

Universidade de Brasília

Instituto de Física



TESE DE DOUTORADO

**Teoria Quântica no Espaço de Fase: modelo de
Hénon-Heiles e simetrias de calibre**

José Silva da Cruz Filho

— Agosto de 2016 —

Teoria Quântica no Espaço de Fase: modelo de Hénon-Heiles e simetrias de calibre

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília para obtenção do título de doutor em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana

— Agosto de 2016 —

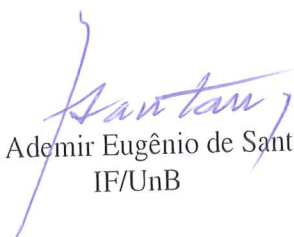
“Teoria Quântica no Espaço de Fase: modelo de Hénon-Heiles e simetrias de calibre.”

Por

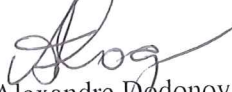
José Silva da Cruz Filho

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Física.

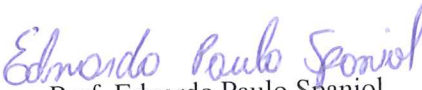
Aprovada por:


Prof. Ademir Eugênio de Santana
IF/UnB


Prof. Sérgio Costa Ulhoa
IF/UnB


Prof. Alexandre Dodonov
IF/UnB


Prof. Ronni Geraldo Gomes Amorim
FGA


Prof. Ednardo Paulo Spaniol
UniCeub

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Albuquerque
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

"Embora ninguém possa voltar atrás
e fazer um novo começo, qualquer um
pode (re)começar agora e fazer um
novo fim."

— Chico Xavier

"A alegria está na luta, na tentativa,
no sofrimento envolvido e não na
vitória propriamente dita."

— Mahatma Gandhi

Agradecimentos

- A Deus pela oportunidade de realizar este trabalho.
- A minha família pelo apoio, amor e carinho.
- Aos meus amigos e companheiros do doutorado, em especial Ana, Sara, Neymar e Helio Borges.
- Aos professores e funcionários do Instituto de Física da Universidade de Brasília, em especial aos professores Dr. Ademir E. Santana e Dr. Ronni Amorin, pois participaram da minha formação acadêmica, contribuindo para este momento.
- Ao professor Dr. Faqir khanna, pelo empenho, dedicação e companheirismo que possibilitou a conclusão deste trabalho e visão para um futuro melhor quando estive na faculdade de Victoria no Canadá.
- Ao John e sua esposa Patricia pelo acolhimento e hospedagem na cidade de Victoria.
- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	6
Resumo	7
Abstract	8
1 Introdução	10
2 Função de Wigner e o produto estrela	14
2.1 Função de Wigner e suas propriedades	14
2.2 Produto de operadores quânticos na representação de Wigner	17
2.3 Evolução temporal e a função de Wigner	18
2.4 Propriedades do Produto de Weyl	19
3 Representações do grupo de Galilei e Poincaré no espaço de fase	24
3.1 Espaço de Hilbert e a Estrutura Simplética	24
3.2 O grupo de Galilei e o espaço de Hilbert Simplético	25
3.3 Espaço de Hilbert Relativístico e estrutura simplética	32
3.4 A álgebra de Poincaré-Lie no espaço de fase	34
3.5 A Equação de Klein-Gordon e o Espaço de Fase	35
3.6 A equação de Dirac e o espaço de fase	36
4 Teoria de calibre no espaço de fase	38
4.1 Teoria de calibre para o campo de Dirac no espaço de fase	38
4.2 Teoria de calibre para o campo de Klein Gordon no espaço de fase	54
4.3 Conservação do Isospin no espaço de fase	62
5 Modelos de Hénon-Heiles e a função de Wigner	74
5.1 Hamiltoniano de Hénon-Heiles quântico no espaço de fase	75
5.2 Teoria de perturbação independente do tempo não degenerada	75
5.3 Correção de 1ª ordem para o modelo de Hénon-Heiles	77
5.4 Correção de 2ª ordem para o modelo de Hénon-Heiles	82
5.5 Hénon Heiles e o átomo de Hidrogênio em um campo magnético forte	88
5.6 Correção de 1ª ordem para a soma do potencial de Hénon-Heiles e o potencial do átomo de Hidrogênio	90

5.7	Correção de 2 ^a ordem para a soma do potencial de Hénon-Heiles e o potencial do átomo de Hidrogênio	93
6	Conclusões e Perspectivas	95

Lista de Figuras

5.1	Funções de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de primeira ordem.	80
5.2	Funções de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de primeira ordem.	81
5.3	Funções de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de segunda ordem.	87
5.4	Funções de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles mais o átomo de hidrogênio com $\varepsilon = 1$, submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de primeira ordem.	92
5.5	Função de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles mais o átomo de hidrogenio com $\varepsilon = 1$, submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de segunda ordem.	93

Resumo

Neste trabalho, utilizamos uma representação da mecânica quântica simplética para estudar teorias de calibre abeliano e não abeliano, bem como soluções da equação de Schrödinger para sistemas caóticos no espaço de fase. No âmbito das teorias de calibre, utilizamos as quasi-amplitudes de probabilidade no espaço de fase na análise de transformações do tipo $\psi(q, p) \rightarrow e^{-i\Lambda(q, p)} \star \psi(q, p)$ no contexto dos campos de Dirac, Klein-Gordon e Isospin. No bojo da equação de Schrödinger no espaço de fase, as quasi-amplitudes de probabilidade foram utilizadas no cálculo da função de Wigner para potenciais do tipo Hénon-Heiles. A análise da negatividade da função de Wigner para sistemas caóticos foi realizada mediante uma teoria de perturbação independente do tempo para o caso não degenerado.

Abstract

In this work, we use a representation of the symplectic quantum mechanics to study abelian and non-abelian gauge theories, and the solutions of the Schrödinger equation for chaotic systems in the phase space. In the framework of gauge theories, we use the quasi-amplitudes of probabilities in the phase space to analyse transformations of type $\psi(q, p) \rightarrow e^{-i\Lambda(q, p)} \star \psi(q, p)$ in the context of the Dirac, Klein-Gordon and Isospin fields. In the core of the Schrödinger equation in phase space, the quasi-amplitudes of probability were used in the calculation of the Wigner function for Hénon-Heiles potential-like. The analysis of the negativity of the Wigner function for chaotic systems was carried out by a time-independent perturbation theory for the nondegenerate case.

Capítulo 1

Introdução

Uma maneira de descrever a mecânica quântica no espaço de fase, Γ , é através da noção de função de distribuição de quase probabilidade proposta por Wigner [1, 2] em 1932, onde a motivação era encontrar termos de correções quânticas para a fórmula de Boltzmann. A função de densidade de quase-probabilidade permite expressar médias na mecânica quântica semelhantes às utilizadas na mecânica clássica, mas respeitando os elementos experimentais definidores dos sistemas quânticos, como as relações de incerteza momentum-posição de Heisenberg. As funções de distribuições de quase-probabilidade se mostram de grande utilidade nos estudos de sistemas quânticos, pois além de fornecer *insights* entre a conexão da mecânica quântica e clássica, às vezes se tornam vantajosas por permitir que lidemos com equações de funções reais e não com operadores.

O método da função de Wigner tem encontrado aplicações, tais como na física da matéria condensada, na qual é amplamente utilizada em modelos de transporte de cargas em nanodispositivos semicondutores [3] ou ainda em estudos das distribuições de fótons na óptica quântica [4–9] e fundamentos da mecânica quântica [10, 11]. Na parte experimental, surgiram alguns experimentos que proporcionam a medida direta da função de Wigner [12–14]. Por permitir a análise estatística de sistemas quânticos, como a noção de emaranhamento quântico, o método de Wigner motivou a proposição de outras funções no espaço de fase para o estudo de sistemas quânticos, como por exemplo, a de Glauber e Sudarshan [15–18] e a função de Husimi [19]. Esta última levou a introdução da chamada equação de Schrödinger no espaço de fase por Torres-Vega e Frederick [20–25], onde o estado é uma função de onda definida em Γ . Entretanto, embora explorando diversos elementos algébricos do espaço de fase, a identificação do significado físico dessa função de onda não é plenamente estabelecido [26].

Apesar de historicamente ter surgido dentro do contexto da mecânica estatística, o formalismo de Wigner propiciou uma grande influência no desenvolvimento da geometria não-comutativa [26]. Algebricamente, no método de Wigner, cada operador, digamos A , definido no Espaço de Hilbert, \mathcal{H} , está associado com uma função, digamos $a_w(q, p)$ no espaço de fase. Ou seja, há uma aplicação $\Omega_w : A \rightarrow a_w(q, p)$, tal que, a álgebra associativa de operadores definidos em \mathcal{H} corresponde a uma álgebra também associativa no espaço de fase, porém não comutativa. Isso é consequência da aplicação Ω_w sobre o produto de operadores, que leva a $\Omega_w : AB \rightarrow a_w(q, p) \star b_w(q, p)$, onde \star é o produto

estrela, ou o produto de Moyal, definido por

$$a_w(q, p) \star b_w(q, p) = a_w(q, p) \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right] b_w(q, p).$$

Neste sentido, o conceito de espaços não-comutativos origina-se com a formulação de Wigner da mecânica quântica. Do ponto de vista da física e da matemática, o produto estrela tem sido explorado no espaço de fase sob diferentes maneiras [27]. Em particular, mostra-se interessante no estudo das representações unitárias e irredutíveis de grupos cinemáticos no espaço de fase [28]. No caso não-relativístico, isto leva a uma equação de Schrödinger no espaço de fase (diferente daquela proposta por Torres-Vega e Frederick), onde a função de onda está associada diretamente com a função de Wigner, portanto com pleno significado físico.

Neste formalismo, chamado de mecânica quântica simplética, os observáveis são representados por operadores do tipo $\hat{a} = a_w \star$, que são utilizados na construção de uma representação das simetrias de Galilei. A função de Wigner é dada por $f_w(q, p) = \psi \star \psi^\dagger$, onde $\psi = \psi(q, p)$ são as funções de onda, soluções da equação de Schrödinger representada no espaço de fase. Devido a esta relação com a função de Wigner, essas funções são chamadas de quasi-amplitudes de probabilidade. Este método permite a dedução da função de Wigner sem uso da equação de Liouville-von Neumann; e este aspecto é explorado para fins práticos como o desenvolvimento de métodos perturbativos no espaço de fase. Por se tratar de uma teoria de representação, a mecânica quântica simplética tem sido generalizada para o caso relativístico, levando às equações de Klein-Gordon e Dirac no espaço de fase [29]. Este método tem sido aplicado com sucesso, por exemplo, ao problema de Landau [30] e ao átomo de Hélio na análise da natureza estatística do estados desses sistemas, através do comportamento da função de Wigner. Estes resultados motivam o uso do formalismo na análise de sistemas quânticos com correspondentes clássicos apresentando caoticidade, como o paradigmático modelo de Hénon-Heiles [31]. De um ponto de vista teórico, o estudo do modelo de Landau, leva ainda a necessidade do desenvolvimento de métodos no espaço de fase para tratar consistentemente as simetrias de calibre (gauge). Estes aspectos são os principais objetos do trabalho proposto aqui.

A fim de considerar o efeito de campos externos, um dos objetivos aqui, é desenvolver de modo sistemático uma análise de simetrias de calibre, descrevendo a dinâmica (interação) na formulação da teoria quântica de campos. Este estudo, preliminarmente desenvolvido, é factível devido ao conceito de quasi-amplitude de probabilidade, que permite a análise de transformações do tipo $\psi(q, p) \rightarrow e^{-i\Lambda(q, p)} \star \psi(q, p)$ [32]. (Vale ressaltar que este tipo de transformação não pode ser implementada diretamente no formalismo original de Wigner, pois a função de Wigner é real.) Aqui consideramos transformações de calibres abeliano e não abelianos.

Outro objetivo é utilizar a equação de Schrödinger simplética [28] para o cálculo da função de Wigner com o Hamiltoniano de Hénon-Heiles quântico. O modelo de Hénon-Heiles [31] foi proposto originalmente para tratar um sistema galáctico axialmente simétrico, e passou a ser considerado um típico modelo de sistema que apresenta comporta-

mento caótico. O caos associado a sistemas integráveis (onde o movimento nestes sistemas está confinado a um toro n -dimensional) está relacionado com a quebra do toro, isto é, alguns toros serão deformados e outros destruídos, quando o sistema se encontra submetido a uma perturbação não linear. Neste sentido o modelo de Hénon-Heiles quântico histórico, i.e.,

$$\widehat{H}(q, p) = \frac{1}{2} (\widehat{P}_x^2 + \widehat{P}_y^2) + \frac{1}{2} (\widehat{Q}_x^2 + \widehat{Q}_y^2) + \widehat{Q}_x^2 \widehat{Q}_y - \frac{1}{3} \widehat{Q}_y^3, \quad (1.1)$$

vem sendo estudado sistematicamente e implementado em diferentes situações, como por exemplo, o movimento do centro dos pacotes de ondas quânticas ao longo de trajetórias clássicas [33]. Esta correspondência, se dá nos primeiros instantes de $\langle q \rangle$ e $\langle p \rangle$. Foi estudado também, densidades quânticas de estados deste Hamiltoniano, onde *quantum beats* são exibidos em baixas frequências descritas como função da energia [34]. Isto possibilita mostrar que as principais características de *quantum beats* podem ser reproduzidas classicamente via teoria de órbitas periódicas. Estados coerentes comprimidos do modelo de Hénon Heiles quântico vêm sendo empregado em estudos de emaranhamento quântico de sistemas caóticos quânticos, via conexão das dinâmicas caóticas e regulares deste sistema [35]. Em química quântica, o sistema de Hénon-Heiles foi aplicado nos estudos entre as correspondências quânticas-clássicas do espectro vibracional de moléculas poli-atômicas [36]. Em física estatística, sua aplicação se dá em estudos de sistemas caóticos dissipativos [37].

Entretanto, o modelo de Hénon-Heiles quântico vem sofrendo modificações para ser implantado em outros tipos de aplicações, como por exemplo, para um sistemas subatômicos como o átomo de hidrogênio em um campo magnético uniforme, o Hamiltoniano do sistema pode ser expresso como uma variante do Hamiltoniano de Hénon-Heiles, dado por

$$\begin{aligned} \widehat{H}(q, p) = & \frac{1}{2} (\widehat{P}_x^2 + \widehat{P}_y^2) + \frac{1}{2} (\widehat{Q}_x^2 + \widehat{Q}_y^2) + \widehat{Q}_x^2 \widehat{Q}_y - \frac{1}{3} \widehat{Q}_y^3 \\ & + \frac{5}{2} \widehat{Q}_x^2 \widehat{Q}_y^2 (\widehat{Q}_x^2 + \widehat{Q}_y^2) - \varepsilon (\widehat{Q}_x^2 + \widehat{Q}_y^2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde ε é uma parâmetro de escala de energia [38]. Além dessas situações, existem problemas de física do estado sólido [39], como no estudo de caos dinâmico em um cristal, que utilizam o modelo tipo Hénon-Heiles. Nosso objetivo aqui é calcular a função de Wigner para dois modelos de Hamiltonianos de Hénon-Heiles dados pelas Eqs. (1.1) e (1.2), utilizando teoria de perturbação no espaço de fase.

Esta tese está estruturada da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos uma revisão do formalismo de Wigner, enfatizando aspectos algébricos do produto-estrela. No capítulo 3 revisamos as teorias quânticas simpléticas, isto é, estudamos as representações do grupo de Galilei e Poincaré num espaço de Hilbert associado ao Γ , as quais possibilitam escrever as equações de Schrödinger, Klein-Gordon e Dirac no espaço de fase. No capítulo 4, desenvolvemos uma análise sistemática das simetrias de calibre abelianos e não-abelianos, descrevendo a dinâmica (interação) na formulação da teoria quântica de campos no espaço

de fase. No capítulo 5, calculamos perturbativamente a quasi-amplitude de probabilidade, e a respectiva função de Wigner, para o potencial de Hénon-Heiles e a soma do potencial de Hénon-Heiles mais o átomo de Hidrogênio. No capítulo 6, estão apresentadas nossas perspectivas e conclusões finais.

Capítulo 2

Função de Wigner e o produto estrela

Com objetivo de proporcionar correções quânticas a mecânica estatística, sem perder a natureza de espaço de fase, Wigner introduziu em 1932 uma função capaz de efetuar um mapeamento entre os operadores hermitianos posição Q e momentum P de um espaço quântico, onde obedecem a relação de comutação $[Q, P] = i\hbar$, com as variáveis posição e momentum de um espaço de fase. Este formalismo vem encontrando grandes aplicabilidades em diversas áreas da física, como por exemplo, física da matéria condensada, na qual é amplamente utilizada em modelos de transporte de cargas em nanodispositivos semicondutores [3], ou ainda em estudos das distribuições de fótons na óptica quântica [4–6] e fundamentos da mecânica quântica [10, 11].

Neste capítulo faremos uma breve revisão da função de Wigner, com ênfase, a suas propriedades, evolução temporal, produtos de dois operadores equivalentes em Wigner e propriedades do produto-estrela baseado nos trabalhos [26–29, 40–46].

2.1 Função de Wigner e suas propriedades

Na mecânica quântica, podemos fazer uma abordagem do ponto de vista estatístico, representando o estado macroscópico deste sistema por meio da matriz densidade

$$\rho = \sum_i \omega_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)|,$$

onde $\{|\psi_i\rangle\}$ descreve os estados microscópicos do ensemble estatístico e $\omega_i = \frac{N_i}{N}$ é o peso estatístico para o estado quântico $|\psi_i\rangle$. O valor esperado de um observável A é dado por

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A).$$

A partir da equação de Schrödinger, obtém-se a equação que governa a evolução temporal da matriz densidade ρ . Esta equação é chamada de equação de Liouville-von Neumann, dada por

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)]. \quad (2.1)$$

Podemos introduzir uma formulação da mecânica quântica no espaço de fase, de acordo com Wigner, a partir ρ . Esta formulação é chamada de método da função de Wigner, tal que a função de Wigner $f_w(q, p)$ é dada por uma transformada de Fourier dos elementos da matriz densidade, ou seja,

$$f_w(q, p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \left| q + \frac{z}{2} \right. \right\rangle, \quad (2.2)$$

ou ainda

$$f_w(q, p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| \rho \left| p + \frac{k}{2} \right. \right\rangle. \quad (2.3)$$

correspondendo ao mapeamento $\Omega : \rho \rightarrow f_w$. Se o sistema quântico for descrito por um estado puro, de modo que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, a função de Wigner pode então ser escrita como

$$\Omega(\rho) = f_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right). \quad (2.4)$$

Apresentaremos na sequência algumas propriedades da função de Winger, que estabelecem seu significado físico (usamos uma dimensão espacial por simplicidade).

Propriedade 1

Densidade de probabilidade para encontrar uma partícula entre as posições q e $q + dq$ é dada por

$$|\psi(q)|^2 = \int f_w(q, p) dp = \langle q | \rho | q \rangle. \quad (2.5)$$

Demonstração:

Para demonstrar esta propriedade, basta introduzir a Eq. (2.2) na Eq. (2.5), e integrar na variável p , isto é

$$\begin{aligned} \int f_w(q, p) dp &= (2\pi\hbar)^{-1} \int dp dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \left| q + \frac{z}{2} \right. \right\rangle \\ &= \int dz \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \left| q + \frac{z}{2} \right. \right\rangle \left((2\pi\hbar)^{-1} \int dp \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \right) \\ &= \int dz \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \left| q + \frac{z}{2} \right. \right\rangle \delta(z), \end{aligned}$$

onde o termo $\delta(z)$ é a função delta de Dirac. Usando a propriedade da função delta, $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$, temos

$$\int f_w(q, p) dp = \langle q | \rho | q \rangle,$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 2

Da mesma forma, podemos obter a densidade de probabilidade para encontrar uma partícula entre os momenta p e $p + dp$, isto é,

$$|\tilde{\psi}(p)|^2 = \int f_w(q, p) dq = \langle p | \rho | p \rangle. \quad (2.6)$$

Demonstração:

O cálculo desta propriedade é similar a anterior, basta introduzir a Eq. (2.3) na Eq. (2.6), e integrar na variável q , isto é

$$\begin{aligned} \int f_w(q, p) dq &= (2\pi\hbar)^{-1} \int dq dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle \\ &= \int dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle \left((2\pi\hbar)^{-1} \int dq \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \right) \\ &= \int dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle \delta(k), \end{aligned}$$

onde o termo $\delta(k)$ é a função delta de Dirac. Usando a propriedade da função delta, $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$, temos

$$\int f_w(q, p) dq = \langle p | \rho | p \rangle,$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 3

A função de Wigner é normalizada, ou seja,

$$\int f_w(q, p) dq dp = \text{Tr} \rho = 1. \quad (2.7)$$

Demonstração:

Para demonstrar esta propriedade, primeiro, vamos introduzir a Eq. (2.2) na Eq. (2.7), e integrar na variável p , assim

$$\begin{aligned} \int f_w(q, p) dq dp &= (2\pi\hbar)^{-1} \int dq dp dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \\ &= \int dq dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \left((2\pi\hbar)^{-1} \int dp \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \right) \\ &= \int dq dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \delta(z), \end{aligned}$$

onde o termo $\delta(z)$ é a função delta de Dirac. Integrando em dz e depois em dq temos

$$\begin{aligned} \int f_w(q, p) dq dp &= \int dq \langle q | \rho | q \rangle \\ &= \text{Tr} \rho \\ &= 1. \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 4

A função de Wigner representa uma *quasi distribuição de probabilidade*, isto é, pode assumir valores positivos e negativos. Se duas funções de Wigner f_α e f_β associadas, respectivamente, aos estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, temos

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = (2\pi\hbar) \int f_\alpha(q, p) f_\beta(q, p) dp dq, \quad (2.8)$$

onde o lado esquerdo pode ser positivo ou nulo. No último caso, os kets são ortogonais, e como consequência, a integral de f_α e f_β é nula. Entretanto, f_α e f_β não são necessariamente nulas; levando a concluir que f_α e f_β podem assumir valores negativos e positivos. Isto justifica a afirmação de que a função de Wigner não representa uma distribuição de probabilidade no espaço de fase, pois qualquer probabilidade deve ser positiva.

A parte negativa da função de Wigner, pode ser interpretada como um indicador sobre a natureza quântica do sistema. Este indicador de negatividade [46] é definido como

$$\begin{aligned}\eta(\psi) &= \int [|f_W \psi(q, p)| - f_W \psi(q, p)] dpdq \\ &= \int |f_W \psi(q, p)| dpdq - 1.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Este indicador representa a integral do dobro do volume da função de Wigner.

Outro fato interessante sobre a função de Wigner, é que podemos encontrar uma função análoga para qualquer operador quântico na representação de Wigner. Para isto, considere um operador $A = A(Q, P)$, tal que Q e P são os operadores de posição e momentum. Utilizando o mapeamento Ω , a correspondente representação de Wigner de A , é uma função $A_w(q, p)$, $\Omega : A \rightarrow A_w(q, p)$ dada por

$$A_w(q, p) = \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \quad (2.10)$$

ou

$$A_w(q, p) = \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| A(Q, P) \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \quad (2.11)$$

Esta definição permite escrever o valor esperado de um observável, em um estado $|\psi\rangle$ como

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \int dq dp A_w(q, p) f_w(q, p) = \text{Tr} \rho A. \quad (2.12)$$

Os operadores na representação de Wigner apresentam outras propriedades, na qual estarão relacionadas abaixo.

$$\begin{aligned}\int dp A_w(q, p) &= (2\pi\hbar) \langle q | A | q \rangle. \\ \int dq A_w(q, p) &= (2\pi\hbar) \langle p | A | p \rangle. \\ \text{Tr} A &= \int A_w(q, p) dq dp.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Se $A = A(Q)$, então $A_w = A(q)$. Se $A = A(P)$, então $A_w = A(p)$. Se $A = \text{constante}$, então $A_w = A$. Na próxima seção iremos estudar a equivalência em Wigner de um produto de operadores quânticos AB e deduzir a equação de evolução para f_w .

2.2 Produto de operadores quânticos na representação de Wigner

A equivalência em Wigner de um produto de operadores quânticos AB é estabelecida a partir das propriedades do mapeamento Ω , que leva a

$$(AB)_w = A_w(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} B_w(q, p),$$

ou

$$(AB)_w = B_w(q, p) e^{\frac{-i\hbar\Lambda}{2}} A_w(q, p),$$

onde Λ é dado por

$$\Lambda = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}.$$

Temos ainda que

$$(AB)_w = A_w \left(q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) B_w(q, p).$$

Define-se a operação chamada produto estrela ou produto de Weyl, induzindo uma geometria não comutativa, na qual mostra a relação entre o formalismo proposto por Wigner e o formalismo de quantização proposto por Weyl como, $\Omega : AB \rightarrow (AB)_w$, tal que

$$(AB)_w = A_w(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} B_w(q, p) = A_w(q, p) \star B_w(q, p).$$

Na seção seguinte, estudaremos a evolução temporal da função de Wigner ou qualquer operador na representação de Wigner.

2.3 Evolução temporal e a função de Wigner

Podemos determinar a evolução temporal da função de Wigner ou qualquer operador na representação de Wigner partindo da equação de Liouville Von-Neumann dada por

$$i\hbar\partial_t\rho = H\rho - \rho H, \quad (2.14)$$

onde ρ é a matriz densidade e H é o Hamiltoniano. Usando a aplicação de Wigner, Ω , nesta equação, temos

$$i\hbar\partial_t\Omega(\rho) = \Omega(H\rho) - \Omega(\rho H). \quad (2.15)$$

Como $\Omega(\rho) = f_w$, e $\Omega(H) = H_w$, temos

$$i\hbar\frac{\partial f_w}{\partial t} = \{H_w, f_w\}_M,$$

onde $\{H_w, f_w\} = H_w \star f_w - f_w \star H_w$ é o parentese de Moyal. O parêntese de Moyal pode ser ainda escrito da seguinte forma,

$$\{a(q, p), b(q, p)\} = \frac{2i}{\hbar} a(q, p) \sin\left[\frac{\hbar}{2} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} \right)\right] b(q, p),$$

onde $e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} - e^{-\frac{i\hbar\Lambda}{2}} = 2i \sin(\frac{\hbar\Lambda}{2})$. Se expandirmos em série de potências o seno da última expressão que define o parêntese de Moyal, obtemos um resultado interessante,

$$\sin\left[\frac{\hbar\Lambda}{2}\right] = \frac{\hbar\Lambda}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right)^5 + \dots$$

No limite (formal) em que $\hbar \rightarrow 0$, a função de Wigner obedece a equação de Liouville clássica, com H_w substituindo a função hamiltoniana, isto é

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} = \frac{\partial H_w}{\partial q} \frac{\partial f_w}{\partial p} - \frac{\partial H_w}{\partial p} \frac{\partial f_w}{\partial q} = \{H_w, f_w\},$$

e compatível com as equações de Hamilton, $\frac{\partial H_w}{\partial q} = -\dot{p}$ e $\frac{\partial H_w}{\partial p} = \dot{q}$. Existem casos que a hamiltoniana coincide com a sua transformada de Weyl, levando a conclusão de que a compatibilidade entre o formalismo de Wigner e o princípio da correspondência. Este fato justifica os estudos de sistemas caóticos semi-clássicos através do formalismo de Wigner.

Na seção seguinte, iremos estudar o produto-estrela e suas propriedades. A partir dele, definiremos operadores que possibilitará construir representações unitárias dos grupos de Poincaré e Galilei no espaço de fase.

2.4 Propriedades do Produto de Weyl

O produto de Weyl ou produto estrela entre duas funções $f(q, p)$ e $g(q, p)$ é definido por

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) \right] g(q, p), \quad (2.16)$$

onde as setas sobre os operadores diferenciais indicam o sentido em que atuam. Apresentaremos na sequência algumas propriedades do produto estrela.

Propriedade 5

Produto estrela em que uma função constante é um dos fatores. Seja $c \in C$. Então

$$c \star f(q, p) = f(q, p) \star c = cf(q, p). \quad (2.17)$$

Demonstração:

Expandindo o produto estrela em série de potências, temos

$$c \star f(q, p) = c \left\{ 1 + \frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) + \frac{1}{2!} \frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)^2 + \dots \right\} f(q, p).$$

Os operadores que atuam em c pelo lado esquerdo se anularão, pois c é uma constante. O mesmo acontece se c estiver do lado direito.

Propriedade 6

O produto estrela é anti-comutativo, isto é

$$f(q, p) \star g(q, p) \neq g(q, p) \star f(q, p).$$

Ou seja, $f(q, p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}g(q, p) \neq g(q, p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}f(q, p)$. Pois na verdade,

$$f(q, p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}g(q, p) = g(q, p)e^{\frac{-i\hbar\Lambda}{2}}f(q, p). \quad (2.18)$$

Demonstração:

Caso 1:

$$q \star p = \left(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p\right)p = qp + \frac{i\hbar}{2}.$$

Caso 2:

$$p \star q = \left(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q\right)p = pq - \frac{i\hbar}{2}.$$

Como queríamos demonstrar.

Propriedade 7

Operador-Estrela: O produto estrela realizado entre duas funções no espaço de fase promove uma delas a categoria de operador,

$$\begin{aligned} f(q, p) \star g(q, p) &= f\left(q + \frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_p\right)g(q, p) \\ &= f(q, p)g\left(q - \frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_q\right). \end{aligned}$$

Demonstração:

Sendo $a = \overrightarrow{\partial}_p$ e $b = \overrightarrow{\partial}_q$

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p)e^{\frac{i\hbar}{2}(a\overleftarrow{\partial}_q - b\overleftarrow{\partial}_p)}g(q, p).$$

Considerando que $e^{a\partial_x}f(x) = f(x + a)$, obtemos

$$f(q, p) \star g(q, p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2}a, p - \frac{i\hbar}{2}b\right)g(q, p).$$

Assim

$$f(q, p) \star g(q, p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_q\right)g(q, p).$$

Portanto, definimos o operador

$$\hat{f} = f(q, p) \star,$$

que será chamado de operador-estrela.

Propriedade 8

A conjugação complexa e o produto estrela: A conjugação complexa troca a ordem do produto estrela,

$$(f \star g)^\dagger = g^\dagger \star f^\dagger. \quad (2.19)$$

Demonstração: Ao invés de usar setas para indicar quais funções podem ser diferenciadas na Eq. (2.16), podemos usar linhas nos operadores diferenciais, com o objetivo de indicar qual função será diferenciada, isto é

$$f(q, p) \star g(q, p) = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})\right]f(q, p)g(q', p')$$

expandindo a exponencial em série de potências

$$\exp \left[\frac{i\hbar}{2} (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'}) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n,$$

e o termo $(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n$ através do binômio de Newton, temos

$$(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q \partial_{p'}]^{n-m} [\partial_p \partial_{q'}]^m.$$

Portanto, o produto estrela pode ser escrito como

$$f(q, p) \star g(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)].$$

Tomando o complexo conjugado da Eq. acima, temos

$$(f(q, p) \star g(q, p))^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n \left\{ (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f^\dagger(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g^\dagger(q, p)] \right\}, \quad (2.20)$$

onde $(-1)^n$ vem da conjugação complexa do termo $(\frac{i\hbar}{2})^n$. Este termo pode ser associado ao binômio, isto é

$$(-1)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n = (-\partial_q \partial_{p'} + \partial_p \partial_{q'})^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_p \partial_{q'}]^{n-m} [\partial_q \partial_{p'}]^m.$$

Aplicando estes operadores em duas funções no espaço de fase, temos

$$(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n f(q, p) g(q', p') = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)],$$

e

$$(-1)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n f(q, p) g(q', p') = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m g(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} f(q, p)].$$

Comparando estas duas últimas equações, obtemos

$$\begin{aligned} (-1)^n & \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)] \\ & = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m g(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} f(q, p)]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Substituindo a Eq. (2.21) na Eq. (2.20) obtemos

$$\begin{aligned} (f(q, p) \star g(q, p))^\dagger & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n \left\{ (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m g^\dagger(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} f^\dagger(q, p)] \right\} \\ & = g^\dagger(q, p) \star f^\dagger(q, p), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 9

O Produto estrela é associativo. Considerando f , g e h como funções no espaço de fase, temos,

$$(f(q, p) \star g(q, p)) \star h(q, p) = f(q, p) \star (g(q, p) \star h(q, p)). \quad (2.22)$$

Demonstração: De acordo com a propriedade 7, temos

$$(f(q, p) \star g(q, p)) \star h(q, p) = \left\{ f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_q\right) g(q, p) \right\} h\left(q - \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q\right),$$

por outro lado,

$$f(q, p) \star (g(q, p) \star h(q, p)) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_q\right) \left\{ g(q, p) h\left(q - \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q\right) \right\}.$$

Os operadores diferenciais aqui compreendidos, são associativos. Neste caso, podemos concluir que o produto-estrela também é associativo.

Propriedade 10

A Integral do produto estrela no espaço de fase apresenta a seguinte propriedade

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \int f(q, p) g(q, p) dq dp; \quad (2.23)$$

isto é, ao realizar a integral entre duas funções no espaço de fase, ocorre uma trivialização entre esse produto estrela e o produto associativo de funções. Para que essa propriedade faça sentido é necessário a convergência da integral. Esta condição se realiza quando ocorre a anulação das funções $f(q, p)$ e $g(q, p)$ no infinito.

Demonstração:

Integrando o produto-estrela entre duas funções no espaço de fase, temos

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \frac{1}{(\pi\hbar)^2} \int dq dq' dq'' dp dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p(q'-q'')+p'(q''-q)+p''(q-q')]}$$

Reorganizando os termos acima, obtemos

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \frac{1}{(\pi\hbar)^2} \int dq dq' dq'' dp dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p'(q''-q)+p''(q-q')]} \left[e^{\frac{-2i}{\hbar}p(q'-q'')} \right].$$

Usando a forma integral da função delta de Dirac,

$$\frac{1}{\pi\hbar} \int dp \left[e^{\frac{-2i}{\hbar}p(q'-q'')} \right] = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \left[e^{\frac{-i}{\hbar}p(q'-q'')} \right] = \delta(q' - q''),$$

temos

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \frac{1}{(\pi\hbar)} \int dq dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p'(q''-q)+p''(q-q')]} \delta(q' - q'').$$

Realizando a integração em dq' , temos

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \frac{1}{\pi \hbar} \int dq dq'' dp' dp'' f(q'', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar} [p'(q''-q) + p''(q-q'')]}.$$

Reorganizando os termos acima, temos

$$\begin{aligned} \int f(q, p) \star g(q, p) dq dp &= \frac{1}{\pi \hbar} \int dq dq'' dp' dp'' f(q'', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar} [q(p''-p') + q''(p'-p'')]} \\ &= \int dq'' dp' dp'' f(q'', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar} [q''(p'-p'')]} \delta(p'' - p'), \end{aligned}$$

e integrando em dp' , encontramos

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \int dq'' dp'' f(q'', p'') g(q'', p'').$$

Mudando as variáveis q'' por q e p'' por p obtemos,

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \int dq dp f(q, p) g(q, p),$$

como queríamos demonstrar.

No capítulo a seguir estudaremos a construção da mecânica quântica no espaço de fase através de uma representação unitária do grupo de Galilei compatível com o formalismo de Wigner, possibilitando empregar a noção de quasi-amplitudes no espaço de fase. Em seguida, estendemos o estudo para representação unitária para o grupo de Poincaré.

Capítulo 3

Representações do grupo de Galilei e Poincaré no espaço de fase

Estudamos até agora o formalismo de Wigner, que associa cada operador, A , definido no espaço de Hilbert, \mathcal{H} , à uma função, $A_w(q, p)$, definida no espaço de fase Γ . O produto estrela pode ainda ser visto como um operador $\hat{A} = A_w \star$ atuando em uma função B_w , resultando em $\hat{A}(B_w) = A_w \star B_w$. Um fato interessante sobre os operadores estrelas, é que estes podem ser utilizados para estudar representações unitárias de grupos cinemáticos. Neste capítulo desenvolveremos estes resultados, para os casos não relativísticos e relativísticos via representações unitárias para o grupo de Galilei e Poincaré respectivamente, no espaço de Hilbert associado ao espaço de fase. A revisão apresentada neste aqui é baseado nos trabalhos nas Refs. [26, 28, 29, 41, 42].

3.1 Espaço de Hilbert e a Estrutura Simplética

Seja \mathbb{M} uma variedade diferencial n -dimensional, onde cada ponto é representado por coordenadas $q = (q^1, \dots, q^n)$. No espaço cotangentes, T^*M , as coordenadas de cada ponto são dadas por $(q, p) = (q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$. O espaço cotangente pode então ser equipado com uma estrutura simplética, dada pela 2-forma

$$\omega = dq \wedge dp,$$

chamada forma simplética. Considerando o operador bi-diferencial em $C^\infty(T^*M)$,

$$\Lambda = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q},$$

em conjunto com a forma simplética ω induz o parêntese de Poisson $\{f, g\}$,

$$\omega(f\Lambda, g\Lambda) = f\Lambda g = \{f, g\},$$

onde $\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} \right)$, funções $f = f(q, p)$ (C^∞) e $g = g(q, p)$ (C^∞).

O espaço T^*M equipado com ω é denominado de espaço de fase Γ . Um campo vetorial em Γ é determinado por

$$f\Lambda = X_f = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}.$$

Para associar o espaço de Hilbert com o espaço de fase Γ , consideraremos o conjunto das funções complexas de quadrado integrável, $\phi(q, p)$ em Γ , tal que

$$\int dpdq \phi(q, p)^\dagger \phi(q, p) < \infty,$$

é denominada forma bilinear real. Neste caso $\phi(q, p) = \langle q, p | \phi \rangle$ é escrito com o auxílio de

$$\int dpdq |q, p\rangle \langle q, p| = 1,$$

sendo $\langle \phi |$ o vetor dual de $|\phi\rangle$. Este espaço de *Hilbert simplético* é denotado por $\mathcal{H}(\Gamma)$.

3.2 O grupo de Galilei e o espaço de Hilbert Simplético

Nesta seção, iremos estudar o grupo de Galilei, considerando $\mathcal{H}(\Gamma)$ como espaço de representação. Para tanto, vamos considerar transformações unitárias $U: \mathcal{H}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma)$ tal que $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ seja invariante. Utilizando o operador Λ , definimos um mapeamento $e^{\frac{i\Lambda}{2}} = \star: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ conhecido como produto estrela, i. é,

$$\hat{f} = f\star = f(q, p) \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right];$$

(aqui a constante de Planck é utilizada para fixar as unidades).

Para construir uma representação da álgebra de Galilei em $\mathcal{H}(\Gamma)$, definimos os seguintes operadores,

$$\hat{P} = p\star = p - \frac{i\hbar}{2} \partial_q, \quad (3.1)$$

$$\hat{Q} = q\star = q + \frac{i\hbar}{2} \partial_p, \quad (3.2)$$

$$\hat{K} = k\star = mq\star - tp\star = m\hat{Q} - t\hat{P}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \epsilon_{ijk} \hat{Q}_j \hat{P}_k \\ &= \epsilon_{ijk} \hat{q}_j \hat{p}_k - \frac{i\hbar}{2} \epsilon_{ijk} q_j \frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{i\hbar}{2} \epsilon_{ijk} p_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\hbar^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial p_k} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{P}^2}{2m} = \frac{1}{2m} (\hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2) \\ &= \frac{1}{2m} \left[\left(p_1 - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \right)^2 + \left(p_2 - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right)^2 + \left(p_3 - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Estes operadores obedecem a álgebra de Galilei-Lie, dada pelas seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}
[\widehat{L}_i, \widehat{K}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k, \\
[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{L}_k, \\
[\widehat{L}_i, \widehat{P}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k, \\
[\widehat{K}_i, \widehat{P}_i] &= i\hbar m\delta_{ij}, \\
[\widehat{K}_j, \widehat{H}] &= i\hbar\widehat{P}_j, \\
[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] &= 0, \\
[\widehat{L}_i, \widehat{H}] &= 0, \\
[\widehat{K}_i, \widehat{K}_j] &= 0, \\
[\widehat{P}_i, \widehat{H}] &= 0,
\end{aligned}$$

onde \widehat{P} , \widehat{K} , \widehat{L} e \widehat{H} representam os geradores de translação, *boost*, rotação e translação temporal, respectivamente [41, 42]. A partir dos *boosts* (também chamadas de transformação pura de Galilei), vemos que

$$\exp(-iv \cdot \widehat{K}/\hbar) \widehat{Q}_j \exp(-iv \cdot \widehat{K}/\hbar) = \widehat{Q}_j + v_j t$$

e

$$\exp(-iv \cdot \widehat{K}/\hbar) \widehat{P}_j \exp(-iv \cdot \widehat{K}/\hbar) = \widehat{P}_j + mv_j.$$

Ou seja, os operadores \widehat{P} e \widehat{Q} podem ser considerados como as observáveis físicas momentum e posição, respectivamente. Além disso, estes operadores satisfazem a relação de Heisenberg,

$$[\widehat{Q}_j, \widehat{P}_l] = i\hbar\delta_{jl}.$$

Os geradores \widehat{L}_i e \widehat{H} são interpretados como os observáveis momentum angular e translação temporal, respectivamente. Assim a evolução temporal de um observável \widehat{A} é dada por:

$$\exp(-it\widehat{H}/\hbar) \widehat{A}(0) \exp(it\widehat{H}/\hbar) = \widehat{A}(t),$$

que resulta em

$$i\hbar \frac{\partial \widehat{A}(t)}{\partial t} = \widehat{A}(t) \widehat{H} - \widehat{H} \widehat{A}(t) = [\widehat{A}(t), \widehat{H}].$$

No caso dos operadores momentum e posição, temos

$$i\hbar \frac{\partial \widehat{P}(t)}{\partial t} = [\widehat{P}(t), \widehat{H}],$$

e

$$i\hbar \frac{\partial \widehat{Q}(t)}{\partial t} = [\widehat{Q}(t), \widehat{H}].$$

A partir de agora, vamos mostrar como construir uma base em $\mathcal{H}(\Gamma)$ com conteúdo de espaço de fase. Podemos reescrever as Eqs. (3.1) e (3.2) da seguinte forma,

$$\widehat{P} = \frac{1}{2} (\overline{P} - i\hbar \partial_q) \quad \text{e} \quad \widehat{Q} = \frac{1}{2} (\overline{Q} + i\hbar \partial_p),$$

para a qual temos introduzido os operadores

$$\overline{P} = 2p1 \quad \text{e} \quad \overline{Q} = 2q1.$$

Submetendo os operadores \overline{P} e \overline{Q} ao *boost*, vemos que se transformam como momentum e posição, i. é,

$$\exp(-iv \cdot \widehat{K}/\hbar) 2\overline{P} \exp(iv \cdot \widehat{K}/\hbar) = 2\overline{P} + mv1,$$

e

$$\exp(-iv \cdot \widehat{K}/\hbar) 2\overline{Q} \exp(iv \cdot \widehat{K}/\hbar) = 2\overline{Q} + vt1.$$

Entretanto, \overline{Q} e \overline{P} não podem ser considerados observáveis posição e momentum, porque $[\overline{Q}, \overline{P}] = 0$; contradizendo a relação de comutação de Heisenberg. Entretanto, esta característica será útil para construir uma base vetorial no espaço de Hilbert associado ao espaço de fase. Assim, definimos um conjunto de autovetores normalizados $|q, p\rangle$, sendo q e p respectivamente um conjunto de autovalores que satisfazem,

$$\overline{Q}|q, p\rangle = q|q, p\rangle \quad \text{e} \quad \overline{P}|q, p\rangle = p|q, p\rangle,$$

com

$$\langle q, p|q', p'\rangle = \delta(q - q') \delta(p - p'),$$

e

$$\int dpdq |q, p\rangle \langle q, p| = 1.$$

Os operadores \overline{Q} e \overline{P} possuem autovalores q e p , os quais são coordenadas de uma espaço de fase Γ . Isto possibilita uma construção da mecânica quântica em termos dos operadores-estrelas e sua álgebra. Vamos considerar a projeção dos kets em $\mathcal{H}(\Gamma)$ como uma representação de um estado de um sistema quântico tal que com os kets $|q, p\rangle$ temos

$$\psi_\beta(q, p, t) = \langle q, p|\beta, t\rangle.$$

Apesar de $\psi(q, p, t)$ ser uma função de onda, sua interpretação não pode se dar da mesma maneira como na mecânica quântica usual. Isto ocorre, por que p e q são autovalores dos operadores \overline{Q} e \overline{P} que são representações das coordenadas da variedade simplética. A natureza física de $\psi(q, p, t)$ ficará estabelecida mais adiante, quando deduzirmos sua relação com a função de Wigner.

Utilizando a relação de completeza,

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | \left(\int dpdq |q, p\rangle \langle q, p| \right) | \alpha \rangle = \int dpdq \psi_\beta^\dagger(q, p) \psi_\alpha(q, p),$$

e a definição de produto estrela temos,

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \int dpdq \psi_\beta^\dagger(q, p) \star \psi_\alpha(q, p).$$

O valor esperado de um observável $\widehat{A}(q, p) = a(q, p) \star$, em um dado estado $\psi(q, p)$ é definido por

$$\begin{aligned} \langle \widehat{A} \rangle &= \int dpdq \psi^\dagger(q, p) \widehat{A} \psi(q, p) \\ &= \int dpdq \psi^\dagger(q, p) [a(q, p) \star \psi(q, p)] \\ &= \int dpdq a(q, p) [\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim $\langle \widehat{A} \rangle$ será real se o espectro de \widehat{A} for real.

Através da álgebra de Lie, obtemos a equação de movimento, resultando na equação de Heisenberg no espaço de fase

$$i\hbar \partial_t \widehat{A}(q, p; t) = [\widehat{A}(q, p; t), \widehat{H}(q, p)].$$

Definindo $\psi(q, p, t)$ como a evolução temporal da função de onda

$$\psi(q, p, t) = \exp\left(\frac{-it\widehat{H}}{\hbar}\right) \psi(q, p, 0),$$

e derivando em relação ao tempo, temos

$$i\hbar \partial_t \psi(q, p, t) = \widehat{H} \psi(q, p, t), \quad (3.7)$$

a representação da equação de Schrödinger no espaço de fase.

A conexão entre a função de Wigner $f_w(q, p)$ e a função de onda $\psi(q, p, t)$ é estabelecida a partir da relação

$$f(q, p) = f_w(q, p) = \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p). \quad (3.8)$$

Para comprovar esta afirmação, iniciamos nossa análise utilizando a Eq. (3.7) e o seu complexo conjugado

$$-i\hbar \partial_t \psi^\dagger(q, p, t) = \psi^\dagger(q, p, t) \widehat{H}, \quad (3.9)$$

Multiplicando pelo lado esquerdo a Eq. (3.7) por $\star \psi^\dagger$, e pelo lado direito a Eq. (3.9) por $\psi \star$, e realizando a subtração de uma pela outra, obtemos

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t (\psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t)) &= \widehat{H} (\psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t)) - (\psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t)) \widehat{H} \\ &= h \star f - f \star h \\ &= \{h, f\}_M, \end{aligned}$$

onde $\partial_t (\psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t)) = \psi(q, p, t) \star \partial_t (\psi^\dagger(q, p, t)) + \partial_t (\psi(q, p, t)) \star \psi^\dagger(q, p, t)$. Este resultado é igual a equação obtida para descrever a dinâmica da função de Wigner.

Note também que

$$\int dqdp f(q, p) = \int dqdp \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p) = \int dqdp |\psi(q, p)|^2 = 1; \quad (3.10)$$

assim, a função de onda $\psi(q, p)$ é interpretada como uma quase amplitude de probabilidade, dando origem à quase-distribuição de probabilidade $f_w(q, p)$.

Outras características que evidenciam que $f = \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)$ é uma função de Wigner, podem ser facilmente estabelecidas. Por exemplo, $f(q, p)$ é uma função real. Neste caso, tomando o complexo conjugado de $f(q, p)$ e utilizando a propriedade dada na Eq. (2.19), temos

$$f^\dagger(q, p) = (\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p))^\dagger = (\psi^\dagger(q, p))^\dagger \star (\psi(q, p))^\dagger = \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p) = f(q, p), \quad (3.11)$$

logo $f^\dagger(q, p) = f(q, p)$.

Através do produto estrela, a densidade de probabilidade no espaço de configuração é dada por

$$\sigma(q) = \int dp [\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)] = \int dp [\psi(q, p) \psi^\dagger(q, p)] = \int dp f(q, p); \quad (3.12)$$

enquanto que no espaço dos momenta é

$$\sigma(p) = \int dq [\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)] = \int dq [\psi(q, p) \psi^\dagger(q, p)] = \int dq f(q, p). \quad (3.13)$$

Isto conclui que a relação $f(q, p) = \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)$ satisfaz as propriedades da função de Wigner.

Podemos observar ainda que a equação de autovalores para o hamiltoniano é

$$H \star \psi(q, p) = E \psi(q, p). \quad (3.14)$$

Aplicando $\star \psi^\dagger(q, p)$ à direita, obtemos

$$H \star f(q, p) = E f(q, p). \quad (3.15)$$

Este resultado além de mostrar que $f(q, p)$ e $\psi(q, p)$ satisfazem a mesma equação de autovalor, em conjunto com os resultados anteriores, estabelece o significado físico das funções de onda no espaço de fase, denominadas quasi-amplitude de probabilidade. Por fim, devemos observar que o valor médio de um observável \hat{A} neste formalismo simplético da mecânica quântica é consistente com as médias da função de Wigner, pois de acordo com a Eq. (3.6), temos

$$\langle \hat{A} \rangle = \int dpdq \psi^\dagger(q, p) \hat{A} \psi(q, p) = \int dpdq a(q, p) f(q, p).$$

Como um exemplo, vamos resolver a equação de Schrödinger no espaço de fase para um oscilador harmônico, caracterizado pelo Hamiltoniano

$$\widehat{H}(q, p) = \frac{\widehat{P}^2}{2m} + m\omega^2 \frac{\widehat{Q}^2}{2}; \quad (3.16)$$

que pode ser escrito como

$$\widehat{H}(q, p) = \frac{m\omega^2}{2} \left(\widehat{Q} + \frac{i}{m\omega} \widehat{P} \right) \left(\widehat{Q} - \frac{i}{m\omega} \widehat{P} \right) - \frac{\hbar\omega}{2} \quad (3.17)$$

onde utilizamos a relação de Heisenberg,

$$[\widehat{Q}, \widehat{P}] = i\hbar. \quad (3.18)$$

Definindo os operadores

$$\widehat{A} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\widehat{Q} + \frac{i}{m\omega} \widehat{P} \right) \quad \text{e} \quad \widehat{A}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\widehat{Q} - \frac{i}{m\omega} \widehat{P} \right) \quad (3.19)$$

com

$$\widehat{A} = a \star \quad \text{e} \quad \widehat{A}^\dagger = a^\dagger \star \quad (3.20)$$

e

$$[\widehat{A}, \widehat{A}^\dagger] = 1, \quad (3.21)$$

a Eq. (3.17) fica

$$\widehat{H}(q, p) = \hbar\omega \left(\widehat{A}^\dagger \widehat{A} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\widehat{A} \widehat{A}^\dagger - \frac{1}{2} \right). \quad (3.22)$$

Considerando a equação de Schrödinger no espaço de fase

$$\widehat{H} \star \psi(q, p) = E\psi(q, p), \quad (3.23)$$

temos

$$\left(\widehat{A}^\dagger \widehat{A} + \frac{1}{2} \right) \psi(q, p) = E\psi(q, p), \quad (3.24)$$

Para a análise dessa equação de autovalores, vamos escrever

$$\widehat{A}^\dagger \widehat{A} \psi_n(q, p) = \lambda_n \psi_n(q, p). \quad (3.25)$$

Os autovalores desta equação são todos positivos. Isto é visto considerando

$$\int dpdq \left(\widehat{A} \psi_n(q, p) \right)^\dagger \star \left(\widehat{A} \psi_n(q, p) \right) = \lambda_n \int dpdq \psi_n(q, p)^\dagger \star \psi_n(q, p) \quad (3.26)$$

o que resulta em

$$\|\widehat{A} \psi_n(q, p)\|^2 = \lambda_n \|\psi_n(q, p)\|, \quad (3.27)$$

confirmando o fato de que λ_n são positivos.

Podemos concluir que a_\star e a^\dagger_\star são respectivamente operadores de destruição e criação, e podemos escrever λ_n tal como, $\lambda_n = n$ e $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Aplicando o operador de destruição no estado do vácuo $\psi_0(q, p)$, temos

$$\hat{A}\psi_0(q, p) = 0, \quad (3.28)$$

que pode ser escrita como

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[q + \frac{i\hbar}{2}\partial p + \frac{i}{m\omega} \left(p - \frac{i\hbar}{2}\partial q \right) \right] \psi_0(q, p) = 0,$$

ou seja

$$\left(q + \frac{\hbar}{2m\omega}\partial q \right) \psi_0(q, p) + i \left(\frac{p}{m\omega} + \frac{\hbar}{2}\partial p \right) \psi_0(q, p) = 0. \quad (3.29)$$

Para encontrar uma solução real para a Eq. (3.29), precisamos resolver uma equação diferencial para a parte real e imaginária, isto é

$$\left(q + \frac{\hbar}{2m\omega}\partial q \right) \psi_0(q, p) = 0, \quad (3.30)$$

e

$$\left(\frac{p}{m\omega} + \frac{\hbar}{2}\partial p \right) \psi_0(q, p) = 0. \quad (3.31)$$

A solução geral destas equações diferenciais é

$$\psi_0(q, p) = \sqrt{\frac{(-1)^n}{\pi\hbar n!}} \exp \left[- \left(\frac{m\omega}{\hbar} q^2 + \frac{p^2}{m\omega\hbar} \right) \right] = \sqrt{\frac{(-1)^n}{\pi\hbar n!}} \exp \left[- \frac{2h(q, p)}{\hbar\omega} \right], \quad (3.32)$$

onde $h(q, p)$ é o hamiltoniano clássico. Para encontrar as outras autofunções, é necessário utilizar o operador de criação, várias vezes sobre a função do estado fundamental (estado de vácuo), $\psi_0(q, p)$. Assim para $n \geq 1$, as autofunções podem ser obtidas pela relação,

$$\psi_n(q, p) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{A}^\dagger)^n \psi_0(q, p). \quad (3.33)$$

Com a definição de \hat{A}^\dagger obtemos

$$\psi_n(q, p) = \frac{2^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{(-1)^n}{\pi\hbar n!}} (a^\dagger)^n \exp \left(- \frac{2h(q, p)}{\hbar\omega} \right). \quad (3.34)$$

A função de Wigner associada a cada $\psi_n(q, p)$ é dada por

$$f_w(q, p) = \psi_n(q, p) \star \psi_n^\dagger(q, p). \quad (3.35)$$

Para $n = 1, 2, 3$, encontramos

$$f_w^1(q, p) \sim \left[1 - \frac{4H(q, p)}{\hbar\omega} \right] \exp \left(- \frac{2H(q, p)}{\hbar\omega} \right), \quad (3.36)$$

$$f_w^2(q, p) \sim \left[2 - 4 \left(\frac{4H(q, p)}{\hbar\omega} \right) + \left(\frac{4H(q, p)}{\hbar\omega} \right)^2 \right] \exp \left(-\frac{2H(q, p)}{\hbar\omega} \right), \quad (3.37)$$

$$f_w^3(q, p) \sim \left[6 - 18 \left(\frac{4H(q, p)}{\hbar\omega} \right) + 9 \left(\frac{4H(q, p)}{\hbar\omega} \right)^2 - \left(\frac{4H(q, p)}{\hbar\omega} \right)^3 \right] \exp \left(-\frac{2H(q, p)}{\hbar\omega} \right). \quad (3.38)$$

Para n arbitrário, temos o resultado bem conhecido [44]

$$f_w^n(q, p) \sim L_n \left(\frac{4H(q, p)}{\hbar\omega} \right) \exp \left(-\frac{2H(q, p)}{\hbar\omega} \right), \quad (3.39)$$

onde L_n são os polinômios de Laguerre.

Um dos nossos propósitos aqui é estudar modelos de Hénon-Heiles quântico, que são modelos de osciladores acoplados, descrevendo por exemplo o átomo de Hidrogênio em campos magnéticos externos. Resultados desses desenvolvimentos estão apresentados no capítulo 5 desta tese. Na próxima seção iremos revisar o formalismo descrito nesta seção para o caso relativístico, mediante representações do grupo de Poincaré, utilizando operadores-estrela. Isto permitirá deduzir as equações de Dirac e Klein-Gordon no espaço de fase.

3.3 Espaço de Hilbert Relativístico e estrutura simplética

Vamos considerar uma variedade analítica \mathbb{M} quadridimensional, onde as coordenadas de cada ponto é dada por q^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. \mathbb{M} representa o espaço de Minkowski, cuja métrica é dada pela diagonal $diag(g) = (-+++)$. As coordenadas de cada ponto no espaço cotangente $\Gamma = T^*\mathbb{M}$ é denotados por q^μ, p_μ . O espaço Γ é munido com uma estrutura simplética de 2-forma,

$$\omega = dq^\mu \wedge dp_\mu,$$

aqui também chamada de forma simplética (neste caso, assumimos a soma sob os elementos de índice repetido). A partir do operador bidiferencial de funções no espaço $C^\infty(T^*\mathbb{M})$

$$\Lambda = \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial}, \quad (3.40)$$

temos o parêntese de Poisson relativístico

$$\omega(f\Lambda, g\Lambda) = f\Lambda g = \{f, g\},$$

onde

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \frac{\partial g}{\partial q_\mu},$$

$f\Lambda$ e $\in g\Lambda$ são dois campos vetoriais dados por $h\Lambda = X_h = -\{h, \}$. Assim o espaço $T^*\mathbb{M}$ munido com essa estrutura simplética é chamado de espaço de fase Γ relativístico.

Para associar o espaço de Hilbert sobre Γ , consideramos $d\eta(q, p) = d^4p d^4q$ como uma medida invariante no fibrado cotangente. Considere $\mathcal{H}(\Gamma)$ como um espaço linear do espaço de funções η -mensuráveis $\psi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ que são quadrado integrável tal que

$$\int_{\Omega} |\psi(z)|^2 d\eta(z) < \infty.$$

Introduzindo um produto interno, $\langle \cdot | \cdot \rangle$, sobre $\mathcal{H}(\Gamma)$, temos

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{\Omega} \psi_1(q, p)^\dagger \psi_2(q, p) d^4p d^4q < \infty,$$

onde utilizamos $\psi(q, p) = \langle q, p | \psi \rangle$, com

$$\int d^4p d^4q |q, p\rangle \langle q, p| = 1.$$

Como no caso não relativístico, a partir de um conjunto de operadores comutadores \bar{Q} e \bar{P} [28], definimos os kets $|q, p\rangle$

$$\bar{Q}|q, p\rangle = q|q, p\rangle \quad \text{e} \quad \bar{P}|q, p\rangle = p|q, p\rangle.$$

O estado de um sistema quântico é dado pelas funções $\psi(q, p)$.

Para estudar o grupo de Poincaré tomando $\mathcal{H}(\Gamma)$ como espaço de representação, primeiro, construímos transformações unitárias $U: \mathcal{H}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma)$ tal que $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ é invariante. Partindo da definição de Λ Eq. (3.40), um mapeamento $e^{\frac{i\Lambda}{2}} = \star: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ conhecido como produto estrela, é definido por

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overrightarrow{\partial} \overleftarrow{\partial} \right) \right] g(q, p), \quad (3.41)$$

onde os geradores de U podem ser introduzidos pelas seguintes relações:

$$\hat{F} = f(q, p) \star = f \left(q^\mu + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p_\mu}, p^\mu - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \right). \quad (3.42)$$

Na próxima seção, analisaremos a álgebra de Poincaré via operadores estrelas tipo $\hat{F} = f(q, p) \star$.

3.4 A álgebra de Poincaré-Lie no espaço de fase

A partir da equação (3.42) em conjunto com as funções q_μ, p_μ e $m = q_\mu p_\nu - p_\mu q_\nu$ (definidas no Γ), obtemos os seguintes operadores estrelas

$$\widehat{P}^\mu = p^\mu \star = p^\mu - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \quad (3.43)$$

$$\widehat{Q}^\mu = q^\mu \star = q^\mu + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p_\mu}, \quad (3.44)$$

e

$$\widehat{M}_{\nu\sigma} = M_{\nu\sigma} \star = \widehat{Q}_\nu \widehat{P}_\sigma - \widehat{P}_\sigma \widehat{Q}_\nu. \quad (3.45)$$

Através destes conjuntos de operadores estrelas, as seguintes relações de comutação são obtidas:

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma] = i (g_{\nu\sigma} \widehat{P}_\mu - g_{\sigma\mu} \widehat{P}_\nu), \quad (3.46)$$

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu] = 0, \quad (3.47)$$

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] = -i (g_{\mu\rho} \widehat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} \widehat{M}_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} \widehat{M}_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} \widehat{M}_{\rho\mu}). \quad (3.48)$$

Ou seja, encontramos uma representação simplética da álgebra de Poincaré via operadores estrelas. O operador $\widehat{M}_{\nu\sigma}$ descreve rotações, enquanto \widehat{P}^μ representa translações em Γ . Podemos construir os invariantes de Casimir, a partir das matrizes de Pauli-Lubanski, $\widehat{W}_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \widehat{M}^{\nu\sigma} \widehat{P}^\mu$ onde $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o símbolo de Levi-Civita. Os invariantes são

$$\widehat{P}^2 = \widehat{P}^\mu \widehat{P}_\mu,$$

$$\widehat{W} = \widehat{W}^\mu \widehat{W}_\mu,$$

onde a condição de camada de massa é representada por \widehat{P}^2 e o spin representado por \widehat{W} . Nas seções seguintes, iremos escrever a equação de Klein-Gordon e Dirac no espaço de fase com suas respectivas lagrangianas através desta representação. A partir deste tipo de Lagrangiana, podemos estudar teorias de calibre no espaço de fase, através do mapeamento $\psi(p, q) \rightarrow e^{i\Lambda} \star \psi(p, q)$. Esta análise está desenvolvida na literatura, mas apenas parcialmente [32]. Um estudo sistemático das transformações de calibre simpléticas é um dos nossos objetivos neste trabalho.

3.5 A Equação de Klein-Gordon e o Espaço de Fase

Podemos considerar, para uma partícula de spin nulo, o estado é descrito pela função de onda ϕ . Considerando o invariante da álgebra de Lie de Poincaré $\widehat{W} = 0$ (spin zero), e interpretando o invariante \widehat{P}^2 como relacionado com a condição de camada de massa da partícula, podemos escrever

$$\widehat{P}^2 \phi(p, q) = \widehat{P}^\mu \widehat{P}_\mu \phi(p, q) = m^2 \phi(p, q). \quad (3.49)$$

Substituindo nesta equação o operador \widehat{P} , temos

$$\left(p^\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \right) \left(p_\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) \phi(p, q) = m^2 \phi(p, q).$$

que leva a

$$\frac{-1}{4} \frac{\partial^2 \phi(p, q)}{\partial q^\mu \partial q_\mu} - i p^\mu \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q^\mu} + (p^\mu p_\mu - m^2) \phi(p, q) = 0.$$

Esta é a equação de Klein-Gordon no espaço de fase. A solução de partícula livre dada por

$$\phi(q_\mu, p_\mu) = \xi(p_\mu) e^{-4ip^\mu q_\mu},$$

onde $\xi(p_\mu)$ é uma função que depende das condições de contorno.

Podemos deduzir a equação de Klein-Gordon a partir da densidade Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{-1}{4} \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q_\mu} \frac{\partial \phi^\dagger(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2} i p^\mu \left(\phi^\dagger(p, q) \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q^\mu} - \phi(p, q) \frac{\partial \phi^\dagger(p, q)}{\partial q^\mu} \right) \\ & - (p^\mu p_\mu - m^2) \phi(p, q) \phi^\dagger(p, q), \end{aligned} \quad (3.50)$$

utilizando as equações de Euler-Lagrange.

Podemos associar a função de Wigner $f_w(q, p)$ com o estado $\phi(q, p, t)$. Para isto, mostraremos que a função definida por

$$f(q, p) = f_w(q, p) = \phi(q, p, t) \star \phi^\dagger(q, p, t), \quad (3.51)$$

é a função de Wigner. Iniciaremos nossa demonstração escrevendo a equação de Klein-Gordon no espaço de fase como

$$p^2 \star \phi(p, q) = m^2 \phi(p, q). \quad (3.52)$$

Multiplicando esta expressão à direita por ϕ^\dagger , obtemos

$$(p^2 \star \phi(p, q)) \star \phi^\dagger(p, q) = m^2 \phi(p, q) \star \phi^\dagger(p, q). \quad (3.53)$$

Voltando à Eq. (3.52), tomando o complexo conjugado e multiplicando à esquerda por ϕ , obtemos

$$\phi(p, q) \star (\phi^\dagger(p, q) \star p^2) = m^2 \phi(p, q) \star \phi^\dagger(p, q). \quad (3.54)$$

Subtraindo as Eqs. (3.53) e (3.54) e utilizando a propriedade associativa do produto estrela, obtemos

$$p^2 \star f_w - f_w \star p^2 = 0, \quad (3.55)$$

onde $f_w(p, q) = \phi(p, q) \star \phi^\dagger(p, q)$. Através dos parênteses de Moyal, e o fato de que $\{g, f\}_M = g(2 \sin \frac{i\Lambda}{2})f$, temos

$$\{p^2, f_w\}_M = p_\mu \frac{\partial f_w}{\partial q_\mu} = 0, \quad (3.56)$$

onde $p^2 \Lambda = -2p \partial_q$, $p^2 \Lambda^2 = 2\partial_q^2$ e $p^2 \Lambda^3 = 0$. A solução da Eq. (3.56) é a função de Wigner relativística.

3.6 A equação de Dirac e o espaço de fase

Nesta seção iremos estudar uma representação para partículas de spin 1/2. Introduzindo $\gamma^\mu \hat{P}_\mu$ onde assumimos que seja invariante, temos

$$\gamma^\mu \hat{P}_\mu \psi(p, q) = \gamma^\mu p_\mu \star \psi(p, q) = m \psi(p, q), \quad (3.57)$$

Usando a Eq. (3.43) encontramos

$$\gamma^\mu \left(p_\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) \psi(p, q) = m \psi(p, q). \quad (3.58)$$

Observe que, neste caso, temos

$$(\gamma^\mu \hat{P}_\mu)(\gamma^\nu \hat{P}_\nu) \psi(p, q) = m^2 \psi(p, q). \quad (3.59)$$

Utilizando novamente a Eq. (3.43), encontramos

$$\gamma^\mu \left(p_\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) \gamma^\nu \left(p_\nu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right) \psi(p, q) = m^2 \psi(p, q). \quad (3.60)$$

Temos ainda

$$(\gamma^\mu \hat{P}_\mu)(\gamma^\nu \hat{P}_\nu) = \hat{P}_\mu \hat{P}_\mu = \hat{P}^2, \quad (3.61)$$

$$(\gamma^\mu \hat{P}_\mu)(\gamma^\nu \hat{P}_\nu) = \gamma^\mu \gamma^\nu \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu. \quad (3.62)$$

Note que $\gamma^\mu \gamma^\nu$ pode ser escrito como a soma de uma parte simétrica e antissimétrica, portanto

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu. \quad (3.63)$$

E para satisfazer a equação de Klein-Gordon, devemos ter

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu}. \quad (3.64)$$

Esta relação é satisfeita pelos geradores da álgebra de Clifford. Podemos também deduzir a equação de Dirac, equação (3.58), a partir da densidade Lagrangiana para este campo, dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{4} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(p, q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(p, q) - \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \right) - \bar{\psi}(p, q) (m - \gamma^\mu p_\mu) \psi(p, q).$$

A partir deste tipo de Lagrangiana, podemos estudar teorias de calibre no espaço de fase, através do mapeamento $\psi(p, q) \rightarrow e^{i\Lambda} \star \psi(p, q)$. No capítulo a seguir, estudaremos as transformações de calibre abeliana e não abeliana usando esta formulação.

Capítulo 4

Teoria de calibre no espaço de fase

Neste capítulo iniciaremos nossos estudos sobre a teoria de calibre abeliano desenvolvido parcialmente no espaço de fase [32]. O resultado deste estudo foi a obtenção de um campo de calibre A^μ com um tensor de campo anti-simétrico escrito como $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu + \{A^\mu, A^\nu\}_M$, onde $\{A^\mu, A^\nu\}_M$ é o parêntese de Moyal. Este resultado é similar ao obtido por Seiberg e Witten [56], proveniente do estudo da dinâmica de cordas descrito por um campo de calibre supersimétrico minimamente acoplado a um espaço não-comutativo. Demonstrou-se um mapeamento de um campo de calibre de Yang-Mills não-comutativo para um campo de calibre de Yang-Mills comutativo (ordinário). Este tipo de mapeamento tornou-se uma poderosa ferramenta para teoria de campo não-comutativa, sendo empregado nos estudos do efeito hall quântico fracionário via teoria não-comutativa de Chern Simon [57], soluções das equações de Einstein não-comutativas [58]. A seguir, iniciaremos nossos estudos, construindo uma teoria de calibre para o campo de Dirac no espaço de fase.

4.1 Teoria de calibre para o campo de Dirac no espaço de fase

A densidade lagrangiana Eq. (3.65) que descreve a equação de Dirac no espaço de fase, em uma forma mais compacta é escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu (p_\mu \star \psi(p, q)) + (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \\ & - m \bar{\psi}(p, q) \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu (p_\mu \star \psi(p, q)) + (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \gamma^\mu \psi(p, q) \right] - m \bar{\psi}(p, q) \psi(p, q) \\ & + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \left(p_\mu \psi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \right) + \left(\bar{\psi}(p, q) \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial} + \bar{\psi}(p, q) p_\mu \right) \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \\
&\quad - m \bar{\psi}(p, q) \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q) \\
&= -\frac{1}{2} p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q) + \frac{i}{4} \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} - \frac{1}{2} p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q) \\
&\quad - \frac{i}{4} \frac{\partial \bar{\psi}(p, q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(p, q) - m \bar{\psi}(p, q) \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q) \\
&= -\frac{i}{4} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(p, q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(p, q) - \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \right) - \bar{\psi}(p, q) (m - p_\mu \gamma^\mu) \psi(p, q).
\end{aligned}$$

Nosso objetivo é analisar a invariância da Eq. (4.1) sob as transformações de calibre global e local. Primeiramente, iremos construir nossa análise de uma forma mais geral, isto é, sem definir qual tipo de calibre o sistema estará submetido. Assim, usando a propriedade do produto estrela

$$\int f \star g dq dp = \int f g dq dp, \quad (4.2)$$

a Eq. (4.1) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
S &= \int \mathcal{L} d^4 p d^4 q \\
&= \int \left[-\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star (p_\mu \star \psi(p, q)) + (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \star \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \right. \\
&\quad \left. - m \bar{\psi}(p, q) \star \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star \psi(p, q) \right] d^4 p d^4 q, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

onde introduzimos o produto estrela entre os campos. Definindo as transformações de calibre na forma geral do seguinte modo, temos

$$\psi(q, p) \rightarrow e^{-i\Lambda} \star \psi(q, p), \quad (4.4)$$

$$\bar{\psi}(p, q) \rightarrow \bar{\psi}(p, q) \star e^{i\Lambda}. \quad (4.5)$$

Na forma infinitesimal a Eq. (4.4) é dada por

$$\begin{aligned}
\psi(q, p) \rightarrow \psi'(q, p) &= e^{-i\Lambda} \star \psi(q, p) \\
&= (1 - i\Lambda) \star \psi(q, p) \\
&= 1 \star \psi(q, p) - i\Lambda \star \psi(q, p) \\
&= \psi(q, p) - i\Lambda \star \psi(q, p) \\
\delta\psi(q, p) &= -i\Lambda \star \psi(q, p),
\end{aligned}$$

onde $\psi'(q, p) - \psi(q, p) = \delta\psi(q, p)$. Portanto, as transformações de calibre Eqs. (4.4) e (4.5) na forma infinitesimal são escritas da seguinte maneira

$$\left. \begin{aligned}
\delta\psi(q, p) &= -i\Lambda \star \psi(q, p) \\
\delta\bar{\psi}(q, p) &= i\bar{\psi}(p, q) \star \Lambda.
\end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Aplicando as transformações Eqs. (4.6) na Eq. (4.3), obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\delta\left[\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star(p_\mu\star\psi(p,q)) + (\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu)\star\gamma^\mu\psi(p,q)\right] \\
&\quad -m\delta\left(\bar{\psi}(p,q)\star\psi(p,q)\right) + 2p_\mu\delta\left(\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star\psi(p,q)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\delta\left[\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star(p_\mu\star\psi(p,q)) + (\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu)\star\gamma^\mu\psi(p,q)\right] \\
&\quad -m\delta\left(\bar{\psi}(p,q)\right)\star\psi(p,q) - m\bar{\psi}(p,q)\star\delta\left(\psi(p,q)\right) \\
&\quad + 2p_\mu\delta\left(\bar{\psi}(p,q)\right)\gamma^\mu\star\psi(p,q) + 2p_\mu\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star\delta\left(\psi(p,q)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\delta\left[\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star(p_\mu\star\psi(p,q)) + (\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu)\star\gamma^\mu\psi(p,q)\right] \\
&\quad -m\left(i\bar{\psi}(p,q)\star\Lambda\right)\star\psi(p,q) - m\bar{\psi}(p,q)\star(-i\Lambda\star\psi(p,q)) \\
&\quad + 2p_\mu\left(i\bar{\psi}(p,q)\star\Lambda\right)\gamma^\mu\star\psi(p,q) + 2p_\mu\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star(-i\Lambda\star\psi(p,q)) \\
&= -\frac{1}{2}\delta\left[\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star(p_\mu\star\psi(p,q)) + (\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu)\star\gamma^\mu\psi(p,q)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\delta\left[\bar{\psi}(p,q)\right]\gamma^\mu\star(p_\mu\star\psi(p,q)) - \frac{1}{2}\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star\delta\left[(p_\mu\star\psi(p,q))\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\delta\left[(\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu)\right]\star\gamma^\mu\psi(p,q) - \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu\right)\star\gamma^\mu\delta\left[\psi(p,q)\right] \\
&= -\frac{1}{2}i\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star\Lambda\star(p_\mu\star\psi(p,q)) - \frac{1}{2}\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star\delta\left[(p_\mu\star\psi(p,q))\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\delta\left[(\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu)\right]\star\gamma^\mu\psi(p,q) - \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu\right)\star\gamma^\mu\left[-i\Lambda\star\psi(p,q)\right] \\
&= -\frac{i}{2}\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star\Lambda\star(p_\mu\star\psi(p,q)) - \frac{1}{2}\bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star\delta\left[(p_\mu\star\psi(p,q))\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\delta\left[(\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu)\right]\star\gamma^\mu\psi(p,q) + \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu\right)\gamma^\mu\star\Lambda\star\psi(p,q). \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Para facilitar uma melhor visualização dos cálculos para a Eq. (4.7), iremos efetuar o cálculo dos termos da Lagrangiana $\delta(p^\mu\star\psi(p,q))$ e $\delta[(\bar{\psi}(p,q)\star p_\mu)]$ separados. Assim, para o termo $\delta(p^\mu\star\psi(p,q))$ temos

$$\begin{aligned}
T_1 &= \bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star\delta\left[(p_\mu\star\psi(p,q))\right] \\
&= \bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star\left(p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\right)(-i\Lambda\star\psi(p,q)) \\
&= \bar{\psi}(p,q)\gamma^\mu\star\left(-ip_\mu(\Lambda\star\psi(p,q)) + \frac{i^2}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}\star\psi(p,q) + \frac{i^2}{2}\Lambda\star\frac{\partial\psi(p,q)}{\partial q^\mu}\right).
\end{aligned}$$

Usando a identidade [59]

$$\begin{aligned}
p_k(f\star g) &= f\star(p_k g) - \frac{i}{2}(\partial_{qk}f)\star g \\
&= (p_k f)\star g + \frac{i}{2}f\star(\partial_{qk}g), \quad (4.8)
\end{aligned}$$

o termo $\delta(p^\mu \star \psi(p, q))$ é dado por

$$\begin{aligned}
T_1 &= \bar{\psi}(p, q)\gamma^\mu \star \left(-i\Lambda \star (p_\mu \psi(p, q)) + \frac{i^2}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) + \frac{i^2}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) + \frac{i^2}{2} \Lambda \star \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \right) \\
&= -i\bar{\psi}(p, q)\gamma^\mu \star \left(\Lambda \star \left(p_\mu \psi(p, q) - \frac{i}{2} \star \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \right) \right) - \bar{\psi}(p, q)\gamma^\mu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) \\
&= -i\bar{\psi}(p, q)\gamma^\mu \star \Lambda \star (p_\mu \star \psi(p, q)) - \bar{\psi}(p, q)\gamma^\mu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Empregando o mesmo procedimento realizado para a Eq. (4.9), o termo $\delta(\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu)$ se transforma como

$$\begin{aligned}
T_2 &= \delta \left[(\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \right] \star \gamma^\mu \psi(p, q) \\
&= (i\bar{\psi}(p, q) \star \Lambda) \left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q^\mu}} + p_\mu \right) \star \gamma^\mu \psi(p, q) \\
&= \left(\frac{i^2}{2} \frac{\partial \bar{\psi}(p, q)}{\partial q^\mu} \star \Lambda + \frac{i^2}{2} \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} + i(\bar{\psi}(p, q) \star \Lambda)p_\mu \right) \star \gamma^\mu \psi(p, q) \\
&= \left(\frac{i^2}{2} \frac{\partial \bar{\psi}(p, q)}{\partial q^\mu} \star \Lambda + \frac{i^2}{2} \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} + (ip_\mu \bar{\psi}(p, q)) \star \Lambda + \frac{i^2}{2} \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \right) \star \gamma^\mu \psi(p, q) \\
&= \left(\frac{i}{2} \frac{\partial \bar{\psi}(p, q)}{\partial q^\mu} + p_\mu \bar{\psi}(p, q) \right) \star \Lambda \star \gamma^\mu \psi(p, q) i - \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \gamma^\mu \psi(p, q) \\
&= (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \star \Lambda \star \gamma^\mu \psi(p, q) i - \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \gamma^\mu \psi(p, q). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. (4.9) e (4.10) na Eq. (4.7), temos

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} &= -\frac{i}{2} \bar{\psi}(p, q)\gamma^\mu \star \Lambda \star (p_\mu \star \psi(p, q)) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(p, q)\gamma^\mu \star \Lambda \star (p_\mu \star \psi(p, q)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \bar{\psi}(p, q)\gamma^\mu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) - \frac{i}{2} (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \gamma^\mu \star \Lambda \star \psi(p, q) \\
&\quad + \frac{1}{2} \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \gamma^\mu \psi(p, q) + \frac{i}{2} (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \gamma^\mu \star \Lambda \star \psi(p, q) \\
&= \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \gamma^\mu \psi(p, q). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Portanto a Eq. (4.11) representa uma transformação de calibre em uma forma mais geral para a lagrangiana Eq. (4.3). Caso a transformação de calibre seja considerada global, onde Λ é uma constante, a lagrangiana se torna invariante, isto é, ($\delta \mathcal{L} = 0$). Entretanto, caso Λ passe a ser uma função do espaço-tempo, isto é, $\Lambda = \Lambda(q, p)$, temos uma transformação de calibre local ou de segunda espécie. Um termo extra $\frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q)$ é gerado na equação acima, tornando a lagrangiana não invariante. Para restaurar tal invariância, introduzimos um novo campo, um quadrivetor A_μ conectado diretamente com $\psi(q, p)$.

Iniciaremos nossa construção a partir das Eqs. (4.9) e (4.10). Neste caso, a Eq. (4.9) é reescrita da seguinte forma $\delta(p_\mu \star \psi(p, q) + \mathcal{L}_a)$, onde o termo extra \mathcal{L}_a é definido como

$$\mathcal{L}_a = A_\mu \star \psi(p, q). \quad (4.12)$$

Desenvolvendo o cálculo para a transformação de calibre local, temos

$$\begin{aligned} \delta(p_\mu \star \psi(p, q) + \mathcal{L}_a) &= p_\mu \star (\delta\psi(p, q)) + (\delta\mathcal{L}_a) \\ &= -i\Lambda \star (p_\mu \star \psi(p, q)) - \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) + (\delta A_\mu) \star \psi(p, q) \\ &\quad + A_\mu \star (\delta\psi(p, q)) \\ &= -i\Lambda \star (p_\mu \star \psi(p, q)) - \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) + (\delta A_\mu) \star \psi(p, q) \\ &\quad + A_\mu \star (-i\Lambda \star \psi(p, q)) \\ &= -i\Lambda \star (p_\mu \star \psi(p, q)) - \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) + (\delta A_\mu) \star \psi(p, q) \\ &\quad - iA_\mu \star \Lambda \star \psi(p, q). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Notamos que, a Eq. (4.13) possui termos extras. Dois termos são fornecidos pela lagrangiana \mathcal{L}_a , onde (δA_μ) ainda é desconhecida, e o outro termo $\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}$ é provido pelo termo $(p_\mu \star \psi(p, q))$. Para cancelar estes termos extras, exigimos que (δA_μ) se transforme como

$$\begin{aligned} A_\mu \rightarrow A'_\mu &= A_\mu + iA_\mu \star \Lambda - i\Lambda \star A_\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \\ \delta A_\mu &= iA_\mu \star \Lambda - i\Lambda \star A_\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \\ &= i \{A_\mu, \Lambda\}_M - \frac{i}{e} \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde e representa a carga da partícula envolvida, e $\{a, b\}_M = a \star b - b \star a$ é o parêntese de Moyal.

Portanto, para o termo $(p_\mu \star \psi(p, q) + \mathcal{L}_a)$, definimos o operador

$$D_\mu \star = p_\mu \star + ieA_\mu \star, \quad (4.15)$$

que acopla diretamente ao campo $\psi(q, p)$. Aplicando uma transformação de calibre de segunda espécie em $D_\mu \star \psi(q, p)$, temos

$$\delta(D_\mu \star \psi(p, q)) = \delta(p_\mu \star \psi(p, q) + ieA_\mu \star \psi(p, q))$$

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu \star \psi(p, q)) &= -i\Lambda \star (p_\mu \star \psi(p, q)) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) \\
&\quad + ie \left(iA_\mu \star \Lambda - i\Lambda \star A_\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \right) \star \psi(p, q) - i^2 e A_\mu \star \Lambda \star \psi(p, q) \\
&= -i\Lambda \star (p_\mu \star \psi(p, q)) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) + i^2 e A_\mu \star \Lambda \star \psi(p, q) \\
&\quad - i^2 e \Lambda \star A_\mu \star \psi(p, q) - i^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) - i^2 e A_\mu \star \Lambda \star \psi(p, q) \\
&= -i\Lambda \star (p_\mu \star \psi(p, q)) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) - i^2 e \Lambda \star A_\mu \star \psi(p, q) \\
&\quad + \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) \\
&= -i\Lambda \star (p_\mu \star \psi(p, q) + ie A_\mu \star \psi(p, q)) \\
&= -i\Lambda \star (D_\mu \star \psi(p, q)).
\end{aligned}$$

Portanto, o operador Eq. (4.15) obedece a regra de transformação covariante ¹. Similarmente, para a Eq. (4.10), temos $\delta(\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu + \mathcal{L}_b)$ onde o termo extra \mathcal{L}_b é definido como

$$\mathcal{L}_b = \bar{\psi}(p, q) \star A_\mu. \quad (4.16)$$

Sob uma transformação de calibre local, tem-se

$$\begin{aligned}
\delta(\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu + \mathcal{L}_b) &= (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \star \Lambda i - \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} + \delta(\bar{\psi}(p, q) \star A_\mu) \\
&= (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \star \Lambda i - \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \\
&\quad + (\delta \bar{\psi}(p, q)) \star A_\mu + \bar{\psi}(p, q) \star (\delta A_\mu) \\
&= (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \star \Lambda i - \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \\
&\quad + (i \bar{\psi}(p, q) \star \Lambda) \star A_\mu + \bar{\psi}(p, q) \star (\delta A_\mu).
\end{aligned}$$

Utilizando a definição de (δA_μ) na Eq. (4.14), definimos o seguinte operador

$$\star D_\mu = \star p_\mu + \star ie A_\mu. \quad (4.17)$$

Portanto, $\bar{\psi}(p, q) \star D_\mu$ sob uma transformação de calibre de segunda espécie é dado por

¹transformação covariante - Independente da escolha do novo sistema de coordenadas, o sistema preserva suas estruturas quando é aplicado uma transformação.

$$\begin{aligned}
\delta \left(\bar{\psi}(p, q) \star D_\mu \right) &= \delta \left(\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu + ie\bar{\psi}(p, q) \star A_\mu \right) \\
&= \left(\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu \right) \star \Lambda i - \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} + i^2 e \bar{\psi}(p, q) \star \Lambda \star A_\mu \\
&\quad + ie \bar{\psi}(p, q) \star \left(i A_\mu \star \Lambda - i \Lambda \star A_\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \right) \\
&= \left(\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu \right) \star \Lambda i - \bar{\psi}(p, q) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} + i^2 e \bar{\psi}(p, q) \star \Lambda \star A_\mu \\
&\quad + i^2 e \bar{\psi}(p, q) \star (A_\mu \star \Lambda) - i^2 e \bar{\psi}(p, q) \star (\Lambda \star A_\mu) - i^2 \bar{\psi}(p, q) \star \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \right) \\
&= \left(\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu \right) \star \Lambda i + i^2 e \bar{\psi}(p, q) \star (A_\mu \star \Lambda) \\
&= \left(\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu + ie \bar{\psi}(p, q) \star A_\mu \right) \star \Lambda i \\
&= \left(\bar{\psi}(p, q) \star D_\mu \right) \star \Lambda i,
\end{aligned}$$

satisfazendo a regra para uma transformação covariante. Reescrevendo a lagrangiana Eq. (4.3) em termos dos operadores $D_\mu \star$ and $\star D_\mu$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star D_\mu \star \psi(p, q) + \left(\bar{\psi}(p, q) \star D_\mu \right) \star \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \\
&\quad - m \bar{\psi}(p, q) \star \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star \psi(p, q).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Submetendo a nova lagrangiana sob uma transformação de calibre local, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \delta \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star D_\mu \star \psi(p, q) + \left(\bar{\psi}(p, q) \star D_\mu \right) \star \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \\
&\quad - m \delta \left(\bar{\psi}(p, q) \star \psi(p, q) \right) + 2p_\mu \delta \left(\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star \psi(p, q) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left[\delta \left(\bar{\psi}(p, q) \right) \gamma^\mu \star (D_\mu \star \psi(p, q)) + \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star \delta (D_\mu \star \psi(p, q)) \right. \\
&\quad \left. + \delta \left(\bar{\psi}(p, q) \star D_\mu \right) \star \gamma^\mu \psi(p, q) + \left(\bar{\psi}(p, q) \star D_\mu \right) \star \gamma^\mu \delta (\psi(p, q)) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left[i \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star \Lambda \star (D_\mu \star \psi(p, q)) - \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star \Lambda \star (D_\mu \star \psi(p, q)) \right. \\
&\quad \left. + \left(\bar{\psi}(p, q) \star D_\mu \right) \star \Lambda \star \gamma^\mu \psi(p, q) i - \left(\bar{\psi}(p, q) \star D_\mu \right) \star \Lambda \star \gamma^\mu \psi(p, q) i \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto a lagrangiana descrita pela Eq. (4.18) é invariante quando submetida a uma transformação de calibre local. Entretanto, o campo A_μ apresenta um problema. Sua introdução deu origem a uma interação eletromagnética. Para eliminar esta interação,

iremos introduzir um outro termo na lagrangiana, o campo eletromagnético livre. Primeiro passo para isto, é encontrar o tensor eletromagnético no espaço de fase. Iniciando este processo através da relação $[D_\mu \star, D_\nu \star]$, temos

$$\begin{aligned} [D_\mu \star, D_\nu \star] \psi(q, p) &= [p_\mu \star + ieA_\mu \star, p_\nu \star + ieA_\nu \star] \psi(q, p) \\ &= [p_\mu \star, p_\nu \star] \psi(q, p) + [p_\mu \star, ieA_\nu \star] \psi(q, p) \\ &\quad + [ieA_\mu \star, p_\nu \star] \psi(q, p) + [ieA_\mu \star, ieA_\nu \star] \psi(q, p). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para facilitar um melhor entendimento dos cálculos acima, iremos calcular cada termo separado. Assim para o primeiro termo

$$\begin{aligned} T_3 &= [p_\mu \star, p_\nu \star] \psi(q, p) \\ &= \left[p_\mu - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu}, p_\nu - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right] \psi(q, p) \\ &= \left([p_\mu, p_\nu] - \left[p_\mu, \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right] - \left[\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu}, p_\nu \right] + \left[\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu}, \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right] \right) \psi(q, p) \\ &= p_\mu p_\nu \psi(q, p) - p_\nu p_\mu \psi(q, p) - \frac{i\hbar}{2} p_\mu \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\nu} + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\nu} (p_\mu \psi(q, p)) \\ &\quad - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} (p_\nu \psi(q, p)) + \frac{i\hbar}{2} p_\nu \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\mu} + \frac{i^2 \hbar}{4} \frac{\partial^2 \psi(q, p)}{\partial q^\mu \partial q^\nu} - \frac{i^2 \hbar}{4} \frac{\partial^2 \psi(q, p)}{\partial q^\nu \partial q^\mu} \\ &= p_\mu p_\nu \psi(q, p) - p_\mu p_\nu \psi(q, p) - \frac{i\hbar}{2} p_\mu \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\nu} + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial p_\mu}{\partial q^\nu} \psi(q, p) \\ &\quad + \frac{i\hbar}{2} p_\mu \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\nu} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial p_\nu}{\partial q^\mu} (\psi(q, p)) - \frac{i\hbar}{2} p_\nu \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\mu} + \frac{i\hbar}{2} p_\nu \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\mu} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Na Eq. (4.19), o segundo termo é definido como

$$\begin{aligned} T_4 &= [p_\mu \star, ieA_\nu \star] \psi(q, p) \\ &= \left[p_\mu - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu}, ieA_\nu \star \right] \psi(q, p) \\ &= \left([p_\mu, ieA_\nu \star] - \left[\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu}, ieA_\nu \star \right] \right) \psi(q, p) \\ &= iep_\mu A_\nu \star \psi(q, p) - ieA_\nu \star (p_\mu \psi(q, p)) - \frac{i^2 e \hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} (A_\nu \star \psi(q, p)) + \frac{i^2 e \hbar}{2} A_\nu \star \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\mu} \\ &= iep_\mu A_\nu \star \psi(q, p) - ieA_\nu \star (p_\mu \psi(q, p)) - \frac{i^2 e \hbar}{2} \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} \star \psi(q, p) - \frac{i^2 e \hbar}{2} A_\nu \star \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\mu} \\ &\quad + \frac{i^2 e \hbar}{2} A_\nu \star \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\mu} \\ &= iep_\mu A_\nu \star \psi(q, p) - ieA_\nu \star (p_\mu \psi(q, p)) - \frac{i^2 e \hbar}{2} \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} \star \psi(q, p). \end{aligned}$$

Usando a identidade Eq.(4.8), o segundo termo de T_4 é dado por

$$A_\nu \star (p_\mu \psi(q, p)) = p_\mu (A_\nu \star \psi(p, q)) + \frac{i\hbar \partial A_\nu}{2 \partial q^\mu} \star \psi(p, q).$$

Portanto, o termo T_4 se transforma como

$$\begin{aligned} T_4 &= iep_\mu A_\nu \star \psi(q, p) - iep_\mu A_\nu \star \psi(q, p) - \frac{i^2 e \hbar \partial A_\nu}{2 \partial q^\mu} \star \psi(q, p) - \frac{i^2 e \hbar \partial A_\nu}{2 \partial q^\mu} \star \psi(q, p) \\ &= -i^2 e \hbar \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} \star \psi(q, p). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Em analogia a Eq. (4.20), o terceiro termo da Eq. (4.19) é escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} T_5 &= [ieA_\mu \star, p_\nu \star] \psi(q, p) \\ &= i^2 e \hbar \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} \star \psi(q, p). \end{aligned}$$

Já o último termo da Eq. (4.19) torna-se

$$\begin{aligned} T_6 &= [ieA_\mu \star, ieA_\nu \star] \psi(q, p) \\ &= i^2 e^2 A_\mu \star A_\nu \star \psi(q, p) - i^2 A_\nu \star A_\mu \star \psi(q, p) \\ &= i^2 e^2 \{A_\mu, A_\nu\}_M \star \psi(q, p). \end{aligned}$$

Portanto, a relação $[D_\mu \star, D_\nu \star]$ é escrita da seguinte maneira

$$[D_\mu \star, D_\nu \star] \psi(q, p) = \hbar e \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} \right) \star \psi(q, p) + i^2 e^2 \{A_\mu, A_\nu\}_M \star \psi(q, p)$$

Logo, podemos definir o tensor eletromagnético como

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} + e \{A_\mu, A_\nu\}_M, \quad (4.21)$$

onde $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ é invariante em si. Para demonstrar a invariância de $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, temos:

$$\delta \mathcal{F}_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} + e \{A_\mu, A_\nu\}_M \right).$$

Desenvolvendo estes cálculos para cada termo, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial q^\nu} &= \frac{\partial}{\partial q^\nu} \left(iA_\mu \star \Lambda - i\Lambda \star A_\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \right) \\ &= i \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} \star \Lambda + iA_\mu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} - i \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \star A_\mu - i\Lambda \star \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{i}{e} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q^\nu \partial q^\mu}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \delta A_\nu}{\partial q^\mu} &= -\frac{\partial}{\partial q^\mu} \left(iA_\nu \star \Lambda - i\Lambda \star A_\nu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \right) \\
&= -i \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} \star \Lambda - iA_\nu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} + i \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star A_\nu + i\Lambda \star \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} + \frac{i}{e} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q^\mu \partial q^\nu}.
\end{aligned}$$

O último termo é calculado da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\delta (eA_\mu \star A_\nu - eA_\nu \star A_\mu) &= e(\delta A_\mu) \star A_\nu + eA_\mu \star (\delta A_\nu) - e(\delta A_\nu) \star A_\mu - eA_\nu \star (\delta A_\mu) \\
&= e \left(iA_\mu \star \Lambda - i\Lambda \star A_\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \right) \star A_\nu \\
&\quad + eA_\mu \star \left(iA_\nu \star \Lambda - i\Lambda \star A_\nu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \right) \\
&\quad - e \left(iA_\nu \star \Lambda - i\Lambda \star A_\nu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \right) \star A_\mu \\
&\quad - eA_\nu \star \left(iA_\mu \star \Lambda - i\Lambda \star A_\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \right) \\
&= ieA_\mu \star \Lambda \star A_\nu - ie\Lambda \star A_\mu \star A_\nu - i \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star A_\nu \\
&\quad + ieA_\mu \star A_\nu \star \Lambda - ieA_\mu \star \Lambda \star A_\nu - iA_\mu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \\
&\quad - ieA_\nu \star \Lambda \star A_\mu + ie\Lambda \star A_\nu \star A_\mu + i \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \star A_\mu \\
&\quad - ieA_\nu \star A_\mu \star \Lambda + ieA_\nu \star \Lambda \star A_\mu + iA_\nu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \\
&= -ie\Lambda \star A_\mu \star A_\nu - i \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star A_\nu + ieA_\mu \star A_\nu \star \Lambda - iA_\mu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \\
&\quad + ie\Lambda \star A_\nu \star A_\mu + i \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \star A_\mu - ieA_\nu \star A_\mu \star \Lambda + iA_\nu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu}.
\end{aligned}$$

Portanto o tensor eletromagnético sob transformação de calibre local é dado por

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{F}_{\mu\nu} &= i\frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} \star \Lambda + iA_\mu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} - i\frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \star A_\mu - i\Lambda \star \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{i}{e} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q^\nu \partial q^\mu} \\
&\quad - i\frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} \star \Lambda - iA_\nu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} + i\frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star A_\nu + i\Lambda \star \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} + \frac{i}{e} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q^\mu \partial q^\nu} \\
&\quad - ie\Lambda \star A_\mu \star A_\nu - i\frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \star A_\nu + ieA_\mu \star A_\nu \star \Lambda - iA_\mu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \\
&\quad + ie\Lambda \star A_\nu \star A_\mu + i\frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} \star A_\mu - ieA_\nu \star A_\mu \star \Lambda + iA_\nu \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \\
&= i\frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} \star \Lambda - i\Lambda \star \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} - i\frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} \star \Lambda + i\Lambda \star \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} \\
&\quad - ie\Lambda \star A_\mu \star A_\nu + ieA_\mu \star A_\nu \star \Lambda + ie\Lambda \star A_\nu \star A_\mu - ieA_\nu \star A_\mu \star \Lambda \\
&= -i\Lambda \star \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} + e(A_\mu \star A_\nu - A_\nu \star A_\mu) \right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} + e(A_\mu \star A_\nu - A_\nu \star A_\mu) \right) \star \Lambda i \\
&= -i\Lambda \star (\mathcal{F}_{\mu\nu}) + (\mathcal{F}_{\mu\nu}) \star \Lambda i.
\end{aligned}$$

Usando a identidade Eq. (4.2), obtemos

$$\int \delta\mathcal{F}_{\mu\nu} = -i \int \Lambda \star \mathcal{F}_{\mu\nu} + i \int \mathcal{F}_{\mu\nu} \star \Lambda = 0.$$

Definindo o último termo da Eq. (4.18) como

$$\mathcal{L}_c = -\frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

a lagrangiana final invariante sob a transformação de calibre local é escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{final} &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star D_\mu \star \psi(p, q) + (\bar{\psi}(p, q) \star D_\mu) \star \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \\
&\quad - m\bar{\psi}(p, q) \star \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star \psi(p, q) - \frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Isto demonstra um mapeamento similar ao obtido para o calibre de Seiberg-Witten para campos não-comutativos.

Nosso objetivo agora é estudar as transformações de calibre considerando o produto estrela Moyal-Weyl na forma aproximada, isto é, expandindo em séries de potências o produto estrela das transformações de calibre geral em \hbar na ordem zero. A equação (4.3)

pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
S &= \int \mathcal{L} d^4p d^4q \\
&= \int \left[-\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star (p_\mu \star \psi(p, q)) + (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \star \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \right. \\
&\quad \left. - m \bar{\psi}(p, q) \star \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star \psi(p, q) \right] d^4p d^4q \\
&= \int \left[-\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu (p_\mu \star \psi(p, q)) + (\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu) \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \right. \\
&\quad \left. - m \bar{\psi}(p, q) \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q) \right] d^4p d^4q \\
&= \int \left[-\frac{i}{4} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(p, q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(p, q) - \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \right) \right. \\
&\quad \left. - \bar{\psi}(p, q) (m - \gamma^\mu p_\mu) \psi(p, q) \right] d^4p d^4q. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Expandindo o produto estrela das transformações de calibre na forma geral Eqs. (4.4) e (4.5) em série de potência até a ordem zero, temos

$$\begin{aligned}
\psi(q, p) &\rightarrow e^{-i\Lambda} \left(e^{\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} \right) \psi(q, p) \\
&\rightarrow e^{-i\Lambda} \left(1 + \frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) + O(\hbar) \right) \psi(q, p) \\
&\rightarrow e^{-i\Lambda} \psi(q, p),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(q, p) &\rightarrow \bar{\psi}(q, p) e^{i\Lambda} \\
&\rightarrow e^{i\Lambda} \bar{\psi}(q, p).
\end{aligned}$$

Portanto, a transformação de calibre geral é dada por

$$\begin{aligned}
\psi(q, p) &\rightarrow e^{-i\Lambda} \psi(q, p), \\
\bar{\psi}(q, p) &\rightarrow e^{i\Lambda} \bar{\psi}(q, p).
\end{aligned}$$

Sua forma infinitesimal é escrita da seguinte maneira

$$\left. \begin{aligned}
\delta\psi(q, p) &= -i\Lambda\psi(q, p) \\
\delta\bar{\psi}(q, p) &= i\Lambda\bar{\psi}(q, p).
\end{aligned} \right\} \tag{4.25}$$

Aplicando a transformação (4.25) na Eq. (4.24), temos

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \delta \left\{ -\frac{i}{4} \left(\frac{\partial\bar{\psi}(p,q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(q,p) - \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \frac{\partial\psi(p,q)}{\partial q^\mu} \right) - \bar{\psi}(p,q) (m - \gamma^\mu p_\mu) \psi(p,q) \right\} \\
&= -\frac{i}{4} \left(\frac{\partial(\delta\bar{\psi}(p,q))}{\partial q^\mu} \right) \gamma^\mu \psi(q,p) - \frac{i}{4} \frac{\partial\bar{\psi}(p,q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu (\delta\psi(p,q)) + \frac{i}{4} (\delta\bar{\psi}(p,q)) \gamma^\mu \frac{\partial\psi(p,q)}{\partial q^\mu} \\
&\quad + \frac{i}{4} \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \left(\frac{\partial(\delta\psi(p,q))}{\partial q^\mu} \right) - (\delta\bar{\psi}(p,q)) (m - \gamma^\mu p_\mu) \psi(p,q) \\
&\quad - \bar{\psi}(p,q) (m - \gamma^\mu p_\mu) (\delta\psi(p,q)) \\
&= -\frac{i}{4} \left[i\Lambda \frac{\partial\bar{\psi}(p,q)}{\partial q^\mu} + i \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \bar{\psi}(p,q) \right] \gamma^\mu \psi(q,p) - \frac{i}{4} \left[\frac{\partial\bar{\psi}(p,q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \right] [-i\Lambda\psi(q,p)] \\
&\quad + \frac{i}{4} [i\Lambda\bar{\psi}(p,q)] \gamma^\mu \frac{\partial\psi(p,q)}{\partial q^\mu} + \frac{i}{4} \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \left[-i\Lambda \frac{\partial\psi(p,q)}{\partial q^\mu} - i \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \psi(p,q) \right] \\
&\quad - [i\Lambda\bar{\psi}(p,q)] (m - \gamma^\mu p_\mu) \psi(p,q) - \bar{\psi}(p,q) (m - \gamma^\mu p_\mu) [-i\Lambda\psi(p,q)] \\
&= \frac{1}{4} \Lambda \frac{\partial\bar{\psi}(p,q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(q,p) + \frac{1}{4} \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \psi(q,p) - \frac{1}{4} \frac{\partial\bar{\psi}(p,q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \Lambda \psi(q,p) \\
&\quad - \frac{1}{4} \Lambda \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \frac{\partial\psi(p,q)}{\partial q^\mu} + \frac{1}{4} \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \Lambda \frac{\partial\psi(p,q)}{\partial q^\mu} + \frac{1}{4} \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \psi(p,q) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \psi(q,p). \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Considerando a transformação de calibre geral na forma aproximada, como um calibre global, a Eq. (4.26) se torna invariante, isto é, $\delta\mathcal{L} = 0$. O teorema de Noether dá-nos uma corrente conservada, isto é

$$\begin{aligned}
J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi(q,p)}{\partial q^\mu} \right)} (-i\psi(q,p)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}(q,p)}{\partial q^\mu} \right)} (i\bar{\psi}(q,p)) \\
&= \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \psi(q,p)}{\partial q^\mu} \right)} \left\{ -\frac{i}{4} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(p,q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(q,p) - \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(p,q)}{\partial q^\mu} \right) \right. \\
&\quad \left. - \bar{\psi}(p,q) (m - \gamma^\mu p_\mu) \psi(p,q) \right\} (-i\psi(q,p)) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}(q,p)}{\partial q^\mu} \right)} \left\{ -\frac{i}{4} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(p,q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(q,p) - \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(p,q)}{\partial q^\mu} \right) \right. \\
&\quad \left. - \bar{\psi}(p,q) (m - \gamma^\mu p_\mu) \psi(p,q) \right\} (i\bar{\psi}(q,p)) \\
&= \left\{ -\frac{i}{4} (-\bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu) \right\} (-i\psi(q,p)) + \left\{ -\frac{i}{4} (\gamma^\mu \psi(q,p)) \right\} (i\bar{\psi}(q,p)) \\
&= -\frac{i^2}{4} \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \psi(q,p) - \frac{i^2}{4} \gamma^\mu \psi(q,p) \bar{\psi}(q,p) \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \psi(q,p). \tag{4.27}
\end{aligned}$$

No caso das transformações de calibre local a Eq. (4.26) é dada por

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \psi(q,p) \\
&= \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} J^\mu.
\end{aligned}$$

onde J^μ é dada pela equação (4.27). Logo a lagrangiana (4.24) não é invariante sob a transformação de calibre local. Para restaurar sua invariância, introduzimos um novo campo, um quadrivetor A_μ conectado diretamente com a corrente J^μ , dando um termo extra em \mathcal{L} . Assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{i}{4} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(p,q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(q,p) - \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(p,q)}{\partial q^\mu} \right) - \bar{\psi}(p,q) (m - \gamma^\mu p_\mu) \psi(p,q) \\
&\quad + \mathcal{L}_1, \tag{4.28}
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{i}{2} e \bar{\psi}(p,q) \gamma^\mu \psi(q,p) A_\mu, \tag{4.29}$$

e e representa a carga da partícula envolvida. Usando a definição de (δA_μ) na Eq. (4.14), e expandindo em séries de potências em \hbar na ordem zero, temos

$$\begin{aligned}
A^\mu \rightarrow A'^\mu &= A^\mu + iA^\mu \star \Lambda - i\Lambda \star A^\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \\
&= A^\mu + iA^\mu \left(e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} \right) \Lambda - i\Lambda \left(e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} \right) A^\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \\
&= A^\mu + iA^\mu \left(1 + \frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) + O(\hbar) \right) \Lambda \\
&\quad - i\Lambda \left(1 + \frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) + O(\hbar) \right) A^\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \\
&= A^\mu + iA^\mu \Lambda - i\Lambda A^\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \\
&= A^\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu}.
\end{aligned}$$

Portanto, exigimos que δA_μ transforme como

$$\delta A_\mu = -\frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu}. \quad (4.30)$$

Submetendo a lagrangiana Eq. (4.28) sob uma transformação de calibre local

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} &= \delta \left\{ -\frac{i}{4} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(p, q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(q, p) - \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \right) - \bar{\psi}(p, q) (m - \gamma^\mu p_\mu) \psi(p, q) \right\} \\
&+ \delta(\mathcal{L}_1) \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(q, p) \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} - \delta \left[\frac{i}{2} e \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(q, p) A_\mu \right] \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(q, p) \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} - \frac{i}{2} e (\delta \bar{\psi}(p, q)) \gamma^\mu \psi(q, p) A_\mu - \frac{i}{2} e \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu (\delta \psi(q, p)) A_\mu \\
&\quad - \frac{i}{2} e \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(q, p) (\delta A_\mu) \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(q, p) \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} - \frac{i}{2} e (i\Lambda \bar{\psi}(p, q)) \gamma^\mu \psi(q, p) A_\mu - \frac{i}{2} e \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu (-i\Lambda \psi(q, p)) A_\mu \\
&\quad - \frac{i}{2} e \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(q, p) \left(-\frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(q, p) \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} - \frac{1}{2} \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(q, p) \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

demonstramos sua invariância. A lagrangiana Eq. (4.28) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t &= -\frac{i}{4} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(p, q)}{\partial q^\mu} \gamma^\mu \psi(p, q) - \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \right) - \bar{\psi}(p, q) (m - \gamma^\mu p_\mu) \psi(p, q) \\
&\quad - \frac{i}{2} e \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q) A_\mu. \\
&= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \left(p_\mu \psi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} e A_\mu \psi(p, q) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(p_\mu \bar{\psi}(p, q) + \frac{i}{2} \frac{\partial \bar{\psi}(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} e A_\mu \bar{\psi}(p, q) \right) \gamma^\mu \psi(p, q) \right] - m \bar{\psi}(p, q) \psi(p, q) \\
&\quad + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q) \\
&= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu (D_\mu \psi(p, q)) + (\bar{D}_\mu \bar{\psi}(p, q)) \gamma^\mu \psi(p, q) \right] - m \bar{\psi}(p, q) \psi(p, q) \\
&\quad + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q), \tag{4.31}
\end{aligned}$$

onde definimos os operadores

$$D_\mu \psi(p, q) = \left(p_\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} e A_\mu \right) \psi(p, q), \tag{4.32}$$

e

$$\bar{D}_\mu \bar{\psi}(p, q) = \left(p_\mu + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} e A_\mu \right) \bar{\psi}(p, q). \tag{4.33}$$

Sob a transformação de calibre local, o operador D_μ transforma-se covariantemente, i.e

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu \psi(p, q)) &= \delta \left(p_\mu \psi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} e A_\mu \psi(p, q) \right) \\
&= p_\mu (\delta \psi(p, q)) - \frac{i}{2} \frac{\partial (\delta \psi(p, q))}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} e (\delta A_\mu) \psi(p, q) + \frac{i}{2} e A_\mu (\delta \psi(p, q)) \\
&= -i\Lambda p_\mu \psi(p, q) + \frac{i^2}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \psi(p, q) + \frac{i^2}{2} \Lambda \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \psi(p, q) \\
&\quad - \frac{i^2}{2} \Lambda e A_\mu (\psi(p, q)) \\
&= -i\Lambda \left(p_\mu \psi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} e A_\mu \psi(p, q) \right) \\
&= -i\Lambda D_\mu \psi(p, q).
\end{aligned}$$

Para eliminar a interação eletromagnética causada pela introdução de A_μ , iremos expandir em séries de potências em \hbar na ordem zero, o produto estrela da Eq. (4.21), logo temos

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu}, \tag{4.34}$$

onde $F_{\mu\nu}$ é invariante por si só.

Para demonstrar a invariância de $F_{\mu\nu}$, temos

$$\begin{aligned}\delta F_{\mu\nu} &= \frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial q^\mu} - \frac{\partial(\delta A_\mu)}{\partial q^\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{1}{q} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\nu} - \frac{\partial}{\partial q^\nu} \frac{1}{q} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \\ &= \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q^\nu \partial q^\mu} - \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q^\mu \partial q^\nu} \\ &= 0\end{aligned}$$

Portando o último termo a Eq. (4.31) é definido como,

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.35)$$

e a lagrangiana final é escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{final} &= \mathcal{L}_t + \mathcal{L}_2 \\ &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu (D_\mu \psi(p, q)) + (\bar{D}_\mu \bar{\psi}(p, q)) \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \\ &\quad - m \bar{\psi}(p, q) \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \psi(p, q) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.\end{aligned} \quad (4.36)$$

Este resultado mostra a obtenção de uma lagrangiana similar a usual obtida em teoria quântica de campos. Na próxima seção iremos construir uma teoria de calibre para o campo de Klein-Gordon no espaço de fase.

4.2 Teoria de calibre para o campo de Klein Gordon no espaço de fase

No caso do campo de klein-Gordon, a lagrangiana, Eq. (3.50), pode ser escrita da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = -(p^\mu \star \phi(p, q)) (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) + \phi^\dagger(q, p) \phi(q, p). \quad (4.37)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -(p^\mu \star \phi(p, q)) (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) + m^2 \phi^\dagger(q, p) \phi(q, p) \\ &= - \left[\left(p^\mu \phi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \phi(q, p)}{\partial q_\mu} \right) \left(\phi^\dagger(q, p) \frac{i}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^\mu} + \phi^\dagger(q, p) p_\mu \right) \right] \\ &\quad + m^2 \phi^\dagger(q, p) \phi(q, p) \\ &= - \left[p^\mu p_\mu \phi(p, q) \phi^\dagger(q, p) + \frac{i}{2} p^\mu \phi(p, q) \frac{\partial \phi^\dagger(q, p)}{\partial q^\mu} - \frac{i}{2} \frac{\partial \phi(q, p)}{\partial q_\mu} p_\mu \phi^\dagger(q, p) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial \phi(q, p)}{\partial q^\mu} \frac{\partial \phi^\dagger(q, p)}{\partial q_\mu} \right] + m^2 \phi^\dagger(q, p) \phi(q, p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q_\mu} \frac{\partial \phi^\dagger(q, p)}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2} i p^\mu \left(\phi^\dagger(q, p) \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q^\mu} - \phi(p, q) \frac{\partial \phi^\dagger(q, p)}{\partial q^\mu} \right) \\ & - (p^\mu p_\mu - m^2) \phi(p, q) \phi^*(q, p), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

O processo para construir a teoria de calibre para o campo de Klein-Gordon é similar ao realizado na seção anterior. Iniciamos este processo escrevendo a Eq. (4.37) como

$$\begin{aligned} S &= \int \mathcal{L} d^4q d^4p \\ &= \int \left[- (p^\mu \star \phi(p, q)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) + m^2 \phi^\dagger(q, p) \star \phi(q, p) \right] d^4q d^4p. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Definindo as transformações de calibre na forma geral da seguinte forma, temos

$$\left. \begin{aligned} \phi(q, p) &\rightarrow e^{-i\Lambda} \star \phi(q, p), \\ \phi^\dagger(q, p) &\rightarrow \phi^\dagger(q, p) \star e^{i\Lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Na forma infinitesimal, temos as seguintes relações

$$\left. \begin{aligned} \delta \phi(q, p) &= -i\Lambda \star \phi(q, p), \\ \delta \phi^\dagger(q, p) &= i\phi^\dagger(q, p) \star \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Aplicando as transformações Eq. (4.40) na Eq. (4.38), obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\delta \left[(p^\mu \star \phi(p, q)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) \right] + m^2 \delta \left(\phi^\dagger(q, p) \star \phi(q, p) \right) \\ &= -[\delta (p^\mu \star \phi(p, q))] \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) - (p^\mu \star \phi(p, q)) \star [\delta (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu)] \\ &\quad + m^2 (\delta (\phi^\dagger(q, p))) \star \phi(q, p) + m^2 \phi^\dagger(q, p) \star (\delta (\phi(q, p))) \\ &= -[\delta (p^\mu \star \phi(p, q))] \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) - (p^\mu \star \phi(p, q)) \star [\delta (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu)] \\ &\quad + m^2 (i\phi^\dagger(q, p) \star \Lambda) \star \phi(q, p) + m^2 \phi^\dagger(q, p) \star (-i\Lambda \star \phi(q, p)) \\ &= -[\delta (p^\mu \star \phi(p, q))] \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) - (p^\mu \star \phi(p, q)) \star [\delta (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu)]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Para facilitar uma melhor visualização dos cálculos para a Eq. (4.41), iremos efetuar o cálculo dos termos da Lagrangiana $\delta (p^\mu \star \phi(p, q))$ e $\delta (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu)$ separados. Assim, para o termo $p^\mu \star \phi(p, q)$ temos

$$\begin{aligned} T_7 &= \delta (p^\mu \star \phi(p, q)) \\ &= -i p^\mu \star \Lambda \star \phi(p, q) \\ &= -i \left(p^\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \right) (\Lambda \star \phi(p, q)) \\ &= -i \left(p^\mu \Lambda \star \phi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \star \phi(p, q) - \frac{i}{2} \Lambda \star \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q_\mu} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_7 &= -i \left[\Lambda \star (p^\mu \phi(p, q)) - \frac{i}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \star \phi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \star \phi(p, q) - \frac{i}{2} \Lambda \star \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q_\mu} \right] \\
&= -i \Lambda \star \left(p^\mu \phi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q_\mu} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \star \phi(p, q) \\
&= -i \Lambda \star (p^\mu \star \phi(p, q)) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \star \phi(p, q). \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Empregando o mesmo procedimento realizado para a Eq.(4.42), o termo $\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu$ se transforma como

$$T_8 = -\phi^\dagger(q, p) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} + (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) \star \Lambda i. \tag{4.43}$$

Considerando as Eqs. (4.42) e (4.43) sob a transformação de calibre global, onde o termo $\frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} = 0$, obtemos as seguintes relações

$$T_{7a} = -i \Lambda \star (p^\mu \star \phi(p, q)), \tag{4.44}$$

e

$$T_{8a} = (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) \star \Lambda i. \tag{4.45}$$

Portanto a relação (4.41) é dada por

$$\delta \mathcal{L} = i \Lambda \star (p^\mu \star \phi(p, q)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) - (p^\mu \star \phi(p, q)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) \star \Lambda i.$$

Usando a propriedade do produto estrela dada pela Eq. (4.2) e chamando $f = \Lambda$, $g = (p^\mu \star \phi(p, q)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu)$ demonstramos que,

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} &= i \Lambda \star (p^\mu \star \phi(p, q)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) - i \Lambda \star (p^\mu \star \phi(p, q)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

é invariante sobre as transformações de calibre global. Se o calibre passe a ser considerado local, as Eqs. (4.42) e (4.43), se transformam como

$$T_{7b} = -i \Lambda \star (p^\mu \star \phi(p, q)) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \star \phi(p, q), \tag{4.46}$$

e

$$T_{8b} = -\phi^\dagger(q, p) \star \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} + (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) \star \Lambda i. \tag{4.47}$$

Note que um termo extra $\frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu}$ surge para uma transformação de calibre local. Para restaurar a invariância da lagrangiana sob esta transformação, introduzimos um novo campo, um quadri vetor A_μ conectado diretamente com $\phi(q, p)$. Assim, para o termo $\delta (p^\mu \star \phi(q, p))$, o termo extra é definido como

$$\mathcal{L}_c = A^\mu \star \phi(p, q). \tag{4.48}$$

Utilizando a definição dada pela Eq. (4.14), em conjunto com os termos $(p^\mu \star \phi(q, p) + \mathcal{L}_c)$, definimos o seguinte operador

$$D^\mu \star = p^\mu \star + ieA^\mu \star, \quad (4.49)$$

que sob a transformação de calibre local, transforma-se como

$$\begin{aligned} \delta(D^\mu \star \phi(q, p)) &= \delta(p^\mu \star \phi(q, p) + ieA^\mu \star \phi(q, p)) \\ &= \delta(p^\mu \star \phi(q, p)) + ie\delta(A^\mu) \star \phi(q, p) + ieA^\mu \star \delta(\phi(q, p)) \\ &= -i\Lambda \star p^\mu \star \phi(p, q) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \star \phi(p, q) \\ &\quad + ie \left[iA^\mu \star \Lambda - i\Lambda \star A^\mu - \frac{i}{e} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \right] \star \phi(p, q) + ieA^\mu \star (-i\Lambda \star \phi(p, q)) \\ &= -i\Lambda \star p^\mu \star \phi(p, q) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \star \phi(p, q) - i^2 e \Lambda \star A^\mu \star \phi(p, q) \\ &\quad + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\mu} \star \phi(p, q) \\ &= -i\Lambda \star (p^\mu \star \phi(p, q) + ie \star A^\mu \star \phi(p, q)) \\ &= -i\Lambda \star (D^\mu \star \phi(q, p)), \end{aligned} \quad (4.50)$$

obedecendo a regra de transformação covariante.

Similarmente, para o termo $\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu$, definimos o operador

$$\star D_\mu = \star p_\mu + ie \star A_\mu. \quad (4.51)$$

Reescrevendo a lagrangiana Eq. (4.38) em termos dos operadores $D^\mu \star$ e $\star D_\mu$ temos

$$\mathcal{L} = -(D^\mu \star \phi(p, q)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star D_\mu) + m^2 \phi^\dagger(q, p) \star \phi(q, p), \quad (4.52)$$

e aplicando a transformação de calibre local, conseguimos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\delta \left[(D^\mu \star \phi(q, p)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star D_\mu) \right] + m^2 \delta (\phi^\dagger(q, p) \star \phi(q, p)) \\ &= - \left[-i\Lambda \star (D^\mu \star \phi(q, p)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star D_\mu) + (D^\mu \star \phi(q, p)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star D_\mu) \star \Lambda i \right]. \end{aligned}$$

usando a propriedade Eq. (4.2) e nomeando $f = \Lambda$, $g = (D^\mu \star \phi(q, p)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star D_\mu)$, temos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= - \left[-i\Lambda \star (D^\mu \star \phi(q, p)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star D_\mu) + i\Lambda \star (D^\mu \star \phi(q, p)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star D_\mu) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto a lagrangiana descrita pela Eq. (4.52) é invariante sob a transformação de calibre local.

Usando a definição dada pela Eq. (4.21) para eliminar a interação eletromagnética causada pela introdução do campo A^μ definimos o último termo da lagrangiana como

$$\mathcal{L}_d = -\frac{1}{4}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}. \quad (4.53)$$

Portanto, a lagrangiana total invariante sob a transformação de calibre local é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{total} = & -(D^\mu \star \phi(p, q)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star D_\mu) + m^2 \phi^\dagger(q, p) \star \phi(q, p) \\ & - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Isto demonstra um mapeamento similar ao obtido para o calibre de Seiberg-Witten para campos não-comutativos.

Na seção anterior, estudamos as transformações de calibre na forma aproximada para o campo de Dirac. Iremos realizar o mesmo procedimento a partir de agora para o campo de Klein-Gordon, onde iremos expandir o produto estrela das transformações de calibre geral em séries de potências em \hbar na ordem zero. Para isto, vamos escrever a Eq. (4.38) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} S &= \int \mathcal{L} d^4 p d^4 q \\ &= \int \left[-(p^\mu \star \phi(p, q)) \star (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) + m^2 \phi^\dagger(q, p) \star \phi(q, p) \right] d^4 p d^4 q \\ &= \int \left[-(p^\mu \star \phi(p, q)) (\phi^\dagger(q, p) \star p_\mu) + m^2 \phi^\dagger(q, p) \phi(q, p) \right] d^4 p d^4 q \\ &= \int \left[-\frac{1}{4} \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q_\mu} \frac{\partial \phi^\dagger(q, p)}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2} i p^\mu \left(\phi^\dagger(q, p) \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q^\mu} - \phi(p, q) \frac{\partial \phi^\dagger(q, p)}{\partial q^\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. - (p^\mu p_\mu - m^2) \phi^\dagger(q, p) \phi(p, q) \right] d^4 p d^4 q. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Expandindo o produto estrela das transformações de calibre na forma geral Eq. (4.39) temos

$$\phi(q, p) \rightarrow e^{-i\Lambda} \phi(q, p)$$

$$\phi^\dagger(q, p) \rightarrow e^{i\Lambda} \phi^\dagger(q, p).$$

Na forma infinitesimal, esta transformação é dada por

$$\left. \begin{aligned} \delta \phi(q, p) &= -i\Lambda \phi(q, p), \\ \delta \phi^\dagger(q, p) &= i\Lambda \phi^\dagger(q, p). \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Aplicando a transformação (4.56) na Eq. (4.55), obtemos

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}\right) \left\{ i\frac{1}{4} \left[\phi(p, q) \frac{\partial\phi^\dagger(p, q)}{\partial q_\mu} - \phi^\dagger(p, q) \frac{\partial\phi(p, q)}{\partial q_\mu} \right] + p^\mu \phi(p, q) \phi^\dagger(p, q) \right\}. \quad (4.57)$$

A Eq. (4.57) é invariante sob uma transformação de calibre global, isto é, $\delta\mathcal{L} = 0$. O teorema de Noether dá-nos uma corrente conservada, isto é

$$J^\mu = \frac{i}{4} \left(\phi(q, p) \frac{\partial\phi^\dagger(q, p)}{\partial q_\mu} - \phi^\dagger(q, p) \frac{\partial\phi(q, p)}{\partial q_\mu} \right) + p^\mu \phi(q, p) \phi^\dagger(q, p). \quad (4.58)$$

No caso das transformações de calibre local a Eq. (4.57) é dada por

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}\right) \left\{ i\frac{1}{4} \left[\phi(p, q) \frac{\partial\phi^\dagger(p, q)}{\partial q_\mu} - \phi^\dagger(p, q) \frac{\partial\phi(p, q)}{\partial q_\mu} \right] + p^\mu \phi(p, q) \phi^\dagger(p, q) \right\} \\ &= \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}\right) J^\mu, \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde J^μ é dada pela Eq (4.58). Logo a lagrangiana Eq. (4.55) não é invariante sob a transformação de calibre local. Para restaurar sua invariância, introduzimos um novo campo, um quadrivetor A_μ conectado diretamente com a corrente J^μ , dando um termo extra em \mathcal{L} . Assim o termo extra é definido como

$$\mathcal{L}_3 = -ieJ^\mu A_\mu, \quad (4.60)$$

onde exigimos que, sob transformação de calibre local A_μ se transforme como

$$\delta A_\mu = -\frac{i}{e} \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}. \quad (4.61)$$

Portanto, a lagrangiana Eq. (4.55) mais o seu termo extra Eq. (4.60), sob transformação de calibre local é dada por

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_3 &= \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}\right) J^\mu - ie\delta(J^\mu A_\mu) \\ &= \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}\right) J^\mu - ie(\delta J^\mu)A_\mu - ieJ^\mu(\delta A_\mu) \\ &= J^\mu \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}\right) - ie(\delta J^\mu)A_\mu - ieJ^\mu \left(-\frac{i}{e} \frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}\right) \\ &= J^\mu \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}\right) - ie(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu}\right) \\ &= -ie(\delta J^\mu)A_\mu \\ &= -ie\delta \left\{ i\frac{1}{4} \left[\phi(p, q) \frac{\partial\phi^\dagger(p, q)}{\partial q_\mu} - \phi^\dagger(p, q) \frac{\partial\phi(p, q)}{\partial q_\mu} \right] + p^\mu \phi(p, q) \phi^\dagger(p, q) \right\} A_\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_3 &= -e\frac{i^2}{4} \left\{ [\delta\phi(p, q)] \frac{\partial\phi^\dagger(p, q)}{\partial q_\mu} + \phi(p, q) \left[\frac{\partial(\delta\phi^\dagger(p, q))}{\partial q_\mu} \right] - [\delta\phi^\dagger(p, q)] \frac{\partial\phi(p, q)}{\partial q_\mu} \right. \\
&\quad \left. - \phi^\dagger(p, q) \left[\frac{\partial(\delta\phi(p, q))}{\partial q_\mu} \right] \right\} A_\mu \\
&= -e\frac{i^2}{4} \left\{ [-i\Lambda\phi(p, q)] \frac{\partial\phi^\dagger(p, q)}{\partial q_\mu} + \phi(p, q) \left[i\Lambda \frac{\partial\phi^\dagger(p, q)}{\partial q_\mu} + i \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_\mu} \right) \phi^\dagger(p, q) \right] \right. \\
&\quad \left. - [i\Lambda\phi^\dagger(p, q)] \frac{\partial\phi(p, q)}{\partial q_\mu} - \phi^\dagger(p, q) \left[i\Lambda \frac{\partial\phi(p, q)}{\partial q_\mu} - i \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_\mu} \right) \phi(p, q) \right] \right\} A_\mu \\
&= -e\frac{i^2}{4} \left[2i\phi(p, q)\phi^\dagger(p, q) \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_\mu} \right) \right] A_\mu \\
&= \frac{i}{2} e A_\mu \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \right] \phi^\dagger(p, q)\phi(p, q). \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Para eliminar este termo, é necessário adicionar outro termo a \mathcal{L} , assim definimos o novo termo como

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{4} e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger(p, q)\phi(p, q), \tag{4.63}$$

que sob a transformação de calibre local, se transforma da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_4 &= \frac{1}{4} e^2 \delta[A_\mu A^\mu \phi(p, q)\phi^\dagger(p, q)] \\
&= \frac{1}{4} e^2 \{ [\delta A_\mu] A^\mu + A_\mu [\delta A^\mu] \} \phi(p, q)\phi^\dagger(p, q) \\
&\quad + \frac{1}{4} e^2 A_\mu A^\mu \{ [\delta\phi(p, q)]\phi^\dagger(p, q) + \phi(p, q)[\delta\phi^\dagger(p, q)] \} \\
&= \frac{1}{4} e^2 \{ [\delta A^\mu] A_\mu + A_\mu [\delta A^\mu] \} \phi(p, q)\phi^\dagger(p, q) \\
&= \frac{1}{4} e^2 \left\{ 2A_\mu \left[-\frac{i}{e} \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \right) \right] \right\} \phi(p, q)\phi^\dagger(p, q) \\
&= -\frac{i}{2} e A_\mu \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \right] \phi^\dagger(p, q)\phi(p, q).
\end{aligned}$$

Somando todas as lagrangianas sob uma transformação de calibre local, obtemos

$$\delta\mathcal{L}_t = \delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_3 + \delta\mathcal{L}_4 = \frac{i}{2} e A_\mu \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \right] \phi^\dagger(p, q)\phi(p, q) - \frac{i}{2} e A_\mu \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q^\mu} \right] \phi^\dagger(p, q)\phi(p, q) = 0.$$

Portanto a lagrangiana total \mathcal{L}_t é invariante sob uma transformação de calibre local.

A lagrangiana total pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 \\
&= -\frac{1}{4} \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q_\mu} \frac{\partial \phi^\dagger(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2} i p^\mu \left(\phi^\dagger(p, q) \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q^\mu} - \phi(p, q) \frac{\partial \phi^\dagger(p, q)}{\partial q^\mu} \right) \\
&\quad - (p^\mu p_\mu - m^2) \phi^\dagger(p, q) \phi(p, q) - ie J^\mu A_\mu + \frac{1}{4} e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger(p, q) \phi(p, q) \\
&= - \left(p_\mu \phi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{ie}{2} A_\mu \phi(p, q) \right) \left(p^\mu \phi^\dagger(p, q) + \frac{i}{2} \frac{\partial \phi^\dagger(p, q)}{\partial q_\mu} + \frac{ie}{2} A^\mu \phi^\dagger(p, q) \right) \\
&\quad + m^2 \phi^\dagger(p, q) \phi(p, q) \\
&= -D_\mu \phi(p, q) D^\mu \phi^\dagger(p, q) + m^2 \phi^\dagger(p, q) \phi(p, q), \tag{4.64}
\end{aligned}$$

onde Definimos o operador

$$D_\mu \phi(p, q) = \left(p_\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{ie}{2} A_\mu \right) \phi(p, q). \tag{4.65}$$

Sob uma transformação de calibre local, o operador D_μ transforma-se covariantemente, i.e

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu \phi(p, q)) &= \delta \left(p_\mu \phi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{ie}{2} A_\mu \phi(p, q) \right) \\
&= p_\mu (\delta \phi(p, q)) - \frac{i}{2} \frac{\partial \delta \phi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{ie}{2} (\delta A_\mu) \phi(p, q) + \frac{ie}{2} A_\mu (\delta \phi(p, q)) \\
&= -i \Lambda p_\mu \phi(p, q) + \frac{i^2}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \phi(p, q) + \frac{i^2}{2} \Lambda \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^\mu} \phi(p, q) \\
&\quad - i^2 \frac{e}{2} \Lambda A_\mu (\phi(p, q)) \\
&= -i \Lambda \left(p_\mu \phi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{ie}{2} A_\mu \phi(p, q) \right) \\
&= -i \Lambda D_\mu \phi(p, q). \tag{4.66}
\end{aligned}$$

Para eliminar a interação eletromagnética, cuja origem nasceu da introdução do campo A_μ , usamos a definição do tensor eletromagnético dado pela Eq. (4.34). Portanto, definimos o último termo da Eq. (4.64) como,

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{4.67}$$

Assim a lagrangiana total é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{total} &= \mathcal{L}_t + \mathcal{L}_5 \\
&= -D_\mu \phi(p, q) D^\mu \phi^\dagger(p, q) + m^2 \phi^\dagger(p, q) \phi(p, q) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{4.68}
\end{aligned}$$

Portanto, expandindo o produto estrela em série de potência, em ordem zero em \hbar , obtemos uma teoria similar a teoria usual de calibre em teoria quântica de campos.

4.3 Conservação do Isospin no espaço de fase

Definindo uma transformação de calibre local isotópico no espaço de fase, temos

$$\psi(q, p) \rightarrow \psi'(q, p) = S^{-1} \star \psi(q, p). \quad (4.69)$$

onde S representa uma matrix unitária 2×2 com $SS^{-1} = S^{-1}S = 1$, $\psi(q, p)$ é uma função de onda com dois componentes. Neste caso, $\psi(q, p)$ descreve um campo com spin isotópico $1/2$. A matriz S é dada da seguinte forma,

$$S = \exp(-i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}), \quad (4.70)$$

onde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, e $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ representam as matrizes de Pauli.

O calibre Eq. (4.69) se transforma da seguinte maneira.

$$\psi(p, q) = S \star \psi'(p, q). \quad (4.71)$$

Para demonstrar como se obtém a transformação de calibre Eq. (4.71), iniciamos multiplicando pelo lado esquerdo a Eq. (4.69) por $S\star$, obtemos

$$S \star \psi' = S \star S^{-1} \star \psi$$

Expandindo o produto estrela do lado direito, em série de potência em \hbar até a primeira ordem, temos

$$\begin{aligned} S \star \psi' &= S \star S^{-1} \star \psi \\ &= S \left[1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right] S^{-1} \left[1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right] \psi \\ &\quad + O(\hbar^2) \\ &= S \left[1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right] \left[S^{-1}\psi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S^{-1}}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S^{-1}}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right] \\ &\quad + O(\hbar^2) \\ &= \left[S + \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \right) \right] \left[S^{-1}\psi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S^{-1}}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S^{-1}}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right] \\ &\quad + O(\hbar^2) \\ &= SS^{-1}\psi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} (S^{-1}\psi) - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} (S^{-1}\psi) + \frac{i\hbar}{2} S \frac{\partial S^{-1}}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} \\ &\quad - \frac{i\hbar}{2} S \frac{\partial S^{-1}}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \right) \left[\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S^{-1}}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S^{-1}}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right] \\ &\quad + O(\hbar^2) \\ &= \psi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} (S^{-1}\psi) - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} (S^{-1}\psi) + \frac{i\hbar}{2} S \frac{\partial S^{-1}}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} \\ &\quad - \frac{i\hbar}{2} S \frac{\partial S^{-1}}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{i^2 \hbar^2}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \right) \left[\frac{\partial S^{-1}}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial S^{-1}}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right] \\ &\quad + O(\hbar^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S \star \psi' &= \psi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial S^{-1}}{\partial p} \psi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q} S^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial S^{-1}}{\partial q} \psi - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial p} S^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial q} \\
&\quad + \frac{i\hbar}{2} S \frac{\partial S^{-1}}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{i\hbar}{2} S \frac{\partial S^{-1}}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} + O(\hbar^2) \\
&= \psi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial S^{-1}}{\partial p} \psi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q} S^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial S^{-1}}{\partial q} \psi - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial p} S^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial q} \\
&\quad - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q} S^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial p} S^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial q} + O(\hbar^2) \\
&= \psi - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial p} S^{-1} \psi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial p} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial q} S^{-1} \psi + O(\hbar^2) \\
&= \psi - \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial p} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial q} \right) S^{-1} \psi \\
&= \psi,
\end{aligned}$$

onde foi usada a identidade derivada de uma matriz por escalar

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial x} = -Y^{-1} \frac{\partial Y}{\partial x} Y^{-1}. \quad (4.72)$$

Em analogia com o caso eletromagnético onde introduzimos um campo vetorial A_μ , com objetivo de neutralizar a variação de Λ , onde é definido assim $(p_\mu \star + ieA_\mu \star) = D_\mu \star$, conhecido como derivada covariante. Para o caso do isospin, definimos

$$G_\mu \star = (p_\mu \star + i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star) \psi(p, q), \quad (4.73)$$

onde $\mathbf{B}_\mu = (B_\mu^1, B_\mu^2, B_\mu^3)$. A invariância para a transformação de calibre local exige que

$$G_\mu \star \psi(q, p) = S \star G'_\mu \star \psi'(p, q). \quad (4.74)$$

Inserindo a Eq. (4.69) em (4.74), obtemos a seguinte transformação sob B_μ

$$\begin{aligned}
G_\mu \star \psi(q, p) &= S \star G'_\mu \star S^{-1} \star \psi(q, p) \\
&= S \star \left(p_\mu \star + i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu) \star \right) S^{-1} \star \psi(q, p) \\
&= S \star (p_\mu \star) S^{-1} \star \psi(p, q) + i\epsilon S \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu) \star S^{-1} \star \psi(p, q) \quad (4.75)
\end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (4.75) será calculado separado dos demais termos, logo

$$\begin{aligned}
T_9 &= S \star (p_\mu \star) S^{-1} \star \psi(p, q) \\
&= S \star \left(p_\mu - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) (S^{-1} \star \psi(p, q)) \\
&= S \star (p_\mu S^{-1}) \star \psi(p, q) - \frac{i\hbar}{2} S \star \frac{\partial S^{-1}}{\partial q^\mu} \star \psi(p, q) - \frac{i\hbar}{2} S \star S^{-1} \star \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \\
&= S \star (p_\mu S^{-1}) \star \psi(p, q) + \frac{i\hbar}{2} S \star S^{-1} \star \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star \psi(p, q) - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu}
\end{aligned}$$

$$T_9 = S \star (p_\mu S^{-1}) \star \psi(p, q) + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star \psi(p, q) - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \quad (4.76)$$

onde usamos a relação

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial x} \star = -Y^{-1} \star \frac{\partial Y}{\partial x} \star Y^{-1} \star, \quad (4.77)$$

Usando a Eq. (4.8), o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.76) se transforma como $S \star (p_\mu S^{-1}) = p_\mu (S \star S^{-1}) + \frac{i\hbar}{2} (\frac{\partial S}{\partial q^\mu}) \star S^{-1}$, logo

$$\begin{aligned} T_9 &= p_\mu (S \star S^{-1}) \star \psi(p, q) + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star \psi(p, q) + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star \psi(p, q) - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \\ &= p_\mu \psi(p, q) + i\hbar \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star \psi(p, q) - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} \\ &= \left(p_\mu - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) \psi(p, q) + i\hbar \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star \psi(p, q) \\ &= p_\mu \star \psi(p, q) + i\hbar \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star \psi(p, q) \end{aligned}$$

Portanto, a Eq. (4.75) torna-se

$$\begin{aligned} i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star \psi(p, q) &= p_\mu \star \psi(p, q) - p_\mu \star \psi(p, q) + i\hbar \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star \psi(p, q) \\ &\quad + i\epsilon S \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu) \star S^{-1} \star \psi(p, q) \\ &= i\hbar \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star \psi(p, q) + \epsilon S \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu) \star S^{-1} \star \psi(p, q) \\ (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star &= \frac{\hbar}{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star + S \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu) \star S^{-1} \star \end{aligned}$$

Para isolar o termo $(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu)$, primeiramente multiplicaremos por S a equação acima pelo lado direito, temos

$$S \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu) = (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star S - \frac{\hbar}{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial q^\mu},$$

onde $(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu) \star S^{-1} \star S = (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu)$ e $\frac{\partial S}{\partial q^\mu} \star S^{-1} \star S = \frac{\partial S}{\partial q^\mu}$. Multiplicando a Eq. por $S^{-1} \star$ pelo lado esquerdo, obtemos

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu = S^{-1} \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star S - \frac{\hbar}{\epsilon} S^{-1} \star \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \quad (4.78)$$

onde $S^{-1} \star S \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu$. Portanto o campo B_μ obedece a transformação de calibre dada pela Eq. (4.69).

Em analogia com o campo eletromagnético, onde usamos a relação $[D_\mu, D_\nu]$ para encontrar $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, para o caso do Isospin, temos

$$\begin{aligned} [G_\mu, G_\nu] \psi(q, p) &= [p_\mu + i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu), p_\nu + i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu)] \psi(q, p) \\ &= [p_\mu, p_\nu] \psi(q, p) + [p_\mu, i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu)] \psi(q, p) + [i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu), p_\nu] \psi(q, p) \\ &\quad + [i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu), i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu)] \psi(q, p), \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde $[p_\mu, p_\nu] \psi(q, p) = 0$. Iremos calcular cada termo separado para facilitar o entendimento, logo para o segundo termo, temos

$$\begin{aligned} T_{10a} &= [p_\mu, i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu)] \psi(q, p) \\ &= \left[p_\mu - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu}, i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \right] \psi(q, p) \\ &= [p_\mu, i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu)] \psi(q, p) - \left[\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu}, i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \right] \psi(q, p) \\ &= ip_\mu \epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \psi(q, p) - i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) (p_\mu \psi(q, p)) - \frac{i^2 \hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} (\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \psi(q, p)) \\ &\quad + \frac{i^2 \hbar}{2} \epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\mu} \\ &= i\epsilon p_\mu (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \psi(q, p) - i\epsilon p_\mu (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \psi(q, p) - \frac{i^2 \epsilon \hbar}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} \psi(q, p) \\ &\quad - \frac{i^2 \epsilon \hbar}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} \psi(q, p) - \frac{i^2 \hbar}{2} \epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\mu} + \frac{i^2 \hbar}{2} \epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q^\mu} \\ &= -i^2 \hbar \epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} \psi(q, p), \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde com o uso da Eq. (4.8), encontramos a relação

$$(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) (p_\mu \psi(q, p)) = p_\mu ((\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \psi(q, p)) + \frac{i\hbar}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} \psi(q, p).$$

Em analogia com a eq. (4.80) o terceiro termo da eq. (4.79) se transforma como

$$\begin{aligned} T_{10b} &= [i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu), p_\nu] \psi(q, p) \\ &= i^2 \hbar \epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} \psi(q, p). \end{aligned}$$

Já o último termo é dado como

$$\begin{aligned} T_{10c} &= [i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) B_\mu, i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) B_\nu] \psi(q, p) \\ &= i^2 \epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \psi(q, p) - i^2 \epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \psi(q, p). \end{aligned}$$

Logo a relação (4.79) fornece

$$\begin{aligned} [G_\mu, G_\nu] \psi(q, p) &= \hbar \epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} - \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} \right) \psi(q, p) \\ &\quad + i^2 \epsilon^2 \{(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu), (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu)\}_M \psi(q, p) \end{aligned}$$

Portanto, definimos um tensor para o isospin como

$$\mathcal{K}_{\mu\nu} = \frac{\partial b_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial b_\nu}{\partial q^\mu} + \epsilon \{b_\mu, b_\nu\}_M, \quad (4.81)$$

onde $b_\mu = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu$ e $b_\nu = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu$. O tensor para o Isospin transforma-se de acordo com a Eq. (4.78),

$$\mathcal{K}'_{\mu\nu} = S^{-1} \star \mathcal{K}_{\mu\nu} \star S. \quad (4.82)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mu\nu} \star \psi &= S \star \mathcal{K}'_{\mu\nu} \star \psi' \\ &= S \star \mathcal{K}'_{\mu\nu} \star S^{-1} \star \psi \end{aligned}$$

logo,

$$\mathcal{K}_{\mu\nu} \star = S \star \mathcal{K}'_{\mu\nu} \star S^{-1} \star.$$

Multiplicando por S a equação acima pelo lado direito, temos

$$S \star \mathcal{K}'_{\mu\nu} = \mathcal{K}_{\mu\nu} \star S$$

onde $\mathcal{K}'_{\mu\nu} \star S^{-1} \star S = \mathcal{K}'_{\mu\nu}$. Multiplicando a Eq. por $S^{-1} \star$ pelo lado esquerdo, obtemos

$$\mathcal{K}'_{\mu\nu} = S^{-1} \star \mathcal{K}_{\mu\nu} \star S,$$

onde $S^{-1} \star S \star \mathcal{K}'_{\mu\nu} = \mathcal{K}'_{\mu\nu}$.

A partir de agora, iremos desenvolver o cálculo para a eq. (4.81) onde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mu\nu} &= \frac{\partial b_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial b_\nu}{\partial q^\mu} + \{b_\mu, b_\nu\}_M \\ &= \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} - \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} \cdot \vec{\tau} + \epsilon ((\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) - (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu)). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Para as matrizes de Pauli, temos a seguir a seguinte propriedade abaixo

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (4.84)$$

Em nosso caso, iremos calcular uma propriedade similar, conectada ao produto estrela, como vemos abaixo

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \star (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \tilde{A} \star \tilde{B}, \quad (4.85)$$

onde a multiplicação $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ é dada como

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma} = A_x \sigma_y + A_y \sigma_x + A_z \sigma_z = \begin{pmatrix} A_z & A_x - iA_y \\ A_x + iA_y & -A_z \end{pmatrix} = \tilde{A},$$

e para o termo $(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma})$, temos

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} = B_x \sigma_y + B_y \sigma_x + B_z \sigma_z = \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix} = \tilde{B}.$$

Expandindo o produto estrela da Eq. (4.85), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{A} \star \tilde{B} &= \tilde{A} \left(1 + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial} \overleftarrow{\partial} \right) \tilde{B} + O(\hbar^2) \\ &= \tilde{A} \tilde{B} + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial q} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial p} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial p} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial q} + O(\hbar^2) \end{aligned} \quad (4.86)$$

Para encontrar o resultado final da expressão acima, iremos calcular cada termo, separadamente. O primeiro termo é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{A} \tilde{B} &= \begin{pmatrix} A_z & A_x - iA_y \\ A_x + iA_y & -A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix} \\ \tilde{A} \tilde{B} &= \begin{pmatrix} A_z & A_x - iA_y \\ A_x + iA_y & -A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbf{1} + i(A_x B_y - A_y B_x)_z \sigma_z + i(A_z B_x - A_x B_z)_y \sigma_y + i(A_y B_z - A_z B_y)_x \sigma_x \end{aligned}$$

Agora iremos calcular o segundo termo da Eq. (4.86):

$$\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \hat{A}}{\partial q} \frac{\partial \hat{B}}{\partial p} = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial q_z} & \frac{\partial A_x}{\partial q_x} - i \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial q_x} + i \frac{\partial A_y}{\partial q_y} & -\frac{\partial A_z}{\partial q_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} & \frac{\partial B_x}{\partial p_x} - i \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial p_x} + i \frac{\partial B_y}{\partial p_y} & -\frac{\partial B_z}{\partial p_z} \end{pmatrix} = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde definimos os termos a, b, c, d para facilitar o cálculo. Então:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial q_x} - i \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \right) \left(\frac{\partial B_x}{\partial p_x} + i \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \right) \\ &= \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} + \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} + \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} - i \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} + i \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \\ &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p} + i \left(\frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} - \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \left(\frac{\partial B_x}{\partial p_x} - i \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \right) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial q_x} - i \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \right) \frac{-\partial B_z}{\partial p_z} \\ &= \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} - i \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} - \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} + i \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} - \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} \right) + i \left(\frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} - \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial q_x} + i \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \right) \frac{\partial B_z}{\partial p_z} - \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \left(\frac{\partial B_x}{\partial p_x} + i \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \right) \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} + i \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} - \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} - i \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \\
&= - \left(\frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} - \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} \right) + i \left(\frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} - \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial q_x} + i \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \right) \left(\frac{\partial B_x}{\partial p_x} - i \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \right) \\
&= \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} + \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} - i \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} + i \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} + \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \\
&= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p} - i \left(\frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} - \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} \right).
\end{aligned}$$

Logo os termos da matriz $a + d$ nos dá

$$a + d = \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p} 1 + \frac{i\hbar}{2} i \left(\frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} - \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} \right)_{\hat{z}} \sigma_z, \quad (4.87)$$

No caso dos termos da matriz $b + c$ temos

$$b + c = \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} - \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} \right)_{\hat{y}} \sigma_y + \frac{i\hbar}{2} i \left(\frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} - \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \right)_{\hat{x}} \sigma_x \quad (4.88)$$

portanto o segundo termo da Eq. (4.86) se transforma como

$$\begin{aligned}
\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \hat{A}}{\partial q} \frac{\partial \hat{B}}{\partial p} &= \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p} 1 + \frac{i\hbar}{2} i \left(\frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} - \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} \right)_{\hat{z}} \sigma_z \\
&+ \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} - \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} \right)_{\hat{y}} \sigma_y + \frac{i\hbar}{2} i \left(\frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} - \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \right)_{\hat{x}} \sigma_x
\end{aligned}$$

Analogamente para o terceiro termo da Eq. (4.86) temos

$$\begin{aligned}
-\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \hat{A}}{\partial p} \frac{\partial \hat{B}}{\partial q} &= -\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial q} 1 - \frac{i\hbar}{2} i \left(\frac{\partial A_x}{\partial p_x} \frac{\partial B_y}{\partial q_y} - \frac{\partial A_y}{\partial p_y} \frac{\partial B_x}{\partial q_x} \right)_{\hat{z}} \sigma_z \\
&+ \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial p_z} \frac{\partial B_x}{\partial q_x} - \frac{\partial A_x}{\partial p_x} \frac{\partial B_z}{\partial q_z} \right)_{\hat{y}} \sigma_y - \frac{i\hbar}{2} i \left(\frac{\partial A_y}{\partial p_y} \frac{\partial B_z}{\partial q_z} - \frac{\partial A_z}{\partial p_z} \frac{\partial B_y}{\partial q_y} \right)_{\hat{x}} \sigma_x.
\end{aligned}$$

Portanto a Eq. (4.86) é dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \star \tilde{B} &= \hat{A} \hat{B} + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \hat{A}}{\partial q} \frac{\partial \hat{B}}{\partial p} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \hat{A}}{\partial p} \frac{\partial \hat{B}}{\partial q} + O(\hbar^2) \\
&= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i(A_x B_y - A_y B_x)_{\hat{z}} \sigma_z + i(A_z B_x - A_x B_z)_{\hat{y}} \sigma_y + i(A_y B_z - A_z B_y)_{\hat{x}} \sigma_x \\
&+ \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p} \cdot \mathbf{1} + \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} - \frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} \right)_{\hat{z}} i\sigma_z + \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_x}{\partial p_x} - \frac{\partial A_x}{\partial q_x} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} \right)_{\hat{y}} i\sigma_y \\
&+ \frac{i\hbar}{2} i \left(\frac{\partial A_y}{\partial q_y} \frac{\partial B_z}{\partial p_z} - \frac{\partial A_z}{\partial q_z} \frac{\partial B_y}{\partial p_y} \right)_{\hat{x}} \sigma_x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial q} \cdot \mathbf{1} - \frac{i\hbar}{2} i \left(\frac{\partial A_x}{\partial p_x} \frac{\partial B_y}{\partial q_y} - \frac{\partial A_y}{\partial p_y} \frac{\partial B_x}{\partial q_x} \right)_{\hat{z}} \sigma_z \\
&+ \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial p_z} \frac{\partial B_x}{\partial q_x} - \frac{\partial A_x}{\partial p_x} \frac{\partial B_z}{\partial q_z} \right)_{\hat{y}} i\sigma_y - \frac{i\hbar}{2} i \left(\frac{\partial A_y}{\partial p_y} \frac{\partial B_z}{\partial q_z} - \frac{\partial A_z}{\partial p_z} \frac{\partial B_y}{\partial q_y} \right)_{\hat{x}} \sigma_x + O(\hbar^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \star \tilde{B} &= \mathbf{A} \left(1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) + O(\hbar^2) \right) \mathbf{B} \\
&+ \left[A_x \left(1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right) B_y - A_y \left(1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right) B_x \right]_{\hat{z}} i\sigma_z \\
&+ \left[A_z \left(1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right) B_x - A_x \left(1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right) B_z \right]_{\hat{y}} i\sigma_y \\
&+ \left[A_y \left(1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right) B_z - A_z \left(1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right) B_y \right]_{\hat{x}} i\sigma_x \\
&+ O(\hbar^2) \\
&= \mathbf{A} \star \mathbf{B} + (A_x \star B_y - A_y \star B_x)_{\hat{z}} i\sigma_z + (A_z \star B_x - A_x \star B_z)_{\hat{y}} i\sigma_y \\
&+ (A_y \star B_z - A_z \star B_y)_{\hat{x}} i\sigma_x \\
&= \mathbf{A} \star \mathbf{B} + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\star \hat{z}} i\sigma_z + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\star \hat{y}} i\sigma_y + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\star \hat{x}} i\sigma_x \\
&= \mathbf{A} \star \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\star},
\end{aligned}$$

onde

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\star \hat{z}} = (A_x \star B_y - A_y \star B_x)_{\hat{z}},$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\star \hat{y}} = (A_z \star B_x - A_x \star B_z)_{\hat{y}},$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\star \hat{x}} = (A_y \star B_z - A_z \star B_y)_{\hat{x}}.$$

Assim os termos da Eq. (4.83) se transformam como

$$(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) = \mathbf{B}_\mu \star \mathbf{B}_\nu + i\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu)_{\star},$$

e

$$-(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) = -\mathbf{B}_\nu \star \mathbf{B}_\mu - i\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_\nu \times \mathbf{B}_\mu)_\star,$$

Portanto a eq.(4.83) é reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mu\nu} &= \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} - \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} + \epsilon ((\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) - (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\nu) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu)) \\ &= \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} - \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} + i\epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu)_\star - i\epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_\nu \times \mathbf{B}_\mu)_\star \\ &\quad + \epsilon \{\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu\}_M \\ &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k}_{\mu\nu} + \epsilon \{\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu\}_M \end{aligned} \quad (4.91)$$

onde

$$\mathbf{k}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} + i\epsilon (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu)_\star - i\epsilon (\mathbf{B}_\nu \times \mathbf{B}_\mu)_\star. \quad (4.92)$$

A transformação de calibre na forma infinitesimal Eq. (4.70) é dado por

$$S = \exp(-i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = 1 - i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.93)$$

Portanto, a eq. (4.78) se transforma como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu &= S^{-1} \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star S - \frac{1}{\epsilon} S^{-1} \star \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \\ &= (1 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star (1 - i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) - \frac{1}{\epsilon} \left[(1 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \star \frac{\partial(1 - i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})}{\partial q^\mu} \right] \\ &= (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu + i(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu)) \star (1 - i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) - \frac{1}{\epsilon} \left[(1 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \star (-i\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^\mu}) \right] \\ &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu - i(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) + i(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) + (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \left[-i\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^\mu} - i^2(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \star \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^\mu} \right) \right] \\ &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu - i(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) + i(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) + \frac{i}{\epsilon} \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^\mu} \\ &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu - i(\mathbf{B}_\mu \star \boldsymbol{\alpha}) - i^2 \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_\mu \times \boldsymbol{\alpha})_\star + i(\boldsymbol{\alpha} \star \mathbf{B}_\mu) + i^2 \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{B}_\mu)_\star \\ &\quad + \frac{i}{\epsilon} \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^\mu} \\ &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_\mu \times \boldsymbol{\alpha})_\star - \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{B}_\mu)_\star + \frac{i}{\epsilon} \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^\mu} - i \{\mathbf{B}_\mu, \boldsymbol{\alpha}\}_M \end{aligned} \quad (4.94)$$

Definindo a lagrangiana final onde assumimos um campo com spin isotópico 1/2 como ilustração, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{total} &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star G_\mu \star \psi(p, q) + \left(\bar{\psi}(p, q) \star G_\mu \right) \star \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \\
&\quad - m \bar{\psi}(p, q) \star \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star \psi(p, q) - \frac{1}{4} \mathcal{K}^{\mu\nu} \mathcal{K}_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star (p_\mu \star \psi(p, q) + i\epsilon(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \star \psi(p, q)) \right] \\
&\quad + \left[\left(\bar{\psi}(p, q) \star p_\mu + i\epsilon \bar{\psi}(p, q) \star (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu) \right) \star \gamma^\mu \psi(p, q) \right] \\
&\quad - m \bar{\psi}(p, q) \star \psi(p, q) + 2p_\mu \bar{\psi}(p, q) \gamma^\mu \star \psi(p, q) - \frac{1}{4} \mathcal{K}^{\mu\nu} \mathcal{K}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.95}$$

uma lagrangiana invariante que descreve o movimento de um isospin no espaço de fase.

Como foi realizado nas seções anteriores, iremos estudar o produto estrela na forma aproximada, isto é, iremos expandir o produto estrela em \hbar na ordem zero, em série de potência. Expandindo o produto estrela em \hbar na ordem zero, da Eq. (4.69), a transformação de calibre isotópico é dado por

$$\psi(q, p) \rightarrow \psi'(q, p) = S^{-1} \psi(q, p). \tag{4.96}$$

A derivada covariante é definido da seguinte maneira

$$G_\mu = \left(p_\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} \epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu \right) \psi(p, q). \tag{4.97}$$

Exigindo que a derivada covariante se transforme sobre o calibre local, temos

$$\begin{aligned}
G_\mu \psi(p, q) &= S G'_\mu \psi'(p, q) \\
&= S \left(p_\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} \epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu \right) \psi'(p, q) \\
&= S \left(p_\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} \epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu \right) S^{-1} \psi(p, q) \\
&= p_\mu \psi(p, q) - \frac{i}{2} S \frac{\partial}{\partial q^\mu} (S^{-1} \psi(p, q)) + \frac{i}{2} \epsilon S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu S^{-1} \psi(p, q) \\
&= p_\mu \psi(p, q) - \frac{i}{2} S \frac{\partial S^{-1}}{\partial q^\mu} \psi(p, q) - \frac{i}{2} S S^{-1} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} \epsilon S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu S^{-1} \psi(p, q) \\
&= p_\mu \psi(p, q) + \frac{i}{2} \frac{\partial S}{\partial q^\mu} S^{-1} \psi(p, q) - \frac{i}{2} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q^\mu} + \frac{i}{2} \epsilon S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu S^{-1} \psi(p, q)
\end{aligned}$$

Portanto o campo isotópico \mathbf{B}'_μ se transforma da seguinte maneira

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_\mu = S^{-1} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu S - \frac{1}{\epsilon} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial q^\mu}, \tag{4.98}$$

Onde a identidade (4.72) foi utilizada. Similar ao campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$, para o campo Isospin Eq. (4.91), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mu\nu} = & \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} - \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} + i\epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu)_\star - i\epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_\nu \times \mathbf{B}_\mu)_\star \\ & + \epsilon \{\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu\}_M \end{aligned} \quad (4.99)$$

Para o termo $\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu)_\star$ temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu)_\star = & (B_\mu^x \star B_\nu^y - B_\mu^y \star B_\nu^x)_{\hat{z}} + (B_\mu^z \star B_\nu^x - B_\mu^x \star B_\nu^z)_{\hat{y}} \\ & + (B_\mu^y \star B_\nu^z - B_\mu^z \star B_\nu^y)_{\hat{x}} \end{aligned}$$

expandindo o produto estrela em série de potência, $\star = \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q} \right) \right] = 1$ a Eq. acima é reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu) = & (B_\mu^x B_\nu^y - B_\mu^y B_\nu^x)_{\hat{z}} + (B_\mu^z B_\nu^x - B_\mu^x B_\nu^z)_{\hat{y}} \\ & + (B_\mu^y B_\nu^z - B_\mu^z B_\nu^y)_{\hat{x}} \end{aligned}$$

Analogamente, para o termo $(\mathbf{B}_\nu \times \mathbf{B}_\mu)_\star$ temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_\nu \times \mathbf{B}_\mu) = & (B_\nu^x B_\mu^y - B_\nu^y B_\mu^x)_{\hat{z}} + (B_\nu^z B_\mu^x - B_\nu^x B_\mu^z)_{\hat{y}} \\ & + (B_\nu^y B_\mu^z - B_\nu^z B_\mu^y)_{\hat{x}}. \end{aligned}$$

Já o último termo é dado por $\{\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu\}_M = 0$. Portanto a Eq. (4.99) é reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mu\nu} = & \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} - \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} + i\epsilon 2 \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu) \\ = & \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.100)$$

onde

$$\mathbf{k}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} + i\epsilon 2 (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu), \quad (4.101)$$

transforma-se de acordo com (4.96)

$$\mathbf{k}'_{\mu\nu} = S^{-1} \mathbf{k}_{\mu\nu} S.$$

O campo \mathbf{B}_μ dada pela Eq. (4.98) sob uma transformação de calibre na forma infinitesimal (4.93) é

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}'_{\mu} &= S^{-1} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu} S - \frac{i}{\epsilon} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial q^{\mu}} \\
&= (1 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu} (1 - i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) - \frac{1}{\epsilon} \left[(1 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \frac{\partial(1 - i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})}{\partial q^{\mu}} \right] \\
&= (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu} + i(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu})) (1 - i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) - \frac{1}{\epsilon} \left[(1 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \left(-i\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^{\mu}} \right) \right] \\
&= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu} - i(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu})(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) + i(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu}) + (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu})(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \\
&\quad - \frac{1}{\epsilon} \left[-i\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^{\mu}} - i^2(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^{\mu}} \right] \\
&= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu} - i(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu})(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) + i(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu}) + \frac{i}{\epsilon} \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^{\mu}} \\
&= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_{\mu} \times \boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{B}_{\mu}) + \frac{i}{\epsilon} \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^{\mu}} \\
&= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu} + 2\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{B}_{\mu} \times \boldsymbol{\alpha}) + \frac{i}{\epsilon} \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^{\mu}},
\end{aligned}$$

Então a transformação infinitesimal de \mathbf{B}_{μ} é

$$\mathbf{B}'_{\mu} = \mathbf{B}_{\mu} + 2(\mathbf{B}_{\mu} \times \boldsymbol{\alpha}) + \frac{i}{\epsilon} \frac{\partial(\boldsymbol{\alpha})}{\partial q^{\mu}}.$$

Para $\mathbf{k}_{\mu\nu}$, a seguinte densidade lagrangiana pode ser escrita como

$$-\frac{1}{4} \mathbf{k}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{k}_{\mu\nu},$$

e a densidade lagrangiana final, onde assumimos como ilustrativo um campo um campo isotópico spin 1/2, é escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{final} &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}(p, q) \gamma^{\mu} (G_{\mu} \psi(p, q)) + (\bar{G}_{\mu} \bar{\psi}(p, q)) \gamma^{\mu} \psi(p, q) \right] \\
&\quad - m \bar{\psi}(p, q) \psi(p, q) + 2p_{\mu} \bar{\psi}(p, q) \gamma^{\mu} \psi(p, q) - \frac{1}{4} \mathbf{k}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{k}_{\mu\nu}. \quad (4.102)
\end{aligned}$$

onde G_{μ} é dado pela Eq. (4.97) e \bar{G}_{μ} por

$$\bar{G}_{\mu} = p_{\mu} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} + \frac{i}{2} \epsilon \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_{\mu}.$$

Este resultado mostra a obtenção de uma lagrangiana similar a usual obtida para a teoria de calibre de Yang Mills. No próximo capítulo iremos estudar os modelos de Hénon-Heiles e suas variações, através da função de Wigner.

Capítulo 5

Modelos de Hénon-Heiles e a função de Wigner

Neste capítulo, iremos estudar o modelo de Hénon-Heiles quântico descrito pela Eq. (1.1) e suas variações, como por exemplo a soma do potencial de Hénon-Heiles e o potencial do átomo de hidrogênio em um campo magnético forte, dada pela Eq. (1.2) Nosso objetivo é encontrar, a partir da teoria de perturbação no espaço de fase, as quasi-amplitudes de probabilidades. Isto possibilita encontrar as suas respectivas funções de Wigner e o indicador de negatividade para este problema.

O modelo de Hénon-Heiles foi proposto pelo matemático e astrônomo francês Michel Hénon e o astrofísico americano Carl E. Heiles no ano de 1963 com o objetivo de encontrar a terceira integral de movimento galáctico. Este modelo descreve o movimento de um ponto no espaço sob a influência de um potencial gravitacional com simetria cilíndrica (simula o movimento de uma estrela no campo médio de uma galáxia). O Hamiltoniano do sistema clássico é dado por

$$h(q, p) = \frac{1}{2} (p_x^2 + q_x^2) + \frac{1}{2} (p_y^2 + q_y^2) + q_x^2 q_y - \frac{1}{3} q_y^3.$$

O modelo de Hénon-Heiles obteve uma conotação muito abrangente no desenvolvimento de estudos em sistemas caóticos. Atualmente o comportamento caótico vem sendo estudado em muitas áreas do conhecimento, como biologia, medicina, química, economia [60]. Recentemente no caso quântico, foram desenvolvidas abordagens de criptografia de imagem colorida [61], e a correspondência entre o caos clássico e quântico a partir na dinâmica de dois férmions sem spin confinados num fio quântico [62]. Modelos dinâmicos de caos quântico têm sido previamente demonstrados em belas experiências que envolvem átomos frios em armadilhas ópticas [63]. No caso do átomo de hidrogênio em um campo magnético forte [64, 65], este tipo de problema exhibe um comportamento caótico, tornando um bom protótipo para o estudo de caos quânticos.

Na próxima seção, iniciamos o nosso estudo para o modelo de Hénon-Heiles quântico, onde iremos escrever este Hamiltoniano a partir dos operadores de criação e destruição dados pela Eq. (3.19).

5.1 Hamiltoniano de Hénon-Heiles quântico no espaço de fase

O Hamiltoniano para o modelo de Hénon-Heiles quântico é dado por

$$\widehat{H}(q, p) = \frac{1}{2} (\widehat{P}_x^2 + \widehat{Q}_x^2) + \frac{1}{2} (\widehat{P}_y^2 + \widehat{Q}_y^2) + \widehat{V} \quad (5.1)$$

onde

$$\widehat{V} = \widehat{Q}_x^2 \widehat{Q}_y - \frac{1}{3} \widehat{Q}_y^3,$$

e $m = w = \hbar = 1$. Escrevendo em termos dos operadores de criação e destruição

$$\widehat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\widehat{Q}_x + i\widehat{P}_x) \quad \text{e} \quad \widehat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\widehat{Q}_x - i\widehat{P}_x) \quad (5.2)$$

e

$$\widehat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\widehat{Q}_y + i\widehat{P}_y) \quad \text{e} \quad \widehat{B}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\widehat{Q}_y - i\widehat{P}_y), \quad (5.3)$$

de modo que obtemos

$$\widehat{H}(q, p) = \left(\widehat{A}\widehat{A}^\dagger - \frac{1}{2} \right) + \left(\widehat{B}\widehat{B}^\dagger - \frac{1}{2} \right) + \widehat{V} \quad (5.4)$$

onde

$$\widehat{V} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\widehat{A} + \widehat{A}^\dagger)^2 (\widehat{B} + \widehat{B}^\dagger) - \frac{1}{6\sqrt{2}} (\widehat{B} + \widehat{B}^\dagger)^3.$$

Para tratar este sistema de osciladores acoplados, iremos a seguir, estudar a teoria de perturbação nesta representação simplética, com o objetivo de calcular as quasi-amplitudes de probabilidade e as respectivas funções de Wigner.

5.2 Teoria de perturbação independente do tempo não degenerada

Vamos utilizar a teoria de perturbação para solucionar a equação de Schrödinger no espaço de fase submetido ao potencial Hénon-Heiles. A teoria de perturbação baseia-se na obtenção de soluções aproximadas para o problema perturbado com ênfase nas soluções exatas conhecidas para o caso não perturbado. Logo, a equação de Schrödinger (independente do tempo) no espaço de fase para o oscilador Harmônico sem perturbação é, como vimos antes,

$$\widehat{H}^{(0)} \psi_n^{(0)}(q, p) = E_n^{(0)}(q, p) \psi_n^{(0)}(q, p), \quad (5.5)$$

onde

$$\psi_n^0(q, p) = \psi_{nx}^0(q, p)\psi_{ny}^0(q, p),$$

$$E_n^0 = (n_x + 1/2) + (n_y + 1/2),$$

$$\psi_n^0(q, p) = \sqrt{\frac{(-1)^n 2^n}{n! \pi \sqrt{n!}}} (a^\dagger)^n \exp(-2h(q, p)).$$

O sobrescrito zero identifica a quantidade não-perturbada. Sujeitando o oscilador a uma perturbação do tipo

$$\hat{V} = \lambda \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 (\hat{B} + \hat{B}^\dagger) - \frac{1}{6\sqrt{2}} (\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^3 \right), \quad (5.6)$$

onde λ é considerado um parâmetro pequeno, podemos escrever o novo Hamiltoniano como soma de dois termos

$$\hat{H}\psi_n(q, p) = (\hat{H}^{(0)} + \lambda\hat{V})\psi_n(q, p) = E_n\psi_n(q, p), \quad (5.7)$$

onde $\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \lambda\hat{V}$ é o novo Hamiltoniano e $\psi_n(q, p)$ é a função de onda para o sistema perturbado. Escrevendo em seguida ψ_n e E_n como série de potências em λ temos

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \lambda\psi_n^{(1)} + \lambda^{(2)}\psi_n^{(2)} + \dots; \quad (5.8)$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^{(2)} E_n^{(2)} + \dots; \quad (5.9)$$

onde $\psi_n^{(1)}$ é a correção de primeira ordem para a n -ésima função de onda para o sistema não perturbado e $E_n^{(1)}$ é a correção de primeira ordem para a n -ésima energia do sistema não perturbado. As quantidades $\psi_n^{(2)}$ e $E_n^{(2)}$ são as correções de segunda ordem, e assim por diante. Substituindo as Eqs. (5.8) e (5.9) na Eq. (5.7) temos,

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_n(q, p) &= (\hat{H}^{(0)} + \lambda\hat{V})[\psi_n^{(0)} + \lambda\psi_n^{(1)} + \lambda^{(2)}\psi_n^{(2)} + \dots] \\ &= (E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^{(2)} E_n^{(2)} + \dots)[\psi_n^{(0)} + \lambda\psi_n^{(1)} + \lambda^{(2)}\psi_n^{(2)} + \dots], \end{aligned}$$

reorganizando em potências de λ temos

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_n(q, p) &= \hat{H}^{(0)}\psi_n^{(0)} + \lambda(\hat{H}^{(0)}\psi_n^{(1)} + \hat{V}\psi_n^{(0)}) + \lambda^{(2)}(\hat{H}^{(0)}\psi_n^{(2)} + \hat{V}\psi_n^{(1)}) + \dots \\ &= E_n^{(0)}\psi_n^{(0)} + \lambda(E_n^{(0)}\psi_n^{(1)} + E_n^{(1)}\psi_n^{(0)}) \\ &\quad + \lambda^{(2)}(E_n^{(0)}\psi_n^{(2)} + E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} + E_n^{(2)}\psi_n^{(0)}) + \dots \end{aligned}$$

Assim, a menor ordem (λ^0) leva à $\hat{H}^{(0)}\psi_n^{(0)} = E_n^{(0)}\psi_n^{(0)}$. Já a primeira ordem (λ^1)

$$\hat{H}^{(0)}\psi_n^{(1)} + \hat{V}\psi_n^{(0)} = E_n^{(0)}\psi_n^{(1)} + E_n^{(1)}\psi_n^{(0)}. \quad (5.10)$$

Para a segunda (λ^2), temos

$$\hat{H}^{(0)}\psi_n^{(2)} + \hat{V}\psi_n^{(1)} = E_n^{(0)}\psi_n^{(2)} + E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} + E_n^{(2)}\psi_n^{(0)}, \quad (5.11)$$

e assim por diante.

5.3 Correção de 1ª ordem para o modelo de Hénon-Heiles

Vamos reescrever a Eq. (5.10) como

$$(\widehat{H}_n^{(0)} - E_n^{(0)})\psi_n^{(1)} = (E_n^{(1)} - \widehat{V})\psi_n^{(0)}. \quad (5.12)$$

Podemos realizar uma expansão $\psi_n^{(1)}$ em termos das funções de onda do sistema não perturbado da seguinte maneira

$$\psi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} a_m^{(1)} \psi_m^{(0)}. \quad (5.13)$$

Substituindo a Eq. (5.13) na Eq. (5.12), multiplicando por $\psi_k^{(0)\dagger} \star$ ambos os membros e realizando uma integração em todo o espaço de fase, obtemos

$$\sum_{m \neq n} a_m^{(1)} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \int \psi_k^{(0)\dagger} \star \psi_m^{(0)} dpdq = \int \psi_k^{(0)\dagger} (E_n^{(1)} - \widehat{V}) \psi_n^{(0)} dpdq. \quad (5.14)$$

Assumindo que as funções de onda do sistema não perturbado são ortogonais, isto é,

$$\int \psi_k^{(0)\dagger} \star \psi_m^{(0)} dpdq = \int \psi_k^{(0)\dagger} \psi_m^{(0)} dpdq = \delta_{km}, \quad (5.15)$$

escrevemos a Eq. (5.14) como

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq n} a_m^{(1)} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \int \psi_k^{(0)\dagger} \star \psi_m^{(0)} dpdq &= E_n^{(1)} \int \psi_k^{(0)\dagger} \star \psi_n^{(0)} dpdq - \int \psi_k^{(0)\dagger} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq \\ \sum_{m \neq n} a_m^{(1)} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \delta_{km} &= E_n^{(1)} \delta_{kn} - \int \psi_k^{(0)\dagger} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq \\ a_k^{(1)} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) &= E_n^{(1)} \delta_{kn} - \int \psi_k^{(0)\dagger} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Portanto, temos dois casos a considerar, uma quando $k = n$ e a outro quando $k \neq n$. Para $k = n$, a Eq. (5.16) fornece a correção de primeira ordem para a energia do sistema não perturbado, i.é

$$E_n^{(1)} = \int \psi_n^{(0)\dagger} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq. \quad (5.17)$$

Já para $k \neq n$ a Eq. (5.16) leva a

$$a_k = \frac{\int \psi_k^{(0)\dagger} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})}. \quad (5.18)$$

Substituindo a Eq. (5.18) na Eq. (5.13) e trocamos o índice k por m , podemos escrever

$$\psi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\int \psi_m^{(0)\dagger} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}. \quad (5.19)$$

Portanto, a aproximação de primeira ordem para a função de onda ψ_n do sistema perturbado leva a

$$\begin{aligned}\psi_n(q, p) &= \psi_n^{(0)}(q, p) + \lambda\psi_n^{(1)}(q, p) \\ &= \psi_n^{(0)}(q, p) + \lambda \sum_{m \neq n} \frac{\int \psi_m^{(0)\dagger} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Antes de calcular a função de Wigner, precisamos definir a normalização de $\psi_n(q, p)$. Neste caso, impondo a condição

$$\int \psi_n^\dagger \star \psi_n dpdq \int \psi_n^\dagger \psi_n dpdq = 1,$$

e usando a expansão completa para $\psi_n(q, p)$ Eq. 5.8, em conjunto com

$$\int \psi_n^{(0)\dagger} \star \psi_n^{(0)} dpdq = \int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(0)} dpdq = 1,$$

a Eq. de normalização é dada por

$$\begin{aligned}\int \psi_n^\dagger \star \psi_n dpdq &= \int \psi_n^\dagger \psi_n dpdq \\ &= \int \left[(\psi_n^{(0)\dagger} + \lambda\psi_n^{(1)\dagger} + \lambda^{(2)\dagger}\psi_n^{(2)} + \dots) \right. \\ &\quad \left. (\psi_n^{(0)} + \lambda\psi_n^{(1)} + \lambda^{(2)}\psi_n^{(2)} + \dots) \right] dpdq \\ &= \int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(0)} dpdq + \lambda \int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(1)} dpdq + \lambda^2 \int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(2)} dpdq \\ &\quad \lambda \int \psi_n^{(1)\dagger} \psi_n^{(0)} dpdq + \lambda^2 \int \psi_n^{(1)\dagger} \psi_n^{(1)} dpdq + \lambda^3 \int \psi_n^{(1)\dagger} \psi_n^{(2)} dpdq \\ &\quad \lambda^2 \int \psi_n^{(2)\dagger} \psi_n^{(0)} dpdq + \dots\end{aligned}$$

Reorganizando em potências de λ , a equação de normalização, encontramos as seguintes relações

$$\lambda^0 : \quad \int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(0)} dpdq = 1,$$

$$\lambda^1 : \quad \int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(1)} dpdq + \int \psi_n^{(1)\dagger} \psi_n^{(0)} dpdq = 0,$$

$$\lambda^2 : \quad \int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(2)} dpdq + \int \psi_n^{(1)\dagger} \psi_n^{(1)} dpdq + \int \psi_n^{(2)\dagger} \psi_n^{(0)} dpdq = 0.$$

Para λ^0 temos $\int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(0)} dpdq = 1$. No caso de λ^1 , encontramos $\int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(1)} dpdq = 0$ onde

$$\int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(1)} dpdq = \int \psi_n^{(1)\dagger} \psi_n^{(0)} dpdq.$$

Para a segunda ordem λ^2 , temos

$$\int \psi_n^{(0)\dagger} \psi_n^{(2)} dpdq = -\frac{1}{2} \int \psi_n^{(1)\dagger} \psi_n^{(1)} dpdq$$

e assim por diante.

Para encontrar a função de Wigner, primeiro iremos calcular as funções de quasi-amplitudes para o potencial de Hénon-Heiles quântico no espaço de fase. Para isto, vamos realizar o cálculo usando primeiro a Eq. (5.19), logo

$$\psi_n^{(1)}(q, p) = \sum_{m \neq n} \frac{\int \psi_m^{(0)\dagger} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 (\hat{B} + \hat{B}^\dagger) - \frac{1}{6\sqrt{2}} (\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^3 \right) \psi_n^{(0)} dpdq}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)} \quad (5.21)$$

Utilizando os operadores de criação e destruição dados na Eqs. (5.2) e (5.3) em conjunto com as relações

$$\hat{A} \psi_n^{(0)}(q, p) = \sqrt{n} \psi_{n-1}^{(0)}(q, p) \quad \text{e} \quad \hat{A}^\dagger \psi_n^{(0)}(q, p) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}^{(0)}(q, p) \quad (5.22)$$

obtemos a seguinte expressão para a correção em primeira ordem da função de onda

$$\begin{aligned} \psi_n(q, p) &= \psi_n^{(0)}(q, p) + \psi_n^{(1)}(q, p) \\ &= \psi_n^{(0)}(q, p) + \frac{1}{4\sqrt{2}} a_0 - \frac{1}{6\sqrt{2}} a_1, \end{aligned}$$

onde $\psi_n(q, p) = \psi_{n_x}(q_x, p_x) \psi_{n_y}(q_y, p_y)$ e

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{n_x(n_x-1)} \psi_{n_x-2}^{(0)} \sqrt{n_y} \psi_{n_y-1}^{(0)} - \sqrt{n_x(n_x-1)} \psi_{n_x-2}^{(0)} \sqrt{n_y+1} \psi_{n_y+1}^{(0)} \\ &\quad - \sqrt{(n_x+1)(n_x+2)} \psi_{n_x+2}^{(0)} \sqrt{n_y} \psi_{n_y-1}^{(0)} + \sqrt{(n_x+1)(n_x+2)} \psi_{n_x+2}^{(0)} \sqrt{n_y+1} \psi_{n_y+1}^{(0)}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3} \sqrt{n_y(n_y-1)(n_y-2)} \psi_{n_y-3}^{(0)} + \left(\sqrt{n_y(n_y+1)^2} + \sqrt{n_y^3} + \sqrt{n_y(n_y-1)^2} \right) \psi_{n_y-1}^{(0)} \\ &\quad - \left(\sqrt{(n_y+1)(n_y+2)^2} + \sqrt{(n_y+1)^3} + \sqrt{n_y^2(n_y+1)} \right) \psi_{n_y+1}^{(0)} \\ &\quad - \frac{1}{3} \sqrt{(n_y+1)(n_y+2)(n_y+3)} \psi_{n_y+3}^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Com este resultado podemos calcular a função de Wigner, que é dada por

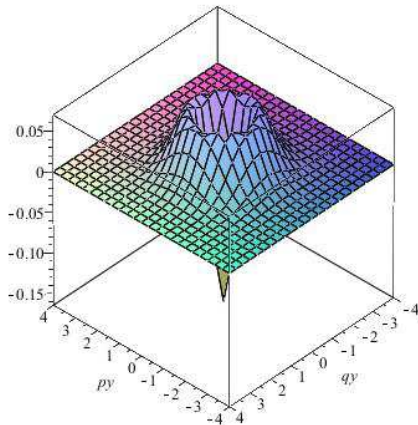
$$f_n^1(q_x, p_x, q_y, p_y) = \psi_{n_x}(q_x, p_x) \psi_{n_y}(q_y, p_y) \star \psi_{n_x}^\dagger(q_x, p_x) \psi_{n_y}^\dagger(q_y, p_y).$$

A função de Wigner é plotada no plano p_y, q_y . O comportamento da função de Wigner é demonstrado através das figuras 5.1 e 5.2, com seus respectivos máximos e mínimos na tabela 5.1.

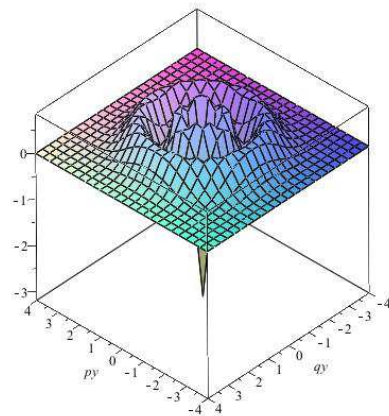
Tabela 5.1: Máximos e mínimos da função de Wigner primeira ordem.

n	Máximo	Mínimo
0	0.070	-0.164
2	0.860	-3.185
4	1.922	-4.928
6	0.253	-0.725
8	0.004	-0.012
10	0.00012	-0.00032

Note que para o estado fundamental $n = 0$ e os demais estados excitados, a função de Wigner assume valores negativos.



(a) Função de Wigner $n=0$.



(b) Função de Wigner $n=2$.

Figura 5.1: Funções de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de primeira ordem.

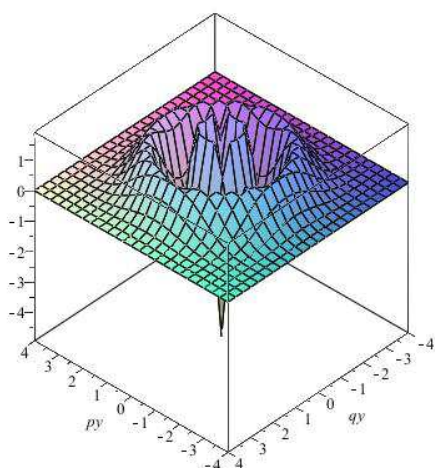
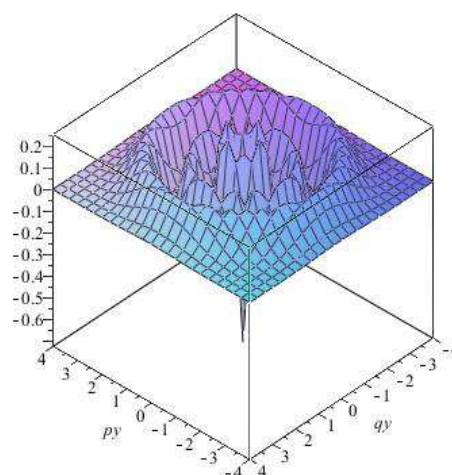
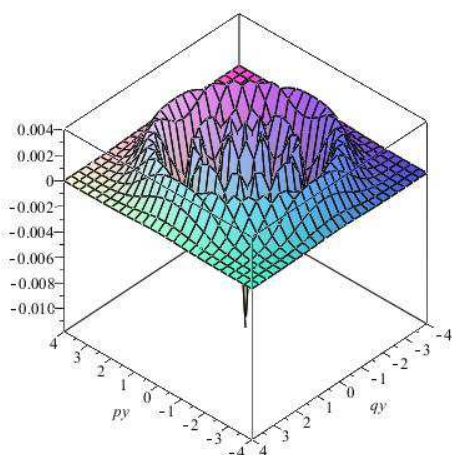
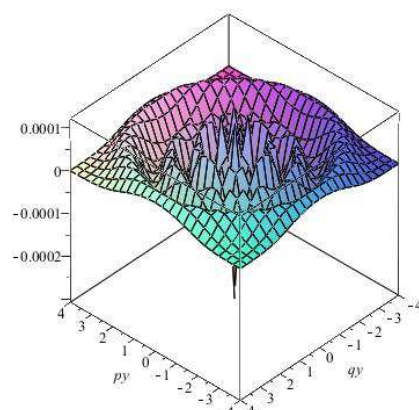
(a) Função de Wigner $n=4$.(b) Função de Wigner $n=6$.(c) Função de Wigner $n=8$.(d) Função de Wigner $n=10$.

Figura 5.2: Funções de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de primeira ordem.

Na seção seguinte, iremos estudar a correção de segunda ordem para o sistema de Hénon-Heiles quântico.

5.4 Correção de 2ª ordem para o modelo de Hénon-Heiles

Para obter a correção de segunda ordem, iremos fazer o uso da Eq. (5.11) dada por

$$\left(\widehat{H}^{(0)} - E_n^{(0)}\right) \psi_n^{(2)} = -\left(\widehat{V} - E_n^{(1)}\right) \psi_n^{(1)} + E_n^{(2)} \psi_n^{(0)}. \quad (5.25)$$

Os termos $\psi_n^{(2)}$ e $\psi_n^{(1)}$ podem ser escritos em termos das funções de onda do sistema não perturbado da seguinte maneira

$$\psi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} a_m^1 \psi_m^{(0)}, \quad (5.26)$$

e

$$\psi_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} a_m^2 \psi_m^{(0)}. \quad (5.27)$$

Substituindo as Eqs. (5.26)-(5.27) na Eq. (5.25), temos

$$\begin{aligned} \left(\widehat{H}^{(0)} - E_n^{(0)}\right) \sum_{m \neq n} a_m^2 \psi_m^{(0)} &= -\left(\widehat{V} - E_n^{(1)}\right) \sum_{m \neq n} a_m^1 \psi_m^{(0)} + E_n^{(2)} \psi_n^{(0)} \\ \sum_{m \neq n} \left(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}\right) a_m^2 \psi_m^{(0)} &= -\sum_{m \neq n} \left(\widehat{V} - E_n^{(1)}\right) a_m^1 \psi_m^{(0)} + E_n^{(2)} \psi_n^{(0)}, \end{aligned}$$

multiplicando por $\psi_k^{(0)\dagger}$ e integrando em $dpdq$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) a_m^{(2)} \int \psi_k^{\dagger(0)} \star \psi_m^{(0)} dpdq &= -\sum_{m \neq n} a_m^{(1)} \int \psi_k^{\dagger(0)} (\widehat{V} - E_n^1) \psi_m^{(0)} dpdq \\ &\quad + E_n^2 \int \psi_k^{\dagger(0)} \star \psi_m^{(0)} dpdq \\ \sum_{m \neq n} a_m^{(2)} (E_m^0 - E_n^0) \delta_{km} &= -\sum_{m \neq n} a_m^{(1)} \left(\int \psi_k^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_m^{(0)} dpdq - E_n^1 \delta_{km} \right) + E_n^2 \delta_{kn} \\ a_k^{(2)} (E_k^0 - E_n^0) &= -\sum_{m \neq n} a_m^{(1)} \int \psi_k^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_m^{(0)} dpdq \\ &\quad + \sum_{k \neq n} a_k^{(1)} E_n^1 + E_n^2 \delta_{kn} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para a Eq.(5.28) temos duas condições. Primeiro para $k = n$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n^{(2)} (E_n^0 - E_n^0) &= -\sum_{m \neq n} a_m^{(1)} \int \psi_n^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_m^{(0)} dpdq + a_n^{(1)} E_n^1 + E_n^2 \delta_{nn} \\ E_n^2 &= \sum_{m \neq n} a_m^{(1)} \int \psi_n^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_m^{(0)} dpdq - a_n^{(1)} E_n^1 \end{aligned}$$

mantendo $a_n^{(1)} = 0$ como no caso anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
E_n^2 &= \sum_{m \neq n} a_m^{(1)} \int \psi_n^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_m^{(0)} dpdq \\
&= \sum_{m \neq n} \frac{\int \psi_m^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} dpdq \int \psi_n^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_m^{(0)} dpdq \\
&= \sum_{m \neq n} \frac{|\int \psi_m^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} dpdq.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

A eq. (5.29) é a correção de segunda ordem para a energia de um sistema não perturbado. A segunda condição para a Eq.(5.28) é $k \neq n$, logo

$$a_k^{(2)}(E_k^0 - E_n^0) = - \sum_{m \neq n} a_m^{(1)} \int \psi_k^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_m^{(0)} dpdq + a_k^{(1)} E_n^1$$

Inserindo as equações Eq.(5.3)-(5.18) na equação acima, encontramos

$$\begin{aligned}
a_k^{(2)}(E_k^0 - E_n^0) &= - \sum_{m \neq n} a_m^{(1)} \int \psi_k^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_m^{(0)} dpdq + a_k^{(1)} E_n^1 \\
&= - \sum_{m \neq n} \int \frac{\psi_m^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} dpdq \int \psi_k^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_m^{(0)} dpdq + a_k^{(1)} \int \psi_n^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq \\
a_k^{(2)} &= \sum_{m \neq n} \int \frac{\psi_m^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} dpdq \int \frac{\psi_k^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_m^{(0)}}{(E_n^0 - E_k^0)} dpdq \\
&\quad - \int \frac{\psi_k^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)}}{(E_n^0 - E_k^0)} dpdq \int \frac{\psi_n^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)}}{(E_n^0 - E_k^0)} dpdq.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Substituindo a Eq. (5.30) na Eq. (5.27), e trocando o índice k por m , podemos escrever a correção em segunda ordem da função de onda como

$$\begin{aligned}
\psi_n^{(2)} &= \sum_{m \neq n} a_m^{(2)} \psi_m^{(0)} \\
&= \sum_{m \neq n} \left(\sum_{k \neq n} \int \frac{\psi_m^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_k^{(0)}}{(E_n^0 - E_m^0)} dpdq \int \frac{\psi_k^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} dpdq \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{\psi_m^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)}}{(E_n^0 - E_m^0)^2} dpdq \int \psi_n^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq \right) \psi_m^{(0)}.
\end{aligned}$$

Portanto, a aproximação de segunda ordem para a função de onda ψ_n normalizada do sistema perturbado é dado por

$$\begin{aligned}
\psi_n(q, p) &= \psi_n^{(0)}(q, p) + \lambda^1 \psi_n^{(1)}(q, p) + \lambda^2 \psi_n^{(2)}(q, p) \\
&= \psi_n^{(0)}(q, p) + \lambda^1 \sum_{m \neq n} \frac{\int \psi_m^{(0)\dagger} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)} \\
&\quad + \lambda^2 \sum_{m \neq n} \left(\sum_{k \neq n} \int \frac{\psi_m^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_k^{(0)}}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} dpdq \int \frac{\psi_k^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} dpdq \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{\psi_m^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)}}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})^2} dpdq \int \psi_n^{\dagger(0)} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq \right) \psi_m^{(0)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \psi_n^{(0)} \sum_{m \neq n} \frac{|\psi_m^{(0)\dagger} \widehat{V} \psi_n^{(0)} dpdq|^2}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})^2}. \tag{5.31}
\end{aligned}$$

A função de onda para o potencial de Hénon-Heiles para a correção em segunda ordem é dada por:

$$\begin{aligned}
\psi_n(q, p) &= \psi_n^{(0)}(q, p) + \psi_n^{(1)}(q, p) + \psi_n^{(2)}(q, p) \\
&= \psi_n^{(0)}(q, p) + \frac{1}{4\sqrt{2}} a_0 - \frac{1}{6\sqrt{2}} a_1 + \frac{1}{32} a_2 - \frac{1}{1152} a_3 + \frac{1}{128} a_4 + \frac{1}{72} a_5 + a_6 + a_7
\end{aligned}$$

onde $\psi_n(q, p) = \psi_{n_x}(q_x, p_x) \psi_{n_y}(q_y, p_y)$, os termos a_0 e a_1 dados pelas Eqs. (5.23) e (5.24) respectivamente e os demais termos dados por

$$\begin{aligned}
a_2 &= \sqrt{(n_x - 1)} \left[\left(n_x^{\frac{3}{2}} \psi_{n_x-2}^{(0)} \sqrt{n_y(n_y - 1)} - \frac{416}{288} \sqrt{n_x} \psi_{n_x-2}^{(0)} n_y^{\frac{3}{2}} \sqrt{(n_y - 1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{352}{576} \sqrt{n_x} \psi_{n_x-2}^{(0)} \sqrt{n_y(n_y - 1)} \right) \psi_{n_y-2}^{(0)} + \left(n_x^{\frac{3}{2}} \psi_{n_x-2}^{(0)} \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{736}{192} \sqrt{n_x} \psi_{n_x-2}^{(0)} \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)} - \frac{416}{288} \sqrt{n_x} \psi_{n_x-2}^{(0)} n_y \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)} \right) \psi_{n_y+2}^{(0)} \right] \\
&\quad + \sqrt{(n_x + 1)(n_x + 2)} \left[\left(\frac{2272}{576} \psi_{n_x+2}^{(0)} \sqrt{n_y(n_y - 1)} + \frac{224}{288} \psi_{n_x+2}^{(0)} n_y^{\frac{3}{2}} \sqrt{(n_y - 1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{96}{64} n_x \psi_{n_x+2}^{(0)} \sqrt{n_y(n_y - 1)} \right) \psi_{n_y-2}^{(0)} + \left(\frac{544}{192} \psi_{n_x+2}^{(0)} \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{224}{288} \psi_{n_x+2}^{(0)} n_y \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)} + n_x \psi_{n_x+2}^{(0)} \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)} \right) \psi_{n_y+2}^{(0)} \right] \tag{5.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= \sqrt{(n_x + 1)(n_x + 2)} \psi_{n_x+2}^{(0)} \sqrt{n_y(n_y - 1)(n_y - 2)(n_y - 3)} \psi_{n_y-4}^{(0)} \\
&\quad + \sqrt{(n_x + 1)(n_x + 2)} \psi_{n_x+2}^{(0)} \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)(n_y + 3)(n_y + 4)} \psi_{n_y+4}^{(0)} \\
&\quad + 5 \sqrt{n_x(n_x - 1)} \psi_{n_x-2}^{(0)} \sqrt{n_y(n_y - 1)(n_y - 2)(n_y - 3)} \psi_{n_y-4}^{(0)} \\
&\quad - \sqrt{n_x(n_x - 1)} \psi_{n_x-2}^{(0)} \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)(n_y + 3)(n_y + 4)} \psi_{n_y+4}^{(0)} \tag{5.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a4 = & \sqrt{(n_x + 1)(n_x + 2)(n_x + 3)(n_x + 4)}\psi_{n_x+4}^{(0)}\sqrt{n_y(n_y - 1)}\psi_{n_y-2}^{(0)} \\
& + \sqrt{(n_x + 1)(n_x + 2)(n_x + 3)(n_x + 4)}\psi_{n_x+4}^{(0)}\sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)}\psi_{n_y+2}^{(0)} \\
& + \sqrt{n_x(n_x - 1)(n_x - 2)(n_x - 3)}\psi_{n_x-4}^{(0)}\sqrt{n_y(n_y - 1)}\psi_{n_y-2}^{(0)} \\
& + \sqrt{n_x(n_x - 1)(n_x - 2)(n_x - 3)}\psi_{n_x-4}^{(0)}\sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)}\psi_{n_y+2}^{(0)} \\
& + 128\left(-\frac{19}{144}n_y^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{144}n_y^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{144}\sqrt{n_y}\right)\sqrt{n_y - 1}\psi_{n_y-2}^{(0)} \\
& + 128\left(\frac{7}{144}n_y^2 + \frac{3}{16} + \frac{11}{48}n_y\right)\sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)}\psi_{n_y+2}^{(0)} \tag{5.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a5 = & \left(n_y^{\frac{3}{2}} - \frac{72}{96}n_y^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{(n_y - 1)(n_y - 2)(n_y - 3)}\psi_{n_y-4}^{(0)} \\
& + \left(\frac{504}{288} + n_y\right)\sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)(n_y + 3)(n_y + 4)}\psi_{n_y+4}^{(0)} \\
& - \frac{72}{1296}\sqrt{n_y(n_y - 1)(n_y - 2)(n_y - 3)(n_y - 4)(n_y - 5)}\psi_{n_y-6}^{(0)} \\
& + \frac{72}{1296}\sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)(n_y + 3)(n_y + 4)(n_y + 5)(n_y + 6)}\psi_{n_y+6}^{(0)} \tag{5.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a6 = & \frac{1}{144}\left(\sqrt{n_x + 1}\sqrt{n_x + 2}\sqrt{n_y + 1}\sqrt{n_y}\sqrt{n_y - 1}\sqrt{n_y - 2}\right. \\
& + n_y\sqrt{n_x}\sqrt{n_x - 1}\sqrt{n_y - 1}\sqrt{n_y - 2} \\
& - \sqrt{n_x + 1}\sqrt{n_x + 2}n_y\sqrt{n_y - 1}\sqrt{n_y - 2} + n_y\sqrt{n_x}\sqrt{n_x - 1}\sqrt{n_y + 2}\sqrt{n_y + 3} \\
& - \sqrt{n_x + 1}\sqrt{n_x + 2}\sqrt{n_y + 2}\sqrt{n_y + 3}n_y + \sqrt{n_x}\sqrt{n_x - 1}\sqrt{n_y + 2}\sqrt{n_y + 3} \\
& - \sqrt{n_x + 1}\sqrt{n_x + 2}\sqrt{n_y + 2}\sqrt{n_y + 3} \\
& - \sqrt{n_y}\sqrt{n_x}\sqrt{n_x - 1}\sqrt{n_y + 1}\sqrt{n_y + 2}\sqrt{n_y + 3} \\
& - \sqrt{n_y + 1}\sqrt{n_x}\sqrt{n_x - 1}\sqrt{n_y}\sqrt{n_y - 1}\sqrt{n_y - 2} \\
& \left. + \sqrt{n_x + 1}\sqrt{n_x + 2}\sqrt{n_y}\sqrt{n_y + 1}\sqrt{n_y + 2}\sqrt{n_y + 3}\right)\psi_{n_x, n_y}^{(0)} \\
& + \left(-1/36 n_y\sqrt{n_y + 2}\sqrt{n_y + 3} - \frac{337}{1296}n_y - 1/32 n_x^2 - \frac{41}{216}n_y^2 - 1/32 n_x\right. \\
& + \frac{1}{648}\sqrt{n_y}\sqrt{n_y - 1}\sqrt{n_y - 2}\sqrt{n_y + 1}\sqrt{n_y + 2}\sqrt{n_y + 3} \\
& \left. - 1/16\sqrt{n_y}\sqrt{n_x}\sqrt{n_x - 1}\sqrt{n_x + 1}\sqrt{n_x + 2}\sqrt{n_y + 1} - \frac{41}{324}n_y^3 - \frac{85}{864}\right)\psi_{n_x, n_y}^{(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a7 = & \frac{1}{16} \left(-2\sqrt{n_x+1}\sqrt{n_x+2}n_y + n_y\sqrt{n_x}\sqrt{n_x-1}\sqrt{n_x+1}\sqrt{n_x+2} - n_y n_x^2 - n_y n_x \right. \\
& + 1/2\sqrt{n_x}\sqrt{n_x-1}\sqrt{n_x+1}\sqrt{n_x+2} - 2n_y^{3/2}\sqrt{n_x}\sqrt{n_x-1}\sqrt{n_y+1} \\
& + 2\sqrt{n_x+1}\sqrt{n_x+2}n_y^{3/2}\sqrt{n_y+1} - 2\sqrt{n_y}\sqrt{n_x}\sqrt{n_x-1}\sqrt{n_y+1} \\
& + 2\sqrt{n_x+1}\sqrt{n_x+2}\sqrt{n_y}\sqrt{n_y+1} + 2\sqrt{n_y+1}n_y^{3/2} + 2\sqrt{n_y+1}n_y^{5/2} \\
& - \sqrt{n_x+1}\sqrt{n_x+2} + 2n_y^2\sqrt{n_x}\sqrt{n_x-1} + \sqrt{n_y}n_x^2\sqrt{n_y+1} \\
& - \sqrt{n_x+1}\sqrt{n_x+2}n_y^2 + \sqrt{n_y}\sqrt{n_y+1} + 2n_y\sqrt{n_x}\sqrt{n_x-1} \\
& \left. + \sqrt{n_y}n_x\sqrt{n_y+1} + \sqrt{n_x}\sqrt{n_x-1} \right) \psi_{n_x, n_y}^{(0)} \\
& + \frac{1}{72} \left(-n_y^2\sqrt{n_y-1}\sqrt{n_y-2} + \sqrt{n_y+1}n_y^{3/2}\sqrt{n_y-1}\sqrt{n_y-2} \right. \\
& - n_y^2\sqrt{n_y+2}\sqrt{n_y+3} + \sqrt{n_y+1}\sqrt{n_y}\sqrt{n_y-1}\sqrt{n_y-2} \\
& \left. + n_y^{3/2}\sqrt{n_y+1}\sqrt{n_y+2}\sqrt{n_y+3} - \sqrt{n_y+2}\sqrt{n_y+3} \right) \psi_{n_x, n_y}^{(0)}
\end{aligned}$$

Com isto, a função de Wigner para correção de segunda ordem é dada por

$$f_n^2(q_x, p_x, q_y, p_y) = \psi_{n_x}(q_x, p_x)\psi_{n_y}(q_y, p_y) \star \psi_{n_x}^\dagger(q_x, p_x)\psi_{n_y}^\dagger(q_y, p_y).$$

O comportamento da função de Wigner é demonstrado através das figuras (5.3) com seus respectivos máximos e mínimos na tabela (5.2).

Comparando as tabelas (5.1) e (5.2), notamos que alguns valores máximos e mínimos para a correção da segunda ordem da função de Wigner, em relação a alguns estados excitados aumentam em relação a correção de primeira ordem. Por exemplo, o sexto estado excitado $n = 6$ onde a negatividade aumenta de -0.725 para -2.017 . O mesmo comportamento se dá para $n = 8$ e $n = 10$. Já para os estados $n = 0$, $n = 2$ e $n = 4$ ocorre uma diminuição da negatividade para a correção de segunda ordem em relação a primeira ordem.

Tabela 5.2: Função de Wigner segunda ordem.

n	Máximo	Mínimo
0	0.077	-0.073
2	0.851	-1.982
4	1.564	-3.636
6	5.675	-2.017
8	3.012	-1.117
10	0.236	-0.084

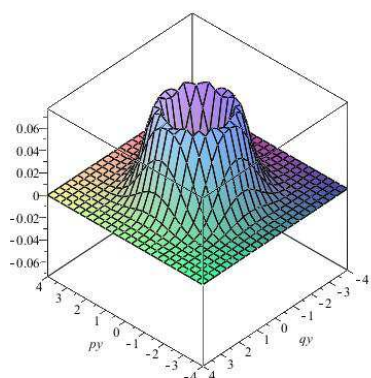
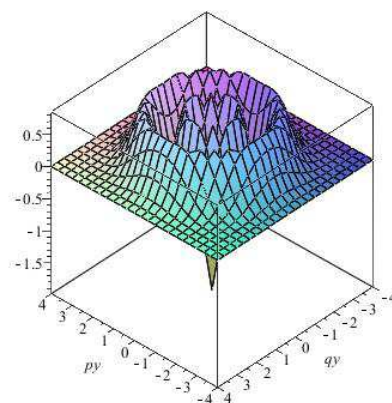
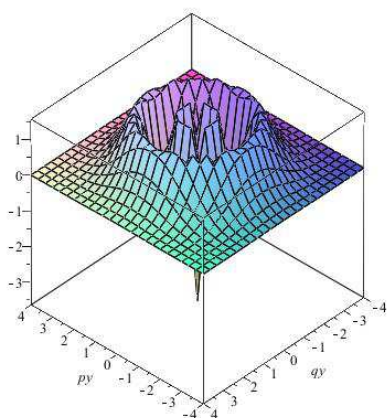
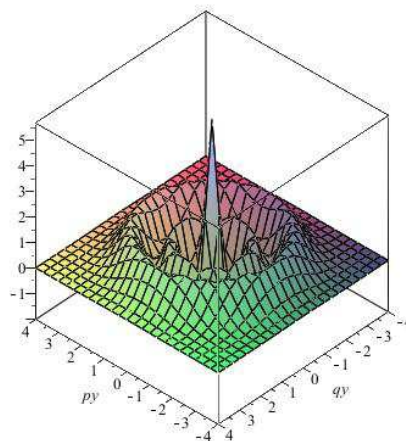
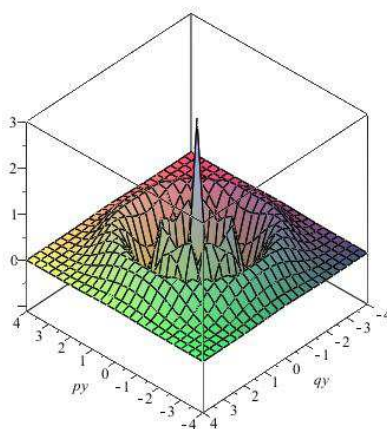
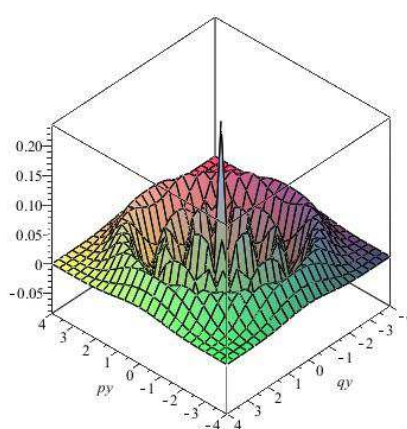
(a) Função de Wigner, $n=0$.(b) Função de Wigner, $n=2$.(c) Função de Wigner, $n=4$.(d) Função de Wigner, $n=6$.(e) Função de Wigner, $n=8$.(f) Função de Wigner, $n=10$.

Figura 5.3: Funções de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de segunda ordem.

Na próxima seção, iremos encontrar a função de Wigner para a soma dos potenciais de Hénon-Heiles com o átomo de hidrogênio.

5.5 Hénon Heiles e o átomo de Hidrogênio em um campo magnético forte

O hamiltoniano que descreve o átomo de hidrogênio interagindo com um campo magnético forte é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}P^2 - \frac{e^2}{r} + \frac{\gamma}{2}L_z + \frac{\gamma^2}{8}(Q_x^2 + Q_y^2), \quad (5.36)$$

onde $r = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}$, e a direção do campo magnético é considerado na direção z . O termo $\frac{\gamma}{2}L_z$ é o componente do momento angular e $\frac{\gamma^2}{8}(Q_x^2 + Q_y^2)$ o termo diamagnético. Foram utilizadas unidades atômicas para as quantidades ($m = e = \hbar = 1$). A quantidade $\gamma = B/B_0$ é o campo magnético em unidades atômicas de $2.35 \times 10^5 T$.

Este modelo quando escrito em coordenadas cilíndricas, se torna um bom protótipo para estudar caos quântico [54, 64]. Isto é possível porque é observado uma manifestação de caos, ao analisar a dinâmica clássica do seu espectro quântico. Para estudar a dinâmica clássica do hamiltoniano Eq.(5.36), usa-se uma transformação de escala da posição e momentum em termos de γ , escrita da seguinte forma

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= \gamma^{-1/3}P \\ \tilde{r} &= \gamma^{2/3}r, \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

e o hamiltoniano Eq. (5.36) escrita em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\gamma^{-2/3}\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\tilde{p}_\rho^2 + \frac{1}{2}\tilde{p}_z^2 - (\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{-1/2} + \frac{\tilde{\rho}^2}{8}, \quad (5.38)$$

onde $\tilde{\rho}^2 = \tilde{Q}_x^2 + \tilde{Q}_y^2$ e o termo $\frac{\gamma}{2}L_z$ é uma constante devido a simetria azimutal sobre o eixo do campo magnético, e a dinâmica clássica depende apenas da escala de energia $\varepsilon = E\gamma^{-2/3}$. Isto possibilita explorar diferentes áreas do espectro quântico, mantendo invariante a estrutura da dinâmica clássica. Para remover a singularidade do hamiltoniano Eq. (5.38) em $\tilde{r} = 0$, introduzimos coordenadas semi-parabólicas dadas por

$$\nu^2 = \tilde{r} - \tilde{z}, \quad \mu^2 = \tilde{r} + \tilde{z}, \quad (5.39)$$

com

$$\rho = \nu\mu, \quad \tilde{r} = \frac{1}{2}(\mu^2 + \nu^2) \quad \tilde{z} = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2). \quad (5.40)$$

Portanto os termos da Eq. (5.38) se transformam como

$$-(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{-1/2} + \frac{\tilde{\rho}^2}{8} = -\frac{2}{(\mu^2 + \nu^2)} + \frac{\mu^2\nu^2}{8}.$$

Já o termo $\frac{1}{2}\tilde{p}_\rho^2 + \frac{1}{2}\tilde{p}_z^2$ é calculado da seguinte maneira

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = \nu \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} + \mu \frac{\partial}{\partial \tilde{z}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} = \nu \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \mu \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \nu \frac{\partial}{\partial \tilde{z}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} = \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - \nu \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}},$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} &= \nu \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - \nu \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \\ &= \nu \left(\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} + \mu \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} + \mu \left(\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} + \mu \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \\ &\quad + \mu \left(\mu \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \nu \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \nu \left(\mu \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \nu \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \\ &= (\mu^2 + \nu^2) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\rho}^2} + (\mu^2 + \nu^2) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}. \end{aligned}$$

Portanto o Hamiltoniano Eq. (5.38) que descreve a dinâmica clássica do átomo de hidrogênio sob a influência de um campo magnético forte em termos de coordenadas semi-parabólicas é dada por

$$\mathcal{H}(p_\mu, p_\nu, \mu, \nu) = \frac{1}{2} (p_\mu^2 + p_\nu^2) - \varepsilon (\mu^2 + \nu^2) + \frac{\mu^2 \nu^2}{8} (\mu^2 + \nu^2) = 2. \quad (5.41)$$

O sistema que estamos interessados é a soma do potencial de Hénon-Heiles e o potencial do átomo de Hidrogênio em um campo magnético forte [38]. Dependendo da energia do sistema, a superfície de Poincaré é caracterizada por regiões de movimentos regulares e caóticos. O Hamiltoniano para este sistema é dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2) + \hat{V}_1 + \hat{V}_2, \quad (5.42)$$

onde

$$\hat{V}_1 = \frac{1}{2} (\hat{Q}_x^2 + \hat{Q}_y^2) + \hat{Q}_x^2 \hat{Q}_y - \frac{1}{3} \hat{Q}_y^3,$$

é o potencial de Hénon-Heiles e

$$\hat{V}_2 = \frac{5}{2} \hat{Q}_x^2 \hat{Q}_y^2 (\hat{Q}_x^2 + \hat{Q}_y^2) - \varepsilon (\hat{Q}_x^2 + \hat{Q}_y^2),$$

é o potencial do átomo de Hidrogênio em um campo magnético uniforme. Escrevendo o Hamiltoniano Eq. (5.42) em termos dos operadores Eqs. (5.2) e (5.3), temos

$$\begin{aligned}
 \hat{H}(q, p) &= \left(\hat{A}\hat{A}^\dagger - \frac{1}{2} \right) + \left(\hat{B}\hat{B}^\dagger - \frac{1}{2} \right) + \lambda \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 (\hat{B} + \hat{B}^\dagger) - \frac{1}{6\sqrt{2}} (\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{4} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 (\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^2 \left(\frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 + \frac{1}{2} (\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^2 \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon \left(\frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 + \frac{1}{2} (\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^2 \right) \right] \\
 &= \hat{H}^0(q, p) + \lambda \hat{V}
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

onde $\hat{H}^0(q, p)$ representa a Hamiltoniana não perturbada,

$$\hat{H}^0(q, p) = \left(\hat{A}\hat{A}^\dagger - \frac{1}{2} \right) + \left(\hat{B}\hat{B}^\dagger - \frac{1}{2} \right), \tag{5.44}$$

e \hat{V} é a perturbação.

$$\begin{aligned}
 \hat{V} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 (\hat{B} + \hat{B}^\dagger) - \frac{1}{6\sqrt{2}} (\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^3 \\
 &\quad + \frac{5}{16} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 (\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^2 \left((\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 + (\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^2 \right) \\
 &\quad - \varepsilon \left(\frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 + \frac{1}{2} (\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^2 \right),
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Na próxima seção iremos calcular a função de Wigner para a correção de primeira ordem para a soma do potencial de Hénon-Heiles e o potencial do átomo de Hidrogênio em um campo magnético forte. Estes resultados encontra-se publicado em [66].

5.6 Correção de 1ª ordem para a soma do potencial de Hénon-Heiles e o potencial do átomo de Hidrogênio

Utilizando a Eq. (5.19), obtemos a seguinte expressão para a correção em primeira ordem da função de onda,

$$\begin{aligned}
 \psi_n(q, p) &= \psi_n^{(0)}(q, p) + \psi_n^{(1)}(q, p) \\
 &= \psi_n^{(0)}(q, p) + \frac{1}{4\sqrt{2}} a_0 - \frac{1}{6\sqrt{2}} a_1 \\
 &\quad + \frac{5}{16} (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) - \frac{\varepsilon}{2} b_6,
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

onde $\psi_n(q, p) = \psi_{n_x}(q_x, p_x) \psi_{n_y}(q_y, p_y)$, os termos a_0 e a_1 dados pelas Eqs. (5.23) e (5.24) respectivamente, e os outros termos dados por

$$b_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sqrt{n_x(n_x-1)(n_x-2)(n_x-3)} \psi_{n_x-4}^{(0)} + \sqrt{n_x(n_x+1)^2(n_x-1)} \psi_{n_x-2}^{(0)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & +\sqrt{n_x^3(n_x+1)}\psi_{n_x-2}^{(0)}\sqrt{n_y(n_y-1)}\psi_{n_y-2}^{(0)} \\
 & +\frac{1}{4}\sqrt{n_x(n_x-1)}\psi_{n_x-2}^{(0)}\left(\frac{1}{2}\sqrt{n_y(n_y-1)(n_y-2)(n_y-3)}\psi_{n_y-4}^{(0)}\right. \\
 & \left. +\sqrt{n_y(n_y+1)^2(n_y-1)}\psi_{n_y-2}^{(0)} + \sqrt{n_y^3(n_y-1)}\psi_{n_y-2}^{(0)}\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b2 = & \frac{1}{4}\sqrt{n_x(n_x-1)}\psi_{n_x-2}^{(0)}\left(\sqrt{n_y(n_y-1)^3}\psi_{n_y-2}^{(0)} - \sqrt{(n_y+1)(n_y+2)(n_y+3)^2}\psi_{n_y+2}^{(0)}\right. \\
 & \left. +\sqrt{n_y(n_y-1)(n_y-2)^2}\psi_{n_y-2}^{(0)} - \sqrt{(n_y+1)(n_y+2)^3}\psi_{n_y-2}^{(0)}\right) \\
 & -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sqrt{n_x(n_x-1)(n_x-2)(n_x-3)}\psi_{n_x-4}^{(0)} + \sqrt{n_x(n_x-1)(n_x+2)^2}\psi_{n_x-2}^{(0)}\right. \\
 & \left. +\sqrt{n_x^3(n_x-1)}\psi_{n_x-2}^{(0)}\right)\sqrt{(n_y+1)+(n_y+2)}\psi_{n_y+2}^{(0)} \\
 & -\frac{1}{4}\sqrt{n_x(n_x-1)}\psi_{n_x-2}^{(0)}\left(\sqrt{(n_y+1)^3(n_y+2)}\psi_{n_y+2}^{(0)} + \sqrt{n_y^2(n_y+1)(n_y+2)}\psi_{n_y+2}^{(0)}\right. \\
 & \left. +\frac{1}{2}\sqrt{(n_y+1)(n_y+2)(n_y+3)(n_y+4)}\psi_{n_y+4}^{(0)}\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b3 = & \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{n_x(n_x-1)^3} + \sqrt{n_x(n_x-1)(n_x-2)^2}\right)\psi_{n_x-2}^{(0)} - \left(\sqrt{(n_x+1)(n_x+2)(n_x+3)^2}\right.\right. \\
 & \left. -\sqrt{(n_x+1)(n_x+2)^3}\right)\psi_{n_x+2}^{(0)}\left]\sqrt{n_y(n_y-1)}\psi_{n_y-2}^{(0)} + \frac{1}{4}\left[\left(-\sqrt{n_x(n_x-1)^3}\right.\right. \\
 & \left. -\sqrt{n_x(n_x-1)(n_x-2)^2}\right)\psi_{n_x-2}^{(0)} + \left(\sqrt{(n_x+1)(n_x+2)(n_x+3)^2}\right. \\
 & \left. +\sqrt{(n_x+1)(n_x+2)^3}\psi_{n_x+2}^{(0)}\right)\left]\sqrt{(n_y+1)(n_y+2)}\psi_{n_y+2}^{(0)}\right. \\
 & \left. -\frac{1}{4}\left(\sqrt{(n_x+1)^3(n_x+2)}\psi_{n_x+2}^{(0)} + \sqrt{n_x^2(n_x+1)(n_x+2)}\psi_{n_x+2}^{(0)}\right.\right. \\
 & \left. \left. +\frac{1}{2}\sqrt{(n_x+1)(n_x+2)(n_x+3)(n_x+4)}\psi_{n_x+4}^{(0)}\right)\sqrt{n_y(n_y-1)}\psi_{n_x-2}^{(0)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b4 = & \frac{1}{4}\sqrt{(n_x+1)(n_x+2)}\psi_{n_x+2}^{(0)}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n_y(n_y-1)(n_y-2)(n_y-3)}\psi_{n_y-4}^{(0)}\right. \\
 & \left. -\sqrt{n_y(n_y-1)(n_y+1)^2}\psi_{n_y-2}^{(0)} - \sqrt{n_y^3(n_y-1)}\psi_{n_y-2}^{(0)} - \sqrt{n_y(n_y-1)^3}\psi_{n_y-2}^{(0)}\right. \\
 & \left. +\sqrt{(n_y+1)(n_y+2)(n_y+3)^2}\psi_{n_y+2}^{(0)} - \sqrt{n_y(n_y-1)(n_y-2)^2}\psi_{n_y-2}^{(0)}\right. \\
 & \left. +\sqrt{(n_y+1)(n_y+2)^3}\psi_{n_y+2}^{(0)}\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b5 = & \frac{1}{4} \left(\sqrt{(n_x + 1)^3(n_x + 2)} \psi_{n_x+2}^{(0)} + \sqrt{n_x^2(n_x + 1)(n_x + 2)} \psi_{n_x+2}^{(0)} \right. \\
 & + \frac{1}{2} \sqrt{(n_x + 1)(n_x + 2)(n_x + 3)(n_x + 4)} \psi_{n_x+4}^{(0)} \left. \right) \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)} \psi_{n_y+2}^{(0)} \\
 & + \frac{1}{4} \sqrt{(n_x + 1)(n_x + 2)} \psi_{n_x+2}^{(0)} \left(\sqrt{(n_y + 1)^3(n_y + 2)} \psi_{n_y+2}^{(0)} \right. \\
 & \left. + \sqrt{n_y^2(n_y + 1)(n_y + 2)} \psi_{n_y+2}^{(0)} + \frac{1}{2} \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)(n_y + 3)(n_y + 4)} \psi_{n_y+4}^{(0)} \right),
 \end{aligned}$$

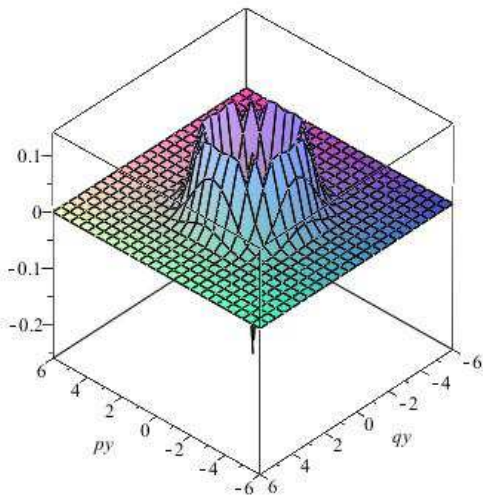
e

$$\begin{aligned}
 b6 = & \frac{1}{2} \left(\sqrt{n_x(n_x - 1)} \psi_{n_x-2}^{(0)} - \sqrt{(n_x + 1)(n_x + 2)} \psi_{n_x+2}^{(0)} + \sqrt{n_y(n_y - 1)} \psi_{n_y-2}^{(0)} \right. \\
 & \left. - \sqrt{(n_y + 1)(n_y + 2)} \psi_{n_y+2}^{(0)} \right).
 \end{aligned}$$

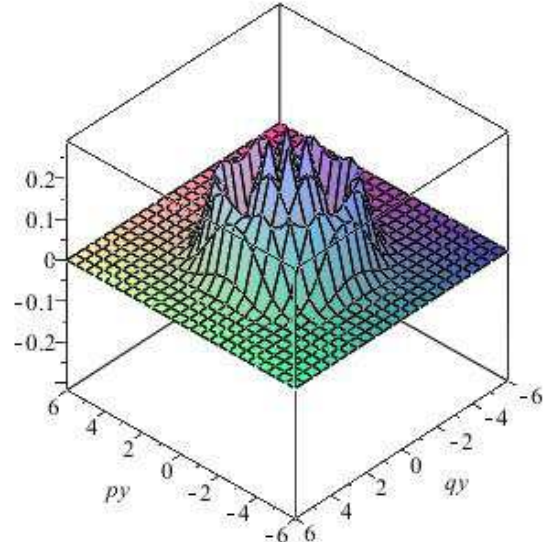
A função de Wigner para primeira ordem é dada por

$$f_n^1(q_x, p_x, q_y, p_y) = \psi_{n_x}(q_x, p_x) \psi_{n_y}(q_y, p_y) \star \psi_{n_x}^\dagger(q_x, p_x) \psi_{n_y}^\dagger(q_y, p_y).$$

A função de Wigner é plotada no plano p_y, q_y . Alguns resultados numéricos são apresentados nas figuras (5.4). Apresentamos também máximos e mínimos da funções de Wigner na tabela (5.3).



(a) Função de Wigner, $n=0$.



(b) Função de Wigner, $n=2$.

Figura 5.4: Funções de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles mais o átomo de hidrogênio com $\varepsilon = 1$, submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de primeira ordem.

Tabela 5.3: Máximos e Mínimos das funções de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles mais o átomo de hidrogênio submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de primeira ordem.

(a) Função de Wigner n=0			(b) Função de Wigner n=2		
ε	Máximo	Mínimo	ε	Máximo	Mínimo
0	0.129	-0.420	0	0.219	-0.955
0.28	0.125	-0.407	0.28	0.224	-0.905
0.5	0.117	-0.380	0.5	0.237	-0.796
1	0.142	-0.260	1	0.291	-0.318

5.7 Correção de 2ª ordem para a soma do potencial de Hénon-Heiles e o potencial do átomo de Hidrogênio

A expressão (5.31), leva para a correção em segunda ordem da função de onda. Como consequência, a função de Wigner é dada por

$$f_n^2(q_x, p_x, q_y, p_y) = \psi_{n_x}(q_x, p_x)\psi_{n_y}(q_y, p_y) \star \psi_{n_x}^\dagger(q_x, p_x)\psi_{n_y}^\dagger(q_y, p_y),$$

Alguns resultados são apresentados nas figuras (5.5). Os seus máximos e mínimos são apresentados nas tabelas (5.4).

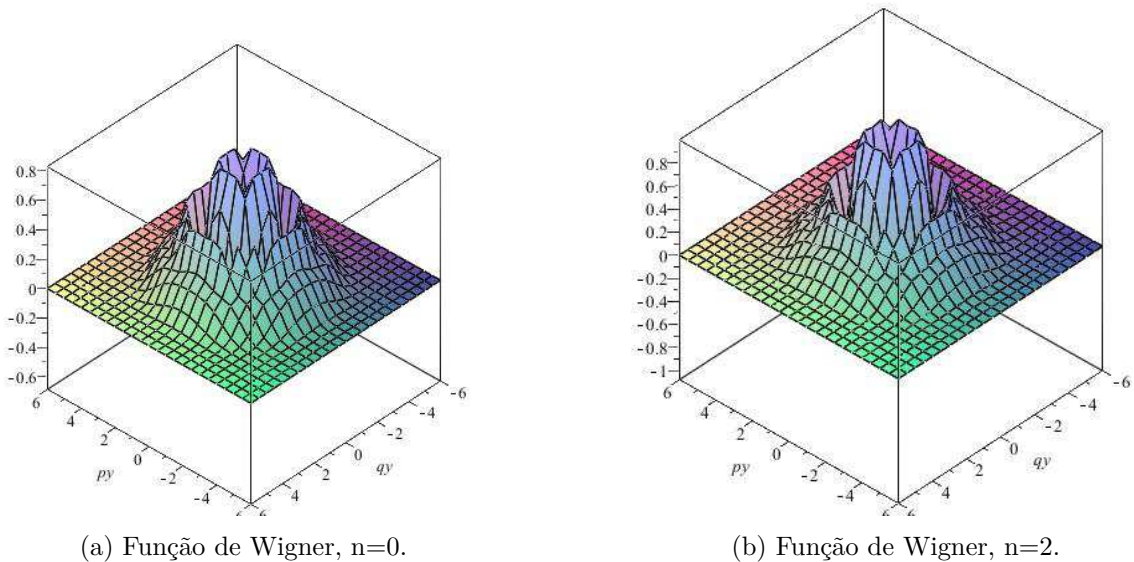


Figura 5.5: Função de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles mais o átomo de hidrogênio com $\varepsilon = 1$, submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de segunda ordem.

Tabela 5.4: Máximos e Mínimos das funções Wigner para o potencial de Hénon-Heiles mais o átomo de hidrogênio submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de segunda ordem.

(a) Função de Wigner n=0			(b) Função de Wigner n=2		
ε	Máximo	Mínimo	ε	Máximo	Mínimo
0	0.418	-0.425	0	0.674	-1.082
0.28	0.414	-0.450	0.28	0.686	-1.127
0.5	0.401	-0.451	0.5	0.718	-1.210
1	0.631	-0.469	1	0.998	-1.080

Comparando as tabelas (5.3), e (5.4), notamos que os valores máximos e mínimos para a correção da segunda ordem da função de Wigner aumenta em relação a correção de primeira ordem como no caso anterior. Outro fato interessante, é que o aumento do parâmetro ε aumenta tanto a parte positiva, quanto a parte negativa da função de Wigner. A partir de agora, iremos mostrar nas tabela (5.5), os resultados dos cálculos numéricos realizado para o indicador de negatividade $\eta(\psi)$, para as funções de Wigner de segunda ordem.

Tabela 5.5: Negatividade das funções de Wigner para o potencial de Hénon-Heiles mais o átomo de hidrogênio, submetido a teoria de perturbação independente do tempo, correção de segunda ordem.

(a) parâmetro para a negatividade, $\varepsilon = 0$.		(b) parâmetro para a negatividade, $\varepsilon = 0.28$.		(c) parâmetro para a negatividade, $\varepsilon = 0.5$		(d) parâmetro para a negatividade, $\varepsilon = 1$.	
n	$\eta(\psi)$	n	$\eta(\psi)$	n	$\eta(\psi)$	n	$\eta(\psi)$
0	0	0	0.16783	0	0.19773	0	0.20376
2	0.32645	2	0.35784	2	0.38954	2	0.39932
4	0.45786	4	0.46210	4	0.47841	4	0.50385
6	0.53647	6	0.54678	6	0.56823	6	0.58762
8	0.60185	8	0.63193	8	0.67918	8	0.72431

Note que o indicador de negatividade cresce na mesma direção que o parâmetro ε . Este resultado pode ser importante para o estudo de emaranhamento quântico de sistemas. Emaranhamento quântico encontra aplicação em computação quântica, como por exemplo, estudos de circuitos quânticos [69]. Neste caso, alto emaranhamento quântico, é responsável por um exponencial *speedup* (aumento de velocidade). A negatividade da função de Wigner também vem desempenhando um papel importante nesta área, como por exemplo, processamento de informações quânticas, onde é utilizado uma conexão entre o *speedup* quântico e a negatividade da função de Wigner [70].

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, nos capítulos iniciais, 2 e 3, tratamos de revisões. O capítulo 2 aborda uma breve revisão sobre a função de Wigner e suas propriedades, e como ocorre sua conexão com o produto estrela. No capítulo 3, revisamos a mecânica quântica simplética, através de uma representação escalar do grupo Galilei construída a partir de operadores estrela, possibilitando escrever a equação de Schrödinger no espaço de fase. É possível então mostrar a relação entre as funções de onda do espaço de fase (chamadas de quasi-amplitudes de probabilidade) e a função de Wigner (as quasi distribuição de probabilidades). Este novo formalismo permite obter a Função de Wigner sem a necessidade de usar a equação de Liouville-von Neumann. Outro tópico de destaque neste capítulo é a relação entre a representação unitária do grupo de Poincaré e o produto estrela, possibilitando obter as equações de Klein-Gordon e Dirac no espaço de fase.

No capítulo 4 nosso estudo remete a teorias simpléticas de calibre abelianos e não-abelianos. Devido a obtenção das funções de onda no espaço de fase, é possível estudar neste caso, a transformação de calibre dada pela seguinte relação $\psi \rightarrow e^{i\Lambda} \star \psi$. O resultado deste estudo foi realizado em três seções. Na seção 4.1, para o calibre abeliano, obtemos para o campo de Dirac, um mapeamento similar ao obtido por Seiberg-Witten. O resultado foi um campo de calibre A^μ com um tensor de campo anti-simétrico escrito como $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu + \{A^\mu, A^\nu\}_M$, onde $\{A^\mu, A^\nu\}_M$ é o parêntese de Moyal. Este resultado fora deduzido recentemente via o campo de Klein-Gordon [30]. Um resultado interessante aqui é que a expansão do produto estrela em ordem zero, da transformação de calibre $\psi \rightarrow e^{i\Lambda} \star \psi$, leva a transformação de calibre na forma usual $\psi \rightarrow e^{i\Lambda}\psi$. Consequentemente o tensor eletromagnético é dado por $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ onde $\{A^\mu, A^\nu\}_M=0$. Na seção 4.2, resultados similares foram obtidos para o campo de Klein-Gordon. Já na seção 4.3, abordamos uma teoria de calibre não-abeliana para desenvolver tais cálculos. O resultado foi que para um campo isospin \mathbf{B}_μ , foi obtido um tensor dado na forma $\mathcal{K}_{\mu\nu} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k}_{\mu\nu} + \epsilon \{\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu\}_M$ onde $\mathbf{k}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} + i\epsilon (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu)_\star - i\epsilon (\mathbf{B}_\nu \times \mathbf{B}_\mu)_\star$. A expansão do produto estrela leva a teoria de calibre não-abeliana usual onde o tensor similar ao tensor eletromagnético é dado por $\mathbf{k}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbf{B}_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial q^\mu} + i\epsilon 2 (\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu)$ com $\{\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu\}_M = 0$.

No capítulo 5, foram calculadas as funções de Wigner para o sistema de Hénon-Heiles e a soma entre os potências do sistema de Hénon-Heiles mais o átomo de hidrogênio, submetido a teoria de perturbação independente do tempo não degenerada, onde obtemos as funções de onda simplética. Comparando os resultados obtidos nas seções 5.3 e 5.4 para o modelo de Hénon-Heiles, observa-se que ocorre um aumento na negatividade da função de Wigner quando aplica-se uma correção de segunda ordem em relação a correção de primeira ordem. O mesmo efeito ocorre quando é aplicado para o sistema que apresenta a soma entre o potencial de Hénon-Heiles e o

átomo de hidrogênio, descrito nas seções 5.6 e 5.7. Outro resultado interessante obtido na seção 5.7, foi que o indicador de negatividade apresenta um aumento quando aumenta o parâmetro de escala de energia ε . Este resultado pode ser importante para o estudo de emaranhamento quântico de sistemas. Emaranhamento quântico é importante, por exemplo em computação quântica. Outros sistemas de Hénon-Heiles e desenvolvimento dos procedimentos de quantização para a teoria quântica simplética são aspectos a serem abordados em estudos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [2] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner, Phys. Rep. **106**, 121 (1984).
- [3] R. Rosati, F. Dolcini, R. C. Iotti, F. Rossi, The Wigner-function formalism applied to semiconductor quantum devices: Failure of the conventional boundary condition scheme, arXiv: cond-mat.mes-hall/1302.2750v1 (2013).
- [4] V. V. Dodonov, O.V. Manko, V.I. Manko, Phys. Rev. A **49**, 2993 (1994).
- [5] V. V. Dodonov, O.V. Manko, V.I. Manko, Phys. Rev. A **50**, 813 (1994).
- [6] V. V. Dodonov, L. A. Souza, J. of Russian Laser Research **28**, 453 (2007).
- [7] V. V. Dodonov, O.V. Manko, V.I. Manko, Phys. Rev. A **49**, 2993 (1994).
- [8] V. V. Dodonov, O.V. Manko, V.I. Manko, Phys. Rev. A **50**, 813 (1994).
- [9] V. V. Dodonov, L. A. Souza, J. of Russian Laser Research **28**, 453 (2007).
- [10] L.S.F. Olavo, Physica A **262**, 197 (1999).
- [11] L.S.F. Olavo, Physica A **271**, 260 (1999).
- [12] T. Douce, A. Eckstein, S. P. Walborn, A. Z. Khoury, S. Ducci, A. Keller, T. Coudreau, P. Milman, Direct measurement of the biphoton Wigner function through two-photon interference, arXiv: 1304.7092v1, (2013).
- [13] E. Mukamel, K. Banaszek, I. A. Walmsley, Opt. Lett. **28**, 1317 (2003).
- [14] P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, S. Osnaghi, T. Meunier, M. Brune, J.M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **89**, 200402-1 (2002).
- [15] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963a).
- [16] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963b).
- [17] R. J. Glauber, in Quantum Optics and Electronics, edited by C. Dewitt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach, New York, 1965).
- [18] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. **10**, 277 (1963).
- [19] K. Husimi, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn. **22**, 264 (1940).

- [20] Go. Torres-Vega, J.H. Frederick, J. Chem. Phys. **93**, 8862 (1990).
- [21] Go. Torres-Vega, J.H. Frederick, J. Chem. Phys. **98**, 3103 (1993).
- [22] Go. Torres-Vega, J. Chem. Phys. **98**, 7040 (1993).
- [23] Go. Torres-Vega, J. Chem. Phys. **99**, 1824 (1993).
- [24] Go. Torres-Vega, A. Zuñiga-Segundo, J.D. Morales-Gusmán, Phys. Rev. A **53**, 3792 (1996).
- [25] Go. Torres-Vega, J D Morales-Guzmán, A. Zuñiga-Segundo, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 6725 (1998).
- [26] R.G.G. Amorim, M.C.B. Fernandes, A.R. Queiroz, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, Rev. Bras. Ens. Fis. **35**, 3604 (2013).
- [27] R. Amorim, F. A. Farias, Phys. Rev. D **69**, 045013 (2004).
- [28] M.D. Oliveira, M.C.B. Fernandes, F.C. Khanna, A.E. Santana, J.D.M. Vianna Ann. Phy. **312**, 492 (2004).
- [29] R.G.G. Amorim, M.C.B. Fernandes, F.C. Khanna, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, Phy. Lett. A **361**, 464 (2007).
- [30] R.G.G. Amorim, M.C.B. Fernandes, F.C. Khanna, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, Int. J. Mod. Phys. A, **28**, 1350013 (2013).
- [31] M. Hénon, C. Heiles, Astron. J. **69**, 73 (1964)
- [32] R. G. G. Amorim, F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana, Int. J. Mod. Phys. A **30**, 1550135 (2015).
- [33] M. Bixon, J. Jortner, J. Chem. Phys. **77**, 4175 (1982).
- [34] M. Brack, R. K. Bhaduri, J. Law, M. V. N. Murthy, Phys. Rev. Lett. **70**, 568 (1993).
- [35] S. K. Joseph, M. A. F. Sanjuán, Int. J. Bifurcation Chaos, **26**, 1650052 (2016).
- [36] N. Pomphrey, J. Phys. B: Atom Molec. Phys. **7**, 14 (1974).
- [37] B. C. Bag, D. S. Ray, J. Stat. Phys. **96**, 271 (1999).
- [38] A. B. Adeloye and A. O. Akala, Lat. Am. J. Phys. Educ., **5(3)**, 598 (2010).
- [39] A. I. Akhiezer, V. I. Truten', N. F. Shul'ga, Phys. Rep. **203**, 289 (1991).
- [40] H. D. Farias, *Função de Wigner, quasi-amplitudes de probabilidades e sistemas dissipativos*, (Dissertação de Mestrado, IF-UnB, Brasília, 2014).
- [41] M. D. Oliveira, *Mecânica Quântica no Espaço de Fase*, (Dissertação de Mestrado, IF-UFBA, Salvador, 2002).
- [42] R. G. G. Amorim, *Geometria Não-Comutativa e Teoria de Campos Simplética*, (Tese de Doutorado, IF-UnB, Brasília, 2009).

- [43] K. Imre, E. Ozizmir, M. Rosembaum, P. F. Zweifel, *J. Math. Phys.* **8**, 1097 (1967).
- [44] T. Curtright, D. Fairlie, C. Zacos, *Phys. Rev. D* **58**, 25002 (1998).
- [45] S. Chountassis, A. Vourdas, *Phys. Rev. A* **58**, 1794 (1998).
- [46] A. Kenfack and K. Zyczkowski, *J. Opt. B* **6**, 396 (2004).
- [47] K. Veseley and J. Podolsky, *Phys. Lett. A* **271**, 368 (2000).
- [48] R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics* (Addison-Wiley, New York, 1975).
- [49] E. P. Wigner, *Ann. Math.* **40**, 149 (1939).
- [50] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics Third Edition*, (Addison-Wesley, New York, 2001).
- [51] J. J. Sakurai, J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics Second Edition*, (Addison-Wesley, New York, 2011).
- [52] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory Second Edition*, (Cambridge University Press, United Kingdom, 1996).
- [53] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, (John Wiley and Sons, New York, 1987).
- [54] R. Kaiser, J. Montaldi, *Peyresq Lectures on Nonlinear Phenomena*, (World Scientific Pub., Singapore, 2000).
- [55] G. 't Hooft, *50 years of Yang-Mills theory*, (World Scientific Pub., Singapore, 2005).
- [56] N. Seiberg, E. Witten, String theory and Noncommutative geometry, *JHEP*, **9909**, (1999) [hep-th/9908142].
- [57] L. Susskind, The Quantum Hall Fluid and Noncommutative Chern Simons Theory, (2001) [hep-th/0101029v3].
- [58] P. Aschieri, E. Grezia, G. Esposito, Noncommutative Einstein equations and Seiberg-Witten map, (2011) arXiv:1103.3348v2 [hep-th].
- [59] M. Blaszkak, Z. Domanky, *Ann. Phys.* **327**, 167 (2012).
- [60] A. V. Holden, *Chaos*, (Manchester University Press, Manchester, 1986).
- [61] A. A. Abd El-Latif, L. Li, N. Wang, Q. Han, X. Niu, *Signal Processing* **93**, 2986 (2013).
- [62] S. Masuda, Shin-ichi Sawada, Y. Shimizu, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 355101 (2013).
- [63] M. Raizen, D. A. Steck, *Cold Atom Experiments in Quantum Chaos*, *Scholarpedia* **6**, 10468 (2011).
- [64] H. Friedrich, D. Wintgen, *Phys. Rep.* **183**, 37 (1989).
- [65] T. S. Monteiro, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 787 (1994).

-
- [66] J. S. da Cruz Filho, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhoa, F. C. Khanna, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, *Int. J. Mod. Phys. A*, **31**, 1650046 (2016).
- [67] A. Harada, H. Hasegawa, *J. Phys. A: Math. Gen.***16**, L259 (1983).
- [68] M. Robnik, *J. Phys. A: Math. Gen.***14**, 3195 (1981).
- [69] G. Vidal, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 147902 (2003).
- [70] V. Veitch, C. Ferrie, D. Gross, J. Emerson, *New J. Physics* **15**, 0039502 (2013).
- [71] N. Delfosse, P. A. Guerin, J. Bian, R. Raussendorf, *Phys. Rev. X* **5**, 021003 (2015).