

**ANÁLISE DE VIDA À FADIGA SOB
CARREGAMENTOS NÃO PROPORCIONAIS
ATRAVÉS DE MODELO DE DANO CONTÍNUO**

JHONATAN DA PONTE LOPES

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS
MECÂNICAS

**ANÁLISE DE VIDA À FADIGA SOB
CARREGAMENTOS NÃO PROPORCIONAIS
ATRAVÉS DE MODELO DE DANO CONTÍNUO**

JHONATAN DA PONTE LOPES

ORIENTADOR: LUCIVAL MALCHER

**PUBLICAÇÃO ENM.DM-240/2016
Brasília, 01 de agosto de 2016**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

ANÁLISE DE VIDA À FADIGA SOB CARREGAMENTOS NÃO PROPORCIONAIS ATRAVÉS DE MODELO DE DANO CONTÍNUO

JHONATAN DA PONTE LOPES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

Banca examinadora

Prof. Lucival Malcher, PhD (ENM-FT-UnB)
(Orientador)

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, DSc (ENM-FT-UnB)
(Examinador interno)

Prof. Antônio Carlos de Oliveira Miranda, PhD (ENC-FT-UnB)
(Examinador externo)

Prof. José Alexander Araújo, D.Phil (ENM-FT-UnB)
(Suplente)

Brasília, 01 de agosto de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

LOPES, JHONATAN DA PONTE

PREVISÃO DE VIDA EM FADIGA MULTIAXIAL PELO MODELO DE DANO CONTÍNUO DE LEMAITRE. [Distrito Federal] 2016.

173p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2016)

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| 1. Mecânica do dano | 2. Fadiga multiaxial |
| 3. Identificação de parâmetros | 4. Denominador de dano |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (ENM.DM-240/2016) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LOPES, J. P., (2016) Análise de vida à fadiga sob carregamentos não proporcionais através de modelo de dano contínuo. Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM-240/2016, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 173p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Jhonatan da Ponte Lopes.

TÍTULO: Análise de vida à fadiga sob carregamentos não proporcionais através de modelo de dano contínuo.

GRAU: Mestre

ANO: 2016

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Jhonatan da Ponte Lopes

Correio Eletrônico: jhonatan_plopes@hotmail.com

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que esteve comigo em todos os momentos, me capacitando e me ensinando a ser um profissional melhor a cada dia.

Agradeço à minha esposa, Mariana, a mulher da minha vida, por estar sempre ao meu lado incondicionalmente. À minha família, sempre serei grato por terem investido em mim e em meus estudos.

Agradeço, também, ao Prof. Dr. Lucival Malcher, pela orientação essencial e por todo o auxílio durante todos esses anos. Muito obrigado por ter acreditado em mim e ter me encorajado a buscar objetivos cada vez maiores.

Ao Prof. Dr. José Alexander Araújo, agradeço pelo apoio dado durante essa fase, por todas as oportunidades abertas e por todo incentivo profissional. Ao Prof. Dr. Edgar Mamiya, agradeço por todo o suporte durante a graduação e o mestrado.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), agradeço pelos recursos financeiros que possibilitaram a realização deste trabalho.

Jhonatan da Ponte Lopes

RESUMO

Neste trabalho, busca-se utilizar o modelo de dano contínuo de Lemaitre como uma ferramenta de obtenção de vida em fadiga multiaxial para carregamentos proporcionais e não proporcionais. Primeiramente é apresentado o modelo matemático de Lemaitre, em que são formuladas as relações constitutivas necessárias à elaboração do modelo. O modelo de Chaboche foi escolhido para descrever a lei de evolução da tensão de endurecimento cinemático. Em seguida, é desenvolvido o modelo numérico para a solução das equações constitutivas, utilizando a lei de Chaboche com três termos e discretização implícita de Euler. Após, é feita a identificação dos parâmetros constitutivos do modelo para os aços 304 e S460N e para a liga de alumínio 6061-T6. É feita a implementação do modelo em uma rotina em linguagem FORTRAN, a qual é submetida a carregamentos uniaxiais e multiaxiais proporcionais e não proporcionais para cada material. Os dados de vida em fadiga obtidos pelo modelo de Lemaitre são, então, comparados com os dados experimentais disponíveis na literatura. É feita, em seguida, uma análise das amplitudes de tensão obtidas pelo modelo, as quais são comparadas com os dados experimentais. São obtidas, também, curvas de evolução do dano para cada carregamento e material. Os resultados obtidos mostram que o modelo de dano de Lemaitre descreve de maneira adequada o comportamento dos materiais analisados em fadiga de baixo ciclo, quando altas amplitudes de deformação são aplicadas.

Palavras-chave: Mecânica do dano, Fadiga multiaxial, Identificação de parâmetros, Denominador de dano.

ABSTRACT

This project seeks to use Lemaitre's Continuous Damage Model to obtain fatigue life estimates under multiaxial proportional and non-proportional loadings. Initially, the Lemaitre's mathematical model is presented, by formulating the necessary constitutive relations. Chaboche's model was chosen to describe the kinematic hardening law. Then, the numerical model necessary to solve the constitutive relations is developed, utilizing the Chaboche's law with 3 terms and Euler's implicit discretization. Then, the material parameters are identified for 304 and S460N steels and 6061-T6 aluminum alloy. The model is implemented in a FORTRAN routine, which is submitted to uniaxial and proportional and non-proportional multiaxial loading histories. The fatigue life data obtained from Lemaitre's damage model is compared to experimental data. Then, a stress amplitude analysis is conducted and the numerical stresses are compared to experimental data. Damage evolution curves are also obtained for each material and loading. The results show that Lemaitre's damage model describes adequately the behavior of the analyzed materials under low cycle fatigue, when low strain amplitudes are being applied to the specimen.

Keywords: Damage mechanics, Multiaxial fatigue, Parameters identification, Damage denominator.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTO	1
1.2	OBJETIVO E METODOLOGIA	3
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	3
2	ASPECTOS TEÓRICOS	5
2.1	INTRODUÇÃO	5
2.2	FADIGA	5
2.3	CARREGAMENTOS NÃO PROPORCIONAIS	6
2.4	PLASTICIDADE	7
2.5	CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE MISES	8
2.6	MODELOS DE PLASTICIDADE CÍCLICA	9
2.6.1	<i>PRAGER</i>	12
2.6.2	<i>ARMSTRONG-FREDERICK</i>	13
2.6.3	<i>CHABOCHE</i>	13
2.7	MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO	14
2.8	MODELO DE DANO DE LEMAITRE	17
2.8.1	<i>VARIÁVEL DE DANO UNIDIMENSIONAL</i>	19
2.8.2	<i>TENSÃO EFETIVA E PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA DE DEFORMAÇÃO</i>	20
2.8.3	<i>CRITÉRIO DE RUPTURA</i>	20
2.8.4	<i>DANO ISOTRÓPICO TRIDIMENSIONAL</i>	21
2.8.5	<i>EVOLUÇÃO DO DANO</i>	23
2.9	MODELO DE LEMAITRE COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE	23
3	ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO IMPLÍCITA	26
3.1	INTRODUÇÃO	26
3.2	MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO	27
3.3	MODELO DE LEMAITRE COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO	36
3.4	OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE	45
4	ESTRATÉGIA DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS	47
4.1	INTRODUÇÃO	47
4.2	ASPECTOS DE OTIMIZAÇÃO	48
4.2.1	<i>SEÇÃO ÁUREA</i>	52
4.2.2	<i>BISSECÇÃO</i>	54
4.2.3	<i>MÉTODO BFGS</i>	55
4.2.4	<i>ROTINA DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS</i>	58
4.3	RESULTADOS	60
4.3.1	<i>IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DE TENSÃO</i>	60
4.3.2	<i>IDENTIFICAÇÃO DO PARÂMETRO DE DANO</i>	62

5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	68
5.1	INTRODUÇÃO	68
5.2	CARREGAMENTOS	68
5.3	VIDA EM FADIGA.....	71
5.4	ANÁLISE DE TENSÕES.....	75
5.5	EVOLUÇÃO DO DANO	78
5.6	CONCLUSÕES.....	92
6	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES FUTURAS.....	93
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	95
	APÊNDICES.....	100
A.	ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES	100
B.	ROTINA DE IDENTIFICAÇÃO DO DENOMINADOR DE DANO	114
C.	ROTINA DOS CARREGAMENTOS	118

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Superfície de escoamento de von Mises no plano π	9
Figura 2.2 – Superfície de escoamento de von Mises no espaço das tensões principais.	9
Figura 2.3 – Comparação entre os diferentes tipos de endurecimento: (a) Endurecimento ideal; (b) Endurecimento isotrópico; (c) Endurecimento cinemático.	11
Figura 2.4 – Curva tensão-deformação de ciclo estabilizado uniaxial para os modelos de endurecimento isotrópico linear (a), cinemático linear (b) (Prager) e cinemático não linear (c) (Armstrong-Frederick ou Chaboche).	12
Figura 2.5 – Evolução da tensão de endurecimento cinemático (β) em função da taxa de deformação plástica (ϵ^P).	14
Figura 2.6 – Vetor de fluxo N considerando plasticidade associativa para a superfície de escoamento de von Mises (a) no espaço das tensões principais e (b) no plano π	15
Figura 2.7 – Evolução do dano (degradação) no material e formação de vazios e trincas. ...	18
Figura 2.8 – Elemento de volume representativo do corpo Ω no ponto M para a coordenada x	19
Figura 3.1 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.	27
Figura 4.1 – Comparação entre as forças experimentais e as numéricas (Stahlschmidt, 2010).	49
Figura 4.2 – Estrutura do processo de identificação de parâmetros (Stahlschmidt, 2010). ..	51
Figura 4.3 – Estrutura do programa PARFINDER.	58
Figura 4.4 – Estrutura da avaliação da função objetivo.	59
Figura 4.5 – Trajetória uniaxial de tração-compressão imposta para calibração.	62
Figura 4.6 – Evolução do dano em função da determinação do denominador de dano para (a) aço 304, (b) aço S460N; e (c) liga de alumínio 6061-T6.	65
Figura 4.7 – Variação do denominador de dano (S) em função da vida calibrada para (a) aço 304, (b) aço S460N, e (c) Al 6061-T6.	67

Figura 5.1 – Históricos de carregamento impostos para o aço S460N (Jiang et al., 2007). ..	69
Figura 5.2 – Históricos de carregamento impostos para o aço 304 e a liga de alumínio 6061-T6 (Itoh, 2001).	70
Figura 5.3 – Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida estimada numericamente pelo modelo de Lemaitre para: (a) aço 304; (b) aço S460N; e (c) alumínio 6061-T6.	74
Figura 5.4 – Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida estimada numericamente pelo modelo de Lemaitre para o aço 304 sob duas amplitudes diferentes de deformação.	75
Figura 5.5 – Comparação entre as amplitudes de tensão principal observadas experimentalmente e estimadas numericamente para (a) o aço 304, e (b) a liga de alumínio 6061-T6 sob carregamentos multiaxiais.....	77
Figura 5.6 – Evolução do dano para o aço 304 para: (a) caso 1; (b) caso 2; (c) caso 3; (d) caso 4; (e) caso 5; (f) caso 6; (g) caso 7; (h) caso 8; (i) caso 9; e (j) caso 10.	82
Figura 5.7 – Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G) e (H).	86
Figura 5.8 – Evolução do dano para o alumínio 6061-T6 para: (a) caso 1; (b) caso 2; (c) caso 3; (d) caso 4; (e) caso 5; (f) caso 6; (g) caso 7; (h) caso 8; (i) caso 9; e (j) caso 10.	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Modelo elastoplástico com função de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Chaboche.	18
Tabela 2.2 – Variáveis de estado e forças termodinâmicas associadas.	21
Tabela 2.3 – Modelo elastoplástico de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.	25
Tabela 3.1 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.	32
Tabela 3.2 – Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.	33
Tabela 3.3 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.	39
Tabela 3.4 – Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo de Lemaitre. .	40
Tabela 4.1 – Problema de otimização.	48
Tabela 4.2 – Pontos de avaliação da função objetivo para as três primeiras iterações da Fase I.	53
Tabela 4.3 – Algoritmo para o Método da Seção Áurea (Arora, 2004).	54
Tabela 4.4 – Algoritmo para o Método da Bissecção (Stahlschmidt, 2010).	55
Tabela 4.5 – Procedimento de atualização da matriz Hessiana (Arora, 2004).	56
Tabela 4.6 – Algoritmo para o Método BFGS (Arora, 2004).	57
Tabela 4.7 – Parâmetros de Ramberg-Osgood, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson para o aço 304, alumínio 6061-T6 (Itoh, 2001) e aço S460N (Jiang et al., 2007).	61
Tabela 4.8 – Resultados da calibração por amplitude para o modelo de Chaboche e parâmetros da curva de Ramberg-Osgood obtidos da literatura para os aços 304, S460N e alumínio 6061-T6.	61
Tabela 4.9 – Resultados de identificação do denominador de dano para o aço 304.	63
Tabela 4.10 – Resultados de identificação do denominador de dano para o aço S460N. .	63
Tabela 4.11 – Resultados de identificação do denominador de dano para o alumínio 6061-T6.	63
Tabela 4.12 – Resultados de identificação de parâmetros para os aços 304, S460N e o alumínio 6061-T6.	67

Tabela 5.1 – Amplitudes de deformação impostas, vida experimental e vida numérica obtidas para o aço 304 (Itoh, 2001).....	71
Tabela 5.2 – Amplitudes de deformação impostas, vida experimental e vida numérica obtidas para o aço S460N (Jiang et al., 2007).	72
Tabela 5.3 – Amplitudes de deformação impostas, vida experimental e vida numérica obtidas para o alumínio 6061-T6 (Itoh, 2001).	73
Tabela 5.4 – Resultados de amplitude de tensão para o aço 304.	76
Tabela 5.5 – Resultados de amplitude de tensão para a liga de alumínio 6061-T6.....	76

LISTA DE SÍMBOLOS

σ_a	Amplitude de tensão
N_f	Número de ciclos para fadiga
σ_f'	Coefficiente de resistência à fadiga
β	Expoente de resistência à fadiga
σ_m	Tensão média
σ_{ut}	Limite de resistência à tração
σ_{-1}	Limite de resistência à fadiga para um carregamento totalmente reversível
σ_v	Tensão equivalente de von Mises
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais
ϕ	Função de escoamento
σ	Tensor tensão de Cauchy
S	Tensor desviador do tensor tensão
p	Tensor hidrostático do tensor tensão
β	Tensão de endurecimento cinemático
$\dot{\beta}$	Taxa de evolução da tensão de endurecimento cinemático
J_2	Segundo invariante do tensor
η	Tensor relativo
H^k	Módulo de endurecimento cinemático
σ_y	Limite de escoamento
ϵ	Tensor deformação
ϵ^e	Tensor deformação elástica
ϵ^p	Tensor deformação plástica
$\dot{\epsilon}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
b	Constante do material de endurecimento cinemático
m	Número de termos de Chaboche
H_i^k	Módulo de endurecimento cinemático i de Chaboche
b_i	Constante do material i de Chaboche
$\dot{\beta}_i$	Termo i de tensão de endurecimento cinemático de Chaboche
σ_{y0}	Limite de escoamento inicial
\bar{q}	Tensão equivalente de von Mises
N	Vetor de fluxo
$\bar{\epsilon}^p$	Deformação plástica equivalente

$\dot{\varepsilon}^p$	Taxa de variação da deformação plástica equivalente
$\tilde{\sigma}$	Tensor tensão efetivo
p	Tensão hidrostática
G	Módulo de cisalhamento
E	Módulo de Young
ν	Coefficiente de Poisson
\mathbb{D}^e	Tensor constitutivo
D	Variável de dano unidimensional
\mathbf{n}	Normal unitária do RVE
x	Abcissa do RVE
Ω	Corpo arbitrário
σ	Tensão uniaxial
F	Força de tração
A	Área transversal de um elemento cilíndrico
A_D	Área dos microdefeitos
\tilde{E}	Módulo de Young aparente
D_C	Dano crítico
σ_R	Limite de ruptura
σ_u	Limite de resistência
ψ	Potencial termodinâmico
$-\sigma$	Força termodinâmica associada à plasticidade
X	Força termodinâmica associada ao endurecimento cinemático
Y	Força termodinâmica associada ao dano
ψ^{ed}	Potencial termodinâmico devido à elasticidade-dano
ψ^p	Potencial termodinâmico devido à plasticidade
$-Y$	Densidade de energia de deformação
S	Denominador de dano
s	Expoente de dano
$[t_n, t_{n+1}]$	Pseudointervalo de tempo
σ_{n+1}	Tensor tensão no estado $n + 1$
α_{n+1}	Variáveis internas no estado $n + 1$
$\Delta \varepsilon$	Incremento de deformação
$(*)^{trial}$	Estado tentativa
$(*)$	Estado real
ε_n^e	Tensor deformação elástica no estado n
ε_{n+1}^e	Tensor deformação elástica no estado $n + 1$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$	Tensor deformação elástica tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$	Tensor deformação plástica no estado n
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$	Tensor deformação plástica no estado $n + 1$
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$	Tensor deformação plástica tentativa
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$	Tensor tensão no estado $n + 1$
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$	Tensor tensão tentativa
$\boldsymbol{\beta}_n$	Tensão de endurecimento cinemático no estado n
$\boldsymbol{\beta}_{n+1}$	Tensão de endurecimento cinemático no estado $n + 1$
$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial}$	Tensão de endurecimento cinemático tentativa
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$	Deformação plástica equivalente no estado n
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$	Deformação plástica equivalente no estado $n + 1$
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial}$	Deformação plástica equivalente tentativa
$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial}$	Tensor relativo tentativa
\boldsymbol{S}_{n+1}	Tensor desviador da tensão no estado $n + 1$
$\boldsymbol{S}_{n+1}^{trial}$	Tensor desviador da tensão tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}$	Tensor deformação elástica desviador tentativa
ϕ^{trial}	Função de escoamento tentativa
\bar{q}_{n+1}^{trial}	Tensão equivalente de von Mises tentativa
$\Delta\gamma$	Multiplicador plástico
\boldsymbol{I}	Matriz identidade de 2ª ordem
p_{n+1}	Pressão hidrostática no estado $n + 1$
p_{n+1}^{trial}	Pressão hidrostática tentativa
\boldsymbol{II}	Matriz identidade de 4ª ordem
D_n	Variável de dano no estado n
D_{n+1}	Variável de dano no estado $n + 1$
D_{n+1}^{trial}	Variável de dano no estado tentativa
\boldsymbol{N}_{n+1}	Vetor de fluxo no estado $n + 1$
\boldsymbol{p}	Vetor de parâmetros a serem otimizados
$R^{NUM}(\boldsymbol{p})$	Resposta numérica calculada numericamente
$R^{Exp}(\boldsymbol{p})$	Resposta experimental
$f(\boldsymbol{p})$	Função objetivo
F_i^{NUM}	Forças numéricas
F_i^{Exp}	Forças experimentais
$\nabla f(\boldsymbol{p}^*)$	Gradiente de f no ponto \boldsymbol{p}^*
$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}^*)$	Matriz Hessiana de f no ponto \boldsymbol{p}^*

$\mathbf{p}^{(k)}$	Vetor dos parâmetros na iteração k
$\mathbf{d}^{(k)}$	Direção de busca na iteração k
α_k	Comprimento de passo
α^*	Ponto mínimo
I	Intervalo de incerteza
α_{sup}	Limite superior do intervalo de incerteza
α_{inf}	Limite inferior do intervalo de incerteza
ε	Tolerância
\mathbf{c}	Gradiente da função objetivo
ε_a^p	Amplitude de deformação plástica
σ_a	Amplitude de tensão
N	Número de ciclos até a falha (vida)
D_f	Dano obtido no último ciclo pela resposta numérica
N_c	Vida em que o dano se iguala ao dano crítico
N_T	Vida experimental considerada na calibração
H'	Coeficiente de endurecimento cíclico
n'	Expoente de endurecimento cíclico
ε_a	Amplitude de deformação total de tração-compressão imposta
γ_a	Amplitude de deformação total de cisalhamento imposta
N_{EXP}	Vida experimental
N_{NUM}	Vida numérica
η	Nível de triaxialidade
ξ	Terceiro invariante do tensor tensão normalizado
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais
ϕ	Função de escoamento
\mathbf{S}	Tensor desviador do tensor tensão
β	Tensão de endurecimento cinemático
$\dot{\beta}$	Taxa de evolução da tensão de endurecimento cinemático
J_2	Segundo invariante do tensor
$\boldsymbol{\eta}$	Tensor relativo
H^k	Módulo de endurecimento cinemático
σ_y	Limite de escoamento
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor deformação
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tensor deformação elástica
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tensor deformação plástica
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica

$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
b	Constante do material de endurecimento cinemático
m	Número de termos de Chaboche
H_i^k	Módulo de endurecimento cinemático i de Chaboche
b_i	Constante do material i de Chaboche
$\dot{\beta}_i$	Termo i de tensão de endurecimento cinemático de Chaboche
σ_{y0}	Limite de escoamento inicial
\bar{q}	Tensão equivalente de von Mises
\mathbf{N}	Vetor de fluxo
$\bar{\varepsilon}^p$	Deformação plástica equivalente
$\dot{\bar{\varepsilon}}^p$	Taxa de variação da deformação plástica equivalente
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão
\mathbb{D}^e	Tensor constitutivo
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	Tensor tensão efetivo
p	Tensão hidrostática
G	Módulo de cisalhamento
E	Módulo de Young
ν	Coefficiente de Poisson
$[t_n, t_{n+1}]$	Pseudointervalo de tempo
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$	Tensor tensão no estado $n + 1$
$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$	Variáveis internas no estado $n + 1$
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	Incremento de deformação
$(*)^{trial}$	Estado tentativa
$(*)$	Estado real
$\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$	Tensor deformação elástica no estado n
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$	Tensor deformação elástica no estado $n + 1$
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$	Tensor deformação elástica tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$	Tensor deformação plástica no estado n
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$	Tensor deformação plástica no estado $n + 1$
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$	Tensor deformação plástica tentativa
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$	Tensor tensão no estado $n + 1$
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$	Tensor tensão tentativa
$\boldsymbol{\beta}_n$	Tensão de endurecimento cinemático no estado n
$\boldsymbol{\beta}_{n+1}$	Tensão de endurecimento cinemático no estado $n + 1$
$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial}$	Tensão de endurecimento cinemático tentativa
$\bar{\varepsilon}_n^p$	Deformação plástica equivalente no estado n

ε_{n+1}^p	Deformação plástica equivalente no estado $n + 1$
$\varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}}$	Deformação plástica equivalente tentativa
$\eta_{n+1}^{\text{trial}}$	Tensor relativo tentativa
\mathbf{S}_{n+1}	Tensor desviador da tensão no estado $n + 1$
$\mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}}$	Tensor desviador da tensão tentativa
$\varepsilon_{d \ n+1}^{e \ \text{trial}}$	Tensor deformação elástica desviador tentativa
ϕ^{trial}	Função de escoamento tentativa
$\bar{q}_{n+1}^{\text{trial}}$	Tensão equivalente de von Mises tentativa
$\Delta\gamma$	Multiplicador plástico
\mathbf{I}	Matriz identidade de 2ª ordem
p_{n+1}	Pressão hidrostática no estado $n + 1$
p_{n+1}^{trial}	Pressão hidrostática tentativa
\mathbf{II}	Matriz identidade de 4ª ordem
D_n	Variável de dano no estado n
D_{n+1}	Variável de dano no estado $n + 1$
D_{n+1}^{trial}	Variável de dano no estado tentativa
\mathbf{N}_{n+1}	Vetor de fluxo no estado $n + 1$
H'	Coefficiente de endurecimento cíclico
n'	Expoente de endurecimento cíclico
σ_{1max}	Máxima tensão principal em um ciclo de carregamento
$\sigma_1(t)$	Histórico de tensão principal máxima em um ciclo
$\xi(t)$	Ângulo entre $\sigma_1(t)$ e σ_{1max}
σ_{1a}	Amplitude de tensão principal
D_{REL}	Diferença relativa

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO

As demandas por estruturas e componentes cada vez mais leves e robustos estão levando a projetos que chegam aos limites de resistência do material. Para determinar o comportamento dos materiais e componentes quando submetidos aos carregamentos de trabalho, extensivas investigações experimentais são muitas vezes utilizadas, as quais envolvem gastos elevados, não só financeiramente, mas também em tempo de pesquisa. Além disso, em muitos casos, estruturas ou componentes não podem ser ensaiados em condições de trabalho, por não serem acessíveis ou pelo fato de o ensaio não ser economicamente viável (Jiang et al, 2007). As dificuldades associadas à realização de ensaios inevitavelmente levam, então, à necessidade cada vez maior de utilizar ferramentas numéricas para a obtenção das soluções antes obtidas experimentalmente, como os campos de tensão em uma estrutura, por exemplo. É necessário, portanto, elaborar modelos numéricos capazes de descrever de maneira adequada o comportamento desejado do material sob dado carregamento.

Dentre os modos de falha que tais modelos devem descrever, o fenômeno da fadiga se destaca para componentes mecânicos submetidos a cargas variáveis, sendo caracterizada pela fratura do material, devido ao crescimento de microtrincas durante ciclos alternados de carregamento e descarregamento. Suas consequências podem ser catastróficas, a exemplo da explosão durante o voo dos aviões Comet, em 1954, causada por fratura da fuselagem devido à fadiga nas extremidades das janelas (Withey, 1997); e o descarrilamento do trem de alta velocidade alemão ICE, em 1998, devido à fadiga em suas rodas, causando a morte de mais de cem pessoas (Esslinger et al., 2004).

Em condições uniaxiais, como em carregamentos de tração-compressão simples, o fenômeno da fadiga tem sido estudado desde 1860 por Wöhler (1860) em eixos ferroviários e diversos resultados estão disponíveis para descrever a falha do material em carregamentos alternados com tensão média, como os trabalhos de Goodman (1899) e Sodeberg (1939), bem como para descrever a curva amplitude de tensão-vida (Basquin, 1910).

Entretanto, em condições multiaxiais – estado geral de tensões, o fenômeno da fadiga se torna mais complexo. Carregamentos multiaxiais podem ser em fase (carregamentos proporcionais) ou fora de fase (carregamentos não proporcionais) e são encontrados em diversos setores da indústria, como automotiva, aeroespacial e de geração de energia, entre outros (Fatemi et al., 2011). Os primeiros critérios de fadiga multiaxial foram elaborados empiricamente, amparados pelos trabalhos de Gough e Pollard (1935) e Nishihara e Kawamoto (1945), que deram suporte para a elaboração dos modelos de Gough (1950), Sines (1959) e Findley (1959) na década de 1950.

A partir da observação experimental de que as trincas nucleiam e crescem em uma direção preferencial (Socie et al., 1985, 1988; Brown e Miller, 1979 a, b), foram desenvolvidos os modelos de fadiga multiaxial de plano crítico, que consideram que as trincas têm origem em determinados planos materiais nos quais a combinação de tensões é suficientemente severa, como planos de máxima tensão cisalhante ou máxima tensão principal. Modelos de plano crítico foram propostos por Brown e Miller (1973), McDiarmid (1974, 1997), Matake (1997), Socie (1987) e Fatemi e Socie (1988).

Modelos com base nos invariantes do tensor tensão utilizam, por sua vez, medidas associadas à história do tensor tensão (seus invariantes), em vez da sua manifestação em cada plano material. Dentre esses modelos, destacam-se os propostos por Crossland (1956), Sines (1959), Deperrois (1991), Zouain (2006), Dang Van (1973), Papadopoulos et al. (1997), Bin Li et al. (2000) e Mamiya et al. (2002, 2005, 2009).

Nos últimos anos, não somente a previsão de vida em fadiga tem tido importância para setores competitivos da indústria, mas também cada vez mais se destaca a previsão adequada do local e momento da fratura em materiais dúcteis. Desde a década de 1960, diversos modelos de dano foram desenvolvidos para descrever de maneira satisfatória o comportamento macro e microscópico da fratura dúctil em materiais metálicos. Tais modelos analisam a geometria de defeitos em uma matriz contínua utilizando a mecânica de meios contínuos. Dentre os modelos presentes na literatura, destacam-se os elaborados por: McClintock (1968), que considera os defeitos como cilindros; Rice e Tracey (1969), que considera o vazio como uma esfera perfeita; Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) (1977 e 1984), que descreve o comportamento elastoplástico de materiais porosos; e Lemaitre (1985), da mecânica do dano contínuo. Os modelos de Oyane (1980), Cockcroft e Latham (1968) e Johnson e Cook (1985), por sua vez, baseiam-se em observações experimentais para descreverem a fratura do material.

Em geral, os modelos de dano são formulados para preverem fratura sob carregamentos monotônicos com triaxialidade constante (Lemaitre, 1985). Entretanto, sugere-se a utilização de um modelo de dano sob carregamentos multiaxiais para previsão da falha e, conseqüentemente, da vida em fadiga. Assim, os modelos de dano se apresentariam como uma alternativa aos modelos de previsão de vida em fadiga. Dentre os modelos de dano presentes na literatura, destaca-se o modelo de Lemaitre para previsão de vida à fadiga devido à sua simplicidade e boa adequação aos dados experimentais.

Para adequada descrição do comportamento elastoplástico do material em carregamentos cíclicos, é necessário, ainda, descrever o endurecimento cinemático do material. Sob carregamentos não proporcionais, alguns materiais exibem um endurecimento adicional devido à não proporcionalidade (Taira et al., 1968), o que reduz significativamente a vida em fadiga. Para modelar esse comportamento, estão disponíveis modelos empíricos ou modelos constitutivos. Modelos empíricos, como o proposto por Brown et al. (1979), são simples, mas resultam em respostas não acuradas de

tensões e, conseqüentemente, de vida em fadiga (Fatemi et al., 2010). Modelos de plasticidade cíclica, que descrevem o comportamento do material com base em equações constitutivas, geralmente resultam em estimativas bem melhores para carregamentos complexos. Dentre as leis de endurecimento cinemático propostas, destacam-se as formuladas por Prager (1955), Armstrong-Frederick (1966) e Chaboche (1986).

1.2 OBJETIVO E METODOLOGIA

Com base no contexto apresentado, este trabalho tem como objetivo principal implementar o modelo de dano contínuo de Lemaitre, aliado à lei de evolução do tensor tensão de endurecimento cinemático de Chaboche, e avaliar seu desempenho em determinação da vida em fadiga sob carregamentos multiaxiais.

Para isso, é sugerido um modelo em 3D para a integração numérica implícita das equações de evolução. Os algoritmos de atualização das tensões são desenvolvidos e implementados em linguagem FORTRAN. Em seguida, o modelo é calibrado para os aços 304 e S460N e para a liga de alumínio S460N. Após, o modelo desenvolvido é submetido a diversos carregamentos proporcionais e não proporcionais para esses materiais e as vidas em fadiga numéricas são estimadas, as quais são comparadas com vidas obtidas experimentalmente para os mesmos carregamentos. Finalmente, são obtidas as curvas de evolução do dano para cada carregamento aplicado.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Tendo em vista a implementação e avaliação do modelo de Lemaitre, o trabalho foi dividido em seis capítulos. No capítulo 1, são realizadas a contextualização do tema e a definição do objetivo do trabalho.

No capítulo 2, são apresentados os aspectos teóricos referentes à estruturação dos modelos. São mostrados os aspectos básicos sobre plasticidade cíclica e mecânica do dano contínuo. Além disso, o modelo matemático de Lemaitre com endurecimento cinemático segundo a lei de evolução de Chaboche é desenvolvido.

No capítulo 3, são expostas as estratégias numéricas para o algoritmo de integração implícita de Lemaitre, utilizando von Mises como função de escoamento, ou seja, apresentam-se os aspectos numéricos de solução das equações constitutivas através da discretização de Euler e da utilização do método de Newton-Raphson.

No capítulo 4, é feita a identificação dos parâmetros constitutivos do modelo para os aços 304 e S460N e para o alumínio 6061-T6. Primeiramente é apresentada a estratégia de identificação de

parâmetros por meio de método de otimização. Após, os parâmetros de tensão são obtidos, seguidos do denominador de dano.

No capítulo 5, são apresentados os resultados da implementação do modelo de Lemaitre para os aços 304 e S460N e Al 6061-T6, comparando as vidas numéricas obtidas aos dados experimentais disponíveis na literatura. Além disso, são obtidas as curvas de evolução do dano. No capítulo 6, são apresentadas as conclusões e eventuais trabalhos futuros.

2 ASPECTOS TEÓRICOS

2.1 INTRODUÇÃO

A modelagem numérica do modelo de dano está associada à adequada descrição do comportamento elastoplástico do material. Para a implementação desses modelos no contexto da fadiga multiaxial, é necessário apresentar os aspectos teóricos relativos à fadiga, à plasticidade e ao dano. Portanto, neste capítulo será realizada uma revisão bibliográfica sobre fadiga uniaxial e multiaxial, plasticidade e dano contínuo.

Inicialmente, serão apresentados critérios para fadiga uniaxial (Wöhler, 1860; Basquin, 1910) e critérios de fadiga uniaxial, seguidos da apresentação de modelos de fadiga multiaxial e dos experimentos de Itoh (2001) e Jiang et al. (2007). Em seguida, serão apresentados a função de escoamento de von Mises (1913) e os modelos de evolução da tensão de endurecimento cinemático de Prager (1955), Armstrong-Frederick (1966) e Chaboche (1986), bem como os conceitos relativos ao encruamento cinemático. Após, será formulado o modelo matemático de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche. Em seguida, serão expostos os conceitos relativos ao modelo de dano contínuo de Lemaitre (1985). Posteriormente será desenvolvido o modelo matemático de dano contínuo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

2.2 FADIGA

O estudo da fadiga uniaxial teve origem nos trabalhos de Wöhler (1860), o qual relacionou a vida (número de ciclos até a falha) com a tensão nominal para eixos ferroviários. O trabalho de Wöhler deu origem aos métodos de caracterização de vida em fadiga em termos da tensão nominal com base no diagrama $S - N$ (diagrama de Wöhler), o qual relaciona a amplitude de tensão nominal aplicada em um corpo de prova com o número de ciclos até a falha (vida em fadiga). Tais dados podem ser obtidos em carregamentos de flexão, torção ou tração/compressão.

A relação de Basquin (1910) (Eq. 2.1) estabelece a dependência entre os dados de amplitude de tensão ($\Delta\sigma_a/2$) e de número de ciclos para fadiga (N_f) por meio da Eq. 2.1, em que σ_f' é o coeficiente de resistência à fadiga e β o expoente de resistência à fadiga.

$$\frac{\Delta\sigma_a}{2} = \sigma_f' (2N_f)^\beta \quad (2.1)$$

Ao introduzir uma tensão média, nota-se que a curva $S - N$ é alterada significativamente. Em geral, tensões médias compressivas são benéficas, já que tendem a fechar eventuais trincas, enquanto que tensões médias trativas são prejudiciais, favorecendo a abertura e consequente propagação de

trincas. Para determinar a vida segura em fadiga, critérios de fadiga uniaxial para carregamentos com tensões média e alternada foram desenvolvidos, como os critérios de Goodman (1899) (Eq. 2.2) e Soderberg (1939) (Eq. 2.3). Nas Equações 2.2 e 2.3, σ_a é a amplitude de tensão aplicada, σ_m a tensão média, σ_{ut} o limite de resistência à tração, σ_y o limite de escoamento, e σ_{-1} o limite de resistência à fadiga para um carregamento totalmente reversível.

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{ut}} = 1 \quad (2.2)$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_y} = 1 \quad (2.3)$$

Entretanto, na maioria das aplicações o estado de tensões no componente é multiaxial. Mesmo a aplicação de carregamentos uniaxiais geralmente resulta em estados de tensões e deformações multiaxiais nos componentes, devido a restrições geométricas e a eventuais entalhes.

O primeiro estudo sistemático de fadiga multiaxial foi conduzido por Gough e Pollard (1935). Os dados de flexão-torsão obtidos por eles promoveram a base para a elaboração dos modelos de Gough (1950), Sines (1959) e Findley (1959).

A partir da observação experimental de que as trincas nucleiam e crescem em uma direção preferencial (Socie et al., 1985, 1988; Brown e Miller, 1979 a, b), foram desenvolvidos os modelos de fadiga multiaxial de plano crítico, que consideram que as trincas têm origem em determinados planos materiais nos quais a combinação de tensões é suficientemente severa, como planos de máxima tensão cisalhante ou máxima tensão principal. Modelos de plano crítico foram propostos por Brown e Miller (1973), McDiarmid (1974, 1997), Matake (1997), Socie (1987) e Fatemi e Socie (1988).

Modelos com base nos invariantes do tensor tensão utilizam, por sua vez, medidas associadas à história do tensor tensão (seus invariantes), em vez da sua manifestação em cada plano material. Dentre esses modelos, destacam-se os propostos por Crossland (1956), Sines (1959), Deperrois (1991), Zouain (2006), Dang Van (1973), Papadopoulos et al. (1997), Bin Li et al. (2000) e Mamiya et al. (2002, 2005, 2009).

2.3 CARREGAMENTOS NÃO PROPORCIONAIS

Em estados multiaxiais, os carregamentos podem ser classificados em proporcionais ou não proporcionais. As direções principais em carregamento cíclico permanecem constantes durante carregamentos proporcionais, mas rotacionam em função do tempo para carregamentos não proporcionais. Alguns materiais apresentam um endurecimento adicional devido ao carregamento não proporcional (Taira et al., 1968), enquanto outros não são afetados por esse fenômeno. O nível de

endurecimento não proporcional depende da forma, sequência e amplitude do histórico de carregamento e da microestrutura do material. Fatemi et al. (2010a) mostram que uma liga de titânio exibe o mesmo comportamento quando submetida a carregamentos proporcionais e não proporcionais. Entretanto, o aço inox 304 (Fatemi et al., 2010b; Sonsino, 1985) apresenta significativo endurecimento adicional quando submetido a carregamentos não proporcionais. O endurecimento devido aos carregamentos não proporcionais pode reduzir significativamente a vida em fadiga do componente.

Itoh (2001) e Jiang et al. (2007) conduziram experimentos de fadiga multiaxial sob carregamentos não proporcionais para determinar o efeito do endurecimento não proporcional. Jiang et al. (2007) analisou o desempenho de três modelos de fadiga multiaxial em descrever o comportamento do aço S460N sob 16 históricos de carregamento proporcionais e não proporcionais. Os ensaios foram realizados utilizando corpos de prova cilíndricos tubulares à temperatura ambiente.

Itoh (2001) analisou a influência do endurecimento não proporcional na vida à fadiga de baixo ciclo sob tração-torção para dois materiais. Foram utilizados o aço inox 304, conhecido por apresentar endurecimento adicional sob carregamentos não proporcionais (Sonsino, 1985), o que faz com que a vida em fadiga seja reduzida drasticamente, e a liga de alumínio 6061-T6, que apresenta pequeno endurecimento adicional não proporcional, resultando em pequena redução da vida em fadiga. Extensivos ensaios de fadiga de baixo ciclo foram realizados, considerando 14 trajetórias proporcionais e não proporcionais para corpos de prova cilíndricos tubulares à temperatura ambiente.

2.4 PLASTICIDADE

A teoria da plasticidade é o estudo dos sólidos que, após serem submetidos a certo carregamento, são capazes de manter deformações permanentes (ou plásticas) quando descarregados completamente. Esse comportamento pode ser observado em um ensaio de tração uniaxial, a partir do qual é possível identificar algumas propriedades fenomenológicas, as quais são:

1. A existência do regime elástico, dentro do qual o comportamento do material pode ser considerado puramente elástico, ou seja, sem evolução da deformação plástica, sendo delimitado pelo limite de escoamento.
2. A evolução da deformação plástica acontece quando o material é carregado acima do limite de escoamento.
3. O limite de escoamento também evolui, acompanhando a evolução da deformação plástica, fenômeno conhecido como endurecimento.

Para descrever matematicamente o comportamento plástico do material, é necessário definir a função de escoamento, a qual determina o regime elastoplástico em que o material se encontra, bem como as leis de evolução para as variáveis internas, como a taxa de variação da deformação plástica, por exemplo.

2.5 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE MISES

O tensor tensão de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}$) pode ser decomposto em uma parte simétrica (\boldsymbol{p}), associada à pressão hidrostática, e uma parte desviadora (\boldsymbol{s}), dadas por:

$$\boldsymbol{p} = 1/3 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I} \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{p} \quad (2.5)$$

Para materiais metálicos isotrópicos, observa-se experimentalmente que o limite de escoamento não depende da pressão hidrostática (von Mises, 1913). Toma-se, portanto, o tensor tensão desviador $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\sigma})$ e seus invariantes como parâmetros para as funções de escoamento. Assim, como o traço do tensor tensão (relacionado à pressão hidrostática) não influencia no escoamento, o critério de von Mises propõe a utilização do segundo invariante do tensor tensão desviadora como medida do limite de escoamento, dado por:

$$J_2(\boldsymbol{s}) = 1/2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{s}^2) = 1/2 s_{ij}s_{ji} \quad (2.6)$$

Note que J_2 tem dimensão de (tensão)². Entretanto, deseja-se obter expressões homogêneas às tensões. O critério de von Mises é dado, então, por uma medida equivalente de tensão σ_v , tal que (von Mises, 1913):

$$\sigma_v = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{s})} \quad (2.7)$$

Em relação às tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 , tem-se:

$$\sigma_v = \sqrt{1/2 ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2)} \quad (2.8)$$

Dessa forma, o critério de von Mises leva em consideração a máxima tensão de cisalhamento em cada plano principal, $(\sigma_i - \sigma_j)$. A função de escoamento de von Mises é insensível à pressão hidrostática.

A Figura 2.1 apresenta a superfície de escoamento de von Mises no plano π (contido no espaço das tensões principais) dada por uma circunferência.

Tridimensionalmente, a circunferência se estende ao longo do espaço das tensões principais, gerando um cilindro com eixo de simetria na reta que caracteriza a pressão hidrostática, ou seja, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, conforme a Fig. 2.2.

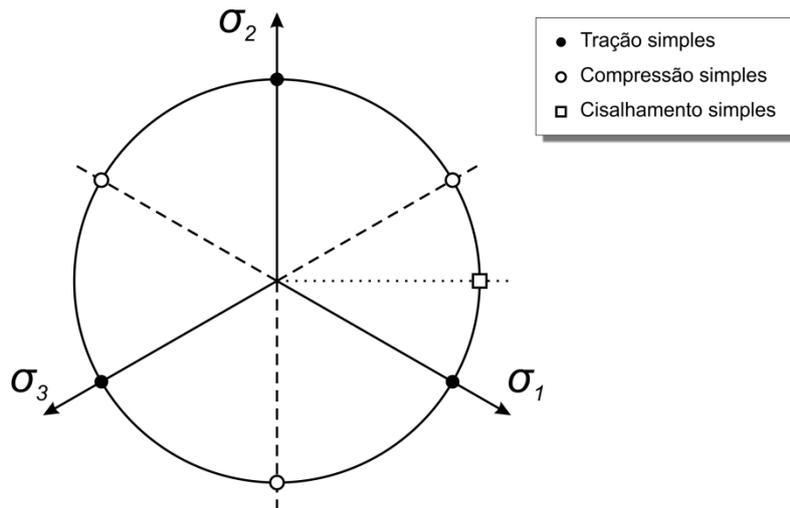


Figura 2.1 – Superfície de escoamento de von Mises no plano π .

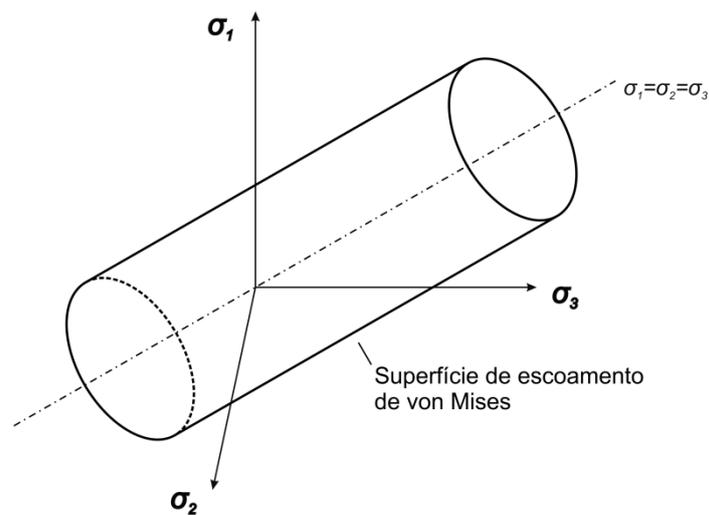
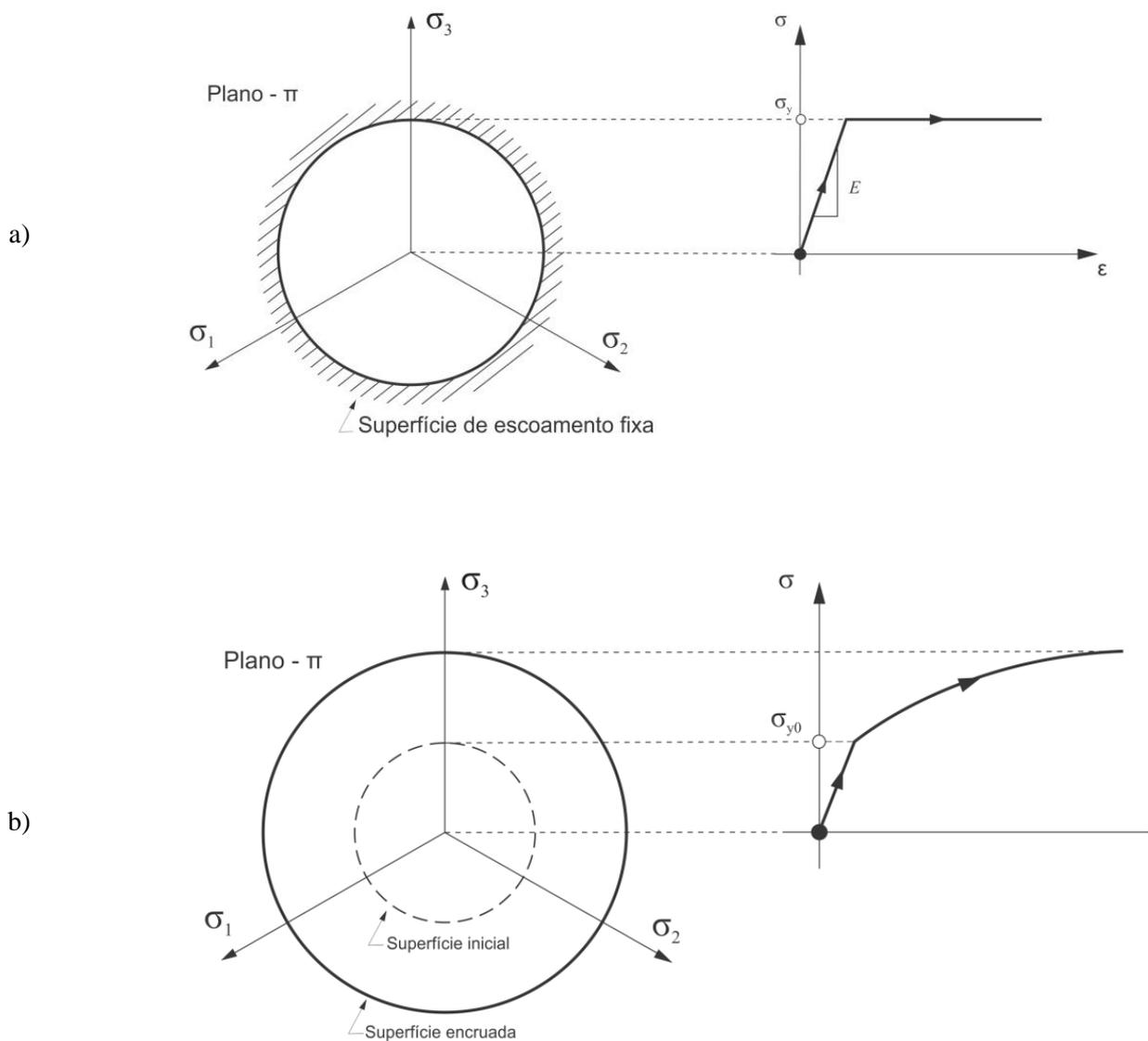


Figura 2.2 – Superfície de escoamento de von Mises no espaço das tensões principais.

2.6 MODELOS DE PLASTICIDADE CÍCLICA

Ao carregar o material acima do limite de escoamento inicial, ele pode apresentar encruamento (endurecimento), o que é caracterizado pela dependência do limite de escoamento do material em relação ao histórico de carregamento e deformação plástica a que foi submetido. Os materiais podem apresentar comportamentos de plasticidade ideal, endurecimento isotrópico, endurecimento

cinemático, ou ainda uma combinação de endurecimentos isotrópico e cinemático, conforme a Fig. 2.3, que ilustra o efeito dos diferentes tipos de endurecimento sobre a superfície de escoamento e sobre a curva tensão-deformação em um ensaio uniaxial cíclico. Na plasticidade ideal não há endurecimento, ou seja, o limite de escoamento não varia de acordo com o nível de deformação plástica. Assim, a superfície de escoamento – definida como a superfície no espaço das tensões principais em que a função de escoamento se iguala a zero – não é alterada (Fig. 2.3 a). O endurecimento isotrópico é caracterizado por uma expansão da superfície de escoamento inicial, sem translação (Fig. 2.3 b). O endurecimento cinemático, por sua vez, é caracterizado pela translação da superfície de escoamento no espaço das tensões, preservando a forma e o tamanho da superfície inicial (Fig. 2.3 c).



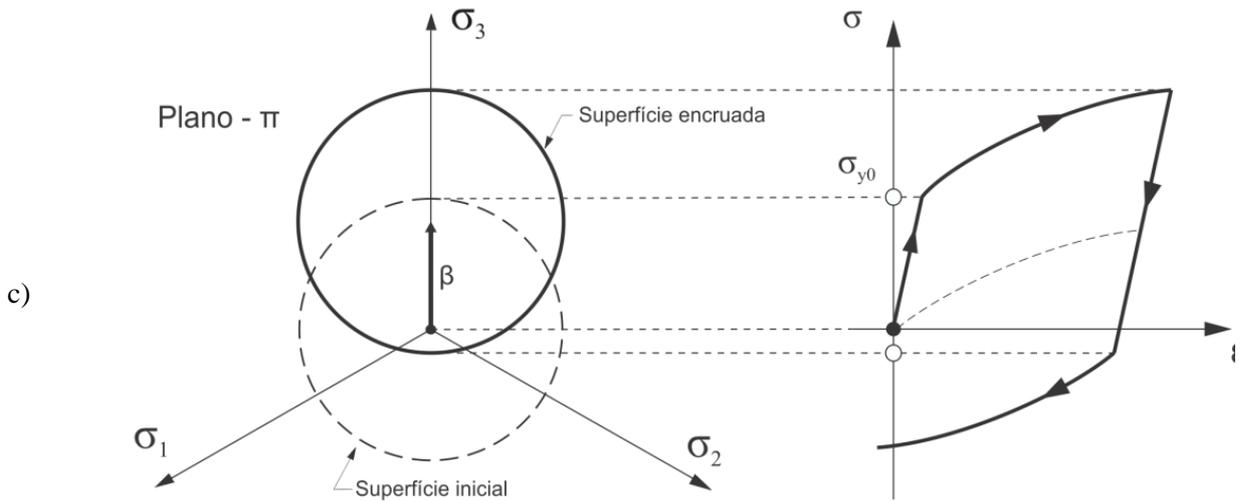


Figura 2.3 – Comparação entre os diferentes tipos de endurecimento: (a) Endurecimento ideal; (b) Endurecimento isotrópico; (c) Endurecimento cinemático.

A plasticidade cíclica está diretamente associada ao endurecimento cinemático e a carregamentos cíclicos. Quando um espécime é carregado além do limite de escoamento em uma direção (sofrendo, então, endurecimento), há uma diminuição no limite de escoamento na direção oposta (Prager, 1955), conforme ilustrado na Fig. 2.3 (c). Esse fenômeno é conhecido como efeito de Bauschinger, podendo ser modelado matematicamente pelo endurecimento cinemático. Tal efeito é especialmente evidenciado em carregamentos cíclicos, pois a reversão do carregamento influencia o limite de escoamento na direção contrária e assim sucessivamente em cada mudança de direção, o que faz com que a superfície de escoamento esteja constantemente transladando.

Para a descrição do endurecimento cinemático, introduz-se o tensor tensão de endurecimento cinemático β , o qual define a translação do centro da superfície de escoamento em relação ao centro inicial da superfície não encruada.

A Equação 2.9 define a função de escoamento para o endurecimento cinemático utilizando o critério de von Mises, na qual η , dado pela Eq. 2.10, é o tensor relativo, definido como a diferença entre a parte desviadora do tensor tensão ($s(\sigma) = \sigma - 1/3J_1(\sigma)\mathbf{I}$) e β ; e σ_{y0} é o limite de escoamento inicial. Dessa forma, η representa o raio da superfície de escoamento encruada.

$$\phi(\sigma, \beta) = \sqrt{3J_2(\eta(\sigma, \beta))} - \sigma_{y0} \quad (2.9)$$

$$\eta(\sigma, \beta) \equiv s(\sigma) - \beta \quad (2.10)$$

Para a elaboração de um modelo matemático consistente, é necessário definir a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático em relação ao tempo, ou seja, sua lei de evolução. Dentre as leis

elaboradas, destacam-se as propostas por Prager (1955), Armstrong-Frederick (1966) e Chaboche (1986), descritas a seguir.

2.6.1 PRAGER

A lei de endurecimento cinemático de Prager é definida de acordo com a Eq. 2.11, na qual H^k é o módulo de endurecimento cinemático linear, uma constante material (Prager, 1955).

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (2.11)$$

A lei de Prager se baseia em uma relação linear entre a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático e a taxa de evolução da deformação plástica ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$), com constante de proporcionalidade igual ao módulo de endurecimento cinemático (H^k). Assim, quanto maior a evolução da deformação plástica, maior a evolução da tensão de endurecimento cinemático.

A linearidade da relação tensão-deformação obtida pela lei de Prager é o principal motivo de críticas ao uso desse modelo. Apesar de descrever de maneira adequada alguns aspectos do efeito de Bauschinger, o modelo não descreve bem carregamentos complexos, envolvendo descarregamentos e carregamentos subsequentes em direções reversas (Chaboche, 1986). A Figura 2.4 apresenta as curvas de tensão-deformação para o modelo de Prager (b), bem como para os modelos de Armstrong-Frederick e Chaboche (c) e para o endurecimento isotrópico (a). A Figura 2.4 (d) apresenta a tendência experimental para carregamentos cíclicos uniaxiais.

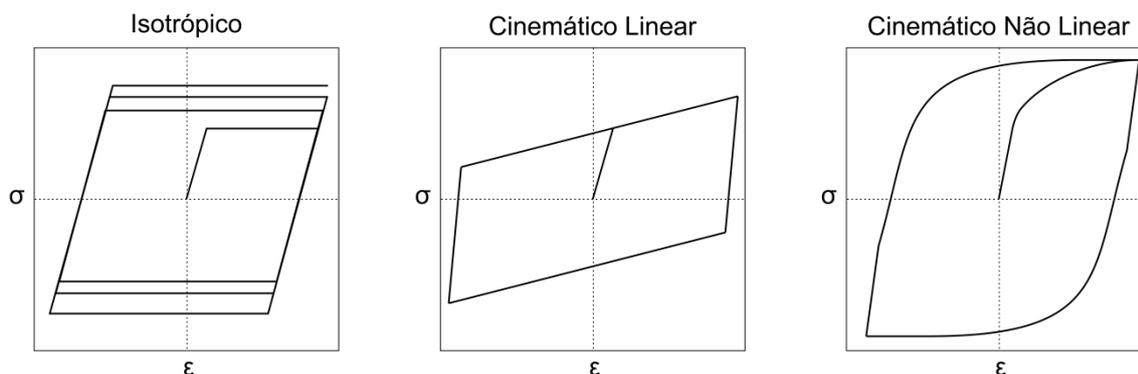


Figura 2.4 – Curva tensão-deformação de ciclo estabilizado uniaxial para os modelos de endurecimento isotrópico linear (a), cinemático linear (b) (Prager) e cinemático não linear (c) (Armstrong-Frederick ou Chaboche).

2.6.2 ARMSTRONG-FREDERICK

A lei de endurecimento linear de Prager pode ser modificada pela introdução de um termo não linear. Assim, dá-se uma evolução não linear da tensão de endurecimento cinemático, resultando em uma descrição aceitável dos carregamentos cíclicos, como a concavidade das curvas tensão-deformação sob carregamentos de tensão e compressão, por exemplo (Chaboche, 1986). Armstrong & Frederick (1966) propuseram uma modificação da lei de evolução de Prager de acordo com a Eq. 2.12, na qual $\dot{\epsilon}^p$ representa a taxa de crescimento da deformação plástica acumulada e b é uma constante do material.

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3} H^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^p b \beta \quad (2.12)$$

O termo extra ($-\dot{\epsilon}^p b \beta$) introduz o efeito da saturação na lei de endurecimento cinemático. Utilizando o critério de von Mises, o termo de saturação passa a ser representado por $\dot{\gamma} b \beta$ e corresponde a um valor máximo para o módulo de β , a partir do qual o material passa a se comportar como perfeitamente plástico (Armstrong-Frederick, 1966). Assim, quanto maior β , menor será sua evolução. A Figura 2.5 ilustra a evolução da tensão de endurecimento cinemático (β) em função da taxa de deformação plástica ($\dot{\epsilon}^p$).

A utilização do modelo não linear de Armstrong-Frederick não corrige apenas a forma do laço de histerese, mas também aspectos relativos à estabilização do ciclo, como o fornecimento de relações entre as amplitudes do ciclo estabilizado (Chaboche, 1986). Entre as principais vantagens do modelo de Armstrong-Frederick estão a não linearidade das evoluções de tensão-deformação e a modelagem adequada do efeito de Bauschinger (Chaboche, 1989).

2.6.3 CHABOCHE

Apesar de resultar em boas estimativas do efeito de Bauschinger, o modelo de Armstrong-Frederick resulta em superestimativas dos efeitos de *ratchetting*. Assim, Chaboche (1986) propôs a generalização do modelo de Armstrong-Frederick, de acordo com a Eq. 2.13, na qual m é o número desejado de termos no somatório.

$$\dot{\beta} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{2}{3} H_i^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^p b_i \beta_i \right) \quad (2.13)$$

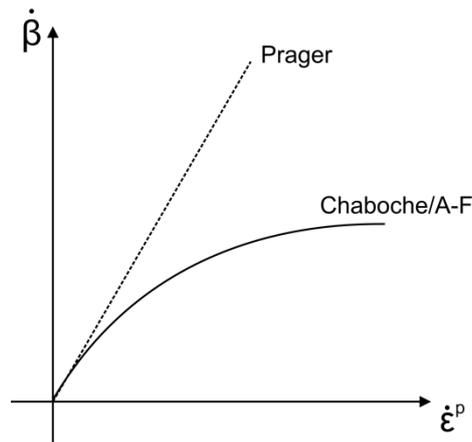


Figura 2.5 – Evolução da tensão de endurecimento cinemático ($\dot{\beta}$) em função da taxa de deformação plástica ($\dot{\epsilon}^p$).

O modelo de Chaboche permite maior flexibilidade no ajuste dos parâmetros materiais (H^k e b), mantendo as vantagens do modelo de Armstrong-Frederick, inclusive a não linearidade. Assim, os efeitos superestimados por Armstrong-Frederick podem ser adequadamente calculados por esse modelo (Chaboche, 1989).

Entretanto, a introdução do somatório faz com que sejam necessárias mais informações a respeito do material. Na lei linear de Prager, a única constante material presente é o módulo de endurecimento cinemático (H^k) e, portanto, apenas uma constante precisa ser identificada de acordo com curvas experimentais. Na lei de Armstrong-Frederick, há a introdução de uma nova constante material (b). Assim, é necessário calibrar o modelo para duas constantes: b e H^k . No modelo de Chaboche, haverá '2m' termos a serem calibrados. Geralmente, fazendo-se m igual a 3 resulta em boa correlação do modelo com os dados experimentais. Assim, seria necessário calibrar o modelo para seis constantes materiais (Chaboche, 1986).

2.7 MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO

Nesta seção será tratada a formulação do modelo matemático elastoplástico para o caso tridimensional, considerando o critério de escoamento de von Mises e endurecimento exclusivamente cinemático, descrito pela lei de evolução de Chaboche. Além disso, o modelo será considerado independentemente do tempo, ou seja, não serão considerados efeitos viscoplásticos.

Será utilizada a lei de fluxo de Prandtl-Reuss (plasticidade associativa), a qual afirma que o vetor de fluxo plástico é normal à superfície de escoamento no espaço das tensões, conforme a Fig. 2.6.

Para o equacionamento do modelo, é necessário definir a função de escoamento e determinar o vetor de fluxo, a lei de fluxo plástico e as leis de evolução para as outras variáveis internas.

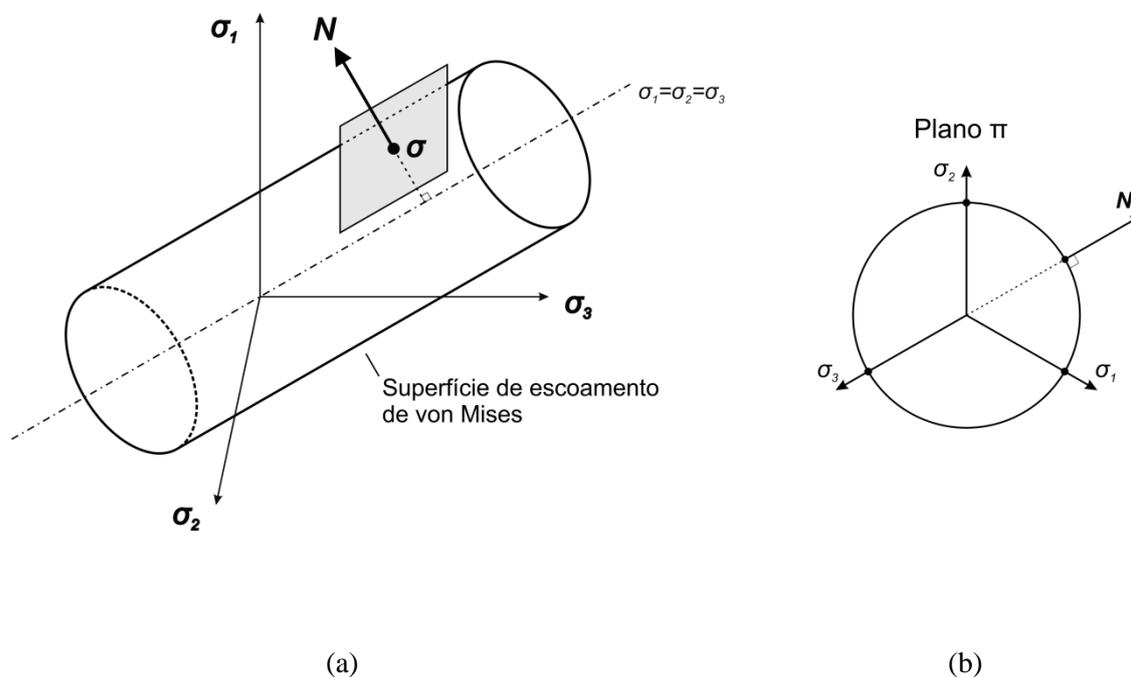


Figura 2.6 – Vetor de fluxo N considerando plasticidade associativa para a superfície de escoamento de von Mises (a) no espaço das tensões principais e (b) no plano π .

1) Função de escoamento:

A Equação 2.9 descreve a função de escoamento para o critério de escoamento de von Mises com endurecimento cinemático. Assim, $\boldsymbol{\eta}$ descreve o tensor relativo, determinado segundo a Eq. 2.10, e σ_{y0} descreve o limite de escoamento inicial.

$$\phi = \bar{q}(\boldsymbol{\eta}) - \sigma_{y0} \quad (2.14)$$

$$\bar{q} = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\eta})} \quad (2.15)$$

O tensor relativo tem caráter puramente desviador, já que é resultado da soma entre dois tensores desviadores (\boldsymbol{s} e $\boldsymbol{\beta}$). Assim, seu segundo invariante pode ser descrito pela Eq. 2.16.

$$J_2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} \quad (2.16)$$

Substituindo a Eq. 2.16 na Eq. 2.15, tem-se que:

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} \quad (2.17)$$

2) Vetor de fluxo:

O vetor de fluxo é definido como a derivada parcial da função de escoamento em relação ao tensor tensão, ou seja, segundo a Eq. 2.18.

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial [\bar{q} - \sigma_{y0}]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.18)$$

Substituindo a função de escoamento definida pela Eq. 2.14 e efetuando a derivação e as manipulações algébricas, obtém-se a Eq. 2.19, a qual define o vetor de fluxo para este modelo.

$$\mathbf{N} = 3\boldsymbol{\eta}/2\bar{q} \quad (2.19)$$

3) Lei de fluxo plástico:

A lei de fluxo plástico determina a taxa de evolução da deformação plástica, sendo definida segundo a Eq. 2.20 para plasticidade associativa, na qual $\dot{\gamma}$ representa o multiplicador plástico.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (2.20)$$

Substituindo o vetor de fluxo definido pela Eq. 2.19, obtém-se a Eq. 2.21, a qual define a taxa de evolução da deformação plástica para esse modelo.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}} \quad (2.21)$$

4) Lei de evolução das outras variáveis internas:

A primeira variável interna a ser analisada é a deformação plástica equivalente ($\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$), cuja evolução é definida pela Eq. 2.22.

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad (2.22)$$

Substituindo a taxa de deformação plástica, obtemos a Eq. 2.23, a qual descreve a taxa de variação (evolução) da deformação plástica equivalente.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \quad (2.23)$$

Finalmente, é necessário definir a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático. Utilizando a lei de evolução de Chaboche, essa taxa é dada segundo a Eq. 2.24.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{2}{3} H_i^k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\gamma} b_i \boldsymbol{\beta}_i \right) \quad (2.24)$$

Substituindo a taxa de evolução da deformação plástica ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$), definida pela Eq. 2.21, na Eq. 2.24 e realizando as devidas manipulações algébricas, tem-se que a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático é dada segundo a Eq. 2.25.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\gamma} \sum_{i=1}^m \left(H_i^k \frac{\boldsymbol{\eta}}{q} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right) \quad (2.25)$$

5) Lei de Hooke generalizada:

Finalmente, o tensor tensão é dado segundo a lei de Hooke generalizada, descrita na Eq. 2.26.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.26)$$

A Tabela 2.1 apresenta um resumo das equações que governam o modelo elastoplástico de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

2.8 MODELO DE DANO DE LEMAITRE

A mecânica do dano contínuo é o estudo, por meio de variáveis mecânicas, dos mecanismos envolvidos na deterioração dos materiais quando estão submetidos a carregamentos. Em escala microscópica, isso significa a acumulação de tensões na vizinhança ou nas interfaces dos defeitos, o que danifica o material. Em escala mesoscópica, é o crescimento e a coalescência de microtrincas ou microvazios que, juntos, iniciam uma trinca, cujo crescimento representa o dano macroscopicamente (Lemaitre, 1996). Portanto, o dano interno pode ser definido como a presença e a evolução de trincas e vazios no nível microscópico, os quais podem, eventualmente, levar à falha do material, ou seja, à completa perda da capacidade de suportar carga. O processo de evolução do dano em nível mesoscópico e a consequente evolução macroscópica são ilustrados na Fig. 2.7.

Tabela 2.1 – Modelo elastoplástico com função de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Chaboche.

i)	Decomposição aditiva da deformação	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
ii)	Lei de Hooke	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$
iii)	Função de escoamento	$\phi = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - \sigma_{y0}$ $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{\beta}$
iv)	Lei de fluxo plástico	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}}$
	E lei de evolução das outras variáveis internas	$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$
		$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\gamma} \sum_{i=1}^m \left(H_i^k \frac{\boldsymbol{\eta}}{\bar{q}} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right)$
v)	Regra de complementaridade	$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \phi = 0$
vi)	Condição de persistência	$\text{Se } \phi = 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\phi} \leq 0, \quad \dot{\gamma} \dot{\phi} = 0$

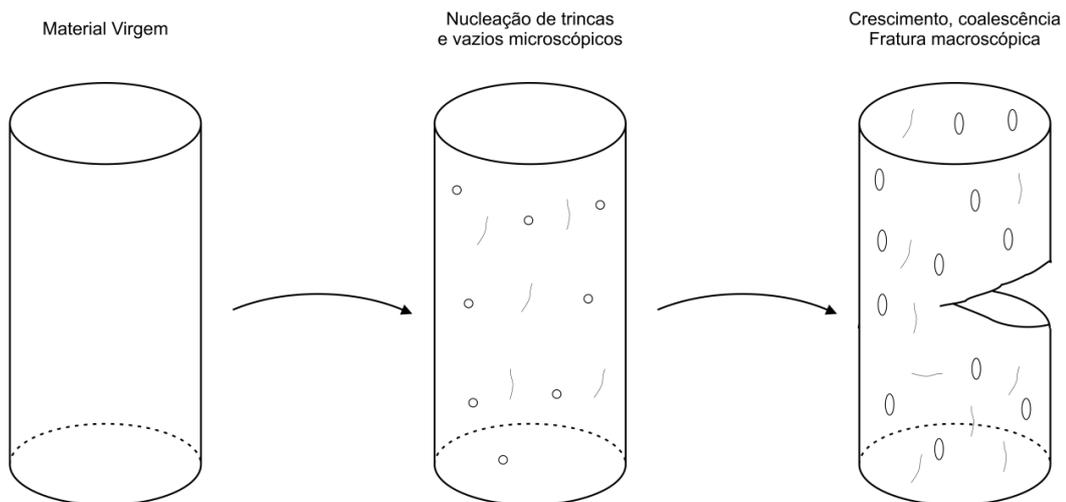


Figura 2.7 – Evolução do dano (degradação) no material e formação de vazios e trincas.

2.8.1 VARIÁVEL DE DANO UNIDIMENSIONAL

Considere o corpo Ω e o elemento de volume representativo (RVE, do inglês *Representative Volume Element*) em um ponto M orientado pelo plano definido pela normal \mathbf{n} e pela abcissa x ao longo da direção x , representados na Fig. 2.8. Seja δA a área da intersecção do plano com o RVE e δA_{Dx} a área efetiva da intersecção de todas as microtrincas ou microcavidades presentes em δA com o plano. Assim, define-se o dano $D(M, \mathbf{n}, x)$ do ponto M na direção \mathbf{n} na abcissa x como (Kachanov, 1958):

$$D(M, \mathbf{n}, x) = \delta A_{Dx} / \delta A \quad (2.27)$$

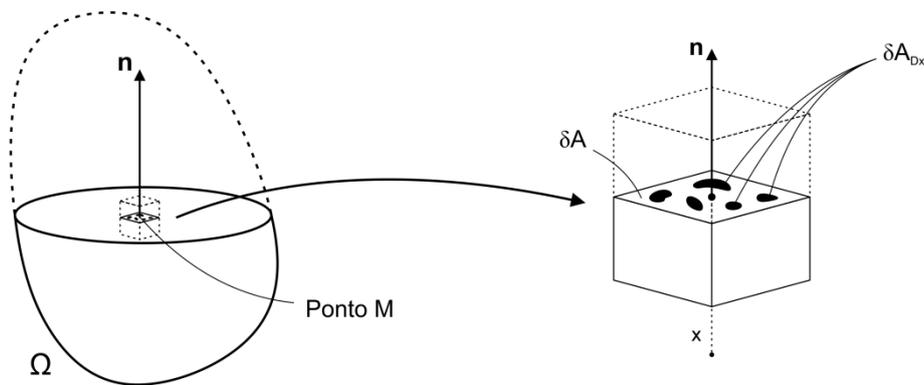


Figura 2.8 – Elemento de volume representativo do corpo Ω no ponto M para a coordenada x .

Para que o dano seja uma variável contínua no RVE, tomemos apenas a abcissa x que maximiza o dano. Assim:

$$D(M, \mathbf{n}) = \max_{(x)} [D(M, \mathbf{n}, x)] \quad (2.28)$$

Dessa forma, a coordenada x desaparece e tem-se:

$$D(M, \mathbf{n}) = \delta A_D / \delta A \quad (2.29)$$

Assim, em um caso unidimensional simples de material homogêneo, o dano pode ser definido como a densidade superficial efetiva de microdefeitos ($D = A_D / A$) (Lemaitre, 1996). Da Equação 2.29, temos que o dano é uma variável escalar D (dependente do ponto e da direção analisados), limitada por 0 e 1, ou seja:

$$0 \leq D \leq 1 \quad (2.30)$$

Assim, para $D = 0$ o material do RVE está intacto (virgem), enquanto que para $D = 1$ o RVE está fraturado em duas partes.

2.8.2 TENSÃO EFETIVA E PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA DE DEFORMAÇÃO

Considere um corpo cilíndrico de área A sujeito a carregamento uniaxial de tração por meio de uma força F . Assim, a tensão de tração é dada por:

$$\sigma = F/A \quad (2.31)$$

Considerando que os microdefeitos representam uma A_D , temos que a área efetiva que resiste à carga é $(A - A_D)$. Portanto, a tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ presente no corpo danificado é dada por:

$$\tilde{\sigma} = F/(A - A_D) \quad (2.32)$$

Como $D = A_D/A$, tem-se:

$$\tilde{\sigma} = \sigma/(1 - D) \quad (2.33)$$

A Equação 2.33 representa o conceito de tensão efetiva desenvolvido por Rabotnov (1968), o qual é válido para carregamentos de tração apenas, já que em compressão os microdefeitos não são abertos pelo carregamento e a tensão efetiva ($\tilde{\sigma}$) é igual à tensão usual (σ).

Entretanto, o Princípio de Equivalência de Deformação de Lemaitre (1996) profere que “qualquer Equação Constitutiva de Deformação para o material danificado pode ser derivada da mesma maneira que para um material virgem substituindo a tensão usual (σ) pela tensão efetiva ($\tilde{\sigma}$)”. Por exemplo, a Lei de Hooke unidimensional para o material danificado é dada por:

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon^e(1 - D) = \tilde{E}\varepsilon^e \quad (2.34)$$

2.8.3 CRITÉRIO DE RUPTURA

Apesar de $D = 1$ caracterizar a ruptura, a falha ocorre para $D < 1$ por meio de um processo de instabilidade. Portanto, é possível estabelecer um critério de dano crítico (D_c), dependente do material e das condições de carregamento. O dano crítico pode variar entre $D_c \cong 0$ para fratura puramente frágil e $D_c \cong 1$ para fratura puramente dútil, mas geralmente D_c está entre 0.2 e 0.5 (Lemaitre, 1996).

Considerando um ensaio uniaxial simples de tração, define-se o dano crítico para carregamento uniaxial por meio da Eq. 2.35, em que σ_u é o limite de resistência do material e σ_R é a tensão de ruptura (Lemaitre, 1996).

$$D_{1c} = 1 - \sigma_R/\sigma_u \quad (2.35)$$

2.8.4 DANO ISOTRÓPICO TRIDIMENSIONAL

O modelo de dano de Lemaitre é desenvolvido no contexto tridimensional a seguir (ver Lemaitre, 1996). A abordagem clássica para formular tridimensionalmente os fenômenos identificados no contexto unidimensional é postular a existência de potenciais de energia a partir dos quais é possível derivar as equações de estado e as equações constitutivas.

A energia livre de Helmholtz é adotada como um potencial termodinâmico ψ , tal que:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\beta}, D) \quad (2.36)$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ representa o tensor das deformações elásticas, $\boldsymbol{\beta}$ o tensor de endurecimento cinemático (variável interna associada ao endurecimento cinemático) e D o dano (variável interna escalar associada ao dano isotrópico). Assume-se o processo como sendo isotérmico. Além disso, o endurecimento isotrópico não será considerado. A Tabela 2.2 apresenta as variáveis de estado e suas respectivas forças termodinâmicas associadas.

Tabela 2.2 – Variáveis de estado e forças termodinâmicas associadas.

<i>Mecanismo</i>	<i>Variáveis de estado</i>		<i>Força termodinâmica associada</i>
	<i>Observável</i>	<i>Interna</i>	
Elasticidade	$\boldsymbol{\varepsilon}^e$		$\boldsymbol{\sigma}$
Plasticidade		$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	$-\boldsymbol{\sigma}$
Endurecimento cinemático		$\boldsymbol{\beta}$	\boldsymbol{X}
Dano		D	Y

Tem-se a seguinte expressão para ψ (Lemaitre, 1996):

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\beta}, D) = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) + \frac{bH^k}{3} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} \right] \quad (2.37)$$

Portanto, o potencial termodinâmico pode ser escrito como a soma de uma contribuição devido à elasticidade-dano (ψ^{ed}), dependente de $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e D , e outra devido à plasticidade (ψ^p), dependente de $\boldsymbol{\beta}$:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\beta}, D) = \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) + \psi^p(\boldsymbol{\beta}) \quad (2.38)$$

Como ψ^p não depende de $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e D , suas derivadas em relação a essas variáveis são nulas. Assim, a derivação de ψ em relação a $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e D resulta na derivação de ψ^{ed} . Da segunda lei da termodinâmica, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \rho \frac{\partial \psi^{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) \quad (2.39)$$

A Equação 2.39 apresenta a Lei de Hooke, a qual pode ser modificada para incluir o tensor tensão efetivo ($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$), dado pela Eq. 2.41.

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.40)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{1 - D} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.41)$$

Semelhantemente, para a variável interna de dano, tem-se:

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = \rho \frac{\partial \psi^{ed}}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.42)$$

Da lei de Hooke, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$, o que implica:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.43)$$

Substituindo a Eq. 2.43 em 2.42, tem-se:

$$-Y = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.44)$$

Após manipulação matemática, o termo $-Y$ também pode ser escrito como uma função da pressão hidrostática (p) e da tensão equivalente de von Mises (\bar{q})¹, conforme apresentado na Eq. 2.45, em que $G = E/2(1 + \nu)$ representa o módulo de cisalhamento e $K = E/3(1 - 2\nu)$ representa o módulo

¹ Na Eq. 2.45, a tensão equivalente de von Mises é independente do endurecimento cinemático, ou seja, $q = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{s})} = \sqrt{3/2 \boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}}$.

volumétrico (G e K são conhecidas também como as constantes de Lamé), nos quais E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson.

$$-Y = \left[\frac{q^2}{6G(1-D)^2} + \frac{p^2}{2K(1-D)^2} \right] \quad (2.45)$$

O termo $-Y$ pode ser chamado de densidade de energia de deformação liberada devido ao dano, sendo igual à metade da variação da densidade de energia de Lemaitre. Também corresponde à taxa de energia de deformação liberada por uma trinca (J), a qual é usada frequentemente na Mecânica da Fratura (Malcher, 2011).

2.8.5 EVOLUÇÃO DO DANO

Lemaitre (1985) propôs a evolução do dano seguindo uma relação de potência entre a taxa de variação do dano (\dot{D}) e a densidade de energia de deformação ($-Y$), proporcional à deformação plástica equivalente ($\dot{\epsilon}^p$), conforme apresentado na Eq. 2.46, na qual S (denominador de dano) e s (exponente de dano) são parâmetros materiais.

$$\dot{D} = \dot{\epsilon}^p \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \quad (2.46)$$

2.9 MODELO DE LEMAITRE COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE

Nesta seção será tratada a formulação do modelo matemático elastoplástico para o caso tridimensional, introduzindo o conceito de dano apresentado por Lemaitre através de sua função de escoamento, considerando o endurecimento cinemático segundo a lei de Chaboche. O modelo será considerado independente do tempo e se utilizará das relações da plasticidade associativa.

1) Função de escoamento:

A lei elástica danificada é dada pela Eq. 2.40, em que $\tilde{\sigma}$ é chamado de tensor tensão efetivo, e se relaciona ao tensor tensão de Cauchy através da Eq. 2.41. Portanto, a função de escoamento de von Mises pode ser modificada para incluir o dano, resultando na Eq. 2.47, em que \bar{q} é a tensão equivalente de von Mises, determinada pela Eq. 2.15.

$$\phi = \bar{q}/(1-D) - \sigma_{y0} \quad (2.47)$$

2) Vetor de fluxo:

Como o modelo considera plasticidade associativa, o vetor de fluxo continua sendo definido conforme a Eq. 2.18, apresentada na seção 2.4. Substituindo a função de escoamento, derivando e realizando as manipulações devidas, tem-se que o vetor de fluxo é dado pela Eq. 2.48.

$$\mathbf{N} = \frac{1}{1-D} \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}} \quad (2.48)$$

3) Lei de fluxo plástico:

Por definição, a lei de fluxo plástico é dada segundo a Eq. 2.20, apresentada na seção 2.4. Substituindo o vetor de fluxo, tem-se que a lei de fluxo é dada segundo a Eq. 2.49.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}} \quad (2.49)$$

4) Lei de evolução das outras variáveis internas:

Primeiramente, é considerada a evolução da deformação plástica equivalente ($\bar{\epsilon}^p$), definida segundo a Eq. 2.22. Substituindo a lei de fluxo plástico para o modelo de dano, tem-se que:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \quad (2.50)$$

Em seguida, é necessário definir a taxa de evolução da tensão de endurecimento cinemático, a qual é dada pela Eq. 2.13 para o modelo de Chaboche. Assim, substituindo a taxa de evolução da deformação plástica ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$) e a evolução da deformação plástica equivalente ($\dot{\bar{\epsilon}}^p$), tem-se que:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \sum_{i=1}^n \left(H_i^k \frac{\boldsymbol{\eta}}{\bar{q}} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right) \quad (2.51)$$

Finalmente, tem-se a lei de evolução do dano, dada pela Eq. 2.46. Substituindo a evolução da deformação plástica equivalente ($\dot{\bar{\epsilon}}^p$), tem-se:

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \quad (2.52)$$

A Tabela 2.3 apresenta o modelo elastoplástico de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

Tabela 2.3 – Modelo elastoplástico de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

i)	Decomposição aditiva da deformação	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
ii)	Lei de Hooke	$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$
iii)	Função de escoamento	$\phi = \frac{1}{1 - D} \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} - \sigma_{y0}}$ $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{\beta}$
iv)	Lei de fluxo plástico	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}}$ <p>E lei de evolução das outras variáveis internas</p> $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D}$ $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \sum_{i=1}^n \left(H_i^k \frac{\boldsymbol{\eta}}{\bar{q}} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right)$ $\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s$ $-Y = \left[\frac{q^2}{6G(1 - D)^2} + \frac{p^2}{2K(1 - D)^2} \right]$
v)	Regra de complementaridade	$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \phi = 0$
vii)	Condição de persistência	$\text{Se } \phi = 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\phi} \leq 0, \quad \dot{\gamma} \dot{\phi} = 0$

3 ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO IMPLÍCITA

3.1 INTRODUÇÃO

Para materiais e modelos com comportamentos dependentes da trajetória, como modelos elastoplásticos, a solução do conjunto de equações do modelo constitutivo requer a formulação de um algoritmo de integração numérica, já que soluções analíticas para o problema de valor inicial definido por essas equações não são geralmente conhecidas para essas trajetórias complexas. Assim, para a solução dos modelos matemáticos apresentados no Capítulo 2 (Modelo de von Mises com Endurecimento Cinemático de Chaboche e Modelo de Lemaitre com Endurecimento Cinemático de Chaboche) é necessário formular um algoritmo de integração numérica, já que são modelos elastoplásticos e, portanto, dependentes da trajetória.

O problema, então, consiste em formular procedimentos de integração numérica que sejam capazes de atualizar a tensão e as variáveis internas. Estabelece-se, portanto, um pseudointervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$, em que o estado n é conhecido e deseja-se obter o estado $n + 1$. Dentro do pseudotempo, a atualização da tensão (σ_{n+1}) e das variáveis internas (α_{n+1}) é dada segundo as Eq. 3.1 e 3.2. Posteriormente, é aplicada uma discretização das equações constitutivas no pseudotempo, com base no algoritmo de Euler implícito.

$$\sigma_{n+1} = \hat{\sigma}(\alpha_n, \varepsilon_{n+1}) \quad (3.1)$$

$$\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}(\alpha_n, \varepsilon_{n+1}) \quad (3.2)$$

A atualização das tensões e das variáveis internas é feita dividindo o problema em duas partes: (I) o preditor plástico, no qual o problema é assumido completamente elástico; e (II) o corretor plástico, no qual um sistema de equações residuais, formado pela lei elástica, pela função de escoamento e pelas equações de evolução, é resolvido, tomando como valor inicial os valores encontrados no preditor elástico. O corretor plástico é utilizado quando a função de escoamento é violada, e, então, utiliza-se o método de Newton-Raphson para resolver o sistema de equações não lineares discretizado, devido à sua taxa de convergência quadrática.

A Figura 3.1 apresenta o algoritmo de atualização (algoritmo de mapeamento de retorno), das tensões e das variáveis internas. Inicialmente, é dado um incremento de deformação $\Delta\varepsilon$, o qual se assume como sendo completamente elástico. A partir disso, obtém-se o estado tentativa, $(*)^{trial}$. Após, é feita a avaliação da função de escoamento para o estado tentativa (ϕ^{trial}). Caso ϕ^{trial} seja igual ou menor que zero, significa que o passo dado foi puramente elástico, e o estado real $n + 1$ é o

estado tentativa, ou seja, $(*) = (*)^{trial}$. Caso contrário, ou seja, $\phi^{trial} > 0$, o incremento de deformação possui componente plástico e é necessário aplicar o corretor plástico.

Nas próximas seções serão discutidos os algoritmos de retorno para os modelos elaborados no Capítulo 2, ou seja, o Modelo de von Mises com Endurecimento Cinemático e o Modelo de Lemaitre com Endurecimento Cinemático. Será utilizada a lei de evolução da tensão de endurecimento cinemático de Chaboche com três termos, ou seja, $m = 3$. O desenvolvimento pode ser expandido para um número maior de termos. O algoritmo de integração numérica desenvolvido está descrito no Apêndice A.

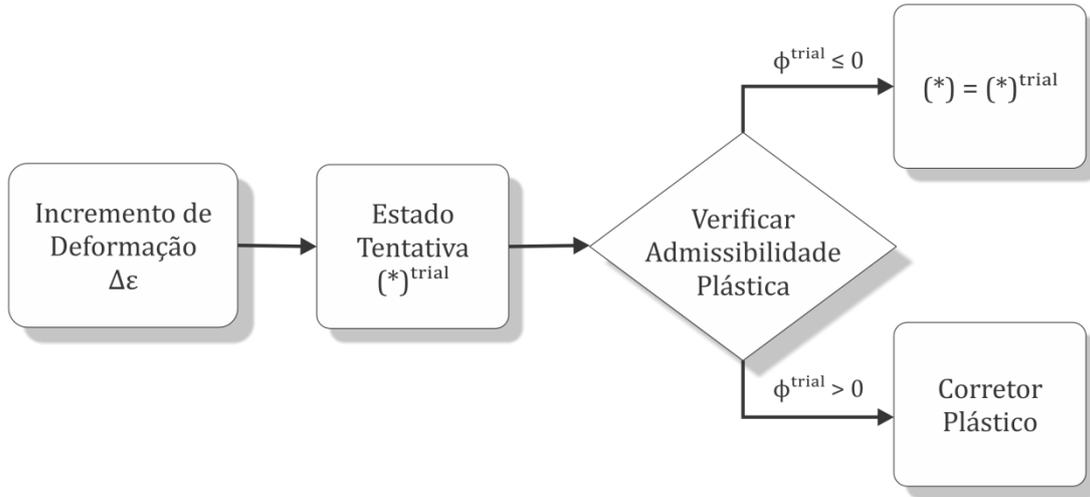


Figura 3.1 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.

3.2 MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO

Para esse modelo, com endurecimento cinemático dado pela lei de evolução de Chaboche, o estado tentativa é dado como:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial} &= \boldsymbol{\beta}_n \\
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$ é o tensor das deformações elásticas, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ o tensor das tensões, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$ o tensor das deformações plásticas, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial}$ o tensor tensão de endurecimento cinemático, e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial}$ a deformação plástica equivalente, todos no estado tentativa. Como neste o passo é elástico, não há

variação na deformação plástica nem na tensão de endurecimento cinemático, já que é assumido que o limite de escoamento não foi atingido.

Como há endurecimento cinemático, é necessário definir o tensor relativo tentativa ($\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial}$), o qual é dado segundo a Eq. 3.3.

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial} \quad (3.4)$$

O termo $\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}$ se refere à parte desviadora do tensor tensão tentativa, determinada segundo a Eq. 3.5, em que a constante G representa a constante de Lamé denominada de módulo de cisalhamento.

$$\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial} \quad (3.5)$$

Em seguida, é necessário avaliar a função de escoamento no estado tentativa (ϕ^{trial}), ou seja, verificar se o estado do material construído acima se encontra dentro ou fora do limite de escoamento. A função de escoamento para o modelo de von Mises com endurecimento puramente cinemático é calculada segundo a Eq. 3.6.

$$\phi^{trial} = \bar{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_{y0} \quad (3.6)$$

O termo \bar{q}_{n+1}^{trial} representa a tensão equivalente de von Mises, dada segundo a Eq. 3.7.

$$\bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}} \quad (3.7)$$

Caso ϕ^{trial} seja igual ou menor que zero, o material se encontra dentro do regime elástico e verifica-se, então, que o passo dado foi puramente elástico. O estado real $n + 1$ é o estado tentativa, ou seja, $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$. Caso contrário, ou seja, $\phi^{trial} > 0$, é possível constatar que o material se encontra dentro do regime plástico, o incremento de deformação prescrito possui componente plástico e é necessário aplicar o corretor plástico para corrigir o estado tentativa.

A correção do estado tentativa é feita removendo o incremento de deformação plástica da deformação elástica tentativa, que passa a ser expressa segundo a Eq. 3.8.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.8)$$

O incremento de deformação plástica é determinado com base na Lei de Fluxo Plástico (Eq. 2.18), a qual, discretizada, fornece a Eq. 3.9, em que $\boldsymbol{N}_{n+1} = 3\boldsymbol{\eta}_{n+1}/2\bar{q}_{n+1}$ e $\Delta\gamma$ representa o multiplicador plástico.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.9)$$

Substituindo a Eq. 3.9 em 3.8, tem-se que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - \Delta \gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.10)$$

A Equação 3.10 pode ser reescrita em termos do campo de tensões, na forma da Eq. 3.11.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - 2G\Delta\gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.11)$$

O tensor das tensões pode ser decomposto em uma parte desviadora (\mathbf{S}_{n+1}) e uma parte volumétrica ($p_{n+1}\mathbf{I}$), conforme a Eq. 3.12.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} + p_{n+1}\mathbf{I} \quad (3.12)$$

Dessa forma, a equação de atualização da tensão (Eq. 3.11) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{S}_{n+1} + p_{n+1}\mathbf{I} = \mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}} + p_{n+1}^{\text{trial}}\mathbf{I} - 2G\Delta\gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.13)$$

Entretanto, a função de escoamento de von Mises é insensível à pressão hidrostática, não alterando o termo volumétrico, ou seja, $p_{n+1} = p_{n+1}^{\text{trial}}$. Assim, a equação de atualização da tensão pode ser reescrita em função do tensor desviador (\mathbf{S}_{n+1}), de acordo com a Eq. 3.14.

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}} - 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.14)$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{\text{trial}} \quad (3.15)$$

O tensor da deformação plástica pode ser atualizado segundo a Eq. 3.16. Em vez de remover o incremento de deformação plástica, este deve ser adicionado.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.16)$$

A deformação plástica equivalente é atualizada segundo sua lei de evolução, definida pela Eq. 2.20. De forma discretizada, a atualização da deformação plástica equivalente é dada pela Eq. 3.17.

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \quad (3.17)$$

Para a evolução da tensão de endurecimento cinemático, é necessário considerar o número de termos no somatório de Chaboche. Considerando três termos não lineares, tem-se que:

$$\beta_{n+1} = \sum_{i=1}^3 \beta_{n+1}^i = \beta_{n+1}^1 + \beta_{n+1}^2 + \beta_{n+1}^3 \quad (3.18)$$

Analisando a Eq. 3.18, é necessário considerar a atualização de cada termo de tensão de endurecimento cinemático (β_{n+1}^i) separadamente, para depois atualizar β_{n+1} como a soma dos termos. Segundo a lei de Chaboche para a função de escoamento de von Mises (Eq. 2.22), cada termo pode ser atualizado como:

$$\beta_{n+1}^i = \beta_n^i + \Delta\gamma \left(\frac{2H_i^k}{3} N_{n+1} - b_i \beta_{n+1}^i \right) \quad (3.19)$$

Finalmente, a função de escoamento no estado real é dada segundo a Eq. 3.20.

$$\phi_{n+1} = \bar{q}_{n+1} - \sigma_{y0} \quad (3.20)$$

Analisando as equações anteriores, verifica-se a formação de um sistema não linear de equações, cujas variáveis, para três termos de Chaboche, são S_{n+1} , β_{n+1}^1 , β_{n+1}^2 , β_{n+1}^3 e $\Delta\gamma$, já que seus valores são desconhecidos no estado real. As demais variáveis podem ser atualizadas a partir destas.

A Equação 3.21 apresenta o sistema de equações na forma de equações residuais, enquanto que a Eq. 3.22 apresenta a linearização do sistema de equações residuais para a solução por meio do método de Newton-Raphson.

$$R_{S_{n+1}} = S_{n+1} - S_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma N_{n+1}$$

$$R_{\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}} - \sigma_{y0}$$

$$R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_1^k}{3} N_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \right) \quad (3.21)$$

$$R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_2^k}{3} N_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \right)$$

$$R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_3^k}{3} N_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta S_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{S_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \quad (3.22)$$

A Tabela 3.1 apresenta de forma resumida o algoritmo de retorno para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

Tabela 3.1 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

i)	Dado um incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, determinar o estado tentativa:
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \qquad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$
	$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \qquad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i\ trial} = \boldsymbol{\beta}_n^i \qquad \bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}}$
ii)	Verificar a admissibilidade plástica:
	$\phi^{trial} = \bar{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_{y0}$
	Se $\phi^{trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$;
	Se $\phi^{trial} > 0$, então (passo plástico): Algoritmo de retorno
iii)	Algoritmo de retorno:
	Resolver o sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson, tendo como variáveis \boldsymbol{S}_{n+1} , $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$.
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\boldsymbol{S}_{n+1}} = \boldsymbol{S}_{n+1} - \boldsymbol{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma\boldsymbol{N}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}} - \sigma_{y0} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_1^k}{3} \boldsymbol{N}_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_2^k}{3} \boldsymbol{N}_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_3^k}{3} \boldsymbol{N}_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \right) \end{array} \right.$
iv)	Atualizar as outras variáveis internas
	$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{S}_{n+1} + p_{n+1}^{trial} \boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} + \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1} \qquad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma$
v)	Fim

A Tabela 3.2 mostra, de forma resumida, a aplicação do método de Newton-Raphson para a resolução do sistema não linear. O estado inicial, ou seja, para $k = 0$, é tomado como sendo o estado tentativa.

Tabela 3.2 – Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \quad \Delta\gamma^{(0)} = 0 \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i(0)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i\,trial}$$

ii) Resolver o sistema de equações para \mathbf{S}_{n+1} , $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$ e $\Delta\gamma$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta \mathbf{S}_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\mathbf{S}_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i(k+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i(k)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i(k+1)} \quad \mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)} \quad \Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta \Delta\gamma^{(k+1)}$$

iv) Verificar a convergência:

$$\phi^{(k+1)} = \bar{q}^{(k+1)} - \sigma_{y0} \quad erro = \frac{\phi^{(k+1)}}{\sigma_{y0}} \leq \text{tolerância}$$

v) Fim.

Na Tabela 3.2, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} &= \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial S_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= 2GN_{n+1} \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} &= N_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} &= 0 \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -N_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -N_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -N_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial S_{n+1}} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial S_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{2}{3} H_1^k N_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= \mathbb{I} - \Delta\gamma \left(\frac{2H_1^k}{3} \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} - b_1 \mathbb{I} \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{2}{3} H_2^k \mathbf{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= \mathbb{I} - \Delta\gamma \left(\frac{2H_2^k}{3} \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} - b_2 \mathbb{I} \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{2}{3} H_3^k \mathbf{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= \mathbb{I} - \Delta\gamma \left(\frac{2H_3^k}{3} \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} - b_3 \mathbb{I} \right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= \frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.3 MODELO DE LEMAITRE COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO

Seguindo os passos apresentados na seção anterior, define-se o algoritmo de atualização para o modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche, com $m = 3$, ou seja, três termos não lineares no somatório da lei de evolução de Chaboche. Primeiramente, o estado tentativa é dado por:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} &= (1 - D_n) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial} &= \boldsymbol{\beta}_n \\
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p & D_{n+1}^{trial} &= D_n
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

em que D_{n+1}^{trial} é a variável de dano no estado tentativa. A função de escoamento para o modelo de Lemaitre é dada segundo a Eq. 3.30, em que \bar{q}_{n+1}^{trial} é dado segundo a Eq. 3.7.

$$\phi^{trial} = \frac{\bar{q}_{n+1}^{trial}}{1 - D_{n+1}^{trial}} - \sigma_{y0} \tag{3.30}$$

É necessário, agora, definir a atualização da tensão e das outras variáveis. Seja \bar{N}_{n+1} definido a seguir:

$$\bar{N}_{n+1} \equiv \frac{3\eta_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \tag{3.31}$$

Para o tensor tensão, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - 2G\Delta\gamma\bar{N}_{n+1} \tag{3.32}$$

Tem-se que $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{S}_{n+1} + p_{n+1}\boldsymbol{I}$. Assim, a Equação 3.32 pode ser reescrita em termos das componentes desviadora e hidrostática do tensor tensão, obtendo-se:

$$\boldsymbol{S}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - 2G\Delta\gamma\bar{N}_{n+1} \tag{3.33}$$

$$p_{n+1}\boldsymbol{I} = (1 - D_{n+1}) p_{n+1}^{trial}\boldsymbol{I} \tag{3.34}$$

O vetor de fluxo (\boldsymbol{N}_{n+1}) é dado por:

$$N_{n+1} = \frac{1}{1 - D_{n+1}} \frac{3\eta_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.35)$$

A atualização da deformação plástica equivalente é dada segundo a Eq. 3.36.

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \quad (3.36)$$

A Equação 3.37 define a atualização do tensor tensão de endurecimento cinemático:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_n + \Delta\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_n + \sum_{i=1}^3 \Delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i \quad (3.37)$$

em que,

$$\Delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left(\frac{2}{3} H_i^k \bar{N}_{n+1} - b_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i \right) \quad (3.38)$$

A evolução do dano é dada segundo a Eq. 3.39.

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S} \right)^s \quad (3.39)$$

Na equação acima, o termo $-Y_{n+1}$ é dado pela Eq. 3.40, em que K e G são as constantes de Lamé.

$$-Y_{n+1} = \left[\frac{(q_{n+1})^2}{6G(1 - D_{n+1})^2} + \frac{(p_{n+1})^2}{2K(1 - D_{n+1})^2} \right] \quad (3.40)$$

Finalmente, a função de escoamento no estado real é dada segundo a Eq. 3.41.

$$\phi_{n+1} = \frac{1}{1 - D_{n+1}} \bar{q}_{n+1} - \sigma_{y0} \quad (3.41)$$

Analisando as equações anteriores, verifica-se a formação de um sistema não linear de equações, cujas variáveis são σ_{n+1} , $\Delta\gamma$, D_{n+1} , $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$ e $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$, cujos valores são desconhecidos no estado real. As equações de atualização na forma de resíduos são dadas por:

$$R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - (1 - D_{n+1})\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} + 2G\Delta\gamma\bar{N}_{n+1}$$

$$R_{\Delta\gamma} = \frac{\bar{q}_{n+1}}{1-D_{n+1}} - \sigma_{y0}$$

$$R_{D_{n+1}} = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S} \right)^s$$

(3.42)

$$R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \right)$$

$$R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \right)$$

$$R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \right)$$

Dessa forma, a Tab. 3.3 apresenta de forma resumida o algoritmo de retorno para o modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

Para a aplicação do método de Newton-Raphson, o sistema deve ser escrito na linearizada, de acordo com a Eq. 3.43.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta \sigma_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta D_{n+1} \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{D_{n+1}} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \quad (3.43)$$

Tabela 3.3 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

i)	Dado um incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, determinar o estado tentativa:		
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$	
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$	$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1\ trial} = \boldsymbol{\beta}_n^1$	$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2\ trial} = \boldsymbol{\beta}_n^2$	
$\bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial}}$	$D_{n+1} = D_n$		
ii)	Verificar a admissibilidade plástica:		
	$\phi^{trial} = \frac{1}{1 - D_{n+1}} \bar{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_{y0}$		
	Se $\phi^{trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$;		
	Se $\phi^{trial} > 0$, então (passo plástico): Algoritmo de retorno		
iii)	Algoritmo de retorno:		
	Resolver o sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson, tendo como variáveis $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\Delta\gamma$, D_{n+1} , $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$ e $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$		
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (1 - D_{n+1})\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} + 2G\Delta\gamma\bar{\mathbf{N}}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} = \frac{\bar{q}_{n+1}}{1 - D_{n+1}} - \sigma_{y0} \\ R_{D_{n+1}} = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S} \right)^s \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left(\frac{2}{3} H_1^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left(\frac{2}{3} H_2^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left(\frac{2}{3} H_3^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \right) \end{array} \right.$		
iv)	Atualizar as outras variáveis internas		
v)	Fim		

A Tabela 3.4 mostra, de forma resumida, a aplicação do método de Newton-Raphson para a resolução do sistema não linear. O estado inicial, ou seja, para $k = 0$, é tomado como sendo o estado tentativa.

Tabela 3.4 – Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo de Lemaitre.

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1}^{(0)} &= \mathbf{s}_{n+1}^{trial} & \Delta\gamma^{(0)} &= 0 & D_{n+1}^{(0)} &= D_{n+1}^{trial} \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(0)} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1\,trial} & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(0)} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2\,trial} & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(0)} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3\,trial} \end{aligned}$$

ii) Resolver o sistema de equações para σ_{n+1} , $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$, $\Delta\gamma$ e D_{n+1} :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \\ \delta D_{n+1} \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{D_{n+1}} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(k+1)} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(k)} + \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(k+1)} & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(k+1)} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(k)} + \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(k+1)} \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(k+1)} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(k)} + \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(k+1)} & \sigma_{n+1}^{(k+1)} &= \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta\sigma_{n+1}^{(k+1)} \\ D_{n+1}^{(k+1)} &= D_{n+1}^{(k)} + \delta D_{n+1}^{(k+1)} & \Delta\gamma^{(k+1)} &= \Delta\gamma^{(k)} + \delta\Delta\gamma^{(k+1)} \end{aligned}$$

iv) Verificar a convergência:

$$\begin{aligned} \phi^{(k+1)} &= \frac{1}{1 - D_{n+1}^{(k+1)}} \bar{q}^{(k+1)} - \sigma_{y0} \\ erro &= \frac{\phi^{(k+1)}}{\sigma_{y0}} \leq tolerância \end{aligned}$$

v) Fim.

Na Tabela 3.4, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial S_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= 2G\bar{N}_{n+1} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} &= \mathbb{D}: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{1}{1 - D_{n+1}} \bar{N}_{n+1}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} = \frac{q_{n+1}}{(1 - D_{n+1})^2}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} = -\frac{1}{1 - D_{n+1}} \bar{N}_{n+1}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} = -\frac{1}{1 - D_{n+1}} \bar{N}_{n+1}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = -\frac{1}{1 - D_{n+1}} \bar{N}_{n+1}$$

(3.45)

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{s\Delta\gamma}{S(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^s \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} &= 1 - \frac{1}{(1-D_{n+1})^2} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^s - \frac{s\Delta\gamma}{S(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial D_{n+1}}\end{aligned}\tag{3.46}$$

$$\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} = -\frac{s\Delta\gamma}{S(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \beta_{n+1}^1} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} = -\frac{s\Delta\gamma}{S(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \beta_{n+1}^2} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} = -\frac{s\Delta\gamma}{S(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \beta_{n+1}^3} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left[\frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right] \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial D_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \left[\frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right] \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= \mathbb{I} - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} - b_1 \mathbb{I} \right) \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3}\end{aligned}\tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left[\frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right] \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial D_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \left[\frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right] \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= \mathbb{I} - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} - b_2 \mathbb{I} \right)\end{aligned}\tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left[\frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right] \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial D_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \left[\frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right] \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= \mathbb{I} - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} - b_3 \mathbb{I} \right)\end{aligned}\tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3}I \otimes I - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3}I \otimes I - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3}I \otimes I - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3}I \otimes I - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{1}{(1-D_{n+1})^2} \left[\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{2G} + \frac{p_{n+1} \mathbf{I}}{3K} \right] \\
\frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial D_{n+1}} &= \frac{(q_{n+1})^2}{3G(1-D_{n+1})^3} + \frac{(p_{n+1})^2}{K(1-D_{n+1})^3}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

3.4 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

Para a implementação do modelo numérico apresentado em um desenvolvimento de elementos finitos, é necessário obter o operador tangente consistente com o algoritmo de integração, para se construir a matriz de rigidez. Para o caso elástico, em que o fluxo plástico é igual a zero dentro de um passo específico, o operador tangente no pseudotempo t_{n+1} passa a ser descrito pela Eq. 3.52.

$$\hat{\mathbb{D}}^e = (1 - D_{n+1})\mathbb{D} \quad (3.52)$$

Entretanto, em um caso elastoplástico, em que se assume a existência do fluxo plástico, o operador tangente ($\hat{\mathbb{D}}^{ep}$) é definido de acordo com a Eq. 3.53, em que $\hat{\sigma}$ representa a função algorítmica constitutiva implícita para a atualização das tensões, definida pelo algoritmo de retorno descrito anteriormente.

$$\hat{\mathbb{D}}^{ep} = \frac{d\hat{\sigma}}{(1 - D_{n+1})d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (3.53)$$

Para o modelo de Lemaitre, a metodologia aplicada para determinação do operador tangente consistente com o algoritmo de atualização de tensões é determinada a partir da Eq. 3.43 escrita na forma inversa, de acordo com a Eq. 3.54.

$$\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \\ \delta D_{n+1} \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} & \mathbb{C}_{14} & \mathbb{C}_{15} & \mathbb{C}_{16} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} & \mathbb{C}_{24} & \mathbb{C}_{25} & \mathbb{C}_{26} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} & \mathbb{C}_{34} & \mathbb{C}_{35} & \mathbb{C}_{36} \\ \mathbb{C}_{41} & \mathbb{C}_{42} & \mathbb{C}_{43} & \mathbb{C}_{44} & \mathbb{C}_{45} & \mathbb{C}_{46} \\ \mathbb{C}_{51} & \mathbb{C}_{52} & \mathbb{C}_{53} & \mathbb{C}_{54} & \mathbb{C}_{55} & \mathbb{C}_{56} \\ \mathbb{C}_{61} & \mathbb{C}_{62} & \mathbb{C}_{63} & \mathbb{C}_{64} & \mathbb{C}_{65} & \mathbb{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - D_{n+1})d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Na equação acima, os termos \mathbb{C}_{22} , \mathbb{C}_{23} , \mathbb{C}_{32} e \mathbb{C}_{33} representam escalares. Os termos da forma \mathbb{C}_{ij} (\mathbb{C}_{12} , por exemplo) representam tensores de segunda ordem, enquanto que os termos da forma \mathbb{C}_{ij} (\mathbb{C}_{11} , por exemplo) representam tensores de quarta ordem. A matriz dos coeficientes é dada pela Eq. 3.55.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} & \mathbb{C}_{14} & \mathbb{C}_{15} & \mathbb{C}_{16} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} & \mathbb{C}_{24} & \mathbb{C}_{25} & \mathbb{C}_{26} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} & \mathbb{C}_{34} & \mathbb{C}_{35} & \mathbb{C}_{36} \\ \mathbb{C}_{41} & \mathbb{C}_{42} & \mathbb{C}_{43} & \mathbb{C}_{44} & \mathbb{C}_{45} & \mathbb{C}_{46} \\ \mathbb{C}_{51} & \mathbb{C}_{52} & \mathbb{C}_{53} & \mathbb{C}_{54} & \mathbb{C}_{55} & \mathbb{C}_{56} \\ \mathbb{C}_{61} & \mathbb{C}_{62} & \mathbb{C}_{63} & \mathbb{C}_{64} & \mathbb{C}_{65} & \mathbb{C}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.55)$$

A partir da Eq. 3.55, tem-se que:

$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{d\sigma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}} = (1 - D_{n+1})\mathbb{C}_{11}:\mathbb{D}^e \quad (3.56)$$

A operação $(\mathbb{C}_{11}:\mathbb{D})$ representa a composição entre o tensor de quarta ordem \mathbb{C}_{11} e o tensor de quarta ordem \mathbb{D} , dada pela matriz de elasticidade.

4 ESTRATÉGIA DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

4.1 INTRODUÇÃO

Conforme apresentado nos capítulos anteriores, a implementação adequada dos modelos constitutivos elastoplásticos depende da determinação (identificação) dos parâmetros materiais envolvidos no modelo. Para o modelo de dano de Lemaitre com função de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Chaboche (Tab. 2.3) em aços, utilizando três termos na descrição do tensor tensão de endurecimento cinemático, é necessário identificar oito parâmetros constitutivos: H_1^k , H_2^k , H_3^k , b_1 , b_2 , b_3 , σ_{y0} e S^2 . Portanto, é necessário estabelecer uma metodologia para a determinação de tais parâmetros em função de dados experimentais.

Para alguns modelos, é possível integrar as equações constitutivas de forma a obter expressões analíticas que permitam identificar os parâmetros. Para o modelo de Chaboche, por exemplo, em carregamento uniaxial a amplitude da tensão é relacionada à amplitude de deformação imposta por meio de uma expressão analítica, a partir da qual H_i^k , b_i e σ_{y0} podem ser identificados. Entretanto, quando não há expressões analíticas que permitam a identificação dos parâmetros do material ou há a necessidade de outro método de calibração, os métodos de otimização surgem como uma alternativa de identificação ‘implícita’, sem a necessidade de determinação de uma equação que relacione o carregamento imposto com os parâmetros do material a serem determinados. Neste capítulo será apresentada a identificação de parâmetros utilizando métodos de otimização, bem como os resultados de calibração do modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche para os aços 304, S460N e para a liga de alumínio 6061-T6.

A identificação faz parte de uma classe de problemas numéricos conhecida como *problemas inversos*, em oposição aos *problemas diretos*. Nos diretos, o modelo constitutivo é dado, bem como a geometria inicial e as condições de contorno, e são obtidas a geometria final, as tensões e deformações e a evolução das grandezas do processo. O problema direto é o problema clássico de elementos finitos, em que se propõe uma geometria, aplica-se uma força e, como resultado, têm-se as tensões e deformações. Os problemas inversos são divididos em: (I) *problemas de otimização de pré-forma*; e (II) *problemas de identificação de parâmetros*. Nos primeiros, deseja-se obter a geometria inicial para que, após sofrer determinada deformação, certo componente tenha uma geometria final desejada. Por exemplo, em processos de estampagem, deseja-se que certo componente seja cilíndrico. Dessa forma, é necessário obter a forma inicial para que, após o processo, o componente tenha forma cilíndrica. Finalmente, nos problemas de identificação de parâmetros é dado um resultado experimental a partir do qual são obtidos os parâmetros, ou seja, o modelo constitutivo.

² Para a maioria dos materiais dúcteis, o parâmetro s é geralmente igual a 1 (Malcher, 2011).

4.2 ASPECTOS DE OTIMIZAÇÃO

O problema de identificação de parâmetros consiste em determinar um conjunto de parâmetros, denotados por \mathbf{p} , que *minimiza* a diferença entre uma resposta calculada numericamente $R^{NUM}(\mathbf{p})$ e uma resposta experimental $R^{EXP}(\mathbf{p})$, dentro de certa tolerância (erro) (Stahlschmidt, 2010). Assim, por meio de ensaios mecânicos, é obtida a resposta experimental, a qual é comparada com a resposta calculada por um problema direto utilizando métodos numéricos, dentre os quais se destaca o Método de Elementos Finitos (MEF).

A otimização pode ser definida como o ato de obter o melhor resultado dentro de condições definidas. Assim, o problema de otimização pode ser escrito matematicamente de acordo com a Tab. 4.1 (Rao, 2009).

Tabela 4.1 – Problema de otimização.

Encontre
$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$
que minimize
$f(\mathbf{p})$
sujeito às restrições
$g_j(\mathbf{p}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$
$l_j(\mathbf{p}) = 0, j = 1, 2, \dots, m$

A partir da definição do problema, identificam-se os seguintes aspectos (Stahlschmidt, 2010):

- i) *Função objetivo*: função matemática, $f(\mathbf{p})$, cujo mínimo se deseja determinar.
- ii) *Variáveis de projeto*: variáveis independentes (ou parâmetros) que aparecem na função objetivo.
- iii) *Restrições*: limites impostos ao sistema, definidos por $g_j(\mathbf{p}) \leq 0$ (restrição de desigualdade) e $l_j(\mathbf{p}) = 0$ (restrição de igualdade).
- iv) *Região de busca ou região variável*: região do espaço delimitada pelas restrições e definida pelas variáveis de projeto, em cujo interior ou fronteira se encontra o ponto ótimo.

A função objetivo pode ser definida com base nos mínimos quadrados (Eq. 4.1), a qual leva a uma rápida convergência na maioria dos métodos de otimização (Stahlschmidt, 2010). Na Equação 4.1, F_i^{NUM} e F_i^{EXP} são, respectivamente, as forças calculadas em cada incremento pelo método numérico e as forças determinadas experimentalmente, enquanto N é o número de pontos experimentais.

$$f(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{F_i^{NUM}(\mathbf{p}) - F_i^{EXP}}{F_i^{EXP}} \right)^2} \quad (4.1)$$

A Figura 4.1 ilustra o procedimento adotado na identificação de parâmetros. Inicialmente, têm-se os pontos experimentais. Em seguida, são calculadas as forças numericamente. Então, é feita a comparação entre as duas forças por meio da Eq. 4.1. Os parâmetros são ajustados até que a diferença entre as duas curvas seja mínima, dentro de certa tolerância. Para a identificação de parâmetros, não são necessárias restrições de desigualdade ou igualdade. Apenas são definidas as fronteiras para os parâmetros ($p_{i,max}$ e $p_{i,min}$), devido a exigências de certos métodos numéricos de minimização.

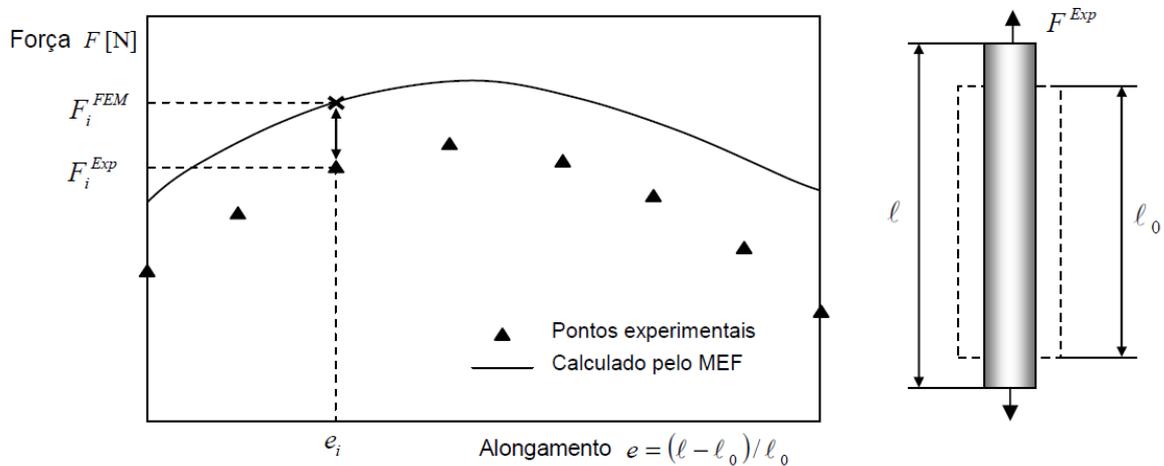


Figura 4.1 – Comparação entre as forças experimentais e as numéricas (Stahlschmidt, 2010).

Para a determinação de um ponto de mínimo local em que não haja restrições, são necessárias duas condições analíticas: a necessária e a suficiente. Em funções de uma variável independente ($f(x)$, por exemplo), a condição necessária é dada segundo a Eq. 4.2, ou seja, é necessário que a primeira derivada em relação à variável independente seja igual a zero no ponto de mínimo, denotado por x^* (Arora, 2004).

$$f'(x^*) = 0 \quad (4.2)$$

A condição suficiente é dada pela Eq. 4.3, ou seja, é necessário que a segunda derivada em relação à variável independente seja positiva no ponto de mínimo. Caso $f''(x^*)$ fosse negativa, ter-se-ia um ponto de máximo e, caso $f''(x^*)$ fosse nula, ter-se-ia um ponto de inflexão.

$$f''(x^*) > 0 \quad (4.3)$$

Estendendo a análise a funções de n variáveis ($f(\mathbf{p})$, onde \mathbf{p} é o vetor das variáveis independentes), é possível, por meio da expansão de Taylor, definir as condições necessária e suficiente para problemas sem restrições. A Eq. 4.4 define a condição necessária, ou seja, o gradiente da função deve ser igual a zero no ponto de mínimo (Arora, 2004).

$$\nabla f(\mathbf{p}^*) = 0 \quad (4.4)$$

A condição suficiente é definida pela Eq. 4.5, em que $\mathbf{H}(\mathbf{p}^*)$ é a *matriz Hessiana* e $\mathbf{d} = \mathbf{p} - \mathbf{p}^*$. Essa condição será verdadeira se a matriz Hessiana for positiva definida (Arora, 2004).

$$\mathbf{d}^T \mathbf{H}(\mathbf{p}^*) \mathbf{d} > 0 \quad (4.5)$$

A matriz Hessiana é definida por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}^*) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \right]_{(n \times n)} \quad (4.6)$$

Os métodos analíticos se aplicam apenas quando as expressões para a função objetivo e para as restrições são relativamente simples em termo das variáveis de projeto (Rao, 2009). Entretanto, para a função objetivo definida pela Eq. 4.1, a qual é não linear, os métodos analíticos não são aplicáveis, já que seriam muito pesados para serem utilizados (Arora, 2004). Dessa forma, é necessário aplicar os métodos numéricos para otimização de problemas não lineares.

Os algoritmos dos métodos numéricos são iniciados com uma estimativa para a solução ótima, a qual é melhorada em um processo iterativo, até que satisfaça as condições de ótimo, dentro de certa tolerância (Arora, 2004).

A maioria dos métodos de otimização numéricos são descritos pela forma iterativa presente na Eq. 4.7, em que $\mathbf{p}^{(k)}$ é o vetor dos parâmetros na iteração k . Assim, na iteração $k + 1$, o vetor é corrigido segundo um $\Delta \mathbf{p}^{(k+1)}$, determinado segundo o método numérico utilizado (Arora, 2004).

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \Delta \mathbf{p}^{(k+1)} ; k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

A variação dos parâmetros ($\Delta \mathbf{p}^{(k)}$) pode, ainda, ser decomposta em duas partes, de acordo com a Eq. 4.8, em que $\mathbf{d}^{(k)}$ é a direção desejada de busca e α_k é um escalar positivo, chamado comprimento de passo (Stahlschmidt, 2010).

$$\Delta \mathbf{p}^{(k)} = \alpha_k \mathbf{d}^{(k)} \quad (4.8)$$

Dessa forma, a Eq. 4.7 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)} ; k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

O processo de determinação de $\Delta \mathbf{p}^{(k)}$ é dividido, então, em dois problemas: encontrar uma direção de busca adequada; encontrar um comprimento de passo adequado (Arora, 2004).

Em suma, a ideia principal dos métodos numéricos de otimização é começar com uma estimativa razoável para o ponto ótimo e iterativamente ir progredindo em direção a este, através da Eq. 4.9, utilizando algum método para o cálculo de $\mathbf{d}^{(k)}$ e α_k (Arora, 2004). A Figura 4.2 ilustra a estrutura do processo de minimização aplicado à identificação de parâmetros.

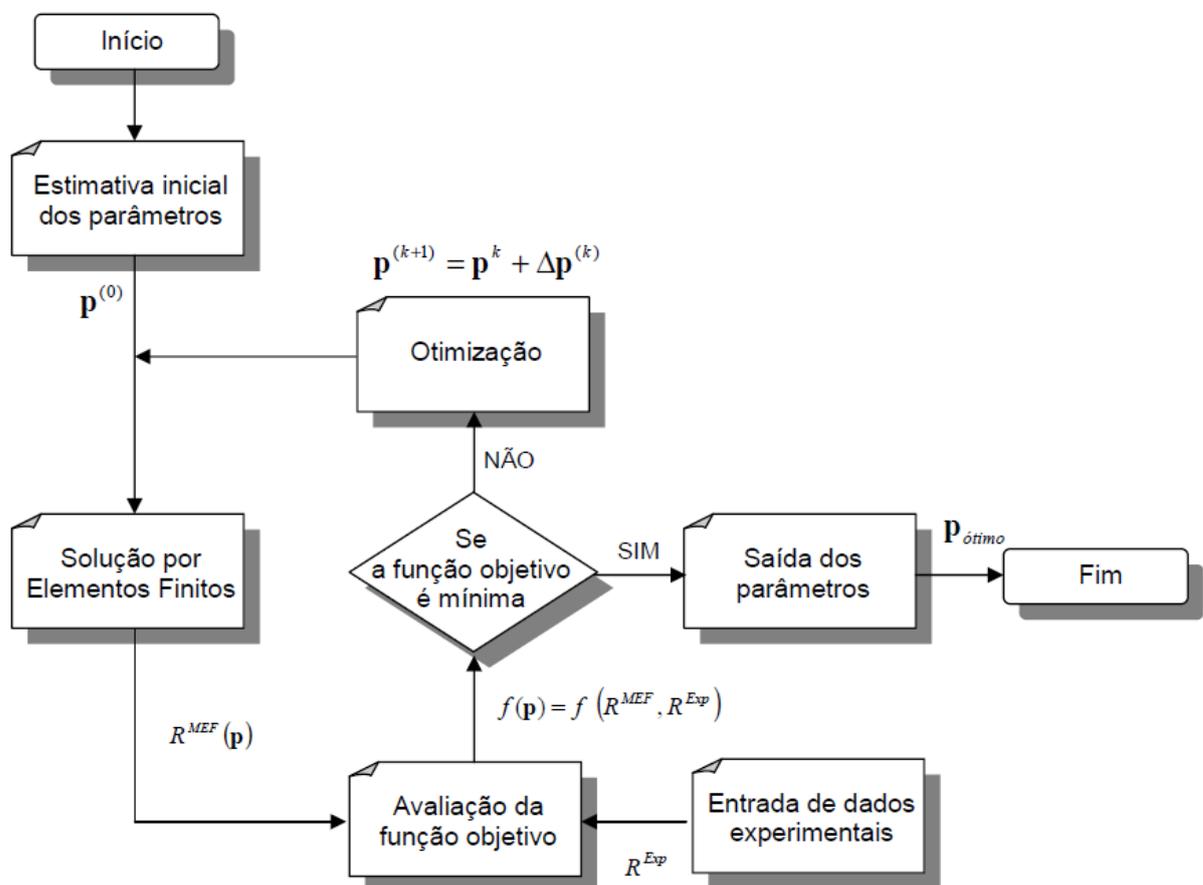


Figura 4.2 – Estrutura do processo de identificação de parâmetros (Stahlschmidt, 2010).

Dentre os métodos numéricos presentes na literatura, destacam-se os métodos da Bisseção, da Seção Áurea e o BFGS. Os dois primeiros são métodos unidimensionais, os quais necessitam ter a direção de busca $\mathbf{d}^{(k)}$ como entrada para, então, calcular o comprimento de passo α_k para a função objetivo ao longo da direção de busca dada (Arora, 2004). O método BFGS, por sua vez, é multidimensional e, assim, determina a direção de busca a cada iteração e, em seguida, utiliza um método unidimensional para calcular o comprimento de passo adequado (Stahlschmidt, 2010).

4.2.1 SEÇÃO ÁUREA

O método da Seção Áurea é um dos melhores da classe de redução de intervalos, pois necessita de menos avaliações da função objetivo em relação aos outros métodos (Arora, 2004). Para os métodos de redução de intervalos, assume-se que a função objetivo tem um mínimo global $f(\alpha^*)$ dentro do intervalo dado $0 \leq \alpha^* \leq \alpha$. Assim, o objetivo é encontrar α^* . Entretanto, ao lidar com métodos numéricos, não é possível encontrar exatamente o ponto mínimo α^* . De fato, o que se determina é o intervalo em que o mínimo está, ou seja, limites mínimo e máximo (α_{inf} e α_{sup}) para α^* . Tal intervalo é chamado *intervalo de incerteza I*, designado segundo a Eq. 4.10.

$$I = \alpha_{sup} - \alpha_{inf} \quad (4.10)$$

Portanto, os métodos de redução de intervalos têm como objetivo reduzir o intervalo de incerteza até que este satisfaça certa tolerância especificada ε , ou seja, $I < \varepsilon$. Quando o critério de parada for estabelecido, o ponto mínimo α^* é dado segundo a Eq. 4.11.

$$\alpha^* = \frac{\alpha_{inf} + \alpha_{sup}}{2} \quad (4.11)$$

Além disso, a Seção Áurea é um método de ordem zero, já que se baseia apenas na comparação do valor da função objetivo em diferentes pontos, sem utilizar informações de derivadas. O método da Seção Áurea é dividido em duas fases: avaliar a função em pontos predeterminados e compará-los para intervalar o mínimo na Fase I; e convergir ao mínimo na Fase II (Arora, 2004).

- *Fase I:*

Na Fase I, o objetivo é refinar o intervalo inicialmente dado para enclausurar o ponto de mínimo e depois aplicar o método. Primeiramente é selecionado um incremento δ para determinar os pontos de avaliação da função objetivo. Em seguida, os pontos são distribuídos no intervalo inicial. Partindo do zero, o primeiro ponto ($q = 0$) é dado por δ . Os pontos seguintes são determinados usando uma sequência de incrementos com base na razão áurea (1,618 ou $(\sqrt{5} + 1)/2$), de acordo com a Eq. 4.12.

$$\alpha_q = \sum_{j=0}^q \delta(1,618)^j \quad (4.12)$$

A Tabela 4.2 ilustra as primeiras iterações para determinação dos pontos de avaliação.

Tabela 4.2 – Pontos de avaliação da função objetivo para as três primeiras iterações da Fase I.

$q = 0;$	$\alpha_0 = \delta$
$q = 1;$	$\alpha_1 = \delta + 1,618\delta = 2,618\delta$
$q = 2;$	$\alpha_2 = 2,618\delta + 1,618(1,618\delta) = 5,236\delta$

As iterações são feitas até que se obtenha q tal que $f(\alpha_q) > f(\alpha_{q-1})$ e $f(\alpha_{q-1}) < f(\alpha_{q-2})$, o que garante que o mínimo tenha sido passado. Assim, o ponto mínimo está entre α_q e α_{q-2} . Em seguida, os limites superior e inferior do intervalo de incerteza são redefinidos de acordo com as Eq. 4.13 e 4.14, de forma a definir α_q como superior e α_{q-2} como inferior.

$$\alpha_u = \alpha_q = \sum_{j=0}^q \delta(1,618)^j \quad (4.13)$$

$$\alpha_l = \alpha_{q-2} = \sum_{j=0}^{q-2} \delta(1,618)^j \quad (4.14)$$

Portanto, o intervalo de incerteza a ser utilizado na Fase II é determinado de acordo com a Eq. 4.15.

$$I = \alpha_u - \alpha_l = 2,618(1,618)^{q-1}\delta \quad (4.15)$$

- *Fase II:*

Na Fase II, o intervalo de incerteza é reduzido ao avaliar e comparar o valor da função objetivo em pontos determinados do intervalo I . A Seção Áurea necessita de duas avaliações da função dentro do intervalo I , localizadas a $0,382I$ (ou $0,618I$) de cada extremidade. O fator $0,382$ vem da razão áurea (Arora, 2004).

Assim, os pontos α_a e α_b são dados segundo as Eqs. 4.16 e 4.17, em que I é o intervalo de incerteza, dado pela Eq. 4.10.

$$\alpha_a = \alpha_{inf} + 0,382I \quad (4.16)$$

$$\alpha_b = \alpha_{inf} + 0,618I \quad (4.17)$$

Após calcular α_a e α_b , é necessário avaliar a função objetivo nesses pontos para comparação. Assim, tem-se que:

- (I) Se $f(\alpha_a) < f(\alpha_b)$, o mínimo está entre α_{inf} e α_b ;
- (II) Se $f(\alpha_a) > f(\alpha_b)$, o mínimo está entre α_a e α_{sup} ;
- (III) Se $f(\alpha_a) = f(\alpha_b)$, o mínimo está entre α_a e α_b .

A partir disso, o novo intervalo de incerteza é determinado, redefinindo α_{inf} e α_{sup} de acordo com os intervalos dos mínimos obtidos acima.

O método da Seção Áurea pode ser implementado sem o uso da Fase I, caso seja conhecido um intervalo em que o mínimo se encontre (Arora, 2004). Assim, o algoritmo principal é a redução de intervalos presente na Fase II. A Tabela 4.3 resume o algoritmo para o método da Seção Áurea.

Tabela 4.3 – Algoritmo para o Método da Seção Áurea (Arora, 2004).

i)	Determinar um intervalo de incerteza inicial, $I = [\alpha_{inf}, \alpha_{sup}]$;
ii)	Calcular α_a e α_b segundo as Eqs. (4.16) e (4.17);
iii)	Calcular $f(\alpha_a)$ e $f(\alpha_b)$;
iv)	Comparar $f(\alpha_a)$ e $f(\alpha_b)$. Ir para (V), (VI) ou (VII);
v)	Se $f(\alpha_a) < f(\alpha_b)$, o mínimo está entre α_{inf} e α_b . Faça $\alpha_{inf} := \alpha_{inf}$ e $\alpha_{sup} := \alpha_b$;
vi)	Se $f(\alpha_a) > f(\alpha_b)$, o mínimo está entre α_a e α_{sup} . Faça $\alpha_{inf} := \alpha_a$ e $\alpha_{sup} := \alpha_{sup}$;
vii)	Se $f(\alpha_a) = f(\alpha_b)$, o mínimo está entre α_a e α_b . Faça $\alpha_{inf} := \alpha_a$ e $\alpha_{sup} := \alpha_b$;
viii)	Se $I > \varepsilon$, ou seja, se o novo intervalo de incerteza for maior que a tolerância, voltar para (II). Se $I < \varepsilon$, o processo é encerrado e o ponto de mínimo é dado por $\alpha^* = 1/2(\alpha_{inf} + \alpha_{sup})$.

4.2.2 BISSECÇÃO

O método da Bissecção, em oposição ao método da Seção Áurea, é considerado um método de primeira ordem, já que utiliza informações da derivada primeira da função objetivo. Entretanto, assim como a Seção Áurea, a Bissecção é um método de redução de intervalos, necessitando, portanto, de um intervalo inicial de incerteza $[\alpha_{inf}, \alpha_{sup}]$ e uma tolerância ε (Stahlschmidt, 2010).

A subdivisão e redução dos intervalos são realizadas com base no sinal da derivada primeira da função objetivo no centro do intervalo. Assim, avalia-se a derivada no centro do intervalo a cada

iteração. A cada iteração, exatamente metade do intervalo é eliminado. A Tabela 4.4 apresenta o algoritmo para esse método.

Tabela 4.4 – Algoritmo para o Método da Bisseção (Stahlschmidt, 2010).

i)	Determinar um intervalo de incerteza inicial, $I = [\alpha_{inf}, \alpha_{sup}]$;
ii)	Calcular $f'(\alpha_{inf})$ e $f'(\alpha_{sup})$;
iii)	Calcular $\alpha_{méd} = \frac{1}{2}(\alpha_{sup} + \alpha_{inf})$ e $f'(\alpha_{méd})$. Ir para (IV) ou (V);
iv)	Se $f'(\alpha_{méd})$ possui o mesmo sinal que $f'(\alpha_{inf})$ então $I = [\alpha_{méd}, \alpha_{sup}]$;
v)	Se $f'(\alpha_{méd})$ possui o mesmo sinal que $f'(\alpha_{sup})$ então $I = [\alpha_{inf}, \alpha_{méd}]$;
	Se $I > \varepsilon$, ou seja, se o novo intervalo de incerteza for maior que a tolerância, voltar para (III). Se $I < \varepsilon$, o processo é encerrado e o ponto de mínimo é dado por $\alpha^* = 1/2(\alpha_{inf} + \alpha_{sup})$.
vi)	

4.2.3 MÉTODO BFGS

O método *Boyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS) é dito *Quasi-Newton*, por ser uma modificação do método de Newton. Ao contrário dos métodos da Seção Áurea e da Bisseção, o BFGS é multidimensional, determinando, portanto, a direção de busca $\mathbf{d}^{(k)}$ e não o comprimento de passo α_k . Assim, é utilizado em conjunto com um método unidimensional. Além disso, o BFGS é um método de segunda ordem, já que utiliza informações das derivadas segundas da função objetivo, o que garante convergência quadrática, mais rápida que os métodos de ordem zero ou primeira ordem (Stahlschmidt, 2010).

O método de Newton é derivado da expansão de Taylor de segunda ordem da função objetivo em torno do ponto atual \mathbf{p} , utilizando uma perturbação $\Delta\mathbf{p}$. A expansão é dada pela Eq. 4.18, em que \mathbf{H} é a matriz Hessiana e \mathbf{c} o gradiente, calculados no ponto \mathbf{p} .

$$f(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) + \mathbf{c}^T \Delta\mathbf{p} + 0,5 \Delta\mathbf{p}^T \mathbf{H} \Delta\mathbf{p} \quad (4.18)$$

A condição necessária para a existência do mínimo é que o gradiente da função objetivo seja nulo ($\partial f / \partial (\Delta\mathbf{p}) = \mathbf{0}$) (Arora, 2004). Assim, calculando o gradiente da expansão Eq. 4.18, obtém-se a Eq. 4.19.

$$\mathbf{c} + \mathbf{H} \Delta\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

Portanto, se \mathbf{H} for positiva definida, existe um mínimo e ele é único (Arora, 2004). Assim, assumindo \mathbf{H} não singular, $\Delta\mathbf{p}$ é dado pela Eq. 4.20.

$$\Delta\mathbf{p} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{c} \quad (4.20)$$

Utilizando a Eq. 4.20, o ponto inicial pode ser atualizado segundo a Eq. 4.21.

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)} + \Delta\mathbf{p} \quad (4.21)$$

Como a Eq. 4.18 é uma aproximação da função objetivo (termos de ordem superior foram desprezados), a Eq. 4.21 não dará o ponto mínimo exato. Assim, é necessário utilizar um procedimento iterativo até que \mathbf{p} esteja suficientemente perto do ponto de mínimo, de acordo com certa tolerância (Arora, 2004).

O método de Newton, entretanto, é computacionalmente ineficiente, já que requer o cálculo de $n(n + 1)/2$ derivadas de segunda ordem para montar a Hessiana, em que n é o número de parâmetros a serem otimizados. Para a maioria dos problemas de engenharia, o cálculo dessas derivadas pode ser extremamente caro computacionalmente, ou até mesmo impossível. Assim, os métodos *Quasi-Newton* utilizam apenas informações de derivadas primeiras para aproximar a Hessiana e/ou sua inversa (Arora, 2004).

Dentre os métodos *Quasi-Newton*, o BFGS é, comprovadamente, o mais eficiente e mais efetivo nas aplicações (Arora, 2004). O método é elaborado com base na atualização de uma aproximação da matriz Hessiana a cada iteração.

A Tabela 4.5 apresenta o procedimento de atualização da Hessiana para a iteração $k + 1$ com base na iteração k .

Tabela 4.5 – Procedimento de atualização da matriz Hessiana (Arora, 2004).

$\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{H}^{(k)} + \mathbf{D}^{(k)} + \mathbf{E}^{(k)}$		
<p>Em que as matrizes de correção $\mathbf{D}^{(k)}$ e $\mathbf{E}^{(k)}$ são dadas por</p>		
$\mathbf{D}^{(k)} = \frac{\mathbf{y}^{(k)}\mathbf{y}^{(k)T}}{(\mathbf{y}^{(k)} \cdot \mathbf{s}^{(k)})}$		$\mathbf{E}^{(k)} = \frac{\mathbf{c}^{(k)}\mathbf{c}^{(k)T}}{(\mathbf{c}^{(k)} \cdot \mathbf{d}^{(k)})}$
<p>O gradiente $\mathbf{c}^{(k+1)}$, a mudança no gradiente $\mathbf{y}^{(k)}$ e a mudança nos parâmetros $\mathbf{s}^{(k)}$ são dados por:</p>		
$\mathbf{s}^{(k)} = \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$	$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{c}^{(k-1)} - \mathbf{c}^{(k)}$	$\mathbf{c}^{(k+1)} = \nabla f(\mathbf{p}^{(k+1)})$

A Tabela 4.6 apresenta o algoritmo para o método BFGS.

Tabela 4.6 – Algoritmo para o Método BFGS (Arora, 2004).

<i>i)</i>	Estimar valores iniciais para os parâmetros $\mathbf{p}^{(0)}$;
<i>ii)</i>	Escolher uma matriz positiva definida $n \times n$ para estimativa inicial da Hessiana, $\mathbf{H}^{(0)}$. Na falta de informações mais precisas, seja $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{I}$;
<i>iii)</i>	Escolher um parâmetro de convergência (tolerância) ε ;
<i>iv)</i>	Fazer $k = 0$ e computar $\mathbf{c}^{(0)} = \nabla f(\mathbf{x}^{(0)})$;
<i>v)</i>	Calcular a norma do vetor gradiente $\ \mathbf{c}^{(k)}\ $. Se $\ \mathbf{c}^{(k)}\ < \varepsilon$, pare o processo; caso contrário, continue;
<i>vi)</i>	Resolver o sistema de equações $\mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{c}^{(k)}$ para obter a direção de busca;
<i>vii)</i>	Computar o comprimento de passo ótimo α_k que minimize $f(\mathbf{p}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)})$, utilizando algum método univariável;
<i>viii)</i>	Atualizar \mathbf{p} como $\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$;
<i>ix)</i>	Atualizar a aproximação da Hessiana de acordo com a Tab. 4.5;
<i>x)</i>	Fazer $k := k + 1$ e ir para (V).

4.2.4 ROTINA DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

Neste trabalho, foi desenvolvido o programa para identificação de parâmetros PARFINDER em MATLAB®, o qual utiliza o método da Seção Áurea em conjunto com o algoritmo de atualização de tensões (algoritmo de retorno) apresentado no capítulo 3 e implementado em linguagem FORTRAN para ajustar a curva experimental desejada e identificar os parâmetros materiais. A Figura 4.3 apresenta a estrutura do programa.

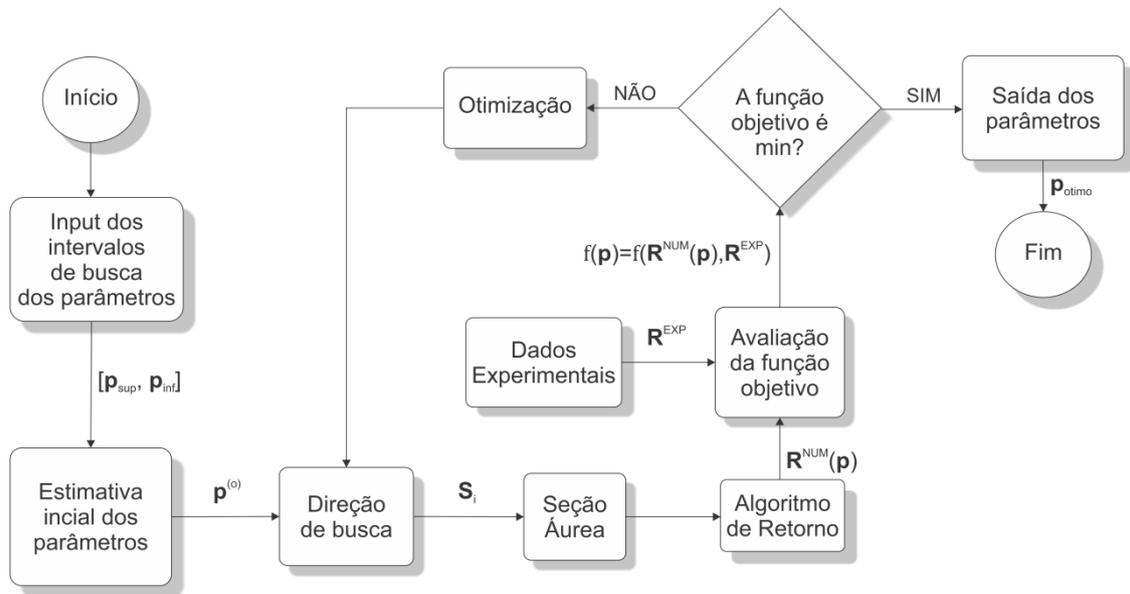


Figura 4.3 – Estrutura do programa PARFINDER.

Inicialmente, o usuário informa ao programa os limites de busca para o método da Seção Áurea, ou seja, $[p_{inf}; p_{sup}]$, e o programa estima um valor inicial para os parâmetros ($p^{(0)}$). Em seguida, o programa inicia o procedimento de otimização segundo o método univariável apresentado por Rao (2009), o qual se baseia em otimizar um parâmetro por vez utilizando um método unidirecional, considerando que os outros parâmetros sejam mantidos constantes. Assim, a cada iteração global, o programa otimiza cada parâmetro uma vez. O método unidirecional utilizado foi o método da Seção Áurea, escolhido por ser o método mais eficiente de ordem zero, evitando a necessidade de avaliar eventuais derivadas da função objetivo.

A avaliação da função objetivo é feita comparando a resposta obtida numericamente $R^{NUM}(p)$ com a resposta experimental R^{EXP} , de acordo com a função objetivo que melhor descreva o comportamento analisado. A estrutura utilizada para avaliar a função objetivo é ilustrada na Fig. 4.4. Inicialmente, o programa PARFINDER grava o valor dos parâmetros da iteração k ($p^{(k)}$) em um arquivo, ou seja, o valor dos parâmetros para os quais se deseja saber o valor da função objetivo. Em

seguida, o programa chama o programa de elementos finitos Hyplas, o qual lê esse arquivo e gera a resposta numérica, ou seja, a curva força vs. deslocamento segundo o MEF. Finalmente, o programa PARFINDER lê a curva experimental e compara as duas repostas segundo a Eq. 4.1, resultando no valor da função objetivo.

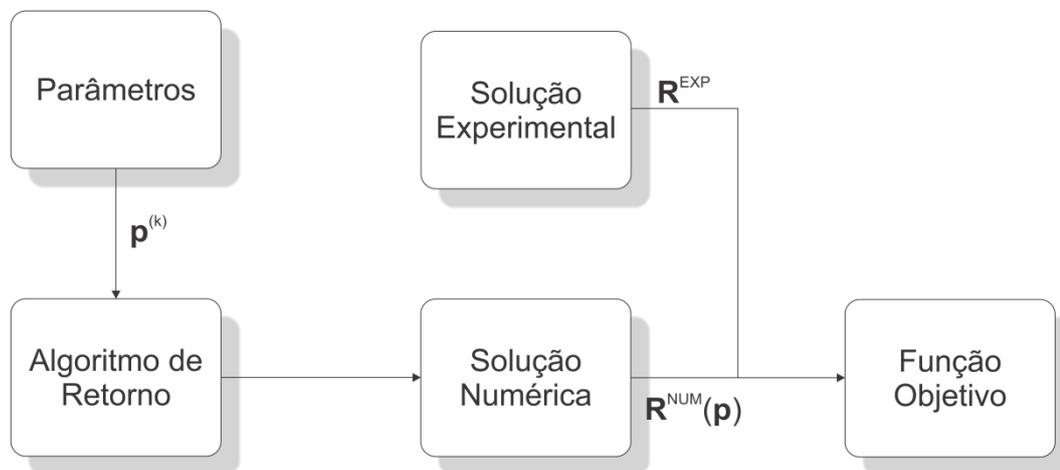


Figura 4.4 – Estrutura da avaliação da função objetivo.

O critério de parada do programa PARFINDER é definido segundo as tolerâncias locais para cada parâmetro, utilizadas na convergência do método da Seção Áurea, e uma tolerância global, aplicada à função objetivo. Após a otimização de cada parâmetro, ou seja, após um ciclo de otimização segundo a Seção Áurea, o programa PARFINDER calcula a variável “erro”, definida segundo a Eq. 4.22, a qual mede a diferença absoluta entre a função objetivo nas iterações atual (f_n) e imediatamente anterior (f_0). A convergência é dada quando o “erro” se torna menor que a tolerância global imposta.

$$erro = |f_n - f_0| \quad (4.22)$$

4.3 RESULTADOS

Deseja-se determinar os parâmetros do material para os aços 304 e S460N e para o alumínio 6061-T6. Para a identificação dos parâmetros, foi considerado o modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche com dois termos não lineares e um termo linear, o que resulta na lei de evolução do tensor tensão de endurecimento cinemático descrita na Eq. 4.23.

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3}H_1^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\gamma} b_1 \beta_1 + \frac{2}{3}H_2^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\gamma} b_2 \beta_2 + \frac{2}{3}H_3^k \dot{\epsilon}^p \quad (4.23)$$

Assim, sete parâmetros devem ser identificados: σ_{y0} , H_1^k , H_2^k , H_3^k , b_1 , b_2 e S . Como todos os materiais considerados são metais, o expoente de dano é unitário ($s = 1$) (Malcher, 2011).

Analisando os parâmetros, nota-se que uma calibração simultânea de todos eles não é adequada, já que σ_{y0} , H_i^k e b_i controlam os aspectos relativos aos níveis de tensão no material, enquanto que o denominador de dano (S) influencia a taxa de crescimento da variável de dano. A calibração de H_i^k e b_i se dá em níveis de tensão de ciclo estabilizado. Entretanto, para calibrar S adequadamente, é necessário que o dano esteja muito próximo de 1, o que significa que os níveis de tensão no material já estão significativamente alterados em relação aos níveis de tensão de ciclo estabilizado. Portanto, a identificação de parâmetros foi dividida em dois problemas: (I) identificação dos parâmetros de tensão – σ_{y0} , H_i^k e b_i ; e (II) identificação do parâmetro de dano – S .

4.3.1 IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DE TENSÃO

Para os parâmetros de tensão, há uma relação analítica entre as amplitudes de deformação aplicadas em estado uniaxial e as amplitudes de tensão obtidas. Considerando um carregamento uniaxial cíclico com amplitude de deformação ϵ_a^p , tem-se que a amplitude de tensão σ_a é dada, para a lei de endurecimento cinemático de Chaboche com dois termos não lineares e um termo linear, pela Eq. 4.24 (Chaboche, 1986).

$$\sigma_a = \frac{H_1^k}{b_1} \tanh(b_1 \epsilon_a^p) + \frac{H_2^k}{b_2} \tanh(b_2 \epsilon_a^p) + H_3^k \epsilon_a^p + \sigma_{y0} \quad (4.24)$$

Dessa forma, conhecendo a relação entre ϵ_a^p e σ_a para cada material, os parâmetros do modelo matemático/numérico podem ser obtidos por meio de um ajuste de curva. Assim, a identificação dos parâmetros foi feita com base na relação de Ramberg-Osgood (1943) (Eq. 4.25), que relaciona a amplitude de tensão (σ_a) e a amplitude de deformação plástica (ϵ_a^p). Na Equação 4.25, H' e n' são parâmetros do material, os quais foram obtidos de Itoh (2001) para o aço 304 e o alumínio 6061-T6 e

Jiang et al. (2007) para o aço S460N. Assim, tendo os parâmetros H' e n' , a curva de Ramberg-Osgood pôde ser obtida e calibrada para os parâmetros de tensão (H_i^k , b_i e σ_{y0}).

$$\varepsilon_a^p = \left(\frac{\sigma_a}{H'}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad (4.25)$$

A identificação de parâmetros, então, consistiu em ajustar os parâmetros (H_i^k , b_i e σ_{y0}) da equação analítica (Eq. 4.24) em relação à curva de Ramberg-Osgood (Eq. 4.25). Foi feito, então, um ajuste não linear utilizando o Matlab® (Anexo A). Foi considerada uma tolerância de 10^{-8} para cada parâmetro. Os parâmetros de Ramberg-Osgood para cada material, bem como os resultados da calibração obtidos para o modelo de Chaboche, estão listados nas Tabs. 4.7 e 4.8, respectivamente.

Tabela 4.7 – Parâmetros de Ramberg-Osgood, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson para o aço 304, alumínio 6061-T6 (Itoh, 2001) e aço S460N (Jiang et al., 2007).

<i>Parâmetro</i>	<i>Material</i>		
	<i>304 (Itoh, 2001)</i>	<i>S460N (Jiang et al., 2007)</i>	<i>6061-T6 (Itoh, 2001)</i>
H' (MPa)	2093,85	1478,47	377,80
n'	0,31	0,20	0,05
E (GPa)	193	209	77
ν	0,29	0,30	0,33

Tabela 4.8 – Resultados da calibração por amplitude para o modelo de Chaboche e parâmetros da curva de Ramberg-Osgood obtidos da literatura para os aços 304, S460N e alumínio 6061-T6.

<i>Parâmetro</i>	<i>Material</i>		
	<i>304</i>	<i>S460N</i>	<i>6061-T6</i>
H_1^k (MPa)	88272	106137	6284
H_2^k (MPa)	44770	46956	9371
H_3^k (MPa)	25474	21154	3823
b_1	1560	1617	725
b_2	459	479	725
σ_{y0} (MPa)	127	246	250

4.3.2 IDENTIFICAÇÃO DO PARÂMETRO DE DANO

A identificação do parâmetro de dano foi feita com base na estratégia ‘implícita’ desenvolvida neste capítulo, por meio de métodos de otimização. Foram obtidos dados de vida e amplitude de deformação para carregamentos cíclicos uniaxiais (Fig. 4.5) de tensão para os materiais analisados. Em seguida, a rotina PARFINDER foi ajustada para obter o denominador de dano que resulte em dano muito próximo a 1 para a vida dada.

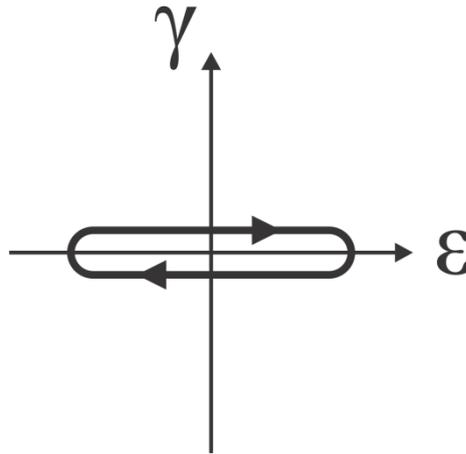


Figura 4.5 – Trajetória uniaxial de tração-compressão imposta para calibração.

A Equação 4.26 apresenta a função objetivo adotada, em que D_c representa o dano crítico que se deseja obter no último ciclo, D_f representa o dano obtido no último ciclo pela resposta numérica, N_c a vida em que o dano se iguala ao dano crítico e N_T a vida experimental considerada. Como a calibração é feita para um número fixo de ciclos, o termo $(D_f - D_c)$ leva em consideração a diferença entre o dano realmente obtido no último ciclo (D_f) e o dano crítico que se deseja obter no último ciclo (D_c). Por sua vez, o termo $(N_c/N_T - D_c)$ considera os casos em que o denominador de dano é tal que o dano crítico desejado é atingido para um número menor de ciclos do que o total da calibração.

$$f(S) = \sqrt{(D_f - D_c)^2 + \left(\frac{N_c}{N_T} - D_c\right)^2} \quad (4.26)$$

Para cada material, foram obtidos valores de vida e amplitude de deformação que resultaram em diferentes valores de denominador de dano. Os dados experimentais e os resultados estão representados nas Tabs. 4.9 a 4.11 para os aços 304 e S360N e para a liga de alumínio 6061-T6. Utilizou-se uma tolerância de 10^{-2} no método da Seção Áurea. O algoritmo utilizado para identificação do denominador de dano implementado em MATLAB[®] encontra-se no Apêndice B.

Tabela 4.9 – Resultados de identificação do denominador de dano para o aço 304.

<i>Aço 304 (Itoh, 2001)</i>		
ϵ_a [%]	N_f [Ciclos]	S [MPa]
0,600	690	1,54
0,750	540	2,11
0,500	1500	2,01
0,400	7100	4,95
0,325	23400	8,68
0,250	49000	8,07

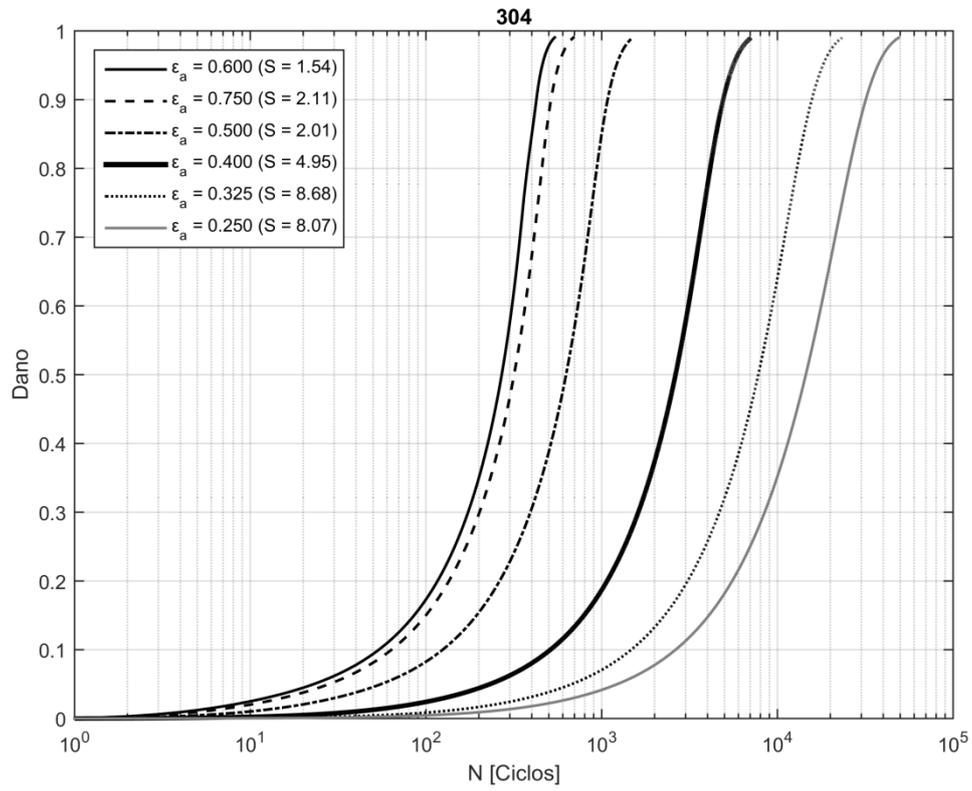
Tabela 4.10 – Resultados de identificação do denominador de dano para o aço S460N.

<i>Aço S460N (Jiang et al., 2007)</i>		
ϵ_a [%]	N_f [Ciclos]	S [MPa]
0,50	1600	2,63
0,33	7690	3,49
0,22	33100	4,37

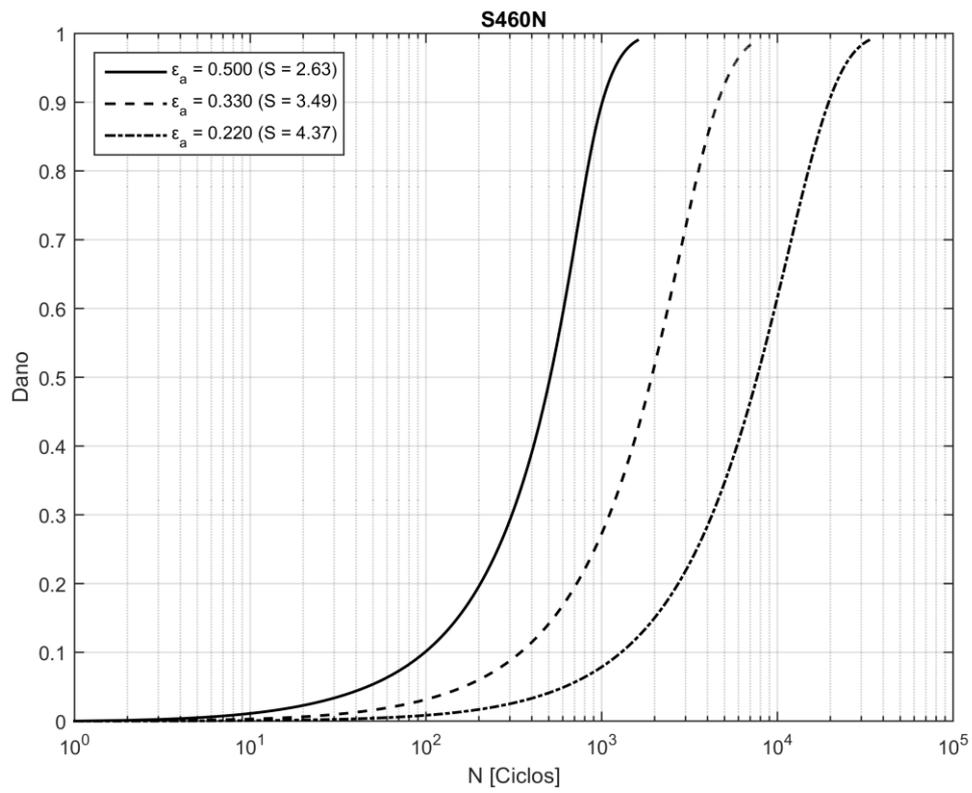
Tabela 4.11 – Resultados de identificação do denominador de dano para o alumínio 6061-T6.

<i>Al 6061-T6 (Itoh, 2001)</i>		
ϵ_a [%]	N_f [Ciclos]	S [MPa]
0,90	225	1,47
0,60	740	1,65
0,40	2900	1,43

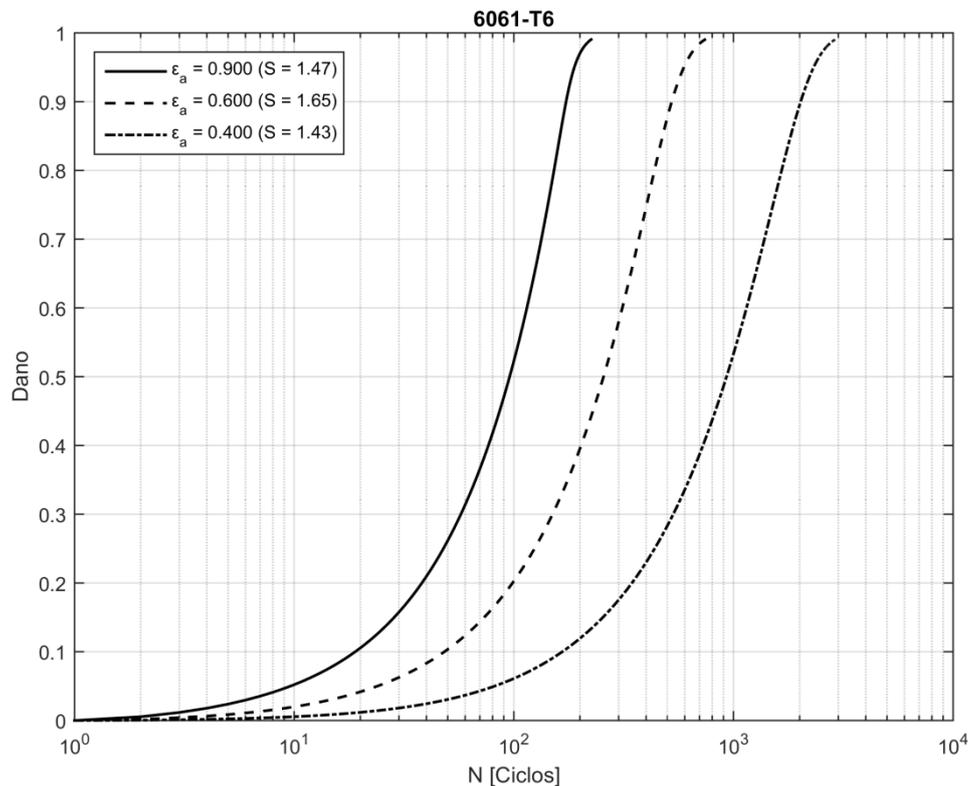
A Figura 4.6 apresenta a evolução do dano para cada calibração apresentada nas Tabs. 4.9 a 4.11.



(a)



(b)



(c)

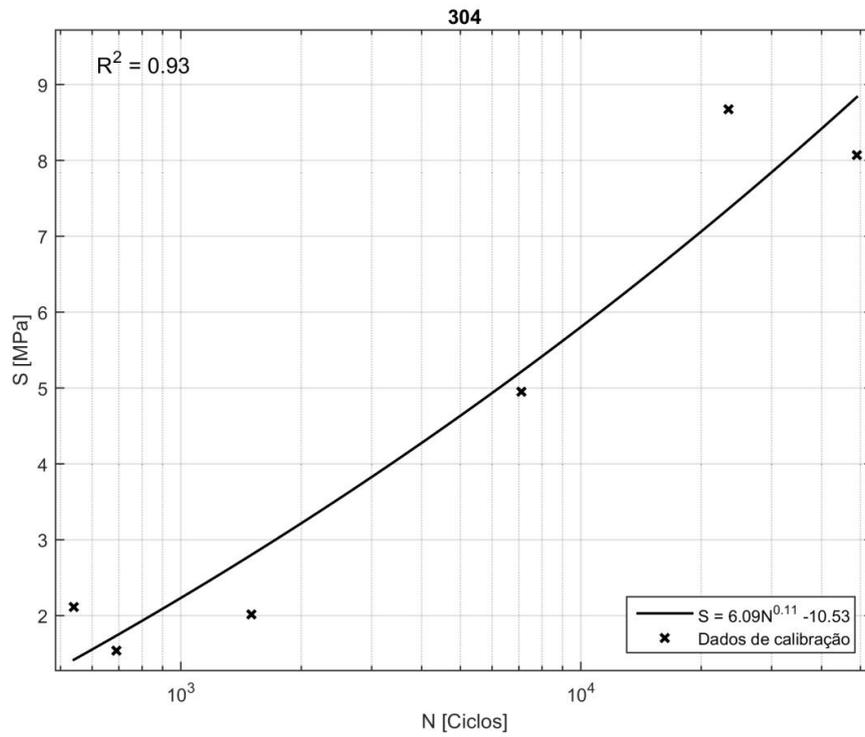
Figura 4.6 – Evolução do dano em função da determinação do denominador de dano para (a) aço 304, (b) aço S460N; e (c) liga de alumínio 6061-T6 (Amplitudes de deformação dadas em %, denominadores de dano dados em *MPa*)..

Da Figura 4.6 e das Tabs. 4.9 a 4.11 nota-se que o denominador de dano varia em relação à vida esperada. Percebe-se que quanto maior a vida atingida, menor o valor do denominador determinado. Analisando a lei de evolução do dano (Eq. 2.42), o crescimento do dano é inversamente proporcional a S . Assim, para que o dano evolua de 0 a 1 para um maior número de ciclos, S deve diminuir, conforme observado na identificação realizada.

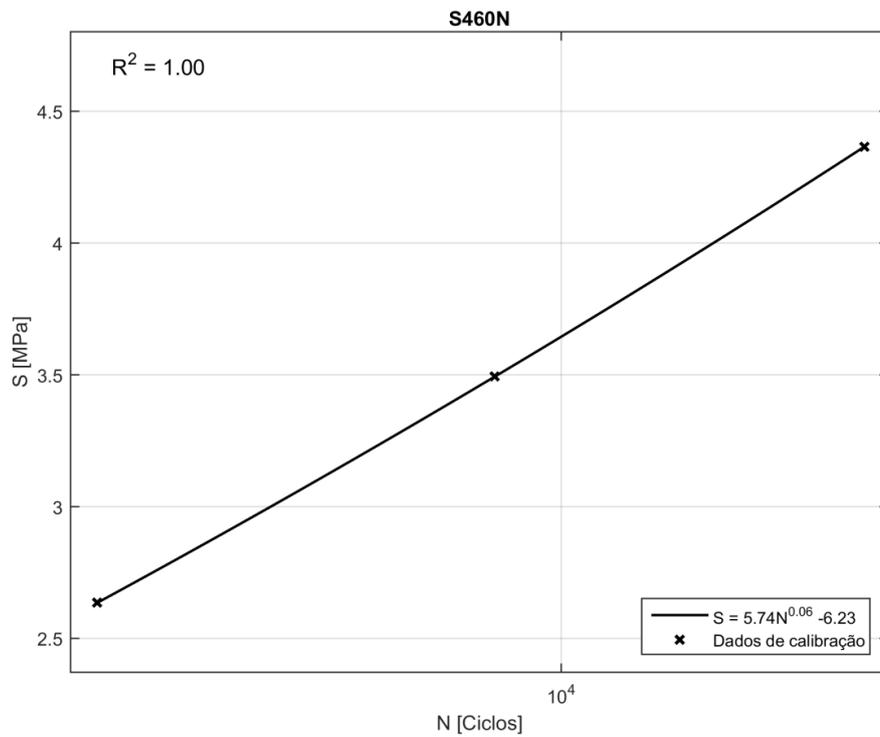
A Figura 4.7 apresenta a variação do denominador de dano identificado em função da vida N para os três materiais considerados. A partir dos dados de calibração, foi feita uma regressão do tipo potência para determinar a relação entre S e N , considerando $S = aN^b + c$. Percebe-se que essa lei ajusta muito bem os pontos experimentais para os aços 304 e S460N, com coeficientes R^2 maiores que 0,93. Porém, o ajuste para a liga de alumínio não segue uma relação de potência, sendo praticamente constante no intervalo analisado.

Entretanto, o modelo de Lemaitre considera S constante. Assim, o procedimento adotado foi utilizar os ajustes para determinar o valor adequado de denominador de dano para o intervalo de vida a

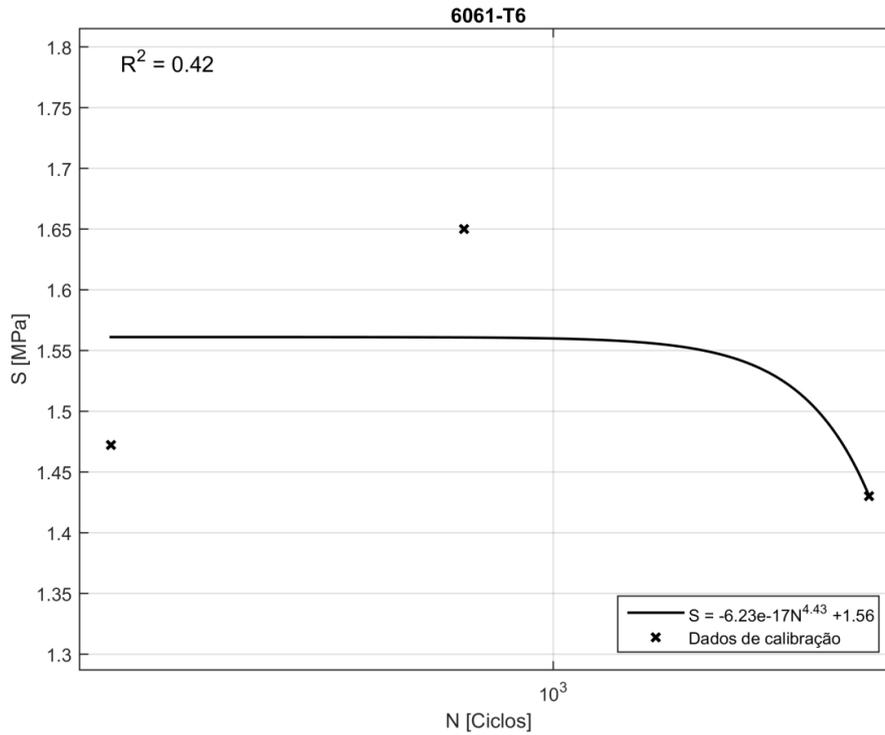
ser analisado para cada material. A Tab. 4.12 apresenta os resultados finais de identificação de parâmetros para cada material.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.7 – Variação do denominador de dano (S) em função da vida calibrada para (a) aço 304, (b) aço S460N, e (c) Al 6061-T6.

Tabela 4.12 – Resultados de identificação de parâmetros para os aços 304, S460N e o alumínio 6061-T6.

<i>Parâmetro</i>	<i>Material</i>		
	<i>304</i>	<i>S460N</i>	<i>6061-T6</i>
H_1^k (MPa)	88272	106137	6284
H_2^k (MPa)	44770	46956	9371
H_3^k (MPa)	25474	21154	3823
b_1	1560	1617	725
b_2	459	479	725
σ_{y0} (MPa)	127	246	250
S (MPa)	2,01	4,36	1,43

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, serão apresentados os resultados referentes à implementação do modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche, desenvolvido nos Capítulos 2 e 3. Serão analisados três materiais – aços 304 e S460N e alumínio 6061-T6 – submetidos a carregamentos uniaxiais e multiaxiais não proporcionais. A identificação dos parâmetros para os materiais analisados foi apresentada no Capítulo 4.

Em todas as simulações, foram utilizados dois termos de Armstrong-Frederick e um termo de Prager na lei de evolução de Chaboche, resultando na evolução do tensor tensão de endurecimento cinemático conforme a Eq. 5.1.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H_1^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{\gamma} b_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \frac{2}{3} H_2^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{\gamma} b_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \frac{2}{3} H_3^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (5.1)$$

O algoritmo de atualização de tensões desenvolvido foi implementado em linguagem FORTRAN e aplicado em um ponto material. Foram realizadas simulações para determinar a capacidade do modelo apresentado em descrever o comportamento elastoplástico dos materiais estudados em carregamentos proporcionais e não proporcionais. Compararam-se as respostas de vida em fadiga do modelo para a estratégia implícita apresentada neste estudo com os resultados de vida em fadiga presentes na literatura.

A seção 5.2 apresenta os históricos de carregamento utilizados. Em seguida, na seção 5.3 serão apresentados os resultados de vida em fadiga. Na seção 5.4 é feita uma análise da descrição das tensões pelo modelo. Na seção 5.5, as curvas de evolução do dano são exibidas. Finalmente, a seção 5.6 apresenta as conclusões.

5.2 CARREGAMENTOS

Para o aço S460N foram analisados nove históricos de carregamento distintos, conforme exposto na Fig. 5.1, apresentando trajetórias uniaxiais (trajetórias A e B), multiaxiais proporcionais (trajetória C) e multiaxiais não proporcionais. Para o aço 304 e a liga de alumínio 6061-T6 foram analisados dez históricos de carregamento distintos, apresentados na Fig. 5.2, também compostos de trajetórias uniaxiais (caso 1), multiaxiais proporcionais (caso 6) e multiaxiais não proporcionais. As rotinas dos carregamentos apresentados implementadas em FORTRAN estão apresentadas no Apêndice C.

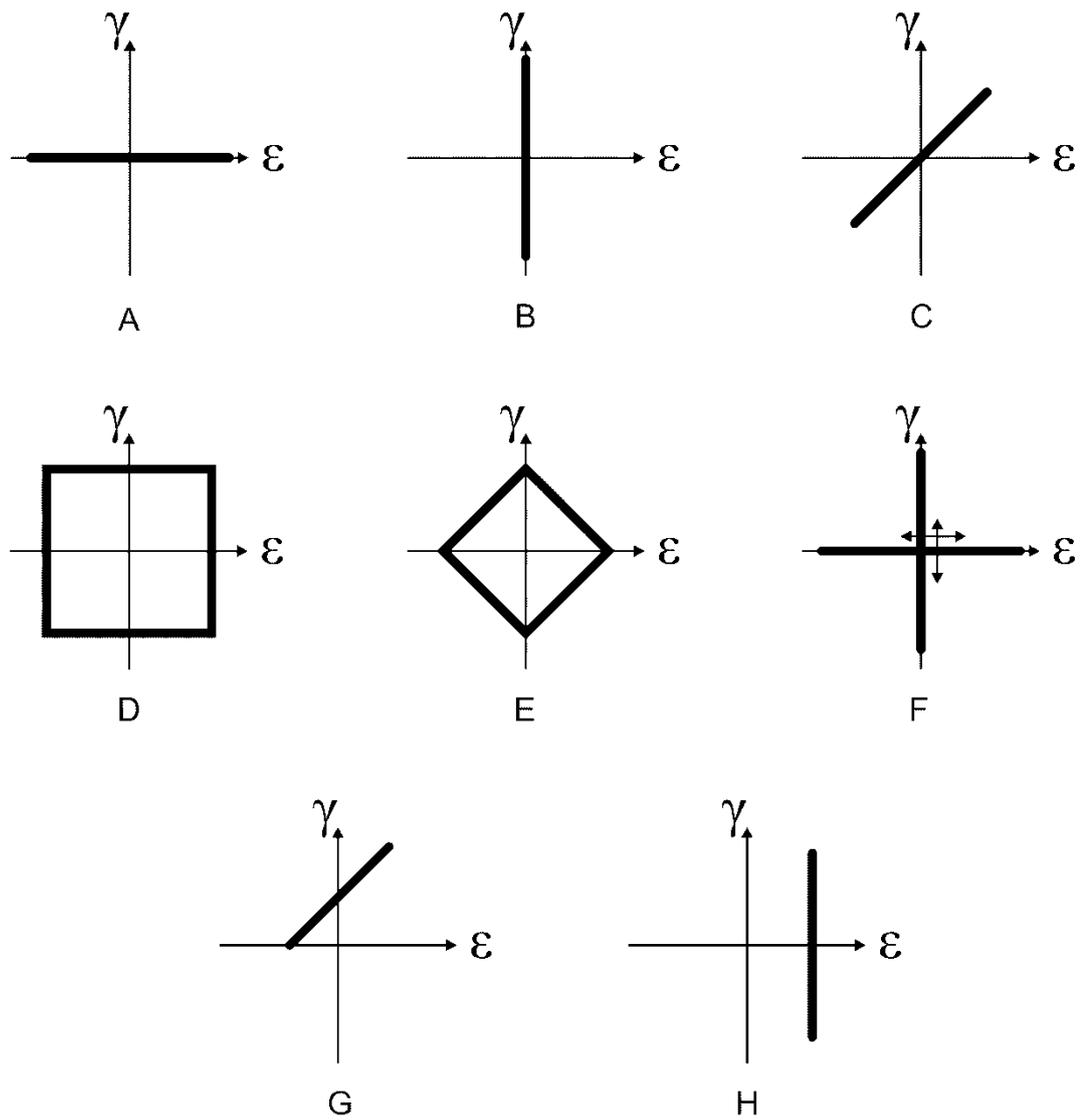


Figura 5.1 – Históricos de carregamento impostos para o aço S460N (Jiang et al., 2007).

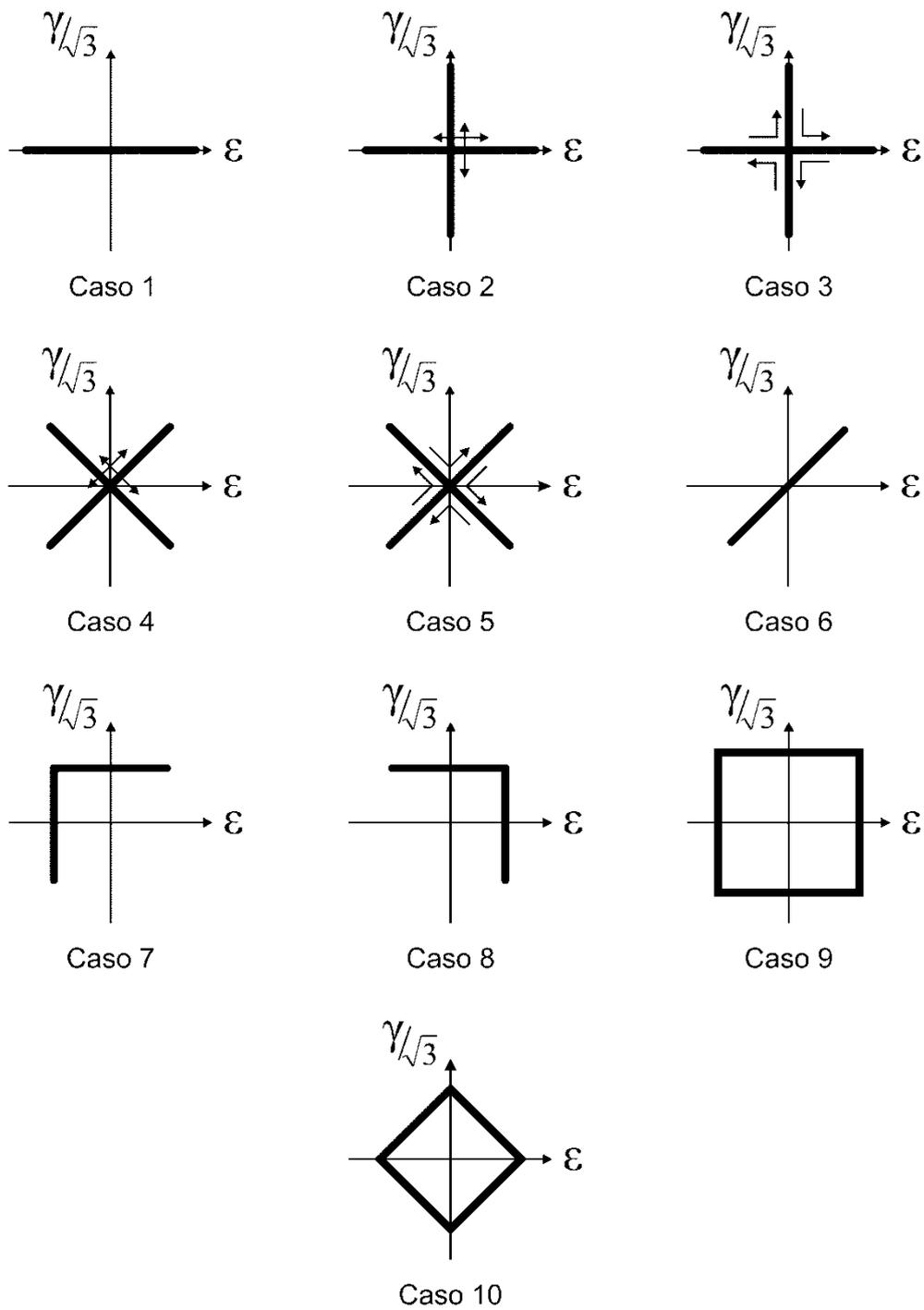


Figura 5.2 – Históricos de carregamento impostos para o aço 304 e a liga de alumínio 6061-T6 (Itoh, 2001).

5.3 VIDA EM FADIGA

As Tabelas 5.1 a 5.3 apresentam a trajetória e os dados de amplitudes de deformação impostas e vida experimental para os aços 304, S460N e alumínio 6061-T6, bem como a vida numérica obtida pelo modelo de dano de Lemaitre.

Tabela 5.1 – Amplitudes de deformação impostas, vida experimental e vida numérica obtidas para o aço 304 (Itoh, 2001).

<i>Aço 304 (Itoh, 2001)</i>					
<i>Caso</i>	ε_a [%]	γ_a [%]	N_{EXP}	N_{NUM}	D_{REL} [%]
1	0,250	0	49000	12393	75
	0,325	0	23400	5506	76
	0,400	0	7100	2933	59
	0,500	0	1500	1529	2
	0,565	0	1700	1085	36
	0,600	0	690	921	33
	0,750	0	540	515	5
2	0,250	0,435	9500	4929	48
	0,400	0,695	1400	1209	14
3	0,250	0,435	20000	5098	75
	0,400	0,695	2100	1273	39
4	0,250	0,435	1200	1727	44
	0,400	0,695	410	459	12
5	0,250	0,435	1700	1832	8
	0,400	0,695	450	500	11
6	0,250	0,435	17500	3309	81
	0,400	0,695	3200	866	73
7	0,250	0,435	2050	1641	20
	0,400	0,695	470	458	3
8	0,250	0,435	2950	1641	44
	0,400	0,695	660	458	31
9	0,250	0,435	2600	1115	57
	0,400	0,695	320	335	5
10	0,250	0,435	4750	2961	38
	0,400	0,695	710	795	12

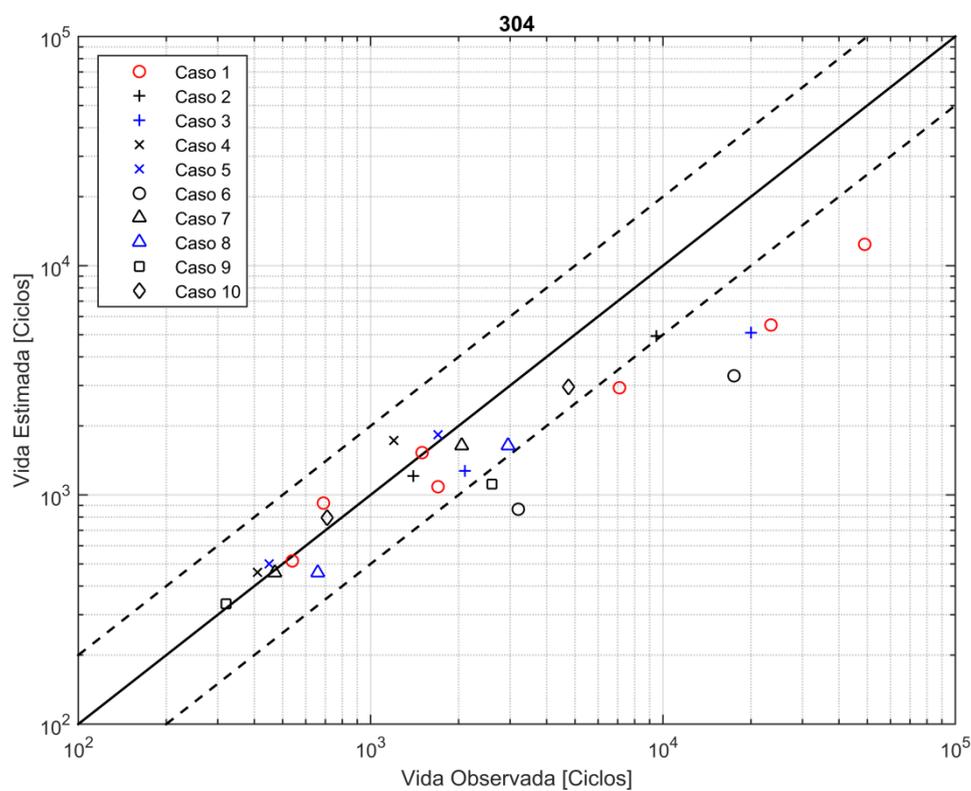
Tabela 5.2 – Amplitudes de deformação impostas, vida experimental e vida numérica obtidas para o aço S460N (Jiang et al., 2007).

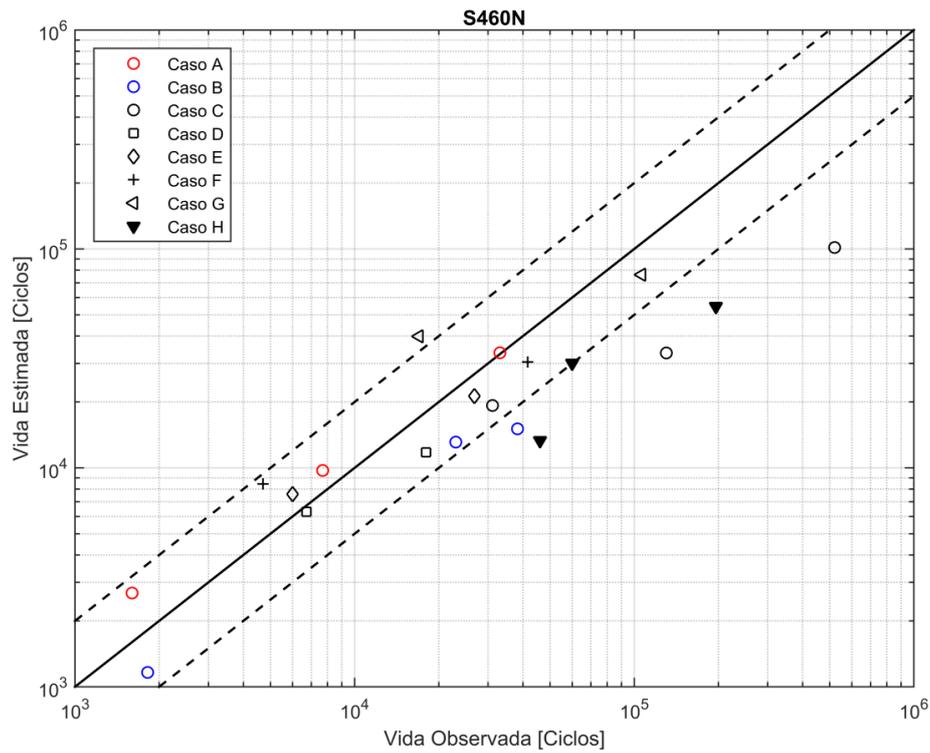
<i>Aço S460N (Jiang et al., 2007)</i>					
<i>Trajectoria</i>	ε_a [%]	γ_a [%]	N_{EXP}	N_{NUM}	D_{REL} [%]
A	0,500	0	1600	2681	68
	0,330	0	7690	9731	27
	0,220	0	33100	33560	1
B	0	1,00	1820	1162	36
	0	0,45	23000	13120	43
	0	0,43	38250	15089	61
C	0,173	0,30	31100	19273	38
	0,104	0,18	521000	101570	81
	0,144	0,25	130300	33505	74
D	0,173	0,30	6730	6300	6
	0,144	0,25	18000	11764	35
E	0,231	0,40	6000	7580	26
	0,173	0,30	26800	21286	21
F	0,260	0,45	4700	8442	80
	0,173	0,30	41600	30437	27
G	0,144	0,25	106300	76233	28
	0,173	0,30	17000	39879	135
H	0,231	0,40	46040	13332	71
	0,231	0,30	60000	30068	50
	0,231	0,25	196000	54634	72

A Figura 5.3 apresenta a comparação entre a vida em fadiga obtida experimentalmente e a vida estimada pelo modelo de dano contínuo de Lemaitre para os aços 304 e S460N e para o alumínio 6061-T6 para as trajetórias apresentadas nas Figs. 5.1 e 5.2. Da Figura 5.3 nota-se que o modelo de Lemaitre descreve adequadamente a vida em fadiga para valores altos de amplitudes de deformação imposta, em que o mecanismo de degradação do material é dominado pela deformação plástica macroscópica, resultando em baixos valores de vida. Entretanto, para menores valores de amplitude de deformação imposta, o modelo de dano de Lemaitre prevê vidas menores que as vidas obtidas experimentalmente. Esse comportamento é destacado na Fig. 5.4, que descreve as vidas obtidas para o aço 304 sob dois níveis diferentes de amplitudes de deformação.

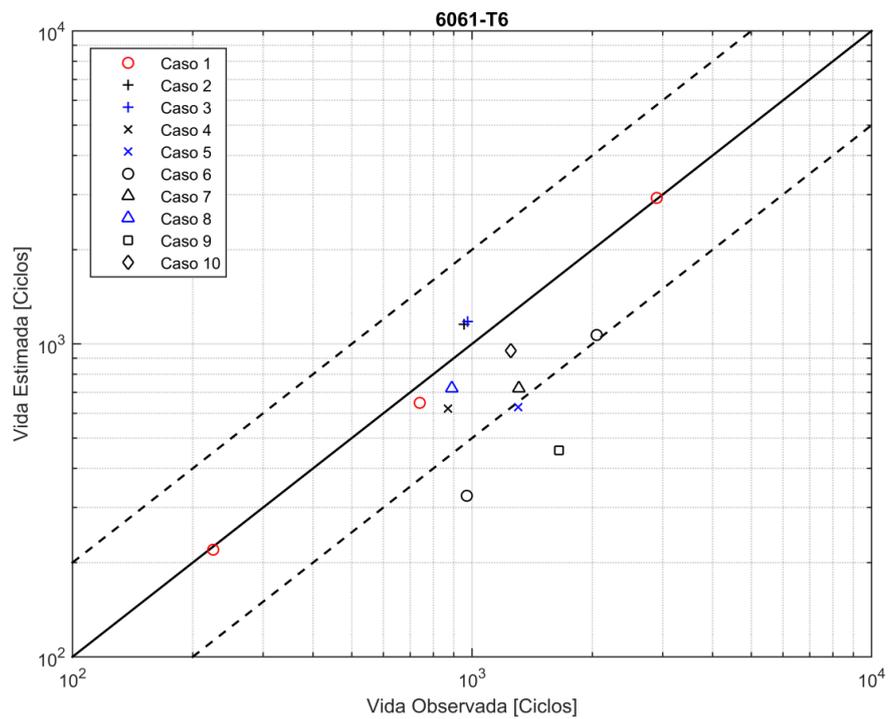
Tabela 5.3 – Amplitudes de deformação impostas, vida experimental e vida numérica obtidas para o alumínio 6061-T6 (Itoh, 2001).

<i>Al 6061-T6 (Itoh, 2001)</i>					
<i>Caso</i>	ε_a [%]	γ_a [%]	N_{EXP}	N_{NUM}	D_{REL} [%]
1	0,9	0	225	220	2
	0,6	0	740	648	12
	0,4	0	2900	2929	1
2	0,4	0,695	955	1155	21
3	0,4	0,695	975	1179	21
4	0,4	0,490	870	621	29
5	0,4	0,490	1305	628	52
6	0,6	0,735	970	327	66
6	0,4	0,490	2050	1068	48
7	0,4	0,490	1310	721	45
8	0,4	0,490	890	721	19
9	0,4	0,490	1650	457	72
10	0,4	0,695	1250	951	24





(b)



(c)

Figura 5.3 – Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida estimada numericamente pelo modelo de Lemaitre para: (a) aço 304; (b) aço S460N; e (c) alumínio 6061-T6.

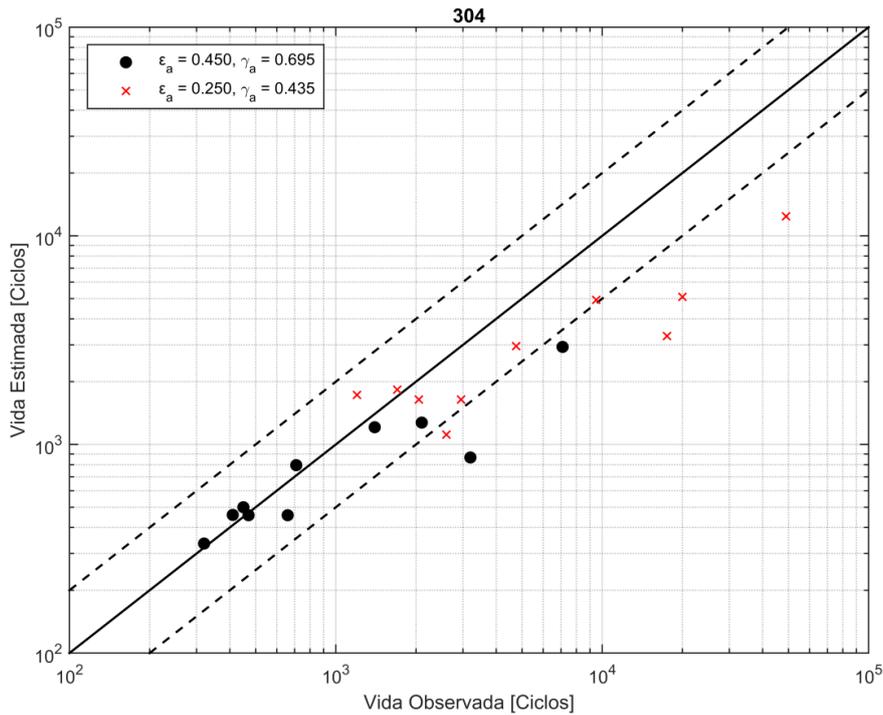


Figura 5.4 – Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida estimada numericamente pelo modelo de Lemaitre para o aço 304 sob duas amplitudes diferentes de deformação (dadas em porcentagem).

5.4 ANÁLISE DE TENSÕES

Seguindo a análise de vida em fadiga, avaliou-se o desempenho do modelo em determinar adequadamente as tensões presentes nos materiais. Foram obtidas as amplitudes de tensões normal e cisalhante em meia vida, ou seja, para $D_c = 0,5$, as quais foram comparadas com os dados da literatura. Para essa análise, foram considerados os casos 2, 3, 5 e 9 para o aço 304 e para o alumínio 6061-T6.

As Tabelas 5.4 e 5.5 apresentam os resultados para o aço 304 e para a liga de alumínio 6061-T6, respectivamente. A partir do histórico de carregamento, foi adotada uma medida equivalente de tensão, proposta por Itoh (2001), de acordo com a Eq. 5.2, definida como a amplitude de tensão principal (σ_{1a}). Na Equação 5.2, σ_{1max} é a máxima tensão principal (em valor absoluto) em um ciclo de carregamento, $\sigma_1(t)$ é o histórico de tensão principal máxima em um ciclo, e $\xi(t)$ o ângulo entre $\sigma_1(t)$ e σ_{1max} . Nas Tabs. 5.4 e 5.5, D_{REL} representa a diferença relativa percentual entre as amplitudes de tensão principal numérica e experimental.

$$2\sigma_{1a} = \max(\sigma_{1max} - \cos \xi(t) \sigma_1(t)) \quad (5.2)$$

Tabela 5.4 – Resultados de amplitude de tensão para o aço 304.

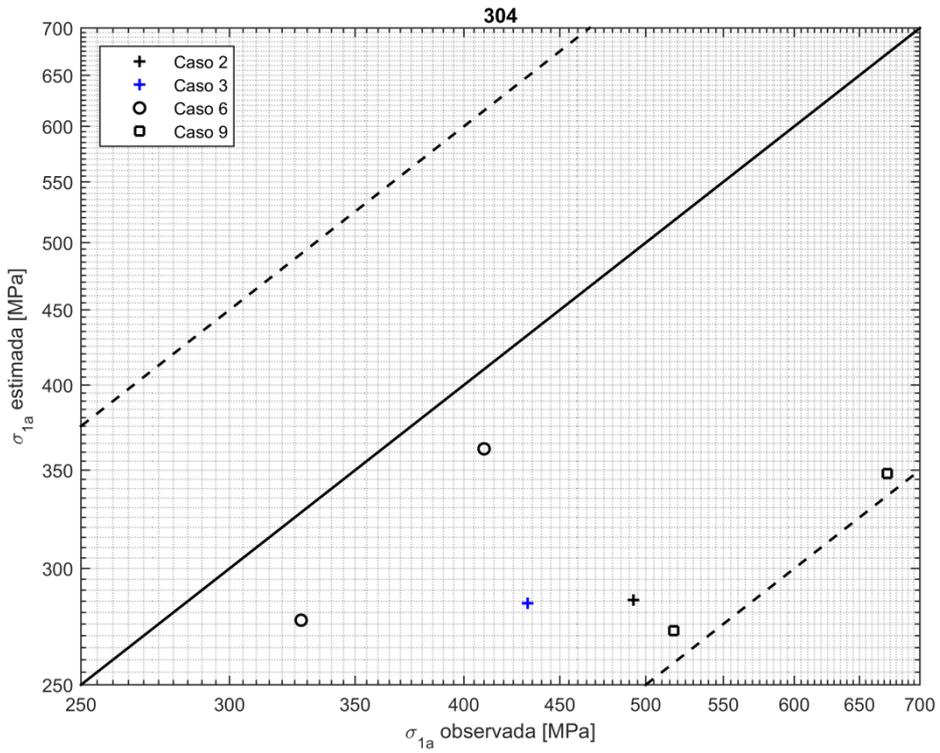
<i>Aço 304 (Itoh, 2001)</i>									
<i>Caso</i>	<i>Amp. Deformação [%]</i>		<i>Amplitude de tensão [MPa]</i>						<i>D_{REL}</i> <i>[%]</i>
	ϵ_a	γ_a	σ_{aEXP}	τ_{aEXP}	σ_{1aEXP}	σ_{aNUM}	τ_{aNUM}	σ_{1aNUM}	
2	0,25	0,435	343	198	358	211	202	211	41
	0,4	0,695	475	265	493	285	270	285	42
3	0,25	0,435	335	178	340	209	202	211	38
	0,4	0,695	430	245	433	282	268	284	34
6	0,25	0,435	243	93	328	183	185	277	16
	0,4	0,695	295	125	410	240	242	362	12
9	0,25	0,435	383	200	518	235	220	272	47
	0,4	0,695	530	278	673	311	287	348	48

Tabela 5.5 – Resultados de amplitude de tensão para a liga de alumínio 6061-T6.

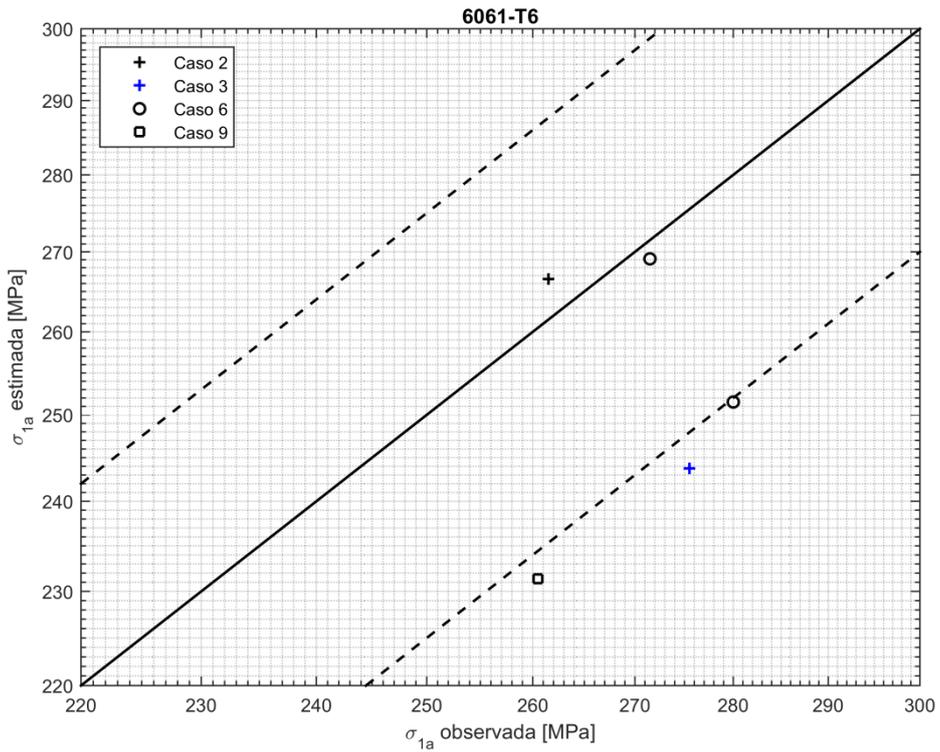
<i>Alumínio 6061-T6 (Itoh, 2001)</i>									
<i>Caso</i>	<i>Amp. Deformação [%]</i>		<i>Amplitude de tensão [MPa]</i>						<i>D_{REL}</i> <i>[%]</i>
	ϵ_a	γ_a	σ_{aEXP}	τ_{aEXP}	σ_{1aEXP}	σ_{aNUM}	τ_{aNUM}	σ_{1aNUM}	
2	0,4	0,695	260	151	262	266	161	267	2
3	0,4	0,695	268	157	276	216	161	244	12
6	0,6	0,735	218	106	280	226	114	252	10
	0,4	0,49	223	89	272	240	104	269	1
9	0,4	0,49	206	105	261	180	142	231	11

A Figura 5.5 apresenta uma comparação entre as amplitudes de tensão principal obtidas experimentalmente e estimadas numericamente para o aço 304 e para a liga de alumínio 6061-T6.

Dos resultados de tensões, nota-se que o modelo descreve adequadamente o comportamento do alumínio 6061-T6, que sofre pouco endurecimento adicional devido a carregamentos não proporcionais, com diferenças relativas abaixo de 10%. Entretanto, para o aço 304, que apresenta alto endurecimento não proporcional, o modelo não descreve adequadamente as tensões, apresentando diferenças relativas da ordem de 50%. Portanto, o modelo proposto não descreve adequadamente o endurecimento não proporcional. Além disso, nota-se que o modelo não diferencia as trajetórias 2 e 3 para o aço 304, obtendo valores idênticos de amplitudes de tensão.



(a)

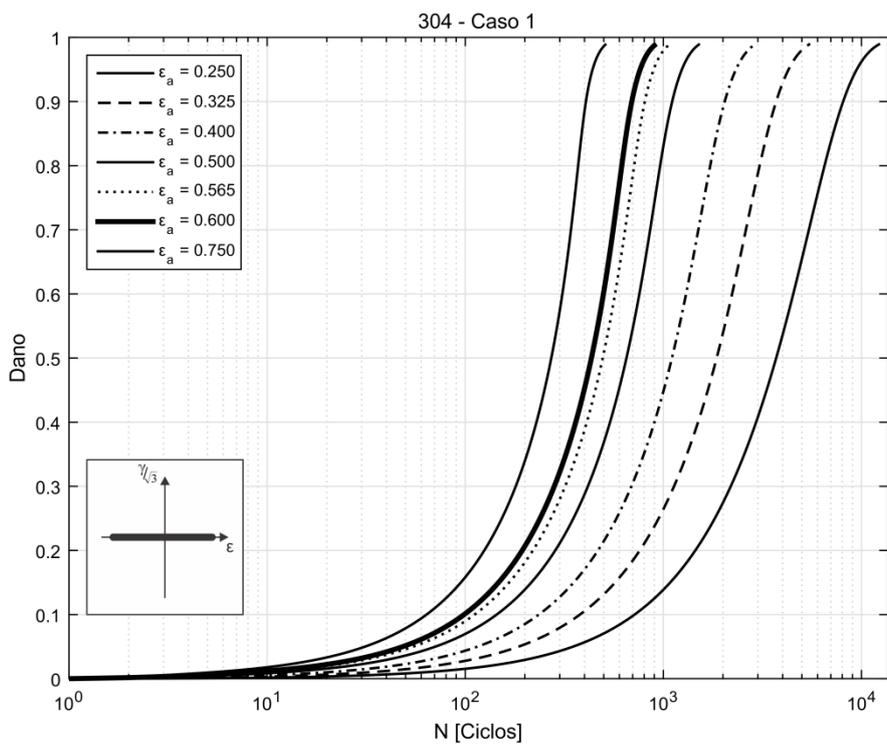


(b)

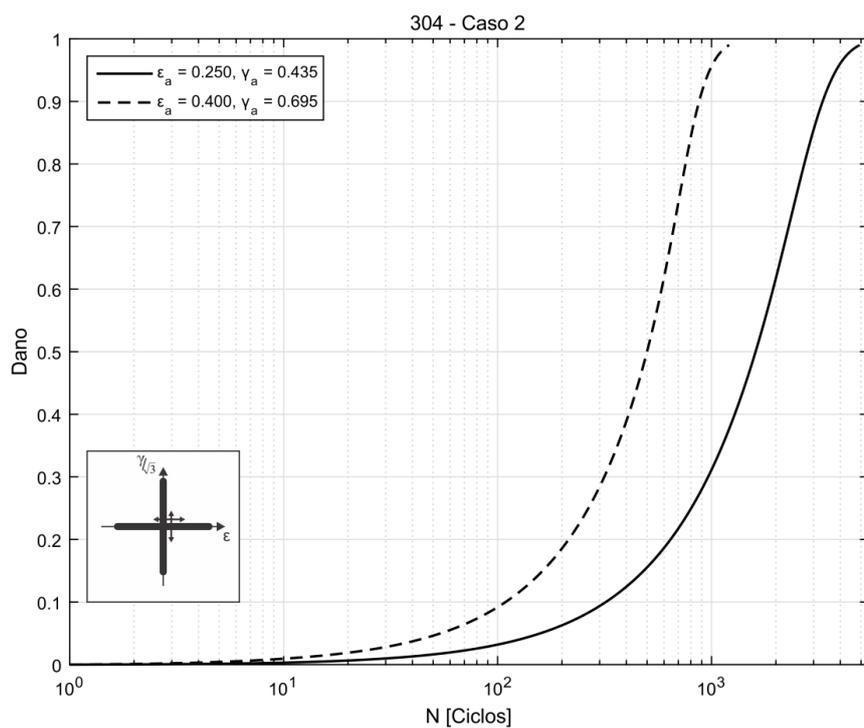
Figura 5.5 – Comparação entre as amplitudes de tensão principal observadas experimentalmente e estimadas numericamente para (a) o aço 304 (faixa de erro de $\pm 50\%$), e (b) a liga de alumínio 6061-T6 (faixa de erro de $\pm 10\%$) sob carregamentos multiaxiais.

5.5 EVOLUÇÃO DO DANO

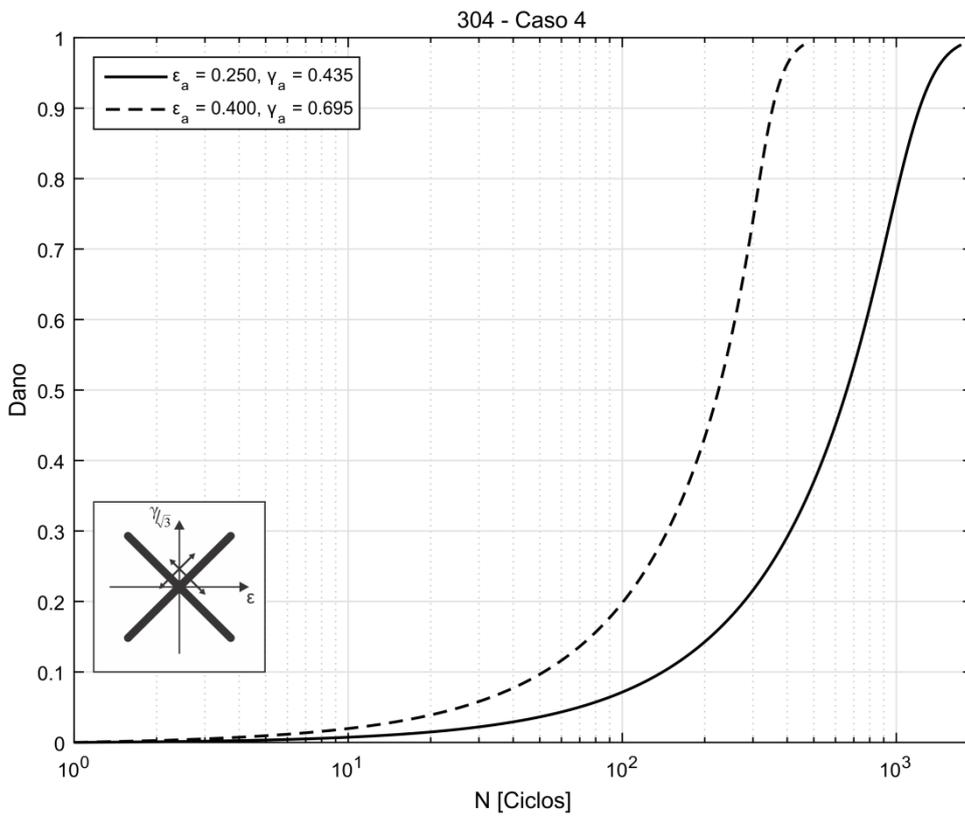
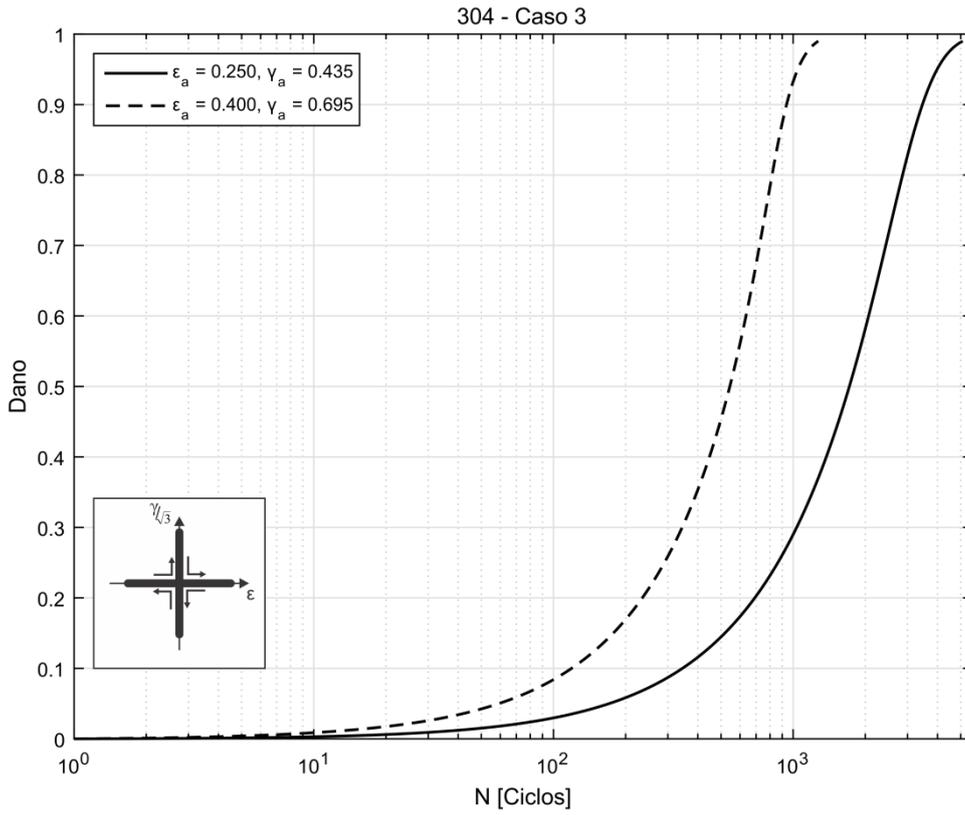
As Figuras 5.6 a 5.8 apresentam a evolução do dano para cada trajetória para os aços 304 e S460N e o alumínio 6061-T6, respectivamente. Nota-se que quanto maiores os níveis de amplitude de deformação aplicados, mais íngreme é o crescimento do dano, levando a vidas menores, conforme o esperado.

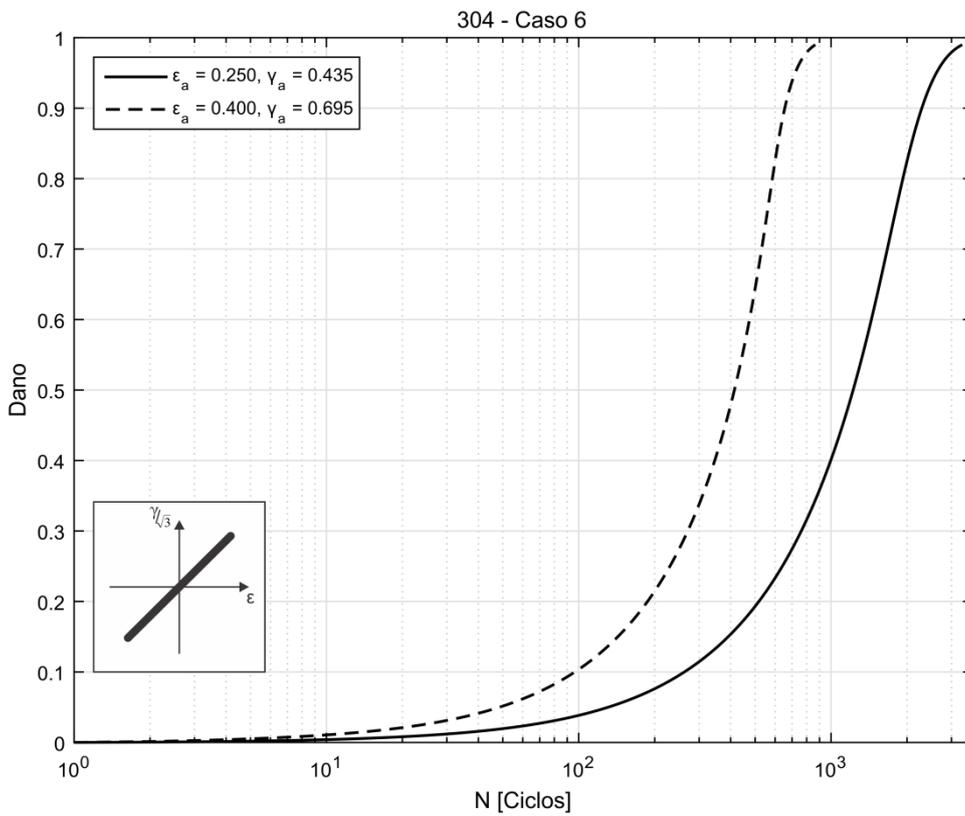
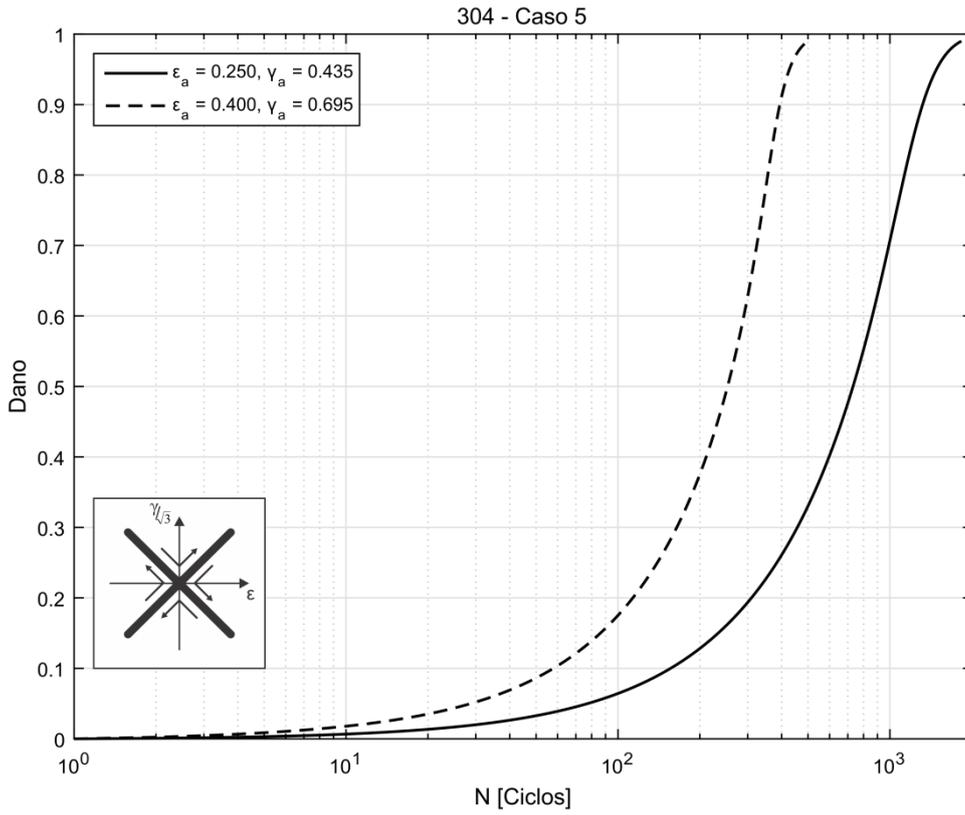


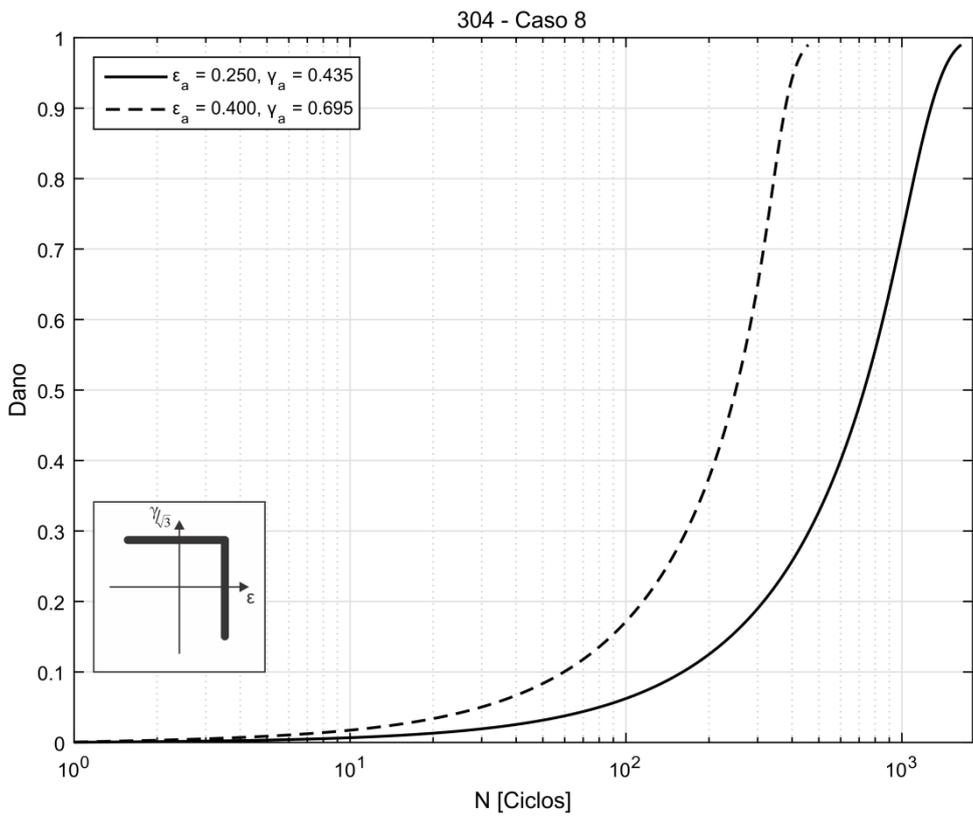
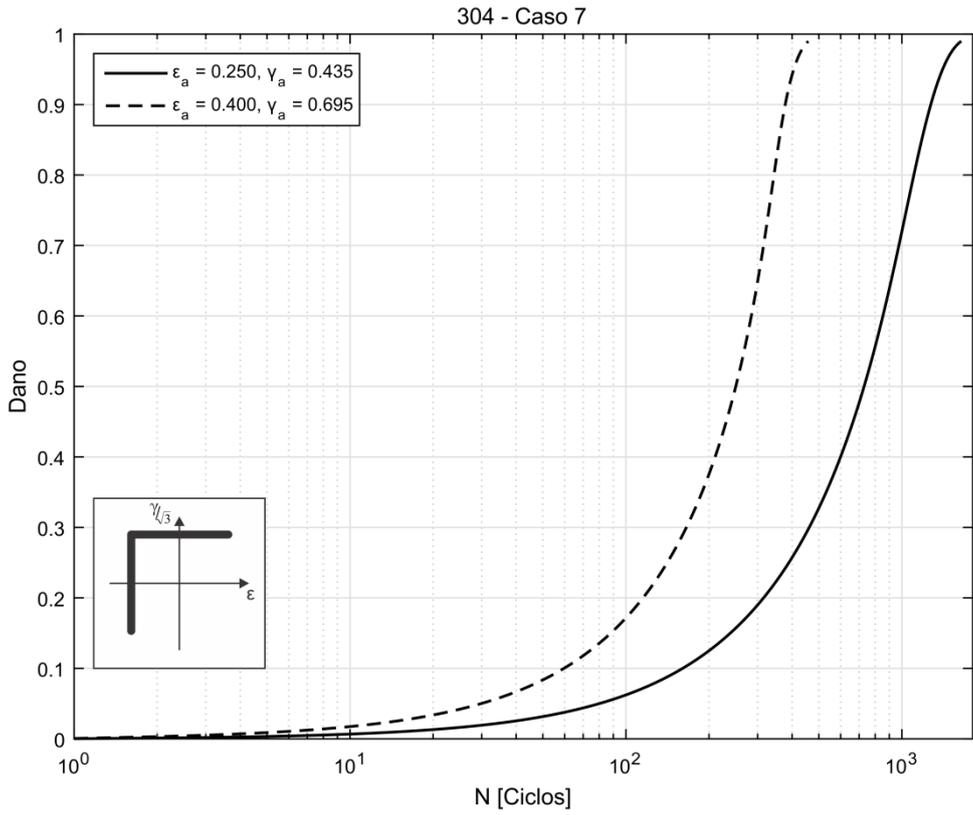
(a)



(b)







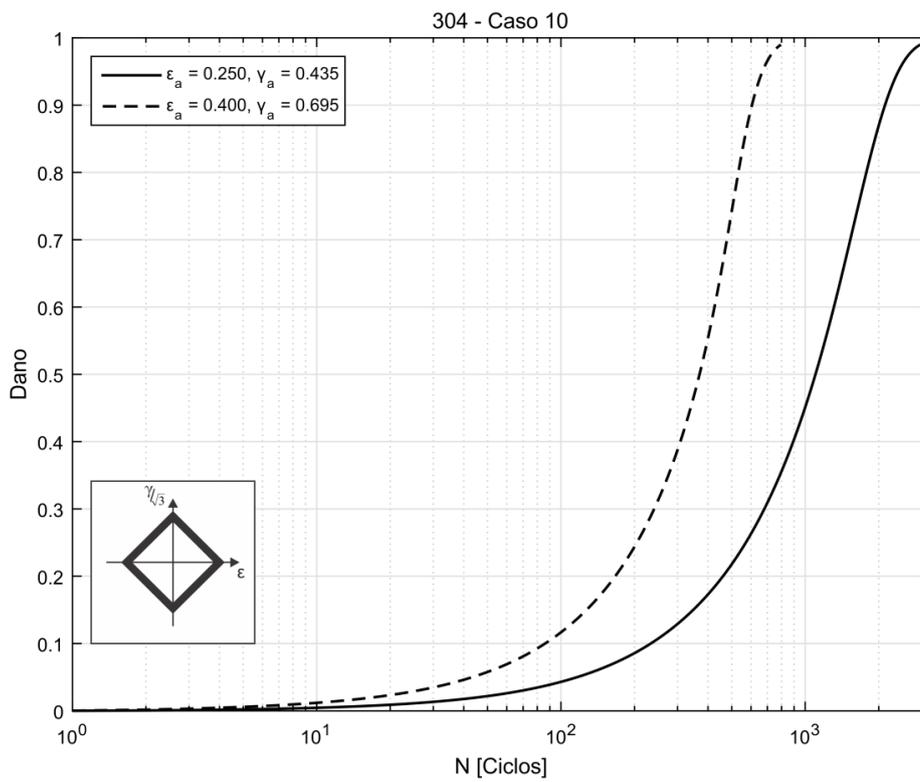
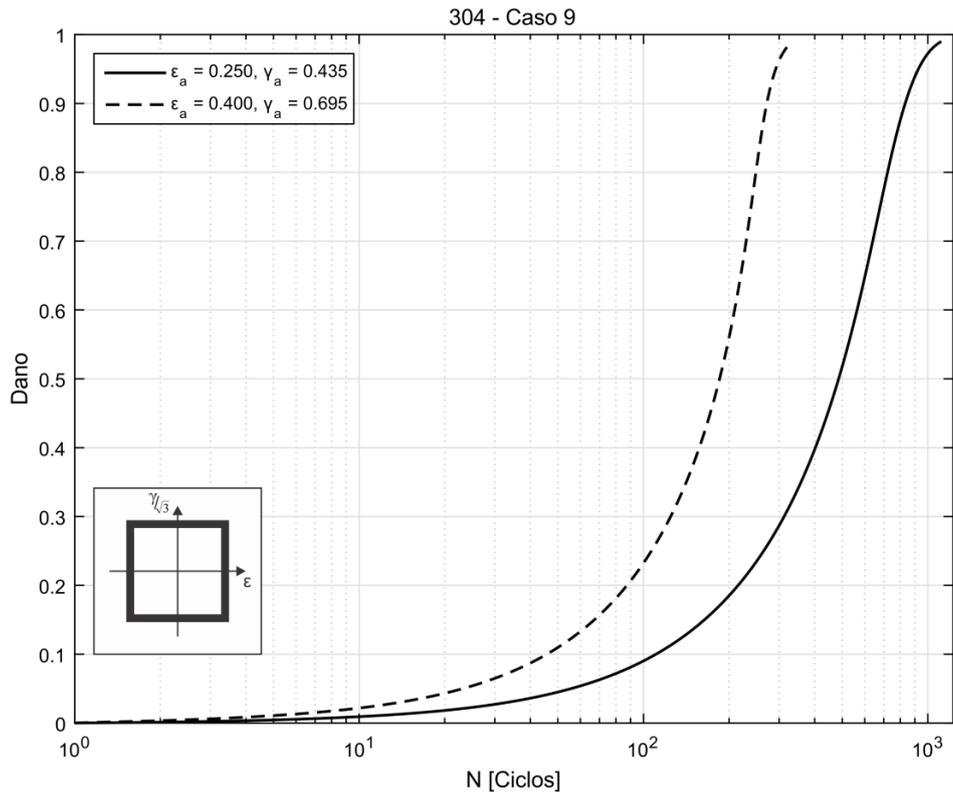
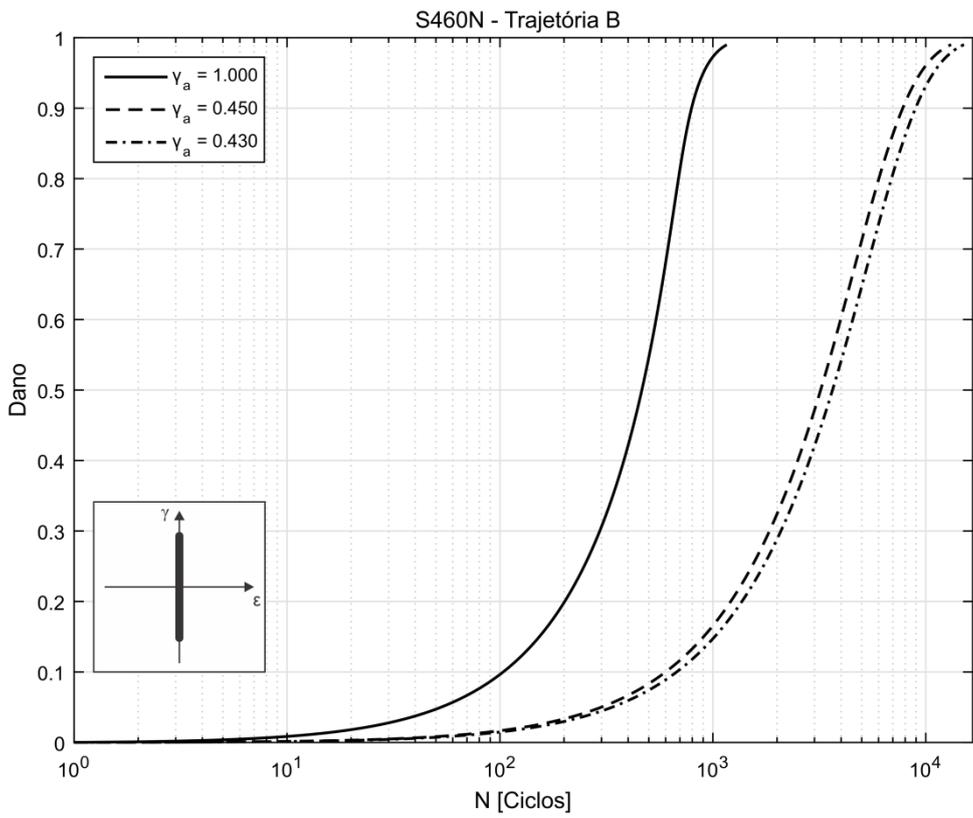
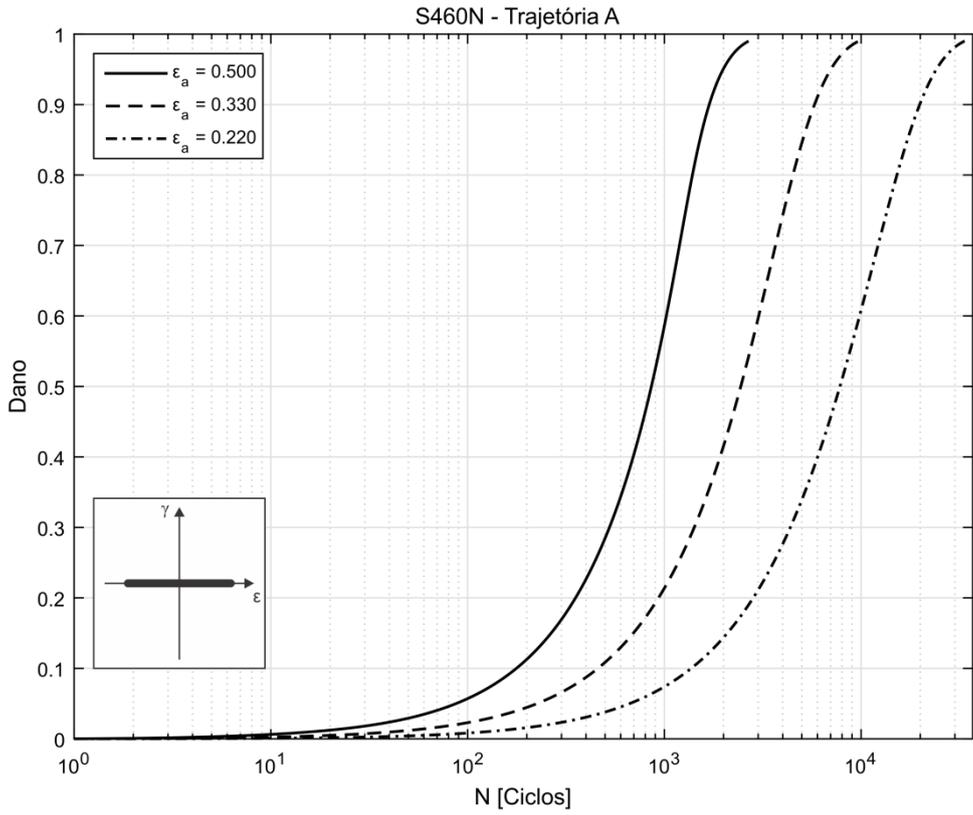
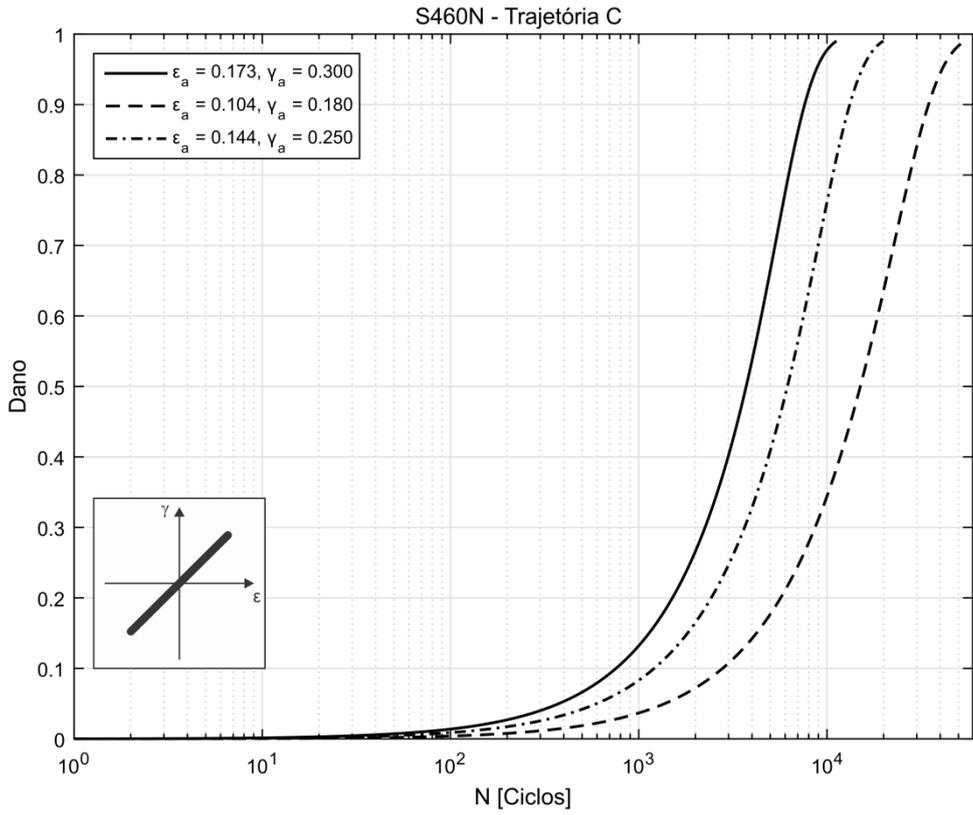
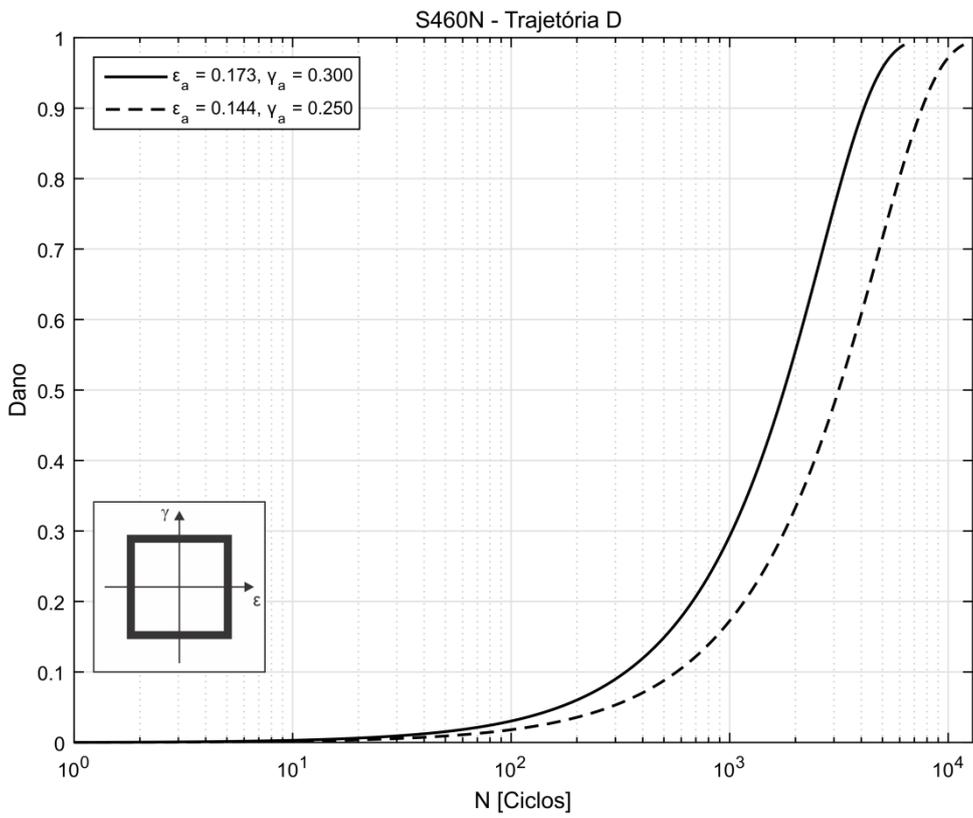


Figura 5.6 – Evolução do dano para o aço 304 para: (a) caso 1; (b) caso 2; (c) caso 3; (d) caso 4; (e) caso 5; (f) caso 6; (g) caso 7; (h) caso 8; (i) caso 9; e (j) caso 10 (Amplitudes de deformação dadas em %).

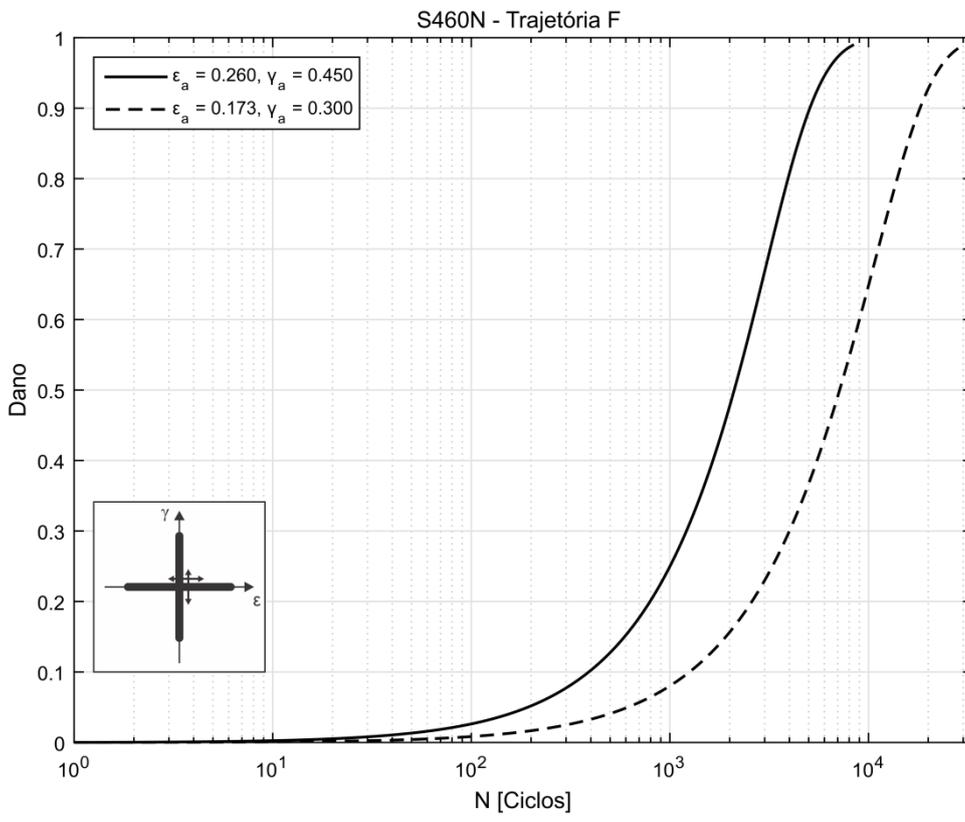
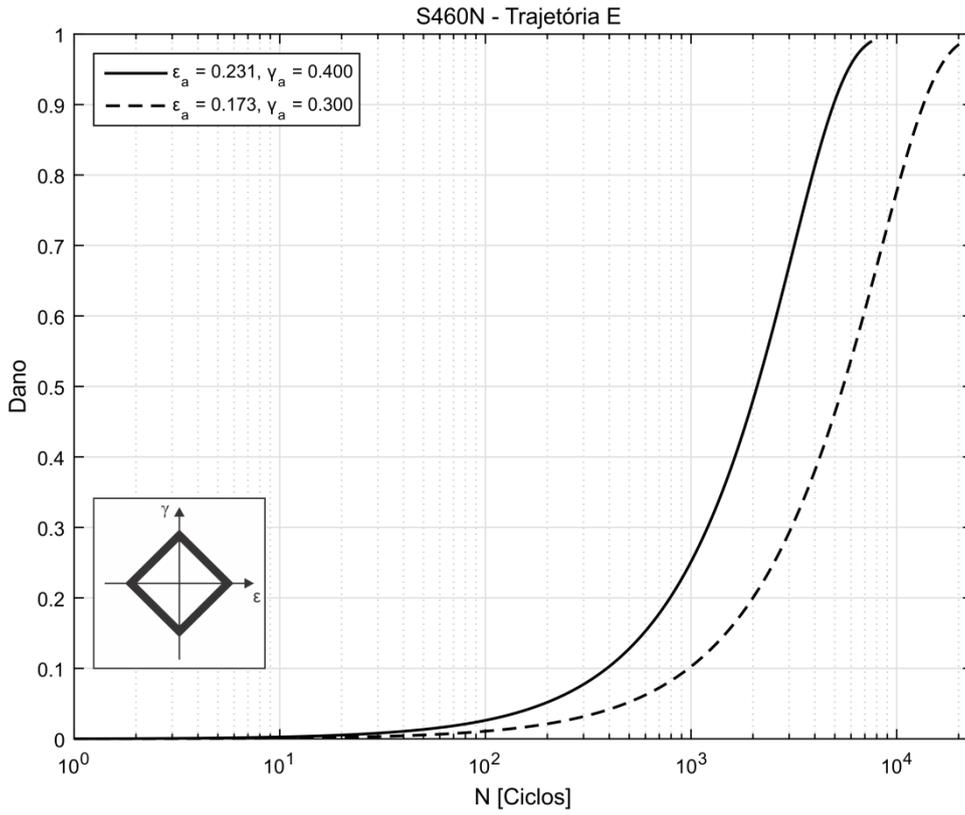




(C)



(D)



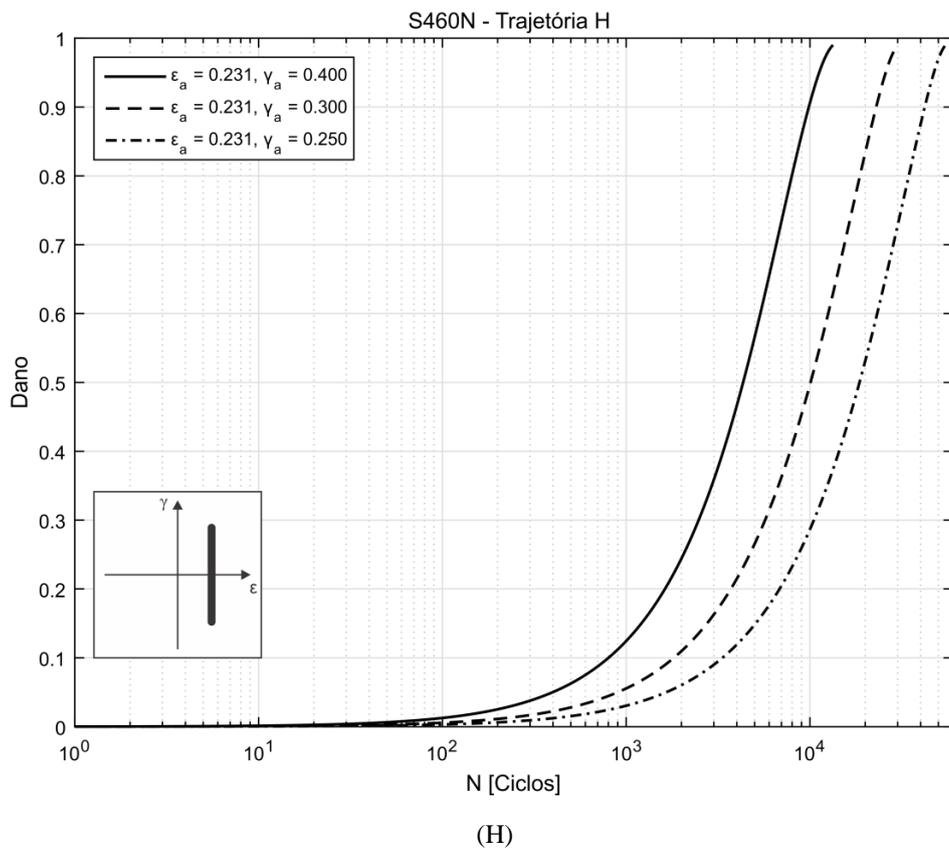
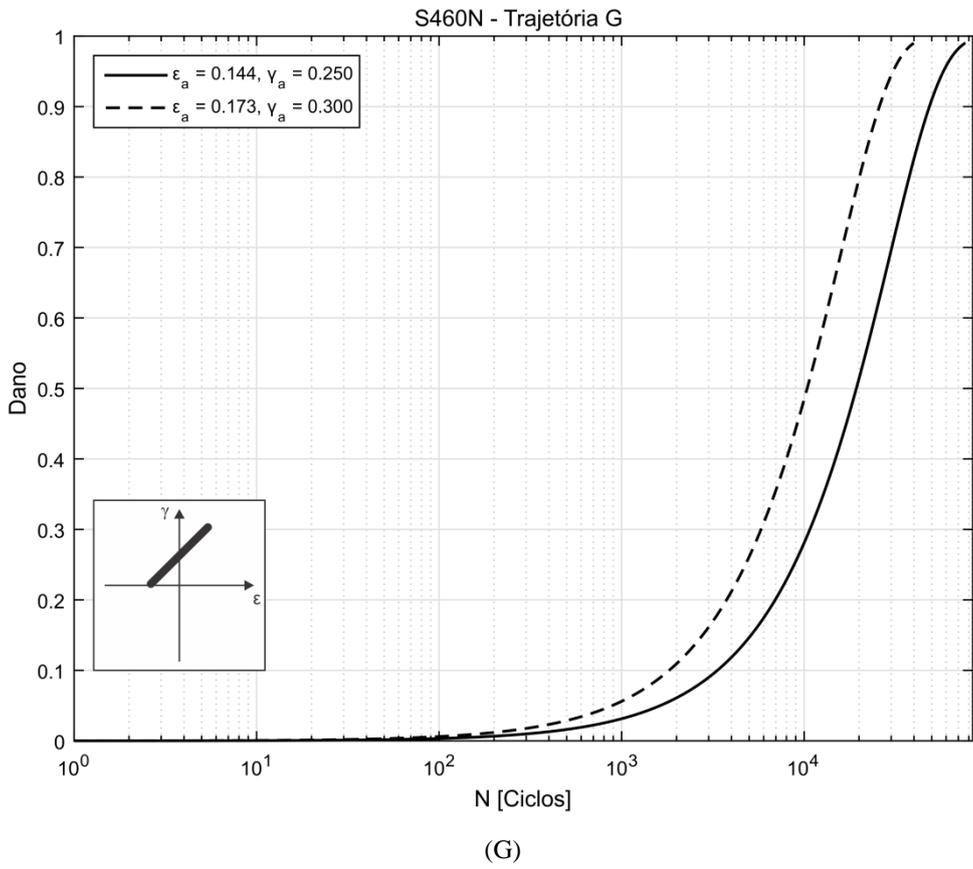
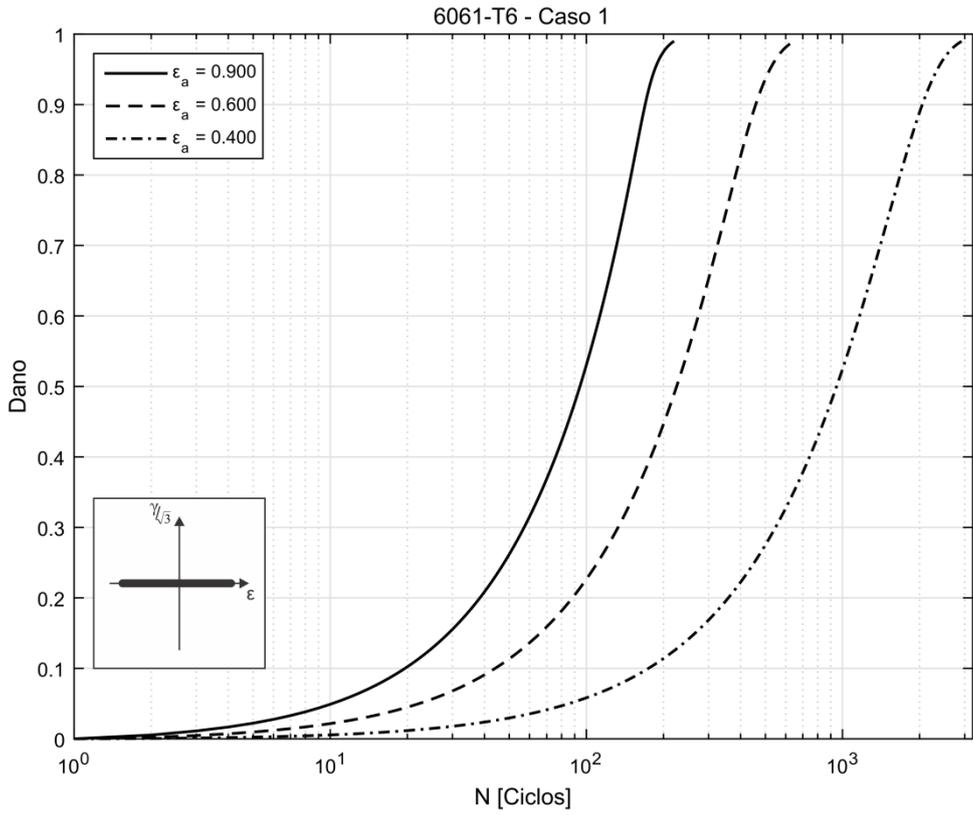
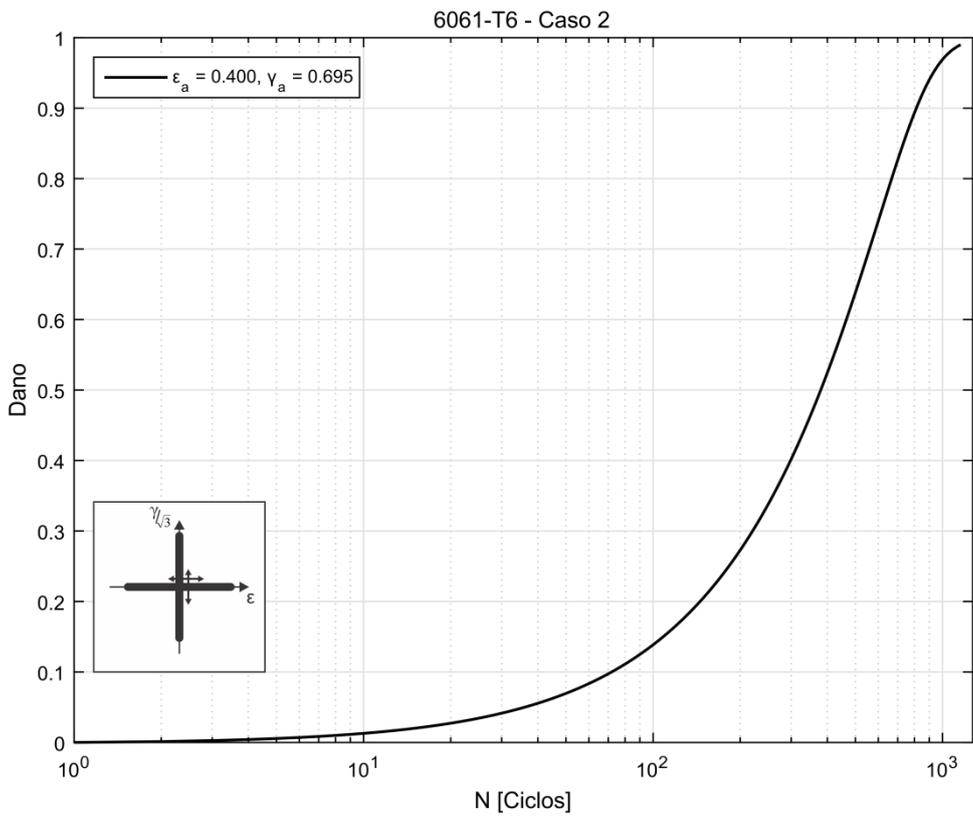


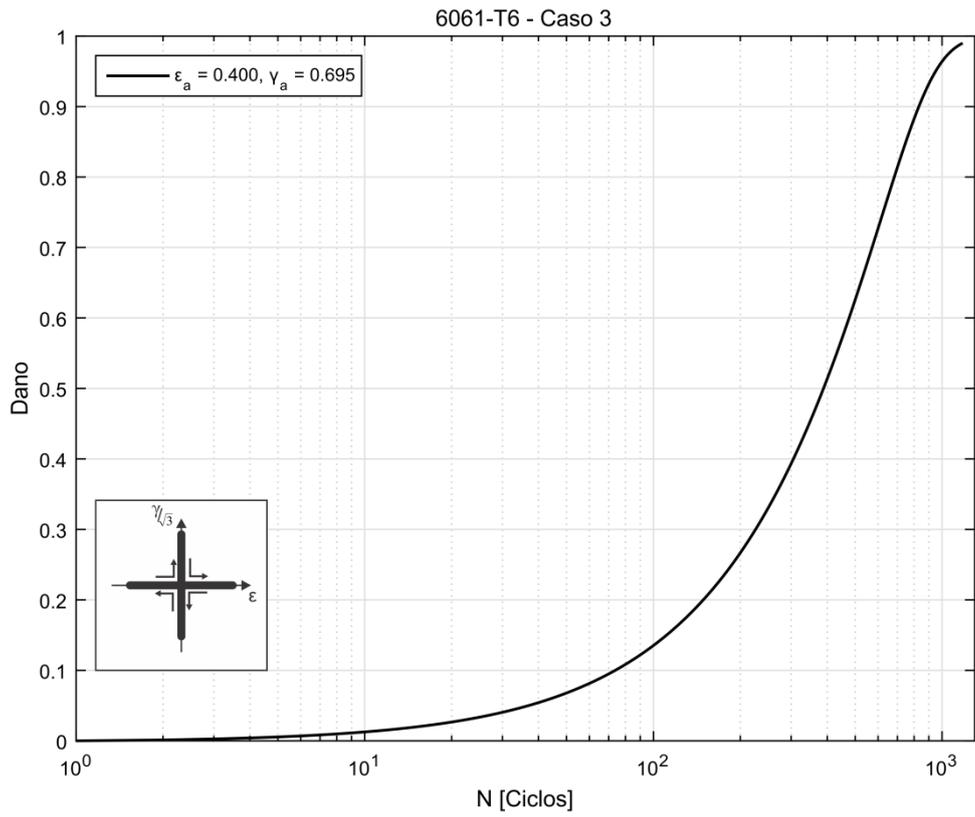
Figura 5.7 – Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G) e (H) (Amplitudes de deformação dadas em %).



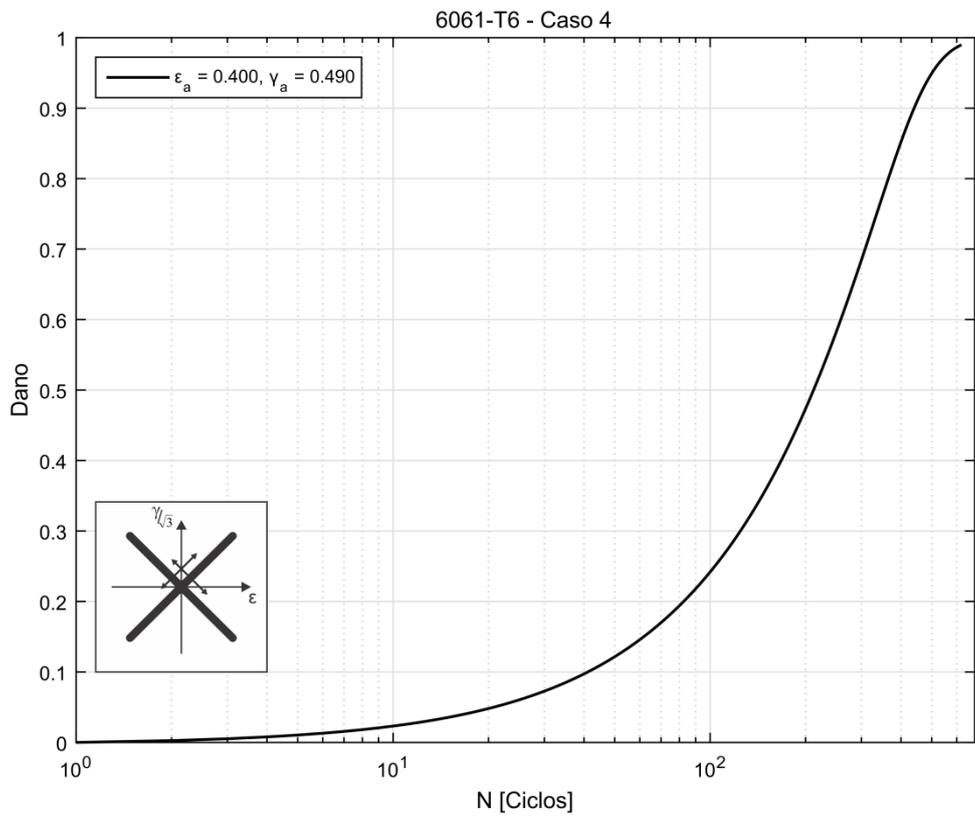
(a)



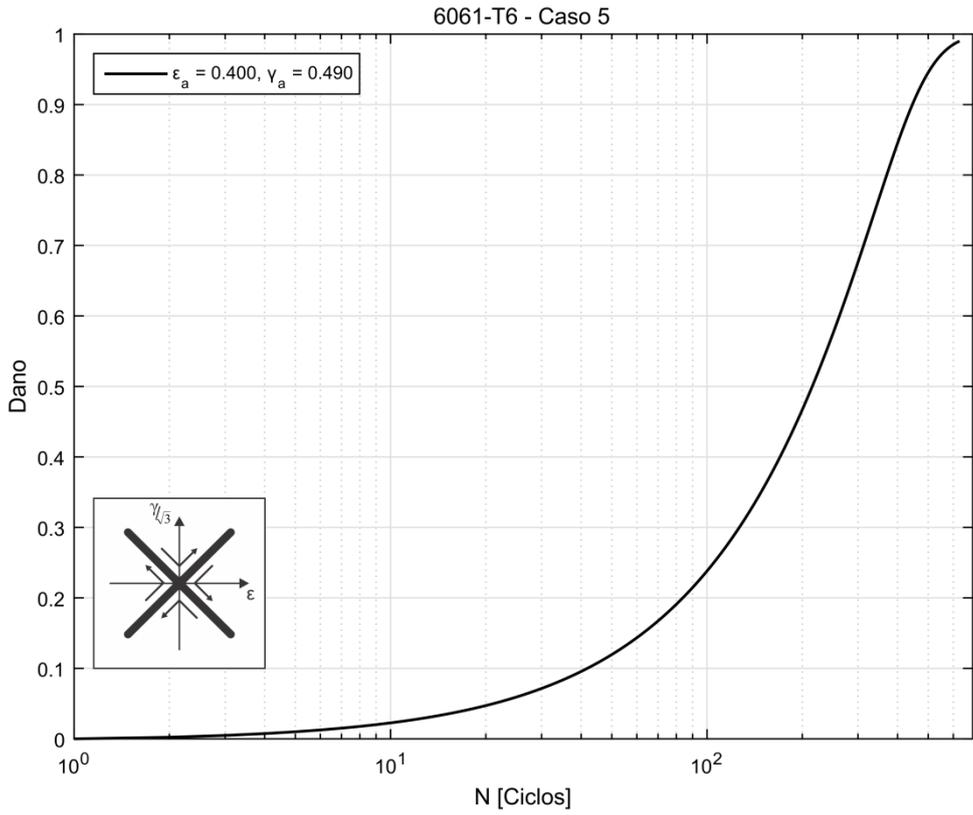
(b)



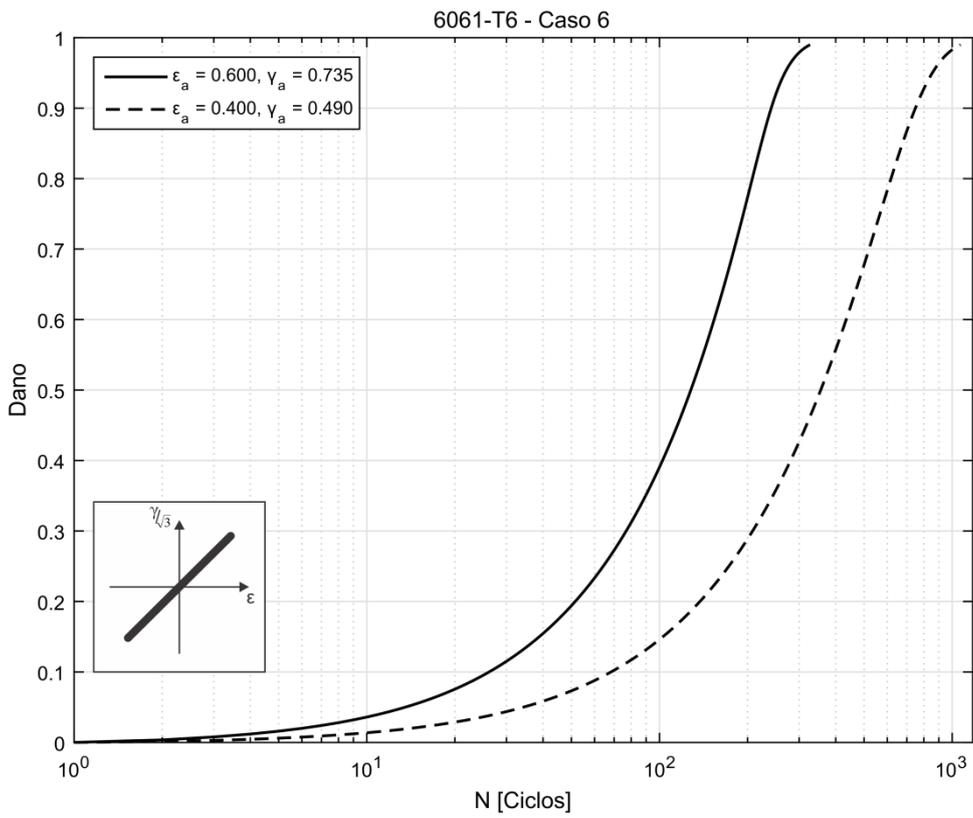
(c)



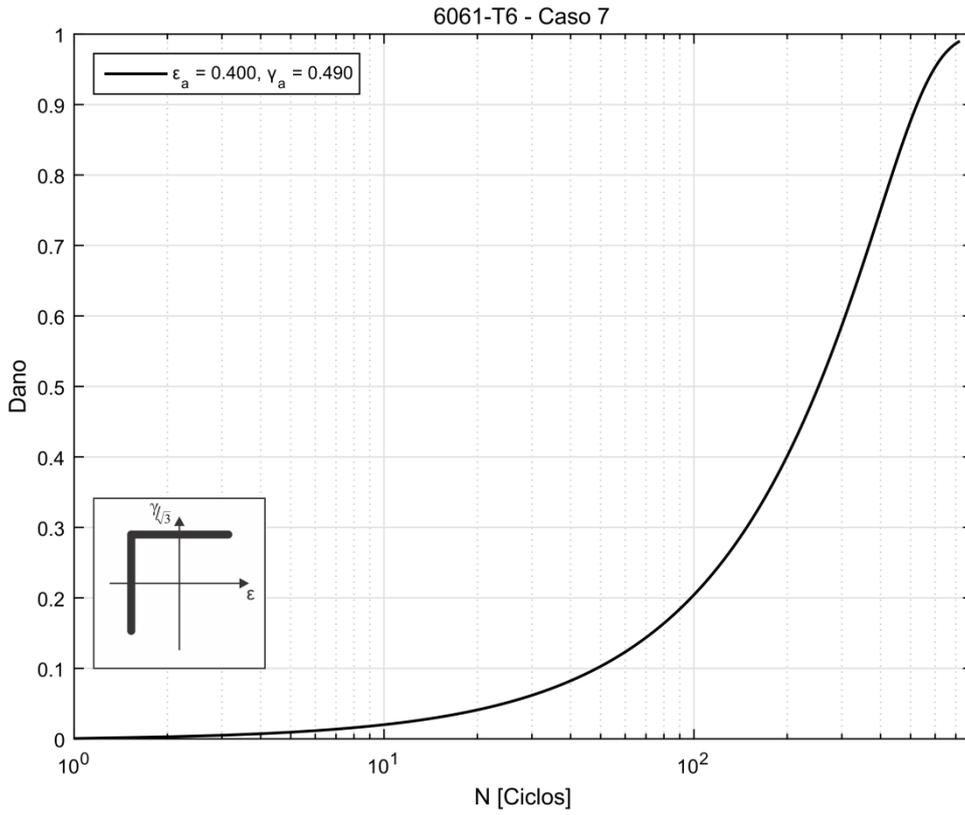
(d)



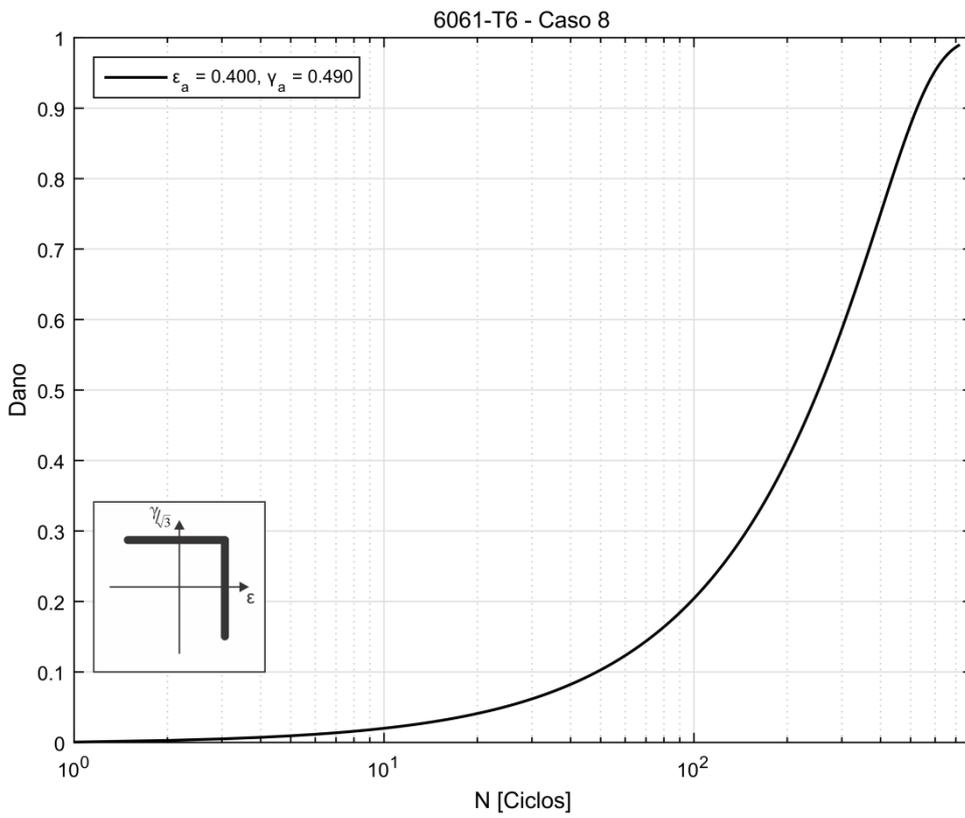
(e)



(f)



(g)



(h)

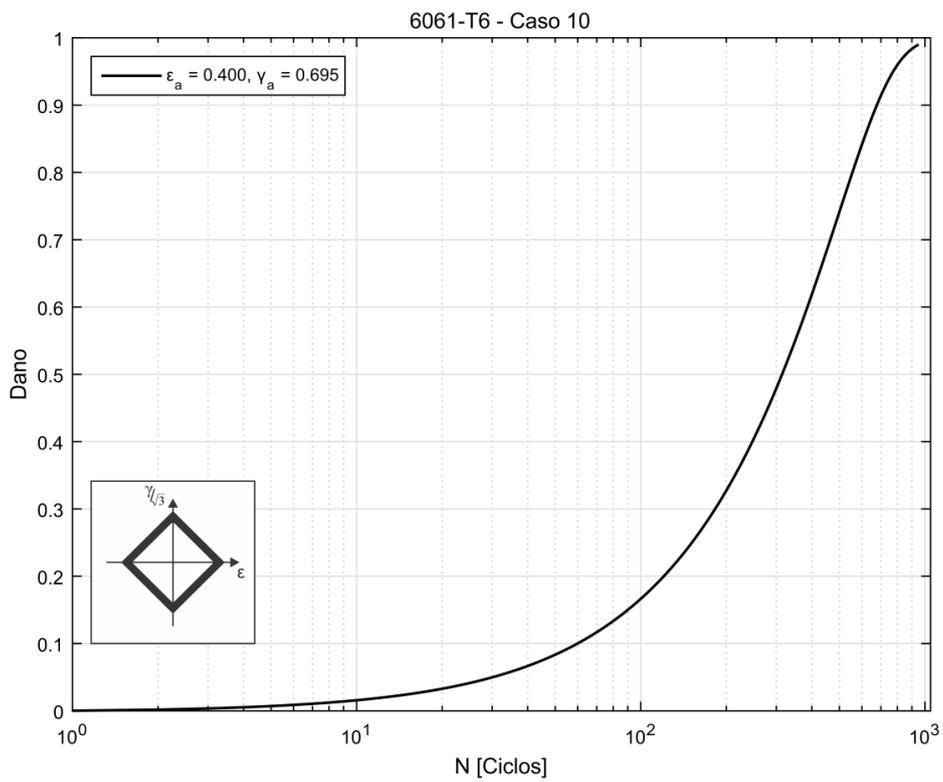
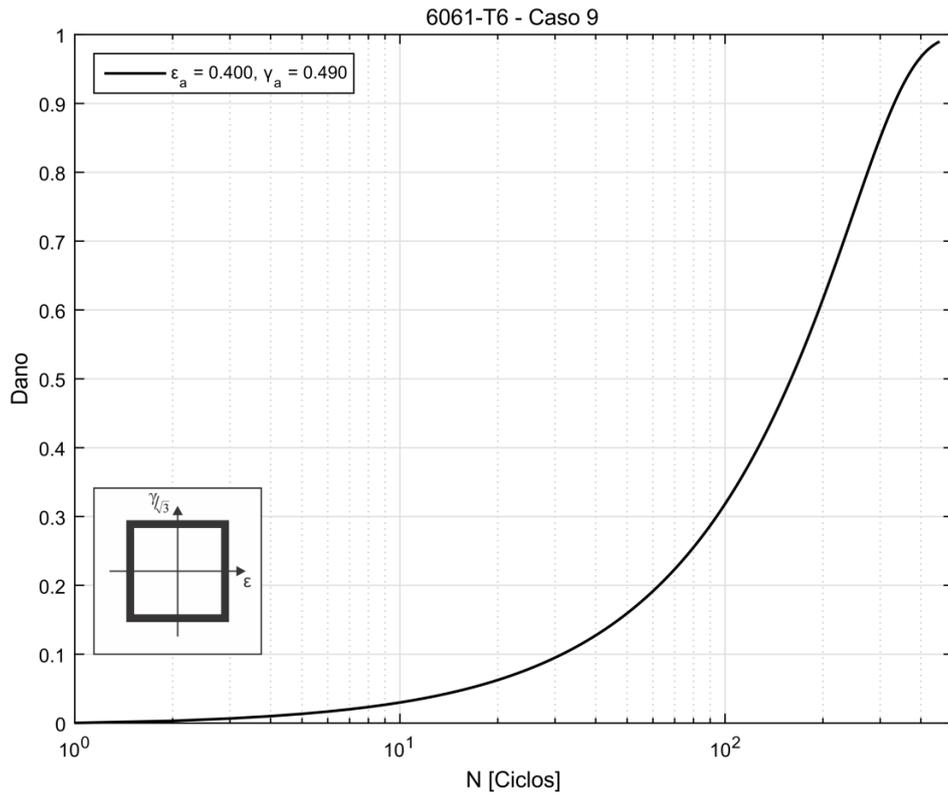


Figura 5.8 – Evolução do dano para o alumínio 6061-T6 para: (a) caso 1; (b) caso 2; (c) caso 3; (d) caso 4; (e) caso 5; (f) caso 6; (g) caso 7; (h) caso 8; (i) caso 9; e (j) caso 10 (Amplitudes de deformação dadas em %).

5.6 CONCLUSÕES

Analisando os resultados, nota-se que o modelo de dano contínuo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche descreveu de maneira adequada o comportamento de vida em fadiga dos aços 304 e S460N e da liga de alumínio 6061-T6 em trajetórias proporcionais e não proporcionais.

Em fadiga de baixo ciclo, em que as amplitudes de deformação aplicadas são maiores, os resultados numéricos obtidos descreveram melhor o comportamento experimental do que quando submetido a altos ciclos, o que era esperado, já que para o modelo de Lemaitre a variável de dano evolui proporcionalmente à deformação plástica macroscópica, que é o principal mecanismo de degradação do material submetido a esse tipo de fadiga. Entretanto, para baixas amplitudes de deformação, o modelo prevê vidas menores que as obtidas experimentalmente. Nesse regime de fadiga, outros mecanismos levam à degradação do material, mas o modelo de Lemaitre continua considerando apenas a deformação plástica macroscópica.

Da análise de tensões, nota-se que o modelo não descreve bem o endurecimento não proporcional. Para o alumínio 6061-T6, que apresenta baixo endurecimento não proporcional, o modelo descreveu bem as amplitudes de tensões, com diferenças menores que 12% em relação aos dados experimentais. Entretanto, para o aço 304, que apresenta alto endurecimento não proporcional, o modelo apresentou diferenças próximas a 50% do valor experimental.

Finalmente, foram obtidas as curvas de evolução do dano para cada trajetória para os aços 304 e S460N e para a liga de alumínio 6061-T6.

6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES FUTURAS

Neste trabalho, buscou-se estudar o modelo de dano contínuo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche como uma ferramenta de determinação da vida de materiais submetidos a fadiga multiaxial. Inicialmente, foi feita a formulação do modelo matemático, considerando a variável de dano isotrópica, ou seja, independente da direção de carregamento, e a evolução do dano proporcional à potência da densidade de energia de deformação. Após, o algoritmo de retorno foi desenvolvido, considerando a lei de evolução do tensor tensão de endurecimento cinemático de Chaboche com três termos não lineares.

Em seguida, o modelo matemático/numérico desenvolvido foi calibrado para os aços 304 e S460N e para a liga de alumínio 6061-T6. Para os parâmetros de tensão, a relação entre a amplitude de tensão obtida para uma determinada amplitude de deformação aplicada em estado de tração-compressão uniaxial foi calibrada para a curva de Ramberg-Osgood. Ajustando a curva à relação matemática, os parâmetros de tensão foram identificados. Para o denominador de dano, uma estratégia de otimização foi utilizada, comparando os dados experimentais do carregamento uniaxial de tração-compressão com a resposta numérica do modelo, até que se obtivesse o parâmetro que produzisse o nível adequado de dano para a vida experimental analisada. Da identificação do denominador de dano constatou-se que esse parâmetro é dependente do regime de fadiga analisado. Notou-se que há uma variação do denominador de dano para a amplitude de deformação imposta e, conseqüentemente, para a vida atingida pelo material. Para os aços 304 e S460N, a dependência entre S e N segue uma relação de potência. Para o alumínio 6061-T6, o denominador permaneceu praticamente constante durante o intervalo analisado e a relação de potência não foi observada, já que não houve grande variação na deformação imposta durante a identificação de parâmetros.

Após, o modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche foi submetido a carregamentos proporcionais e não proporcionais para comparar a previsão de vida em fadiga obtida numericamente com os valores de vida obtidos experimentalmente para os aços 304 e S460N e para o alumínio 6061-T6. Dos dados de vida em fadiga, notou-se que o modelo de Lemaitre é capaz de prever adequadamente a vida para diversas trajetórias não proporcionais para os três materiais. Notou-se, ainda, que o modelo prevê melhor a vida quando submetida a fadiga de baixo ciclo, ou seja, quando as deformações impostas são maiores e o mecanismo principal de degradação do material é a deformação plástica macroscópica. Entretanto, para fadiga de alto ciclo, que envolve outros mecanismos de degradação, o modelo é conservativo e prevê vidas menores que as obtidas experimentalmente. Além disso, as curvas de evolução do dano foram apresentadas para os três materiais.

Da análise de tensões, notou-se que o modelo não descreve adequadamente o endurecimento não proporcional. Para materiais que não apresentam significativo endurecimento adicional devido aos carregamentos não proporcionais, como o alumínio 6061-T6, as amplitudes de tensão obtidas

descrevem bem as observadas experimentalmente. Entretanto, para materiais que apresentam alto endurecimento não proporcional, como o aço 304, as amplitudes de tensão obtidas estão distantes dos dados experimentais.

Em relação à calibração do modelo e à variação do denominador de dano em relação à amplitude de deformação imposta, sugere-se uma modificação na lei de evolução da variável de dano, proposta por Malcher (2011) (Eq. 6.1), a qual considera o denominador de dano $S(\eta, \xi)$ como uma função do nível de triaxialidade (η) e do terceiro invariante do tensor tensão normalizado (ξ). Na Equação 6.1, $S_{0.33}$ e S_0 são os denominadores de dano calibrados em tração monotônica e cisalhamento puro, respectivamente, correspondendo a novos parâmetros do material.

$$S(\eta, \xi) = \frac{S_{0.33}}{3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_0}(1 - \xi^2)} \quad (6.1)$$

A Equação 6.2 apresenta a evolução do dano para a função denominador de dano.

$$\dot{D} = \dot{\varepsilon}^p \left[\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right]^s \quad (6.2)$$

Finalmente, a utilização de uma lei de evolução do tensor tensão de endurecimento cinemático que melhor descreva os carregamentos não proporcionais resultaria em melhores previsões de vida e de amplitudes de tensão. Uma alternativa seria utilizar o parâmetro de Tanaka (1994) como uma medida do endurecimento cinemático (Döring et al., 2003, Zhang et al., 2008).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARMSTRONG, P. J., FREDERICK, C. O. (1966). **A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect**. Report RD/B/N731, CEGB, Central Electricity Generating Board, Berkley, UK.
- ARORA, J. S. (2004). **Introduction to optimum design**. s.l. : Elsevier Academic Press.
- BASQUIN, O.H. (1910) **The exponential law of endurance tests**. Proc. ASTM 10, 625-630.
- BANNANTINE, J.A.; SOCIE, D.F. (1988) **Observations of cracking behavior in tension and torsion low cycle fatigue**. In: SOLOMON, H.D.; HALFORD, G.R.; KAISAND, L.R.; LEIS, B.N. editors. ASTM symposium on low cycle fatigue, vol. 942. ASTM STP. p.899–921.
- BESSON, J.; CAILLETAUD, G.; CHABOCHE, J. L.; FOREST, S; BLETRY, M. (2010) **Non-linear Mechanics of Materials**. Springer.
- BIN LI, SANTOS, J. L. T., FREITAS, M. (2000) **A Unified Numerical Approach for Multiaxial Fatigue Limit Evaluation**, Mech. Struc. & Mach., 28 (1), pp. 85-103.
- BROWN, M. W.; MILLER, K. J.; (1973) **A Theory for Fatigue Under Multiaxial Stress-strain Conditions**. Proc Inst Mech Eng 187:745-56.
- BROWN, M. W.; MILLER, K. J.; (1979) **Initiation and growth of cracks in biaxial fatigue**. FatigueEng Mater Struct 1:231–46.
- BROWN, M. W.; MILLER, K. J.; (1979) **High temperature biaxial fatigue of two steels**. FatigueEng Mater Struct 1:217–29.
- CHABOCHE, J. L. (1986). **Time-independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity**.
- CHABOCHE, J. L. (1989). **Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity**.
- COCKCROFT, M.; LATHAM, D.; (1968) **Ductility and workability of metals**. J. Inst. Metals, 33–39.
- CROSSLAND, B. (1956) **Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel**. In: Proceedings of the international conference on fatigue of metals, Institution of Mechanical Engineers, London; 1956. p. 138–49.
- DANG VAN, K. (1973) **Sur la résistance à la fatigue des métaux**. Sciences et Techniques de L'armement 47:429–53.
- DEPERROIS, A. (1991) **Sur le calcul de limites d'endurance des aciers**, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Paris.

- DÖRING, R. HOFFMEYER, J., SEEGER, T., VORMWALD, M. (2003). **A plasticity model for calculating stress-strain sequences under multiaxial nonproportional cyclic loading.** Computational Materials Science, 28:587-596.
- ESSLINGER, V.; KIESELBACH, R.; KOLLER, R.; WEISSE, B. (2004) **The railway accident of Eschede – technical background.** Engineering Failure Analysis, vol. 11, pp. 515-535.
- FATEMI, A.; SOCIE, D. F. (1988) **A Critical Plane Approach To Multiaxial Fatigue Damage Including Out-Of-Phase Loading.** Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Vol 11, No. 3, pp. 149-165.
- FATEMI, A.; SHAMSAEI, N. (2011) **Multiaxial fatigue: An overview and some approximation models for life estimation.** International Journal of Fatigue, vol. 33, pp. 948-858.
- FINDLEY, W.N. (1959) **A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending.** J Eng Ind, 301-6.
- GONÇALVES, C.A.; ARAÚJO, J.A.; MAMIYA, E.N. (2005) **Multiaxial fatigue: a simple stress based criterion for hard metals.** Int J Fatigue 27:177-87.
- GOODMAN, J. (1899) **Mechanics applied in engineering.** 1st ed. London: Longmans, Green and Co.
- GOUGH, H.J., POLLARD, H.V. (1935) **The strength of metals under combined alternating stresses,** Proc. Inst. Mech.
- GOUGH, H.J. (1950). **Engineering steels under combined cyclic and static stresses.** J Appl Mech;50:113-25.
- GURSON, A. L. (1977) **Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth – Part I. Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media.** J. Engrg. Mat. Tech. 99:2-15.
- HUA, C.T.; SOCIE, D.F. (1985) **Fatigue damage in 1045 steel under variable amplitude biaxial loading.** Fatigue Fract Eng Mater Struct 8:101-14.
- ITOH, T. (2001) **Multiaxial Low Cycle Fatigue Life Prediction Under Non-Proportional Loading.** Memoirs of the Faculty of Engineering, Fukui University.
- JIANG, Y., HERTEL, O.; VORMWALD, M. (2007) **An experimental evaluation of three critical plane multiaxial fatigue criteria.** International Journal of Fatigue, 29, 1490-1502.
- JOHNSON, G.R.; COOK, W.H. (1985) **Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures.** Eng. Fract. Mech. 21 (1), 31-48.
- KACHANOV, L. M. (1986) **Introduction to Continuum Damage Mechanics** Martinus Nijhoff Dordrecht, The Netherlands.

- KANAZAWA, K.; MILLER, K.J.; BROWN, M.W. (1979) **Cyclic deformation of 1% Cr–Mo–V steel under out-of-phase loads**. *Fatigue Eng Mater Struct* 2:217–28.
- LEMAITRE, J. (1985) **A continuous damage mechanics model for ductile fracture**. *Journal of Engineering Materials and Technology*.
- LEMAITRE, J. (1996) **A Course on Damage Mechanics** Springer, 2nd edition.
- LESSE, G. E.; MORROW, J. (1985) **Low Cycle Fatigue Properties Of A 1045 Steel In Torsion**. *Multiaxial Fatigue*. ASTM STP 853, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, pp. 482-496.
- MAMIYA, E. N., ARAÚJO, J. A. (2002) **Fatigue limit under multiaxial loading: on the definition of the equivalent shear stress**, *Mechanics Research Communications*, 29, pp. 141-151.
- MAMIYA, E. N.; ARAÚJO, J. A.; CASTRO, F.C. (2009) **Prismatic hull: A new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue**, *International Journal of Fatigue*, 31, pp. 1144-1153.
- MALCHER, L. (2011) **Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma Evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração**. Tese de doutorado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.TD – 09/2011. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 122 p.
- MALCHER, L.; MAMIYA, E.N. (2014) **An improved damage evolution law based on continuum damage mechanics and its dependence on both stress triaxiality and the third invariant**. *Int Journal of Plasticity* vol. 56:232-261.
- MATAKE, T. (1977) **An explanation on fatigue limit under combined stress** *Bull. JSME*, 20, pp. 257.
- McCLINTOCK, F. A. (1968) **A Criterion For Ductile Fracture by the Growth of Holes**. *Journal of Applied Mechanics*, 35, 363-371.
- McDIARMID, D. L. (1991) **Mean stress effect in biaxial fatigue where the stresses are out of phase and at different frequencies** In: *Fatigue under Biaxial/Multiaxial loading*. ESIS 10.
- NISHIHARA, T., KAWAMOTO, M. (1945) **The strength of metals under combined alternating bending and twisting**, *Memoirs, College of Eng, Kyoto Imperial University, Japan*, Vol.10, pp. 177-201.
- OYANE, M.; SHIMA, S.; TABATA, T. (1980) **Considerations of basic equations, and their application in the forming of metal powders and porous metals**. *J. Mech.Work. Tech.* 1, 325–341.

- PAPADOPOULOS, I.V.; DAVOLI, P.; GORLA, C.; FILIPPINI, M.; BERNASCONI, A. (1997) **A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals**. Int J Fatigue 19:219–35.
- PRAGER, W. (1955) **The theory of plasticity: a survey of recent achievements**. Proceedings, Institution of Mechanical Engineers, 169:41-57.
- RAO, S. S. (2009) **Engineering optimization: theory and practice**. s.l. : John Wiley & Sons, Inc.
- RABOTNOV, Y. N. (1968) **Creep Rupture**, in Applied Mechanics Conference. Stanford University, 342-349.
- RAMBERG, W.; OSGOOD, W. R. (1943) **Description of stress-strain curves by three parameters**. Technical Note no. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington – DC.
- RICE, J. R.; TRACEY, D. M. (1969) **On the Ductile Enlargement of Voids in Triaxial Stress Fields**. Journal of the Mechanics and Physics and Solids, 17:201-217.
- SHAMSAEI, N.; GLADSKYI, M.; PANASOVSKYI, K.; SHUKAEV, S.; FATEMI, A. (2010) **Multiaxial fatigue of titanium including step loading and load path alteration and sequence effects**. Int J Fatigue 32:1862–74.
- SHAMSAEI, N.; FATEMI, A. (2010) **Effect of microstructure and hardness on nonproportional cyclic hardening coefficient and predictions**. J Mater Sci Eng A 527:3015–24.
- SHAMSAEI, N.; FATEMI, A.; SOCIE, D.F. (2010) **Multiaxial cyclic deformation and nonproportional hardening employing discriminating load paths**. Int J Plasticity 26:1680–701.
- SINES, G. (1959) **Behavior of metals under complex static and alternating stresses**. In: SINES, G.; WAISMAN, J.L., editors. Metal fatigue. New York: McGraw-Hill;. p.145–69.
- SOCIE, D. (1987) **Multiaxial Fatigue Damage Models**, Journal of Engineering Materials Technology, Vol. 109, pp. 293-298.
- SODERBERG, C.R. (1939) **Factor of Safety and Working Stress**, Trans., American Society of Mechanical Engineers, 52, pp. 13–28.
- SONSINO, C.M.; GRUBISIC, V. (1985) **Fatigue behavior of cyclically softening and hardening steels under multiaxial elastic–plastic deformation**. In: Miller KJ, Brown MW, editors. ASTM symposium of multiaxial fatigue, vol. 853. ASTM STP p.586–605.
- SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D. E. ; OWEN, D. J. D. (2008) **Computational Methods for Plasticity**.
- STAHLSCHMIDT, J. (2010) **Estudos de Identificação de Parâmetros Elasto-Plásticos utilizando Métodos de Otimização**. Dissertação de mestrado em Ciências e Engenharia de Materiais, Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade de Santa Catarina, Joinville, SC. 99 p.

- TAIRA, S.; INOUE T.; YOSHIDA, S. (1968) **Low cycle fatigue under multiaxial stress in the case of combined cyclic tension compression and cyclic torsion out-of-phase at elevated temperature.** In: Proceedings of 11th Japan congress on materials research, vol. 5. p. 60–5.
- TANAKA, E. (1994) **A Nonproportionality Parameter and a Cyclic Viscoplastic Constitutive Model Taking into Account Amplitude Dependences and Memory Effects of Isotropic Hardening.** European Journal of Mechanics, A/Solids, No. 2, pp. 155-173.
- TVEGAARD, V.; NEEDLEMAN, A. (1984) **Analysis of the Cup-Cone Fracture in a Round Tensile Bar.** Acta Met. 32: 157-169.
- VON MISES, R. (1913) **Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand.** Göttin. Nachr. Math. Phys., vol. 1, pp. 582–592.
- WITHEY, P.A. (1997) **Fatigue failure of the de Havilland Comet I.** Engineering Failure Analysis, vol. 4, pp. 147-154.
- WÖHLER, A. (1860) **Versuche über die festigkeit eisenbahnwagenuchsen.** Z. Bauwesen 10.
- ZHANG, J. AND JIANG, Y. (2008) **Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation of a pure polycrystalline copper** International Journal of Plasticity 24. pp. 1890-1915.
- ZOUAIN, N.; MAMIYA, E.N.; COMES, F. (2006) **Using enclosing ellipsoids in multiaxial fatigue strength criteria.** Eur J Mech – A/Solids 25:51–71.

APÊNDICES

A. ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES

```
! BEGIN SUBROUTINE SUAR
! LUCIVAL Malcher, 2016
SUBROUTINE SUDCHA3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS , RSTAVA ,
STRAN , &
                STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE , NLALGV)
IMPLICIT NONE
!=====
=====
!=====
=====
!PARAMETER DECLARATION
INTEGER, PARAMETER:: IPHARD=13, KSTRE=6
!=====
=====
!=====
=====
!DATA DECLARATION
REAL (8) R0      /0.0D0/
REAL (8) RP5     /0.5D0/
REAL (8) R1      /1.0D0/
REAL (8) R2      /2.0D0/
REAL (8) R3      /3.0D0/
REAL (8) R4      /4.0D0/
REAL (8) R5      /5.0D0/
REAL (8) R27     /27.0D0/
REAL (8) R81     /81.0D0/
REAL (8) R243    /243.0D0/
REAL (8) R1458   /1458.0D0/
REAL (8) TOL     /1.D-06/
INTEGER MXITER  /50/
!=====
=====
!=====
=====
! DECLARATION OF ARGUMENTS
INTEGER NTYPE , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE , NLALGV

REAL (8) DGAMA

INTEGER, DIMENSION (NIPROP) :: IPROPS
REAL (8), DIMENSION (NRPROP) :: RPROPS
REAL (8), DIMENSION (NRSTAV) :: RSTAVA
REAL (8), DIMENSION (NSTRA)  :: STRAN
REAL (8), DIMENSION (NSTRE)  :: STRES
LOGICAL, DIMENSION (NLALGV)  :: LALGVA
!=====
=====
!=====
=====
! DECLARATION OF LOCAL VARIABLES
LOGICAL IFPLAS , SUFAIL

INTEGER I , J , NHARD , IITER , K

REAL (8) EPBARN , YOUNG , POISS , SIGMAT , SIGMAS , GMODU , BULK , R2G
, R3G , &
```

```

      EEV      , P      , EEVD3 , VARJ2T , QTRIAL , DETS      , SIGMAY , XI
, PHI      , &
      EPBAR   , HSLOPE , NORMS  , SEQ      , EQ2      , ADBETA , BDBETA , CDBETA
, DDBETA   , &
      RESNOR , HKSLOPE, BKIN   , EQ3, DAMDEN, DAMEXP, DAMAGE, DAMAGEN, YFREE,
QBAR, PTRIAL, DYFREED, &
      HKSLOPE2 , BKIN2,HKSLOPE3 , BKIN3

REAL (8) PLFUN , DPLFUN

! FOURTH ORDER IDENTITY TENSOR
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: FOID
! SECOND ORDER IDENTITY TENSOR
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: SOID
! DEVIATORIC INDENTITY TENSOR
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: DFOID
! DEVIATORIC STRAIN TENSOR
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: EET, BACK2, BACK3, BACKN2, BACKN3
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: STRIAL, BACKN, BACK, ETAN, ETA, DYFREES,
DYFREEB
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: SINVT
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: PROSINVT
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: BETA
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: ALPHA, ALPBAR
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: EQ1, EQ4,EQ5,EQ6
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: SDOTS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: DXI
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: SITDSIT
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: PROSITDSIT
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: SITDS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: PROSITDS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: DSITDS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: PRODSITDS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: SDSINVT
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: DBETA
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: DALPHA, DALPHAB
REAL (8) , DIMENSION (26,26)      :: MATRIX
REAL (8) , DIMENSION (26)         :: RHS
REAL (8) , DIMENSION (26)         :: RES
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: DXIDBETA
! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! FÁBIO REIS & FILIPE XAVIER - AUGUST, 2012
! *****
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE DALPHA E O TENSOR DAS TENSÕES
! GLOBAIS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: DC_DALPHA_SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE ALPHA E SIGMA
REAL (8) DC_ALPHA_SIGMA
!=====
=====
!=====
=====
! INITILIZE LOCAL VARIABLES
IFPLAS=.FALSE.
SUFAIL=.FALSE.

I=0 ; J=0 ; NHARD=0 ; IITER=0 ; K=0

EPBARN=R0 ; YOUNG=R0 ; POISS=R0 ; SIGMAT=R0 ; SIGMAS=R0 ; GMODU=R0
; BULK=R0

```

```

R2G=R0      ; R3G=R0          ; EEV=R0      ; P=R0          ; EEVD3=R0  ; EET=R0
; VARJ2T=R0
QTRIAL=R0   ; DETS=R0         ; SIGMAY=R0 ; XI=R0          ; PHI=R0    ; EPBAR=R0
; STRIAL=R0
HSLOPE=R0   ; NORMS=R0       ; SEQ=R0    ; PROSINVT=R0   ; BETA=R0   ; ALPHA=R0
; EQ1=R0
EQ2=R0      ; SDOTS=R0        ; ADBETA=R0 ; BDBETA=R0     ; CDBETA=R0 ;
DDBETA=R0   ; DXI=R0
SITDSIT=R0  ; PROSITDSIT=R0    ; SITDS=R0  ; PROSITDS=R0   ; DSITDS=R0 ;
PRODSITDS=R0 ; SDSINVT=R0
DBETA=R0    ; DALPHA=R0      ; MATRIX=R0 ; DXIDBETA=R0   ; HKSLOPE=R0; BKIN=R0
; EQ3=R0
EQ4=R0      ; BACKN=R0        ; BACK=R0   ; ETAN=R0       ; ETA=R0    ;
DALPHAB=R0
DAMDEN=R0   ; DAMEXP=R0; ALPBAR=R0; YFREE=R0; QBAR=R0; PTRIAL=R0;
DYFREES=R0; DYFREEB=R0; DYFREED=R0
HKSLOPE2=R0; BKIN2=R0; HKSLOPE3=R0; BKIN3=R0; BACK2=R0; BACK3=R0;
BACKN2=R0; BACKN3=R0; EQ5=R0; EQ6=R0
! INITILIZE THE FOURTH ORER IDENTITY TENSOR
FOID=R0
FOID(1,1)=R1
FOID(2,2)=R1
FOID(3,3)=R1
FOID(4,4)=R1
FOID(5,5)=R1
FOID(6,6)=R1
! INITILIZE THE SECON ORDER IDENTITY TENSOR
SOID=R0
SOID(1)=R1
SOID(2)=R1
SOID(3)=R1

! COMPUTE (FOID-(SOID \OTIMES SOID)/3)
DFOID=R0
DO I=1,NSTRE
    DO J=1,NSTRE
        DFOID(I,J)=FOID(I,J)-(R1/R3)*SOID(I)*SOID(J)
    ENDDO
ENDDO
DFOID(4,4)=DFOID(4,4)*R2
DFOID(5,5)=DFOID(5,5)*R2
DFOID(6,6)=DFOID(6,6)*R2

! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! FÁBIO REIS & FILIPE XAVIER - AUGUST, 2012
! *****
SIGMA=R0 ; DC_DALPHA_SIGMA=R0 ; DC_ALPHA_SIGMA=R0
!=====
=====
!=====
=====
! STATE UPDATE
DGAMA=R0
STRES=R0

EPBARN=RSTAVA(KSTRE+1)
DAMAGEN=RSTAVA(KSTRE+1+1)
BACKN(1)=RSTAVA(KSTRE+1+1+1)
BACKN(2)=RSTAVA(KSTRE+1+1+2)
BACKN(3)=RSTAVA(KSTRE+1+1+3)
BACKN(4)=RSTAVA(KSTRE+1+1+4)
BACKN(5)=RSTAVA(KSTRE+1+1+5)

```

```

BACKN (6) =RSTAVA (KSTRE+1+1+6)
BACKN2 (1) =RSTAVA (KSTRE+1+1+7)
BACKN2 (2) =RSTAVA (KSTRE+1+1+8)
BACKN2 (3) =RSTAVA (KSTRE+1+1+9)
BACKN2 (4) =RSTAVA (KSTRE+1+1+10)
BACKN2 (5) =RSTAVA (KSTRE+1+1+11)
BACKN2 (6) =RSTAVA (KSTRE+1+1+12)
BACKN3 (1) =RSTAVA (KSTRE+1+1+13)
BACKN3 (2) =RSTAVA (KSTRE+1+1+14)
BACKN3 (3) =RSTAVA (KSTRE+1+1+15)
BACKN3 (4) =RSTAVA (KSTRE+1+1+16)
BACKN3 (5) =RSTAVA (KSTRE+1+1+17)
BACKN3 (6) =RSTAVA (KSTRE+1+1+18)
! SET SOME MATERIAL PROPERTIES
YOUNG=RPROPS (2)
POISS=RPROPS (3)
NHARD=IPROPS (3)
SIGMAY=RPROPS (4)
HKSLOPE=RPROPS (5)
BKIN=RPROPS (6)
HKSLOPE2=RPROPS (7)
BKIN2=RPROPS (8)
HKSLOPE3=RPROPS (9)
BKIN3=RPROPS (10)
DAMDEN=RPROPS (11)
DAMEXP=RPROPS (12)
! Shear and bulk moduli and other necessary constants
GMODU=YOUNG/ (R2* (R1+POISS) )
BULK=YOUNG/ (R3* (R1-R2*POISS) )
R2G=R2*GMODU
R3G=R3*GMODU
! COMPUTE THE ELASTIC TRIAL STATE
EEV=STRAN (1) +STRAN (2) +STRAN (3)
PTRIAL= (R1-DAMAGEN) *BULK*EEV
! ELASTIC TRIAL DEVIATORIC STRAIN
EEVD3=EEV/R3
EET (1) =STRAN (1) -EEVD3
EET (2) =STRAN (2) -EEVD3
EET (3) =STRAN (3) -EEVD3
EET (4) =STRAN (4) /R2
EET (5) =STRAN (5) /R2
EET (6) =STRAN (6) /R2
!
ETAN (1) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (1) -BACKN (1) -BACKN2 (1) -BACKN3 (1)
ETAN (2) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (2) -BACKN (2) -BACKN2 (2) -BACKN3 (2)
ETAN (3) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (3) -BACKN (3) -BACKN2 (3) -BACKN3 (3)
ETAN (4) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (4) -BACKN (4) -BACKN2 (4) -BACKN3 (4)
ETAN (5) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (5) -BACKN (5) -BACKN2 (5) -BACKN3 (5)
ETAN (6) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (6) -BACKN (6) -BACKN2 (6) -BACKN3 (6)
! COMPUTE TRIAL EFFECTIVE STRESS
VARJ2T=ETAN (1) *ETAN (1) +ETAN (2) *ETAN (2) +ETAN (3) *ETAN (3) +&
R2*ETAN (4) *ETAN (4) +R2*ETAN (5) *ETAN (5) +R2*ETAN (6) *ETAN (6)
QTRIAL=DSQRT (R3*VARJ2T/R2)
! CHECK FOR PLASTIC ADMISSIBILITY

PHI= (QTRIAL/ (R1-DAMAGEN) ) -SIGMAY

IF (PHI/SIGMAY.GT.TOL) THEN
! PLASTIC DOMAIN
IFPLAS=.TRUE.
! INITIALIZE VARIABLES FOR NEWTON-RAPHSON METHOD
EPBAR=EPBARN
STRIAL= (R1-DAMAGEN) *R2G*EET
STRES=STRIAL

```

```

BACK=BACKN
BACK2=BACKN2
BACK3=BACKN3
ETA=ETAN
P=PTRIAL
DAMAGE=DAMAGEN
DO IITER=1, 50
    NORMS=DSQRT (ETA (1) *ETA (1) +ETA (2) *ETA (2) +&
                ETA (3) *ETA (3) +R2*ETA (4) *ETA (4) +&
                R2*ETA (5) *ETA (5) +R2*ETA (6) *ETA (6) )
    SEQ=DSQRT (R3/R2) *NORMS

    ! COMPUTE ALPHA
    DO I=1, NSTRE
        ALPHA (I) = (DSQRT (R3/R2) *ETA (I) /NORMS) * (R1 / (R1-DAMAGE) )
        ALPBAR (I) =DSQRT (R3/R2) *ETA (I) /NORMS
    ENDDO
    ! COMPUTE FREE ENERGIA (-Y)

    QBAR=DSQRT (R3* (STRES (1) *STRES (1) +STRES (2) *STRES (2) +STRES (3) *STRES (3) +
R2*STRES (4) *STRES (4) +R2*STRES (5) *STRES (5) +R2*STRES (6) *STRES (6) ) /R2)
    YFREE= - (QBAR*QBAR / ( (R2*R3G) * (R1-DAMAGE) * (R1-DAMAGE) )) -
(P*P / ( (R2*BULK) * (R1-DAMAGE) * (R1-DAMAGE) ))
    !
    ! INITILIZE THE RESIDUAL EQUATION --> EQi
    DO I=1, NSTRE
        EQ1 (I) =STRES (I) - (R1-
DAMAGE) *R2G*EET (I) +R2G*DGAMA*ALPBAR (I)
    ENDDO
    !
    EQ2=DAMAGE-DAMAGEN- (DGAMA / (R1-DAMAGE) ) * ( (-
YFREE/DAMDEN) **DAMEXP)
    !
    EQ3= (SEQ / (R1-DAMAGE) ) -SIGMAY
    !
    DO I=1, NSTRE
        EQ4 (I) =BACK (I) -BACKN (I) - (DGAMA / (R1-DAMAGE) ) * (
(R2/R3) *HKSLOPE*ALPBAR (I) -BKIN*BACK (I) )
        EQ5 (I) =BACK2 (I) -BACKN2 (I) - (DGAMA / (R1-DAMAGE) ) * (
(R2/R3) *HKSLOPE2*ALPBAR (I) -BKIN2*BACK2 (I) )
        EQ6 (I) =BACK3 (I) -BACKN3 (I) - (DGAMA / (R1-DAMAGE) ) * (
(R2/R3) *HKSLOPE3*ALPBAR (I) -BKIN3*BACK3 (I) )
    ENDDO

    !=====
=====

    !=====
=====

    ! CONSTRUCT THE MATRIX WITH THE DERIVATIVES

    !=====
=====

    !=====
=====

    !*****
    ! COMPUTE S \OTIMES S
    !*****
    SDOTS=R0
    DO I=1, NSTRE
        DO J=1, NSTRE
            IF (J.GE.4) THEN
                SDOTS (I, J) =R2*ETA (I) *ETA (J)

```

```

                ELSE
                SDOTS ( I, J) =ETA ( I) *ETA ( J)
                ENDIF
            ENDDO
        ENDDO

        ! =====
        ! COMPUTE DALPHA
        ! =====
        DALPHA=R0
        DALPHAB=R0
        DO I=1, NSTRE
            DO J=1, NSTRE
                DALPHA ( I, J) =DSQRT ( R3/R2) *FOID ( I, J) /NORMS-&
                    DSQRT ( R3/R2) *SDOTS ( I, J) / ( NORMS**R3)

                DALPHAB ( I, J) =-DSQRT ( R3/2) *FOID ( I, J) /NORMS+&
                    DSQRT ( R3/R2) *SDOTS ( I, J) / ( NORMS**R3)
            ENDDO
        ENDDO

        ! =====
        ! COMPUTE DYFREEE
        ! =====
        DO I=1, 6
            DYFREES ( I) =- ( R1/ ( R2*R3G* ( R1-DAMAGE) * ( R1-
DAMAGE) ) ) *R2*QBAR* ( R3*STRES ( I) /R2*QBAR)
            DYFREEB ( I) =R0
        ENDDO
        DYFREES ( 4) =R2*DYFREES ( 4)
        DYFREES ( 5) =R2*DYFREES ( 5)
        DYFREES ( 6) =R2*DYFREES ( 6)
        DYFREED=- ( R2*QBAR*QBAR/ ( ( R2*R3G) * ( R1-DAMAGE) * ( R1-DAMAGE) * ( R1-
DAMAGE) ) ) - ( R2*P*P/ ( ( R2*BULK) * ( R1-DAMAGE) * ( R1-DAMAGE) * ( R1-DAMAGE) ) )
        !
        ! =====
        ! DERIVADAS ASSOCIADAS À PRIMEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
        ! =====

        MATRIX=R0
        DO I=1, NSTRE
            DO J=1, NSTRE
                MATRIX ( I, J) =FOID ( I, J) +R2G*DGAMA*DALPHA ( I, J)
            ENDDO
        ENDDO

        MATRIX ( 1, 7) =R2G*EET ( 1)
        MATRIX ( 2, 7) =R2G*EET ( 2)
        MATRIX ( 3, 7) =R2G*EET ( 3)
        MATRIX ( 4, 7) =R2G*EET ( 4)
        MATRIX ( 5, 7) =R2G*EET ( 5)
        MATRIX ( 6, 7) =R2G*EET ( 6)

        MATRIX ( 1, 8) =R2G*ALPBAR ( 1)
        MATRIX ( 2, 8) =R2G*ALPBAR ( 2)
        MATRIX ( 3, 8) =R2G*ALPBAR ( 3)
        MATRIX ( 4, 8) =R2G*ALPBAR ( 4)
        MATRIX ( 5, 8) =R2G*ALPBAR ( 5)
        MATRIX ( 6, 8) =R2G*ALPBAR ( 6)

        DO I=1, NSTRE
            DO J=1, NSTRE
                MATRIX ( I, J+8) =R2G*DGAMA*DALPHAB ( I, J)
                MATRIX ( I, J+14) =R2G*DGAMA*DALPHAB ( I, J)
                MATRIX ( I, J+20) =R2G*DGAMA*DALPHAB ( I, J)
            ENDDO
        ENDDO

```

ENDDO
ENDDO

! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À SEGUNDA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

MATRIX (7,1) = - (DGAMA / (R1-DAMAGE)) * (DAMEXP / DAMDEN) * ((-
YFREE / DAMDEN) ** (DAMEXP-R1)) * (-DYFREES (1))
MATRIX (7,2) = - (DGAMA / (R1-DAMAGE)) * (DAMEXP / DAMDEN) * ((-
YFREE / DAMDEN) ** (DAMEXP-R1)) * (-DYFREES (2))
MATRIX (7,3) = - (DGAMA / (R1-DAMAGE)) * (DAMEXP / DAMDEN) * ((-
YFREE / DAMDEN) ** (DAMEXP-R1)) * (-DYFREES (3))
MATRIX (7,4) = - (DGAMA / (R1-DAMAGE)) * (DAMEXP / DAMDEN) * ((-
YFREE / DAMDEN) ** (DAMEXP-R1)) * (-DYFREES (4))
MATRIX (7,5) = - (DGAMA / (R1-DAMAGE)) * (DAMEXP / DAMDEN) * ((-
YFREE / DAMDEN) ** (DAMEXP-R1)) * (-DYFREES (5))
MATRIX (7,6) = - (DGAMA / (R1-DAMAGE)) * (DAMEXP / DAMDEN) * ((-
YFREE / DAMDEN) ** (DAMEXP-R1)) * (-DYFREES (6))
!
MATRIX (7,7) = R1 - (DGAMA / ((R1-DAMAGE) ** 2)) * ((-
YFREE / DAMDEN) ** DAMEXP) - (DGAMA / (R1-DAMAGE)) * (DAMEXP / DAMDEN) * ((-
YFREE / DAMDEN) ** (DAMEXP-R1)) * (-DYFREED)
!
MATRIX (7,8) = - (R1 / (R1-DAMAGE)) * ((-YFREE / DAMDEN) ** DAMEXP)
!
MATRIX (7,9) = R0
MATRIX (7,10) = R0
MATRIX (7,11) = R0
MATRIX (7,12) = R0
MATRIX (7,13) = R0
MATRIX (7,14) = R0
!
MATRIX (7,15) = R0
MATRIX (7,16) = R0
MATRIX (7,17) = R0
MATRIX (7,18) = R0
MATRIX (7,19) = R0
MATRIX (7,20) = R0
!
MATRIX (7,21) = R0
MATRIX (7,22) = R0
MATRIX (7,23) = R0
MATRIX (7,24) = R0
MATRIX (7,25) = R0
MATRIX (7,26) = R0
!

! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À TERCEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

MATRIX (8,1) = (DSQRT (R3/R2) * ETA (1) / NORMS) / (R1-DAMAGE)
MATRIX (8,2) = (DSQRT (R3/R2) * ETA (2) / NORMS) / (R1-DAMAGE)
MATRIX (8,3) = (DSQRT (R3/R2) * ETA (3) / NORMS) / (R1-DAMAGE)
MATRIX (8,4) = R2 * (DSQRT (R3/R2) * ETA (4) / NORMS) / (R1-DAMAGE)
MATRIX (8,5) = R2 * (DSQRT (R3/R2) * ETA (5) / NORMS) / (R1-DAMAGE)
MATRIX (8,6) = R2 * (DSQRT (R3/R2) * ETA (6) / NORMS) / (R1-DAMAGE)
!
MATRIX (8,7) = SEQ / ((R1-DAMAGE) ** 2)
MATRIX (8,8) = R0
!
MATRIX (8,9) = - (DSQRT (R3/R2) * ETA (1) / NORMS) / (R1-DAMAGE)
MATRIX (8,10) = - (DSQRT (R3/R2) * ETA (2) / NORMS) / (R1-DAMAGE)
MATRIX (8,11) = - (DSQRT (R3/R2) * ETA (3) / NORMS) / (R1-DAMAGE)

```

MATRIX (8,12)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,13)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,14)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
!
MATRIX (8,15)=- (DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,16)=- (DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,17)=- (DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,18)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,19)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,20)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
!
MATRIX (8,21)=- (DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,22)=- (DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,23)=- (DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,24)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,25)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
MATRIX (8,26)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)/(R1-DAMAGE)
!
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À QUARTA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

```

```

DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    MATRIX(I+8,J)=-
(R2/R3)*HKSLOPE*DGAMA*DALPHA(I,J)/(R1-DAMAGE)
  ENDDO
ENDDO
!
MATRIX(9,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(1)-
BKIN*BACK(1))/(R1-DAMAGE)**2)
MATRIX(10,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(2)-
BKIN*BACK(2))/(R1-DAMAGE)**2)
MATRIX(11,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(3)-
BKIN*BACK(3))/(R1-DAMAGE)**2)
MATRIX(12,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(4)-
BKIN*BACK(4))/(R1-DAMAGE)**2)
MATRIX(13,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(5)-
BKIN*BACK(5))/(R1-DAMAGE)**2)
MATRIX(14,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(6)-
BKIN*BACK(6))/(R1-DAMAGE)**2)

MATRIX(9,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(1)-BKIN*BACK(1))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX(10,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(2)-BKIN*BACK(2))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX(11,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(3)-BKIN*BACK(3))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX(12,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(4)-BKIN*BACK(4))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX(13,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(5)-BKIN*BACK(5))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX(14,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE*ALPBAR(6)-BKIN*BACK(6))/(R1-
DAMAGE)
!
DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    MATRIX(I+8,J+8)=FOID(I,J)-
(R2/R3)*HKSLOPE*DALPHAB(I,J)-BKIN*FOID(I,J))*DGAMA/(R1-DAMAGE)
    MATRIX(I+8,J+14)=-((R2/R3)*HKSLOPE*DALPHAB(I,J)
)*DGAMA/(R1-DAMAGE)
    MATRIX(I+8,J+20)=-((R2/R3)*HKSLOPE*DALPHAB(I,J)
)*DGAMA/(R1-DAMAGE)
  ENDDO

```

```

ENDDO
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À QUINTA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    MATRIX(I+14,J)=-
(R2/R3)*HKSLOPE2*DGAMA*DALPHA(I,J)/(R1-DAMAGE)
  ENDDO
ENDDO
!
MATRIX(15,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(1)-
BKIN2*BACK2(1))/(R1-DAMAGE)**2
MATRIX(16,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(2)-
BKIN2*BACK2(2))/(R1-DAMAGE)**2
MATRIX(17,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(3)-
BKIN2*BACK2(3))/(R1-DAMAGE)**2
MATRIX(18,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(4)-
BKIN2*BACK2(4))/(R1-DAMAGE)**2
MATRIX(19,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(5)-
BKIN2*BACK2(5))/(R1-DAMAGE)**2
MATRIX(20,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(6)-
BKIN2*BACK2(6))/(R1-DAMAGE)**2

MATRIX(15,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(1)-BKIN2*BACK2(1))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX(16,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(2)-BKIN2*BACK2(2))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX(17,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(3)-BKIN2*BACK2(3))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX(18,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(4)-BKIN2*BACK2(4))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX(19,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(5)-BKIN2*BACK2(5))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX(20,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE2*ALPBAR(6)-BKIN2*BACK2(6))/(R1-
DAMAGE)
!
DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    MATRIX(I+14,J+8)=-((R2/R3)*HKSLOPE2*DALPHAB(I,J)
)*DGAMA/(R1-DAMAGE)
    MATRIX(I+14,J+14)=FOID(I,J)-
(R2/R3)*HKSLOPE2*DALPHAB(I,J)-BKIN2*FOID(I,J)*DGAMA/(R1-DAMAGE)
    MATRIX(I+14,J+20)=-((R2/R3)*HKSLOPE2*DALPHAB(I,J)
)*DGAMA/(R1-DAMAGE)
  ENDDO
ENDDO
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À SEXTA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    MATRIX(I+20,J)=-
(R2/R3)*HKSLOPE3*DGAMA*DALPHA(I,J)/(R1-DAMAGE)
  ENDDO
ENDDO
!
MATRIX(21,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(1)-
BKIN3*BACK3(1))/(R1-DAMAGE)**2
MATRIX(22,7)=-DGAMA*((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(2)-
BKIN3*BACK3(2))/(R1-DAMAGE)**2

```

```

MATRIX (23,7)=-DGAMA* ((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(3)-
BKIN3*BACK3(3))/((R1-DAMAGE)**2)
MATRIX (24,7)=-DGAMA* ((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(4)-
BKIN3*BACK3(4))/((R1-DAMAGE)**2)
MATRIX (25,7)=-DGAMA* ((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(5)-
BKIN3*BACK3(5))/((R1-DAMAGE)**2)
MATRIX (26,7)=-DGAMA* ((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(6)-
BKIN3*BACK3(6))/((R1-DAMAGE)**2)

MATRIX (21,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(1)-BKIN3*BACK3(1))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX (22,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(2)-BKIN3*BACK3(2))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX (23,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(3)-BKIN3*BACK3(3))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX (24,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(4)-BKIN3*BACK3(4))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX (25,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(5)-BKIN3*BACK3(5))/(R1-
DAMAGE)
MATRIX (26,8)=-((R2/R3)*HKSLOPE3*ALPBAR(6)-BKIN3*BACK3(6))/(R1-
DAMAGE)
!
DO I=1,NSTRE
DO J=1,NSTRE
MATRIX (I+20,J+8)=-((R2/R3)*HKSLOPE3*DALPHAB(I,J)
)*DGAMA/(R1-DAMAGE)
MATRIX (I+20,J+14)=-((R2/R3)*HKSLOPE3*DALPHAB(I,J)
)*DGAMA/(R1-DAMAGE)
MATRIX (I+20,J+20)=FOID(I,J)-
(R2/R3)*HKSLOPE3*DALPHAB(I,J)-BKIN3*FOID(I,J) ) *DGAMA/(R1-DAMAGE)
ENDDO
ENDDO
!
RHS=R0
RHS(1)=-EQ1(1)
RHS(2)=-EQ1(2)
RHS(3)=-EQ1(3)
RHS(4)=-EQ1(4)
RHS(5)=-EQ1(5)
RHS(6)=-EQ1(6)
RHS(7)=-EQ2
RHS(8)=-EQ3
RHS(9)=-EQ4(1)
RHS(10)=-EQ4(2)
RHS(11)=-EQ4(3)
RHS(12)=-EQ4(4)
RHS(13)=-EQ4(5)
RHS(14)=-EQ4(6)
RHS(15)=-EQ5(1)
RHS(16)=-EQ5(2)
RHS(17)=-EQ5(3)
RHS(18)=-EQ5(4)
RHS(19)=-EQ5(5)
RHS(20)=-EQ5(6)
RHS(21)=-EQ6(1)
RHS(22)=-EQ6(2)
RHS(23)=-EQ6(3)
RHS(24)=-EQ6(4)
RHS(25)=-EQ6(5)
RHS(26)=-EQ6(6)

```

```

=====
==
! SOLVE THE EQUATION SYSTEM

```

```

=====
==
RES=R0
CALL SOLVERMA (MATRIX, RHS, RES, 26)
! UPDATE VARIABLES
STRES (1) =STRES (1) +RES (1)
STRES (2) =STRES (2) +RES (2)
STRES (3) =STRES (3) +RES (3)
STRES (4) =STRES (4) +RES (4)
STRES (5) =STRES (5) +RES (5)
STRES (6) =STRES (6) +RES (6)
DAMAGE=DAMAGE+RES (7)
DGAMA=DGAMA+RES (8)
BACK (1) =BACK (1) +RES (9)
BACK (2) =BACK (2) +RES (10)
BACK (3) =BACK (3) +RES (11)
BACK (4) =BACK (4) +RES (12)
BACK (5) =BACK (5) +RES (13)
BACK (6) =BACK (6) +RES (14)
BACK2 (1) =BACK2 (1) +RES (15)
BACK2 (2) =BACK2 (2) +RES (16)
BACK2 (3) =BACK2 (3) +RES (17)
BACK2 (4) =BACK2 (4) +RES (18)
BACK2 (5) =BACK2 (5) +RES (19)
BACK2 (6) =BACK2 (6) +RES (20)
BACK3 (1) =BACK3 (1) +RES (21)
BACK3 (2) =BACK3 (2) +RES (22)
BACK3 (3) =BACK3 (3) +RES (23)
BACK3 (4) =BACK3 (4) +RES (24)
BACK3 (5) =BACK3 (5) +RES (25)
BACK3 (6) =BACK3 (6) +RES (26)

! =====
==
! CHECK CONVERGENCE

! =====
==
RESNOR=R0
IF (DABS (STRES (1) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (1) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (1) /STRES (1) )
ENDIF
IF (DABS (STRES (2) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (2) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (2) /STRES (2) )
ENDIF
IF (DABS (STRES (3) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (3) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (3) /STRES (3) )
ENDIF
IF (DABS (STRES (4) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (4) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (4) /STRES (4) )
ENDIF
IF (DABS (STRES (5) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (5) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (5) /STRES (5) )

```

```

ENDIF
IF (DABS (STRES (6) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (6) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (6) /STRES (6) )
ENDIF
IF (DAMAGE .LT. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (7) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (7) /DAMAGE)
ENDIF
IF (DGAMA .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (8) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (8) /DGAMA)
ENDIF
IF (DABS (BACK (1) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (9) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (9) /BACK (1) )
ENDIF
IF (DABS (BACK (2) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (10) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (10) /BACK (2) )
ENDIF
IF (DABS (BACK (3) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (11) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (11) /BACK (3) )
ENDIF
IF (DABS (BACK (4) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (12) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (12) /BACK (4) )
ENDIF
IF (DABS (BACK (5) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (13) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (13) /BACK (5) )
ENDIF
IF (DABS (BACK (6) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (14) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (14) /BACK (6) )
ENDIF
IF (DABS (BACK2 (1) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (15) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (15) /BACK2 (1) )
ENDIF
IF (DABS (BACK2 (2) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (16) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (16) /BACK2 (2) )
ENDIF
IF (DABS (BACK2 (3) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (17) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (17) /BACK2 (3) )
ENDIF
IF (DABS (BACK2 (4) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (18) )
ELSE

```



```

!
RSTAVA (7) =EPBAR
!
RSTAVA (8) =DAMAGE
!
RSTAVA (9) =BACK (1)
RSTAVA (10) =BACK (2)
RSTAVA (11) =BACK (3)
RSTAVA (12) =BACK (4)
RSTAVA (13) =BACK (5)
RSTAVA (14) =BACK (6)
!
RSTAVA (15) =BACK2 (1)
RSTAVA (16) =BACK2 (2)
RSTAVA (17) =BACK2 (3)
RSTAVA (18) =BACK2 (4)
RSTAVA (19) =BACK2 (5)
RSTAVA (20) =BACK2 (6)
!
RSTAVA (21) =BACK3 (1)
RSTAVA (22) =BACK3 (2)
RSTAVA (23) =BACK3 (3)
RSTAVA (24) =BACK3 (4)
RSTAVA (25) =BACK3 (5)
RSTAVA (26) =BACK3 (6)
!
STRES (1) =STRES (1) +P
STRES (2) =STRES (2) +P
STRES (3) =STRES (3) +P
!
GOTO 1000
ENDIF
ENDDO
ELSE
! ELASTIC DOMAIN
STRES (1) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (1) +PTRIAL
STRES (2) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (2) +PTRIAL
STRES (3) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (3) +PTRIAL
STRES (4) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (4)
STRES (5) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (5)
STRES (6) = (R1-DAMAGEN) *R2G*EET (6)

RSTAVA (1) =STRAN (1)
RSTAVA (2) =STRAN (2)
RSTAVA (3) =STRAN (3)
RSTAVA (4) =STRAN (4)
RSTAVA (5) =STRAN (5)
RSTAVA (6) =STRAN (6)
RSTAVA (7) =EPBARN
RSTAVA (8) =DAMAGEN
RSTAVA (9) =BACKN (1)
RSTAVA (10) =BACKN (2)
RSTAVA (11) =BACKN (3)
RSTAVA (12) =BACKN (4)
RSTAVA (13) =BACKN (5)
RSTAVA (14) =BACKN (6)
RSTAVA (15) =BACKN2 (1)
RSTAVA (16) =BACKN2 (2)
RSTAVA (17) =BACKN2 (3)
RSTAVA (18) =BACKN2 (4)
RSTAVA (19) =BACKN2 (5)
RSTAVA (20) =BACKN2 (6)
RSTAVA (21) =BACKN3 (1)
RSTAVA (22) =BACKN3 (2)

```

```

RSTAVA (23) =BACKN3 (3)
RSTAVA (24) =BACKN3 (4)
RSTAVA (25) =BACKN3 (5)
RSTAVA (26) =BACKN3 (6)
ENDIF
1000 CONTINUE
LALGVA (1) =IFPLAS
LALGVA (2) =SUFAIL
RETURN
END

```

B. ROTINA DE IDENTIFICAÇÃO DO DENOMINADOR DE DANO

```

%*****
%
% Universidade de Brasília
% Departamento de Engenharia Mecânica
% Pós-graduação em Ciências Mecânicas
%
% Jhonatan da Ponte Lopes, 2016
%
% Dissertação de mestrado
%
% Programa 'damage_cal'
%
% Descrição: Este programa faz a calibração do denominador de dano para o
% modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche para
% os aços 304 e S460N e a liga de Al 6061-T6. É feita uma otimização do
% dano crítico, ajustando o denominador de dano de forma a obter dano
% crítico unitário para as condições de calibração.
%
%*****

function damage_cal

close all
clc

tol=1e0;

dsup=8.9;
dinf=7.9;

mat='304';
dc=1;
damden = secaoaurea(dinf,dsup,tol,dc,mat);
damprint(damden,mat);

dsup=5;
dinf=2;

mat='S460N';
dc=1;
damden = secaoaurea(dinf,dsup,tol,dc,mat);
damprint(damden,mat);

```

```

dsup=5;
dinf=1;

mat='6061-T6';
dc=1;
damden = secaoaurea(dinf,dsup,tol,dc,mat);
damprint(damden,mat);

end

% Função 'secaoaurea'
%
% Descrição: Para um dado conjunto de parâmetros e uma direção de
% otimização, esta função calcula o comprimento de passo ótimo segundo o
% método da seção áurea, analisando um parâmetro dentro um intervalo dado.
%
% Uso: a = secaoaurea(p,d,a_inf,a_sup)
%       p: vetor dos parâmetros a serem identificados;
%       d: vetor direção de busca;
%       a_inf: limite inferior do intervalo de busca;
%       a_sup: limite superior do intervalo de busca;
%       globiter: valor atual da iteração global
%       a: vetor dos parâmetros corrigido.

function a = secaoaurea(a_inf,a_sup,tol,dc,mat)

I=a_sup-a_inf;
i=0;

while I>tol
    % Caixa de dialogo com o numero da iteração:
    i=i+1;
    % Cálculo de alpha_a e alpha_b:
    a_a=a_inf+0.328*I;
    a_b=a_inf+0.618*I;
    % Cálculo de f(alpha_a) e f(alpha_b):
    f_a=minquad(a_a,dc,mat);
    f_b=minquad(a_b,dc,mat);
    % Comparação para redução do intervalo:
    if (f_a < f_b)
        a_sup=a_b;
        % Novo intervalo de incerteza:
        I=a_sup-a_inf;
    elseif (f_a > f_b)
        a_inf=a_a;
        % Novo intervalo de incerteza:
        I=a_sup-a_inf;
    else
        a_inf=a_a;
        a_sup=a_b;
        I=a_sup-a_inf;
    end
end

a=(a_inf+a_sup)/2;

```

```

end

% Função 'minquad'
%
% Descrição: Calcula a função objetivo de acordo com o método dos mínimos
% quadrados para a diferença entre a resposta experimental e a resposta
% numérica. Assim, dado o conjunto de parâmetros a serem identificados
% (p), a função cria um arquivo com os parâmetros para uso no algoritmo
% de retorno, lê os dados experimentais, chama a rotina FORTRAN com o
% algoritmo de retorno e lê os dados numéricos, para, em seguida,
% calcular a função objetivo.
%
% Uso: f = minquad(p)
%         p: vetor dos parâmetros a serem identificados;
%         f: valor da função objetivo calculada por mínimos quadrados.

function f=minquad(p,dc,mat)

% Registro dos parâmetros para uso no programa do MEF:
auxstr=horzcat('DAMAGEPAR_',mat, '.dat');
pID=fopen(auxstr, 'w+');
fprintf(pID, '%14.10f\t', p);
fclose(pID);

% Programa FORTRAN:
isA=strcmp(mat, '304');
isB=strcmp(mat, 'S460N');
isC=strcmp(mat, '6061-T6');
if isA==1
    ! TRAJECT_304_SIM.exe
elseif isB==1
    ! TRAJECT_S460N_SIM.exe
elseif isC==1
    ! TRAJECT_6061-T6_SIM.exe
end

% Leitura do Dano ciclo a ciclo:
auxstr=horzcat('MATERIAL_',mat, '_DAM.out');
mefID=fopen(auxstr, 'r');
B=dlmread(auxstr);
fclose(mefID);
cyc=B(:,1); % Ciclo
dam=B(:,2); % Dano

% Ciclo crítico e número de ciclos
auxdam=dc-1e-2;

n=find(dam>=auxdam,1, 'first');
nempty=isempty(n);
if nempty==1
    ccrit=cyc(end);
else
    ccrit=cyc(n);
end
ctot=cyc(end);

% Dano final
df=dam(end);

```

```

% Função de avaliação de convergência
f=sqrt((df-dc)^2+(ccrit/ctot-dc)^2);

end

% Função 'damprint'
%
% Descrição: Plota o gráfico do dano em função do ciclo para o denominador
% a calibração feita pela rotina principal.
%
% Uso: damprint(d,mat)
%       d: denominador de dano;
%       mat: material.

function damprint(d,mat)

LW=1.5;

% Registro dos parâmetros para uso no programa do MEF:
auxstr=horzcat('DAMAGEPAR_',mat, '.dat');
pID=fopen(auxstr, 'w+');
fprintf(pID, '%14.10f\t', d);
fclose(pID);

% Programa de Elementos Finitos:
isA=strcmp(mat, '304');
isB=strcmp(mat, 'S460N');
isC=strcmp(mat, '6061-T6');
if isA==1
    ! TRAJECT_304_SIM.exe
elseif isB==1
    ! TRAJECT_S460N_SIM.exe
elseif isC==1
    ! TRAJECT_6061-T6_SIM.exe
end

% Leitura do Dano ciclo a ciclo:
auxstr=horzcat('MATERIAL_',mat, '_DAM.out');
mefID=fopen(auxstr, 'r');
B=dlmread(auxstr);
fclose(mefID);
cyc=B(:,1); % Ciclo
dam=B(:,2); % Dano

% Plot

h=figure;

semilogx(cyc,dam, 'k-', 'LineWidth', LW);
xlabel('N [Ciclos]');
ylabel('Dano');
auxtit1=horzcat('Evolução do Dano - Aço ',mat, ' - A-F');
auxtit2=horzcat('S = ', num2str(d), ' [MPa]');
tit={auxtit1,auxtit2};
title(tit);
axis([1 cyc(end) 0 1]);

```

```

grid on

filename=horzcat('DvsCycle_',mat);

saveas(h,filename,'png');
saveas(h,filename,'eps');

end

```

C. ROTINA DOS CARREGAMENTOS

```

! BEGIN SUBROUTINE TRAJECT_ITOH
!
! JHONATAN LOPES, 2016
!
! THIS ROUTINE APPLIES THE 13 LOADING HISTORIES PRESCRIBED IN ITOH'S PAPER
FOR A GIVEN MATERIAL

SUBROUTINE TRAJITOH(NCYC, NINCR, TRAJECT, EPSX, GAMY, POISS, DGAMA, IPROPS,
LALGVA, NTYPE, RPROPS,&
                RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, NRSTAV, NSTRA,
NSTRE, NLALGV,&
                FCYCPRINT, EINCR, ETOT)

IMPLICIT NONE

!=====
!=====
!=====
! DECLARATION OF ARGUMENTS

! CONSTANT PI
REAL, PARAMETER :: PI=4.D0*DATAN(1.D0)

INTEGER, DIMENSION(NIPROP) :: IPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRPROP) :: RPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRSTAV) :: RSTAVA
REAL(8), DIMENSION(NSTRA) :: STRAN
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: STRES
LOGICAL, DIMENSION(NLALGV) :: LALGVA
REAL(8), DIMENSION(NSTRA) :: EINCR
REAL(8), DIMENSION(NSTRA,10000000) :: ETOT

REAL(8) R0 /0.0D0/
REAL(8) R1 /1.0D0/

CHARACTER MATERIAL*256, MATPAR*256

!ESCALAR
INTEGER I, J, K, NTYPE, NRPROP, NIPROP, NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV,
TRAJECT, NCYC, NINCR, AUXINCR,&
                FCYCPRINT, LCYCPRINT, ALLCYCPRINT

REAL(8) DGAMA, DENSE, YOUNG, POISS, SIGMAY, HKSLOPE1, BKIN1,&
                HKSLOPE2, BKIN2, EPBAR1, SIGMAY1, EPBAR2, SIGMAY2,&
                HKSLOPE3, BKIN3, EPSX, GAMY, THETA, MEXP1, MEXP2, MEXP3,&
                DAMDEN, DAMEXP, CONV, THDEF, AUXT

1000 FORMAT(G15.6,G15.6,G15.6,G15.6)

```

```

! |-----|
! |
! |           SELEÇÃO DO HISTÓRICO DE CARREGAMENTO
! |
! |-----|

```

```

! HISTÓRICOS DE CARREGAMENTO
! AÇO 304 (ITOH, 2001 / MAMIYA ET AL, 2014)
!

```

```

! |-----|-----|-----|
! | CÓDIGO |     CASO |     DESCRIÇÃO
! |-----|-----|-----|
! |  0     |     0    | UNIAXIAL TRAÇÃO
! |
! |  1     |     1    | CRUZ UNIAXIAL I
! |
! |  2     |     2    | CRUZ UNIAXIAL II
! |
! |  3     |     3    | CRUZ MULTIAXIAL I
! |
! |  4     |     4    | CRUZ MULTIAXIAL II
! |
! |  5     |     5    | MULTIAXIAL PROPORCIONAL
! |
! |  6     |     6    | STEP I
! |
! |  7     |     7    | STEP II
! |
! |  8     |     8    | V I
! |
! |  9     |     9    | V II
! |
! | 10     |    10    | RETANGULO
! |
! | 11     |    11    | RETANGULO INCLINADO
! |
! | 12     |    12    | LOSANGO
! |
! | 13     |    13    | ELIPSE CENTRADA NA ORIGEM
! |-----|-----|-----|

```

SELECT CASE (TRAJECT)

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 0
CASE (0)
    WRITE (*,*) 'CASO 0'

    EINCR(1)=EPSX/(NINCR/4)      !EPSLON X
    EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
    EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
    EINCR(4)=R0                 !GAMMA XY
    EINCR(5)=R0                 !GAMMA YZ
    EINCR(6)=R0                 !GAMMA XZ

    AUXINCR=NINCR/4;
    DO I=2,AUXINCR+1

```

```

ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2, 3*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2, 4*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 1
CASE (1)
    WRITE (*, *) 'CASO 1' ! CRUZ UNIAXIAL I

    EINCR (1) =EPSX/ (NINCR/8)      !EPSLON X
    EINCR (2) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Y
    EINCR (3) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Z
    EINCR (4) =GAMY/ (NINCR/8)     !GAMA XY
    EINCR (5) =R0                  !GAMMA YZ
    EINCR (6) =R0                  !GAMMA XZ

    AUXINCR=NINCR/8;
    DO I=2, AUXINCR+1
        ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
        ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
        ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
        ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
        ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
        ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
    ENDDO
    DO I=AUXINCR+2, 2*AUXINCR+1
        ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
        ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
        ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
        ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
        ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
        ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
    ENDDO
    DO I=2*AUXINCR+2, 3*AUXINCR+1
        ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
        ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
        ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
        ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
        ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
        ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
    ENDDO
    DO I=3*AUXINCR+2, 5*AUXINCR+1
        ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
        ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)

```

```

ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=5*AUXINCR+2, 6*AUXINCR+1
ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=6*AUXINCR+2, 7*AUXINCR+1
ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=7*AUXINCR+2, 8*AUXINCR+1
ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 2
CASE (2)
WRITE (*,*) 'CASO 2' ! CRUZ UNIAXIAL II

EINCR (1) =EPSX/ (NINCR/8)      !EPSLON X
EINCR (2) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Y
EINCR (3) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Z
EINCR (4) =GAMY/ (NINCR/8)     !GAMA XY
EINCR (5) =R0                  !GAMA YZ
EINCR (6) =R0                  !GAMA XZ

AUXINCR=NINCR/8;
DO I=2, AUXINCR+1
ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2, 2*AUXINCR+1
ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=2*AUXINCR+2, 3*AUXINCR+1
ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)

```

```

        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
DO I=4*AUXINCR+2,5*AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=5*AUXINCR+2,6*AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=6*AUXINCR+2,7*AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
DO I=7*AUXINCR+2,8*AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO

```

```
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

```
! CASO 3
```

```
CASE (3)
```

```
WRITE (*,*) 'CASO 3' ! CRUZ MULTIAXIAL I
```

```

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)     !GAMA XY
EINCR(5)=R0                  !GAMA YZ
EINCR(6)=R0                  !GAMA XZ

```

```
AUXINCR=NINCR/8;
```

```

DO I=2,AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)

```

```

        ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
        ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2, 3*AUXINCR+1
        ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
        ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
        ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
        ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
        ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
        ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2, 4*AUXINCR+1
        ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
        ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
        ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
        ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
        ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
        ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=4*AUXINCR+2, 5*AUXINCR+1
        ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
        ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
        ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
        ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
        ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
        ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=5*AUXINCR+2, 7*AUXINCR+1
        ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
        ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
        ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
        ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
        ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
        ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=7*AUXINCR+2, 8*AUXINCR+1
        ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
        ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
        ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
        ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
        ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
        ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO

```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 4
CASE (4)
WRITE (*,*) 'CASO 4' ! CRUZ MULTIAXIAL II

EINCR (1) =EPSX/ (NINCR/8)      !EPSLON X
EINCR (2) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Y
EINCR (3) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Z
EINCR (4) =GAMY/ (NINCR/8)     !GAMA XY
EINCR (5) =R0                  !GAMA YZ
EINCR (6) =R0                  !GAMA XZ

```

```

AUXINCR=NINCR/8;
DO I=2, AUXINCR+1
        ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
        ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
        ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
        ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
        ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)

```

```

      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2, 2*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=2*AUXINCR+2, 3*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2, 4*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=4*AUXINCR+2, 5*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=5*AUXINCR+2, 6*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=6*AUXINCR+2, 7*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=7*AUXINCR+2, 8*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO

```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 5
CASE (5)
      WRITE (*,*) 'CASO 5'

```

```

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/4)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/4)     !GAMA XY
EINCR(5)=R0                  !GAMMA YZ
EINCR(6)=R0                  !GAMMA XZ

```

```
AUXINCR=NINCR/4;
```

```

DO I=2,AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)

```

```
ENDDO
```

```

DO I=AUXINCR+2,3*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)

```

```
ENDDO
```

```

DO I=3*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)

```

```
ENDDO
```

```
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

```
! CASO 6
```

```
CASE (6)
```

```
WRITE (*,*) 'CASO 6' ! STEP I
```

```

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)     !GAMA XY
EINCR(5)=R0                  !GAMMA YZ
EINCR(6)=R0                  !GAMMA XZ

```

```
AUXINCR=NINCR/32;
```

```
! CARREGAMENTO PRIMEIRO QUADRANTE
```

```

DO I=2,AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)

```

```
ENDDO
```

```

DO I=AUXINCR+2,3*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)

```

```

        ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2, 5*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=5*AUXINCR+2, 7*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=7*AUXINCR+2, 8*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO

! DESCARREGAMENTO PRIMEIRO QUADRANTE
DO I=8*AUXINCR+2, 9*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=9*AUXINCR+2, 11*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=11*AUXINCR+2, 13*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=13*AUXINCR+2, 15*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=15*AUXINCR+2, 16*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)

```

```

      ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

! DESCARREGAMENTO TERCEIRO QUADRANTE
DO I=16*AUXINCR+2,17*AUXINCR+1
      ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
      ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
      ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
      ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=17*AUXINCR+2,19*AUXINCR+1
      ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
      ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
      ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
      ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=19*AUXINCR+2,21*AUXINCR+1
      ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
      ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
      ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
      ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=21*AUXINCR+2,23*AUXINCR+1
      ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
      ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
      ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
      ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=23*AUXINCR+2,24*AUXINCR+1
      ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
      ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
      ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
      ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

! CARREGAMENTO TERCEIRO QUADRANTE
DO I=24*AUXINCR+2,25*AUXINCR+1
      ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
      ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
      ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
      ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=25*AUXINCR+2,27*AUXINCR+1
      ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
      ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
      ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
      ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)

```

```

ENDDO
DO I=27*AUXINCR+2, 29*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=29*AUXINCR+2, 31*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=31*AUXINCR+2, 32*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 7
CASE (7)
    WRITE (*, *) 'CASO 7' ! STEP II

    EINCR (1) =EPSX/ (NINCR/8)      !EPSLON X
    EINCR (2) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Y
    EINCR (3) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Z
    EINCR (4) =GAMY/ (NINCR/8)     !GAMA XY
    EINCR (5) =R0                  !GAMMA YZ
    EINCR (6) =R0                  !GAMMA XZ

    AUXINCR=NINCR/16;

    ! CARREGAMENTO PRIMEIRO QUADRANTE
DO I=2, AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2, 3*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2, 4*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)

```

```

ENDDO

! DESCARREGAMENTO PRIMEIRO QUADRANTE
DO I=4*AUXINCR+2, 5*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=5*AUXINCR+2, 7*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=7*AUXINCR+2, 8*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO

! DESCARREGAMENTO TERCEIRO QUADRANTE
DO I=8*AUXINCR+2, 9*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=9*AUXINCR+2, 11*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=11*AUXINCR+2, 12*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO

! CARREGAMENTO TERCEIRO QUADRANTE
DO I=12*AUXINCR+2, 13*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=13*AUXINCR+2, 15*AUXINCR+1

```

```

ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=15*AUXINCR+2, 16*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 8

CASE (8)
    WRITE (*, *) 'CASO 8' ! V I

EINCR (1) =EPSX/ (NINCR/4)      !EPSLON X
EINCR (2) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Y
EINCR (3) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Z
EINCR (4) =GAMY/ (NINCR/4)     !GAMA XY
EINCR (5) =R0                  !GAMMA YZ
EINCR (6) =R0                  !GAMMA XZ

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO V:

AUXINCR=NINCR/4;
DO I=2, AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2, 2*AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO

DO I=2, 2*AUXINCR+1
    STRAN (1) =RSTAVA (1) + (ETOT (1, I) -ETOT (1, I-1))
    STRAN (2) =RSTAVA (2) + (ETOT (2, I) -ETOT (2, I-1))
    STRAN (3) =RSTAVA (3) + (ETOT (3, I) -ETOT (3, I-1))
    STRAN (4) =RSTAVA (4) + (ETOT (4, I) -ETOT (4, I-1))
    STRAN (5) =RSTAVA (5) + (ETOT (5, I) -ETOT (5, I-1))
    STRAN (6) =RSTAVA (6) + (ETOT (6, I) -ETOT (6, I-1))
    DGAMA=R0
    LALGVA (1) =.FALSE.
    LALGVA (2) =.FALSE.
    STRES=R0 !ARRAY

CALL SUDCHA3D (DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS, &
    RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, &
    NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)

```

```

      IF (FCYCPRINT.EQ.R1) THEN
        WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
      ENDIF
      !WRITE(*,*) ETOT(1,I)
ENDDO

! CARREGAMENTO RESTANTE

ETOT(1,1)=ETOT(1,2*AUXINCR+1)
ETOT(2,1)=ETOT(2,2*AUXINCR+1)
ETOT(3,1)=ETOT(3,2*AUXINCR+1)
ETOT(4,1)=ETOT(4,2*AUXINCR+1)
ETOT(5,1)=ETOT(5,2*AUXINCR+1)
ETOT(6,1)=ETOT(6,2*AUXINCR+1)

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)     !GAMA XY
EINCR(5)=R0                 !GAMA YZ
EINCR(6)=R0                 !GAMA XZ

AUXINCR=NINCR/4;

DO I=2,AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2,2*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=2*AUXINCR+2,3*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 9

CASE (9)
  WRITE (*,*) 'CASO 9' ! V II

  EINCR(1)=EPSX/(NINCR/4)      !EPSLON X

```

```

EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)      !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)      !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/4)       !GAMA XY
EINCR(5)=R0                    !GAMMA YZ
EINCR(6)=R0                    !GAMMA XZ

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO V:

AUXINCR=NINCR/4;
DO I=2,AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2,2*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=2,2*AUXINCR+1
  STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
  STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
  STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
  STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
  STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
  STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
  DGAMA=R0
  LALGVA(1)=.FALSE.
  LALGVA(2)=.FALSE.
  STRES=R0 !ARRAY

  CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS,&
    RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP,&
    NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
  IF (FCYCPRINT.EQ.R1) THEN
    WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
  ENDIF
  !WRITE(*,*) ETOT(1,I)
ENDDO

! CARREGAMENTO RESTANTE

ETOT(1,1)=ETOT(1,2*AUXINCR+1)
ETOT(2,1)=ETOT(2,2*AUXINCR+1)
ETOT(3,1)=ETOT(3,2*AUXINCR+1)
ETOT(4,1)=ETOT(4,2*AUXINCR+1)
ETOT(5,1)=ETOT(5,2*AUXINCR+1)
ETOT(6,1)=ETOT(6,2*AUXINCR+1)

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)     !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)     !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)      !GAMA XY
EINCR(5)=R0                    !GAMMA YZ
EINCR(6)=R0                    !GAMMA XZ

AUXINCR=NINCR/4;

```

```

DO I=2, AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)

```

ENDDO

```

DO I=AUXINCR+2, 2*AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)

```

ENDDO

```

DO I=2*AUXINCR+2, 3*AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)

```

ENDDO

```

DO I=3*AUXINCR+2, 4*AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)

```

ENDDO

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 10

```

CASE (10)

```

WRITE (*,*) 'CASO 10' ! RETANGULAR

```

```

EINCR (1) =EPSX/ (NINCR/8)      !EPSLON X
EINCR (2) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Y
EINCR (3) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Z
EINCR (4) =GAMY/ (NINCR/8)     !GAMA XY
EINCR (5) =R0                  !GAMMA YZ
EINCR (6) =R0                  !GAMMA XZ

```

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO RETÂNGULO:

```

AUXINCR=NINCR/8;

```

```

DO I=2, AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)

```

ENDDO

```

DO I=2, AUXINCR+1
  STRAN (1) =RSTAVA (1) + (ETOT (1, I) -ETOT (1, I-1))
  STRAN (2) =RSTAVA (2) + (ETOT (2, I) -ETOT (2, I-1))
  STRAN (3) =RSTAVA (3) + (ETOT (3, I) -ETOT (3, I-1))
  STRAN (4) =RSTAVA (4) + (ETOT (4, I) -ETOT (4, I-1))

```

```

STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
DGAMA=R0
LALGVA(1)=.FALSE.
LALGVA(2)=.FALSE.
STRES=R0 !ARRAY

CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS, &
RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, &
NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
IF (FCYCPRINT.EQ.R1) THEN
WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
ENDIF
!WRITE(*,*) ETOT(1,I)
ENDDO

! CARREGAMENTO RESTANTE

ETOT(1,1)=ETOT(1,AUXINCR+1)
ETOT(2,1)=ETOT(2,AUXINCR+1)
ETOT(3,1)=ETOT(3,AUXINCR+1)
ETOT(4,1)=ETOT(4,AUXINCR+1)
ETOT(5,1)=ETOT(5,AUXINCR+1)
ETOT(6,1)=ETOT(6,AUXINCR+1)

DO I=2,AUXINCR+1
ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2,3*AUXINCR+1
ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2,5*AUXINCR+1
ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=5*AUXINCR+2,7*AUXINCR+1
ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=7*AUXINCR+2,8*AUXINCR+1
ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)

```

```

ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 11
CASE (11)
  WRITE (*,*) 'CASO 11' ! RETANGULO COM ROTAÇÃO DE THETA GRAUS

  THETA=-PI/4

  ! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO RETANGULO:

  EINCR(1)=EPSX/(NINCR/160)      !EPSLON X
  EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)      !EPSLON Y
  EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)      !EPSLON Z
  EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)       !GAMA XY
  EINCR(5)=R0                   !GAMA YZ
  EINCR(6)=R0                   !GAMA XZ

  I=1;
  CONV=ABS((ETOT(1,I)*COS(THETA)+ETOT(3,I)*SIN(THETA))/EPSX+(-
ETOT(1,I)*SIN(THETA)+ETOT(3,I)*COS(THETA))/GAMY)+ABS((ETOT(1,I)*COS(THETA)+
ETOT(3,I)*SIN(THETA))/EPSX-(-
ETOT(1,I)*SIN(THETA)+ETOT(3,I)*COS(THETA))/GAMY);

  DO WHILE (CONV < 1.97)
    I=I+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
    CONV=ABS((ETOT(1,I)*COS(THETA)+ETOT(3,I)*SIN(THETA))/EPSX+(-
ETOT(1,I)*SIN(THETA)+ETOT(3,I)*COS(THETA))/GAMY)+ABS((ETOT(1,I)*COS(THETA)+
ETOT(3,I)*SIN(THETA))/EPSX-(-
ETOT(1,I)*SIN(THETA)+ETOT(3,I)*COS(THETA))/GAMY);
  ENDDO

  AUXINCR=I-1;

  DO I=2,AUXINCR+1
    STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
    STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
    STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
    STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
    STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
    STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
    DGAMA=R0
    LALGVA(1)=.FALSE.
    LALGVA(2)=.FALSE.
    STRES=R0 !ARRAY

    CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS,&
      RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP,&
      NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
    IF (FCYCPRIENT.EQ.R1) THEN
      WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
    ENDIF
    !WRITE(*,*) ETOT(1,I)
  ENDDO

  ! CARREGAMENTO RESTANTE

```

```

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8)

ETOT(1,1)=ETOT(1,AUXINCR+1)
ETOT(2,1)=ETOT(2,AUXINCR+1)
ETOT(3,1)=ETOT(3,AUXINCR+1)
ETOT(4,1)=ETOT(4,AUXINCR+1)
ETOT(5,1)=ETOT(5,AUXINCR+1)
ETOT(6,1)=ETOT(6,AUXINCR+1)

THDEF=PI*159/1024

DO I=2,8*AUXINCR+1
    AUXT=-2*PI*(I-1)/NINCR+THDEF

ETOT(1,I)=EPSX*(ABS(COS(AUXT))*COS(AUXT)+ABS(SIN(AUXT))*SIN(AUXT))*COS(THETA)
-GAMY*(ABS(COS(AUXT))*COS(AUXT)-ABS(SIN(AUXT))*SIN(AUXT))*SIN(THETA)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-POISS*ETOT(1,I)

ETOT(4,I)=EPSX*(ABS(COS(AUXT))*COS(AUXT)+ABS(SIN(AUXT))*SIN(AUXT))*COS(THETA)
+GAMY*(ABS(COS(AUXT))*COS(AUXT)-ABS(SIN(AUXT))*SIN(AUXT))*SIN(THETA)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 12

CASE (12)
WRITE (*,*) 'CASO 12' ! LOSANGO

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/4)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/4)     !GAMA XY
EINCR(5)=R0                 !GAMMA YZ
EINCR(6)=R0                 !GAMMA XZ

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO RETÂNGULO:

AUXINCR=NINCR/4;
DO I=2,AUXINCR+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

DO I=2,AUXINCR+1
    STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
    STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
    STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
    STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
    STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
    STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
    DGAMA=R0
    LALGVA(1)=.FALSE.
    LALGVA(2)=.FALSE.
    STRES=R0 !ARRAY

```

```

CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS, &
RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, &
NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
IF (FCYCPRIENT.EQ.R1) THEN
WRITE (15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
ENDIF
ENDDO
!WRITE(*,*) ETOT(1,I)
! CARREGAMENTO RESTANTE

ETOT(1,1)=ETOT(1,AUXINCR+1)
ETOT(2,1)=ETOT(2,AUXINCR+1)
ETOT(3,1)=ETOT(3,AUXINCR+1)
ETOT(4,1)=ETOT(4,AUXINCR+1)
ETOT(5,1)=ETOT(5,AUXINCR+1)
ETOT(6,1)=ETOT(6,AUXINCR+1)

DO I=2,AUXINCR+1
ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2,2*AUXINCR+1
ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=2*AUXINCR+2,3*AUXINCR+1
ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CASO 13
CASE (13)
WRITE (*,*) 'CASO 13' ! ELIPSE CENTRADA NA ORIGEM

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8) !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1) !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1) !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8) !GAMA XY
EINCR(5)=R0 !GAMA YZ
EINCR(6)=R0 !GAMA XZ

```

```

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DA ELIPSE:

AUXINCR=NINCR/8;
DO I=2,AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

DO I=2,AUXINCR+1
  STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
  STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
  STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
  STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
  STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
  STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
  DGAMA=R0
  LALGVA(1)=.FALSE.
  LALGVA(2)=.FALSE.
  STRES=R0 !ARRAY

  CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS,&
    RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP,&
    NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
  IF (FCYCPRINT.EQ.R1) THEN
    WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
  ENDIF
  !WRITE(*,*) ETOT(1,I)
ENDDO

! CARREGAMENTO RESTANTE

DO I=2,8*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=EPSX*COS((I-1)*2*PI/NINCR)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
  ETOT(4,I)=GAMY*SIN((I-1)*2*PI/NINCR)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

END SELECT

RETURN
END

! BEGIN SUBROUTINE TRAJECT_ITOH
!
! JHONATAN LOPES, 2016
!
! THIS ROUTINE APPLIES THE 17 LOADING HISTORIES PRESCRIBED IN JIANG'S PAPER
! FOR A GIVEN MATERIAL

SUBROUTINE TRAJJIANG(NCYC, NINCR, TRAJECT, EPSX, GAMY, POISS, DGAMA,
  IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS,&

```

```

RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, NRSTAV, NSTRA,
NSTRE, NLALGV, &
FCYCPRINT, EINCR, ETOT)

```

IMPLICIT NONE

```

!=====
====
!=====
====

```

! DECLARATION OF ARGUMENTS

! CONSTANT PI

REAL, PARAMETER :: PI=4.D0*DATAN(1.D0)

```

INTEGER, DIMENSION(NIPROP) :: IPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRPROP) :: RPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRSTAV) :: RSTAVA
REAL(8), DIMENSION(NSTRA) :: STRAN
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: STRES
LOGICAL, DIMENSION(NLALGV) :: LALGVA
REAL(8), DIMENSION(NSTRA) :: EINCR
REAL(8), DIMENSION(NSTRA,100000):: ETOT

```

REAL(8) R0 /0.0D0/

REAL(8) R1 /1.0D0/

CHARACTER MATERIAL*256, MATPAR*256

!ESCALAR

INTEGER I, J, K, NTYPE, NRPROP, NIPROP, NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV,
TRAJECT, NCYC, NINCR, AUXINCR, &
FCYCPRINT, LCYCPRINT, ALLCYCPRINT

REAL(8) DGAMA, DENSE, YOUNG, POISS, SIGMAY, HKSLOPE1, BKIN1, &
HKSLOPE2, BKIN2, EPBAR1, SIGMAY1, EPBAR2, SIGMAY2, &
HKSLOPE3, BKIN3, EPSX, GAMY, THETA, MEXP1, MEXP2, MEXP3, &
DAMDEN, DAMEXP

1000 **FORMAT**(G15.6,G15.6,G15.6,G15.6)

```

! |-----|
! |
! |           SELEÇÃO DO HISTÓRICO DE CARREGAMENTO           |
! |
! |-----|

```

! HISTÓRICOS DE CARREGAMENTO
! AÇO S460N (JIANG ET AL, 2007 / MAMIYA ET AL, 2014)

CÓDIGO	HISTÓRICO	DESCRIÇÃO
1	A	PROPORCIONAL UNIAXIAL TRAÇÃO
2	B	PROPORCIONAL UNIAXIAL TORÇÃO
3	C	PROPORCIONAL MULTIAXIAL TRAÇÃO-TORÇÃO

```

! | 4 | D | NÃO-PROPORCIONAL I - ELIPSE CENTRADA NA
ORIGEM |
! | 5 | E | NÃO-PROPORCIONAL I - ELIPSE INCLINADA A 45
GRAUS |
! | 6 | F | NÃO-PROPORCIONAL I - RETANGULO
|
! | 7 | G | NÃO-PROPORCIONAL I - LOSANGO
|
! | 8 | H | NÃO-PROPORCIONAL I - CRUZ
|
! |-----|-----|-----|
! | 9 | I | NÃO-PROPORCIONAL II - LAÇO SIMPLES VERTICAL
|
! | 10 | J | NÃO-PROPORCIONAL II - LAÇO SIMPLES
HORIZONTAL |
! | 11 | K | NÃO-PROPORCIONAL II - LAÇO DUPLO HORIZONTAL
|
! |-----|-----|-----|
! | 12 | L | NÃO-PROPORCIONAL III - L
|
! | 13 | M | NÃO-PROPORCIONAL III - M
|
! | 14 | N | NÃO-PROPORCIONAL III - N
|
! | 15 | O | NÃO-PROPORCIONAL III - O
|
! | 16 | P | NÃO-PROPORCIONAL III - P
|
! | 17 | Q | NÃO-PROPORCIONAL III - Q
|
! |-----|-----|-----|

```

!TRAJECT=1

SELECT CASE (TRAJECT)

!!

! TRAJETORIA A

CASE (1)

WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA A'

```

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/4)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
EINCR(4)=R0                  !GAMA XY
EINCR(5)=R0                  !GAMA YZ
EINCR(6)=R0                  !GAMA XZ

```

AUXINCR=NINCR/4;

DO I=2,AUXINCR+1

```

ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)

```

ENDDO

DO I=AUXINCR+2,3*AUXINCR+1

```

ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)

```

```

        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA B
CASE (2)
    WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA B'

    EINCR(1)=0.00D0           !EPSLON X
    EINCR(2)=-POISS*EINCR(1) !EPSLON Y
    EINCR(3)=-POISS*EINCR(1) !EPSLON Z
    EINCR(4)=GAMY/(NINCR/4)  !GAMA XY
    EINCR(5)=R0              !GAMA YZ
    EINCR(6)=R0              !GAMA XZ

    AUXINCR=NINCR/4;
DO I=2,AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2,3*AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA C
CASE (3)
    WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA C'

    EINCR(1)=EPSX/(NINCR/4)  !EPSLON X
    EINCR(2)=-POISS*EINCR(1) !EPSLON Y
    EINCR(3)=-POISS*EINCR(1) !EPSLON Z
    EINCR(4)=GAMY/(NINCR/4)  !GAMA XY
    EINCR(5)=R0              !GAMA YZ
    EINCR(6)=R0              !GAMA XZ

    AUXINCR=NINCR/4;
DO I=2,AUXINCR+1

```

```

ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2, 3*AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2, 4*AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA D
CASE (4)
  WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA D' ! ELIPSE CENTRADA NA ORIGEM

  EINCR (1) =EPSX/ (NINCR/8)      !EPSLON X
  EINCR (2) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Y
  EINCR (3) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Z
  EINCR (4) =GAMY/ (NINCR/8)     !GAMA XY
  EINCR (5) =R0                  !GAMA YZ
  EINCR (6) =R0                  !GAMA XZ

  ! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DA ELIPSE:

  AUXINCR=NINCR/8;
  DO I=2, AUXINCR+1
    ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
    ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
  ENDDO

  DO I=2, AUXINCR+1
    STRAN (1) =RSTAVA (1) + (ETOT (1, I) -ETOT (1, I-1))
    STRAN (2) =RSTAVA (2) + (ETOT (2, I) -ETOT (2, I-1))
    STRAN (3) =RSTAVA (3) + (ETOT (3, I) -ETOT (3, I-1))
    STRAN (4) =RSTAVA (4) + (ETOT (4, I) -ETOT (4, I-1))
    STRAN (5) =RSTAVA (5) + (ETOT (5, I) -ETOT (5, I-1))
    STRAN (6) =RSTAVA (6) + (ETOT (6, I) -ETOT (6, I-1))
    DGAMA=R0
    LALGVA (1) =.FALSE.
    LALGVA (2) =.FALSE.
    STRES=R0 !ARRAY

  CALL SUDCHA3D (DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS, &
    RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, &
    NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
  IF (FCYCP RINT.EQ.R1) THEN

```

```

        WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
    ENDIF
    !WRITE(*,*) ETOT(1,I)
ENDDO

! CARREGAMENTO RESTANTE

DO I=2,8*AUXINCR+1
    ETOT(1,I)=EPSX*COS(-(I-1)*2*PI/NINCR)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
    ETOT(4,I)=GAMY*SIN(-(I-1)*2*PI/NINCR)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA E
CASE (5)
    WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA E' ! ELIPSE CENTRADA NA ORIGEM COM ROTAÇÃO
DE -45 GRAUS

    THETA=-PI/4

    EINCR(1)=.0021/(NINCR/8)      !EPSLON X
    EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)     !EPSLON Y
    EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)     !EPSLON Z
    EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)      !GAMA XY
    EINCR(5)=R0                  !GAMA YZ
    EINCR(6)=R0                  !GAMA XZ

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DA ELIPSE:

AUXINCR=NINCR/8;
DO I=2,AUXINCR+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

DO I=2,AUXINCR+1
    STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
    STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
    STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
    STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
    STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
    STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
    DGAMA=R0
    LALGVA(1)=.FALSE.
    LALGVA(2)=.FALSE.
    STRES=R0 !ARRAY

    CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS,&
        RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP,&
        NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
    IF (FCYCPRINT.EQ.R1) THEN
        WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
    ENDIF
    !WRITE(*,*) ETOT(1,I)

```

```

ENDDO

! CARREGAMENTO RESTANTE

DO I=2,8*AUXINCR+1
    ETOT(1,I)=EPSX*COS(-(I-1)*2*PI/NINCR+PI/8+PI/32)*COS(THETA)-
GAMY*SIN(-(I-1)*2*PI/NINCR+PI/8+PI/32)*SIN(THETA)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
    ETOT(4,I)=EPSX*COS(-(I-
1)*2*PI/NINCR+PI/8+PI/32)*SIN(THETA)+GAMY*SIN(-(I-
1)*2*PI/NINCR+PI/8+PI/32)*COS(THETA)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA F
CASE (6)
    WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA F' ! ELIPSE C/ INICIO NA ORIGEM

    EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8)      !EPSLON X
    EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
    EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
    EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)     !GAMA XY
    EINCR(5)=R0                 !GAMMA YZ
    EINCR(6)=R0                 !GAMMA XZ

! CARREGAMENTO RESTANTE

DO I=2,NINCR+1
    ETOT(1,I)=EPSX*COS(-(I-1)*2*PI/NINCR+PI)+EPSX
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
    ETOT(4,I)=GAMY*SIN(-(I-1)*2*PI/NINCR+PI)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA G
CASE (7)
    WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA G' ! RETANGULAR

    EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8)     !EPSLON X
    EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
    EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
    EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)     !GAMA XY
    EINCR(5)=R0                 !GAMMA YZ
    EINCR(6)=R0                 !GAMMA XZ

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO RETÂNGULO:

AUXINCR=NINCR/8;
DO I=2,AUXINCR+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)

```

```

ENDDO

DO I=2,AUXINCR+1
  STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
  STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
  STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
  STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
  STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
  STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
  DGAMA=R0
  LALGVA(1)=.FALSE.
  LALGVA(2)=.FALSE.
  STRES=R0 !ARRAY

  CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS, &
    RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, &
    NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
  IF (FCYCPRINT.EQ.R1) THEN
    WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
  ENDIF
  !WRITE(*,*) ETOT(1,I)
ENDDO

! CARREGAMENTO RESTANTE

ETOT(1,1)=ETOT(1,AUXINCR+1)
ETOT(2,1)=ETOT(2,AUXINCR+1)
ETOT(3,1)=ETOT(3,AUXINCR+1)
ETOT(4,1)=ETOT(4,AUXINCR+1)
ETOT(5,1)=ETOT(5,AUXINCR+1)
ETOT(6,1)=ETOT(6,AUXINCR+1)

DO I=2,AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO

DO I=AUXINCR+2,3*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

DO I=3*AUXINCR+2,5*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO

DO I=5*AUXINCR+2,7*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO

```

```

DO I=7*AUXINCR+2, 8*AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO

```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA H

```

```

CASE (8)

```

```

WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA H' ! LOSANGO

```

```

EINCR (1) =EPSX/ (NINCR/4)      !EPSLON X
EINCR (2) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Y
EINCR (3) =-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Z
EINCR (4) =GAMY/ (NINCR/4)     !GAMA XY
EINCR (5) =R0                  !GAMMA YZ
EINCR (6) =R0                  !GAMMA XZ

```

```

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO RETÂNGULO:

```

```

AUXINCR=NINCR/4;

```

```

DO I=2, AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)

```

```

ENDDO

```

```

DO I=2, AUXINCR+1

```

```

  STRAN (1) =RSTAVA (1) + (ETOT (1, I) -ETOT (1, I-1))
  STRAN (2) =RSTAVA (2) + (ETOT (2, I) -ETOT (2, I-1))
  STRAN (3) =RSTAVA (3) + (ETOT (3, I) -ETOT (3, I-1))
  STRAN (4) =RSTAVA (4) + (ETOT (4, I) -ETOT (4, I-1))
  STRAN (5) =RSTAVA (5) + (ETOT (5, I) -ETOT (5, I-1))
  STRAN (6) =RSTAVA (6) + (ETOT (6, I) -ETOT (6, I-1))
  DGAMA=R0
  LALGVA (1) =.FALSE.
  LALGVA (2) =.FALSE.
  STRES=R0 !ARRAY

```

```

CALL SUDCHA3D (DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS, &
  RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, &
  NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)

```

```

IF (FCYCPRI NT.EQ.R1) THEN

```

```

  WRITE (15,1000) STRES (1), ETOT (1, I), STRES (4), ETOT (4, I)

```

```

ENDIF

```

```

!WRITE (*,*) ETOT (1, I)

```

```

ENDDO

```

```

! CARREGAMENTO RESTANTE

```

```

ETOT (1, 1) =ETOT (1, AUXINCR+1)
ETOT (2, 1) =ETOT (2, AUXINCR+1)
ETOT (3, 1) =ETOT (3, AUXINCR+1)
ETOT (4, 1) =ETOT (4, AUXINCR+1)
ETOT (5, 1) =ETOT (5, AUXINCR+1)
ETOT (6, 1) =ETOT (6, AUXINCR+1)

```

```

DO I=2,AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2,2*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
DO I=2*AUXINCR+2,3*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA I
CASE (9)
  WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA I' ! CRUZ

  EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8)      !EPSLON X
  EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
  EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
  EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)     !GAMA XY
  EINCR(5)=R0                 !GAMA YZ
  EINCR(6)=R0                 !GAMA XZ

  AUXINCR=NINCR/8;
DO I=2,AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2,2*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=2*AUXINCR+2,3*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)

```

```

      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2, 5*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=5*AUXINCR+2, 6*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=6*AUXINCR+2, 7*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=7*AUXINCR+2, 8*AUXINCR+1
      ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
      ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
      ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
      ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
      ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
      ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA J
CASE (10)
  WRITE (*, *) 'TRAJETÓRIA J' ! LAÇO SIMPLES VERTICAL

  EINCR (1) =EPSX / (NINCR / 8)      !EPSLON X
  EINCR (2) =-POISS *EINCR (1)      !EPSLON Y
  EINCR (3) =-POISS *EINCR (1)      !EPSLON Z
  EINCR (4) =GAMY / (NINCR / 8)      !GAMA XY
  EINCR (5) =R0                      !GAMA YZ
  EINCR (6) =R0                      !GAMA XZ

  DO I=2, NINCR+1
    ETOT (1, I) =EPSX *COS (-4 * (I-1) *2 *PI /NINCR +PI /2)
    ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -POISS *ETOT (1, I)
    ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -POISS *ETOT (1, I)
    ETOT (4, I) =GAMY *SIN (-2 * (I-1) *2 *PI /NINCR)
    ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
  ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA K

```

```

CASE (11)
WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA K' ! LAÇO SIMPLES HORIZONTAL

```

```

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)     !GAMA XY
EINCR(5)=R0                  !GAMMA YZ
EINCR(6)=R0                  !GAMMA XZ

```

```

DO I=2,NINCR+1
  ETOT(1,I)=EPSX*COS(2*(I-1)*2*PI/NINCR+PI/2)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
  ETOT(4,I)=GAMY*SIN(4*(I-1)*2*PI/NINCR)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)

```

```

ENDDO

```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA L

```

```

CASE (12)
WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA L' ! LAÇO DUPLO HORIZONTAL

```

```

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/8)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/8)     !GAMA XY
EINCR(5)=R0                  !GAMMA YZ
EINCR(6)=R0                  !GAMMA XZ

```

```

DO I=2,NINCR+1
  ETOT(1,I)=EPSX*COS((I-1)*2*PI/NINCR+PI/2)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-POISS*ETOT(1,I)
  ETOT(4,I)=GAMY*SIN(4*(I-1)*2*PI/NINCR)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)

```

```

ENDDO

```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA M

```

```

CASE (13)
WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA M'

```

```

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/2)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/4)     !GAMA XY
EINCR(5)=R0                  !GAMMA YZ
EINCR(6)=R0                  !GAMMA XZ

```

```

AUXINCR=NINCR/4;

```

```

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO RETÂNGULO:

```

```

AUXINCR=NINCR/4;

```

```

DO I=2,AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)

```

```

      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO

DO I=2,AUXINCR+1
      STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
      STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
      STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
      STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
      STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
      STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
      DGAMA=R0
      LALGVA(1)=.FALSE.
      LALGVA(2)=.FALSE.
      STRES=R0 !ARRAY

      CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS,&
        RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP,&
        NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
      IF (FCYCPRINT.EQ.R1) THEN
        WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
      ENDIF
      !WRITE(*,*) ETOT(1,I)
ENDDO

ETOT(1,1)=ETOT(1,AUXINCR+1)
ETOT(2,1)=ETOT(2,AUXINCR+1)
ETOT(3,1)=ETOT(3,AUXINCR+1)
ETOT(4,1)=ETOT(4,AUXINCR+1)
ETOT(5,1)=ETOT(5,AUXINCR+1)
ETOT(6,1)=ETOT(6,AUXINCR+1)

DO I=2,2*AUXINCR+1
      ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
      ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
      ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
      ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO

DO I=2*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
      ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
      ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
      ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
      ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
      ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
      ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA N
CASE (14)
  WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA N'

  EINCR(1)=EPSX/(NINCR/4)      !EPSLON X
  EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
  EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
  EINCR(4)=GAMY/(NINCR/2)     !GAMA XY
  EINCR(5)=R0                 !GAMA YZ
  EINCR(6)=R0                 !GAMA XZ

  AUXINCR=NINCR/4;

```

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO RETÂNGULO:

AUXINCR=NINCR/4;

```
DO I=2,AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
```

ENDDO

```
DO I=2,AUXINCR+1
  STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
  STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
  STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
  STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
  STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
  STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
  DGAMA=R0
  LALGVA(1)=.FALSE.
  LALGVA(2)=.FALSE.
  STRES=R0 !ARRAY
```

```
CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS, &
  RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, &
  NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
```

```
IF (FCYCPRINT.EQ.R1) THEN
  WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
ENDIF
!WRITE(*,*) ETOT(1,I)
```

ENDDO

```
ETOT(1,1)=ETOT(1,AUXINCR+1)
ETOT(2,1)=ETOT(2,AUXINCR+1)
ETOT(3,1)=ETOT(3,AUXINCR+1)
ETOT(4,1)=ETOT(4,AUXINCR+1)
ETOT(5,1)=ETOT(5,AUXINCR+1)
ETOT(6,1)=ETOT(6,AUXINCR+1)
```

```
DO I=2,2*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
```

ENDDO

```
DO I=2*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
```

ENDDO

!!

! TRAJETORIA O

CASE (15)

```
WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA O'
```

```

EINCR(1)=EPSX/(NINCR/2)      !EPSLON X
EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
EINCR(4)=GAMY/(NINCR/2)     !GAMA XY
EINCR(5)=R0                  !GAMA YZ
EINCR(6)=R0                  !GAMA XZ

```

! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO RETÂNGULO:

```
AUXINCR=NINCR/4;
```

```
DO I=2,2*AUXINCR+1
```

```

  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)

```

```
ENDDO
```

```
DO I=2,2*AUXINCR+1
```

```

  STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
  STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
  STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
  STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
  STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
  STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
  DGAMA=R0
  LALGVA(1)=.FALSE.
  LALGVA(2)=.FALSE.
  STRES=R0 !ARRAY

```

```

CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS, &
  RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, &
  NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)

```

```
IF (FCYCPRIENT.EQ.R1) THEN
```

```
  WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
```

```
ENDIF
```

```
!WRITE(*,*) ETOT(1,I)
```

```
ENDDO
```

```
ETOT(1,1)=ETOT(1,2*AUXINCR+1)
```

```
ETOT(2,1)=ETOT(2,2*AUXINCR+1)
```

```
ETOT(3,1)=ETOT(3,2*AUXINCR+1)
```

```
ETOT(4,1)=ETOT(4,2*AUXINCR+1)
```

```
ETOT(5,1)=ETOT(5,2*AUXINCR+1)
```

```
ETOT(6,1)=ETOT(6,2*AUXINCR+1)
```

```
DO I=2,2*AUXINCR+1
```

```

  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)

```

```
ENDDO
```

```
DO I=2*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
```

```

  ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
  ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
  ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
  ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
  ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
  ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)

```

```
ENDDO
```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA P
CASE (16)
  WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA P'

  EINCR(1)=EPSX/(NINCR/4)      !EPSLON X
  EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
  EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
  EINCR(4)=GAMY/(NINCR/4)     !GAMA XY
  EINCR(5)=R0                 !GAMA YZ
  EINCR(6)=R0                 !GAMA XZ

  ! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO CARREGAMENTO

  AUXINCR=NINCR/4;
  DO I=2,AUXINCR+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
  ENDDO

  DO I=2,AUXINCR+1
    STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
    STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
    STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
    STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
    STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
    STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
    DGAMA=R0
    LALGVA(1)=.FALSE.
    LALGVA(2)=.FALSE.
    STRES=R0 !ARRAY

    CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS,&
      RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP,&
      NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
    IF (FCYCPRI.EQ.R1) THEN
      WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
    ENDIF
    !WRITE(*,*) ETOT(1,I)
  ENDDO

  ETOT(1,1)=ETOT(1,AUXINCR+1)
  ETOT(2,1)=ETOT(2,AUXINCR+1)
  ETOT(3,1)=ETOT(3,AUXINCR+1)
  ETOT(4,1)=ETOT(4,AUXINCR+1)
  ETOT(5,1)=ETOT(5,AUXINCR+1)
  ETOT(6,1)=ETOT(6,AUXINCR+1)

  DO I=2,AUXINCR+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
  ENDDO

  DO I=AUXINCR+2,3*AUXINCR+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)

```

```

        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2,4*AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! TRAJETORIA Q
CASE (17)
    WRITE (*,*) 'TRAJETÓRIA Q'

    EINCR(1)=EPSX/(NINCR/4)      !EPSLON X
    EINCR(2)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Y
    EINCR(3)=-POISS*EINCR(1)    !EPSLON Z
    EINCR(4)=GAMY/(NINCR/4)     !GAMA XY
    EINCR(5)=R0                 !GAMA YZ
    EINCR(6)=R0                 !GAMA XZ

    ! CARREGAMENTO DA ORIGEM À EXTREMIDADE DO CARREGAMENTO

    AUXINCR=NINCR/4;
DO I=2,AUXINCR+1
        ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
        ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
        ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
        ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
        ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO

DO I=2,AUXINCR+1
    STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
    STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
    STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
    STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
    STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
    STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
    DGAMA=R0
    LALGVA(1)=.FALSE.
    LALGVA(2)=.FALSE.
    STRES=R0 !ARRAY

    CALL SUDCHA3D(DGAMA, IPROPS, LALGVA, NTYPE, RPROPS, &
        RSTAVA, STRAN, STRES, NRPROP, NIPROP, &
        NRSTAV, NSTRA, NSTRE, NLALGV)
    IF (FCYCPRIENT.EQ.R1) THEN
        WRITE (15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
    ENDIF
    !WRITE(* ,*) ETOT(1,I)
ENDDO

    ETOT(1,1)=ETOT(1,AUXINCR+1)
    ETOT(2,1)=ETOT(2,AUXINCR+1)
    ETOT(3,1)=ETOT(3,AUXINCR+1)

```

```

ETOT (4, 1) =ETOT (4, AUXINCR+1)
ETOT (5, 1) =ETOT (5, AUXINCR+1)
ETOT (6, 1) =ETOT (6, AUXINCR+1)

DO I=2, AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=AUXINCR+2, 3*AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=3*AUXINCR+2, 4*AUXINCR+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO

END SELECT

RETURN
END

```