

**MODELOS INCREMENTAIS PARA  
PLASTICIDADE CÍCLICA: UM ESTUDO  
NUMÉRICO**

Por

**Carlos Magno Lopes da Silva Filho**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELOS INCREMENTAIS PARA PLASTICIDADE  
CÍCLICA: UM ESTUDO NUMÉRICO**

**CARLOS MAGNO LOPES DA SILVA FILHO**

**ORIENTADOR: EDGAR NOBUO MAMIYA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**PUBLICAÇÃO: ENM.DM - 241**

**BRASÍLIA/DF: JULHO – 2016**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELOS INCREMENTAIS PARA PLASTICIDADE  
CÍCLICA: UM ESTUDO NUMÉRICO**

**CARLOS MAGNO LOPES DA SILVA FILHO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE  
BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS  
MECÂNICAS.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Edgar Nobuo Mamiya, Dr. (ENM – UnB)**  
**(Orientador)**

---

**Prof. Lucival Malcher, Dr. (ENM – UnB)**  
**(Examinador Interno)**

---

**William Taylor Matias Silva, Dr. (ENC – UnB)**  
**(Examinador Externo ao Programa)**

**BRASÍLIA/DF, 29 JULHO 2016**

## FICHA CATALOGRÁFICA

DA SILVA FILHO, CARLOS MAGNO

Modelos incrementais para plasticidade cíclica: um estudo numérico

[Distrito Federal] 2016.

xi, 44p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2016).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Plasticidade Cíclica

2. Modelos de encruamento cinemático

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Da Silva Filho, C. M. (2016). Modelos incrementais para plasticidade cíclica: um estudo numérico. Dissertação de mestrado em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 51p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Carlos Magno Lopes da Silva Filho.

TÍTULO: Modelos Incrementais Para Plasticidade Cíclica: Um Estudo Numérico

GRAU: Mestre

ANO: 2016

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósito acadêmico e científico. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor

---

Carlos Magno Lopes da Silva Filho  
Qi 5 conjunto i casa 114, guará 1  
71.020-094 Brasília/DF/Brasil

## **RESUMO**

Apresenta-se um estudo sobre modelos para descrição do comportamento elastoplástico sob condições de carregamento cíclico uniaxial e multiaxial, proporcional e não proporcional. Em particular, foca-se na versão original proposta por Jiang em 1993, que inova sobre o modelo de Chaboche pela consideração de uma superfície de memória que define o tamanho do domínio elástico em função da amplitude de carregamento. As consequências da consideração da superfície de memória sobre a observação ou não do efeito de Masing são discutidas. O modelo de Jiang, em sua versão original, mostra boa aderência em relação a resultados experimentais uniaxiais, mas exibe encruamento menor do que aqueles observados experimentalmente no caso de carregamentos não proporcionais.

## **ABSTRACT**

A study on models for the description of the elastoplastic behaviour under conditions of uniaxial and multiaxial, proportional and non proportional cyclic loadings is presented. In particular, the study focuses on the original version of the model proposed by Jiang in 1993. The Jiang's model inovates upon the one proposed by Chaboche by considering a memory surface witch dictates the size of the elastic domain as a function of the loading amplitude. The consequences of the memory surface over the observation or not over the Masing effect are discussed. The modelo of Jiang in the original version shows good responses at uniaxial results, but shows hardening lower than observed experimentally for the non proportional cases.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>2. PLASTICIDADE INCREMENTAL</b> .....	3
2.2. Lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick .....	7
2.3. Lei de encruamento cinemático de Chaboche.....	8
2.4. Lei de encruamento cinemático de Jiang (1994).....	8
2.4.2. Influência dos parâmetros $\chi$ (i) no modelo de Jiang .....	9
2.4.3. Influência do número de parcelas do modelo de Jiang.....	11
2.4.4. Identificação dos Parâmetros: .....	12
2.4.6. Comportamento de Masing: .....	16
2.4.7. Comportamento não-Masing:.....	17
<b>3. DISCRETIZAÇÃO DO MODELO DE JIANG</b> .....	18
<b>4. RESULTADOS</b> .....	22
4.1 Modelo de Jiang sem superfície de memória.....	22
4.2 Modelo de Jiang com superfície de memória .....	25
4.3 Superfície de memória no modelo de Jiang.....	27
4.4 Comparação entre os modelos de Jiang e Chaboche.....	38
4.5 Influência do $\chi$ (i) no modelo de Y. Jiang.....	39
4.6 Alteração no número de parcelas do modelo de Y. Jiang.....	40
<b>5. CONCLUSÃO</b> .....	42

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 4. 1 - Propriedades do aço 1045. Leese e Morrow (1985).

Tabela 4.2 - parâmetros dos materiais para o Aço 1045 - Jiang.

Tabela 4.3 - Parâmetros do material 1070.

Tabela 4.4 - parâmetros do material 1070. Y. Jiang e H. Sehitoglu (1996)

Tabela 4.5 – Amplitudes de deformação utilizados nos históricos de deformação elíptico.

Tabela 4.6 - Valores obtidos na simulação utilizando a curva de Y. Jiang (1996)

Tabela 4.7 - Comparação das tensões máximas variando o número de parcelas do modelo de Y. Jiang.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1- representação do efeito baushinger.

Figura 2.2- influência da variação de  $\chi^{(i)}$  em um carregamento uniaxial Jiang e Kurath. (1996)

Figura 2.3 - Trajetória experimental de carregamento não proporcional, Fatemi (1985, apud Y. Jiang e P. Kurath, 1996).

Figura 2.4 - Efeito da variação de  $\chi^{(i)}$ , Jiang e Kurath (1996).

Figura 2.5 - efeito do número de tensores de encruamento cinemático para um carregamento uniaxial. Jiang e Kurath, (1996).

Figura 2.6 - Influência do número de parcelas do tensor de encruamento cinemático. Comparação de dados experimentais Fatemi (1988) e simulação numérica. Jiang e Kurath (1996).

Figura 2.7 - Gráfico da amplitude de tensão pela amplitude de deformação proposto por Jiang (1996) para obter os parâmetros dos materiais r e d.

Figura 2.8 - comportamento da superfície de memória em relação ao tensor de encruamento cinemático Jiang e Sehitoglu (1996)

Figura 2.9 ilustração esquemática do comportamento de Masing. Zhang e Jiang (2008)

Figura 2.10 ciclos de histerese estabilizado tensão deformação com comportamento não Masing. Jiang e Zhang (2008).

Figura 4.1 histórico de deformação uniaxial crescente

Figura 4.2 Ciclos estabilizados da faixa de tensão e faixa de deformação. Aço 1045 utilizando os parâmetros dos materiais encontrados utilizando a equação proposta por Jiang.

Figura 4.3 - Comparação entre os modelos utilizando os parâmetros dos materiais obtidos da Tab. 4.2, trajetória de deformação elíptica com amplitude de deformação  $\Delta\varepsilon_{xy}/2 = 0.511\%$  e  $\Delta\varepsilon_x/2 = 0.264\%$

Figura 4.4 - histórico de deformação uniaxial com amplitude crescente.



Figura 4.5 - Ciclos estabilizados da faixa de tensão e amplitude de deformação plástica. Histórico de deformação uniaxial com amplitude crescente e sem a superfície de memória.

Figura 4.6- Ciclos estabilizados da faixa de tensão e amplitude de deformação plástica. Histórico de deformação uniaxial com amplitude crescente e utilizando a superfície de memória.

Figura 4.7 – histórico de deformação uniaxial. Contração da superfície de memória.

Figura 4.8 - Ciclos de histerese. Simulação uniaxial decrescente.

Figura 4.9 -histórico de deformação uniaxial – carregamento repetido.

Figura 4.10 – Ciclos estabilizados dos gráficos tensão-deformação plástica. Deformação média diferente de zero e utilizando a superfície de memória

Figura 4.11 – Ciclos estabilizados dos gráficos tensão-deformação. Deformação média diferente de zero e utilizando a superfície de memória

Figura 4.12 - Histórico de deformação uniaxial - carregamento flutuante não repetido.

Figura 4.13 - – Ciclos estabilizados dos gráficos tensão-deformação. Deformação média diferente de zero, carregamento flutuante e utilizando a superfície de memória.

Figura 4.14 – Ciclos estabilizados dos gráficos tensão-deformação plástica. Deformação média diferente de zero, carregamento flutuante e utilizando a superfície de memória.

Figura 4.15 - histórico de deformação proporcional - torcional.

Figura 4.16 - histórico de deformação proporcional – axial

Figura 4.17 – Simulação proporcional- deformação da componente normal - com superfície de memória – axial

Figura 4.18 - Simulação proporcional - deformação da componente cisalhante - com superfície de memória

Figura 4.19 – Simulação proporcional - deformação plástico - com superfície de memória – axial

Figura 4.20 – Simulação proporcional. Deformação cisalhante plástica - com superfície de memória.

Figura 4.21 - Histórico de deformação elíptico não proporcional.

Figura 4.22 - Gráfico tensão normal - tensão cisalhante - não proporcional. Amplitude de deformação crescente. Com superfície de memória.

Figura 4.23 - Comportamento da tensão normal durante a simulação não proporcional elíptico. Amplitude de deformação crescente. Com superfície de memória.

Figura 4.24 - Comportamento da tensão cisalhante durante a simulação não proporcional elíptico. Amplitude de deformação crescente. Com superfície de memória.

Figura 4.25 - Comparação entre os modelos utilizando os parâmetros dos materiais da Tab. 4.1, A trajetória de deformação elíptica utilizada na comparação tem amplitude de deformação  $\Delta\epsilon_x = 0.4\%$  e  $\Delta\epsilon_{xy} = 0.7\%$ .

Figura 4.26.- Simulação para o aço 1045, trajetória elíptica com amplitude de tensão para  $\Delta\epsilon_x = 0.007$  e  $\Delta\epsilon_{xy} = 0.004$ . – Y. Jiang

Figura 4.27 - Comparação das tensões máximas variando o número de parcelas do modelo de Y. Jiang utilizando as propriedades do material obtidas no modelo de Jiang.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{B}$	Tensor de encruamento cinemático.
$\mathbf{B}_n$	Tensor de encruamento cinemático no pseudo-instante $n$ .
$\mathbf{e}$	Tensor de deformação desviador.
$E$	Módulo de elasticidade à tração
$f$	Função de escoamento.
$G$	Módulo de elasticidade ao cisalhamento.
$h$	Módulo plástico.
$H'$	Coefficiente de endurecimento cíclico.
$\mathbf{I}$	Tensor identidade.
$k$	Sensibilidade à tensão normal.
$M$	Número de parcelas do tensor de encruamento cinemático.
$\mathbf{N}$	Direção de evolução da deformação plástica.
$n'$	Expoente de endurecimento cíclico.
$R_m$	Raio da superfície de memória
$\mathbf{S}$	Tensor tensão desviadora.
$\mathbf{S}_{n+1}^{trial}$	Tensor tensão desviadora tentativa.
$\mathbf{Y}_n$	Direção de evolução do tensor de encruamento cinemático no pseudo-instante $n$ .
$a, c$	Constantes materiais para o modelo de Armstrong-Frederick.
$r^{(i)}, d^{(i)}$	Constantes materiais para o modelo de Y. Jiang.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações lineares.
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tensor de deformações elásticas.
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tensor de deformações plásticas.
$\boldsymbol{\varepsilon}_n$	Tensor de deformação no pseudo-instante $n$ .

$\Delta \varepsilon$	Tensor de incremento de deformação.
$\sigma$	Tensor tensão de Cauchy.
$\sigma_y$	Tensão de escoamento sob tração.
$\sigma_{n+1}^{trial}$	Tensor tensão tentativa.
$\sigma_n$	Tensor tensão no pseudo-instante $n$ .
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico.
$\tau_y$	Tensão de escoamento sob cisalhamento.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$\chi^{(i)}$	Expoente para controle do efeito de “ <i>ratcheting</i> ”.
$\lambda, \mu$	Constantes de Lamé.

## 1. INTRODUÇÃO

O esforço para reduzir os custos de manutenção e de produção refletem no desenvolvimento da engenharia moderna. Neste contexto, é notável a importância do estudo da fadiga, que é um fenômeno resultante dos esforços repetitivos sofridos por um determinado material. Este tema é complexo, difícil de modelar e tem influência direta no desenvolvimento dos componentes mecânicos. Existem diversos modelos que se propõem a estimar a vida útil de um determinado material submetido a carregamentos variáveis no tempo. O estudo da fadiga pode incluir a análise experimental, a modelagem e a simulação numérica.

Modelos consolidados de estimativa de vida à fadiga, no contexto de carregamentos multiaxiais, exigem o conhecimento das histórias de deformações e tensões correspondentes. Como exemplo, destaca-se o modelo proposto por Fatemi e Socie (1988):

$$\frac{\Delta\gamma}{2} \left( 1 + k \frac{\sigma_{max}}{\sigma_y} \right) = f(N_f), \quad (1.1)$$

onde  $\frac{\Delta\gamma}{2}$  é a amplitude de deformação cisalhante em plano material crítico,  $\sigma_{max}$  é o maior valor da tensão normal no plano crítico,  $k$  é a sensibilidade do material à tensão normal,  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento e  $f(N_f)$  é uma função do número de ciclos  $N_f$  até a falha do material por fadiga. A mesma dependência no conhecimento correto das deformações e das tensões ao longo da história de carregamento pode ser observada em outras abordagens para a modelagem da degradação por fadiga, como aquela proposta por Mamiya et al. (2014):

$$\gamma_{a\ MPH} + \kappa \frac{\sigma_{H\ max}}{G} = f(N_f), \quad (1.2)$$

onde  $\gamma_{a\ MPH}$  é a amplitude equivalente de deformação baseada no conceito de *envelope prismático máximo*,  $\sigma_{H\ max}$  é o maior valor da tensão hidrostática observada ao longo do ciclo de carregamento,  $\kappa$  é a sensibilidade do material a tensões hidrostáticas trativas e  $G$  é o módulo de elasticidade ao cisalhamento.

Oberve-se que, enquanto as deformações podem ser medidas, as tensões somente podem ser estimadas (fora das condições ideais do laboratório), de modo que torna-se

fundamental dispor de modelos capazes de descrever as relações tensão-deformação com boa aderência ao comportamento mecânico real do material analisado.

Neste cenário, a deformação plástica cíclica representa o mecanismo de dano do material. Um número elevado de modelos para a descrição do comportamento elasto-plástico – de uma maneira ou de outra generalizações da proposta de Prager (1949) – tem sido proposto pela comunidade científica. Um dos principais inconvenientes da lei de encruamento de Prager está na linearidade da relação tensão-deformação durante a evolução da deformação plástica. Para descrever o comportamento não linear do encruamento cinemático, Mróz (1967) propõe um número  $M$  de domínios de encruamento, concêntricos e incluindo o domínio elástico. O modelo resultante descreve um encruamento cinemático linear por partes. Garud (1981), propõe uma modificação para o modelo de Mróz, de modo a descrever de maneira mais adequada o comportamento mecânico plástico sob carregamentos não proporcionais. Toda uma família de leis não lineares de encruamento cinemático tem sido produzida a partir do modelo proposto por Armstrong e Frederick (1966). Destaca-se a generalização – considerando um somatório de tensores de encruamento cinemático que evoluem de acordo com a lei de Armstrong e Frederick – proposta por Chaboche e Rousselier (1983).

A dissertação tem como objetivo o estudo do modelo de Jiang para plasticidade cíclica de metais submetidos a carregamentos proporcionais e não proporcionais. Apresenta-se o modelo como uma evolução do modelo de Chaboche, pela adição do efeito de memória da superfície de escoamento. Avalia-se o efeito de Masing e não Masing nos ciclos de histereses produzidos pelo modelo. O estudo analisa, ainda, a capacidade do modelo de representar corretamente as trajetórias de tensão sob carregamentos não proporcionais.

A monografia está focada no modelo de Jiang (1994) como uma evolução de modelos do tipo Armstrong-Frederick, avaliando sua capacidade de prever o comportamento dos materiais submetidos a carregamentos proporcionais e não proporcionais.

A dissertação está organizada da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta conceitos introdutórios no estudo da plasticidade. Em seguida são apresentados os modelos de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick, Chaboche e Jiang. Finalmente a superfície de memória, o efeito Masing e o efeito não Masing são estudados. O Capítulo 3 apresenta a discretização das equações do modelo de Jiang. O Capítulo 4 apresenta os resultados das simulações relacionadas ao modelo de Jiang. Por fim, o Capítulo 5 conclui a monografia e apresenta recomendações para trabalhos futuros.

## 2. PLASTICIDADE INCREMENTAL

Conforme descrito por Simo e Hugles (1997), algoritmos para solução dos problemas elastoplásticos são tipicamente abordados pelo método da deformação prescrita, adotando-se o tensor deformação como variável primária. A partir da história de deformações, as funções de resposta mecânica (tensões, encruamento cinemático) são formuladas no espaço das tensões. Este é o ponto de vista padrão largamente adotado na literatura a partir de Wilkins (apud Simo, 1997). Entretanto, conforme observado por Simo, existem abordagens alternativas utilizando a tensão como variável primária.

A plasticidade incremental permite descrever o comportamento elastoplástico dos materiais submetidos a uma grande gama de esforços mecânicos, sendo utilizada na maior parte dos softwares comerciais de elementos finitos. No presente texto, a teoria é apresentada no contexto da cinemática de pequenas deformações.

Tendo ainda como referência o trabalho de Simo e Hugles (1997), a teoria incremental se utiliza de um conjunto de relações e restrições mecânicas que permite que se preveja o estado de tensão a partir de uma história de carregamento em termos de deformação prescrita. Os modelos de comportamento elastoplásticos consideram que a taxa de carregamento não tem influência sobre a resposta mecânica, diferentemente dos modelos visco-plásticos, por exemplo. Dessa forma, conforme dito anteriormente, o pseudo-instante  $t$  é usado apenas para descrever uma sequência de eventos e não tem uma relação direta com o tempo efetivamente ocorrido ao longo da história.

Em metais sujeitos ao carregamentos cíclicos, pode ser observado experimentalmente que o centro da superfície de escoamento se move na direção do escoamento plástico, o que é conhecido na literatura como *efeito Bauschinger*. Para capturar este efeito, os modelos introduzem uma variável chamada tensor de encruamento cinemático que define o centro da superfície de escoamento, neste estudo,  $\mathbf{B}$  representa o tensor de encruamento cinemático.

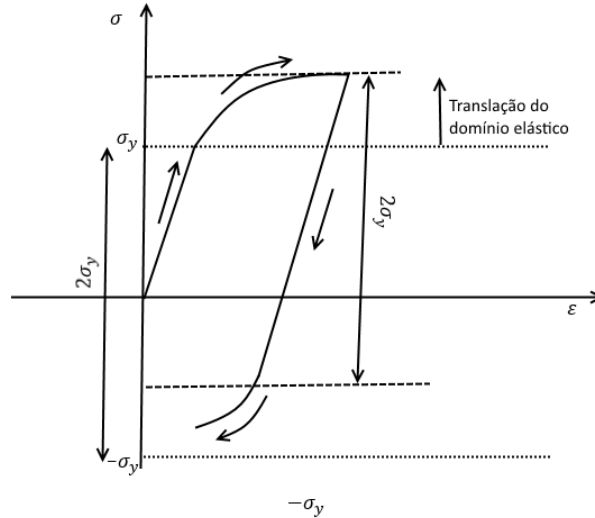


Figura 2.1- representação do efeito bauschinger.

## 2.1. Ingredientes básicos da plasticidade incremental.

### a) Decomposição aditiva da deformação:

Assume-se que, na teoria de pequenas deformações, o tensor deformação total pode ser decomposto como a adição da deformação elástica e da deformação plástica,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.1)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  representa o tensor deformação total e  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  representam respectivamente os tensores das deformações elástica e plástica.

### b) Relação tensão-deformação:

A relação tensão-deformação que descreve o comportamento elástico linear isotrópico é expresso como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_e) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.2)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé, definidas como:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu_e)}, \quad \lambda = \frac{E\nu_e}{(1 + \nu_e)(1 - 2\nu_e)}. \quad (2.3)$$

Nas Eqs 2.3,  $E$  é módulo de elasticidade e  $\nu_e$  é o coeficiente de Poisson elástico.



c) *Domínio elástico:*

Na plasticidade, o estado de tensão sempre está confinado a uma região limitada do espaço de tensões, denominado *domínio elástico*. Tal região pode ser definida por uma desigualdade que limita os valores de uma função  $f$  do estado de tensão e de outras variáveis de estado:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}) \leq C \quad (2.4)$$

onde  $C$  é um parâmetro material e  $\mathbf{B}$  é o tensor de encruamento cinemático que define a posição do domínio elástico no espaço de tensões.

Existem diversas propostas para a superfície de escoamento, sendo a mais utilizada aquela proposta por Mises:

$$f(\mathbf{S}, \mathbf{B}) = \|\mathbf{S} - \mathbf{B}\|^2 - 2\tau_y^2 \leq 0 \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I})\mathbf{I}$  é o *tensor tensão desviadora*.

d) *Lei de evolução da deformação plástica:*

Conforme descrito no trabalho de Prager (1955), admite-se que a deformação plástica  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  evolui na direção normal à superfície de escoamento (plasticidade associativa):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \quad (2.6)$$

onde  $\dot{\gamma}$  é o *multiplicador plástico*. No caso da superfície de escoamento de Mises,

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S} - \mathbf{B}}{\|\mathbf{S} - \mathbf{B}\|}. \quad (2.7)$$

e) *Lei de evolução do encruamento cinemático:*

O encruamento (endurecimento) do material é usualmente descrito por meio de alguma transformação do domínio elástico. Frequentemente, tais transformações são representadas por mudanças no tamanho do domínio elástico - *encruamento isotrópico* - e/ou pela translação deste domínio - *encruamento cinemático*. Em geral o encruamento isotrópico se estabiliza após poucos ciclos, de modo que, no contexto da plasticidade cíclica, o encruamento cinemático prepondera.

Com o objetivo de modelar o efeito observado experimentalmente em carregamentos cíclicos, Prager (1955) propôs que o encruamento cinemático fosse linear, conforme a expressão:

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{2}{3} H \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2.8)$$

onde  $H$  é o modulo de endurecimento cinemático. Neste modelo, a lei de encruamento cinemático permite que a superfície de escoamento translade linearmente e sem mudar o seu tamanho ou a forma.

*f) Condição de complementaridade de Kuhn –Tucker:*

A relação de complementariedade de Kuhn-Tucker estabelece que a deformação plástica somente poderá evoluir se o estado de tensão estiver definido sobre a superfície de escoamento ou, complementarmente, a deformação plástica não poderá evoluir se o estado de tensão estiver definido no interior do domínio elástico. Tais restrições estão expressas nas relações

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f \leq 0 \quad \dot{\gamma} f = 0 \quad (2.9)$$

Assim, caso  $f < 0$ ,  $\dot{\gamma} = 0$  e, a partir da Eq. 2.6, observa-se que não há evolução plástica. Caso  $\dot{\gamma} > 0$ , há evolução da deformação plástica, então, necessariamente,  $f = 0$ , ou seja, o estado de tensão está definido sobre a superfície de escoamento.

*g) Condição de consistência (ou persistência):*

A condição de persistência se faz necessária para descrever o que pode ocorrer enquanto o estado de tensão está definido sobre o contorno do domínio elástico ( $f = 0$ ) e é expressa pelas restrições:

$$\text{Se } f = 0, \text{ então: } \quad \dot{\gamma} \geq 0, \dot{f} \leq 0 \quad \dot{\gamma} \dot{f} = 0 \quad (2.10)$$

Esta condição estabelece que, se o estado de tensão está definido sobre a superfície de escoamento, então (i) há deformação plástica ( $\dot{\gamma} > 0$ ) e então o estado de tensão deve evoluir permanecendo na superfície de escoamento ou (ii) não há evolução plástica ( $\dot{\gamma} = 0$ ) e se observa descarregamento elástico ( $\dot{f} < 0$ ).

## 2.2. Lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick

A proposta de Armstrong-Frederick (1966) é que a lei de evolução da deformação plástica seja não linear, adicionando um termo que define a desaceleração do encruamento à medida que  $\mathbf{B}$  evolui, conforme a expressão:

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{2}{3} H \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - c \dot{p} \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

onde  $H$  e  $c$  são propriedades do material e  $\dot{p}$  é a taxa de deformação plástica equivalente.

$$\dot{p} = \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\|. \quad (2.12)$$

O termo  $-c \dot{p} \mathbf{B}$  faz com que a taxa de variação do tensor de encruamento cinemático  $\mathbf{B}$  decresça à medida que esta quantidade cresce, produzindo um comportamento não linear frequentemente observado nos materiais metálicos.

Usando a condição de consistência, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.13)$$

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}) = \mathbf{N} : (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{B}}) = 0 \quad (2.14)$$

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}) = \mathbf{N} : \left[ \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\gamma} \left( \frac{2}{3} H \mathbf{N} - c \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{B} \right) \right] = 0 \quad (2.15)$$

Assim, multiplicador plástico pode ser expresso função da taxa de tensão como:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{h} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{N} \quad (2.16)$$

onde  $h$  é o *módulo de encruamento*, definido como:

$$h = \frac{2}{3} a - \sqrt{\frac{2}{3}} c (\mathbf{N} : \mathbf{B}) \quad (2.17)$$

Dessa forma, chega-se a expressão para o multiplicador plástico:

$$\dot{\gamma} = \frac{2\mu}{2\mu + h} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{N}) \quad (2.18)$$

### 2.3. Lei de encruamento cinemático de Chaboche

Leis de endurecimento não lineares baseados na relação de Armstrong-Frederick podem expressadas na forma de expansão dos tensores de encruamento cinemático. Foi postulado por Chaboche et. al. (1979) que o tensor de encruamento cinemático é composto por um somatório de termos do tipo Armstrong-Frederick, conforme:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i, \quad \dot{\mathbf{B}}_i = \frac{2}{3} a_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - c_i \dot{p} \mathbf{B}_i, \quad (2.19)$$

onde  $a_i$  e  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são constantes dos materiais. Usualmente, três termos – um linear e dois não lineares – costumam ser suficientes para uma descrição satisfatória dos ciclos de histerese, conforme sugestão de Chaboche (1986). No presente estudo, esta é a aproximação adotada:

$$\dot{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2 + \dot{\mathbf{B}}_3, \quad (2.20)$$

onde,

$$\dot{\mathbf{B}}_1 = \frac{2}{3} a_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - c_1 \dot{p} \mathbf{B}_1, \quad (2.21)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_2 = \frac{2}{3} a_2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - c_2 \dot{p} \mathbf{B}_2, \quad (2.22)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_3 = \frac{2}{3} a_3 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (2.23)$$

Neste modelo, o módulo de encruamento plástico  $h$  pode ser obtido a partir da relação de consistência, fornecendo:

$$h = \frac{2}{3} (a_1 + a_2 + a_3) - \sqrt{\frac{2}{3}} [c_1 (\mathbf{N} : \boldsymbol{\beta}_1) + c_2 (\mathbf{N} : \boldsymbol{\beta}_2)]. \quad (2.24)$$

### 2.4. Lei de encruamento cinemático de Jiang (1994)

#### 2.4.1. Modelo

Da mesma forma que na proposta de Chaboche, o modelo de Jiang propõe a decomposição aditiva dos tensores de encruamento cinemático:

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{B}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, M, \quad (2.25)$$

onde cada termo  $\dot{\mathbf{B}}^{(i)}$  é expresso como:

$$\dot{\mathbf{B}}^{(i)} = d^{(i)} r^{(i)} \left[ \mathbf{N} - \left( \frac{\|\mathbf{B}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)} + 1} \mathbf{L}^{(i)} \right] \dot{p} \quad (2.26)$$

Na Eq. 2.30,  $d^{(i)}$  e  $r^{(i)}$  são constantes do material,

$$\mathbf{L}^{(i)} = \frac{\mathbf{B}^{(i)}}{\|\mathbf{B}^{(i)}\|} \quad (2.27)$$

e

$$\|\mathbf{B}^{(i)}\| = \sqrt{\mathbf{B}^{(i)} : \mathbf{B}^{(i)}}. \quad (2.28)$$

Neste caso, o módulo de encruamento plástico é expresso como:

$$h = \sum_{i=1}^m d^{(i)} r^{(i)} \left[ 1 - \left( \frac{\|\mathbf{B}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)} + 1} \mathbf{L}^{(i)} : \mathbf{N} \right] + \sqrt{2} \frac{dk}{dp}. \quad (2.29)$$

O modelo de Jiang é uma generalização do modelo de Chaboche. Isso pode ser apresentado desenvolvendo a Eq. 2.26 com os expoentes  $\chi^{(i)} = 0$ .

$$\dot{\mathbf{B}}^{(i)} = d^{(i)} r^{(i)} \left[ \mathbf{N} - \frac{\|\mathbf{B}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \mathbf{L}^{(i)} \right] \dot{p}, \quad (2.30)$$

$$\dot{\mathbf{B}}^{(i)} = d^{(i)} r^{(i)} \left[ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\|\mathbf{B}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \frac{\mathbf{B}^{(i)}}{\|\mathbf{B}^{(i)}\|} \dot{p} \right], \quad (2.31)$$

ou seja,

$$\dot{\mathbf{B}}^{(i)} = d^{(i)} r^{(i)} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - d^{(i)} \dot{p} \mathbf{B}^{(i)} \quad (2.32)$$

Desta forma, nota-se que as Eqs. 2.19 e 2.32 são similares e, portanto, o modelo de Jiang pode ser entendido como uma generalização do modelo de Chaboche.

#### 2.4.2. Influência dos parâmetros $\chi^{(i)}$ no modelo de Jiang

Neste ponto, vale reproduzir os estudos de Y. Jiang e P. Kurath (1996) sobre modelos de plasticidade do tipo Armstrong-Frederick, com ênfase no modelo de Jiang. Eles

destacaram o efeito mínimo que a variação de  $\chi^{(i)}$  tem para uma simulação uniaxial. Conforme descrito, as curvas apresentadas na Fig. 2.2 foram obtidas pela condução de uma série de simulações numéricas, onde a sensibilidade do modelo foi examinada.

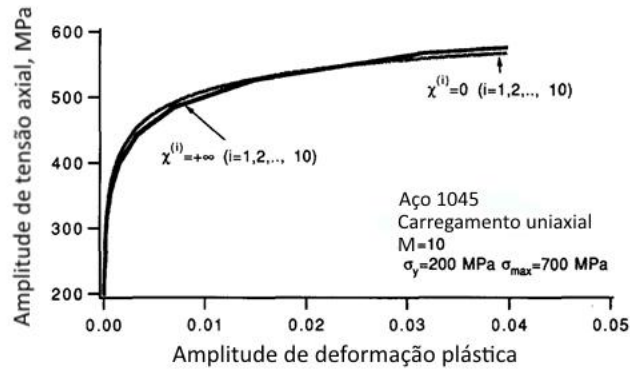


Figura 2.2- influência da variação de  $\chi^{(i)}$  em um carregamento uniaxial Jiang e Kurath. (1996)

A conclusão dos autores para este caso é que, quando  $\chi^{(i)}$  tende à zero, a curva tensão deformação plástica é mais suave em comparação com a curva quando  $\chi^{(i)}$  tende ao infinito.

Jiang e Kurath analisaram, ainda, a influência do  $\chi^{(i)}$  em simulações com trajetórias elípticas, conforme apresentado a seguir.

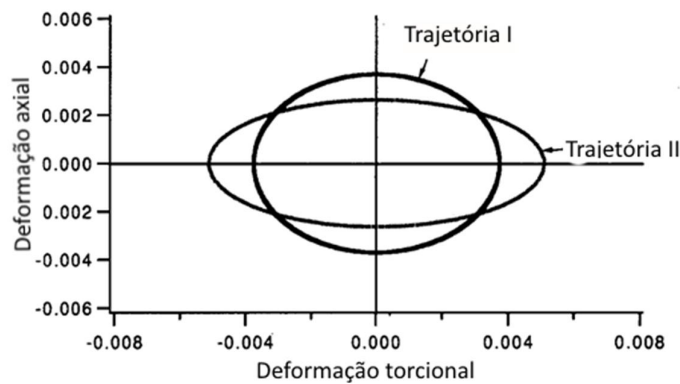


Figura 2.3 - Trajetória experimental de carregamento não proporcional, Fatemi (1985, apud Y. Jiang e P. Kurath, 1996).

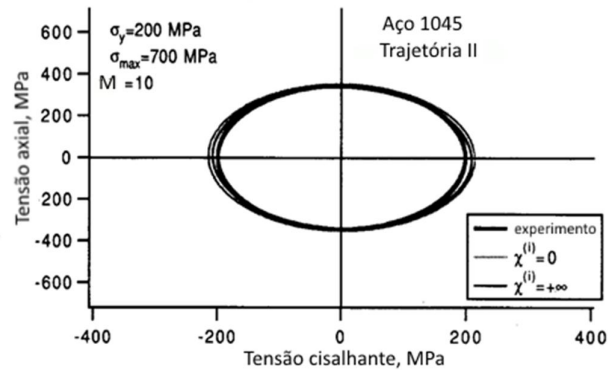


Figura 2.4 - Efeito da variação de  $\chi^{(i)}$ , Jiang e Kurath (1996).

Da mesma forma que aconteceu com o carregamento uniaxial, os autores concluíram que  $\chi^{(i)}$  tem um impacto mínimo na simulação da deformação para a trajetória elíptica I e II apresentadas na Fig. 2.4.

### 2.4.3. Influência do número de parcelas do modelo de Jiang

Jiang e Kurath também geraram resultados para avaliar a influência do número de parcelas do tensor de encruamento cinemático na qualidade das simulações. Na análise feita por eles, apresentada na Fig. 2.5, o número de termos no tensor de encruamento cinemático é examinado com  $\chi^{(i)} = 5$ .

A conclusão de Jiang e Kurath (1996) foi que a expansão com 3 termos apresenta algum desvio das outras, mas os dados convergem depois de 5-10 termos, ou seja, a solução é assintótica. Ademais, pequenas diferenças são encontradas de forma mais pronunciada em deformações plásticas menores, conforme pode ser observado na Fig. 2.5.

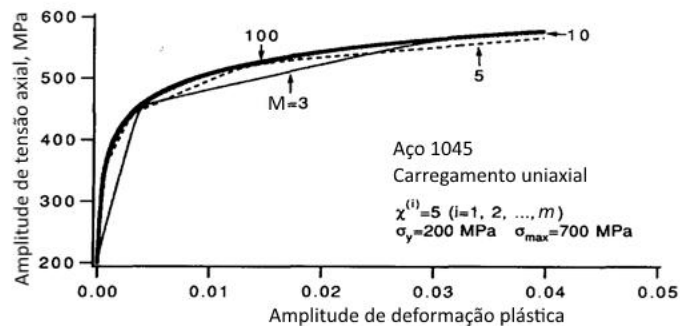


Figura 2.5 - efeito do número de tensores de encruamento cinemático para um carregamento uniaxial. Jiang e Kurath, (1996).

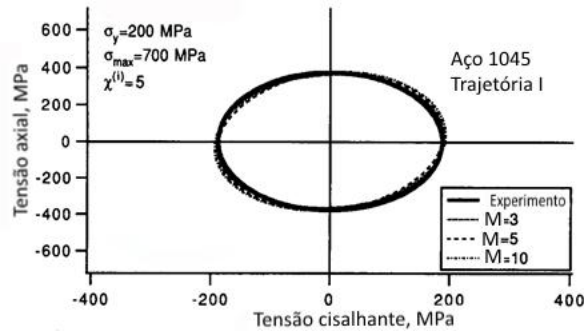


Figura 2.6 - Influência do número de parcelas do tensor de encruamento cinemático. Comparação de dados experimentais Fatemi (1988) e simulação numérica. Jiang e Kurath (1996).

Com relação à trajetória elíptica, Jiang e Kurath concluíram que a simulação previu bem o comportamento para os diferentes números de termos no tensor de encruamento cinemático para a trajetória I e II, Fig. 2.3. Conforme a conclusão de Jiang e Kurath (1996), esta informação serve para reforçar a noção de que o modelo de plasticidade de Jiang, assim com os outros modelos do tipo Armstrong-Frederick, não são excessivamente sensíveis aos parâmetros estudados e que, usando um julgamento razoável, os analistas podem escolher as constantes e fazer análises corretas quantitativamente e qualitativamente.

#### 2.4.4. Identificação dos Parâmetros:

Sabe-se que o endurecimento no modelo de endurecimento cíclico é diferente do modelo monotônico por causa dos efeitos induzidos pelo carregamento cíclico. Neste contexto, é usual utilizar a amplitude das tensões e deformações para descrever os loops de histerese.

Dentro do contexto da análise do comportamento de Masing, Y. Jiang e J. Zhang (2008) argumentam que a equação de Ramberg-Osgood pode não descrever bem o loop de histerese tensão-deformação ou as curvas de tensão-deformação plástica cíclicas. Neste contexto, Jiang e Zhang (2008) propuseram uma equação alternativa para obter a curva formada pelos picos dos laços de histerese das curvas tensão-deformação.

$$\Delta \varepsilon^p = a \left( \frac{\Delta \sigma - \Delta \sigma_0}{\Delta \sigma_u - \Delta \sigma} \right)^m \quad (2.33)$$

em que  $a$ ,  $m$ ,  $\Delta \sigma_u$  e  $\Delta \sigma_0$  são parâmetros obtidos pelo ajuste da expressão aos dados experimentais  $\Delta \varepsilon^p$  e  $\Delta \sigma$ . Jiang e Zhang (2008), descreveram que a equação acima descreve muito bem a curva do loop de histerese sob tensão e compressão axial.



De acordo com Jiang e Zhang,  $\Delta\sigma_u/2$  pode ser aproximado como a tensão de ruptura e  $\Delta\sigma_0/2$  como a tensão de escoamento do material.

Os parâmetros  $d^{(i)}$  e  $r^{(i)}$  do modelo de Jiang podem ser determinados da seguinte forma:

$$d^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{2}{\Delta\varepsilon_{(i)}^p}} \quad (2.34)$$

$$H^{(i)} = \frac{\Delta\sigma_{(i)} - \Delta\sigma_{(i-1)}}{\Delta\varepsilon_{(i)}^p - \Delta\varepsilon_{(i-1)}^p} \quad (2.35)$$

$$r^{(i)} = \frac{2}{3} \frac{H^{(i)} - H^{(i+1)}}{c^{(i)}} \quad (2.36)$$

Os valores das  $i$ -ésimas faixas  $\Delta\sigma$  e  $\Delta\varepsilon^p$  são obtidos na curva de tensão deformação plotada de acordo com a figura apresentada a seguir:

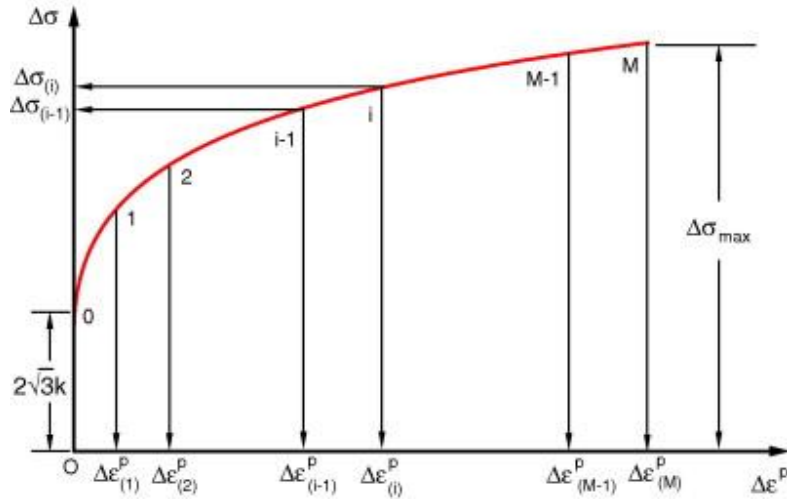


Figura 2.7 - Gráfico da amplitude de tensão pela amplitude de deformação proposto por Jiang (1996) para obter os parâmetros dos materiais  $r$  e  $d$ .

#### 2.4.5. Superfície de memória:

De acordo com Jiang (1994), com a finalidade de melhorar a capacidade de predição dos modelos numéricos, alguns autores sugeriram a necessidade da existência de uma superfície de memória que pudesse melhorar a capacidade de representar os comportamentos observados experimentalmente.

A superfície seria responsável por captar o comportamento de ciclos anteriores que podem influenciar nos ciclos que estão sendo simulados. Diante disso, Jiang (1994) argumentou que variáveis cinemáticas e isotrópicas básicas não tem a capacidade de descrever os efeitos da memória de deformação plástica.

A fim de formular um modelo com memória de deformação plástica, Chaboche (1979, apud Y. Jiang, 1994) introduziu uma nova variável interna para rastrear a deformação. O conceito usa uma superfície de memória no espaço da deformação plástica. Esta deformação proposta pode transladar e expandir no espaço das deformações plástica e o raio dessa superfície de memória representa a amplitude da maior deformação plástica de todo histórico de carregamento. Neste caso, quando o estado de deformação plástica está fora da superfície de memória, a tensão de escoamento não muda. McDowell (1985, apud Y. Jiang, 1994) incorporou um termo de recuperação na evolução da superfície de memória, permitindo a contração da superfície quando a deformação plástica está fora da superfície de memória.

Y. Jiang (1994) ressalta ainda que observações experimentais de carregamentos com passos múltiplos e comportamento não Masing revelaram que a memória da maior amplitude de tensão não é eficiente para medir o tamanho da superfície de memória com a evolução dos ciclos, sugerindo que a habilidade de contrair a superfície de memória é necessária para a descrição do comportamento transiente em muitos materiais.

De acordo com Y. Jiang (1996), a superfície de memória é introduzida no espaço desviador para melhorar a predição do comportamento transiente. As mudanças na resposta da tensão-deformação podem ocorrer quando a magnitude do carregamento é alterada no experimento. A função escalar  $g$  é usada para representar esta superfície

$$g = \|\mathbf{B}\| - R_m \leq 0 \quad (2.37)$$

onde  $\|\mathbf{B}\|$  é a magnitude do tensor de encruamento cinemático. A evolução da variável  $R_m$ , raio da superfície de memória, é definida como:

$$dR_m = H(g)\langle L: d\mathbf{B} \rangle - c_m \langle 1 - \frac{\|\mathbf{B}\|}{R_m} \rangle dp \quad (2.38)$$

em que  $H$  é representada da seguinte forma

$$\begin{cases} H(g) = 1, se g \geq 0 \\ H(g) = 0, se g < 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

De acordo com Y. Jiang (1994), quando o tensor de encruamento cinemático total está na superfície de memória e está se movendo para fora, a superfície de memória se expande e a condição  $g = 0$  é satisfeita. Quando o tensor de encruamento cinemático está se movendo dentro da superfície de memória, a superfície de memória pode se contrair ( $c_m > 0$ ) com subsequente deformação plástica. O comportamento da superfície de memória pode ser melhor observado usando a Fig.2.8.

Esta habilidade da superfície de se contrair, encontra reflexo experimental onde a superfície de memória de eventos anteriores decai com novos ciclos. A superfície de memória no ciclo estabilizado tem raio que é o máximo  $\|\mathbf{B}\|$  do tensor de encruamento cinemático  $\mathbf{B}$  em um histórico de carregamento sob ciclo estabilizado. Y. Jiang observa, ainda, que o valor instantâneo de  $R_m$  reflete mais fortemente o carregamento mais recente que o histórico inteiro.

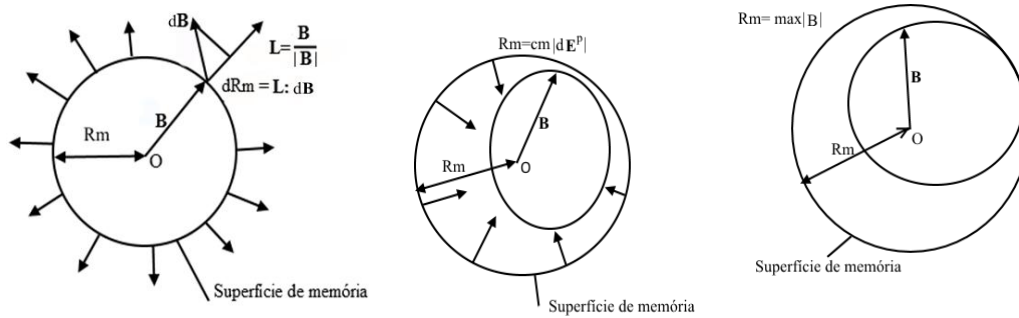


Figura 2.8 - comportamento da superfície de memória em relação ao tensor de encruamento cinemático Jiang e Sehitoglu (1996)

Conforme apresentado por Jiang (1994), diversos conceitos de superfície de memória já foram desenvolvidos. A diferença entre os conceitos de superfície de memória existentes está na escolha entre o espaço da deformação plástica ou da tensão, amplitude de tensão-deformação ou tensão-deformação máxima para medir o efeito da memória, além da existência, ou não, de um termo de recuperação para a memória. Chaboche et al. (1979 apud Jiang, 1994), Ohno (1982 apud Jiang, 1994), Ohno et al. (1986 apud Jiang, 1994) desenvolveram superfícies de memória baseadas na deformação plástica e usaram a amplitude de deformação como o parâmetro para recuperação.

Por fim, Jiang (1994) concluiu que a tensão máxima é mais apropriada para medir a superfície de memória do que a amplitude da tensão. Isto foi refletido na escolha do máximo  $\|\mathbf{B}\|$  como raio da superfície de memória.

#### 2.4.6. Comportamento de Masing:

O paper de Y. Jiang e J. Zhang (2008) discute o comportamento de Masing observado quando os loops de histerese em diferentes amplitudes de deformação são apresentados. Com os picos inferiores unidos em um único ponto, os pontos superiores dos loops formam uma curva, conforme observado na Fig. 2.9.

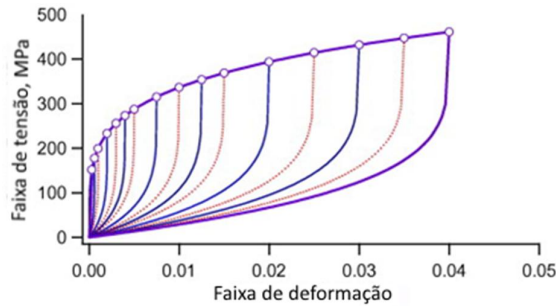


Figura 2.9 ilustração esquemática do comportamento de Masing. Zhang e Jiang (2008)

Conforme Jiang e Zhang (2008), foram observados que alguns materiais em certas condições se comportam de acordo com a regra de Masing. Conforme descrito no citado paper, o cobre em algumas condições e procedimentos experimentais pode atender a esse comportamento. O aço inox 304 e outras ligas ferrosas e não ferrosas podem apresentar esse comportamento. Foi descrito que metais com uma fina dispersão de partículas e metais com baixo nível de empacotamento atômico podem exibir o comportamento de Masing. Entretanto, para um alto empacotamento em que o ciclo de deformação é controlado pela matriz, o ciclo tensão – compressão não atende ao comportamento de Masing. Nestes casos, o comportamento de Masing foi observado abaixo da tensão de escoamento. Acima da tensão de escoamento, notou-se um comportamento diferente da previsão de Masing, que foi acompanhado por deslocamentos da microestrutura das células.

Ainda sobre o assunto, Jiang e Zhang concluiu que o comportamento de Masing indica que as microestruturas estão estáveis diante das mudanças induzidas pelo processo de fadiga. Por fim, Jiang disse que a maioria dos materiais metálicos exibem comportamento diferente da proposta feita por Masing.

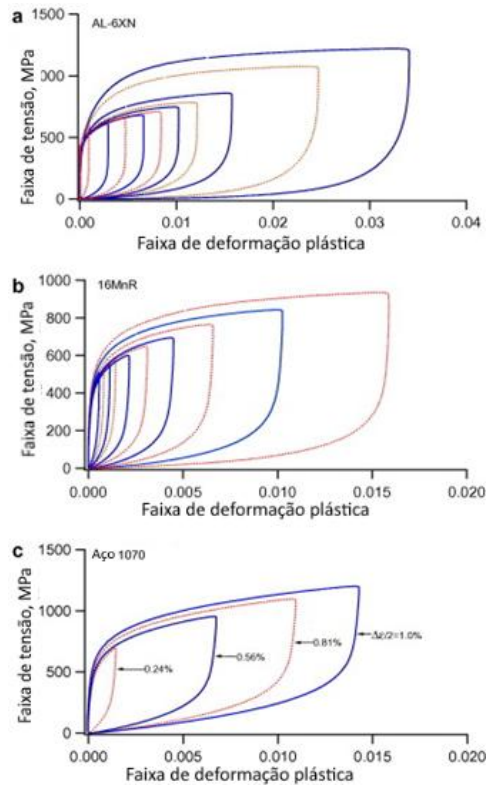


Figura 2.10 ciclos de histerese estabilizado tensão deformação com comportamento não Masing. Jiang e Zhang (2008).

#### 2.4.7. Comportamento não-Masing:

Este comportamento se refere a não similitude dos loop de histerese observado nos experimentos sob diferentes amplitudes de carregamento, conforme pode ser visto na Fig. 2.10. Como o efeito está ligado ao carregamento recente, o tamanho da superfície de memória pode ser utilizado para modelar este comportamento. Jiang (1996) sugeriu a relação a seguir para simular o comportamento não Masing dos materiais:

$$\tau_y = \tau_{y_1} (1 + a_k e^{c_k R_m}) \quad (2.40)$$

Em que  $a_k$  e  $c_k$  são constantes.

### 3. DISCRETIZAÇÃO DO MODELO DE JIANG

Este capítulo apresenta o algoritmo de integração do modelo de Jiang com superfície de memória, utilizando o esquema de Euler explícito.

Admitem-se conhecidos: a deformação total  $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\varepsilon}(t_n)$ , a deformação plástica  $\boldsymbol{\varepsilon}_{p\ n} = \boldsymbol{\varepsilon}_p(t_n)$ , os tensores de encruamento cinemático  $\mathbf{B}_n^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)}(t_n), i = 1, \dots, M$  no pseudo-instante  $t_n$ . Prescreve-se um incremento de deformação total  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , de modo que a deformação total no pseudo-instante  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  seja dado por  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ . O algoritmo tem como objetivo calcular as variáveis de estado  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \mathbf{B}_{n+1}^{(i)}, i = 1, \dots, M$ , assim como o tensor tensão  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  no pseudo-instante  $t_{n+1}$ .

Como etapa inicial, admite-se que o incremento na deformação total produza uma resposta elástica do material, ou seja, sem evolução da deformação plástica ou dos tensores que descrevem o tensor de encruamento cinemático. Assim, calcula-se um tensor tensão tentativa no espaço das tensões desviadoras e verifica-se se o mesmo está ou não contido no domínio elástico:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = [\lambda(tr\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \Delta\boldsymbol{\varepsilon}] + \boldsymbol{\sigma}_n, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{S}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) \mathbf{I}. \quad (3.2)$$

Com estas informações é possível verificar se o estado de tensão tentativa está contido no domínio elástico:

$$f_{n+1}^{trial}(\mathbf{S}, \mathbf{B}) = \|\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{B}_n\|^2 - 2\tau_y^2 \leq 0. \quad (3.7)$$

Se  $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ , então o passo é efetivamente elástico e, portanto:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B}_{n+1} = \mathbf{B}_n. \quad (3.9)$$

Por outro lado, se  $f_{n+1}^{trial} > 0$ , então o passo é plástico. Calcula-se o multiplicador plástico como:

$$\Delta\gamma = \frac{2\mu}{2\mu + h} (\Delta\mathbf{e} : \mathbf{N}_n), \quad (3.10)$$

onde:

$$h = \sum_{i=1}^m d^{(i)} r^{(i)} \left[ 1 - \left( \frac{\| \mathbf{B}_n^{(i)} \|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)+1}} \mathbf{L}_n^{(i)} : \mathbf{N}_n \right] + \sqrt{2} \frac{d\tau_y}{dp}, \quad (3.11)$$

é o módulo de encruamento,

$$\Delta \mathbf{e} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \quad (3.12)$$

é a parcela desviadora do tensor de deformação total e

$$\mathbf{N}_n = \frac{\mathbf{S}_n - \mathbf{B}_n}{\| \mathbf{S}_n - \mathbf{B}_n \|} \quad (3.13)$$

é a normal à superfície de escoamento. Na Eq. 3.11, tem-se ainda:

$$\mathbf{L}^{(i)} = \frac{\mathbf{B}^{(i)}}{\| \mathbf{B}^{(i)} \|}. \quad (3.14)$$

De posse do multiplicador plástico, calcula-se o incremento da deformação plástica:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \Delta \gamma \mathbf{N}_n, \quad (3.15)$$

e o incremento do tensor tensão desviadora:

$$\Delta \mathbf{S} = 2\mu [\Delta \mathbf{e} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p]. \quad (3.16)$$

O tensor tensão no pseudo-instante  $t_{n+1}$  pode então ser calculado como:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \Delta \mathbf{S}, \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} + \kappa [\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon})] \mathbf{I} \quad (3.18)$$

onde

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (3.19)$$

A discretização da Eq. 2.26 fornece a expressão

$$\mathbf{B}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{B}_n^{(i)} + d^{(i)} r^{(i)} \left[ \mathbf{N}_n - \left( \frac{\| \mathbf{B}_n^{(i)} \|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)+1}} \mathbf{L}_n^{(i)} \right] \Delta p \quad (3.20)$$

para o incremento do tensor de encruamento cinemático, onde

$$\Delta \mathbf{p} = \left( \frac{2}{3} \Delta \mathbf{e}_p : \Delta \mathbf{e}_p \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

Entretanto, a integração explícita do tensor de encruamento cinemático por meio da Eq. 3.20 pode não satisfazer de maneira exata a condição de consistência. No presente estudo, adota-se um procedimento alternativo, impondo-se explicitamente a condição de persistência:

$$f_{n+1} = \|\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{B}_{n+1}\|^2 - 2\tau_y^2 = 0. \quad (3.22)$$

Neste procedimento, o novo tensor de encruamento cinemático é calculado como

$$\mathbf{B}_{n+1} = \mathbf{B}_n + \Delta \hat{\gamma} \mathbf{Y}_n \quad (3.23)$$

onde

$$\mathbf{Y}_n = \sum_{i=1}^m \sqrt{\frac{2}{3}} d^{(i)}_{\mathbf{r}^{(i)}} \left[ \mathbf{n} - \left( \frac{\|\mathbf{B}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{x^{(i)+1}} \mathbf{L}^{(i)} \right]. \quad (3.24)$$

é a direção da evolução do tensor de encruamento cinemático, enquanto o escalar  $\hat{\gamma}$  é calculado de modo a garantir a condição de persistência. Substituindo a Eq. 3.23 na Eq. 3.22, tem-se:

$$\|\mathbf{S}_{n+1} - (\mathbf{B}_n + \Delta \hat{\gamma} \mathbf{Y}_n)\|^2 - 2\tau_y^2 = 0. \quad (3.25)$$

Desenvolvendo-se a Eq. 3.25, obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}_{n+1} - (\mathbf{B}_n + \Delta \hat{\gamma} \mathbf{Y}_n)\|^2 &= \|\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{B}_n\|^2 - 2(\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{B}_n) : \Delta \hat{\gamma} \mathbf{Y}_n \\ &+ \|\mathbf{Y}_n\|^2 \Delta \hat{\gamma}^2 = 4\tau_y^4 \end{aligned} \quad (3.26)$$

ou, de maneira equivalente:

$$\frac{\|\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{B}_n\|^2 - 2(\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{B}_n) : \Delta \hat{\gamma} \mathbf{Y}_n + \|\mathbf{Y}_n\|^2 \Delta \hat{\gamma}^2}{\|\mathbf{Y}_n\|^2} = \frac{4\tau_y^4}{\|\mathbf{Y}_n\|^2} \quad (3.27)$$

Definindo:

$$J = \frac{\|\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{B}_n\|^2 - 4\tau_y^4}{\|\mathbf{Y}_n\|^2} \quad (3.28)$$

e



$$Q = \frac{(\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{B}_n) : \mathbf{Y}_n}{\|\mathbf{Y}_n\|^2}, \quad (3.29)$$

pode-se reescrever a Eq. 3.27 como:

$$f_{n+1} = J - 2Q\Delta\hat{\gamma} + \Delta\hat{\gamma}^2 = 0. \quad (3.30)$$

O valor da menor raiz pode ser calculada como:

$$\Delta\hat{\gamma} = Q - \sqrt{Q^2 - J} \quad (3.29)$$

Desta forma, a substituição da Eq. 3.29 na Eq. 3.23 fornece o tensor de encruamento cinemático  $\mathbf{B}_{n+1}$ , que satisfaz a condição de persistência.

Para se levar em conta o efeito memória, calcula-se a evolução da superfície de memória pela discretização da Eq. 2.35:

$$\Delta R_m = H(g_n) \langle \mathbf{L}_n : \Delta \mathbf{B}_n \rangle - c_m \left\langle 1 - \frac{\|\mathbf{B}_n\|}{R_{m_n}} \right\rangle \Delta p, \quad (3.30)$$

A influência da superfície de memória na tensão de escoamento é calculada então como:

$$\tau_{y_{n+1}} = \tau_{y_1} (1 + a_k e^{c_k R_{m_{n+1}}}) \quad (3.31)$$

## 4. RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados de diversas simulações em que os materiais 1045 HR e SAE 1070 são submetidos a carregamentos axial com amplitude de deformação uniaxial crescente, decrescente, desbalanceado, proporcional e não proporcional elíptico.

Os algoritmos descritos no capítulo anterior foram implementados em linguagem Python e biblioteca Numpy.

### 4.1 Modelo de Jiang sem superfície de memória

Esta seção apresenta os resultados de simulações para o aço HR 1045. O efeito de memória não é levado em consideração nas simulações uma vez que não se dispõe dos dados experimentais necessários à identificação dos respectivos parâmetros.

As propriedades dos materiais do aço 1045 HR apresentados na Tabela 4.1, foram obtidas por Leese e Morrow (1985).

Tabela 4. 2 - Propriedades do aço 1045. Leese e Morrow (1985).

$H'$	1258 MPa
$n'$	0,208
$E$	202 GPa
$\nu_e$	0,3
$a$	65300 MPa
$c$	362,4

Além desses dados, a tensão última  $\sigma_u = 690$  MPa foi obtida no portal eletrônico [www.matweb.com](http://www.matweb.com).

A partir da Eq. 2.33 pode - se, utilizando as amplitudes de tensão da curva de Ramberg-Osgood para obter o  $\Delta\sigma$  e, por meio de regressão não linear, encontra-se os parâmetros  $a = 0.006704$  e  $m = 1.3879$ .

Dessa forma, a partir das Eqs. 2.35, 2.36 e 2.37 é possível obter os parâmetros materiais  $d^{(i)}$  e  $r^{(i)}$  necessários para encontrar as curvas tensão-deformação para o modelo de Jiang.

Sendo assim, foi proposto uma simulação uniaxial com cinco parcelas para o tensor de encruamento cinemático. A partir do procedimento descrito na seção 2.4.4, foram obtidos os parâmetros apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - parâmetros dos materiais para o Aço 1045 - Jiang.

$i$	$\Delta\varepsilon^p$ (%)	$d^{(i)}$	$r^{(i)}$ (Mpa)
1	0.02363	619.0	97.6
2	0.01014	161.0	111.16
3	0.05832	28.0	88.89
4	0.07776	21.0	42.21
5	1.79449	0.91	51.96
6	5.44	-	-

Desta forma, utilizando o histórico de deformação crescente apresentado na Fig. 4.1, foram encontrados os gráficos de amplitude de tensão por amplitude de deformação apresentados na Fig. 4.2.

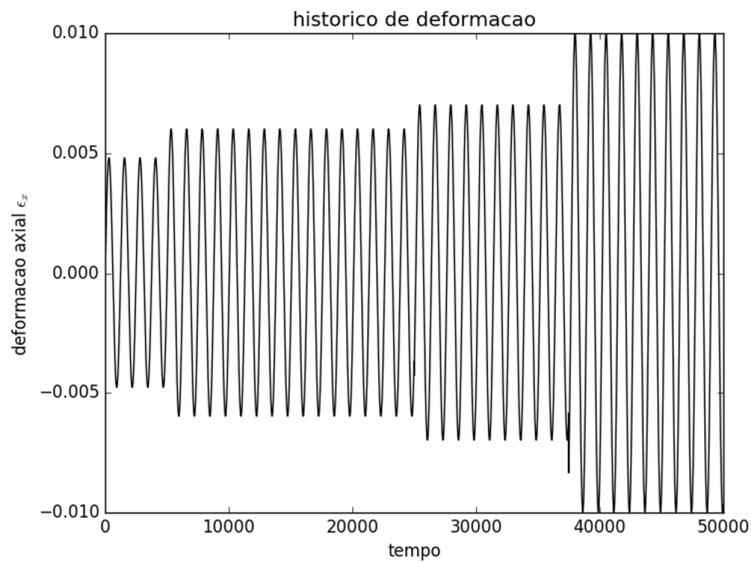


Figura 4.1 histórico de deformação uniaxial crescente

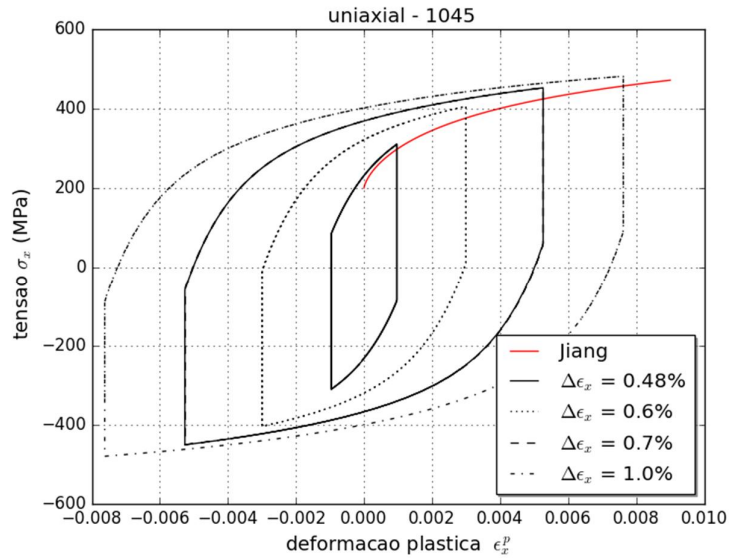


Figura 4.2 Ciclos estabilizados da faixa de tensão e faixa de deformação. Aço 1045 utilizando os parâmetros dos materiais encontrados utilizando a equação proposta por Jiang.

As curvas apresentadas sugerem um comportamento do tipo não Masing para o material.

Foi proposto então a simulação de não proporcional elíptica, conforme Fig. 4.3.

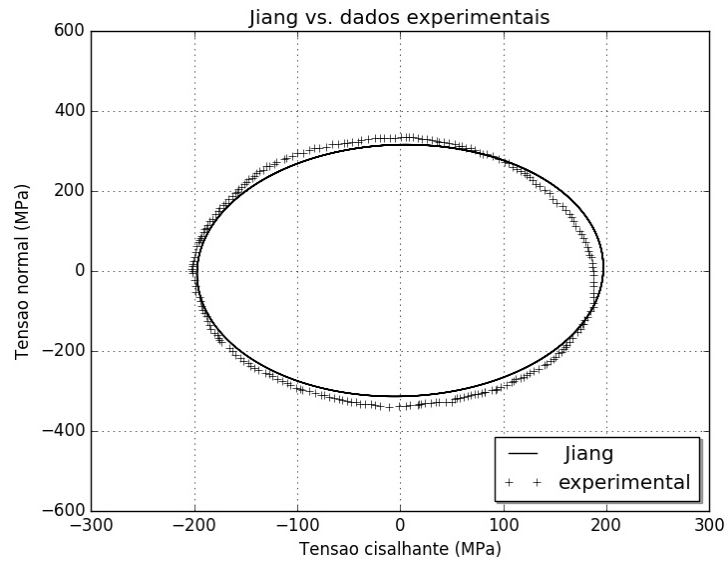


Figura 4.3 - Comparação entre os modelos utilizando os parâmetros dos materiais obtidos da Tab. 4.2, trajetória de deformação elíptica com amplitude de deformação  $\Delta\epsilon_{xy}/2 = 0.511\%$  e  $\Delta\epsilon_x/2 = 0.264\%$

A partir da figura 4.3 pode se concluir que o modelo teve boa aderência aos dados experimentais. Este resultado vai ao encontro dos resultados obtidos por Jiang (1994).

#### 4.2 Modelo de Jiang com superfície de memória

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações para o aço SAE 1070 sem a superfície de memória e, em seguida, os resultados utilizando a superfície de memória.

A Tabela 4.3 apresenta os parâmetros do material SAE 1070 obtidos por meio de dados experimentais e obedecendo os procedimentos descritos na seção 2.4.4.

Tabela 4.3 - parâmetros do material 1070.

$I$	$d^{(i)}$	$r^{(i)}$ (MPa)
1	1510	266.85
2	461	4.51
3	177	3.66
4	77	3.08
5	39	2.66
6	20	2.36
7	12	2.10
8	6.7	1.84
9	4.8	1.67
10	2.7	1.71
$c_m = 10 \quad \tau_{y_1} = 92.7 \text{ MPa} \quad a_k =$ $0.0361 \quad c_k = 0.0094 \text{ MPa}^{-1} \quad \chi^{(i)} = 2$		

Inicialmente, considerou-se uma simulação com carregamento tração-compressão alternada com cinco blocos de amplitudes crescentes de deformação, conforme a Fig. 4.4. As faixas de deformação  $\Delta\varepsilon_x$ : 0.48%, 1.12%, 1.62% e 2.0% foram as mesmas consideradas em Jiang (1994).

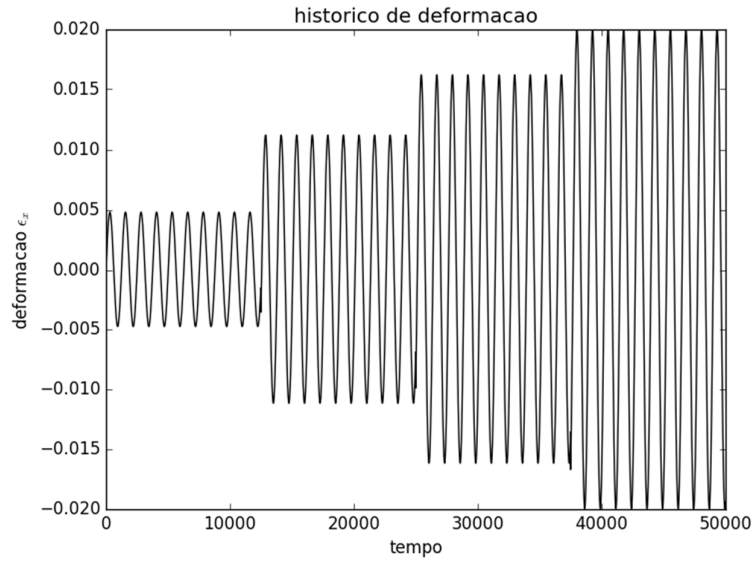


Figura 4.4 - histórico de deformação uniaxial com amplitude crescente.

A Fig. 4.5 apresenta os ciclos de histerese tensão – deformação plástica correspondentes. Neste gráfico (em outros similares que se seguem), os ciclos de histereses são alinhados pela extremidade inferior, de modo que o efeito de Masing possa ser avaliado. De fato, os ciclos mostram que este efeito é aproximadamente reproduzido nas simulações.

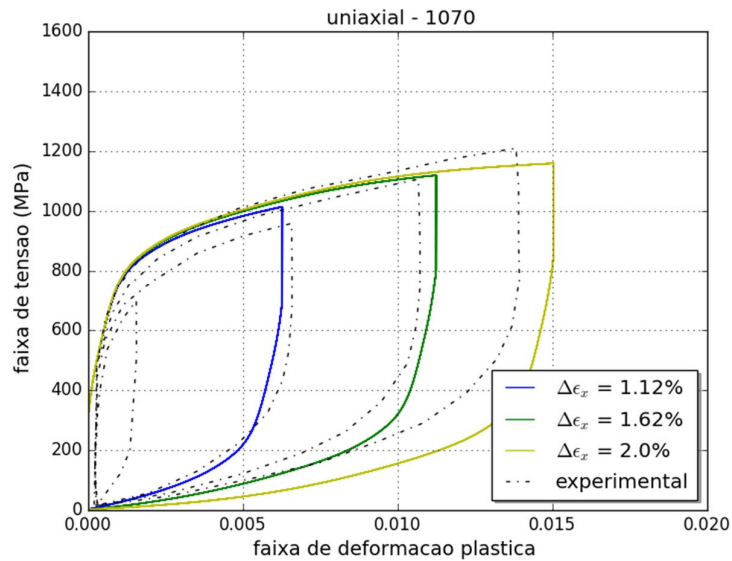


Figura 4.5 - Ciclos estabilizados da faixa de tensão e amplitude de deformação plástica. Histórico de deformação uniaxial com amplitude crescente e sem a superfície de memória.

Observa-se que a simulação de Jiang sem a superfície de memória não simulou de forma adequada o comportamento experimental.

### 4.3 Superfície de memória no modelo de Jiang

Nesta seção são apresentadas algumas simulações que permitem avaliar o efeito da superfície de memória em históricos de deformação proporcionais e não proporcionais.

A Fig. 4.5 sugere que a simulação não foi capaz de representar de forma adequada o comportamento do aço SAE 1070. Desta forma, foi feita a simulação com a superfície de memória com os parâmetros materiais apresentados na Tab. 4.4. e obteve-se o resultado apresentado na Fig. 4.6.

Tabela 4.4 - parâmetros do material 1070. Y. Jiang e H. Sehitoglu (1996)

$i$	$d^{(i)}$	$r^{(i)}$ (MPa)
1	1510	63.5
2	461	63.5
3	177	63.5
4	77	63.5
5	39	63.5
6	20	63.5
7	12	63.5
8	6.7	63.5
9	4.8	63.5
10	2.7	245
$c_m = 10$ $\tau_{y_1} = 92.7$ MPa $a_k =$ $0.0361$ $c_k = 0.0094$ MPa <sup>-1</sup> $\chi^{(i)} = 2$		

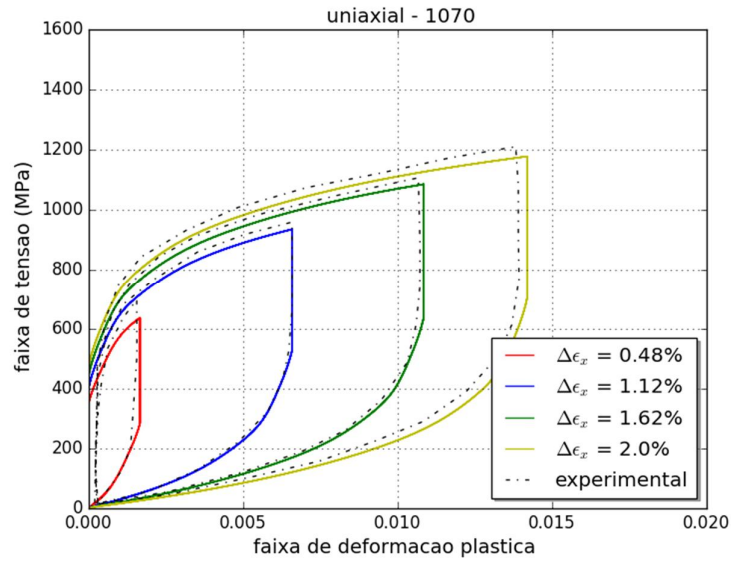


Figura 4.6- Ciclos estabilizados da faixa de tensão e amplitude de deformação plástica. Histórico de deformação uniaxial com amplitude crescente e utilizando a superfície de memória.

Pode ser observado que o efeito não Masing fica mais evidente quando utilizada a superfície de memória na simulação. Desta forma, ela se adequa melhor ao comportamento observado experimentalmente.

Conforme apresentado anteriormente, a superfície de memória deve ter a capacidade de expandir e de se contrair a fim de melhorar a capacidade do modelo de representar os experimentos de plasticidade cíclica.

Sendo assim, para demonstrar a capacidade de contração da superfície de memória foi feita uma simulação uniaxial com faixas de deformação de 0.48%, 0.9% e 0.48%, conforme apresentado na Fig. 4.8.



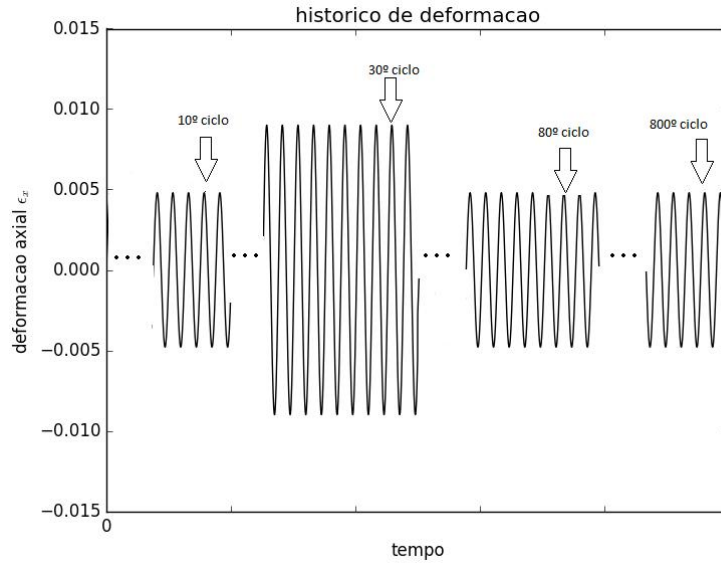


Figura 4.7 – histórico de deformação uniaxial. Contração da superfície de memória.

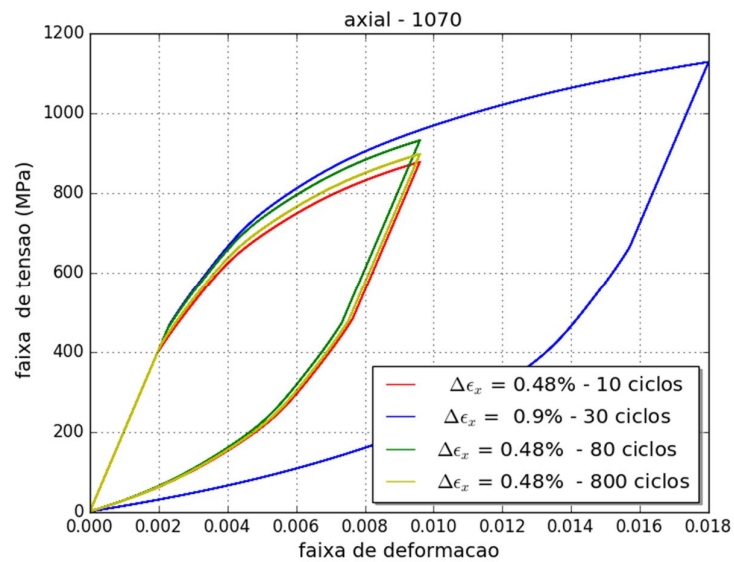


Figura 4.8 - Ciclos de histerese. Simulação uniaxial decrescente.

Observa-se da Fig. 4.8 que a superfície de memória se expande inicialmente e, com a evolução da simulação, a superfície de memória se contrai, provocando uma redução da tensão de escoamento do material.

O comportamento citado acima é observado pois o raio da superfície de memória  $R_m$  influencia diretamente na tensão de escoamento, desta forma, ela cresce com o aumento do raio da superfície de memória e diminui com a contração da superfície de memória. Este resultado é consequência da evolução da Eq. 2.40 na simulação.

Pode ser observado a partir da Eq. 2.38 que o raio da superfície de memória cresce na ordem da evolução do tensor de encruamento cinemático e se contrai na ordem da deformação plástica, ou seja, a velocidade de crescimento é muito maior que a de contração.

Para entender melhor o comportamento do modelo e da superfície de memória, foram simulados outros históricos de deformação. Um deles com deformação repetida, Fig. 4.9, e outro simulando um carregamento flutuante, Fig. 4.12.

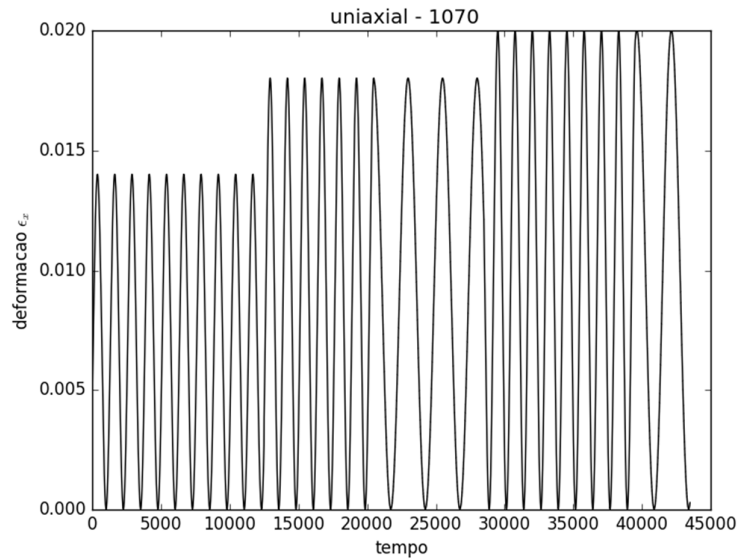


Figura 4.9 -histórico de deformação uniaxial – carregamento repetido.

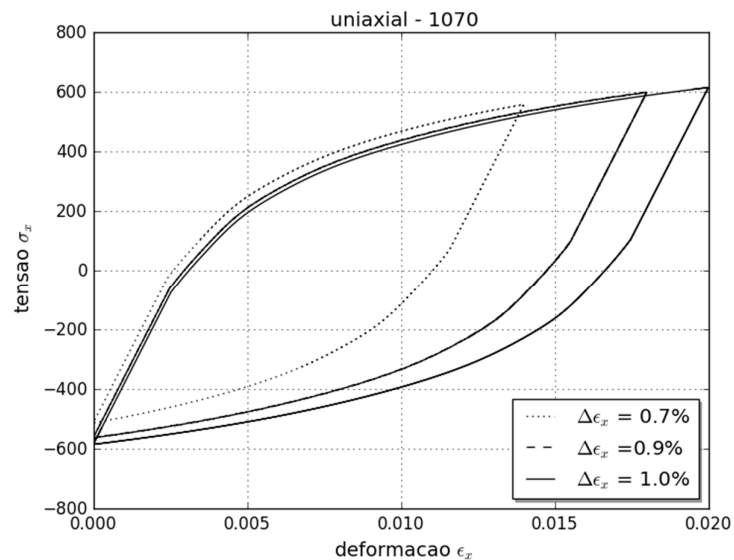


Figura 4.10 – Ciclos estabilizados dos gráficos tensão-deformação plástica. Deformação média diferente de zero e utilizando a superfície de memória

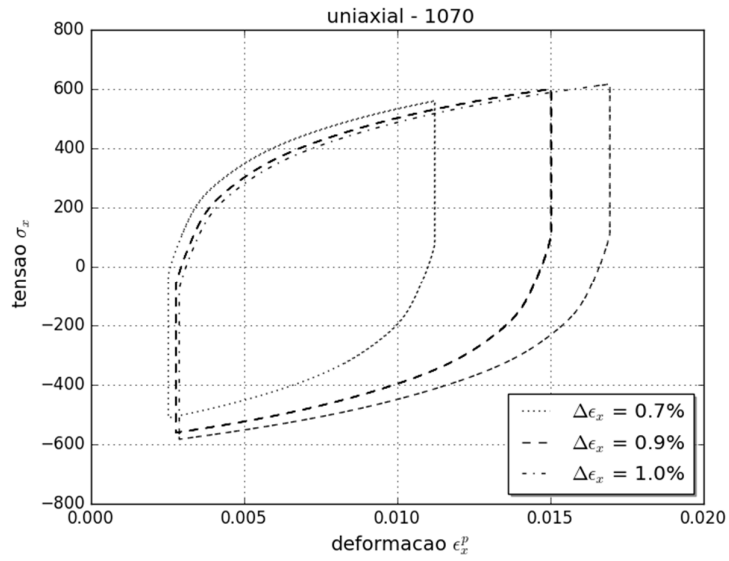


Figura 4.11 – Ciclos estabilizados dos gráficos tensão-deformação. Deformação média diferente de zero e utilizando a superfície de memória

Ainda com o objetivo verificar a capacidade do modelo, foi proposto um histórico de deformação que permita a simulação de um carregamento flutuante não repetido. Conforme observado na Fig. 4.12.

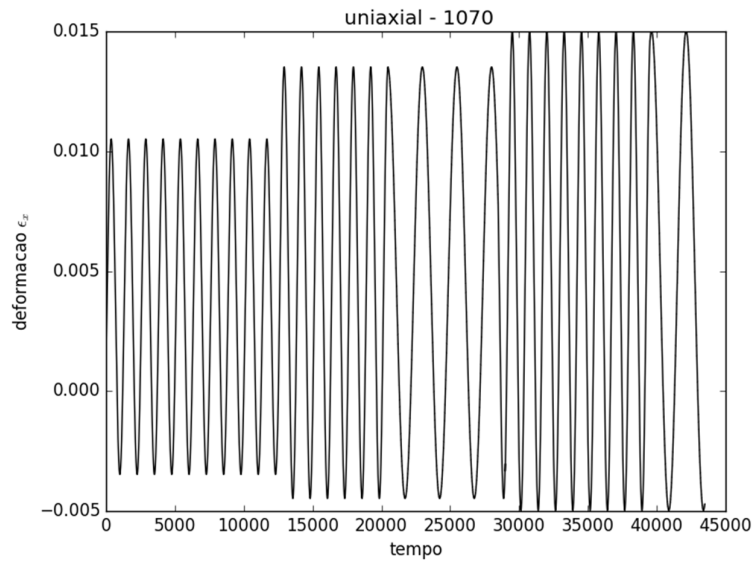


Figura 4.12 - Histórico de deformação uniaxial - carregamento flutuante não repetido.

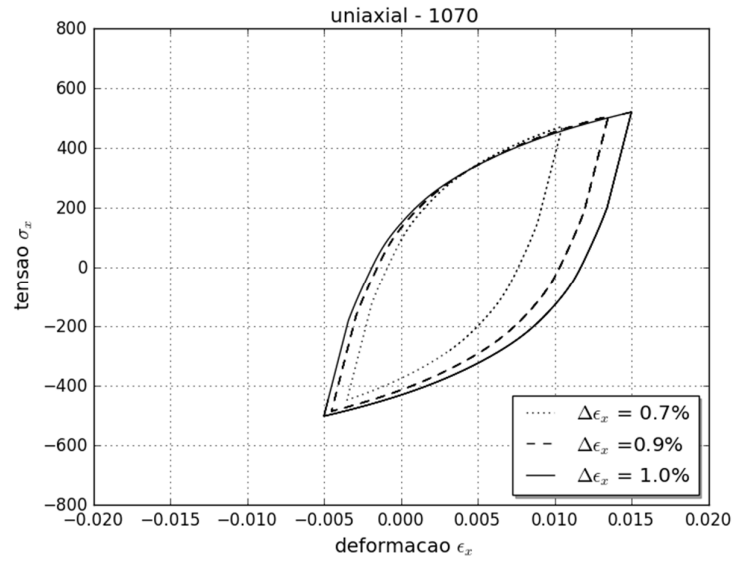


Figura 4.13 -- Ciclos estabilizados dos gráficos tensão-deformação. Deformação média diferente de zero, carregamento flutuante e utilizando a superfície de memória.

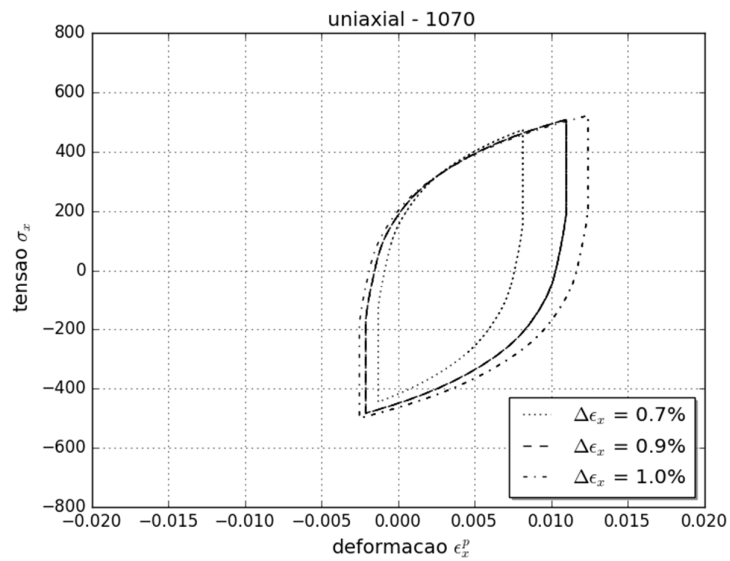


Figura 4.14 -- Ciclos estabilizados dos gráficos tensão-deformação plástica. Deformação média diferente de zero, carregamento flutuante e utilizando a superfície de memória.

Continuando a análise, foi proposto que o algoritmo a simulação do histórico proporcional, ou seja, com deformação axial e torcional na mesma fase, conforme Figs. 4.15 e 4.16. Desta forma, foram obtidos os resultados apresentados nas Figs. 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20.

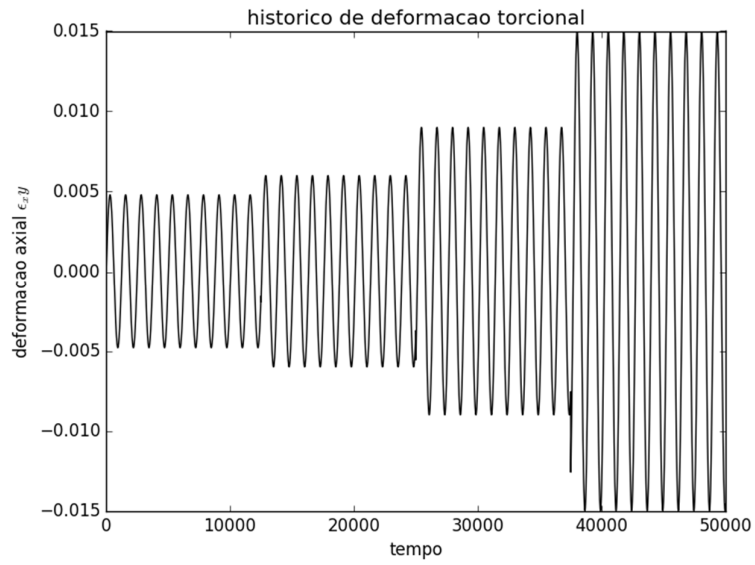


Figura 4.15 - histórico de deformação proporcional - torcional.

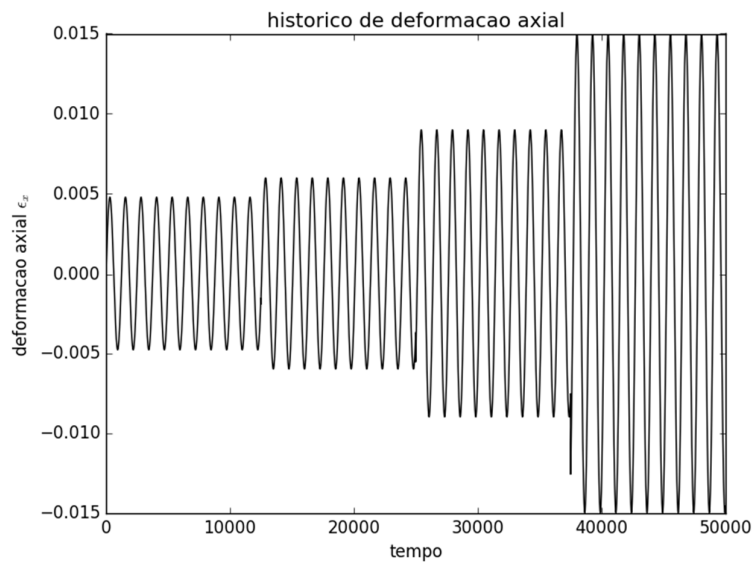


Figura 4.16 - histórico de deformação proporcional - axial

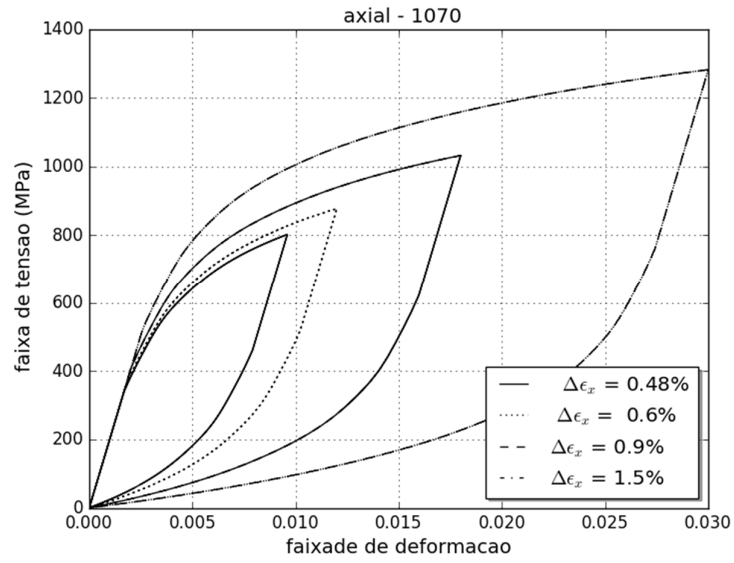


Figura 4.17 – Simulação proporcional- deformação da componente normal - com superfície de memória – axial

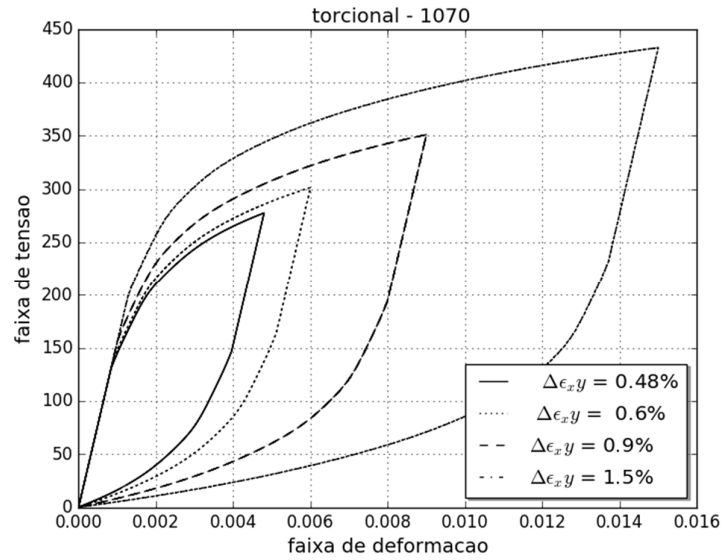


Figura 4.18 - Simulação proporcional - deformação da componente cisalhante - com superfície de memória

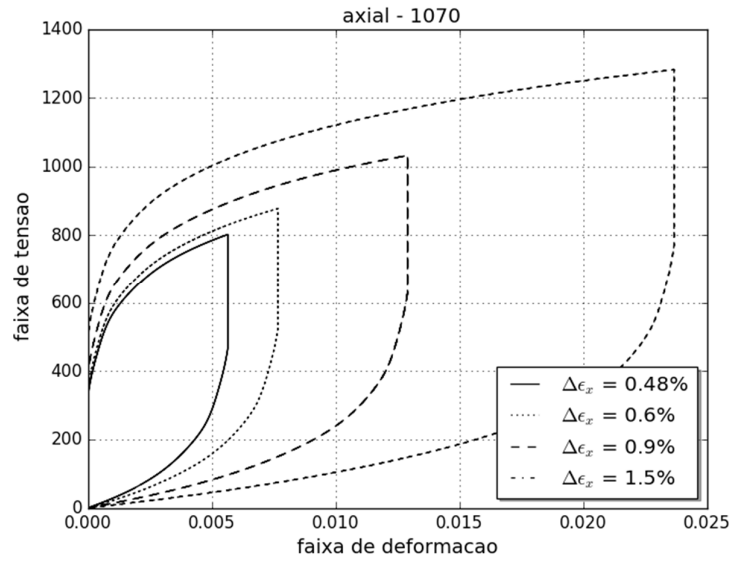


Figura 4.19 – Simulação proporcional - deformação plástica - com superfície de memória – axial

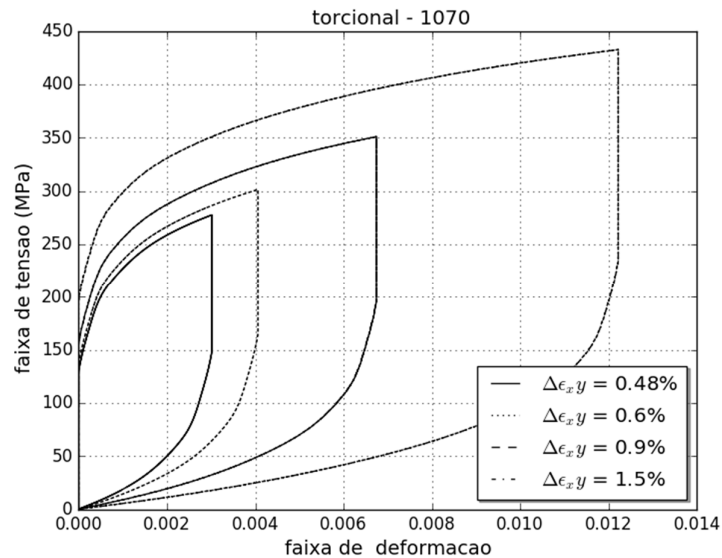


Figura 4.20 – Simulação proporcional. Deformação cisalhante plástica - com superfície de memória.

Nota-se das Figs. 4.17 a 4.20 que a influência da superfície de memória nas componentes axial e cisalhante na simulação proporcional é similar à simulação uniaxial.

Continuando, o algoritmo foi submetido a uma simulação não proporcional. Dessa forma foi analisado um histórico elíptico, eqs. 4.1 e 4.2, com variação das amplitudes de deformação apresentada na Tab. 4.5, conforme Fig. 4.21.

Sendo assim, as Fig. 4.22 apresenta o gráfico de tensão axial-cisalhante obtido a partir do histórico elíptico com deformação crescente.

$$\varepsilon_x(t) = \Delta\varepsilon_x \text{sen}(wt) \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{xy}(t) = \Delta\varepsilon_{xy} \text{sen}(wt - 90^\circ) \quad (4.2)$$

Tabela 4.5 – Amplitudes de deformação utilizados nos históricos de deformação elíptico.

$\Delta\varepsilon_x$	$\Delta\varepsilon_{xy}$
0.3%	0.65%
0.37%	0.67%
0.4%	0.7%

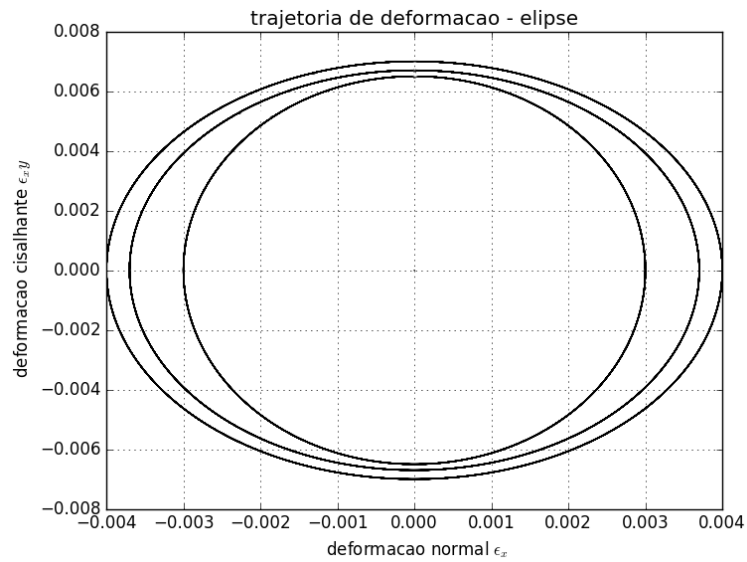


Figura 4.21 - Histórico de deformação elíptico não proporcional.



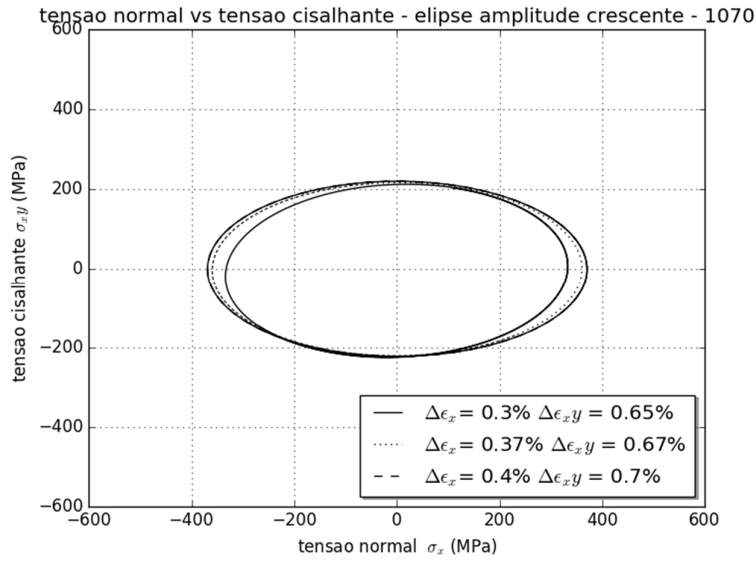


Figura 4.22 - Gráfico tensão normal - tensão cisalhante - não proporcional. Amplitude de deformação crescente. Com superfície de memória.

A seguir são apresentados os gráficos com dos componentes do tensor tensão resultante da simulação não proporcional com a superfície de memória.

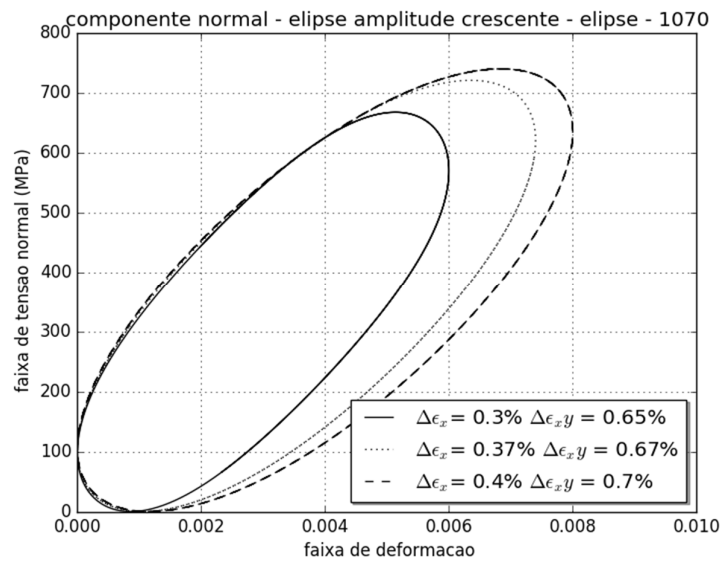


Figura 4.23 - Comportamento da tensão normal durante a simulação não proporcional elíptico. Amplitude de deformação crescente. Com superfície de memória.

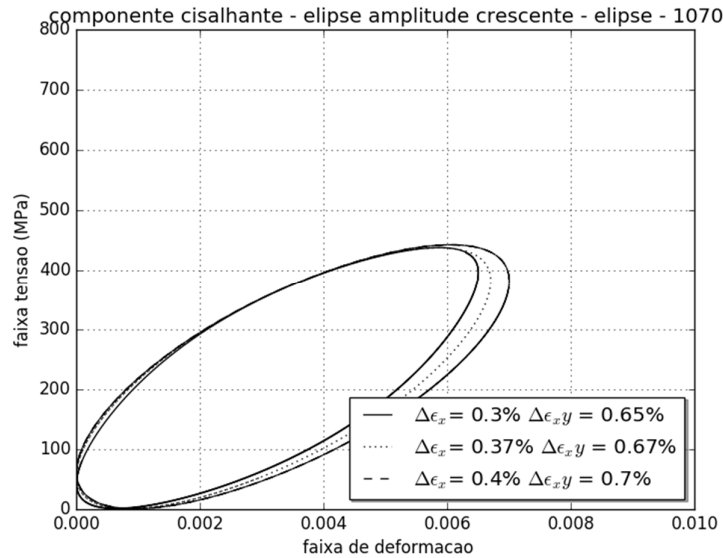


Figura 4.24 - Comportamento da tensão cisalhante durante a simulação não proporcional elíptica. Amplitude de deformação crescente. Com superfície de memória.

Em uma análise preliminar, para o caso de histórico de deformação não proporcional elíptico, não é possível identificar o comportamento não Masing simulação não proporcional.

#### 4.4 Comparação entre os modelos de Jiang e Chaboche

Tendo em vista que os modelos de Jiang e de Chaboche são do tipo Armstrong-Frederick, é possível obter os parâmetros materiais de Jiang a partir dos parâmetros dos materiais utilizados no modelo de Chaboche. Utilizando o procedimento apresentado na seção 2.4.1 é possível comparar os modelos utilizando os parâmetros dos materiais do modelo de Chaboche.

Neste contexto, a expectativa é que os modelos apresentem uma resposta idêntica, uma vez que pode se entender que o modelo de Jiang é uma generalização do modelo de Chaboche.

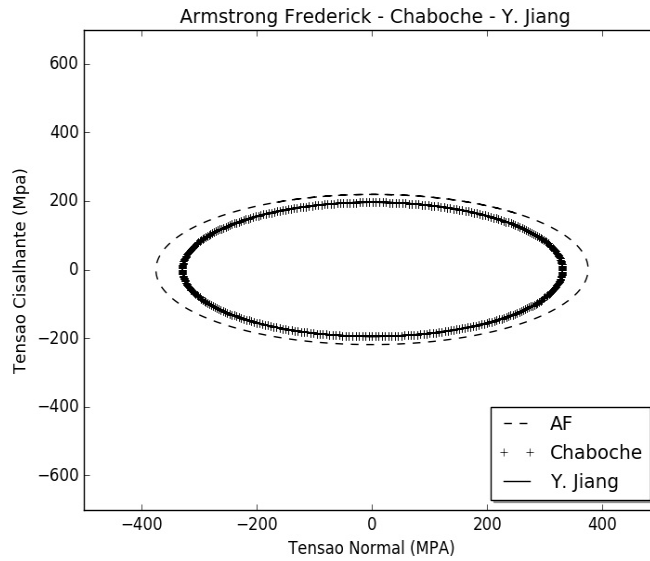


Figura 4.25 - Comparação entre os modelos utilizando os parâmetros dos materiais da Tab. 4.1, A trajetória de deformação elíptica utilizada na comparação tem amplitude de deformação  $\Delta\varepsilon_x = 0.4\%$  e  $\Delta\varepsilon_{xy} = 0.7\%$ .

Pode ser observado a partir da Fig. 4.25 que, conforme esperado, a simulação numérica é idêntica para os modelos de Chaboche e Jiang. Com o intuito de se fazer uma comparação, foi incluída a simulação do modelo de Armstrong-Frederick.

Com a finalidade de estudar os resultados de Jiang e Kurath (1996), foram analisadas a influência

#### 4.5 Influência do $\chi^{(i)}$ no modelo de Y. Jiang

Foi feita uma simulação numérica utilizando os valores das constantes  $d^{(i)}$  e  $r^{(i)}$  obtidas utilizando a seção 2.4.4 para o aço 1045 HR. A simulação obtida foi apresentada na Fig. 4.26.

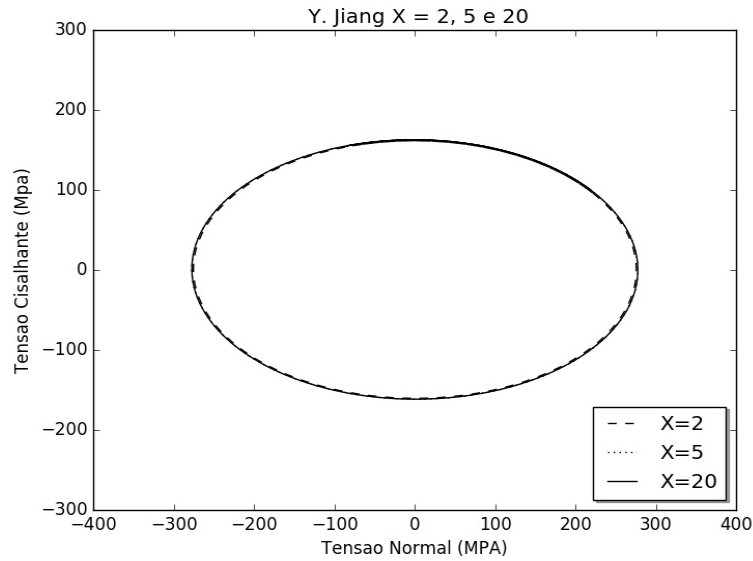


Figura 4.26.- Simulação para o aço 1045, trajetória elíptica com amplitude de tensão para  $\Delta\epsilon_x = 0.007$  e  $\Delta\epsilon_{xy} = 0.004$ . – Y. Jiang

A partir da figura a cima é possível verificar que a variação do  $\chi^{(i)}$  não provoca grandes variações no modelo de Jiang. Entretanto, as tensões obtidas tiveram valores diferentes. Segue tabela com os valores da tensão axial máxima e tensão cisalhante máxima para a trajetória proposta.

Tabela 4.6 - Valores obtidos na simulação utilizando a curva de Y. Jiang (1996)

$\chi^{(i)}$	$\sigma_{max}$ (MPa)	$\sigma_{xy max}$ (MPa)
2	254.45	148.45
5	255.74	148.81
20	256.45	149.18

#### 4.6 Alteração no número de parcelas do modelo de Y. Jiang

Neste tópico, pretende-se apresentar os efeitos da variação do número de parcelas do tensor de encruamento cinemático no modelo de Jiang. Foi utilizado o aço 1045 HR, o histórico de deformação elíptico com amplitudes de deformação  $\Delta\epsilon_x = 0.7\%$  e  $\Delta\epsilon_{xy} = 0.4\%$  e as propriedades do material calculadas a partir do procedimento da seção 2.4.4.

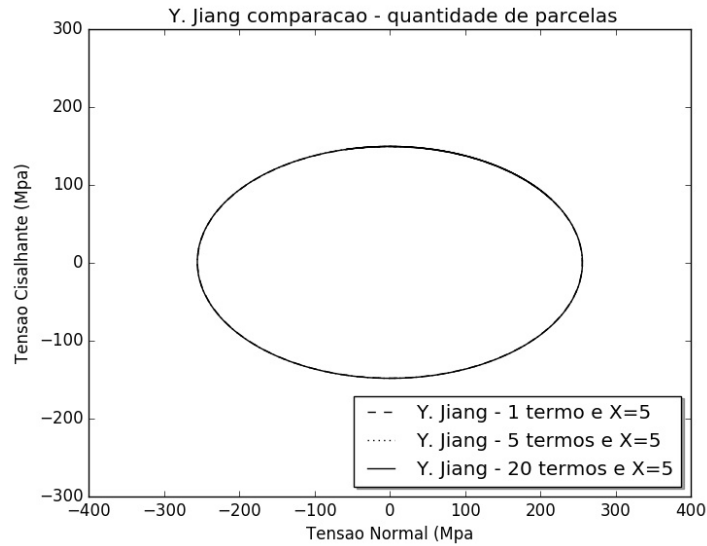


Figura 4.27 - Comparação das tensões máximas variando o número de parcelas do modelo de Y. Jiang utilizando as propriedades do material obtidas no modelo de Jiang.

Tabela 4.7 - Comparação das tensões máximas variando o número de parcelas do modelo de Y. Jiang.

N.º de termos	$\sigma_{max}$ (Mpa)	$\tau_{xy max}$ (Mpa)
1	255.55	148.67
5	255.79	148.84
20	255.80	148.85

Observa-se que para o caso em análise não houve uma mudança considerável quando é variado o número de parcelas do tensor de encruamento cinemático. Este resultado vai ao encontro do estudo de Jiang e Kurath (1996) apresentado neste trabalho.

## 5. CONCLUSÃO

Foi apresentado neste trabalho um estudo do modelo de encruamento cinemático proposto por Jiang (1994), que se destaca em relação ao modelo de Chaboche por considerar, adicionalmente, uma superfície de memória que controla o tamanho do domínio elástico. Resultados de simulações numéricas foram apresentados. Alguns casos foram comparados e validados com simulações feitas por Y. Jiang e P. Kurath (1996). O comportamento de expansão e contração da superfície de memória foi observado em simulações proporcionais e não proporcionais. O modelo descreve os ciclos de histerese de maneira satisfatória no caso do aço 1045HR, para carregamentos axiais e multiaxiais elípticos.

As simulações com o objetivo de observar o efeito não Masing dos materiais, utilizaram a superfície de memória apresentada neste trabalho. Para o material SAE 1070 o modelo de Jiang foi capaz de modelar esse efeito.

Os históricos de deformação com efeito de cross hardening não foram simulados, pois Jiang (1994) propôs que este modelo não seria capaz de simular de forma adequada.

Como recomendações para trabalhos futuros, seguem pontos sugeridos:

- 1) Incorporação do Parâmetro de Tanaka para considerar o encruamento adicional observado sob condições de carregamentos não proporcionais.
- 2) Implementação do algoritmo baseado no modelo de Zhang e Jiang (2008) onde a superfície de memória tem comportamento cinemático ao invés do modelo estudado nesta monografia no qual a superfície de memória observa evolução isotrópica.
- 3) Condução de experimentos de carregamentos elastoplásticos cíclicos, de modo a que o grupo de pesquisa da UnB disponha de resultados necessários ao aprimoramento de modelos de plasticidade cíclica e das consequências sobre a vida à fadiga.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- A. Fatemi, D.F. Socie (1988), A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 11 149–166.
- Dill, H. Ellis, (2007). *Continuum Mechanics. Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity.* CRC Taylor e Francis Group.
- Dowling N E, *Mechanical Behavior of Materials*, 3 ed, Pearson Prentice Hall, 2007.
- E.N. Mamiya, F.C. Castro, L. Malcher (2014), J.A. Araújo, Multiaxial fatigue life estimation based on combined deviatoric strain amplitudes, *Int. J. Fatigue* 117-122.
- F. Auricchio e R.L Taylor (1995). Two Material Models For Cyclic Plasticity: Nonlinear Kinematic Hardening and Generalized Plasticity. *International Journal of Plasticity*, Vol. 11, No 1, pp. 65-98.
- Fatemi, A, Socie,D. (1988). A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-Of-Phase Loading, University of Toledo. *Fatigue Frac. Engng Mater. Struct.* Vol. 11, No. 3, pp 149 – 165, 1988.
- J.L. Chaboche e G. Rousselier (1983), On the plastic and viscoplastic constitutive equations, Parts I and II, *J. Pressure Vessel Technol.* 153-164.
- Jiang, Y., Sehitoglu, H. (1996). Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part I: Development of Constitutive Equations. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp. 720-725.
- Jiang, Y., Sehitoglu, H. (1996). Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part II: Comparison of model Simulations With Experiments. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp. 726-733.
- Jiang, Y., Kurath, P. (1996). Characteristics of the Armstrong-Frederick type plasticity models. *International Journal of Plasticity*, Vol. 12, No. 3, pp. 387-415.
- Jiang, Y ,Zhang J. (2008). Constitutive Modeling of Cyclic Plasticity Deformation of a Pure Polycrystalline Copper. *International Journal of Plasticity*, 24, 1890–1915.
- Jiang, Y. (1993). *Cyclic Plasticity with Emphasis on Ratchetting.* Ph.D. Dissertation, Mechanical Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana.
- Leese, G. E., Morrow, J. (1985). Low Cycle Fatigue Properties of a 1045 Steel in Torsion. *Multiaxial Fatigue.* ASTM STP 853, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, pp. 482-496.
- Prager, W. (1955). The theory of plasticity: a survey of recent achievements. *Proceedings, Institution of Mechanical Engineers*, 169:41-57.

- Pereira F G. (2014), Um Estudo do Parâmetro de Tanaka como Medida do Encruamento Não Proporcional no Contexto da Plasticidade Cíclica, Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília.
- P.J. Armstrong e C.O. Frederick (1966), A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, CEGB Report RD/B/N731, reproduced in *Materials at High Temperature* (2007) 1-26.
- Rees, D. W. A. *Basic Engineering Plasticity. An Introduction With Engineering and Manufacturing Applications*. First edition (2006). Elsevier.
- Simo, J. C., Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity. Interdisciplinary Applied Mechanics, Vol. 7.*, Springer-Verlag, New York.
- Tanaka, E. (1994), A nonproportionality parameter and a cyclic viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects of isotropic hardening, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 13:155-173.
- W. Prager (1949), Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity, *J. Appl. Phys.*, 235-241.
- Y.S. Garud (1981), A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings, *Transactions of the ASME – Journal of Engineering Materials and Technology*, 118-125.
- Z. Mróz (1967), On the description of anisotropic work-hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, 163-175.