x_{j_{2l}}\}$, $2l$ variáveis pertencem à parte comutador e uma variável não pertence à parte comutador de b', pois b' tem n fatores.

Seja $x_t\in\{x_{i_1},x_{j_1},\ldots,x_{j_{2l}}\}$ a variável que não aparece na parte comutador de $b'+T_2(H_{2n-1})$. Se $t=i_1$, então $b'=b$. Caso contrário, temos dois casos:

i) $t<i_1$. Nesse caso x_t tem grau p. Como x_t aparece na parte não comutador de $b'+T_2(H_{2n-1})$ e $x_t^p+T_2(H_{2n-1})=0$, temos que $b'+T_2(H_{2n-1})=0$.

ii) $i_1 < t$. Nesse caso, x_{i_1} aparece na parte comutador de b' e x_t na parte não-comutador de b'. Logo x_{i_1} teria que ter grau p, o que não ocorre.

Com o que foi dito acima, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.24. *O conjunto* $\{b + T_2(H_{2n-1}) | b \in B'_{n+1}\}$ *forma uma* K*-base para a álgebra* $\mathcal{D}_{2n-1}$.

Demonstração. Basta considerarmos os elementos de $\{b + T_2(H_{2n-1}) | b \in B'_{n+1}\}$ com n fatores. Seja então

$$\sum \alpha_i b_i + T_2(H_{2n-1}) = 0$$

onde $b_i \in B'_{n+1}$ possuem n fatores. Como cada b_i tem um monômio líder de peso $2n - 1$ unicamente determinado por b_i, temos que todos os $\alpha_i's$ são iguais a zero. □

Logo, temos o seguinte corolário

Corolário 4.25. *O homomorfismo*

$$\begin{aligned} \Phi : K\langle X\rangle / W_{n+1} &\longrightarrow \mathcal{D}_{2n-1} \\ f(x_1, \ldots, x_n) + W_{n+1} &\mapsto f(x_1, \ldots, x_n) + T_2(H_{2n-1}) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Logo temos $K\langle X\rangle / W_{n+1} \simeq \mathcal{D}_{2n-1} \simeq K\langle X\rangle / W_{n+1}$. Portanto, temos

Teorema 4.26. *O* T*-ideal das identidades de* H_{2n-1} *é igual a* W_{n+1}.

Capítulo 5

Álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita

Nesse capítulo, estudaremos a álgebra de Grassmann unitária E de dimensão infinita sobre um corpo K finito. Se $|K| = q$, sabemos que $q = p^n$, onde p é a característica de K e n é um inteiro positivo. Consideraremos $p > 2$. Por [3], sabemos que o T-ideal de $K_1\langle X\rangle$ gerado por $[x_1, x_2, x_3]$ e $x_1^{qp} - x_1^p$ é o T-ideal das identidades de E. Daremos uma nova representação para álgebra $K\langle X\rangle/T(H)$, como produto tensorial de uma álgebra comutativa A e uma álgebra B. Isso nos permite dar uma demonstração simples do resultado de [3].

Sejam $U = \langle x^{qp} - x^p, [x_1, x_2, x_3]\rangle^T$ em $K_1\langle X\rangle$, $A = K_1[t_i | i \in \Lambda]/I$, onde I é o ideal gerado por $t_i^q - t_i$, e $B = K_1\langle Y\rangle/V$, onde $V = \langle y^p, [y_1, y_2, y_3]\rangle^T$ em $K\langle Y\rangle$.

Teorema 5.1. *$K_1\langle X\rangle/U \simeq A \bigotimes_K B$.*

Antes de demonstrarmos o teorema (5.1), mencionaremos alguns resultados já conhecidos.

Sejam

$$\mathcal{B} = \{x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] | i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_{2l},$$
$$0 < m_i < p, k \geq 0, l \geq 0, k^2 + l^2 > 0\}$$

e

$$\mathcal{B}' = \{x_{i'_1}^{pm'_1} \cdots x_{i'_{k'}}^{pm'_{k'}} \cdot b| \ \ b \in \mathcal{B}, 0 < m'_{i'} < q, k' \geq 0\}.$$

Seja H a álgebra de Grassmann de dimensão infinita, não unitária, sobre K. Pelo capítulo 2, sabemos que o T-ideal das identidades de H é V, e que uma base de $K\langle Y\rangle/V$ como K-espaço vetorial é $\mathcal{B}(mod \ \ V)$.

Outro resultado conhecido é que $[x_1^p, x_2] \in U$, isto é, $x_1^p + U$ é central em $K_1\langle X\rangle/U$. Logo, vemos que $\mathcal{B}'(mod \ \ U)$ gera $K_1\langle X\rangle/U$.

Proposição 5.2. *$I = \langle t_1^q - t_1\rangle^T$ em $K_1[t_i|i \in \Lambda]$.*

Demonstração. Primeiro, a incusão $I \subseteq \langle t_1^q - t_1\rangle^T$ é obvia. Seja $f \in \langle t_1^q - t_1\rangle^T$. Então,

$$f = \sum f_{i_0}(f_{i_1}^q - f_{i_1})f_{i_2}$$

onde $f_{i_0}, f_{i_1}, f_{i_2} \in K_1[t_i|i \in \Lambda]$. Desde que para dois monômios quaisquer u e v, $(u+v)^q = u^q + v^q$, temos que

$$f = \sum f_{i_0}(u_{i_1}^q - u_{i_1})f_{i_2}$$

onde u_{i_1} são monômios. Logo, para mostrar a outra inclusão, resta mostrar que para todo monômio u, $u^q - u \in I$. Faremos isso por indução no comprimento $|u|$ de u. Se $|u| = 1$, então $u = t_i$, para algum i. Logo, $u^q - u \in I$. Suponha agora que $|u| = k$ e que $u^q - u \in I$. Então,

$$(u^q - u)(t_i^q + t_i) = u^q t_i^q - ut_i + u^q t_i - ut_i^q \in I \ \ (u^q + u)(t_i^q - t_i) = u^q t_i^q - ut_i - u^q t_i + ut_i^q \in I$$

Somando o segundo membro das duas equações, temos

$$2(u^q t_i^q - ut_i) \in I,$$

e desde que a característica de K é diferente de 2,

$$(ut_i)^q - ut_i \in I,$$

o que completa a demonstração. $\square$

Agora, A e B pertencem a variedade determinada por

$$x^{qp} - x^p, [x_1, x_2, x_3],$$

e desde que A é comutativa, $A \bigotimes_K B$ também satisfaz

$$x^{qp} - x^p, [x_1, x_2, x_3].$$

Para ver isso, seja $f_1, f_2, f_3 \in A$ e $g_1, g_2, g_3 \in B$. Então,

$$[f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2, f_3 \otimes g_3] = f_1 f_2 f_3 \otimes [g_1, g_2, g_3] = 0$$

e

$$\begin{aligned}(f_1 \otimes g_1)^{qp} - (f_1 \otimes g_1)^p &= f_1^{qp} \otimes\ g_1^{qp} - f_1^p \otimes\ g_1^p \\ &= f_1^p \otimes g_1^{qp} - f_1^p \otimes g_1^p \\ &= f_1^{qp} \otimes (g_1^{qp} - g_1^p) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Demostração do Teorema 5.1:

Considere o seguinte homomorfismo

$$\Phi : K_1\langle X\rangle/U \longrightarrow A \bigotimes B$$

$$\Phi(x_i + U) = (t_i^r + I) \otimes (1 + V) - (1 + I) \otimes (y_i + V),$$

onde $r = p^{n-1}$. Como $K_1\langle X\rangle/U$ é a álgebra relativamente livre da variedade determinada por

$$x^{qp} - x^p, [x_1, x_2, x_3],$$

basta definir Φ nos geradores livres $x_i + U$. Mostraremos que Φ é isomorfismo.

Primeiro mostraremos que Φ é sobrejetora. Procederemos da seguinte maneira: primeiro provaremos que os elementos $(t_i^m + I) \otimes (1 + V)$, com $m < q$ pertencem a imagem da Φ. Isso implicará que $A\bigotimes\{1+V\}$ pertence a imagem de Φ. A seguir, mostraremos que os elementos $(1+I)\otimes(y_i+V)$ e $(1+I)\bigotimes([y_i,y_j]+V)$ pertencem a imagem de Φ, o que implicará que $\{1+I\}\otimes B$ pertence a imagem de ϕ.

$$\begin{aligned}
\Phi(x_i^p+U) &= \Phi(x_i+U)^p\\
&= \Big((t_i^r+I)\otimes(1+V)-(1+I)\otimes(y_i+V)\Big)^p\\
&= \Big((t_i^r+I)\otimes(1+V)\Big)^p-\Big((1+I)\otimes(y_i+V)\Big)^p\\
&= (t_i^{rp}+I)\otimes(1+V)-(1+I)\otimes(y_i^p+V)\\
&= (t_i^q+I)\otimes(1+V)\\
&= (t_i+I)\otimes(1+V).
\end{aligned}$$

Assim para $0<m<q$,

$$\Phi(x_i^{pm}+U) = (t_i^m+I)\otimes(1+V).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\Phi(x_i^q-x_i+U) &= \Phi(x_i^q+U)-\Phi(x_i+U)\\
&= \Phi(x_i^{pr}+U)-\Phi(x_i+U)\\
&= \Phi(x_i^p+U)^r-\Phi(x_i+U)\\
&= (t_i^r+I)\otimes(1+V)-(t_i^r+I)\otimes(1+V)+(1+I)\otimes(y_i+V)\\
&= (1+I)\otimes(y_i+V)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi([x_i,x_j]+U) &= \Phi(x_i+U)\Phi(x_j+U)-\Phi(x_j+U)\Phi(x_i+U)\\
&= \Big((t_i^r+I)\otimes(1+V)-(1+I)\otimes(y_i+V)\Big)\Big((t_j^r+I)\otimes(1+V)\\
&\quad -(1+I)\otimes(y_j+V)\Big)-\Big((t_j^r+I)\otimes(1+V)-(1+I)\otimes(y_j+V)\Big)\\
&\quad \times\Big((t_i^r+I)\otimes(1+V)-(1+I)\otimes(y_i+V)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (t_i^r t_j^r + I) \otimes (1+V) + (1+I) \otimes (y_i y_j + V) - (t_j^r + I) \otimes (y_i + V) - \\
&\quad -(t_i^r + I) \otimes (y_j + V) - (t_i^r t_j^r + I) \otimes (1+V) - (1+I) \otimes (y_j y_i + V) + \\
&\quad +(t_j^r + I) \otimes (y_i + V) + (t_i^r + I) \otimes (y_j + V) \\
&= (1+I) \otimes (y_i y_j + V) - (1+I) \otimes (y_j y_i + V) \\
&= (1+I) \otimes ([y_i, y_j] + V).
\end{aligned}
$$

Logo, tomando produtos dos elementos $x_i^p + U, x_i^q - x_i + U$ e $[x_i, x_j] + U$, vemos que Φ é sobrejetora.

Além disso, para $m < p$,

$$
\begin{aligned}
\Phi(x_i^m + U) &= \Phi(x_i + U)^m \\
&= \Big((t_i^r + I) \otimes (1+V) - (1+I) \otimes (y_i + V)\Big)^m \\
&= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (t_i^{r(m-k)} + I) \otimes (y_i^k + V)
\end{aligned}
$$

onde $\alpha_k = \binom{m}{k} \in K$. Como $m < p$, temos que $\alpha_k \neq 0$. Assim, por exemplo, para $0 < m' < q$ e $0 < m < p$

$$
\begin{aligned}
\Phi(x_{i'}^{pm'} x_i^m [x_{j_1}, x_{j_2}] + U) &= \Big((t_{i'}^{m'} + I) \otimes (1+V)\Big)\Big(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k (t_i^{r(m-k)} + I) \otimes (y_i^k + V)\Big) \\
&\quad \times \Big((1+I) \otimes ([y_{j_1}, y_{j_2}] + V)\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (t_{i'}^{m'} t_i^{r(m-k)} + I) \otimes (y_i^k [y_{j_1}, y_{j_2}] + V).
\end{aligned}
$$

Note que $r(m-k) < q$ e $k < p$, isto é, $t_{i'}^{m'} t_i^{r(m-k)} + I$ pertence a base de A e $y_i^k [y_{j_1}, y_{j_2}] + V$ pertence a base de B.

De um modo geral,

$$
\Phi(x_{i_1'}^{pm_1'} \cdots x_{i_{k'}'}^{pm_{k'}'} x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + U) =
$$

$$
\sum_{\xi_{i_1}=0}^{m_1} \cdots \sum_{\xi_{i_k}=0}^{m_k} (\alpha t_{i_1'}^{m_1'} \cdots t_{i_{k'}'}^{m_{k'}'} t_{i_1}^{r(m_1 - \xi_{i_1})} \cdots t_{i_k}^{r(m_k - \xi_{i_k})} + I \otimes y_{i_1}^{\xi_{i_1}} \cdots y_{i_k}^{\xi_{i_k}} [y_{j_1}, y_{j_2}] \cdots [y_{j_{2l-1}}, y_{j_{2l}}] + V)
$$

onde $0 \neq \alpha \in K$.

Portanto, vemos que cada parcela do somatório no segundo membro da equação é unicamente determinada pelos monômios em $\mathcal{B}'(mod\ \ U)$. Logo, as imagens dos monômios em $\mathcal{B}'(mod\ \ U)$ pela Φ são linearmente independentes. Assim, Φ é injetora. $\square$

O seguinte lema pode ser encontrado em [28].

Lema 2. *$x_1^{qp} - x_1^p \in T(E)$.*

Pelo lema anterior, temos que $U \subseteq T(E)$. Com isso temos

Corolário 5.3. *(Ver [3]) $T(E)$ é gerado como T-ideal por $[x_1, x_2, x_3]$ e $x_1^{qp} - x_1^p$, ou seja, $T(E) = U$.*

Demonstração. Pelo que foi dito acima, resta mostra a inclusão $T(E) \subseteq U$. Seja $A^{(n)}$ a subálgebra de A gerada por $t_1 + I, \ldots, t_n + I$. Então, $A^{(n)} \subseteq \prod K$, onde $\prod K$ é um produto direto finito. De fato, sejam $T_n = \{t_1, \ldots, t_n\}$ e $K\langle T_n\rangle$ a álgebra livre de posto n. Então o conjunto de todos os homomorfismos de $K\langle T_n\rangle$ em K é finito. Então seja,

$$\Phi : K\langle T_n\rangle \longrightarrow \prod_{j=1}^{s} K$$
$$\Phi(f) = (\phi_1(f), \ldots, \phi_s(f))$$

onde s é o número de homomorfismos de $K\langle T_n\rangle$ em K. Logo, $f \in Ker(\Phi)$ se, e somente se, $f \in Ker(\phi_j)$, $j = 1, \ldots, s$. Portanto, $Ker(\Phi) = I$. Assim $A^{(n)} = K\langle T_n\rangle / I \simeq Im(\Phi) \subseteq \prod K$ e

$$A^{(n)} \bigotimes B \subseteq (\prod K) \bigotimes B \simeq \prod (K \bigotimes B) \simeq \prod B.$$

Como B satisfaz polinômios em $T(E)$, temos que $A^{(n)} \bigotimes B$ também satisfaz polinômios em $T(E)$. Mas como n é arbitrário, $A \bigotimes B$ pertence a variedade determinada por $T(E)$, isto é, $T(E) \subseteq U$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Bekh-Ochir, C., Rankin, S.A.: *Examples of associative algebras for which the T-space of central polynomials is not finitely based*, Israel Journal of Mathematics 186 (2011), 333-347.

[2] Bekh-Ochir, C., Rankin, S.A.: *The central polynomials of the infinite-dimensional unitary and nonunitary Grassmann algebras*, Journal of Algebra and Its Aplications 9(5) (2010), 687-704.

[3] Bekh-Ochir, C., Rankin, S.A.: *The identities and the central polynomials of the infinite dimensional unitary Grassmann algebra over a finite field*, Communications in Algebra 39 (2011), 819-829 .

[4] Belov, A.Ya.: *Counterexamples to the Specht problem*, Sbornik Mathematics 191 (2000), 329-340.

[5] Belov, A.Ya.: *On non-Specht varieties*, Fundamental'naya i Prikladnaya Matematika 5 (1999), 45-66 (in Russian).

[6] Brandão Jr., A., Koshlukov, P., Krasilnikov, A. Silva, E.A.: *The central polynomials for the Grassmann algebra*, Israel Journal of Mathematics 179 (2010), 127-144 .

[7] Centrone, L.: *$\mathbb{Z}_2$-graded identities of the Grassmann algebra in positive characteristic*, Linear Algebra and Applications 435 (2011), 3297-3313.

[8] Chiripov, P.Z., Siderov, P.N.: *On bases for identities of some varieties of associative algebras* (Russian), PLISKA Studia Mathematica Bulgarica 2 (1981), 103-115.

[9] Deryabina, G., Krasilnikov, A.: *The subalgebra of graded central polynomials of an associative algebra*, Journal of Algebra 425 (2015), 313-323.

[10] Drensky,V.: *Free algebras and PI-algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore, 1999.

[11] Drensky,V., Formanek, E.: *Polynomial identity rings*, Advanced Courses in Mathematics, CMR Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[12] Giambruno, A., Koshlukov, P.: *On the identities of the Grassmann algebra in characteristic p>0*, Israel Journal of Mathematics 122 (2001), 305-316.

[13] Giambruno, A., Zaicev, M.: *Polynomial identities and asymptotic methods*, Mathematical Surveys and Monographs, 122, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[14] Gonçalves, D.J., Krasilnikov, A., Sviridova, I.: *Limit T-subspaces and the central polynomials in n variables of the Grassmann algebra*, Journal of Algebra, 371 (2012), 156-174.

[15] Gonçalves, D.J., Krasilnikov, A., Sviridova, I.: *Limit T-subalgebras in free associative algebras*, Journal of Algebra, 412 (2014), 264-280.

[16] Grishin, A. V.: *Examples of T-spaces and T-ideals of characteristic* 2 *without the finite basis property*, Fundamental'naya i Prikladnaya Matematika 5 (1999), 101-118 (in Russian).

[17] Grishin, A. V.: *On the structure of the centre of a relatively free Grassmann algebra*, Russian Mathematical Surveys 65 (2010) 781-782.

[18] Grishin, A. V.: *On non-Spechtianness of the variety of associative rings that satisfy the identity* $x^{32} = 0$, Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society 6 (2000), 50-51.

[19] Grishin, A. V., Tsybulya, L.M.: *On the multiplicative and T-space structure of the relatively free Grassmann algebra*, Sbornik Mathematics 200 (2009), 1299-1338.

[20] Kanel-Belov, A., Karasik, Y, Rowen, L.H.: *Computational aspects of polynomial identities*, Monographs and Research Notes in Mathematics, 1, Taylor and Francis, New York-London, 2016.

[21] Kemer, A.R.: *Finite basability of identities of associative algebras*, Algebra and Logic 26(5) (1987), 362-397.

[22] Kemer, A.R.: *Ideals of identities of the associative algebras*, Translations of Mathematical Monographs, vol 87, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[23] Kemer, A.R.: *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*, Mathematics of the USSR-Izvestiya 25 (1985), 359-374.

[24] Kireeva, E.A., Krasilnikov, A.N.: *On some extremal varieties of associative algebras*, Mathematical Notes, 78 (2005), 503-517.

[25] Krakowski, D., Regev, A.: *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Transactions of the American Mathematical Society, 181 (1973), 429-438.

[26] Latyshev, V.N., *On the choice of basis in a T-ideal*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal 4(5) (1963), 1122-1126 (in Russian).

[27] Razmyslov, Yu. P. : *Identities of algebras and their representations*, Translations of Mathematical Monographs, 138, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[28] Regev, A.: *Grassmann algebras over finite fields*, Communications in Algebra, 19 (1991), 1829-1849.

[29] Rowen, L.W.: *Polynomial identities in ring theory*, Pure and Applied Mathematics, 84, Academic Press, New York-London, 1980.

[30] Shchigolev, V. V.: *Examples of T-spaces with an infinite basis*, Sbornik Mathematics 191 (2000), 459-476.

[31] Shchigolev, V. V.: *Examples of infinitely based T-ideals*, Fundamental'naya i Prikladnaya Matematika 5 (1999), 307-312 (in Russian).

[32] Shchigolev, V. V.: *Construction of non-finitely based T-ideals*, Communications in Algebra 29 (2001), 3935-3941.

[33] Specht, W.: *Gezetze in Rigen*, Mathematische Zeitschrift 52 (1950), 557-589.

[34] Stojanova-Venkova, A.H.: *Bases of identities of Grassmann algebras*, Serdica 6, 1 (1980), 63-72 (in Russian).

[35] Silva, E.A.: *Polinômios centrais em algumas álgebras associativas e representações de grupos.* Tese de Doutorado, UnB, 2008.

[36] da Silva, V.R.T., Di Vincenzo, O.M.: *On $\mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities of the Grassmann algebra*, Linear Algebra and Applications 431 (2009), 56-72.

[37] Tsybulya, L. M.: *Theorems on equalization and monomiality in a relatively free Grassmann algebra*, Journal of Mathematical Sciences, 163(6) (2009), 759-773.