

José Antônio Pires Ferreira Marão

*Controle Impulsivo em Sistemas Dinâmicos.*

Tese apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade de Brasília como parte dos re-  
quisitos necessários para obtenção do título  
de Doutor em Física Teórica.

Orientador:

Prof.Dr. Anníbal Dias de Figueiredo Neto

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

Brasília

21 de julho de 2011

TESE DE DOUTORAMENTO

**Controle Impulsivo em Sistemas Dinâmicos.**

Usando Impulsos para Direcionar Trajetórias de Sistemas  
Dinâmicos.

Por

José Antônio Pires Ferreira Marão

**Orientador**

Prof.Dr. Anníbal Dias de Figueiredo Neto

A Deus.

Aos meus pais.

A minha tia Ana Maria.

A minha avó Maria Braga (*in memoriam*).

Aos meus amigos

*Dedico.*

## *Agradecimentos*

A Deus, por tudo.

Aos meus pais, Maria Izabel Pires Ferreira Marão e Antônio Carlos de Castro Marão pelo apoio, e incentivo.

A Camila Marinho Penha, por ter estado sempre ao meu lado.

A minha tia Ana Maria Pires Ferreira Lima, e meus irmãos, pelas oportunidades.

Aos professores Benedito dos Santos Raposo, Hilcias Jordão de Souza e João Coelho Silva Filho, pelos ensinamentos.

Aos Prof.º Dr.º Angel Rodolfo Baigorri e Prof.º Dr.º Manoel Ferreira Borges Neto, pelo exemplo, Prof.º Dr.º Tarcisio Marciano da Rocha Filho, Prof.º Dr.º Victor Dodonov e o Prof.º Dr.º Ademir Eugenio Santana pelos conhecimentos a mim transmitidos.

Aos meus amigos de sempre, Nilton Delbem, Fernando Rafaeli, Pedro Alexandre, Abraão Jessé, Marcelo Leinecker, Juliano Alves e Leandro Belo.

Ao Prof.º Dr.º Anníbal Dias de Figueiredo Neto pelo apoio e incentivo.

Aos meus amigos pós-graduandos do Instituto de Física, e aos colegas do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

O importante é isso: Estar pronto para,  
a qualquer momento, sacrificar o que somos  
pelo que poderíamos vir a ser.

*Charles Du Bois*

## *Resumo*

O principal objetivo desta Tese é desenvolver um método de controle impulsivo para as trajetórias de um sistema dinâmico contínuo. A ideia básica é forçar, através de impulsos instantâneos, a convergência das trajetórias em direção a uma superfície invariante do sistema dinâmico. O método de abordagem é baseado em uma propriedade associada a uma certa classe de superfícies invariantes cujas direções transversais descrevem um sistema não-linear autônomo. Tal fato permitirá definir um sistema propulsor que impulsiona a trajetória para a superfície  $S$ . Além disso, será estabelecida uma definição de expoente de estabilidade local associado a essa classe de superfície invariante.

# *Abstract*

The main goal of this work is to develop an impulsive control method in a manner to give the convergence of the paths of a system toward a  $S$  surface (a smooth invariant of a system of differential equations). The method is based on a property related to classes of invariant surfaces which transversal directions describe a nonlinear autonomous systems. Moreover, it will be established a definition of a local stability exponent associated with such class of invariant surface.

# *Sumário*

<b>Lista de Figuras</b>	p. vii
<b>Introdução</b>	p. 1
<b>1 Sistemas Dinâmicos.</b>	p. 10
1.1 Teoria básica de Sistemas Dinâmicos . . . . .	p. 10
1.2 Sistemas dinâmicos e equações diferenciais . . . . .	p. 14
1.3 Estabilidade de um sistema dinâmico . . . . .	p. 14
<b>2 Superfícies Invariantes.</b>	p. 17
2.1 Superfícies invariantes em sistemas diferenciais. . . . .	p. 17
2.2 Estabilidade de Superfícies Invariantes. . . . .	p. 21
2.3 Expoente de estabilidade da superfície $S$ . . . . .	p. 24
<b>3 Controle Impulsivo de Sistemas Dinâmicos - Caso I.</b>	p. 30
3.1 Controle Impulsivo. . . . .	p. 30
3.2 Alguns exemplos. . . . .	p. 37
3.2.1 Sistema de Lorenz. . . . .	p. 37
3.2.2 Sistema Dinâmico Acoplado de Lorenz . . . . .	p. 41
3.2.3 Exemplo de controle quando os impulsos são raros. . . . .	p. 43
3.3 Sincronização de superfícies invariantes e sistemas diferenciais polinomiais.	p. 45

---

3.4	Discussão e análise. . . . .	p. 51
<b>4</b>	<b>Controle Impulsivo de Sistemas Dinâmicos: Caso II.</b>	<b>p. 55</b>
4.1	Expoente de estabilidade da superfície $S$ . . . . .	p. 58
4.2	Estabilidade de um sistema impulsivo. . . . .	p. 61
4.3	Exemplo: Sistema de May Leonard . . . . .	p. 65
<b>5</b>	<b>Aplicação do Controle Impulsivo a um Sistema Quaterniônico.</b>	<b>p. 67</b>
5.1	Quatérnios e Funções Quaterniônicas. . . . .	p. 67
5.2	Função Exponencial do Tipo Quaterniônico. . . . .	p. 68
5.3	Teorema de Cauchy para Quatérnios. . . . .	p. 69
5.4	Derivadas Quaterniônicas usando o Teorema Integral de Cauchy. . . . .	p. 71
5.5	Sistemas Dinâmicos Quaterniônicos. . . . .	p. 73
5.6	Aplicação. . . . .	p. 76
5.7	Determinação de uma Expressão Analítica para $\frac{dI}{dt}$ no Caso Quaterniônico. . . . .	p. 78
	<b>Conclusão e comparação com outros métodos.</b>	<b>p. 79</b>
	<b>Referências</b>	<b>p. 81</b>

## *Lista de Figuras*

1	Operador evolução. . . . .	p. 12
2	Órbitas de um dado sistema. . . . .	p. 13
3	Comparação da evolução de $\ \mathbf{I}(t)\ $ entre o sistema impulsivo de Lorenz e o sistema considerado sem impulsos. . . . .	p. 40
4	Mostra a evolução da função $\frac{1}{t} \ln \frac{\ \mathbf{I}(t)\ }{\ \mathbf{I}_0\ }$ comparado com os valores de $D_S$ e $E_S$ . . . . .	p. 41
5	O painel (a) compara a evolução de $\ \mathbf{I}(t)\ $ entre o sistema impulsivo de Lorenz e o respectivo sistema considerado sem impulsos. O painel (b) compara os dois controles impulsivos em um gráfico monolog. O painel (c) compara o número de impulsos por unidade de tempo para os controles impulsivos. O painel (d) mostra a função $d(t)$ . As cores preto e cinza correspondem respectivamente a valores de $\beta = 3$ e $\beta = 1$ . . . . .	p. 44
6	Mostra as funções $D_S$ e $E_S$ e o parâmetro de acoplamento $c$ . . . . .	p. 49
7	Mostra a evolução do sistema de Lorenz acoplado, para diferentes valores do parâmetro $c$ . . . . .	p. 49
8	Mostra a evolução de $\ I(t)\ $ para diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	p. 50

# *Introdução*

*Toda a minha Física não passa de uma Geometria*

*Descartes*

Tendo em vista a publicação de importantes resultados sobre controle caótico e sincronização em sistemas caóticos, [1]- [2], muitos desenvolvimentos na teoria de controle foram alcançados. O controle de um Sistema Dinâmico consiste essencialmente em forçar a convergência das trajetórias do sistema em direção a uma superfície invariante, geralmente instável, pertencente ao espaço de fase do sistema em questão. Alguns exemplos comuns dessas superfícies invariantes são os pontos fixos, órbitas periódicas e superfícies de sincronização. Em geral, o processo de controle é feito através do acoplamento de um campo externo, de modo que a superfície invariante se torna estável. A natureza deste campo externo determina o tipo de controle a ser considerado: *contínuo* ou *impulsivo*. O controle contínuo corresponde a campos externos atuando de maneira permanente no sistema, enquanto para controles impulsivos o campo externo intervém apenas em alguns instantes específicos, sendo as intervenções de curta duração quando comparadas à evolução total do sistema, podendo ser matematicamente tratadas como instantâneas.

Originariamente, foi sugerido que a condição de estabilidade do controle contínuo se baseia na negatividade dos Expoentes Transversais de Lyapunov (ETL) que são associados a uma dada superfície invariante [3], [4]. No entanto, no contexto de superfícies de sincronização, mesmo quando o maior dos expoentes transversais de um atrator caótico é negativo, pode ocorrer forte dessincronização durante certos períodos de tempo devido

a presença de orbitas periódicas instáveis [5]. Por outro lado, sistemas com caos espaço-temporal podem ser sincronizados mesmo que possuam ETL positivos, como mostrado na simulação computacional em [6]. Como consequência, a negatividade do ETL não é nem condição necessária nem suficiente para garantir a estabilidade de um controle contínuo. Faz-se importante citar que a formulação exata de tais condições é um problema ainda em aberto. Buscando evitar os problemas indicados acima, foram desenvolvidos métodos de retroalimentação adaptativa nos quais os campos controladores são continuamente adaptados e as condições de estabilidade determinadas a partir de Funções de Lyapunov [7]- [17]. Cabe citar outras duas abordagens: o método de comutação de variedades [18] e o método seletivo impulsivo [19].

A teoria de sistemas dinâmicos impulsivos foi amplamente desenvolvida nas últimas duas décadas [20]- [25] e constitui um quadro natural para o estudo de controles de sistemas que mudam de estado por meio de intervenções instantâneas. A idéia de dirigir trajetórias de sistemas dinâmicos por perturbações instantâneas é o aspecto mais atraente para lidar com sistemas que não suportam intervenções permanentes. Outro aspecto relevante associado ao controle impulsivo diz respeito a economia de sinais para efetuar o controle.

A maioria dos controles impulsivos encontrados na literatura são baseados em métodos de comparação [26]- [34]. O método de comparação é o cerne da teoria de sistemas impulsivos e o seu principal objetivo é o estudo da estabilidade global de pontos fixos. Outras abordagens, não derivadas de métodos de comparação, em geral buscam funções de Lyapunov para obter as condições de estabilidade [35]- [40]. Muitos desses métodos são específicos ou, em casos menos restritivos, é exigido que o sistema dinâmico satisfaça pelo menos a condição de Lipschitz. Uma boa discussão sobre o assunto pode ser encontrada em [41].

O presente trabalho apresenta uma nova abordagem para o estudo dos controles impulsivos. O método é baseado na análise dos expoentes de estabilidade que podem ser associados à uma dada superfície invariante. Uma superfície invariante é uma variedade regular que contém todas as trajetórias que partem de estados iniciais pertencentes a mesma. O método resulta da observação de que, na maioria dos casos, o objetivo do controle é conduzir trajetórias em direção a uma superfície invariante. O método poderá ser aplicado sempre que as funções que definem explicitamente a superfície invariante sejam conhecidas. Um estudo aprofundado sobre superfícies invariantes polinomiais em sistemas dinâmicos polinomiais é feito na referência [42]. Já nas referências [43]- [46] encontra-se uma generalização para caracterizar superfícies não-polinomiais em sistemas não-polinomiais. Particularmente, nas referências [45]- [46] são obtidas algumas condições de estabilidade globais para estas superfícies.

A principal característica da abordagem feita nesta tese é a de expressar as condições de controlabilidade em termos dos expoentes de estabilidade que podem ser associados a uma superfície invariante determinada. Tais expoentes devem ser obtidos e foi desenvolvida uma técnica simples para calculá-los. Além disso, estima-se como os intervalos entre dois impulsos sucessivos devem ser impostos, buscando garantir a convergência para a superfície invariante. O método de controle é dividido em duas partes: a primeira consiste em atrair a trajetória para uma região próxima à superfície e a segunda em dar impulsos a fim de compensar a divergência exponencial implícita no fato de que o expoente de estabilidade é positivo.

As idéias aqui desenvolvidas são diretamente inspiradas no conceito de expoentes transversais de Lyapunov, que são normalmente utilizados para estudar a estabilidade de variedades de sincronização em sistemas dinâmicos contínuos [2] e [3]. Os expoentes de estabilidade, tal como definidos em nosso trabalho, estão fortemente relacionados

com os expoentes transversais. Na referência [47] é desenvolvido um método para sincronizar sistemas idênticos que utiliza informações sobre esses expoentes transversais. As idéias apresentadas neste trabalho foram importantes para o desenvolvimento da nossa metodologia.

Vale a pena ressaltar que tendo em vista o que é apresentado na literatura, o conceito de ETL nunca foi muito explorado na análise de controles impulsivos e esta tese pode ser vista como uma primeira tentativa de desenvolver controles impulsivos a partir do estudo de expoentes de estabilidade.

Assim como o método de comparação, desenvolvido no contexto da teoria dos sistemas dinâmicos impulsivos, ajuda a criar controles impulsivos, é possível configurar os controles baseando-se exclusivamente no conceito de expoentes de estabilidade. Neste caso, o controle impulsivo pode ser visto como uma espécie de controle de retroalimentação adaptativa [41]. Este método, possui propriedades interessantes e vantajosas: de fácil implementação e não requer cálculos complicados. Diferentemente do método de comparação, ou outros métodos baseados em funções de Lyapunov, não é necessário verificar se a condição de estabilidade é satisfeita o que em geral requer cálculos complicados nos parâmetros do sistema.

Acredita-se que nesta tese formula-se um quadro teórico adequado para o estudo de controles impulsivos onde as intervenções tornam-se raras. Esta questão é muito importante, tendo em vista que menos intervenções significa menos custos na implementação do controle proposto.

Finalmente é importante lembrar que a restrição para a aplicabilidade do método diz respeito à possibilidade de conhecer de forma explícita fechada as expressões que determinam a superfície invariante. Observa-se que isto é sempre possível para pontos

fixos e variedades de sincronização.

A seguir, são pontuados os aspectos considerados importantes na metodologia desenvolvida na Tese:

1. é de simples implementação e permite o controle da velocidade de convergência, o que na literatura é chamado de grau de estabilidade [48];
2. é possível ter um controle fino dos intervalos entre dois impulsos sucessivos;
3. o método é de retroalimentação adaptativa;
4. não é necessário o conhecimento dos expoentes de estabilidade se os intervalos entre impulsos sucessivos são limitados superiormente;
5. é possível o controle mesmo com a presença de objetos instáveis na superfície invariante.

De maneira ilustrativa, alguns tópicos de controle impulsivo mostrados na literatura serão apresentados:

Exemplo 1: O controle de sistemas ecológicos é muito importante, tanto para a prevenção de pragas, quanto no equilíbrio entre espécies. Tem-se uma ilustração bastante precisa do controle impulsivo dada em [49] onde o sistema considerado é presa-predador dependente do consumo (inimigo natural de pragas). Assim, os elementos com estrutura e idade para predador e inimigos naturais são colocados em contato. Pesticidas são então aplicados de forma impulsiva. Sendo assim, quando o período de impulsos não é maior que certo limite, a erradicação das pragas é globalmente assintoticamente estável, isto é, a população de pragas é erradicada por completo.

No entanto, tendo em vista o equilíbrio ecológico e também a economia de recursos

(economia de pesticidas e na aplicação dos mesmos) faz-se necessário apenas ter controle da população de pragas, uma vez que este deve estar abaixo de um nível que causa prejuízos econômicos. Por outro lado, quando os intervalos de aplicação dos impulsos são maiores que certo limite, constata-se que a população de pragas e inimigos naturais continuam existindo e o sistema então é considerado uniformemente permanente.

Uma outra aplicação a sistemas ecológicos é vista em [50] onde um sistema de duas presas e dois predadores é estudado com efeito impulsivo sobre o predador, com isso verifica-se também que para período de impulsos menor que um certo valor crítico existe uma solução de erradicação globalmente assintoticamente estável, com erradicação completa das espécies. Outras aplicações de controle impulsivo de sistemas ecológicos são vistas em [51] e [52].

Exemplo 2: A Teoria de Controle Impulsivo também se destaca na avaliação de estratégias de propaganda em empresas. Este fato pode ser visto em [53], onde há uma apresentação de novos teoremas sobre estabilidade de sistemas impulsivos, além do uso destes teoremas para encontrar condições para que a estratégia de propaganda usada por uma empresa seja controlada assintoticamente para o ponto de equilíbrio usando controle impulsivo. Assim, foram usados parâmetros do modelo financeiro além de uma lei de controle impulsivo e uma estimativa do limite superior do intervalo de impulso dado, com isso, o número de anúncios foi diminuindo, significando redução de custos com propaganda por parte da empresa. Deste modo, o exemplo ilustra que através do controle impulsivo foi possível traçar uma estratégia de propaganda eficiente com economia dos gastos em propaganda.

Exemplo 3: O controle de impulsos também pode ser usado no controle de epidemias. Uma ilustração para este fato é vista em [54] onde observa-se um modelo de epidemia IR com vacinação impulsiva. Buscando uma forma adequada e eficaz de aplicação de

vacinas foi feito um estudo de controle impulsivo para obter condições em que a solução para a eliminação da epidemia é dada globalmente assintoticamente.

Caso a epidemia torne-se endemia, um estudo numérico mostra as influências da vacinação impulsiva em relação à oscilação periódica do sistema que é dada sem impulsos observando-se neste caso caos.

Exemplo 4: Passando agora para um contexto mais específico, tem-se o controle impulsivo em um sistema de Rössler [55] que é um sistema de equações diferenciais ordinárias tri-dimensional. Este sistema foi apresentado inicialmente como um modelo puramente teórico e verificou-se posteriormente que o sistema de Rössler pode ser aplicado ao estudo de reações químicas e sua modelagem. Verifica-se em [56] condições para que o sistema de Rössler seja controlado assintoticamente para o ponto de equilíbrio com o uso de controle impulsivo, além de uma condição para a sincronização de dois sistemas de Rössler. Uma cota superior para a estimativa do intervalo impulsivo é obtida.

Exemplo 5: Um exemplo interessante de controle impulsivo pode ser verificado em [57] onde discute-se o controle do movimento angular de uma nave espacial em queda. Neste caso o controle em questão busca medir e controlar a posição relativa da nave-alvo e depois aplicar impulsos até que o movimento de rotação da nave seja amortecido. Assim, é criado um controlador discreto por meio da equação simplificada do movimento de rotação com o uso de coordenadas especiais. O controle de estabilidade é derivado analiticamente e simulações numéricas são feitas para verificar os resultados encontrados.

Exemplo 6: Outro exemplo de controle impulsivo é mostrado para o caso de controladores de reset, que são controladores lineares usados para redefinir alguns de seus estados para zero quando a entrada também é zero [58]. O interesse deste trabalho é estabelecer propriedades fundamentais do circuito fechado. São dadas formas para re-

definir, em ordem superior, o estado parcial. Além disso, o trabalho mostrado em [58] não necessita de suposições sobre a evolução dos termos de reset.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: o primeiro capítulo trata de uma revisão da Teoria de Sistemas Dinâmicos, enquanto o segundo capítulo trata em suas duas primeiras seções de fatos relativos à superfícies invariantes, a terceira seção já apresenta fatos originais onde é determinado o expoente de estabilidade de uma superfície  $S$ . Já o terceiro, quarto e quinto capítulos apresentam também contribuições originais e importantes para os objetivos da Tese, e determinam o controle de sistemas dinâmicos impulsivos para superfícies invariantes, uma generalização ao caso apresentado no capítulo três, e uma aplicação aos sistemas dinâmicos quaterniônicos, respectivamente.

A tese foi desenvolvida da seguinte maneira:

Capítulo 1 → Sistemas Dinâmicos;

Onde serão tratados aspectos do fundamento da teoria de Sistemas Dinâmicos com algumas definições e o conceito de estabilidade.

Capítulo 2 → Superfícies Invariantes;

Nesse capítulo são determinadas propriedades de estabilidade de superfícies invariantes para sistemas dinâmicos nos seus respectivos espaços de fase.

Capítulo 3 → Controle de Sistemas Dinâmicos - I;

O capítulo em questão tem o objetivo de abordar os conceitos básicos relativos a sistemas dinâmicos impulsivos, além disso, trata de um método para desenvolver controle impulsivo que permite o sistema convergir para superfícies invariantes contidas em seu espaço de fase.

Capítulo 4 → Controle de Sistemas Dinâmicos - II;

O capítulo em questão busca mostrar a possibilidade de generalizar todos os conceitos anteriores para o caso em que  $\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}(x)\mathbf{I} + \mathbf{R}(x, \mathbf{I})$ . Será visto que os mesmos conceitos

do caso  $\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}(x)\mathbf{I}$  podem ser aplicados.

Capítulo 5 → Sistemas Quaterniônicos.

Apresenta conceitos básicos sobre quatérnios e funções quaterniônicas, além de fatos importantes sobre derivação e integração de funções quaterniônicas fundamentais para a aplicação a sistemas quaterniônicos. Além disso, toma-se um sistema dinâmico de modo diferente, onde o tempo é dado pela parte real de um número quaterniônico e verificam-se fórmulas para implementar o controle impulsivo para sistemas desse tipo. O capítulo também mostra que há possibilidade de determinar controles impulsivos a esse tipo de sistema o que será tratado de modo detalhado em trabalhos futuros.

O método apresentado neste trabalho é um de controle de retroalimentação adaptativa onde as trajetórias do sistema dinâmico são conduzidas para superfícies invariantes. O método requer o conhecimento explícito da conjunto de equações que definem a superfície invariante. Além disso, a técnica é baseada no conceito do expoente de estabilidade das superfícies invariantes.

# 1 *Sistemas Dinâmicos.*

*O presente capítulo tem por objetivo mostrar aspectos do fundamento da teoria de Sistemas Dinâmicos, onde serão vistas algumas definições e o conceito de estabilidade [59]- [60].*

## 1.1 Teoria básica de Sistemas Dinâmicos

Pode-se prever a posição no tempo futuro ou no passado de alguns sistemas físicos, químicos, biológicos, ou até econômicos, bastando o conhecimento de sua posição presente e também levando-se em consideração as leis que governam a evolução do referido sistema. Tomando como referência que as leis que governam o sistema não mudem com o passar do tempo, o comportamento do sistema pode ser bem definido tendo conhecimento da posição inicial. Assim, a idéia de sistema dinâmico é dada pelo o conjunto de seus estados, além de uma lei de evolução de posição ao longo do tempo.

Considere o conjunto  $X$ , das posições de um sistema, e o conjunto de todos os pontos chama-se espaço de estados do sistema <sup>1</sup>. O espaço  $X$  determina se o sistema dinâmico é de dimensão finita ou infinita através da dimensão de sua base. Além disso, os espaços de estados permitem, por meio de suas estruturas, comparar estados diferentes ocupados pelo sistema no decorrer do tempo, onde as distâncias entre dois estados são consideradas tomando os conjuntos como espaços métricos, e a norma euclideana é utilizada para medir a distância entre dois estados ocupados pelo sistema.

---

<sup>1</sup>O espaço de estados é também chamado de espaço de fases, o que provém de uma denominação da Mecânica Clássica.

Seja agora  $T$  um conjunto numérico. A evolução de um sistema dinâmico nada mais é do que a mudança de estado do sistema ao longo do tempo  $t \in T$ . Assim, cabe a classificação de sistemas dinâmicos em dois tipos [61]:

**sistemas dinâmicos com tempo contínuo** ( $T = \mathbb{R}$ );

**sistemas dinâmicos com tempo discreto** ( $T = \mathbb{Z}$ ).

A lei de evolução é fundamental em um sistema dinâmico, pois ela determina o estado do sistema em um instante  $t$  que é dado por  $(x_t)$  supondo conhecido o estado inicial  $(x_0)$ .

Afim de especificar a evolução de um sistema, deve-se considerar uma função  $f^t$ , definida no espaço de estados  $X$ , como segue:

$$f^t : X \rightarrow X,$$

onde  $t \in T$ , transfoma o estado inicial  $x_0 \in X$  no estado  $x_t$  relativo ao tempo  $t^2$ , ou seja,

$$x_t = f^t x_0.$$

Assim,  $f^t$ , conforme definido acima, chama-se *operador de evolução do sistema dinâmico*, e pode ser dado explicitamente, ou definido de forma indireta, e nesse caso o cálculo só pode ser efetuado de forma aproximada<sup>3</sup>.

Faz-se agora necessário dar uma definição formal de sistemas dinâmicos.

**Definição 1.1.1** *Chama-se sistema dinâmico a tripla  $\{T, X, f^t\}$ , onde  $T$  é um conjunto de tempos,  $X$  é o espaço de estados, e  $f^t : X \rightarrow X$  uma família de operadores de evolução parametrizados por  $t \in T$  e que satisfaz as propriedades abaixo:*

$$f^0 = id; \quad \textit{identidade}$$

$$f^{s+t} = f^t \circ f^s.$$

Cabe ressaltar, nas propriedades acima, que  $id$  é a função identidade em  $X$ , ou seja,  $id(x) = x \quad \forall x \in X$ . Da primeira propriedade tem-se que o sistema não muda seu estado

<sup>2</sup>Vê-se facilmente que  $f^t x$  pode ser definida para todo para  $(x, t) \in X \times T$

<sup>3</sup>Quando o sistema dinâmico é de tempo contínuo, a família  $f^t_{t \in T}$  de operadores de evolução é chamado fluxo.

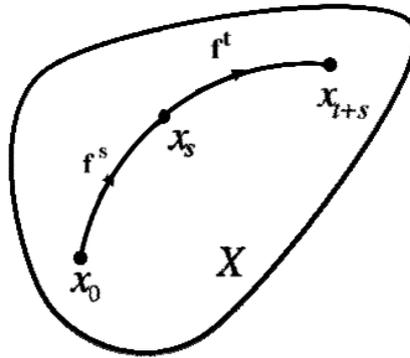


Figura 1: Operador evolução.

de modo espontâneo, além disso, a segunda propriedade, ilustrada na Figura 1, mostra que o valor da evolução do sistema decorridos  $(t + s)$  unidades de tempo, tomando como ponto de partida  $x \in X$  é igual se o sistema mudar primeiro do estado  $x$  para  $s$  unidades de tempo posteriores e assim evoluir nas  $t$  próximas unidades de tempo partindo agora do estado resultante  $f^s x$ , o que mostra que a lei que dá o comportamento do sistema é constante [61], ou seja, o sistema é autônomo.

Cabem agora algumas definições úteis.

**Definição 1.1.2** *Chama-se órbita partindo de  $x_0$  um subconjunto ordenado do espaço de estados  $X$ .*

$$Or(x_0) = \{x \in X : x = f^t x_0 \forall t \in T \text{ tal que } f^t(x_0) \text{ pode ser definido}\}$$

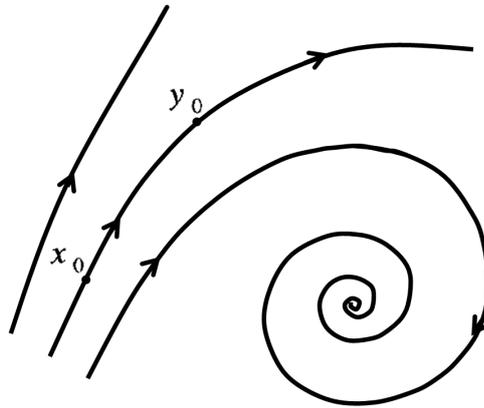


Figura 2: Órbitas de um dado sistema.

**Definição 1.1.3** Diz-se que  $x^* \in X$  é um ponto de equilíbrio se  $f^t x^* = x^*$  para todo  $t \in T$ .

**Definição 1.1.4** Chama-se retrato de fases de um sistema dinâmico à divisão do espaço de estados em órbitas.

Assim, dado o sistema dinâmico  $\{T, X, f^t\}$ , a geometria é responsável por associar ao sistema dinâmico no espaço de estados considerado o seu retrato de fases, e este por sua vez exhibe as órbitas do sistema conforme mostra a Figura 2. O retrato de fases é uma ferramenta importante na análise do comportamento do sistema dinâmico, pois através dele é possível determinar o número de convergências e qual o tipo de convergência do referido sistema quando  $t \rightarrow \infty$ , e quando  $t \rightarrow -\infty$ , caso o sistema seja reversível temporalmente.

**Definição 1.1.5** *Seja  $S$  uma variedade regular contida em  $X$ , então  $S$  é invariante se  $\forall x_0 \in S \Rightarrow x_t = f^t(x_0) \in S$ , onde  $S \subset X$ , isto é  $f^t(S) \subset S$ .*

## 1.2 Sistemas dinâmicos e equações diferenciais

Os sistemas dinâmicos de tempo contínuo são comumente definidos por meio de equações diferenciais. Assim, dado que o espaço de estados do sistema é  $X = \mathbb{R}^n$  com coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A lei, que em geral governa a evolução do sistema, é dada implicitamente em termos das velocidades como função das coordenadas, onde as velocidades serão denotadas por  $\dot{x}_i$  e as coordenadas por  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sendo:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n,$$

ou ainda vetorialmente

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

onde  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ <sup>4</sup> e supostamente diferenciável. Neste trabalho,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  será chamada de campo vetorial, tendo em vista que relaciona um vetor  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  para cada  $\mathbf{x}$ .

## 1.3 Estabilidade de um sistema dinâmico

O estudo das soluções de um sistema dinâmico é relevante, com isso surge o conceito de estabilidade, termo próprio tanto da solução, quanto da equação diferencial. A estabilidade de uma certa solução será vinculada com o comportamento das soluções que tem condições iniciais pertencentes à sua vizinhança, para o caso da estabilidade de uma equação diferencial a estabilidade é estudada pelo comportamento das equações isomórficas, que tem valor de parâmetros próximos da equação em questão.

Considerando um ponto de equilíbrio  $x^*$  de um dado sistema dinâmico,  $x^*$  é dito ponto de equilíbrio assintoticamente estável se, dada uma perturbação da condição inicial  $x_0 = x^*$ , a trajetória  $x(t) \rightarrow x^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Assim, com o decorrer do tempo, um

<sup>4</sup>As funções  $f_i$ , componentes de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , são chamadas de funções coordenadas.

ponto assintoticamente estável tem como principal característica atrair as trajetórias contidas em uma "esfera" de centro em  $x^*$ . Com isso, três casos importantes devem ser considerados <sup>5</sup>:

- $x^*$  é ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável se a esfera tem raio finito;
- $x^*$  é ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável se a esfera tem raio infinito<sup>6</sup>;
- $x^*$  é ponto de equilíbrio neutramente estável se, dada uma perturbação na condição inicial  $x(0) = x^*$ ,  $x(t)$  permanece dentro de uma esfera centrada no ponto  $x^*$ , com o decorrer do tempo;
- $x^*$  é ponto instável se, após uma perturbação na condição inicial  $x(0) = x^*$ ,  $x(t)$  não pode mais ser encontrado na esfera de centro em  $x^*$  num tempo finito<sup>7</sup>.

No sentido de Lyapunov, a estabilidade dá-se levando em consideração as trajetórias que partem da condição inicial localizada na vizinhança desse ponto.

A classificação de pontos de equilíbrio de sistemas dinâmicos pode ser feita com o uso do polinômio característico da matriz  $A$  obtida da linearização do campo vetorial em torno do ponto de equilíbrio. Assim, quando  $A$  tiver autovalores com parte real não-nula, o ponto de equilíbrio  $x^*$  chama-se *hiperbólico*, não importando o valor da parte imaginária. Por outro lado, caso pelo menos um autovalor tenha a parte real nula, diz-se que o ponto de equilíbrio é *não-hiperbólico*. Pode-se classificar os pontos de equilíbrio hiperbólicos quanto à estabilidade da seguinte forma: *atratores*, *repulsores* e *sela*. Assim, se:

- $A$  tem autovalores com parte real negativa: o ponto de equilíbrio chama-se de *atrator*, e este equilíbrio é dito assintoticamente estável. Caso todos os autovalores de  $A$  sejam complexos, o atrator chama-se *foco estável*, e ainda se todos os autovalores de  $A$  são reais, o atrator chama-se *nó estável*;

<sup>5</sup>Os dois primeiros casos são classificados como *atrator*.

<sup>6</sup>A esfera com raio infinito abrange todo o espaço de fases.

<sup>7</sup>O termo esfera é adequado para sistemas tridimensionais, para o caso do sistema unidimensional tem-se uma reta, bidimensional um círculo e dimensão maior que três uma hiper-esfera.

- $A$  tem autovalores com parte real positiva: chama-se o ponto de equilíbrio de *repulsor* ou *fonte*. Caso os autovalores de  $A$  sejam complexos, chama-se de *foco instável* e, se ainda os autovalores de  $A$  são reais, a fonte chama-se *nó instável*;
- $A$  tem alguns autovalores (não todos) com parte real positiva e o restante tem parte real negativa: o ponto de equilíbrio chama-se *sela*.

Os pontos de equilíbrio não-hiperbólicos, quanto à estabilidade, podem ser classificados como segue:

- $A$  tem um ou mais autovalores com parte real positiva: o ponto de equilíbrio chama-se *instável*.
- $A$  tem alguns autovalores com parte real negativa, e outros são imaginário puros: o ponto de equilíbrio chama-se *marginalmente estável*.
- $A$  tem autovalores imaginário puros e não-nulos: o ponto de equilíbrio chama-se *centro*.

Em 1959 e 1963, D.M Grobman e P. Hartman respectivamente desenvolveram um teorema fundamental na teoria de Sistemas Dinâmicos: [59]: Existe uma equivalência topológica orbital entre os retratos de fases dos sistema dinâmico não linear com o respectivo sistema dinâmico linearizado em torno do ponto de equilíbrio, isto para o caso de um ponto de equilíbrio hiperbólico. Para o caso do ponto de equilíbrio não-hiperbólico, ou seja, se existe algum autovalor imaginário puro, então a linearização não permite afirmações com relação a estabilidade do sistema não linear.

## 2 Superfícies Invariantes.

*O presente capítulo tem o objetivo de determinar propriedades de estabilidade de superfícies invariantes para sistemas dinâmicos nos seus respectivos espaços de fase. Os aspectos tratados nas seções 2.1 e 2.2, são visto de modo detalhado em [62].*

### 2.1 Superfícies invariantes em sistemas diferenciais.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad x \in W \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $F(\mathbf{x})$  é um campo vetorial qualquer, e  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto onde  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  está bem definida.

O fluxo do sistema (2.1) é dada pelas soluções  $X(X_0, t)$  associadas a condição inicial  $X_0$  no domínio  $W \subseteq \mathbb{R}^m$ . Uma superfície  $S \subset W$  é uma superfície invariante do sistema (2.1), se para todo  $X_0 \in S$ ,  $X(X_0, t) \in S$  para todo  $t$ .

Considerando o anel de funções  $C^\infty$  definidas em  $W$  e denotado por  $\mathcal{R}$ . Obviamente este anel contém a função nula e a função identidade,  $\mathbb{O}(x) = 0$  e  $\mathbb{I}(x) = 1$  para quaisquer  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ao sistema (2.1) pode-se associar o operador diferencial derivada ao longo do fluxo dado por:

$$D_F = \sum_{i=1}^m F_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.2)$$

Para uma superfície  $S \subset W$  e um o ideal  $I \subset \mathcal{R}$  define-se os seguintes conjuntos:

- (a) o ideal  $I_S = \{f \in \mathcal{R} / f(S) = 0\}$ ;

(b) a superfície  $S_I = \{X \in W / f(X) = 0, \forall f \in I\}$ .

Os casos em que  $I_S = \{\mathbb{O}\}$  e  $S_I = \emptyset$  não serão considerados. É fácil ver que para uma superfície  $S$ , tem-se:

$$S \subseteq S_{I_S} \quad (2.3)$$

Podem ocorrer três situações:

- (a)  $I_S = \{\mathbb{O}\}$ , neste caso a superfície  $S$  não está definida em  $\mathcal{R}$ ;
- (b)  $I_S \neq \{\mathbb{O}\}$  e  $S \subset S_{I_S}$ , a superfície  $S$  está parcialmente definida em  $\mathcal{R}$ ;
- (c)  $S = S_{I_S}$ , a superfície  $S$  está definida em  $\mathcal{R}$ .

Será agora estabelecida uma proposição que permitirá desenvolver o método de análise de estabilidade [42].

**Teorema 2.1** *Seja o sistema (2.1) e um anel  $\mathcal{R}$  tal que a derivação de  $D_F$  é fechada em  $\mathcal{R}$  ( $D_F(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$ )*

(a) *Se houver um ideal finitamente gerado de  $\mathcal{R}$ , denotado por  $I = (I_1, \dots, I_p)$ , tal que:*

$$D_F(I) \subseteq I,$$

$$S_I \neq \emptyset,$$

*então  $S_I$  é uma superfície invariante do sistema dado em (2.1).*

(b) *Se  $S$  é invariante do sistema (2.1), então  $D_F(I_S) \subseteq I_S$ .*

*Demonstração: Considerando que  $X(X_0, t)$  é uma solução do sistema (2.1) e ainda que  $G \in \mathcal{R}$ , segue, usando a regra da cadeia, que:*

$$\frac{d}{dt}(G(X(X_0, t))) = (D_F(G))(X(X_0, t)). \quad (2.4)$$

*Assim,*

(a) *Sendo,  $I_1, \dots, I_p$  um conjunto de geradores de  $I$ , e como  $D_F(I_i) \in I$  segue que*

$$D_F(I_i) = \sum_{j=1}^q L_{ij} I_j,$$

com  $L_{ij} \in \mathcal{R}$ . Identificando  $X_0 = X(0, t) \in S(I)$ , segue que

$$I_1(X_0) = \dots = I_p(X_0) = 0,$$

Tem-se também que:

$$\frac{d}{dt}(I_i(X(X_0, t))) = \sum_{j=1}^q L_{ij}(X(X_0, t)) \cdot I_j(X(X_0, t)), \quad i = 1, \dots, q.$$

Deste modo, tem-se:

$$[Y_1(t), \dots, Y_q(t)] = [I_1(X(X_0, t)), \dots, I_q(X(X_0, t))]$$

é uma solução do sistema linear homogêneo de equações diferenciais:

$$\dot{Y}_i = \sum_{j=1}^q L_{ij}(X(X_0, t)) Y_j,$$

que tem por condição inicial  $[0, \dots, 0]$ . Portanto,  $I_j(X(X_0, t)) = 0$  para  $j = 1, \dots, q$ , implicando que  $X(X_0, t) \in S(I)$ .

(b) Para fixar as idéias, é importante lembrar que  $D_F(G)$  é a derivada de Lie da função  $G$  ao longo do fluxo do operador  $D_F$ . Assim,

$$D_F(G)(X_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{G(X(X_0, \lambda)) - G(X_0)}{\lambda}. \quad (2.5)$$

Considerando agora que  $G \in I_S$ . Se  $X_0 \in S$  então  $X(X_0, \lambda) \in S$ . Por outro lado  $G(S) = 0$ . Logo, tem-se finalmente que  $G(X(X_0, \lambda)) = 0$ , o que dá  $D_F(G)(S) = 0$ , mas por hipótese  $D_F(G) \in \mathcal{R}$ , foi provado então que  $D_F(I_S) \subseteq I_S$ .

O teorema acima mostra, na primeira parte, uma condição suficiente para a existência de superfícies invariantes, enquanto a segunda parte estabelece uma condição necessária para a existência de uma superfície invariante parcialmente definida em  $\mathcal{R}$ . Segue agora, outro teorema importante para o desenvolvimento da teoria:

**Teorema 2.2** Considerando um anel  $\mathcal{R}$  fechado por derivação  $D_F$  em  $\mathcal{R}$ . Se uma superfície  $S$  do sistema (2.1) é parcialmente definida em  $\mathcal{R}$  e  $I_S$  é finitamente gerado, então  $S_{I_S} \supset S$  é uma superfície invariante do sistema (2.1).

*Demonstração:* Sabendo, pelo teorema anterior (parte b), que  $S$  é invariante, segue que

$D_F(I_S) \subseteq I_S$ . Por outro lado, tem-se que:  $I_S = (I_1, \dots, I_p)$ . Logo, pela parte a do teorema anterior, conclui-se que  $S_{I_S}$  é invariante.

Pode-se entender o teorema anterior da seguinte forma: Se uma superfície é parcialmente definida em um sub-anel de  $\mathcal{R}$  cujos ideais são finitamente gerado, então existe uma superfície invariante definida neste sub-anel.

**Corolário 2.1** *Considerando um sub-anel  $\mathcal{R}'$  cujos ideais são finitamente gerados, e ainda uma solução  $X(X_0, t)$  do sistema dado em (2.1). Se existe uma função  $h(X) \neq 0 \in \mathcal{R}'$  tal que  $h(X(X_0, t)) = 0$ , então existe uma superfície invariante definida em  $\mathcal{R}'$ .*

O resultado do Corolário 2.1 é válido para o anel dos polinômios, cujos ideais são finitamente gerados. Segue-se então o resultado:

**Corolário 2.2** *Seja uma solução  $X(X_0, t)$  do sistema dado em (2.1). Se existe uma função polinomial  $h(X)$  tal que esta é nula ao longo da trajetória, isto é,*

$$h(X(X_0, t)) = 0$$

*então este sistema tem uma superfície invariante polinomial contendo essa trajetória.*

**Definição 2.1.1** *Considerando o sistema dado em (2.1), um sub-anel  $\mathcal{R}$  e um ideal finitamente gerado  $\mathbf{I} = \langle I_1, \dots, I_p \rangle \subset \mathcal{R}$ . Supondo que este é fechado sob derivação  $D_F$ ,  $D_F(\mathbf{I}) \subseteq \mathbf{I}$ , e que  $S_{\mathbf{I}} \neq \emptyset$ , definindo-se o mapeamento:*

$$P_{\mathbf{I}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{x} \rightarrow (I_1(\mathbf{x}), \dots, I_p(\mathbf{x})).$$

*é fácil ver que a imagem da superfície  $S_{\mathbf{I}}$  através de  $P_{\mathbf{I}}$  é a origem de  $\mathbb{R}^p$ .*

De acordo com o mapeamento  $P_{\mathbf{I}}$ , o sistema (2.1) é transformado em um novo sistema de equações diferenciais ordinárias agora com  $p$  variáveis e, pela condição de fechamento, admite a seguinte forma:

$$\dot{I}_i = \sum_{j=1}^p L_{ij}(X(X_0, t)) I_j, \quad i = 1, \dots, p. \quad (2.7)$$

com condições iniciais dadas pela imagem da condição inicial do sistema (2.1) pelo mapeamento (2.6),  $\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}(X_0)$ . Sendo assim, pode ser associada à superfície invariante do sistema (2.1) a origem do sistema de coordenadas  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . A evolução de  $I_i$  é dada pelo sistema (2.7), conseqüentemente a estabilidade da superfície invariante é reduzida a determinação da estabilidade do ponto fixo na origem do sistema (2.7). O sistema (2.7) é um sistema diferencial linear não-autônomo onde os coeficientes são funções dependentes do tempo: soluções desconhecidas do sistema (2.1). A forma final do sistema (2.7) dependerá de duas considerações importantes:

- (i) A escolha feita para o conjunto de geradores do ideal  $I$ . A escolha em questão não é única, mesmo quando  $I_S = \langle I_1, \dots, I_p \rangle$  não possui sub-ideais fechados sob  $D_F$ .
- (ii) Mesmo o mapeamento (2.6) sendo completamente determinado pelo conjunto de funções  $I_i$ , a forma de expressar o sistema da maneira dada em (2.7) não é única. Assim, dada uma matriz  $\mathbf{L}$  o sistema (2.7) admite a forma mais geral:

$$\dot{I}_i = \sum_{j=1}^p (L_{ij} + \sum_{k \neq j} \mu_{ijk} I_k) I_j = \sum_{j=1}^p L_{ij}(\mu) I_j \quad (2.8)$$

desde que  $\mu_{ijk} = -\mu_{ikj}$  e  $\mu_{ijk} \in \mathcal{R}$ .

## 2.2 Estabilidade de Superfícies Invariantes.

A presente seção inicia com o teorema que trata da desigualdade de Wazewski [63] que fornece condições suficientes para os limites das soluções de um sistema linear não-autônomo, como será visto abaixo:

**Teorema 2.3** (*Desigualdades de Wazewski*) *Seja o sistema linear não-autônomo, que na forma matricial é dado por:*

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{I} \quad (2.9)$$

onde  $L(t)$  é contínua em  $t$ , e  $\mathbf{H}$  é a matriz hermitiana dada por:

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}(t) + \mathbf{L}^T(t)). \quad (2.10)$$

Seja  $\lambda(t)$  e  $\Lambda(t)$  o menor e o maior autovalor da matriz  $\mathbf{H}(t)$ . Segue que:

$$\|\mathbf{I}_0\| \exp\left[\int_{t_0}^t \lambda(t') dt'\right] \leq \|\mathbf{I}(t, \mathbf{I}_0, t_0)\| \leq \|\mathbf{I}_0\| \exp\left[\int_{t_0}^t \Lambda(t') dt'\right], \quad (2.11)$$

onde a norma é definida como:

$$\|\mathbf{x}\|^2 \equiv \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

*Demonstração:* Seja  $V(t) = \langle \mathbf{I}(t, \mathbf{I}_0, t_0), \mathbf{I}(t, \mathbf{I}_0, t_0) \rangle$ . Usando a definição da matriz  $\mathbf{H}$ , segue que:

$$\dot{V} = V \frac{2\langle \mathbf{I}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{I}(t) \rangle}{\langle \mathbf{I}(t), \mathbf{I}(t) \rangle},$$

pelas propriedades das matrizes hermitianas, tem-se que:

$$\lambda(t)\langle x, x \rangle \leq \langle x, \mathbf{H}(t)x \rangle \leq \Lambda(t)\langle x, x \rangle, \quad \forall x.$$

Daí segue,

$$2\lambda(t) \leq \frac{d}{dt}(\log V) \leq 2\Lambda(t).$$

Finalmente, (2.11) decorre da integração da relação acima, e observando que  $V = \|\mathbf{I}(t)\|^2$ .

Como consequência do resultado acima, seguem dois corolários que tratam da estabilidade do sistema descrito em (2.9).

**Corolário 2.3** *Se para todo  $t > t_0$ ,  $\Lambda(t) \leq 0$  ( $\Lambda(t) < 0$ ) o sistema é estável (assintoticamente estável).*

**Corolário 2.4** *Se para todo  $t > t_0$ ,  $\lambda(t) > 0$  o sistema é instável.*

É importante ressaltar que na prova do Teorema 2.3 a função definida por:

$$V(t) = \langle \mathbf{I}(t, \mathbf{I}_0, t), \mathbf{I}(t, \mathbf{I}_0, t) \rangle$$

constitui uma função de Lyapunov para o sistema (2.9).

Voltando agora aos sistemas lineares não-autônomos definido por uma superfície invariante  $S$  via mapeamento  $P_I$ . Segue o seguinte resultado:

**Teorema 2.4** *Supondo que exista um domínio aberto  $\Omega_L \subseteq W$  contendo a superfície  $S$ , tal que para  $\mathbf{x} \in \Omega_L$ , serão consideradas as seguintes possibilidades:*

$$(1) \Lambda(\mathbf{x}) < 0,$$

$$(2) \Lambda(\mathbf{x}) \leq 0,$$

$$(3) \lambda(\mathbf{x}) > 0,$$

onde  $\Lambda(X)$  é o maior autovalor e  $\lambda(X)$  é o menor autovalor da matriz

$$\mathbf{H}(X) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}(X) + \mathbf{L}^T(X)).$$

Sendo assim, para as três possibilidades descritas acima, existe um domínio aberto  $\Pi_L$  contendo a superfície  $S$  tal que para toda a solução  $X(X_0, t)$  com ponto inicial no conjunto  $X_0 \in \Pi_L$ , tem-se que a solução:

(a) converge para a superfície  $S$ : a superfície é assintoticamente estável;

(b) nunca deixa o conjunto  $\Pi_L$ : a superfície é estável;

(c) deixa o conjunto  $\Pi_L$ : a superfície é instável.

*Demonstração:* Considerando que o conjunto  $\Omega_L$  será mapeado segundo o mapeamento (2.6) em um domínio aberto  $P_L(\Omega_L) \subset \mathbb{R}^p$  em torno da origem. Este contém ainda uma bola aberta de dimensão  $p$ , indicada abaixo:

$$B_\rho = \{\mathbf{I} \in \mathbb{R}^p / \|\mathbf{I}\| < \rho^2\}$$

para algum  $\rho$  tal que  $\Lambda(X) < 0$  ou  $\Lambda(X) \leq 0$  e sempre que uma solução do sistema (2.7) inicia-se em  $B_\rho$  os corolários 3 e 4 podem ser aplicados para todo o ponto da bola acima indicada. Segue-se então que o domínio  $\Pi_L$  é a pré-imagem da bola sobre o mapeamento considerado em (2.6).

Conclui-se que o comportamento do fluxo, avaliado nas proximidades da superfície invariante, que determina a sua estabilidade, pode ser estudado pelo sinal dos autovalores da matriz  $\mathbf{H}$  no domínio  $\Omega_L$  conforme definido no teorema 2.3. Buscando mostrar explicitamente a extensão e existência deste domínio tem-se que fazer uma escolha adequada para a matriz  $\mathbf{L}$ , e em último caso os geradores do ideal. Para melhor entender o fato de que a escolha é importante, é necessário lembrar que o método está intimamente ligado com funções de Lyapunov adequadas para efetuar a análise. Assim, para o caso em que a superfície invariante é um ponto fixo, a função abaixo:

$$V(t) = \sum_{i=1}^m I_i^2$$

é a função de Lyapunov em alguns domínios em torno do ponto fixo em questão. Os teoremas 2.3 e 2.4 são generalizações de funções de Lyapunov para superfícies de dimensão  $n - p > 0$ , com  $n > p > 0$ . Mesmo encontrando uma superfície invariante para o sistema dado em (2.1) tal que esta satisfaça a condição (1) do teorema (2.4), o problema de determinar o domínio de atração ainda permanece. Definindo agora um conjunto  $\Omega_I$  união de todos os conjuntos  $\Omega_{\mathbf{L}}$  para diferentes formas da matriz  $\mathbf{L}$  associada ao sistema (2.7), será estabelecido o seguinte resultado:

**Teorema 2.5** *Seja o sistema (2.1) com uma superfície invariante  $S$  e um conjunto de geradores cumprindo a condição 1 do teorema (2.4). Para uma estimativa  $\Omega'_I$  da região  $\Omega_I$ ,  $\Omega'_I \subseteq \Omega_I$ , tem-se que a pré-imagem de uma bola  $p$ -dimensional sob o mapeamento (2.6) está totalmente contido em  $\Omega'_I$  e esta pré-imagem constitui um subconjunto de uma bacia de atração da superfície invariante. Assim, uma estimativa para o domínio de estabilidade de  $S$  é dada pelo máximo  $r > 0$  tal que:*

$$\Pi_{\mathbf{L}}(S) = \{X/\mathbf{I}(X) \in B_r\} \subseteq \Omega_I. \quad (2.12)$$

*Demonstração:* Seja uma trajetória  $X(X_0, t')$ , pelo corolário (2.3), se para um tempo  $t'$  no conjunto  $\Omega_{\mathbf{L}}$  de um dos possíveis sistemas dados em (2.7), então a solução  $\mathbf{I}(X_0, t')$  pelo mapeamento (2.6) tem norma decrescente. Caso a solução também pertença ao conjunto  $B_r$ , a evolução da trajetória vai mantê-lo dentro deste conjunto para qualquer  $t > t'$ , e é coerente que a trajetória  $X(x_0, t)$  permanece no conjunto  $\Omega_{\mathbf{L}}$  para  $t > t'$ . Assim, para o caso de estabilidade assintótica a trajetória em  $\mathbb{R}^p$  converge para a origem, enquanto que em  $\mathbb{R}^m$  ela convergirá para a superfície invariante.

## 2.3 Expoente de estabilidade da superfície $S$ .

Seja o sistema dinâmico de dimensão  $n$  dado pelo sistema de equações diferenciais abaixo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))^t$  está definido em  $\mathbb{R}^m$ , e seja

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m / I_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p < m\}$$

uma superfície <sup>1</sup> de  $(m - p)$  dimensões em  $\mathbb{R}^m$ , e  $I_i(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  de tal modo que

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{x})\mathbf{I} \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{I} = (I_1(\mathbf{x}), I_2(\mathbf{x}), \dots, I_p(\mathbf{x}))$  e  $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = (L_{ij}(\mathbf{x}))_{p \times p}$ . Neste caso a superfície  $S$  é invariante pela dinâmica.

Trata-se agora de estudar a evolução do vetor normal

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \sqrt{I_1^2(\mathbf{x}) + I_2^2(\mathbf{x}) + \dots + I_p^2(\mathbf{x})},$$

ao longo do tempo, cuja derivada é:

$$\frac{d\|\mathbf{I}(t)\|}{dt} = \|\mathbf{I}(t)\| \langle \mathbf{i}, \mathbf{H}\mathbf{i} \rangle, \quad (2.15)$$

na equação (2.15)  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{H}$  são respectivamente dados por:

$$\mathbf{i}(t) = \frac{\mathbf{I}(t)}{\|\mathbf{I}(t)\|}; \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{L}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}^t(\mathbf{x})}{2}. \quad (2.16)$$

Tomando agora a expressão (2.15), segue que:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d\|\mathbf{I}(t')\|}{\|\mathbf{I}(t')\|} &= \int_{t_0}^t \langle \mathbf{i}(t'), \mathbf{H}(t')\mathbf{i}(t') \rangle dt'; \\ \|\mathbf{I}(t)\| &= \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp \left[ \int_{t_0}^t \langle \mathbf{i}(t'), \mathbf{H}(t')\mathbf{i}(t') \rangle dt' \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

para  $t > t_0$ . Define-se a função

$$y(t) = \ln \frac{\|\mathbf{I}(t)\|}{\|\mathbf{I}(t_0)\|} = \int_{t_0}^t \langle \mathbf{i}(t'), \mathbf{H}(t')\mathbf{i}(t') \rangle dt', \quad (2.18)$$

que tem solução equivalente ao problema de valor inicial abaixo:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle, \quad y(t_0) = 0. \quad (2.19)$$

Afim de definir o expoente de estabilidade da superfície  $S$ , será considerada a seguinte transformação:

$$x'_i = x'_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

---

<sup>1</sup>A superfície  $S$  será aqui chamada de superfície invariante do sistema.

onde,

$$\begin{aligned}x'_i &= I_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, p; \\x'_i &= J_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m - p.\end{aligned}$$

Tem-se que o sistema (2.1) pode ser escrito como:

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{I}, \mathbf{J})\mathbf{I};$$

$$\frac{d\mathbf{J}(t)}{dt} = \mathbf{P}(\mathbf{I}, \mathbf{J}),$$

onde as coordenadas

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = (I_1(\mathbf{x}), I_2(\mathbf{x}), \dots, I_p(\mathbf{x}))^t$$

e

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = (J_1(\mathbf{x}), J_2(\mathbf{x}), \dots, J_{m-p}(\mathbf{x}))^t,$$

são chamadas de variáveis *paralelas* e *transversais* respectivamente. Além disso,  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_{m-p})^t$  é um campo vetorial de dimensão  $m - p$ .

Supondo agora  $\|\mathbf{I}(x(t))\|$  muito pequeno, o sistema dinâmico anterior será aproximado pelo seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} &= \mathbf{L}_S(\mathbf{J})\mathbf{I} \\ \frac{d\mathbf{J}(t)}{dt} &= \mathbf{P}_S(\mathbf{J}).\end{aligned}\tag{2.20}$$

Com isso, pode-se definir o expoente de estabilidade da superfície  $S$ :

$$d = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{I}(t)\|}{\|\mathbf{I}(t_0)\|}.$$

Derivando a equação (2.16), tem-se

$$\frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} = \frac{\|\mathbf{I}(t)\| \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} - \mathbf{I}(t) \frac{d\|\mathbf{I}(t)\|}{dt}}{\|\mathbf{I}(t)\|^2},$$

o que gera a seguinte relação:

$$\frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{I}, \mathbf{J})\mathbf{i} - \mathbf{i}\langle \mathbf{i}, \mathbf{H}(\mathbf{I}, \mathbf{J})\mathbf{i} \rangle. \quad (2.21)$$

Define-se um novo sistema dinâmico baseado na equação para  $\mathbf{J}(t)$  em (2.20) e na equação (2.19) e (2.21):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} &= \mathbf{L}_s(\mathbf{J})\mathbf{i} - \mathbf{i}\langle \mathbf{i}, \mathbf{H}_s(\mathbf{J})\mathbf{i} \rangle, \quad \mathbf{i}(t_0) = \mathbf{i}_0 \\ \frac{d\mathbf{J}(t)}{dt} &= \mathbf{P}_s(\mathbf{J}), \quad \mathbf{J}(t_0) = \mathbf{J}_0 \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \langle \mathbf{i}, \mathbf{H}_s(\mathbf{J})\mathbf{i} \rangle, \quad y(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $\|\mathbf{i}_0\| = 1$  e  $\mathbf{H}_s(\mathbf{J}) = \mathbf{H}(\mathbf{I} = 0, \mathbf{J})$  trata-se da matriz  $\mathbf{H}$  definida em (2.16) e calculada para trajetórias dentro da superfície  $S$ . O expoente de estabilidade  $d$  pode ser obtido através do seguinte limite:

$$d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t}$$

onde  $y(t)$  é solução do sistema (2.22).

Afim de obter algumas estimativas para o expoente de estabilidade, serão utilizadas algumas desigualdades. Assim, considerando a matriz hermitiana:

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{J}) = \frac{\mathbf{L}_s(\mathbf{J}) + \mathbf{L}_s^t(\mathbf{J})}{2},$$

são definidas as seguintes quantidades:

$$\lambda_H(\mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \lambda_s(\mathbf{J}(t)) dt; \quad (2.23)$$

$$\Lambda_H(\mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Lambda_s(\mathbf{J}(t)) dt. \quad (2.24)$$

Nas fórmulas (2.23) e (2.24) acima,  $\lambda_s(\mathbf{J}(t))$  e  $\Lambda_s(\mathbf{J}(t))$  são o menor e o maior autovalor da matriz  $\mathbf{H}_s(\mathbf{J})$  respectivamente, e  $\mathbf{J}(t)$  é a solução do sistema (2.22).

Como a matriz  $\mathbf{H}$  é hermitiana pode-se mostrar a existência de uma base ortonormal

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  formada por autovetores de  $\mathbf{H}$ , isto é,

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{J})\mathbf{v}_i(\mathbf{J}) = \lambda_i(\mathbf{J})\mathbf{v}_i(\mathbf{J}),$$

com  $i = 1, \dots, p$ . Assim,

$$\mathbf{i}(t) = c_1(\mathbf{J}(t))\mathbf{v}_1(\mathbf{J}(t)) + \dots + c_p(\mathbf{J}(t))\mathbf{v}_p(\mathbf{J}(t))$$

com  $c_1^2(\mathbf{J}(t)) + \dots + c_p^2(\mathbf{J}(t)) = 1$  para todo  $t \geq t_0$ . Agora, tomando a expressão (2.18) para  $y(t)$ , tem-se que:

$$y(t) = \int_{t_0}^t c_1^2(\mathbf{J}(t'))\lambda_1(\mathbf{J}(t'))dt' + \dots + \int_{t_0}^t c_p^2(\mathbf{J}(t'))\lambda_p(\mathbf{J}(t'))dt',$$

mas  $\lambda_s(\mathbf{J}(t)) \leq \lambda_i(\mathbf{J}(t)) \leq \Lambda_s(\mathbf{J}(t))$  para  $i = 1, \dots, p$ . Daí segue que:

$$\int_{t_0}^t \lambda_s(\mathbf{J}(t'))dt' \leq y(t) \leq \int_{t_0}^t \Lambda_s(\mathbf{J}(t'))dt'.$$

Por fim, fazendo  $t \rightarrow \infty$  e levando em conta que as relações mostradas em (2.23) e (2.24), tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \lambda_s(\mathbf{J}(t))dt \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} y(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Lambda_s(\mathbf{J}(t))dt,$$

ou ainda

$$\lambda_H(\mathbf{J}_0) \leq d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0) \leq \Lambda_H(\mathbf{J}_0) \quad (2.25)$$

tal identidade não depende da condição inicial  $\mathbf{i}_0$ . As quantidades  $\lambda_H$  e  $\Lambda_H$  são ambas calculadas como médias temporais do vetor  $\mathbf{J}(t)$  e seus valores dependem do seu comportamento assintótico. Os possíveis valores para  $\lambda_H$  e  $\Lambda_H$  são determinados pelos objetos invariantes contidos em  $S$ . Entre estes possíveis objetos invariantes serão considerados pontos fixos, soluções periódicas e atratores estranhos. Para cada um deles foram calculadas as quantidades em (2.23) e (2.24) como:

$$\text{Ponto fixo } \mathbf{J}_c: \lambda_H = \lambda_S(\mathbf{J}_c); \Lambda_H = \Lambda_S(\mathbf{J}_c);$$

**Solução periódica  $\mathbf{J}(t)$ :**

$$\lambda_H(\mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \lambda_s(\mathbf{J}(t)) dt,$$

$$\Lambda_H(\mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Lambda_s(\mathbf{J}(t)) dt;$$

**Atrator  $\Gamma$ :**  $\lambda_H = \int_\Gamma \lambda_S(\mathbf{J}) d\mu$ ;  $\Lambda_H = \int_\Gamma \Lambda_S(\mathbf{J}) d\mu$ .

Onde  $\mathbf{J}_c$  é o vetor  $\mathbf{J}$  avaliado no ponto fixo do sistema,  $\tau$  é o período da solução periódica e  $\mu$  é uma medida estatística definida para o atrator estranho  $\Gamma$ .

## 3 Controle Impulsivo de Sistemas Dinâmicos - Caso I.

*O presente capítulo tem por objetivo abordar os conceitos básicos relativos a sistemas dinâmicos impulsivos, além disso, trata de um método de controle impulsivo que permite convergir as trajetórias do sistema dinâmico para superfícies invariantes contidas em seu espaço de fase. Faz-se importante ressaltar que os resultados deste capítulo correspondem ao artigo [64] submetido para publicação*

### 3.1 Controle Impulsivo.

Buscando bem fundamentar o tema tratado nesta seção, define-se o que é um sistema impulsivo de acordo com a maneira tradicional encontrada na literatura [28].

**Definição 3.1.1** *Seja o sistema não linear*

$$\dot{x}(t) = f(t, x),$$

onde  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua,  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado variável, e  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .

*Considerando o conjunto discreto de tempos, onde*

$$\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \tau_{i+1} < \dots, \quad \tau_i \rightarrow \infty \text{ quando } i \rightarrow \infty.$$

Seja agora

$$U(i, \mathbf{x}) = \Delta \mathbf{x} \big|_{t=\tau_i} = \mathbf{x}(\tau_i^+) - \mathbf{x}(\tau_i^-),$$

o "salto" no estado variável no instante  $\tau_i$ . Então o sistema impulsivo é descrito por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}), \quad t \neq \tau_i \\ \Delta \mathbf{x} = U(i, \mathbf{x}), \quad t = \tau_i \\ \mathbf{x}(t_0^+) = \mathbf{x}_0, \quad t_0 \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

que também são chamadas de equações diferenciais impulsivas.

A equação diferencial (2.19) será usada para definir o seguinte sistema impulsivo com parte contínua dada pela equação (2.13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad \forall t \neq t_n \\ \frac{dy(t)}{dt} = \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle \\ \Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_n^+) - \mathbf{x}(t_n^-) = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}(t_n^-), \mathbf{y}(t_n^-)) \\ \Delta y(t) = y(t_n^+) - y(t_n^-) = -y(t_n^-) \quad \forall t = t_n \end{array} \right.$$

onde os conjuntos de equações acima estão definidos para todo  $t \neq t_n$  e para todo  $t = t_n$  respectivamente, e  $t_n \rightarrow \infty$  para todo  $n \rightarrow \infty$ . Os impulsos definidos para  $y(t)$  implicam na condição  $y(t_n^+) = 0$  para todo  $n$ , e ainda supõe-se que  $y(t_0) = 0$ . O vetor  $\mathbf{G}_n = (G_{n1}, G_{n2}, \dots, G_{nm})^t$  é um vetor de  $\mathbb{R}^m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Para um tempo  $t_n$ , é possível escrever:

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \|\mathbf{I}(t_n^-)\| \exp(\beta_n), \quad (3.1)$$

onde  $\beta_n = -y(t_n^-) + B_n$ . Tomando o intervalo  $[t_{n-1}, t_n]$  e usando as equações (2.17), (2.18) e (2.19) segue que:

$$\|\mathbf{I}(t_n^-)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp \left[ \int_{t_{n-1}^+}^{t_n^-} \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt \right] \quad (3.2)$$

ou ainda,

$$\|\mathbf{I}(t_n^-)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp(y(t_n^-)). \quad (3.3)$$

Usando (3.1) e (3.2) obtem-se:

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp(\beta_n + y(t_n^-)) = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp(B_n), \quad (3.4)$$

considerando a condição inicial  $\mathbf{I}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{I}_0$  tem-se por recorrência da fórmula (3.3) que

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp\left(\sum_{i=1}^n B_i\right), \quad (3.5)$$

onde é fácil ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{I}(t_n^+)\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n B_i\right) = -\infty.$$

Fazendo uso da relação (3.2) e da relação abaixo

$$\|\mathbf{I}(t_n^-)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp\left[\int_{t_{n-1}^+}^{t_n^-} \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt\right] = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp[y(t_n^-)],$$

pode-se assegurar que

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp\left[\sum_{i=1}^n \beta_i + \sum_{i=1}^n y(t_i^-) + y(t)\right] \quad (3.6)$$

para todo  $t \in (t_{n-1}, t_n)$ . Por outro lado  $y(t_i^-)$  e  $y(t)$  são dados como se segue

$$y(t_i^-) = \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt; \quad (3.7)$$

$$y(t) = \int_{t_n^+}^t \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt. \quad (3.8)$$

Assumindo agora o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , tem-se:

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \beta_i + \lim_{n, t \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n y(t_i^-) + y(t)\right)\right]; \quad t_n < t < t_{n+1}.$$

Considerando separadamente as expressões que figuram nos colchetes da expressão acima tem-se:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = - \sum_{i=1}^n y(t_i^-) + \sum_{i=1}^n B_i = -t_n \frac{\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt}{t_n} + \sum_{i=1}^n B_i;$$

$$\sum_{i=1}^n y(t_i^-) + y(t) = t \frac{\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt + \sum_{i=1}^n \int_{t_n^+}^t \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt}{t}, t \in (t_n, t_{n+1}).$$

onde  $t \in (t_n, t_{n+1})$ .

Seja  $\|\mathbf{I}_0\| < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é muito pequeno e supondo a condição inicial  $(\mathbf{I}_0, \mathbf{J}_0)$ . Para qualquer inteiro  $n$ , conclui-se pela equação (3.5) que

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| < \varepsilon \exp \left[ \sum_{i=1}^n B_i \right].$$

Considerando agora que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{I}(t_n^+)\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n B_i \right) = -\infty$$

é verificada então  $\|\mathbf{I}(t_n^+)\| < \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pode-se mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t_n} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt \right) = d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)$$

$$\lim_{n, t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt + \sum_{i=1}^n \int_{t_n^+}^t \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt \right) = d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0).$$

Aqui, a trajetória para o vetor  $\mathbf{J}(t)$  pode ser calculada usando a condição inicial  $\mathbf{J}(t_0) = \mathbf{J}_0$ . Sendo assim, vale a seguinte aproximação assintótica para  $\|\mathbf{I}(t)\|$  quando  $t \rightarrow \infty$ :

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \|\mathbf{I}_0\| \exp \left[ \sum_{n=1}^n B_i + d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)(t - t_n) \right], \quad t \in (t_n, t_{n+1}). \quad (3.9)$$

Considerando a seguinte sequência de números

$$d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)(t_{n+1} - t_n) = d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)\Delta_{n+1},$$

onde  $\Delta_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ , tem-se que  $d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)(t - t_n) < d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)\Delta_{n+1}$ , para  $(t_n, t_{n+1})$ , e a partir da equação (3.9) tem-se a seguinte desigualdade assintótica para  $t \rightarrow \infty$  :

$$\|\mathbf{I}(t)\| \leq \|\mathbf{I}_0\| \exp \left[ \sum_{n=1}^n B_i + d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)\Delta_{n+1} \right], \quad t_n < t < t_{n+1}. \quad (3.10)$$

Logo, a única condição que pode garantir a convergência para a superfície  $S$  será:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^n B_i + d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)\Delta_{n+1} \right) = -\infty. \quad (3.11)$$

Para mostrar que a referida superfície atrai qualquer trajetória, basta lembrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{I}(t_n^+)\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n B_i \right) = -\infty,$$

garantindo a existência de um número inteiro  $n'$  tal que  $\|\mathbf{I}(t_{n'}^+)\| \leq \epsilon$  para um valor pequeno  $\epsilon$ . Desse modo, considerando  $\|\mathbf{I}(t_{n'}^+)\|$  como a condição inicial  $\|\mathbf{I}_0\|$  conclui-se que  $\|\mathbf{I}(t)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

O teorema a seguir resume os resultados obtidos.

**Teorema 3.1** *Seja a superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^m$  e o sistema dinâmico impulsivo definido por*

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle, \quad \forall t \neq t_n \\ \Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_n^+) - \mathbf{x}(t_n^-) = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}(t_n^-), \mathbf{y}(t_n^-)) \\ \Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_n^+) - \mathbf{y}(t_n^-) = -\mathbf{y}(t_n^-), \quad \forall t = t_n \end{cases}$$

onde  $t_n^+$  e  $t_n^-$  denotam o limite à esquerda e à direita para  $t \rightarrow t_n$ ,  $\Delta_n = t_n - t_{n-1}$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  é um campo vetorial, e a sequência  $t_n$  para  $n \in \mathbb{N}$  é tal que  $t_n < t_{n+1}$  e  $t_n$  tende para infinito quando  $n \rightarrow \infty$ .  $S$  é suposta uma superfície  $m - p$  dimensional invariante com respeito ao sistema diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

e é definida como

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m / I_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p\}$$

onde

$$\frac{d\mathbf{I}_i}{dt} = \sum_{k=1}^p L_{ik}(\mathbf{x})I_k, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Os vetores  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{i}$  são dados por  $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_p)^t$ ,  $\mathbf{i} = \frac{\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|}$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$  tem-se  $\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \exp(\beta_n)\|\mathbf{I}(t_n^-)\|$ ,  $\beta_n = -y(t_n^-) + B_n$ . Considerando  $\mathcal{A}$  o conjunto de todos os atratores de trajetórias cuja condição inicial pertencem à superfície invariante  $S$  (lembre-se que a superfície  $S$  contém todos esses atratores). Para qualquer  $a \in \mathcal{A}$  é possível definir a quantidade

$$D_S(a) = \max_{\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0} d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0),$$

onde  $d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)$  é calculado como:

$$d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t}.$$

com  $y(t)$  obtido resolvendo-se (2.21). Será definida a quantidade

$$D_S = \max_{a \in \mathcal{A}} D(a).$$

Finalmente, supõe-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_i = -\infty$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n B_i + D_S \Delta_{n+1}) = -\infty$ . Então qualquer trajetória do sistema converge para a superfície  $S$ , isto é,

$$\|\mathbf{I}(t)\| \rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty.$$

Uma questão interessante é saber como as desigualdades estabelecidas na equação (2.25) possibilitam obter uma condição suficiente sobre o intervalo de tempo entre dois impulsos de tal forma que a condição prevista no teorema seja verificada.

Definindo agora a quantidade

$$E_S = \max_{a \in \mathcal{A}} \Lambda_H(a),$$

onde  $\Lambda_H(a)$  é calculado para cada atrator  $a \in \mathcal{A}$ . Pela inequação (2.25) conclui-se que  $D_S \leq E_S$ , e supondo o fato de que a sequência de intervalos  $\Delta_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  satisfaz a

condição

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n B_i + E_S \Delta_{n+1} \right) = -\infty$$

pode-se garantir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n B_i + D_S \Delta_{n+1} \right) = -\infty$$

e a condição imposta no teorema para os intervalos entre os impulsos é satisfeita.

Um caso interessante a ser analisado consiste em uma sequência de  $\mathbf{G}_n$  tal que:

$$B_n = -\alpha \Delta_n \quad \alpha > 0.$$

Neste caso

$$\sum_{i=1}^n B_i = -\alpha(t_n - t_0).$$

Portanto, tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha(t_n - t_0) + D_S \Delta_{n+1}) = -\infty,$$

então a condição do teorema satisfeita.

Outro caso interessante diz respeito aos intervalos entre impulsos que possuem limite superior, isto é,  $\Delta_n < \delta$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ <sup>1</sup>. Com isso, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha(t_n - t_0) + D_S \Delta_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha(t_n - t_0) + D_S \delta) = -\infty.$$

Finalmente é importante analisar o caso em que os intervalos  $\Delta_n$  satisfazem a condição abaixo

$$\Delta_{n+1} \leq \frac{\beta(t_n - t_0)}{D_S}, \quad \forall n \geq n'$$

onde  $n'$  é um inteiro positivo e  $0 < \beta < \alpha$ . Tornando-se simples mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha(t_n - t_0) + D_S \Delta_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha(t_n - t_0) + \beta(t_n - t_0)) = -\infty.$$

Observa-se que a convergência em direção a superfície  $S$  é mais lenta neste caso e que os intervalos  $\Delta_n$  não necessitam estar limitados superiormente.

<sup>1</sup>Vale ressaltar que  $\Delta_n = \delta$  encontra-se no caso em questão.

Considerando agora os autovalores  $\lambda_i(x)$  associados à matriz hermitiana  $\mathbf{H}(x)$  com  $i = 1, \dots, p$ . Segundo (2.18) e usando o fato de que  $\mathbf{i}(t')$  pode ser expresso como combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}_i(\mathbf{x}(t'))$ , pode-se concluir que a expressão acima reduz-se a

$$\|\mathbf{I}(t)\| \leq \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp \left[ \int_{t_0}^t \Lambda_H(x(t')) dt' \right]. \quad (3.12)$$

Assim, sendo a trajetória  $x(t)$  tal que

$$\Lambda_H(x(t)) \leq \alpha < 0, \quad t > t_0,$$

conclui-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|I(t)\| \leq \|I(t_0)\| \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} = 0.$$

Logo, a trajetória será atraída para a superfície invariante  $S$ .

## 3.2 Alguns exemplos.

### 3.2.1 Sistema de Lorenz.

Como primeiro exemplo será considerado o sistema de Lorenz, inicialmente estudado por E. N Lorenz, matemático e professor de ciências atmosféricas do MIT. O interesse de Lorenz pela meteorologia surgiu na Segunda Guerra, após servir como meteorologista Lorenz resolveu seguir na área e estudar aspectos teóricos. Como meteorologista esteve sempre interessado no problema da previsão do tempo.

O modelo de Lorenz é formado pelas equações:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= r x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 x_2 - b x_3, \end{aligned}$$

A variável  $x_1(t)$  é proporcional a intensidade de convecção,  $x_2(t)$  é proporcional à diferença de temperatura entre as correntes ascendentes e descendentes do fluido e  $x_3(t)$  é

proporcional à distorção do perfil vertical da temperatura.

A superfície invariante considerada será dada pelo ponto fixo correspondente a origem do sistema, isto é:

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0\}.$$

Definindo o vetor  $\mathbf{I} = (x_1, x_2, x_3)^t$  a matriz  $\mathbf{L}$  pode ser dada por:

$$\mathbf{L}(t) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -x_1(t) \\ 0 & x_1(t) & -b \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que o vetor  $\mathbf{I}$  assim definido satisfaz a equação da forma dada em (2.14). Dado  $\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2}[\mathbf{L} + \mathbf{L}^t]$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t) &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -x_1(t) \\ 0 & x_1(t) & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma & r & 0 \\ \sigma & -1 & x_1(t) \\ 0 & -x_1(t) & -b \end{pmatrix} \right] \\ \mathbf{H}(t) &= \begin{pmatrix} -\sigma & \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}r & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como a superfície  $S$  representa um ponto fixo é fácil obter seus expoentes de estabilidade: eles são calculados pela parte real dos valores próprios que correspondem à matriz  $\mathbf{L}_S$ , que é calculada através da matriz  $\mathbf{L}$  avaliada no ponto fixo. No exemplo em questão a matriz é dada por:

$$\mathbf{L}_S = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

e seus autovalores  $d_1, d_2$  e  $d_3$  são respectivamente:

$$\begin{aligned} d_1 &= -b, \\ d_2 &= -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2\sigma^2 - 2\sigma + 1 + 2r\sigma + r^2}, \end{aligned}$$

$$d_3 = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sigma^2 - 2\sigma + 1 + 2r\sigma + r^2}.$$

A quantidade  $D_S$ , definida anteriormente no teorema, pode ser calculada como:

$$D_S = \max\{Re(d_1), Re(d_2), Re(d_3)\}.$$

Facilmente verifica-se que  $D_S < E_S$ , onde  $E_S$  é o maior valor próprio de  $\mathbf{H}$ . O sistema impulsivo considerado terá impulsos definidos como se segue:

$$\mathbf{I}(t_n^+) = e^{-(E_S + \alpha)\Delta_n} \mathbf{I}(t_n^-), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \alpha > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha(t_n - t_0) + E_S \Delta_{n+1}) = -\infty.$$

As condições do teorema são satisfeitas e as trajetórias do sistema impulsivo convergem para a superfície  $S$ , que neste caso é o ponto fixo associado a origem do sistema.

Para uma ilustração mais concreta e específica serão definidos os impulsos como:

$$\Delta \mathbf{x}(t_n) = (\exp(\beta_n) - 1) \mathbf{x}(t_n^-), \quad t_n = n\delta, \quad \beta_n = -y(t_n^-) - \alpha\delta.$$

Logo,  $\Delta_n = \delta$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Será ilustrado este procedimento numericamente considerando o sistema impulsivo de Lorenz com os seguintes parâmetros  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $\alpha = 5$  e  $\delta = 0.05$ . Para os parâmetros considerados, o sistema de Lorenz tem um atrator estranho caótico e seus pontos fixos são instáveis [65]. Facilmente, obtem-se que  $D_S = -11/2 + \sqrt{1201}/2 > 0$  e  $E_S = -11/2 + \sqrt{1525}/2$ , assim  $D_S < E_S$ .

A Figura 3 compara a evolução de  $\|\mathbf{I}(t)\|$  entre o sistema impulsivo de Lorenz e o sistema de Lorenz considerado sem impulsos. Ambos os sistemas tem a mesma condição inicial  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = 10$  e  $x_3(0) = 10$ . Percebe-se então que a trajetória do sistema impulsivo converge para a superfície  $S$  com taxa de decaimento exponencial com relação a norma  $\|\mathbf{I}(t)\|$ . A figura 4 mostra a evolução temporal da função  $\frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{I}(t)\|}{\|\mathbf{I}_0\|}$  comparada com os valores de  $D_S$  e  $E_S$ . Como esperado teoricamente pode-se ver a convergência desta função ao seu limite dado por  $D_S$ .

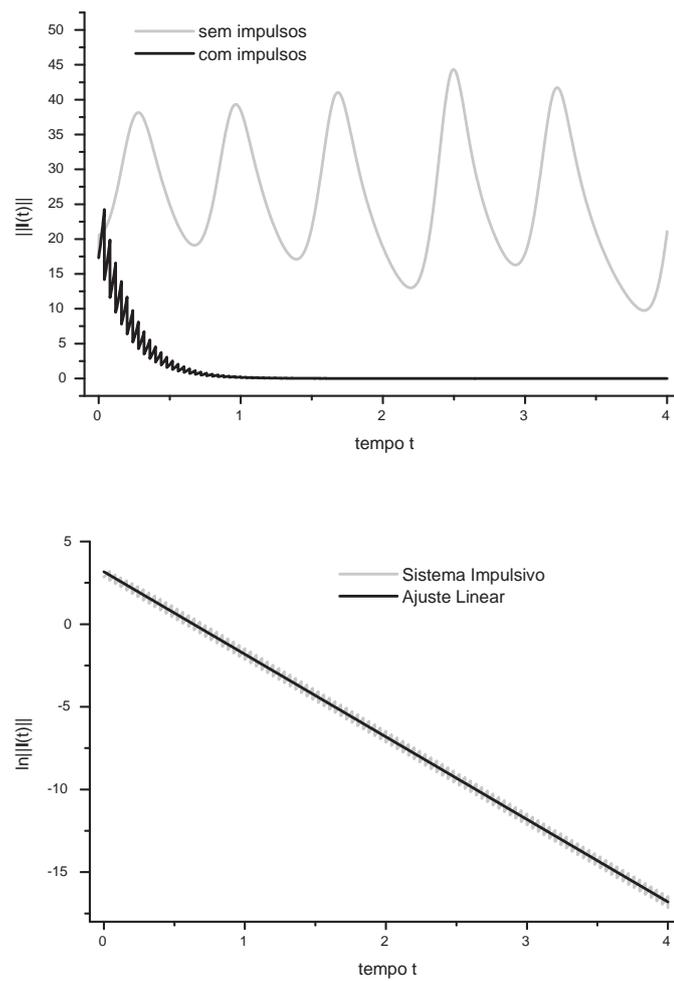


Figura 3: Comparação da evolução de  $\|I(t)\|$  entre o sistema impulsivo de Lorenz e o sistema considerado sem impulsos.

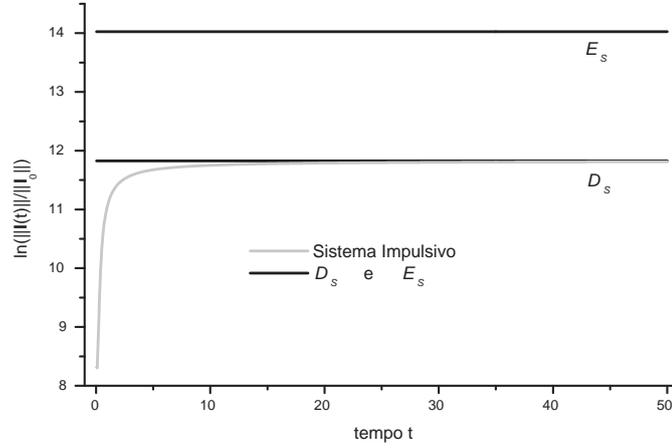


Figura 4: Mostra a evolução da função  $\frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{I}(t)\|}{\|\mathbf{I}_0\|}$  comparado com os valores de  $D_S$  e  $E_S$ .

### 3.2.2 Sistema Dinâmico Acoplado de Lorenz

Como segundo exemplo tem-se o sistema de Lorenz acoplado:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -bx_3 + x_1x_2 \\ \frac{dx_4}{dt} &= rx_1 - x_4 - x_1x_5 \\ \frac{dx_5}{dt} &= -bx_5 + x_1x_4 \end{aligned}$$

Considerando a superfície  $S$  definida por

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_4 - x_2 = 0, x_5 - x_3 = 0\}$$

é fácil verificar que  $S$  é uma superfície invariante do sistema dado. Pode-se ver que o vetor  $\mathbf{I}(t) = (x_4 - x_2, x_5 - x_3)^t$  satisfaz a equação (2.14) se a matriz  $\mathbf{L}$  é dada por

$$\mathbf{L}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -x_1(t) \\ x_1(t) & -b \end{pmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{H}$  obtida com o uso de (2.16) é dada por:

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} -1 & -x_1(t) \\ x_1(t) & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & x_1(t) \\ -x_1(t) & -b \end{pmatrix} \right]$$

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

e os autovalores de  $\mathbf{H}$  são  $-1$  e  $-b$ , daí segue que  $\Lambda_H(x(t)) \leq \max\{-1, -b\}$  para qualquer trajetória e para todo  $t \geq t_0$ .

Considerando  $b > 0$ , da equação (3.12) tem-se:

$$\|\mathbf{I}(t)\| \leq \|\mathbf{I}(t_0)\| e^{-b(t-t_0)}, \quad 0 < b < 1;$$

$$\|\mathbf{I}(t)\| \leq \|\mathbf{I}(t_0)\| e^{-(t-t_0)}, \quad b > 1;$$

e para uma condição inicial  $\|\mathbf{I}(t_0)\|$  segue que  $\|\mathbf{I}(t)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Para  $b \leq 0$  tem-se

$$\|\mathbf{I}(t)\| \leq \|\mathbf{I}(t_0)\| e^{|b|(t-t_0)}$$

A desigualdade acima não será de grande utilidade no cálculo de  $\|\mathbf{I}(t)\|$  para  $t \rightarrow \infty$ . Deste modo, faz-se necessário definir um sistema impulsivo para controlar a convergência para a superfície  $S$ . Para tanto, considerando o sistema onde a parte diferencial é dada pelo sistema estudado presentemente e o vetor impulsivo  $\mathbf{G}_n$  é definido de modo que:

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = e^{-(|b|+\alpha)\Delta_n} \|\mathbf{I}(t_n^-)\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \alpha > 0$$

Facilmente a condição

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{I}(t_n^+)\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n B_i \right) = -\infty$$

é verificada. Porém, de acordo com o *Teorema*, as trajetórias do sistema impulsivo convergem para a superfície  $S$  se a seguinte condição:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha(t_n - t_0) + |b|\Delta_{n+1}) = -\infty,$$

for imposta aos intervalos  $\Delta_{n+1}$ .

### 3.2.3 Exemplo de controle quando os impulsos são raros.

Seja agora o exemplo considerado o Sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -bx_3 + x_1x_2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

A superfície  $S$  correspondendo a origem do sistema de coordenadas tri-dimensional dada por:

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0\}.$$

O vetor  $\mathbf{I} = (x_1, x_2, x_3)^t$  e as matrizes  $\mathbf{L}(t)$  e  $\mathbf{L}_S$  são dadas conforme o primeiro exemplo.

Considerando os impulsos dados por:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}(t_n) &= (\exp(\beta_n) - 1) \mathbf{x}(t_n^-), \\ \beta_n &= -\ln \frac{\|\mathbf{I}(t_n^-)\|}{\|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\|} - \alpha \Delta_n. \end{aligned}$$

Tomando  $t_0 = 0$  e  $\Delta_1$  como qualquer valor positivo. O primeiro impulso é dado em:  $t = t_1 = \Delta_1$  e  $\Delta_n$  para  $n > 1$  é dada pela equação

$$\Delta_{n+1} = \frac{\beta(t_n - t_0)}{D_S}, \quad \forall n \geq n'.$$

Assim, facilmente verifica-se o sistema em questão foi controlado com as intervenções

tornando-se cada vez mais raras.

Para ilustrar esse fato a figura 5 compara dois controles impulsivos com  $\alpha = 5.0$ ,  $\beta = 1.0$  e  $\beta = 3.0$  respectivamente. Como pode-se perceber no painel (a) da figura a trajetória converge para o ponto fixo. Já o painel (b) da figura mostra claramente como a velocidade de convergência é delimitada por decaimentos exponenciais. No painel (c) pode-se ver que o número de impulsos para  $\beta = 1.0$  é superior a  $\beta = 3.0$ . Estes fatos mostram um controle impulsivo com um número decrescente de intervenções. Por fim, o painel (d) da figura mostra a convergência da função  $d(t)$  para o expoente de estabilidade  $D_S$ .

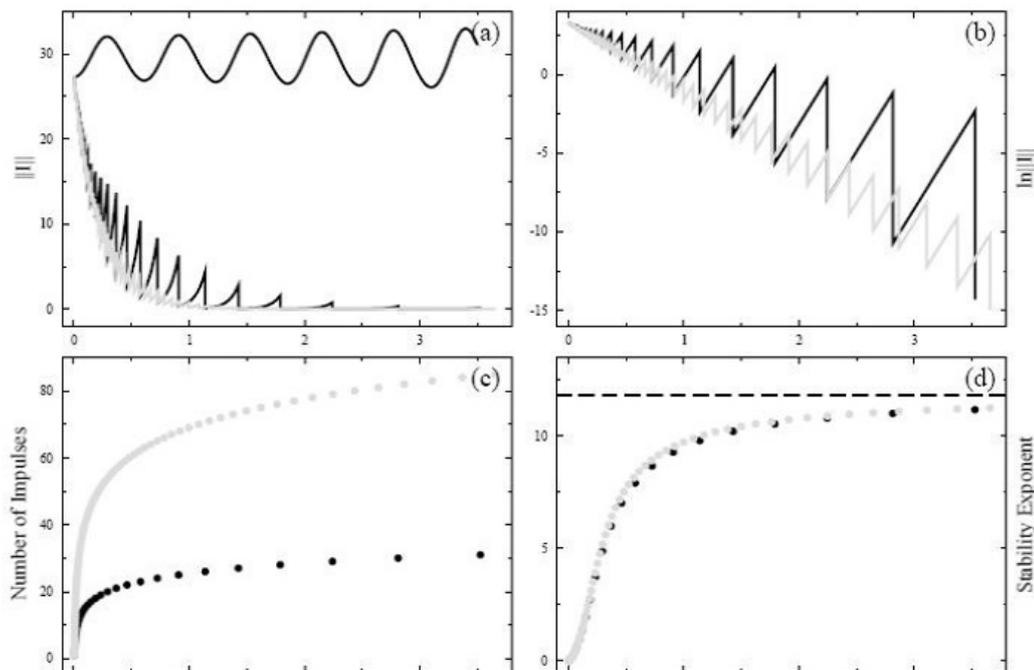


Figura 5: O painel (a) compara a evolução de  $\|\mathbf{I}(t)\|$  entre o sistema impulsivo de Lorenz e o respectivo sistema considerado sem impulsos. O painel (b) compara os dois controles impulsivos em um gráfico monolog. O painel (c) compara o número de impulsos por unidade de tempo para os controles impulsivos. O painel (d) mostra a função  $d(t)$ . As cores preto e cinza correspondem respectivamente a valores de  $\beta = 3$  e  $\beta = 1$ .

### 3.3 Sincronização de superfícies invariantes e sistemas diferenciais polinomiais.

Considerando agora o sistema diferencial dado por:

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2); \quad \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (3.14)$$

onde  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{F}_i$  para  $i = 1, 2$  são campos vetoriais polinomiais. Seja a superfície de sincronização dada por:

$$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = 0\}, \quad (3.15)$$

então pode-se mostrar que se  $S$  é uma superfície invariante para o sistema dinâmico (3.14) então o vetor  $\mathbf{I} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  satisfaz a equação

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{I} \quad (3.16)$$

com os elementos  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) da matriz  $\mathbf{L}$  sendo funções polinomiais de  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ .

Afim de desenvolver um processo de controle que façam as trajetórias convergirem para a superfície de sincronização  $S$ , será definido o sistema impulsivo:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \forall t \neq t_n \\ \frac{dy}{dt} = \langle \mathbf{i}, \mathbf{H}\mathbf{i} \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{x}_1(t) = (e^{-y(t_n^-) - \alpha\delta} - 1)[\mathbf{x}_1(t_n^-) - \mathbf{x}_2(t_n^-)] \\ \Delta\mathbf{x}_2(t) = 0, \\ \Delta y(t) = -y(t_n^-) \end{cases} \quad t = t_n \quad (3.17)$$

onde  $t_n = n\delta$ , com  $\delta > 0$  e  $\alpha > 0$ . Considerando a transformação de coordenadas dada por:

$$\mathbf{I} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{J} = \mathbf{x}_2. \quad (3.18)$$

O sistema (3.17) pode ser reescrito como segue

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{I} + \mathbf{J}, \mathbf{J})\mathbf{I} \\ \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{F}_2(\mathbf{I} + \mathbf{J}, \mathbf{J}), \quad \forall t \neq t_n \\ \frac{dy}{dt} = \langle \mathbf{i}, \mathbf{H}\mathbf{i} \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{I}(t) = (e^{-y(\beta_n)} - 1)\mathbf{I}(t_n^-) \\ \Delta y(t) = -y(t_n^-), \quad t = t_n, \beta_n = -y(t_n^-) - \alpha\delta \end{cases} \quad (3.19)$$

As condições do *Teorema* são satisfeitas e a trajetória converge para a superfície de sincronização  $S$ .

Observa-se que o expoente de estabilidade  $d$  pode ser calculado conforme as equações vistas anteriormente. No caso em questão o expoente pode ser obtido através da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} &= \mathbf{L}_S\mathbf{i} - i\langle \mathbf{i}, \mathbf{H}_S\mathbf{i} \rangle, \mathbf{i}(t_0) = \mathbf{i}_0 \\ \frac{d\mathbf{J}(t)}{dt} &= \mathbf{F}_2(\mathbf{J}, \mathbf{J}), \mathbf{J}(t_0) = \mathbf{J}_0 \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \langle \mathbf{i}, \mathbf{H}\mathbf{i} \rangle, y(t_0) = 0 \end{aligned}$$

e

$$d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t} \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{L}_S = L(\mathbf{J}, \mathbf{J})$  e  $\mathbf{H}_S = \mathbf{H}(\mathbf{J}, \mathbf{J})$ . É importante ressaltar que  $\mathbf{F}_1(x_1, x_2) = \mathbf{F}(x_1)$  e  $\mathbf{F}_2(x_1, x_2) = \mathbf{F}(x_2)$  corresponde ao famoso problema de sincronização de dois sistemas idênticos. Neste caso o estudo da estabilidade associada a superfície de sincronização  $S$  é equivalente ao estudo da estabilidade para as trajetórias do sistema dinâmico

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

De fato, neste caso, a equação (3.20) apresenta um método alternativo para calcular o expoente de Lyapunov associado as trajetórias do sistema dinâmico. A seguir será dado um exemplo para ilustrar tais resultados.

Considerando o seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{aligned}\frac{dx_{11}}{dt} &= \sigma(x_{12} - x_{11}) \\ \frac{dx_{12}}{dt} &= rx_{11} - x_{12} - x_{11}x_{13} \\ \frac{dx_{13}}{dt} &= -bx_{13} + x_{11}x_{12} \\ \\ \frac{dx_{21}}{dt} &= \sigma(x_{22} - x_{21}) + c(x_{11} - x_{21}) \\ \frac{dx_{22}}{dt} &= rx_{21} - x_{22} - x_{21}x_{23} \\ \frac{dx_{23}}{dt} &= -bx_{23} + x_{21}x_{22}.\end{aligned}$$

Este sistema consiste no acoplamento de dois sistemas de Lorenz. O parâmetro  $c$  é chamado de parâmetro de acoplamento. Definindo  $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$  e  $\mathbf{x}_{21} = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$ , tem-se que  $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{I} = 0\}$  é uma superfície invariante e as matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{H}$  são dadas por:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\sigma - c & \sigma & 0 \\ r - x_{23} & -1 & -x_{11} \\ x_{12} & x_{21} & -b \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma - c & \sigma & 0 \\ r - x_{23} & -1 & -x_{11} \\ x_{12} & x_{21} & -b \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma - c & r - x_{23} & x_{12} \\ \sigma & -1 & x_{21} \\ 0 & -x_{11} & -b \end{pmatrix} \\ \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} -\sigma - c & \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}x_{23} & \frac{1}{2}x_{12} \\ \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}x_{23} & -1 & -\frac{1}{2}(x_{11} - x_{21}) \\ \frac{1}{2}x_{12} & -\frac{1}{2}(x_{11} - x_{21}) & -b \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (3.22)$$

Por outro lado, as matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{H}$ , após aplicar as transformações (3.18) e restringi-las a

superfície  $S$ , serão dadas por:

$$\mathbf{L}_S = \begin{pmatrix} -\sigma - c & \sigma & 0 \\ r - J_3 & -1 & -J_1 \\ J_2 & J_1 & -b \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

e

$$\mathbf{H}_S = \begin{pmatrix} -\sigma - c & \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}J_3 & \frac{1}{2}J_2 \\ \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}J_3 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2}J_2 & 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Buscando agora estudar a propriedade de estabilidade local da superfície  $S$  em função do parâmetro de acoplamento, será feito um estudo do Sistema Acoplado de Lorenz com os seguintes parâmetros  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$  e  $r = 28$ . Para esses parâmetros o sistema de Lorenz possui um atrator estranho e suas trajetórias têm um comportamento caótico.

A figura 6 mostra as quantidades  $D_S$  e  $E_S$  como função do parâmetro de acoplamento  $c$ . As quantidades  $D_S$  e  $E_S$  são calculadas usando a equação:

$$d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t},$$

e as relações dadas em (2.23) e (2.24). Concluiu-se que existe um valor crítico  $c_0 > 0$  no qual a superfície de sincronização  $S$  é localmente estável para todo  $c > c_0$ . Aqui o valor  $c_0$  corresponde a interseção do gráfico de  $D_S(c)$  e a coordenada horizontal do eixo, isto é,  $D_S(c_0) = 0$ .

Para mostrar agora a propriedade de estabilidade local em função do parâmetro de acoplamento na figura 7 é mostrada a evolução de  $\log_{10}\|\mathbf{I}(t)\|$  associado ao Sistema Acoplado de Lorenz com diferentes valores de  $c$ . Tomando a condição inicial próxima a superfície  $S$  com  $\|\mathbf{I}_0\| \approx 10^{-11}$ , percebe-se que para  $c = 0$  e  $c = 5$  as trajetórias tendem a divergir, por outro lado para  $c = 10$  e  $c = 20$  as trajetórias tendem a convergir para  $S$ . Isto está de acordo com o gráfico da figura 6, onde  $5 < c_0 < 10$ .

Considerando que o parâmetro de acoplamento seja nulo, então a superfície de sincronização é instável. Para os parâmetros correspondentes às partes impulsivas, consideraram-se vários valores para  $\alpha$  e  $\delta = 0.03$ . A Figura 8(a) mostra a evolução de  $\|\mathbf{I}(t)\|$  para

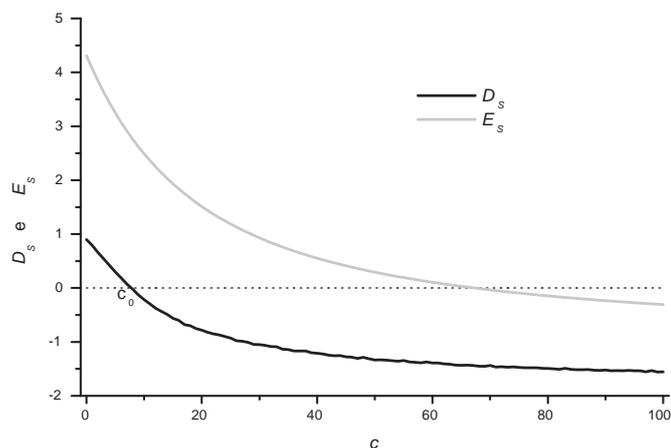


Figura 6: Mostra as funções  $D_S$  e  $E_S$  e o parâmetro de acoplamento  $c$ .

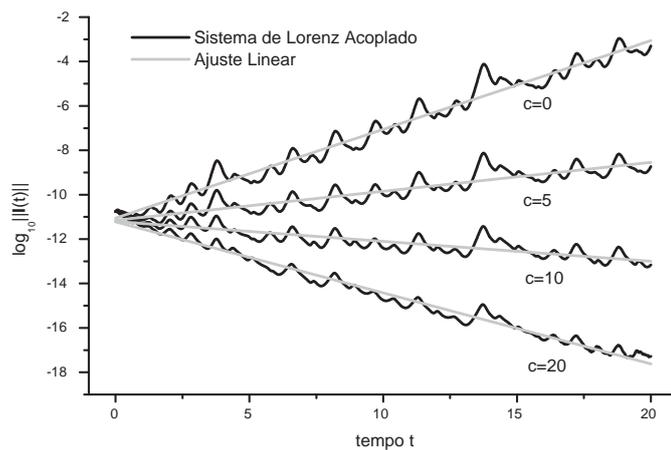


Figura 7: Mostra a evolução do sistema de Lorenz acoplado, para diferentes valores do parâmetro  $c$ .

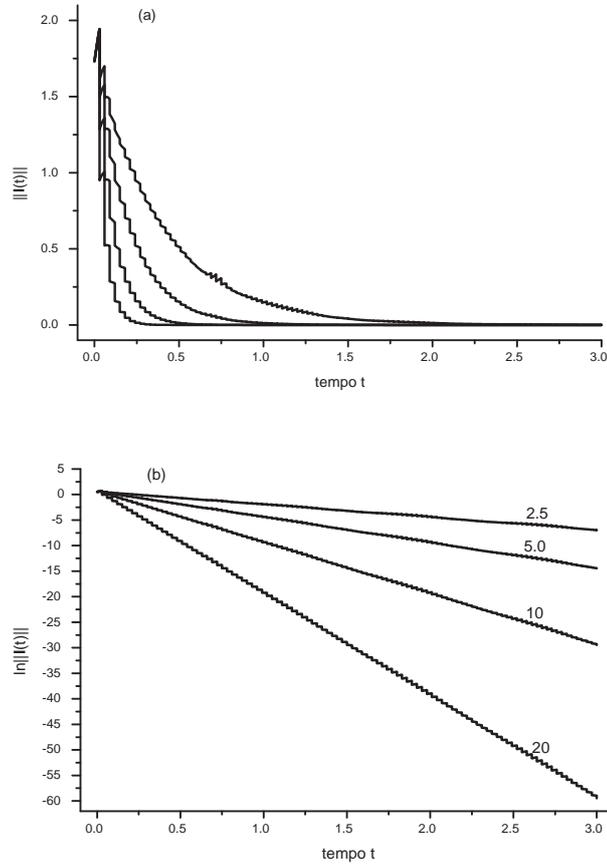


Figura 8: Mostra a evolução de  $\|I(t)\|$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

diferentes valores de  $\alpha$ . De cima para baixo tem-se os gráficos correspondentes a  $\alpha = 2.5$ ,  $\alpha = 5.0$ ,  $\alpha = 10.0$  e  $\alpha = 20$  respectivamente. Para estes gráficos, foram consideradas as mesmas condições iniciais com  $\|\mathbf{I}_0\| \approx 1.73$ . Para todas as trajetórias nota-se a convergência para a superfície de sincronização.

A figura 8(b) mostra o gráfico correspondente da figura 8(a) em escala logarítmica. Para facilitar a análise marcou-se ao lado de cada gráfico o valor correspondente de  $\alpha$ . Percebe-se então que  $\|I(t)\|$  converge para zero exponencialmente e a taxa de decaimento pode ser calculada por uma regressão linear.

Os valores do decaimento obtidos pelo ajuste linear são dados respectivamente por: 2.4874458647, 4.986498099, 9.985580225 e 19.98467461. Percebe-se que o valor de ajuste para a taxa de decaimento exponencial é muito próximo aos respectivos valores de  $\alpha$ . Isto deve-se ao fato de como os impulsos foram definidos. Os impulsos são suficientes para compensar a "natural" taxa de divergência exponencial que é dada por  $\exp[y(t_n^-)]$  e ainda fazer com que a trajetória convirja com um índice exponencial aproximado de  $e^{-\alpha\delta}$ .

### 3.4 Discussão e análise.

O estudo da estabilidade das superfícies invariantes com respeito às trajetórias do sistema impulsivo foi feita sem qualquer hipótese sobre a forma específica do campo vetorial impulsivo  $\mathbf{G}_n$ . A quantidade relevante nesta análise é  $\beta_n$ , que é calculado usando a fórmula (3.1). Deste modo, o método desenvolvido aqui pode ser entendido como um procedimento geral para estudar a estabilidade das superfícies invariantes para qualquer campo vetorial impulsivo.

Se for considerada uma certa condição inicial, a equação (3.11) estabelece a condição de estabilidade da superfície invariante. Assim, a quantidade  $\sum_i B_i + d\Delta_{n+1}$  pode ser interpretada como o expoente estabilidade correspondente a esta condição inicial. Na verdade, esta é uma generalização do conceito de expoente de estabilidade para sistemas impulsivos. A estabilidade assintótica pode ser assegurada se e somente se a condição (3.11) for satisfeita para qualquer condição inicial. Em princípio, para qualquer campo vetorial impulsivo  $\mathbf{G}_n$  é possível verificar a validade dessa condição.

É importante destacar que diferentes campos vetoriais impulsivos podem levar à mesma condição (3.11) e a norma  $\|\mathbf{I}\|$  convergirá para zero do mesmo modo. Isto significa uma grande liberdade de escolher os controles impulsivos que são mais convenientes em situações práticas e experimentais, e ao mesmo tempo permitindo impor o tipo de convergência desejado. O ponto de destaque é a possibilidade de controlar a velocidade de convergência do processo [48].

Além disso, se for possível definir uma classe de campos vetoriais impulsivos onde

os valores de  $\beta_n$  são dados por (3.1), então o procedimento de controle se torna muito simples de implementar. Deve-se conhecer os valores de  $\mathbf{I}$  em dois momentos sucessivos:  $t_n^-$  e  $t_{n-1}^+$ . Os valores de  $B_n$  podem ser dados de forma a assegurar uma velocidade pré-fixada de convergência. Na verdade, isso faz com que o método seja uma espécie de método de controle com retroalimentação adaptativa [41], onde a informação do estado do sistema faz-se necessária em dois instantes diferentes.

Cabe agora ilustrar alguns pontos mostrados acima considerando uma família de controles com impulsos que são lineares com respeito ao vetor  $\mathbf{I}$ :  $\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I}(t_n^+) - \mathbf{I}(t_n^-) = \mathbf{A}_n\mathbf{I}(t_n^-)$ , onde  $\mathbf{A}_n = \lambda_n\mathbf{C} - \mathbf{I}$  e  $\mathbf{C}$  pode ser qualquer matriz ortogonal. É fácil mostrar que  $\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \lambda_n\|\mathbf{I}(t_n^-)\|$  e o processo de controle é totalmente determinado fazendo  $\lambda_n = \exp(\beta_n)$  com  $\beta_n$  dado por (3.1).

Cabe ressaltar que nenhum conhecimento prévio é necessário, exceto para as expressões das funções que definem o vetor  $\mathbf{I}$ . Assim, para os pontos fixos e variedades de sincronização esta tarefa é trivial. Como foi visto até aqui, para a implementação do controle não faz-se necessário calcular as matrizes  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{H}$  ou o expoente estabilidade  $D_S$ , desde que os intervalos entre dois impulsos sucessivos sejam limitados. Neste caso, esses objetos são necessários apenas para calcular a condição de estabilidade (3.11). Os expoentes de estabilidade são importantes sempre que os intervalos entre dois impulsos não são limitados superiormente e observa-se que o método aqui apresentado constitui uma boa estrutura teórica para lidar com esta situação. Para fixar as idéias: pode-se considerar os controles em que os intervalos entre dois impulsos sucessivos cresce à medida que o tempo tende ao infinito. Isto pode ser analisado em termos práticos da seguinte forma: possibilidade de realizar um controle onde as intervenções se tornam mais raras, significando menos custos na implementação do controle.

Faz-se importante lembrar, que para intervalos entre impulsos limitados superiormente tem-se que para qualquer condição inicial a trajetória convergirá para a superfície invariante. Assim, quaisquer que sejam as divergências causadas por um objeto invariante dentro da superfície invariante, elas serão canceladas pelos impulsos, evitando, portanto, o problema de descincronização observado para os controles contínuos [5] - [6].

Finalmente, torna-se importante salientar que o expoente de estabilidade, tal como definido no presente trabalho está intimamente relacionado com os expoentes de Lyapunov transversais [2]- [3].

Pode-se agora levantar algumas questões: o que acontece com a aplicabilidade do método se (2.14) não for satisfeita para uma certa superfície invariante? Esta relação é uma forte limitação para a aplicabilidade do método?

Em primeiro lugar deve-se observar que em [45] são estabelecidas condições suficientes para a validade da relação (2.14), e vale a pena mencionar que a condição (2.14) é sempre satisfeita se  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$  são campos vetoriais polinomiais [42]- [43]. Apenas este resultado seria já suficiente para tornar a abordagem deste trabalho interessante, tendo em vista que muitos sistemas dinâmicos tem a forma polinomial tanto nos seus pontos fixos como nas variedades de sincronização. Além disso, uma vasta classe de sistemas não-polinomiais podem ser reduzidos a sistemas polinomiais através de transformações de coordenadas e mergulhos adequados [66].

A restritividade na condição (2.14) deve-se ao fato de que sua validade é global e não só para os pontos próximos à superfície invariante. De fato, essa condição global não é necessária para garantir a aplicabilidade do método proposto. Considerando a transformação de coordenadas dada por:

$$\begin{aligned} x'_i &= I_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, p \\ x'_{i+p} &= J_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m - p, \end{aligned} \quad (3.25)$$

então o sistema dinâmico para  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{J}$ , vetores paralelos e transversais respectivamente, assume a forma:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{W}(\mathbf{I}, \mathbf{J}); \quad \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{P}(\mathbf{I}, \mathbf{J}). \quad (3.26)$$

A partir da invariância de  $\mathbf{I} = 0$  conclui-se que  $\mathbf{W}(\mathbf{I} = 0, \mathbf{J}) = 0$ . Considerando a expansão em série de potências de  $\mathbf{W}$  em relação a  $\mathbf{I}$ , segue que:

$$\mathbf{W}(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = \mathbf{L}(\mathbf{J})\mathbf{I} + \mathbf{R}(\mathbf{I}, \mathbf{J}), \quad (3.27)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o jacobiano de  $\mathbf{W}$  em relação a  $\mathbf{I}$  avaliado em  $\mathbf{I} = 0$ . O campo vetorial  $\mathbf{R}$  é

superior em primeira ordem com relação a  $\mathbf{I}$ . Sendo então  $\|\mathbf{I}\|$  pequeno, o sistema (3.27) pode ser aproximado por:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{J})\mathbf{I}; \quad \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{P}(\mathbf{I} = \mathbf{0}, \mathbf{J}). \quad (3.28)$$

Para impulsos satisfazendo a condição (3.1) será sempre possível encontrar um inteiro  $n$  tal que  $\|\mathbf{I}(t_n^+)\|$  é tão pequeno quanto se queira e a aproximação dada em (3.28) pode ser aplicada.

O raciocínio acima implica que a condição (2.14) não é realmente necessária. Sempre que esta condição é satisfeita pode-se obter os expoentes de estabilidade sem linearizar o sistema em torno da superfície invariante. Portanto, tem-se que a única restrição para aplicação do método diz respeito a a possibilidade de conhecer explicitamente a forma funcional do vetor  $\mathbf{I}$ .

## 4 Controle Impulsivo de Sistemas Dinâmicos: Caso II.

O presente capítulo busca mostrar a possibilidade de generalizar todos os conceitos anteriores para o caso em que  $\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}(x)\mathbf{I} + \mathbf{R}(x, \mathbf{I})$ . Aqui será visto que os mesmos conceitos do caso  $\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}(x)\mathbf{I}$  podem ser aplicados.

Seja novamente o sistema dinâmico de dimensão  $n$  dado pelo sistema de equações diferenciais abaixo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))^t$  está definido em  $\mathbb{R}^m$ , e seja,

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m / I_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p < m\}$$

uma superfície de  $(m - p)$  dimensões em  $\mathbb{R}^m$ , e  $I_i(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  de tal modo que

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{x})\mathbf{I} + \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{I}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{I}), \quad (4.2)$$

com  $\mathbf{L}(x) = L_{ij}(x)$  sendo a matriz jacobiana de  $\mathbf{W}(x, \mathbf{I})$  com respeito a  $\mathbf{I}$  e avaliada para  $\mathbf{I} = \mathbf{0}_p$ . As entradas da matriz  $\mathbf{L}(x)$  podem ser obtidas explicitamente por:

$$L_{ij}(x) = \left. \frac{\partial \mathbf{W}_i(x, \mathbf{I})}{\partial I_j} \right|_{\mathbf{I}=\mathbf{0}_p}, \quad i, j = 1, \dots, p, \quad (4.3)$$

e o campo vetorial  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{I})$  é suposto  $\mathbf{O}(\|\mathbf{I}\|)$ , isto é,

$$\lim_{\|\mathbf{I}\| \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

Trata-se agora de estudar a evolução da norma do vetor  $\mathbf{I}$

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \sqrt{I_1^2(\mathbf{x}) + I_2^2(\mathbf{x}) + \dots + I_p^2(\mathbf{x})}$$

ao longo do tempo, ou seja

$$\frac{d\|\mathbf{I}(t)\|}{dt} = \|\mathbf{I}(t)\|[\langle \mathbf{i}, \mathbf{H}\mathbf{i} \rangle + R(\mathbf{x}, \mathbf{I})] \quad (4.4)$$

Faz-se importante observar que a condição restrita de invariância pode ser proveitosa se o vetor  $\mathbf{I}$  satisfizer a equação diferencial

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{W}(x, \mathbf{I}) \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{W}(x, \mathbf{I}) = (W_1(x, \mathbf{I}), W_2(x, \mathbf{I}), \dots, W_p(x, \mathbf{I}))^t$  e  $\mathbf{W}(x, \mathbf{0}_p) = \mathbf{0}_m$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ . Aqui  $\mathbf{0}_p$  e  $\mathbf{0}_m$  denotam vetores colunas nulos de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^p$  respectivamente. Considerando  $\mathbf{I} = \mathbf{0}_p$  é um ponto fixo solução do sistema dado em (4.5), a superfície em questão deve ser invariante.

O caso em questão merece atenção por tratar-se de uma extensão do caso estudado no capítulo anterior. Torna-se necessário encontrar uma expressão para  $\|\mathbf{I}\|$ , isto é, saber como essa quantidade varia ao longo do tempo. Usando a equação (4.2) segue que:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}(x)\mathbf{I} + \mathbf{R}(x, \mathbf{I}) \quad (4.6)$$

mas

$$\frac{d\|\mathbf{I}\|}{dt} = \frac{\left\langle \mathbf{I}, \frac{d\mathbf{I}}{dt} \right\rangle}{\|\mathbf{I}\|} \quad (4.7)$$

$$\frac{d\|\mathbf{I}\|}{dt} = \frac{\langle \mathbf{I}, \mathbf{L}(x)\mathbf{I} + \mathbf{R}(x, \mathbf{I}) \rangle}{\|\mathbf{I}\|} \quad (4.8)$$

$$\frac{d\|\mathbf{I}\|}{dt} = \|\mathbf{I}\| \left[ \frac{\langle \mathbf{I}, \mathbf{L}(x)\mathbf{I} \rangle}{\|\mathbf{I}\|^2} + \left\langle \frac{\mathbf{I}, \mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|^2} \right\rangle \right] \quad (4.9)$$

$$\frac{d\|\mathbf{I}\|}{dt} = \|\mathbf{I}\| \left[ \langle \mathbf{i}, \mathbf{H}(x)\mathbf{i} \rangle + \left\langle \mathbf{i}, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right] \quad (4.10)$$

com

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|}$$

e

$$\mathbf{H}(x) = \frac{\mathbf{L}(x) + \mathbf{L}^t(x)}{2}.$$

Resolvendo a equação (4.10), segue que

$$\|\mathbf{I}(t_0)\| = \ln \frac{\|\mathbf{I}(t)\|}{\|\mathbf{I}(t_0)\|} = \int_{t_0}^t \left[ \langle i, \mathbf{H}(x)i \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right] dt' \quad (4.11)$$

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp \int_{t_0}^t \left[ \langle i, \mathbf{H}(x)i \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right] dt' \quad (4.12)$$

para  $t > t_0$ . Agora, será definida a função

$$y(t) = \ln \frac{\|\mathbf{I}(t)\|}{\|\mathbf{I}(t_0)\|} = \int_{t_0}^t \left[ \langle i, \mathbf{H}(x)i \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right] dt' \quad (4.13)$$

cuja solução é equivalente ao problema de valor inicial

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[ \langle i, \mathbf{H}(x)i \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right], \quad (4.14)$$

$$y(t_0) = 0.$$

A função  $y(t)$  definida acima será usada para definir o sistema impulsivo que segue

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \left[ \langle i, \mathbf{H}(x)i \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_n^+) - \mathbf{x}(t_n^-) = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}(t_n^-), \mathbf{y}(t_n^-)) \\ \Delta y(t) = y(t_n^+) - y(t_n^-) = -y(t_n^-), \quad t = t_n \end{cases}$$

Aqui as equações são definidas para  $t \neq t_n$  e para todo  $t = t_n$  respectivamente, e  $\Delta_n = t_n - t_{n-1}$  válido para todo  $n \geq 1$ . Cabe também lembrar que os impulsos definidos para  $y(t)$  implicam em  $y(t_n^+) = 0$  para todo  $n$ , e ainda  $y(t_0) = 0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{G}_n = (G_{n1}, G_{n2}, \dots, G_{nm})^t$  é um vetor de  $\mathbb{R}^m$ . Assim, para um tempo  $t_n$  é possível ter:

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \|\mathbf{I}(t_n^-)\| \exp(\beta_n) \quad (4.15)$$

onde  $\beta_n = -y(t_n^-) + B_n$ . Tomando agora o intervalo  $[t_{n-1}, t_n]$  e usando as equações (4.12),

(4.13) e (4.14) segue que

$$\|\mathbf{I}(t_n^-)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp \left[ \int_{t_{n-1}^+}^{t_n^-} \left( \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle i, \frac{R(\mathbf{x}, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right) dt \right] \quad (4.16)$$

ou ainda

$$\|\mathbf{I}(t_n^-)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp(y(t_n^-)). \quad (4.17)$$

Por (3.15) e (3.17), tem-se

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp(\beta_n + y(t_n^-)) = \|\mathbf{I}(t_{n+1}^+)\| \exp(B_n) \quad (4.18)$$

que para a condição inicial  $\mathbf{I}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{I}_0$  tem-se por (4.18), que

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp \left( \sum_{i=1}^n B_i \right) \quad (4.19)$$

onde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{I}(t_n^+)\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n B_i \right) = -\infty.$$

Agora será feito um estudo do expoente de estabilidade da superfície  $S$  para o caso em questão.

## 4.1 Expoente de estabilidade da superfície $S$ .

Buscando definir expoente de estabilidade da superfície  $S$ , será definido

$$x'_i = x'_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

onde,

$$x'_i = I_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$x'_i = J_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m - p$$

o sistema dinâmico (3.1) pode ser reescrito como

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{I}, \mathbf{J})\mathbf{I} + R(\mathbf{I}, \mathbf{J})$$

$$\frac{d\mathbf{J}(t)}{dt} = \mathbf{P}(\mathbf{I}, \mathbf{J}),$$

onde  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_{m-p})^t$  é um campo vetorial de dimensão  $m - p$ .

Seja  $\|\mathbf{I}(t)\|$  muito pequeno, tem-se um sistema dinâmico aproximado dado por:

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = \mathbf{L}_S(\mathbf{J})\mathbf{I} + \mathbf{R}_S(\mathbf{J})$$

$$\frac{d\mathbf{J}(t)}{dt} = \mathbf{P}_S(\mathbf{J})$$

O expoente de estabilidade da superfície  $S$  será definido como:

$$d = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{I}(t)\|}{\|\mathbf{I}(t_0)\|}.$$

Calculando a derivada de  $i = \frac{\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|}$ , segue que

$$\frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} = \frac{\|\mathbf{I}(t)\| \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} - \mathbf{I}(t) \frac{d\|\mathbf{I}(t)\|}{dt}}{\|\mathbf{I}(t)\|^2},$$

onde tem-se a seguinte relação

$$\frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} = \frac{\|\mathbf{I}(t)\|}{\|\mathbf{I}(t)\|} (\mathbf{L}(\mathbf{I}, \mathbf{J})\mathbf{I} + \mathbf{R}(x, \mathbf{I})) - \frac{\mathbf{I}(t)}{\|\mathbf{I}(t)\|^2} \|\mathbf{I}\| \left[ \langle \mathbf{i}, \mathbf{H}\mathbf{i} \rangle + \left\langle \mathbf{i}, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right] \quad (4.20)$$

$$\frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} = \left[ \mathbf{L}(\mathbf{I}, \mathbf{J})\mathbf{i} + \frac{\mathbf{R}(\mathbf{I}, \mathbf{J})}{\|\mathbf{I}\|} \right] - \mathbf{i} \left[ \langle \mathbf{i}, \mathbf{H}(\mathbf{I}, \mathbf{J})\mathbf{i} \rangle + \left\langle \mathbf{i}, \frac{\mathbf{R}(\mathbf{I}, \mathbf{J})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right] \quad (4.21)$$

O próximo passo consiste na definição de um novo sistema dinâmico baseado na equação (4.21). Daí segue

$$\frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} = \mathbf{L}_s(\mathbf{J})\mathbf{i} + \frac{\mathbf{R}_s(\mathbf{J})}{\|\mathbf{I}\|} - \mathbf{i} \left[ \langle \mathbf{i}, \mathbf{H}_s(\mathbf{J})\mathbf{i} \rangle + \left\langle \mathbf{i}, \frac{\mathbf{R}_s(\mathbf{J})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right], \quad \mathbf{i}(t_0) = \mathbf{i}_0$$

$$\frac{d\mathbf{J}(t)}{dt} = \mathbf{P}_s(\mathbf{J}), \quad \mathbf{J}(t_0) = \mathbf{J}_0 \quad (4.22)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \langle \mathbf{i}, \mathbf{H}_s(\mathbf{J})\mathbf{i} \rangle + \left\langle \mathbf{i}, \frac{\mathbf{R}_s(\mathbf{J})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \quad y(t_0) = 0,$$

onde  $\|\mathbf{i}_{t_0}\| = 1$  e  $\mathbf{H}_s(\mathbf{J}) = \mathbf{H}(\mathbf{I} = 0, \mathbf{J})$  tratam-se dos termos definidos anteriormente.

Sendo assim o expoente de estabilidade  $d$  é calculado pela seguinte forma:

$$d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t}$$

onde  $y(t)$  é solução do sistema (4.22).

Considerando a matriz hermitiana:

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{J}) = \frac{\mathbf{L}_s(\mathbf{J}) + \mathbf{L}_s^t(\mathbf{J})}{2}$$

onde são definidas as quantidades

$$\lambda_H(\mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \lambda_s(\mathbf{J}(t)) dt \quad (4.23)$$

$$\Lambda_H(\mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Lambda_s(\mathbf{J}(t)) dt \quad (4.24)$$

onde (4.23) e (4.24) são respectivamente o menor e o maior autovalor da matriz  $\mathbf{H}_s(\mathbf{J})$ , e além disso,  $\mathbf{J}(t)$  é solução do sistema (4.22). Sendo a matriz  $H$  é hermitiana, é possível mostrar a existência de uma base ortonormal  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  formada por autovalores de  $H$ , isto é,

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{J})\mathbf{v}_i(\mathbf{J}) = \lambda_i(\mathbf{J})\mathbf{v}_i(\mathbf{J}),$$

com  $i = 1, \dots, p$ . Assim,

$$\mathbf{i}(t) = c_1(\mathbf{J}(t))\mathbf{v}_1(\mathbf{J}(t)) + \dots + c_p(\mathbf{J}(t))\mathbf{v}_p(\mathbf{J}(t))$$

com  $c_1^2(\mathbf{J}(t)) + \dots + c_p^2(\mathbf{J}(t)) = 1$  para todo  $t \geq t_0$ . Considerando a expressão dada em (4.13) para  $y(t)$ , tem-se que

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_{t_0}^t c_1^2(\mathbf{J}(t')) \lambda_1(\mathbf{J}(t')) dt' + \int_{t_0}^t c_1(\mathbf{J}(t')) \frac{\mathbf{R}_1(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} dt' + \dots + \\ & + \int_{t_0}^t c_p^2(\mathbf{J}(t')) \lambda_p(\mathbf{J}(t')) dt' + \int_{t_0}^t c_p(\mathbf{J}(t')) \frac{\mathbf{R}_p(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} dt' \end{aligned}$$

mas  $\lambda_s(\mathbf{J}(t)) \leq \lambda_i(\mathbf{J}(t)) \leq \Lambda_s(\mathbf{J}(t))$  para  $i = 1, \dots, p$ . Então

$$\int_{t_0}^t \lambda_s(\mathbf{J}(t')) dt' \leq y(t) \leq \int_{t_0}^t \Lambda_s(\mathbf{J}(t')) dt'$$

Logo, fazendo  $t \rightarrow \infty$  e tomando as relações em (4.23) e (4.24), tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \lambda_s(\mathbf{J}(t)) dt \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} y(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Lambda_s(\mathbf{J}(t)) dt$$

ou ainda

$$\lambda_H(\mathbf{J}_0) \leq d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0) \leq \Lambda_H(\mathbf{J}_0). \quad (4.25)$$

## 4.2 Estabilidade de um sistema impulsivo.

Considerando o sistema impulsivo:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle, \quad t \neq t_n \\ \begin{cases} \Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_n^+) - \mathbf{x}(t_n^-) = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}(t_n^-), \mathbf{y}(t_n^-)) \\ \Delta y(t) = y(t_n^+) - y(t_n^-) = -y(t_n^-), \quad t = t_n \end{cases} \end{cases}$$

que é descrito em termos de coordenadas paralelas e transversais. Usando (4.15) obtém-se:

$$\|\mathbf{I}(t_n^-)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp \left[ \int_{t_{n-1}^+}^{t_n^-} \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt + \int_{t_{n-1}^+}^{t_n^-} \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle dt \right] = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp[y(y_n^-)]$$

e ainda

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp \left[ \sum_{i=1}^n \beta_i + \sum_{i=1}^n y(t_i^-) + y(t) \right] \quad (4.26)$$

para todo  $t \in (t_{n-1}, t_n)$ . Reciprocamente  $y(t_i^-)$  e  $y(t)$  são dados por:

$$y(t_i^-) = \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \left( \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right) dt \quad (4.27)$$

$$y(t) = \int_{t_n^+}^t \left( \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right) dt' dt. \quad (4.28)$$

Tendo em vista o limite  $n \rightarrow \infty$  :

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \beta_i + \lim_{n, t \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n y(t_i^-) + y(t) \right) \right]; \quad t_n < t < t_{n+1}.$$

e considerando separadamente as expressões dos parêntesis

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \beta_i &= - \sum_{i=1}^n (y(t_i^-)) + \sum_{i=1}^n B_i = -t_n \frac{\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \left( \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right) dt}{t_n} + \sum_{i=1}^n B_i \\ \sum_{i=1}^n y(t_i^-) + y(t) &= t \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \left( \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right) dt}{t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sum_{i=1}^n \int_{t_n^+}^t \left( \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right) dt}{t} \right], \quad t \in (t_n, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Supondo a condição inicial  $(\mathbf{I}_0, \mathbf{J}_0)$  tal que  $\|\mathbf{I}_0\| < \varepsilon$  onde  $\varepsilon$  é um número pequeno. Em seguida, para qualquer inteiro  $n$ , conclui-se pela equação (3.19) que

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| < \varepsilon \exp \left[ \sum_{i=1}^n B_i \right].$$

Considerando agora que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{I}(t_n^+)\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n B_i \right) = -\infty$$

é satisfeita, então  $\|\mathbf{I}(t_n^+)\| < \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \left( \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right) dt &= d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0) \\ \lim_{n, t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \left( \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right) dt + \sum_{i=1}^n \int_{t_n^+}^t \left( \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle i, \frac{\mathbf{R}(x, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle \right) dt \right) &= \\ &= d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0) \end{aligned}$$

Aqui, a trajetória para o vetor  $\mathbf{J}(t)$  pode ser calculada usando a condição inicial  $\mathbf{J}(t_0) = \mathbf{J}_0$ . Sendo assim, vale a aproximação assintótica quando  $t \rightarrow \infty$ .

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \|\mathbf{I}_0\| \exp \left[ \sum_{n=1}^n B_i + d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)(t - t_n) \right], t \in (t_n, t_{n+1}) \quad (4.29)$$

Caso seja considerada a sequência

$$d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)(t - t_n) = d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)\Delta_{n+1}$$

e  $d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)(t - t_n) < d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)\Delta_{n+1}$ , para  $(t_n, t_{n+1})$ , gerando a seguinte desigualdade assintótica para  $t \rightarrow \infty$

$$\|\mathbf{I}(t)\| \leq \|\mathbf{I}_0\| \exp \left[ \sum_{n=1}^n B_i + d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)\Delta_{n+1} \right], t_n < t < t_{n+1}. \quad (4.30)$$

Portanto, a única condição que garante a convergência ao longo da superfície  $S$  será:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^n B_i + d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)\Delta_{n+1} \right) = -\infty, \quad (4.31)$$

isto é, se  $\|\mathbf{I}(t)\| \rightarrow 0$  com  $t \rightarrow \infty$ , então a relação acima deverá ser satisfeita. Logo, (4.33) traz consigo a conclusão que a superfície atrai qualquer trajetória. Assim, deve-se considerar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{I}(t_n^+)\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n B_i \right) = -\infty \quad (4.32)$$

garantindo então a existência de um número inteiro  $n'$  tal que  $\|\mathbf{I}(t_{n'}^+)\| \leq \varepsilon$  para um valor pequeno de  $\varepsilon$ . Desse modo, considerando  $\|\mathbf{I}(t_{n'}^+)\|$  com a condição inicial  $\|\mathbf{I}_0\|$  e os cálculos apresentados conclui-se facilmente que  $\|\mathbf{I}(t)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Os raciocínios desenvolvidos até aqui serão formalizados no seguinte teorema:

**Teorema 4.1** *Seja a superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^n$  e o sistema dinâmico impulsivo definido por*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle + \left\langle \mathbf{i}, \frac{R(\mathbf{x}, \mathbf{I})}{\|\mathbf{I}\|} \right\rangle, \forall t \neq t_n \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_n^+) - \mathbf{x}(t_n^-) = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}(t_n^-), \mathbf{y}(t_n^-)) \\ \Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_n^+) - \mathbf{y}(t_n^-) = -\mathbf{y}(t_n^-), \forall t = t_n \end{cases}$$

Onde  $t_n^+$  e  $t_n^-$  denotam o limite à esquerda e à direita para  $t \rightarrow t_n$ ,  $\Delta_n = t_n - t_{n-1}$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  é um campo vetorial, e a sequência  $t_n$  para  $n \in \mathbb{N}$  é tal que  $t_n < t_{n+1}$  e  $t_n$  tende para infinito quando  $n \rightarrow \infty$ .  $S$  é suposta uma superfície  $m - p$  dimensional invariante com respeito ao sistema diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

e é definida como segue

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m / I_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p\}$$

onde

$$\frac{d\mathbf{I}_i}{dt} = \sum_{k=1}^p [L_{ik}(\mathbf{x})I_k + R(x, I_j)], \quad i = 1, 2, \dots, p\}.$$

Os vetores  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{i}$  são definidos por  $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_p)^t$  e  $\mathbf{i} = \frac{\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|}$ . Onde para todo  $n \in \mathbb{N}$  tem-se  $\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \exp(\beta_n)\|\mathbf{I}(t_n^-)\|$ ,  $\beta_n = -y(t_n^-) + B_n$ . Seja  $\mathcal{A}$  o conjunto de todos os atratores de trajetórias cuja condição inicial pertence à superfície invariante  $S$ . Para quaisquer  $a \in \mathcal{A}$  é possível definir a quantidade

$$D_S(a) = \max_{\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0} d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)$$

Assim, pode-se definir a quantidade

$$D_S = \max_{a \in \mathcal{A}} D(a).$$

Finalmente, supõe-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_i = -\infty$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n B_i + D_S \Delta_{n+1}) = -\infty$ . Então qualquer trajetória do sistema converge para a superfície  $S$ , isto é,

$$\|\mathbf{I}(t)\| \rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty.$$

Para fixar as idéias relacionadas ao tema até aqui abordados, será dado um exemplo.

### 4.3 Exemplo: Sistema de May Leonard

O sistema de May Leonard tem por objetivo fazer um estudo de competição entre 3 espécies [67]. Este sistema é uma generalização do sistema de Lotka-Volterra onde neste 2 espécies competem. Tal sistema será agora abordado fazendo o uso dos estudos acima abordados e da tabela seguinte [62]:

Caso	Condição de existência	Superfície invariante	$\mathbf{L}$
1	$\alpha = 2 - \beta, l_1 = l_2 = l_3$	$U_1 + U_2 + U_3$	$l_1 - U_1 - U_2 - U_3$
2	$\alpha = 2 - \beta, l_1 = l_2 = l_3$	$l_1 - U_1 - U_2 - U_3$	$-U_1 - U_2 - U_3$
3	$\alpha = \beta$	$U_1 - U_2$	$l_1 - U_1 - U_2 - \beta U_3$

Para fixar idéias será usada a tabela acima, que contém superfícies invariantes para o Sistema de May Leonard, e em seguida serão feitas aplicações com o uso de valores dessa tabela ao sistema em questão.

**Exemplo:** Considere o sistema de May Leonard:

$$\dot{x}_1 = l_1 x_1 - x_1(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3)$$

$$\dot{x}_2 = l_2 x_2 - x_2(\beta x_1 + x_2 + \alpha x_3)$$

$$\dot{x}_3 = l_3 x_3 - x_3(\alpha x_1 + \beta x_2 + x_3)$$

cuja superfície invariante pode ser determinada por  $\alpha = 2 - \beta$  and  $l_1 = l_2 = l_3 = M$  onde segue que

$$\dot{x}_1 = Mx_1 - x_1(x_1 + (2 - \beta)x_2 + \beta x_3)$$

$$\dot{x}_2 = Mx_2 - x_2(\beta x_1 + x_2 + (2 - \beta)x_3)$$

$$\dot{x}_3 = Mx_3 - x_3((2 - \beta)x_1 + \beta x_2 + x_3)$$

e a superfície invariante dada por:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

onde

$$\mathbf{I} = x_1 + x_2 + x_3$$

o que dá

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3$$

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = Mx_1 - x_1(x_1 + (2-\beta)x_2 + \beta x_3) + Mx_2 - x_2(\beta x_1 + x_2 + (2-\beta)x_3) + Mx_3 - x_3((2-\beta)x_1 + \beta x_2 + x_3)$$

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = M(x_1 + x_2 + x_3) - x_1^2 - (2-\beta)x_1x_2 - \beta x_1x_3 - \beta x_1x_2 - x_2^2 - (2-\beta)x_2x_3 - (2-\beta)x_1x_3 - \beta x_2x_3 - x_3^2$$

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = M(x_1 + x_2 + x_3) - x_1^2 - 2x_1x_2 + \beta x_1x_2 - \beta x_1x_3 - \beta x_1x_2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + \beta x_2x_3 - 2x_1x_3 + \beta x_1x_3 - \beta x_2x_3 - x_3^2$$

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = M(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3)$$

como  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2$ , tem-se

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = M\mathbf{I} - \mathbf{I}^2 = \mathbf{W}(x, \mathbf{I}).$$

que tem solução

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \frac{MKe^{Mt}}{1 + Ke^{Mt}},$$

com  $K$  uma constante e  $M > 0$ .

Passando ao limite da expressão acima quando  $t \rightarrow \infty$ , tem-se que:

$$\|\mathbf{I}(t)\| \rightarrow M \neq 0.$$

Assim, se definirmos um controle tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n B_i + M\Delta_{n+1} \right) = -\infty,$$

então qualquer trajetória do sistema impulsivo assim definido converge para a superfície  $S$ , ou seja,

$$\|\mathbf{I}(t)\| \rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty.$$

## 5 *Aplicação do Controle Impulsivo a um Sistema Quaterniônico.*

*O presente capítulo tem por objetivo apresentar conceitos básicos sobre quatérnios [68] e funções quaterniônicas, além de fatos importantes sobre derivação e integração de funções quaterniônicas fundamentais para a aplicação ao sistema quaterniônico abordado.*

### 5.1 Quatérnios e Funções Quaterniônicas.

A descoberta dos números quaterniônicos deve-se a William Roman Hamilton (1805-1865), que fez notáveis contribuições à Física, Astronomia e Matemática. A descoberta dos quatérnios por Hamilton foi em 1833, aos 28 anos de idade.

**Definição 5.1.1** *Denota-se o conjunto dos quatérnios por  $\mathbb{H}$ .*

**Definição 5.1.2** *Considerando  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ ,  $ij = k$ ,  $ji = -k$ . Então  $q \in \mathbb{H}$  pode ser escrito sob a forma:*

$$q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$$

*onde  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ .*

Os quatérnios consistem de uma parte escalar  $a_1 \in \mathbb{R}$  e uma parte vetorial  $(a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^3$ . Sendo assim, pode-se escrever o número  $q \in \mathbb{H}$  como segue:

$$q = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

que equivale a

$$q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$$

ou ainda

$$q = q_1 + \vec{q}.$$

Segue agora, a definição de função quaterniônica, fundamental para a implementação da derivação e integração destas funções.

**Definição 5.1.3** Considerando  $E^4 \subset \mathbb{H}$  um espaço quadridimensional e  $q \in E^4$  uma certa variável da forma  $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ , com  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}$ . Assim, uma função quaterniônica é um mapeamento  $f : E^4 \rightarrow \mathbb{H}$  que faz corresponder a cada número  $q \in E^4$  um número quaterniônico  $w = f(q)$ , isto é,

$$f : E^4 \rightarrow \mathbb{H}$$

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) \mapsto w = f(q_1, q_2, q_3, q_4).$$

Conforme a definição anterior, sendo  $f$  uma função de variáveis quaterniônicas, esta função pode ser decomposta em parte escalar  $\phi(q)$  e parte vetorial  $\varphi(q)$ , isto é,

$$f(q) = \phi(q) + \varphi(q)$$

onde  $\phi(q) = f_1(q)$  e  $\varphi(q) = f_2(q)i + f_3(q)j + f_4(q)k$ , e as funções  $f_l : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$  são chamadas de funções coordenadas com valores reais.

## 5.2 Função Exponencial do Tipo Quaterniônico.

Buscando bem fundamentar os resultados seguintes, faz-se necessário apresentar a função exponencial do tipo quaterniônico [69]. Seja então  $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ , que também

pode ser escrito como  $q = q_1 + \vec{q}$ , sendo assim:

$$e^q = e^{q_1} \left\{ \cos|\vec{q}| + \vec{q} \left( \frac{\sin|\vec{q}|}{|\vec{q}|} \right) \right\} \quad (5.1)$$

onde  $\vec{q} = q_2i + q_3j + q_4k$  e  $|q| = \sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$ . Nota-se que para a parte escalar  $q_1 = 0$ , segue que a expressão para a exponencial é dada por:

$$e^{\vec{q}} = \cos|\vec{q}| + \vec{q} \left( \frac{\sin|\vec{q}|}{|\vec{q}|} \right)$$

### 5.3 Teorema de Cauchy para Quatérnios.

Agora, será vista uma generalização do teorema de Cauchy, que será feita para uma função de uma variável quaterniônica  $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ . Sendo assim, segue o teorema de Cauchy para quatérnios [70].

**Teorema 5.1** *Seja  $\Omega$  um domínio de conexão simples no espaço quadridimensional e seja  $f(q)$  uma função quaterniônica regular em  $\Omega$ . Então*

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq = \pi(i + j + 2k)f(q_0) \quad (5.2)$$

onde  $\varphi$  é uma hipersuperfície fechada em  $\Omega$  e  $q_0$  é um ponto em  $\varphi$ .

*Demonstração:* Considerando  $\varphi_0$  uma hiper-esfera com centro no ponto  $q_0$ , ou seja;  $|q - q_0| = r_0$ , com  $r_0$  é suficientemente pequeno para admitir  $\varphi_0$  estar contida em  $\varphi$ . A função  $\frac{f(q)}{q - q_0}$  é regular em  $\Omega/q_0$ , tem-se que:

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq = \int_{\varphi_0} \frac{f(q)}{q - q_0} dq \quad (5.3)$$

Fazendo uso agora da identidade  $f(q) = f(q_0) + f(q) - f(q_0)$ , segue que:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq &= \int_{\varphi_0} \frac{f(q)}{q - q_0} dq \\ \int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq &= \int_{\varphi_0} \frac{f(q_0)}{q - q_0} dq + \int_{\varphi_0} \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq \\ \int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq &= f(q_0) \int_{\varphi_0} \frac{dq}{q - q_0} + \int_{\varphi_0} \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq \end{aligned} \quad (5.4)$$

Assim, o quatérnio  $q - q_0$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$e^q = \rho e^{\vec{q}},$$

onde  $\vec{q} = (q_2 - q'_2, q_3 - q'_3, q_4 - q'_4)$ . Agora, tem-se:

$$\vec{q} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k$$

e  $e^q = e^{q_1} e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}$ , assim,  $q - q_0$  que pode ainda ser escrita como

$$q - q_0 = \rho e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}$$

com  $\rho > 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$  e  $0 < \theta_3 < 2\pi$ . Afim de resolver a primeira integral que figura em (5.4) faz-se necessário a mudança de variáveis indicada abaixo:  $u = q - q_0$ . Assim,

$$du = dq = d(q - q_0) = d(\rho e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}) = \rho d(e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k})$$

onde

$$d(e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}) = \frac{\partial e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}}{\partial \theta_3} d\theta_3$$

$$d(e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}) = e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k} (d\theta_1 i + d\theta_2 j + d\theta_3 k).$$

Aplicando os resultados acima na integral, segue que:

$$\int_{\varphi_0} \frac{dq}{q - q_0} = \int_{\varphi_0} \frac{\rho e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}}{\rho e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}} (d\theta_1 i + d\theta_2 j + d\theta_3 k)$$

$$\int_{\varphi_0} \frac{dq}{q - q_0} = \int_{\varphi_0} (d\theta_1 i + d\theta_2 j + d\theta_3 k)$$

$$\int_{\varphi_0} \frac{dq}{q - q_0} = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 + j \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_2 + k \int_0^{2\pi} d\theta_3$$

$$\int_{\varphi_0} \frac{dq}{q - q_0} = \pi(i + j + 2k).$$

Por outro lado, usando o fato de que  $f$  é uma função contínua no ponto  $q$ , para todo

$\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|q - q_0| < \delta$ , o que implica que  $|f(q) - f(q_0)| < \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{6\pi}$

$$\left| \int_{\varphi_0} \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq \right| = \int_{\varphi_0} \frac{|f(q) - f(q_0)|}{|q - q_0|} |dq| \quad (5.5)$$

$$\left| \int_{\varphi_0} \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq \right| < \varepsilon \left| \int_{\varphi_0} (id\theta_1) + jd\theta_2 + kd\theta_3 \right| = \varepsilon|i + j + 2k| \quad (5.6)$$

$$\left| \int_{\varphi_0} \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq \right| < 6\pi\varepsilon = \frac{6\pi}{6\pi}\varepsilon_0 = \varepsilon_0. \quad (5.7)$$

Portanto, como  $\varepsilon$  pode ser tomado como um valor tão pequeno quanto se deseje, tem-se que:

$$\int_{\varphi_0} \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq = 0$$

Logo,

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq = \pi(i + j + 2k)f(q_0). \quad (5.8)$$

## 5.4 Derivadas Quaterniônicas usando o Teorema Integral de Cauchy.

Segue agora, uma consequência importante do Teorema Integral de Cauchy, uma fórmula para a derivada de qualquer ordem de uma função quaterniônica, que pode ser vista em [71], e será usada posteriormente na aplicação aos Sistemas Dinâmicos Quaterniônicos.

Seja a expressão:

$$f(q_0) = \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq$$

seja agora a variável de integração  $q'$  e  $q$  um ponto interno do domínio  $\Omega$ , a expressão resultante é dada por:

$$f(q) = \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{q' - q} dq'.$$

Assim, é possível determinar a derivada  $f'(q)$ , tomando a diferença:

$$f(q + \Delta q) - f(q) = \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{q' - q - \Delta q} dq' - \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{q' - q} dq'$$

$$f(q + \Delta q) - f(q) = \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')(q' - q) - f(q')(q' - q - \Delta q)}{(q' - q)(q' - q - \Delta q)} dq'$$

$$f(q + \Delta q) - f(q) = \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{\Delta q f(q')}{(q' - q)(q' - q - \Delta q)} dq'$$

$$f(q + \Delta q) - f(q) = \frac{\Delta q}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q' - q)(q' - q - \Delta q)} dq';$$

agora segue que:

$$\frac{f(q + \Delta q) - f(q)}{\Delta q} = \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q' - q)(q' - q - \Delta q)} dq';$$

considerando o limite  $\Delta q \rightarrow 0$ , tem-se a seguinte expressão:

$$f'(q) = \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q' - q)^2} dq'$$

Agora, faz-se necessário mostrar que a diferença:

$$\zeta = \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q' - q)^2} dq' - \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q' - q)(q' - q - \Delta q)} dq'$$

tende para zero quando  $\Delta q \rightarrow 0$ . Fazendo a diferença, conclui-se que:

$$\zeta = \frac{-\Delta q}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q' - q)^2(q' - q - \Delta q)} dq'.$$

A função  $f(q')$  é contínua em  $\varphi$  e sua magnitude é limitada, ou seja  $|f(q')| < A$ . Com  $d$  indicando a distância do ponto  $q$  à fronteira  $\varphi$ . Então, segue que  $|q' - q| \geq 2d$ , e  $(q + \Delta q)$ , para valores de  $\Delta q$  próximos de zero, está perto de  $q$ , assim,  $|q' - (q + \Delta q)| > d$ . Por isso,

$$|\zeta| < \frac{|\Delta q|}{6\pi} \frac{A}{4d^3};$$

segue-se que  $\zeta \rightarrow 0$  quando  $\Delta q \rightarrow 0$ . Portanto,

$$f''(q) = \frac{2!}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q' - q)^3} dq'$$

e, procedendo indutivamente, tem-se finalmente que:

$$f^n(q) = \frac{n!}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q' - q)^{n+1}} dq'$$

## 5.5 Sistemas Dinâmicos Quaterniônicos.

Seja o sistema dinâmico dado por:

$$\frac{dq}{dt} = F(q), q \in \mathbb{H} \quad (5.9)$$

onde  $F(q) = (F_1(q), F_2(q), F_3(q), F_4(q))^t$  e  $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ . Considerando a superfície  $S$  definida por:

$$S = \{q \in \mathbb{H}; I_i(q) = 0, i = 1, 2, 3, 4\}. \quad (5.10)$$

Aqui,  $I_i(q) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sabe-se também que  $I_i(q)$  descreve um sistema linear não-autônomo dado por:

$$\frac{d\mathbf{I}(q_1, q_2, q_3, q_4)}{dt} = L(q_1, q_2, q_3, q_4)\mathbf{I}(q_1, q_2, q_3, q_4), \quad (5.11)$$

no qual  $I = (I_1(q), I_2(q), I_3(q), I_4(q))$  e  $L(q) = (L_{ij}(q))_{4 \times 4}$ . Trata-se agora de determinar e estudar a evolução de  $\|\mathbf{I}(t)\| = \sqrt{I_1^2(q) + I_2^2(q) + I_3^2(q) + I_4^2(q)}$  ao longo do tempo. Sendo assim, tem-se que:

$$\frac{d\|\mathbf{I}(t)\|}{dt} = \|\mathbf{I}(t)\| \langle i(t), H(t)i(t) \rangle \quad (5.12)$$

em que as grandezas  $i$  e  $H$  são dadas por:

$$i(t) = \frac{\mathbf{I}(t)}{\|\mathbf{I}(t)\|}; H(q) + \frac{L(q) + L^t(q)}{2}.$$

Segue agora que:

$$\int_{t_0}^t \frac{d\|\mathbf{I}(t)\|}{\|\mathbf{I}(t)\|} = \int_{t_0}^t \langle i(t'), H(t')i(t') \rangle dt' \quad (5.13)$$

$$\|\mathbf{I}(t)\| = \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp\left[\int_{t_0}^t \langle i(t'), H(t')i(t') \rangle dt'\right], \quad (5.14)$$

para  $t > t_0$ . Pode-se agora definir:

$$y(t) = \ln \frac{\|\mathbf{I}(t)\|}{\|\mathbf{I}(t_0)\|} = \int_{t_0}^t \langle i(t'), H(t')i(t') \rangle dt', \quad (5.15)$$

que possui solução equivalente ao problema de valor inicial dado abaixo:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \langle i(t), H(t)i(t) \rangle, y(t_0) = 0. \quad (5.16)$$

Define-se então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dq(t)}{dt} = \mathbf{F}(q(t)) \forall t \neq t_n \\ \frac{dy(t)}{dt} = \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t) \rangle \\ \Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_n^+) - \mathbf{x}(t_n^-) = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}(t_n^-), \mathbf{y}(t_n^-)) \\ \Delta y(t) = y(t_n^+) - y(t_n^-) = -y(t_n^-) \forall t = t_n \end{cases}$$

Dado um tempo  $t_n$  é possível ter a expressão:

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \|\mathbf{I}(t_n^-)\| \exp[\beta_n], \quad (5.17)$$

onde  $\beta_n = -y(t_n^-) + B_n$ . Assim, para um intervalo da forma  $[t_{n-1}, t_n]$ , segue que:

$$\|\mathbf{I}(t_n^-)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp\left[\int_{t_{n-1}^+}^{t_n^-} \langle \mathbf{i}(t), H(t)\mathbf{i}(t) \rangle dt\right] \quad (5.18)$$

ou

$$\|\mathbf{I}(t_n^-)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp[y(t_n^-)]. \quad (5.19)$$

Segue então,

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \|\mathbf{I}(t_{n-1}^+)\| \exp[\beta_n + y(t_n^-)] = \|\mathbf{I}(t_{n+1}^+)\| \exp[B_n]. \quad (5.20)$$

Para  $I(q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{04}) = I_0$ , tem-se:

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \|\mathbf{I}(t_0)\| \exp\left[\sum_{i=1}^n B_i\right], \quad (5.21)$$

onde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{I}(t_n^+)\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n B_i\right] = -\infty. \quad (5.22)$$

Segue agora, o teorema que garante a convergência de qualquer trajetória do sistema para a superfície  $S$ .

**Teorema 5.2** *Seja a superfície  $S$  em  $\mathbb{H}$  e o sistema dinâmico impulsivo definido por*

$$\begin{cases} \frac{dq(t)}{dt} = \mathbf{F}(q(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \langle \mathbf{i}(t), \mathbf{H}(t)\mathbf{i}(t), \rangle \forall t \neq t_n \\ \Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_n^+) - \mathbf{x}(t_n^-) = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}(t_n^-), \mathbf{y}(t_n^-)) \\ \Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_n^+) - \mathbf{y}(t_n^-) = -\mathbf{y}(t_n^-), \forall t = t_n. \end{cases}$$

Onde  $t_n^+$  e  $t_n^-$  denotam o limite à esquerda e à direita para  $t \rightarrow t_n$ ,  $\Delta_n = t_n - t_{n-1}$ ,  $\mathbf{F}(q(t))$  é uma função quaterniônica, e a sequência  $t_n$  para  $n \in \mathbb{N}$  é tal que  $t_n < t_{n+1}$  e  $t_n$  tende para infinito quando  $n \rightarrow \infty$ . A superfície  $S$  é suposta invariante, com respeito ao sistema diferencial

$$\frac{dq(t)}{dt} = \mathbf{F}(q(t))$$

e é definida como segue

$$S = \{x \in \mathbb{H} / I_i(q) = 0, i = 1, 2, 3, 4\}$$

onde

$$\frac{d\mathbf{I}_i}{dt} = \sum_{k=1}^p L_{ij}(\mathbf{x}) I_j, i = 1, 2, \dots, p\}.$$

Os vetores  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{i}$  são definidos por

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3, I_4)^t$$

e

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|}$$

Onde para todo  $n \in \mathbb{N}$  tem-se

$$\|\mathbf{I}(t_n^+)\| = \exp(\beta_n) \|\mathbf{I}(t_n^-)\|,$$

$$\beta_n = -y(t_n^-) + B_n.$$

Considando, agora,  $\mathcal{A}$  o conjunto de todos os atratores de trajetórias, cuja condição inicial pertence à superfície invariante  $S$  (supondo que a superfície  $S$  contém todos esses atratores). Para qualquer  $a \in \mathcal{A}$  é possível definir a quantidade

$$D_S(a) = \max_{\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0} d(\mathbf{i}_0, \mathbf{J}_0)$$

Onde  $d(\dot{\mathbf{i}}_0, \mathbf{J}_0)$  é calculado usando as fórmulas:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{J}(t)}{dt} &= \mathbf{P}_s(\mathbf{J}), \quad \mathbf{J}(t_0) = \mathbf{J}_0 \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \langle \dot{\mathbf{i}}, \mathbf{H}_s(\mathbf{J})\dot{\mathbf{i}} \rangle, \quad y(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (5.23)$$

e também com o uso da fórmula,

$$d(\dot{\mathbf{i}}_0, \mathbf{J}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t}.$$

Assim, pode-se definir a quantidade

$$D_S = \max_{a \in \mathcal{A}} D(a).$$

Finalmente, pode-se supor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_i = -\infty$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n B_i + D_S \Delta_{n+1} \right) = -\infty.$$

Então, para qualquer trajetória do sistema converge para a superfície  $S$ , isto é,

$$\|\mathbf{I}(t)\| \rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty.$$

## 5.6 Aplicação.

Seja o sistema dado abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\lambda q' + \nu q(1 - q^2 - q'^2) \\ \frac{dq'}{dt} &= \lambda q + \nu q'(1 - q^2 - q'^2) \end{aligned}$$

com  $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ . A superfície  $S$  é definida por:

$$S = \{q \in \mathbb{H}; q^2 + q'^2\},$$

com  $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ ,  $q' = (q'_1, q'_2, q'_3, q'_4)$  e  $qq' = q'q$ .

Sendo assim, a função  $\mathbf{I} = q^2 + q'^2 - 1$  define a equação diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{I}}{dt} &= 2q\frac{dq}{dt} + 2\frac{dq'}{dt} \\ \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= 2q[-\lambda q' + \nu q(1 - q^2 - q'^2)] + 2q'[\lambda q + \nu q'(1 - q^2 - q'^2)] \\ \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= -2\lambda qq' + 2\nu q^2(1 - q^2 - q'^2) + 2\lambda q'q + 2\nu q'^2(1 - q^2 - q'^2) \\ \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= 2\nu q^2(1 - q^2 - q'^2) + 2\nu q'^2(1 - q^2 - q'^2) \\ \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= 2\nu(q^2 + q'^2)(1 - q^2 - q'^2) \\ \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= -2\nu(q^2 + q'^2)\mathbf{I}\end{aligned}$$

Daí,

$$\mathbf{L} = \mathbf{H} = -2\nu(q^2 + q'^2)$$

e conclui-se que  $D_S = E_S = -2\nu$ . O círculo invariante é:

- (i) localmente estável para  $\nu > 0$ ;
- (ii) localmente instável para  $\nu < 0$ .

Aqui o sistema consiste em sua parte diferencial ( $t \neq t_n$ ) ao sistema acima citado e a equação de  $y(t)$  será:

$$\frac{dy}{dt} = -2\nu(q^2 + q'^2)$$

e os impulsos ( $t = t_n$ ) aqui são dados por

$$\begin{aligned}\Delta q(t_n) &= e^{\frac{\beta_n}{2}} \sqrt{q^2(t_n^-) - \frac{1}{2}} - q(t_n^-); \\ \Delta q'(t_n) &= e^{\frac{\beta_n}{2}} \sqrt{q'^2(t_n^-) - \frac{1}{2}} - q'(t_n^-); \\ \Delta y(t_n) &= -y(t_n^-), \beta_n = -y(t_n^-) - \alpha \Delta_n,\end{aligned}$$

em que  $\alpha > 0$ . Daí segue que  $I(t_n^+) = e^{\beta_n} I(t_n^-)$ . Caso seja considerado  $\Delta_n = t_{n+1} - t_n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , e assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha(t_n - t_0) - 2\nu \Delta_{n+1}) = -\infty.$$

Logo, as condições do teorema, são satisfeitas e o sistema impulsivo converge ao longo

do círculo invariante  $S$ .

## 5.7 Determinação de uma Expressão Analítica para $\frac{dI}{dt}$ no Caso Quaterniônico.

Na seção (5.4) foi verificada uma fórmula para a obtenção da derivada de uma função quaterniônica  $f(q)$  por meio da Fórmula Integral de Cauchy para Quatérnios. Sendo assim, a fórmula

$$\frac{df(q)}{dq} = \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q' - q)^2} dq' \quad (5.24)$$

poderá ser usada para a determinação de uma expressão analítica para  $\frac{dI}{dt}$  no caso quaterniônico. Com isso, seja

$$\frac{d\mathbf{I}(q)}{dt} = L(q)\mathbf{I}(q), \quad (5.25)$$

com o uso da fórmula (5.24) para determinação de  $\frac{dI}{dt}$ , segue que:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\pi(i + j + 2k)} \int_{t_0}^t \frac{I(q)}{(t' - t)^2} dt'. \quad (5.26)$$

A fórmula acima permitirá em trabalhos futuros uma interpretação mais geral do caso de um Sistema Dinâmico Quaterniônico.

## *Conclusão e comparação com outros métodos.*

A teoria de controle impulsivo em superfícies invariantes garante a convergência das trajetórias do sistema em direção a uma superfície invariante pertencente ao espaço de fase do sistema em questão. O método pode ser aplicado para qualquer caso em que os invariantes da superfície podem ser calculados.

Conclui-se que a Tese estabelece uma condição de estabilidade geral de controle de impulsos, o que garante a convergência de toda trajetória para uma superfície invariante de um determinado sistema dinâmico. Verificou-se que para diferentes campos de vetores impulsivos também podem levar à condição de estabilidade, significando, portanto, uma liberdade na criação de controles que sejam convenientes em situações específicas.

Como foi visto, para implementar o controle basta conhecer os valores de  $I$  em dois momentos sucessivos  $t_n^-$  e  $t_{n-1}^+$  o que faz do método um método de retroalimentação adaptativa. Além disso, os valores da  $B_n$  podem ser escolhidos de forma a assegurar uma velocidade de convergência préfixada. Na implementação do controle não era necessário calcular o expoente de estabilidade, desde que os intervalos entre dois impulsos sucessivos são limitados superiormente. Por outro lado, se os intervalos entre dois impulsos não são limitados superiormente, recai-se no caso dos intervalos entre dois impulsos sucessivos tende para o infinito quando o tempo tende a infinito. Com isso o controle pode ser realizado com raras intervenções. Observa-se ainda, que qualquer que seja a divergência causada por um objeto que pertence à superfície invariante é cancelado pelos impulsos, evitando portanto a falta de sincronismo que é observada em alguns controles contínuos.

Faz-se importante citar o problema de como assegurar controle ótimo com o mínimo

de intervenções no sistema. Aqui, isto significa, que os intervalos entre dois impulsos sucessivos tendem ao infinito quando o tempo tende a infinito. O método exposto neste trabalho certamente fornece um bom quadro para o estudo deste problema. Outro aspecto importante abordado neste trabalho consiste na determinação do expoente de estabilidade associado a uma determinada superfície invariante. Além disso, foi mostrada uma outra forma de calcular o expoente de Lyapunov de um dado sistema dinâmico.

O método apresentado neste trabalho possui propriedades vantajosas em comparação com outros métodos. Assim:

- (i) é de fácil implementação;
- (ii) o método proposto neste trabalho pode ser visto como um método de retroalimentação adaptativa, onde é necessário conhecer o estado do sistema após o impulso dado no tempo  $t_{n-1}$  e antes do tempo  $t_n$ ;
- (iii) o método não requer cálculos complicados, que o difere do método de comparação por exemplo, ou outros métodos baseados Funções de Lyapunov;
- (iv) não faz-se necessário verificar se a condição de estabilidade está cumprida, o que em geral requer cálculos complicados nos parâmetros do sistema.

Além disso, o método exposto neste trabalho, permite uma boa controlabilidade da velocidade de convergência, que é importante para o processo de controle [48]. Estima-se que o método estabelece um modelo adequado para o estudo teórico de controle de impulsos que possuem raras intervenções, que é uma questão importante, pois menos intervenções significam menores custos de implementação do controle.

..

## *Referências*

- [1] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke. *Controlling Chaos*, Phys. Rev. Lett. 64, 1196-1199 (1990).
- [2] L. M. Pecora, T. L. Carrol. *Synchronization in Chaotic Systems*, Phys. Rev. Lett. 64(8) 821-823 (1990).
- [3] L. M. Pecora, T. L. Carrol. *Driving systems with chaotic signals*, Phys. Rev. A 44(4) 2374-2383 (1991).
- [4] J. F. Heagy, T. L. Carrol, L. M. Pecora. *Synchronous chaos in coupled oscillators systems*, Phys. Rev. E 50(3) 1874-1885 (1994).
- [5] J. F. Heagy, T. L. Carrol, L. M. Pecora. *Desynchronization by periodic orbits*, Phys. Rev. E 52(2) R1253-R1256 (1995).
- [6] J. W. Shuai, K. W. Wong, L. M. Cheng. *Synchronization of spatiotemporal chaos with positive conditional Lyapunov exponents*, Phys. Rev. E 56(2) 2272-2275 (1997).
- [7] D. Huang. *Synchronization-based estimation of all parameters of chaotic systems from time series*. Phys. Rev. E **69**, 067201 (2004).
- [8] D. Huang. *Stabilizing Near-Nonhyperbolic Chaotic Systems with Applications*. Phys. Rev. Lett. **93**, 214101 (2004).
- [9] D. Huang. *Simple adaptive-feedback controller for identical chaos synchronization*. Phys. Rev. E **71**, 037203 (2005).
- [10] D. Huang. *Adaptive-feedback control algorithm*. Phys. Rev. E **73**, 066204 (2006).
- [11] D. Huang. *Synchronization in adaptive weighted networks*. Phys. Rev. E **74**, 046208 (2006).
- [12] J. Cao, J. Lu. *Adaptive synchronization of neural networks with or without time-varying delay* Chaos **16**, 013133 (2006).
- [13] W. Lin. *Adaptive chaos control and synchronization in only locally Lipschitz systems*. Phys. Lett. A **372**, 3195-3200 (2008).

- 
- [14] R. Guo. *A simple adaptive controller for chaos and hyperchaos synchronization*. Phys. Lett. A **372**, 5593-5597 (2008).
- [15] G. Wang. *Stabilization and synchronization of Genesio-Tesi system via single variable feedback controller*. Phys. Lett A **374**, 2831-2834 (2010).
- [16] T. Huang, Chuangdong Li. *Chaotic synchronization by the intermittent feedback method*. J. of Comp. and Appl. Math. **234**, 1097-1104 (2010).
- [17] Y. Yu, H.X. Li. *Adaptive generalized function projective synchronization of uncertain chaotic systems*. Nonlinear Analysis: Real World Application **11**, 2456-2464 (2010).
- [18] J.Q. Fang, Y. Hong, G. Chen. *Switching manifold approach to chaos synchronization*. Phys. Rev. E **59**, R2523-R2526 (1999).
- [19] M. Itoh, T. Yang, L. Chua. *Conditions for Impulsive Synchronization of Chaotic and Hyperchaotic Systems*. Int. J. of Bif. and Chaos **11**, 551-560 (2001).
- [20] V. Lakshmikantham, D. Bainov, D. Simeonov. *Theory of impulsive differential equations*. Singapore: World Scientific; (1989).
- [21] D. Bainov, P. Simeonov. *Impulsive differential equations: asymptotic properties of the solutions*. Singapore: World Scientific; (1993).
- [22] V. Lakshmikantham, XZ Liu. *Stability analysis in terms of two measures*. Singapore: World Scientific; (1993).
- [23] D. Bainov, P. Simeonov. *Impulsive differential equations: periodic solutions and applications*. Singapore: World Scientific; (1995).
- [24] AM Samoilenko, NA Perestyuk. *Impulsive differential equations*. Singapore: World Scientific; (1995).
- [25] T. Yang. *Impulsive control theory*. Berlin: Springer-Verlag; (2001).
- [26] Tao Yang, Lin-Bao Yang, Chun-Mei Yang. *Impulsive control of Lorenz system*, Physica D **110** (1997) 18-24.
- [27] Tao Yang. *Impulsive Control*, IEEE Trans. Aut. Control **44**(5) 1081-1083 (1999).
- [28] Chuandong Li, Xiaofeng Liao. *Complete and lag synchronization of hyperchaotic systems using small impulses*, Chaos, Solitons and Fractals **22** 857-867 (2004).
- [29] Jitao Sun, Yiping Zhang, Fei Qiao, Qidi Wu. *Some impulsive synchronizations criteria for coupled chaotic systems via unidirectional linear error feedback approach*, Chaos, Solitons and Fractals **19** 1049-1055 (2004).
- [30] Jitao Sun, Yiping Zhang. *Impulsive control and synchronization of Chua's oscillators*, Math. Comp. Simul. **66** 499-508 (2004).

- 
- [31] Yinping Zhang, Jitao Sun, *Controlling chaotic Lu systems using impulsive control*, Phys. Lett. A 342 256-262 (2005).
- [32] Chuandong Li, Xiaofeng Liao. *Impulsive synchronization of chaotic systems*, Chaos 15 023104 (2005).
- [33] Quansheng Ren, Jianye Zhao. *Impulsive synchronization of coupled chaotic systems via adaptive-feedback approach*, Phys. Lett. A 335 342-347 (2006).
- [34] Fangfei Li, Jitao Sun. *Asymptotic stability of a genetic network under impulsive control*, Phys. Lett. A 374 3177-3184 (2010).
- [35] Dilan Chen, Jitao Sun, Changshui Huang. *Impulsive control and synchronization of general chaotic system*. Chaos, Solitons and Fractals 28 213-218 (2006).
- [36] Song Zheng, Gaogao Dong, Qinsheng Bi. *Impulsive synchronization of complex network with non-delayed and delayed coupling*, Phys. Lett. A 373 4255-4259 (2006).
- [37] Qunjiao Zhang, Jun-an Lu, Junchan Zhao. *Impulsive synchronization of general continuous and discrete-time complex dynamical network*, Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat. 15 1063-1070 (2010).
- [38] Jianquan Lu, Daniel W.C. Ho, Jinde Cao. *A unified synchronization criterion for impulsive dynamical networks*, Automatica 46 1215-1221 (2010).
- [39] Mohammad Haeri, Masha Dehghani. *Modified impulsive synchronization of hyperchaotic systems*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 15 728-740 (2010).
- [40] Yang Li. *Some new less conservative criteria for impulsive synchronization of a hyperchaotic Lorenz system based on small impulsive signals*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 11 713-719 (2010).
- [41] Yen-Sheng Chen, Robert R. Hwang, Chien-Cheng Chang. *Adaptive impulsive synchronization of uncertain chaotic systems*, Phys. Lett. A 374 2254-2258 (2010).
- [42] S. Walcher, *Algebras and Differential Equations*, Hadronic Press, Palm Harbor, (1991).
- [43] Annibal Figueiredo, Tarcisio M. da Rocha Filho, Leon Brenig. *Algebraic structures and invariant manifolds of differential System*, Journal of Mathematical Physics; 39(5):2929-2946 (1998).
- [44] A. Figueiredo, T.M. Rocha Filho, L.Brenig. *Necessary conditions for the existence of quasi-polynomial invariant: the quasi-polynomial and Lotka-Volterra systems*, Physica A, 262(1-2) 158-280 (1999).
- [45] Ruben Diaz-Sierra, Annibal Figueiredo, Tarcisio M. da Rocha Filho. *Stability and basins of attraction of invariant surfaces*, Physica D; 219(1):80-92 (2006).

- [46] Figueiredo A, Rocha Filho TM. *Basins of attractions of invariant regular manifolds*, *Chaos, Solitons and Fractals*, 40(4), 1877-1889 (2009).
- [47] Makoto Itoh, Tao Yang, Leon O. Chua. *Conditions for impulsive synchronization of chaotic and hyperchaotic systems*, *Int. J. of Bifurc. and Chaos* 11(2) 551-560 (2001).
- [48] J.S. Lin, T. L. Liao, J.J. Yan, M.L. Hung. *Exponential Synchronization of Chaotic Systems Subject To Uncertainties in the Control Input*. *Applied Mathematics and Computation* **216**, 2441-2449 (2010).
- [49] Jing Hui, Deming Zhu. *Dynamic Complexities for prey-dependent consumption integrated pest management models with impulsive effects*. *Chaos, Solutions e Fractals*, 29(2):233-251 (2006).
- [50] Zhongyi Xiang, Vinyu Song. *Extinction and permanence of a two-prey two-predator system with impulsive on the predator*. *Chaos, Solutions e Fractals*, 29:1121-1136 (2006).
- [51] Guirong Jiang, Qishao Lu, Linning Qiang. *Complex dynamics of a Holling type II prey-predator system with state feedback control*. *Chaos, Solutions e Fractals*, 31:448-461 (2007).
- [52] Zenqing Li, Weiming Wang, Haling Wang. *The dynamics of Beddington-Type system with impulsive control strategy*. *Chaos, Solutions e Fractals*, 29:1229-1239 (2006).
- [53] Jitao Sun, Fei Qiao, Qidi Wu. *Impulsive control of a financial model*. *Physics Letters A*, 335:282-288 (2005).
- [54] Guang Zhao Zeng, Lan Sun Chen, Li Hua Sun. *Complexity of an SIR epidemic dynamics model with impulsive vaccination control*. *Chaos, Solutions e Fractals*, 26: 495-505 (2005).
- [55] O. E. Rössler, *An Equation for Continuous Chaos*. *Physics Letters A* 57: (5), 397-398 (1976).
- [56] Jitao Sun, Yin Ping Zhang. *Impulsive control of Rössler systems*. *Physics Letters A*, 306:306-312 (2003).
- [57] Shoji Yoshikawa, Katsuhiko Yamada. *Impulsive Control for Angular Momentum Management of Tumbling Spacecraft*. *Acta Astronautica*, 60: 810-819 (2007).
- [58] Beker, O., Hollot, C.V., Chait, Y., Han, H. *Fundamental Properties of Reset Control Systems*. *Automatica* 40(6): 905-915 (2004).
- [59] Monteiro, L.H; *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física. 19-20 (2002).

- [60] Dias, A. O. *Estudo de um Sistema Mecânico com Pêndulo Sob Excitação Não Ideal*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. (2006).
- [61] Kusnetsov Y. A.; *Elements of Applied Bifurcation Theory*, New York, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, (1998)
- [62] R. Diaz-Sierra, A. Figueiredo, T. M. da Rocha Filho. *Stability and basins of attraction of invariant surfaces*, *Physica D* 2006;219(1):80-92.
- [63] L.A. Zadeh, C.A. Desoer. *Linear System Theory, The State Space Approach*, in: Mc-Graw-Hill Series in Systems Science, New York, 1963.
- [64] J.A. Marão, Liu, X., Figueiredo, A. *Using impulses to control the convergence toward invariant surfaces of continuous dynamical systems*, *Chaos, Solitons and Fractals* (submetido) 2011.
- [65] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical System and Bifurcation of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, Vol 42, Springer, 1990.
- [66] B. Hernandez-Bermejo, V. FairÃ©n and L. Brenig, *Algebraic recasting of nonlinear systems of ODEs into universal formats*, *J. Phys. A: Math. Gen.* 31 (1998) 2415-2430.
- [67] R.M. May, W.J. Leonard, *Nonlinear aspects of competition between three species*, *SIAM J. Appl. Math.* 29 (1975) 243-253.
- [68] B. D. Dam; M. Koch ; M. Lillholm, *Quaternions, interpolation and animation, Technical report*, Department of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark, 1998.
- [69] C. A. Pendeza; M. F. Borges; J. M. Machado, A. C. Oliveira; *Quantum operators of Fuertter's type and Transcendental Hyper - Complex*, *Internacional Journal of Applied Math.*, **20**:(1)(2007); 679-690;
- [70] M. F. Borges; J. A. Marão; R. C. Barreiro. *A Cauchy-Like Theorem for Hypercomplex Functions*. *Journal of Geometry and Topology*, v. 9, p. 263-271, 2009.
- [71] M. F. Borges ; A. D. Figueiredo ; J. A. Marão . *Hypercomplex Geometric Derivative from a Cauchy-like formula*. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, (Aceito), 2010.