



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS
MECÂNICAS

ESTIMATIVA DE VIDA À FADIGA POR
FRETTING EM CABOS CONDUTORES
BASEADA NA MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS

FELIPE AZEVEDO CANUT

Brasília, 30 de Setembro de 2016

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS
MECÂNICAS

ESTIMATIVA DE VIDA À FADIGA POR FRETTING
DE CABOS CONDUTORES BASEADA NA
MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS

FELIPE AZEVEDO CANUT

ORIENTADOR: LUCIVAL MALCHER

PUBLICAÇÃO: ENM.DM – 246/2016

BRASÍLIA/DF: SETEMBRO - 2016

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTIMATIVA DE VIDA À FADIGA POR FRETTING
DE CABOS CONDUTORES BASEADA NA
MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS

FELIPE AZEVEDO CANUT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADO POR:

Lucival Malcher, Dr, (ENM - UnB)
(Orientador)

Prof. Francisco Evangelista Júnior, Ph. D., (ENC - UnB)
(Examinador Externo)

Prof. Fábio Comes de Castro, Dr, (ENM - UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, Dr, (ENM - UnB)
(Suplente)

FICHA CATALOGRÁFICA

CANUT, FELIPE AZEVEDO

Estimativa de Vida à Fadiga por Fretting em Cabos Condutores Baseada na Micromecânica de Defeitos.

92p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2016).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia

Departamento de Engenharia Mecânica

- | | |
|------------------------------|--------------------|
| 1. Micromecânica de defeitos | 2. Fretting |
| 3. Plasticidade | 4. Gurson |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CANUT, F. A. (2016). Estimativa de Vida à Fadiga por Fretting em Cabos Condutores Baseada na Micromecânica de Defeitos. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas. Publicação ENM.DM – 246/2016, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 92p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Felipe Azevedo Canut

TÍTULO: Estimativa de Vida à Fadiga por Fretting em Cabos Condutores Baseada na Micromecânica de Defeitos.

GRAU: Mestre ANO: 2016

E concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Felipe Azevedo Canut

Condomínio Solar de Brasília, Quadra 2, Conjunto 6, Casa 14 – Lago Sul

CEP: 71.680-349, Brasília – DF – Brasil

felipe.canut@gmail.com

Dedico esta dissertação à minha família.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao Prof. Dr. Lucival Malcher pela orientação e amizade que recebi ao longe desses últimos anos. Muito obrigado por ter feito tanto por mim.

A todo corpo docente, técnicos e colaboradores envolvidos na Pós Graduação em Ciências Mecânicas da Universidade de Brasília.

Aos meus pais, Vera Cristina e Respino, minha avó, Vera Maria, e meu tio, Vasco Azevedo, que estiveram comigo sempre, me dando todo o apoio necessário para superar qualquer barreira. Vocês são parte fundamental de todas as minhas realizações e conquistas.

Á minha namorada, Marina Lustosa, por todos esses anos de compreensão e paciência.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelos recursos financeiros que possibilitaram a realização deste trabalho.

Felipe Azevedo Canut

RESUMO

Nesta contribuição, propõe-se uma extensão do modelo baseado na micromecânica de defeitos Gurson (1977) capaz de descrever a evolução do dano em regiões de baixa triaxialidade submetidas a carregamentos multiaxiais cíclicos. O mecanismo de corte utilizado, proposto por Xue (2007), calcula o dano introduzido devido ao cisalhamento a partir do nível de deformação plástica equivalente. O material é modelado com endurecimento cinemático utilizando lei de evolução do tensor cinemático de Armstrong Frederick (1966), representando o efeito de Bauschinger. O modelo proposto é utilizado para descrever a evolução do dano em um cabo condutor na região de contato com o grampo de suspensão submetido à um campo inicial de deformação plástica e carregamentos cíclicos. O aperto do grampo gera um campo de deformações plásticas no cabo, introduzindo um dano inicial no mesmo. Com o dano inicial determinado, o modelo proposto é aplicado nos pontos de Gauss considerados críticos até que a variável de dano atinja o valor crítico. Sendo assim, pode-se observar o efeito do aperto do grampo de suspensão na vida à fadiga do cabo condutor. Os campos de tensão e deformação, tanto no aperto do grampo quando no ciclo estabilizado, são obtidos numericamente via modelo de elementos finitos 2D simplificado, onde o cabo é representado por um semi-plano e o grampo por uma sapata de raio de 70 mm. As vidas previstas numericamente são confrontadas com dados obtidos experimentalmente no laboratório de ensaios mecânicos da Universidade de Brasília. Os resultados obtidos numericamente para a vida do componente apresentam uma boa acurácia quando comparados com os obtidos experimentalmente.

ABSTRACT

In this contribution, it is proposed an extension of the Gurson (1977) micromechanics of defects Model, capable of describing the evolution of damage in low triaxiality regions under cyclic multiaxial loads. The shear mechanism proposed by Xue (2007) is used to evaluate the damage introduced due to low triaxiality stresses based on the equivalent plastic strain level. The Armstrong-Frederick (1966) kinematic hardening rule is used to describe the Bauschinger effect of the material under cyclic load. The model proposed is used to describe the damage evolution on a conductor cable in the cable-clamp contact zone under an initial field of plastic strain and cyclic loading. The clamp pressure creates a plastic strain field in the cable which introduces an initial damage on it. With the given initial damage, the proposed model is applied on the critical Gauss points until the damage variable reaches the critical value. Therefore, it is possible to evaluate the effect of the clamp load on the cable's fatigue life. The stress and strain fields at the initial clamp pressure and stabilized cycle are numerically obtained through a 2D simplified finite element model where the cable is represented by a half-plane, and the clamp by a 70 mm radius pad. The numerical estimated fatigue life is compared with data obtained experimentally in the laboratory of mechanical tests at the University of Brasilia. The numerical results are in good agreement with those obtained experimentally.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS.....	5
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	6
2	ASPÉCTOS TEÓRICOS.....	7
2.1	DEFINIÇÕES PRELIMINARES	7
2.1.1	Invariantes do tensor tensão	9
2.1.2	Razão de triaxialidade e ângulo de Lode	9
2.1.3	Plasticidade associativa	11
2.1.4	Leis de endurecimento	12
2.2	MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS	18
2.2.1	Modelo de Gurson (1977)	19
2.2.2	Crescimento de vazios.....	21
2.2.3	Mecanismos de cisalhamento.....	23
2.3	MODELO DE GURSON COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO E MECANISMO DE CORTE	24
3	MODELO NUMÉRICO	28
3.1	INTRODUÇÃO	28
3.2	MODELO NUMÉRICO DE GURSON MODIFICADO	29
3.3	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	35
4	ANÁLISE VIA ELEMENTOS FINITOS.....	37
4.1	PROPRIEDADES DO MATERIAL.....	37
4.2	ENSAIOS DE FADIGA POR <i>FRETTING</i>	38
4.3	ANÁLISE PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	40
4.3.1	Determinação dos históricos do tensor deformação no ponto crítico	46
4.3.2	Determinação dos níveis de degradação inicial nos corpos de prova	53
5	ESTIMATIVA DE VIDA À FADIGA.....	55
6	CONCLUSÕES	62
7	REFERÊNCIAS	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Evolução do consumo energético relativo (MME, 2008).....	1
Figura 1.2. Conjunto formado pelo cabo condutor e grampo de suspensão (Sandoval, 2016).	2
Figura 1.3. Local típico para a ruptura dos fios que compõem o cabo condutor (Sandoval, 2016).	3
Figura 1.4. Conjunto montado e vibrógrafo utilizado para medir os deslocamentos verticais do cabo (Henriques, 2006).	3
Figura 1.5. Desenho esquemático das geometrias consideradas na análise de <i>fretting</i>	4
Figura 2.1: Evolução da superfície de escoamento na plasticidade ideal (Souza Neto <i>et al.</i> , 2008 - adaptada).	12
Figura 2.2: Evolução da superfície de escoamento com endurecimento isotrópico (Souza Neto <i>et al.</i> , 2008 - adaptada).	13
Figura 2.3: Evolução da superfície de escoamento com endurecimento cinemático (Souza Neto <i>et al.</i> , 2008 - adaptada).	13
Figura 2.4. Tensores desviadores no endurecimento cinemático.	15
Figura 2.5. Comparação entre os laços de histerese obtidos pela lei de Prager e experimentalmente (Lopes, 2014).	16
Figura 2.6. Evolução do tensor cinemático para as leis de Prager e Armstrong & Frederick.	17
Figura 2.7. Constituição inicial (a), nucleação (b), crescimento (c) e coalescência de microvazios (d) (Chen, 2004).....	18
Figura 3.1. Decomposição do operador.	28
Figura 4.1. Aparato experimental utilizado nos ensaios de <i>fretting</i>	39
Figura 4.2. Geometria utilizada nas simulações numéricas.....	40
Figura 4.3: Histórico de carregamentos.....	41
Figura 4.4: Pontos de referência e superfícies para aplicação dos carregamentos.	42
Figura 4.5. Caminho definido para tomada de resultados e análise da malha de elementos finitos.....	43
Figura 4.6. Deformações plásticas equivalentes.....	43
Figura 4.7: Carga normal de contato.	44

Figura 4.8. Carga tangencial de contato.	44
Figura 4.9: Malha de elementos finitos.	46
Figura 4.10. Tensão equivalente de von Mises no instante T1	47
Figura 4.11. Deformação plástica equivalente no instante T1	48
Figura 4.12. Tensão equivalente de von Mises no instante T2	49
Figura 4.13. Deformação plástica equivalente no instante T2	50
Figura 4.14. Fração volumétrica de vazios no instante T2	54
Figura 5.1. Evolução da porosidade para o caso 1.	56
Figura 5.2. Comparação entre vida estimada e vida observada para o caso 1.....	56
Figura 5.3. Evolução da porosidade para o caso 2.	57
Figura 5.4. Comparação entre vida estimada e vida observada para o caso 2.....	57
Figura 5.5. Evolução da porosidade para o caso 3.	58
Figura 5.6. Comparação entre vida estimada e vida observada para o caso 3.....	58
Figura 5.7. Evolução da porosidade para o caso 4.	59
Figura 5.8. Comparação entre vida estimada e vida observada para o caso 4.....	59
Figura 5.9. Comparação entre vida estimada e vida observada para todos os casos.....	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Tabela de parâmetros elastoplásticos.....	11
Tabela 4.1. Composição química (%p) da liga de AA7050	38
Tabela 4.2. Propriedades mecânicas da liga AA7050.	38
Tabela 4.3. Vidas medidas experimentalmente considerando uma carga de tração média de 30.69 kN.	39
Tabela 4.4. Condições de carregamento para simulação 2-D.....	41
Tabela 4.5. Tempos de simulação para as malhas analisadas.	45
Tabela 4.6. Histórico do tensor deformação no ponto de máxima deformação plástica equivalente para a simulação 1.....	51
Tabela 4.7. Histórico do tensor deformação no ponto de máxima deformação plástica equivalente para a simulação 2.....	51
Tabela 4.8. Histórico do tensor deformação no ponto de máxima deformação plástica equivalente para a simulação 3.....	52
Tabela 4.9. Histórico do tensor deformação no ponto de máxima deformação plástica equivalente para a simulação 4.....	52
Tabela 4.10. Níveis de degradação a serem utilizados como entradas na rotina numérica proposta.	53
Tabela 5.1. Condições de carregamento para as análises de previsão de vida.	55
Tabela 5.2. Vidas obtidas para o caso 1.	56
Tabela 5.3. Vidas obtidas para o caso 2.	57
Tabela 5.4. Vidas obtidas para o caso 3.	58
Tabela 5.5. Vidas obtidas para o caso 4.	59
Tabela 5.6. Vidas obtidas para todos os casos.....	61

LISTA DE SÍMBOLOS

b	Constante material para Armstrong & Frederick
β	Tensor cinemático
$\dot{\beta}$	Taxa de evolução do tensor cinemático
β_{n+1}	Tensor cinemático no instante $t = n + 1$
β_{n+1}^T	Tensor cinemático tentativa
\mathbb{D}	Tensor de quarta ordem elástico isotrópico
ϵ^e	Tensor das deformações elásticas
ϵ_{n+1}^e	Tensor das deformações elásticas no instante $t = n + 1$
ϵ_{n+1}^{eT}	Tensor das deformações elásticas tentativa
ϵ^p	Tensor das deformações plásticas
$\dot{\epsilon}^p$	Taxa de evolução do tensor das deformações plásticas
$\dot{\bar{\epsilon}}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica equivalente
$\dot{\epsilon}_v$	Componente volumétrica do tensor deformação
$\dot{\epsilon}_v^p$	Componente volumétrica do tensor deformação plástica
ϵ_{n+1}^p	Tensor das deformações plásticas no instante
ϵ_{n+1}^{pT}	Tensor das deformações plásticas tentativa
$\bar{\epsilon}_{n+1}^{pT}$	Deformação plásticas equivalente tentativa
$\Delta\epsilon^e$	Incremento de deformação elástica
E	Módulo de elasticidade
f	Porosidade
f_c	Porosidade crítica
\dot{f}	Taxa de evolução da porosidade
\dot{f}^G	Taxa de evolução da porosidade devido ao crescimento de vazios
f_{n+1}	Porosidade no instante $t = n + 1$
f_{n+1}^T	Porosidade tentativa
\dot{f}_{NH}	Taxa de evolução do mecanismo de corte de Nahshin & Hutchinson
\dot{f}_{Xue}	Taxa de evolução do mecanismo de corte de Xue

g_0	Função gatilho
G	Módulo de cisalhamento
H	Módulo de endurecimento cinemático
I	Tensor identidade de segunda ordem
I_1	Primeiro invariante do tensor tensão
I_2	Segundo invariante do tensor tensão
I_3	Terceiro invariante do tensor tensão
J_2	Segundo invariante do tensor desviador
J_3	Terceiro invariante do tensor desviador
ν	Módulo de Poisson
σ_{y0}	Limite de escoamento inicial
σ_y	Limite de escoamento
\mathbf{N}	Vetor de Fluxo
\mathbf{N}_{n+1}	Vetor de Fluxo no instante $t = n + 1$
$\mathbf{N}_{d\ n+1}$	Vetor de Fluxo desviador no instante $t = n + 1$
$N_{v\ n+1}$	Vetor de Fluxo volumétrico no instante $t = n + 1$
p	Tensão hidrostática
p_{n+1}	Tensão hidrostática no instante $t = n + 1$
p_{n+1}^T	Tensão hidrostática tentativa
q	Tensão equivalente de von Mises
ϕ	Função de escoamento
ϕ_{n+1}	Função de escoamento no instante $t = n + 1$
ϕ_{n+1}^T	Função de escoamento tentativa
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de Cauchy
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$	Tensor tensão no instante $t = n + 1$
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T$	Tensor tensão tentativa
\mathbf{S}	Tensor das tensões desviadoras
\mathbf{S}_{n+1}	Tensor desviador no instante $t = n + 1$
\mathbf{S}_{n+1}^T	Tensor desviador tentativa
η	Razão de triaxialidade
$\boldsymbol{\eta}$	Tensor relativo
$\boldsymbol{\eta}_{n+1}$	Tensor relativo no instante $t = n + 1$

$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^T$	Tensor relativo tentativa
ξ	Terceiro invariante normalizado
θ	Ângulo de Lode
$\bar{\theta}$	Ângulo de Lode normalizado
Ψ	Potencial de fluxo
V_{Vazios}	Volume de vazios
V_{VR}	Volume representativo

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

O consumo de energia elétrica é um dos principais indicativos de desenvolvimento econômico e social de um país. Ele reflete o ritmo das atividades industriais e comerciais, bem como a capacidade da população para adquirir bens e serviços tecnologicamente mais avançados (IPEA, 2008).

A energia elétrica foi a modalidade energética mais consumida no país em 2007. Segundo o Ministério de Minas e Energia (2008), mesmo com a adoção de práticas que visassem o aumento da eficiência no uso da energia elétrica em função do racionamento de 2001, o consumo deste serviço cresceu de forma mais acelerado que a média, com um aumento de 39,9 % no período de 1997 a 2007, contra 32,0 % para o somatório de todas as fontes energéticas. Neste mesmo período, o crescimento do consumo de fontes energéticas derivadas do petróleo acumulou um crescimento de apenas 10,5 %. Na Figura 1.1 é mostrada a evolução relativa do consumo destas fontes energéticas, tomando-se como base o ano de 1997.

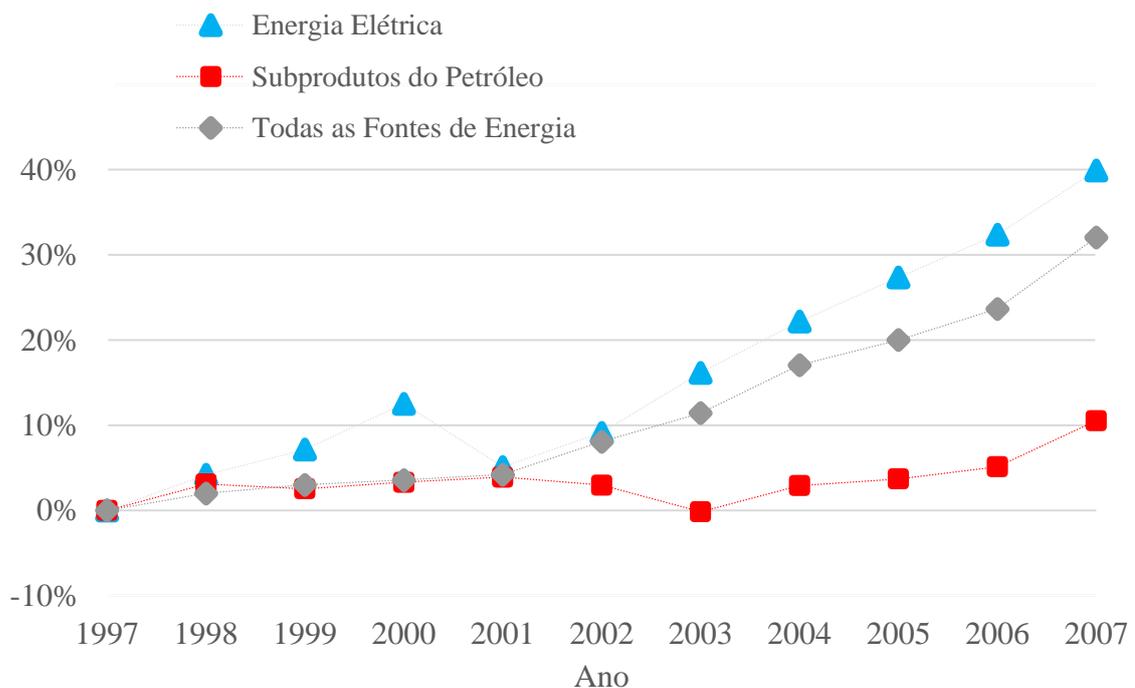


Figura 1.1. Evolução do consumo energético relativo (MME, 2008).

O pior evento da série de blecautes que ocorreu no país entre os anos 2000 e 2002 aconteceu em julho de 2001, devido a uma falha mecânica no cabo condutor de uma linha de transmissão da região sudeste provocada por vibrações eólicas. Este evento provocou o desligamento de 13 das então 18 turbinas da usina de Itaipu, resultando em um prejuízo estimado de aproximadamente 100 milhões de reais (Fadel, 2010).

As linhas de transmissão são submetidas a cargas médias e alternadas. A carga média é aplicada ao cabo durante toda a sua vida, também chamada de carga EDS (*everyday stress*), é a carga responsável pelo estiramento do cabo. Já as cargas alternadas são consequência da movimentação dos cabos em relação as torres. Estes movimentos podem ser ocasionados pela incidência de ventos, chuvas, formação de gelo nas linhas, abalos sísmicos, entre outros (EPRI, 1979).

Segundo CIGRE (1979), falhas em cabos condutores de energia estão associada à fadiga do material, causada por forças eólicas que provocam vibrações de alta frequência e baixa amplitude nos componentes condutores. Os efeitos da fadiga ainda são agravados pelo processo de abrasão causado pelo pequeno movimento relativo entre os corpos em contato, também chamado de *fretting*. Após a análise de linhas em serviço e em testes laboratoriais, estudos constataram que a inicialização das trincas ocorre nas interfaces de contato próximas ao grampo de suspensão (Fricke & Rawlins, 1968). Na Figura 1.2 é mostrado a montagem cabo-grampo de suspensão e na Fig. 1.3 o local típico da ruptura dos fios que compõe as linhas de transmissão.



Figura 1.2. Conjunto formado pelo cabo condutor e grampo de suspensão (Sandoval, 2016).



Figura 1.3. Local típico para a ruptura dos fios que compõem o cabo condutor (Sandoval, 2016).

A presença do fenômeno de *fretting* nas superfícies de contato entre o grampo e o cabo condutor, bem como entre os próprios fios do cabo, geram estados de tensão extremamente complexos de serem quantificados (Henriques, 2006). Sendo assim, a resistência à fadiga da montagem cabo-grampo é, comumente, obtida pela fórmula de Poffenberger-Swart (1965), na qual correlaciona-se a faixa de deslocamento vertical das linhas, medida a uma distância padrão do grampo de suspensão, com a amplitude de tensão no último ponto de contato entre o cabo e grampo. Esta medição geralmente é efetuada através de vibrógrafos instalados nas proximidades do grampo, como mostrado na Fig. 1.4.



Figura 1.4. Conjunto montado e vibrógrafo utilizado para medir os deslocamentos verticais do cabo (Henriques, 2006).

A fórmula de Poffenberger-Swart vem de uma série de simplificações que impossibilitam a avaliação local dos campos de tensão e deformação, e dos níveis de degradação dos componentes na área de contato. Sendo assim, propõe-se neste trabalho uma abordagem baseada na micromecânica de defeitos que seja capaz de avaliar os efeitos de fenômenos localizados, como gradientes de tensão devido ao contato e a presença de deformações plásticas introduzidas ao cabo condutor pelo aperto do grampo de suspensão. Este tipo de abordagem já vem sendo aplicada para estimar o nível de degradação causado por abalos sísmicos em estruturas como dutos de óleo e gás (Pereira, 2015).

Contudo, o grande número de regiões em contato no conjunto cabo-grampo e a complexidade das geometrias envolvidas demanda um grande custo computacional para a análise numérica deste problema (Cruzado *et al.*, 2013). Outro fator é a geometria complexa do cabo condutor, gerando uma dependência entre a rigidez e a carga de tração a qual está submetido.

Assim, neste trabalho, propõe-se a análise de um sistema composto por uma sapata com raio de 70 mm e um corpo de prova, mostrado na Fig. 1.5. A interface de contato entre estes dois corpos simula a região entre dois fios vizinhos ou o contato entre um fio condutor com o grampo de suspensão. Com esta montagem, é possível avaliar o efeito da degradação inicial na vida de um componente submetido à fadiga por *fretting* sem que outros fenômenos, como a variação de rigidez dos componentes, interfiram no resultado. Esta configuração também é encontrada nas máquinas de ensaio de *fretting*, facilitando a comparação dos resultados numéricos com dados experimentais.

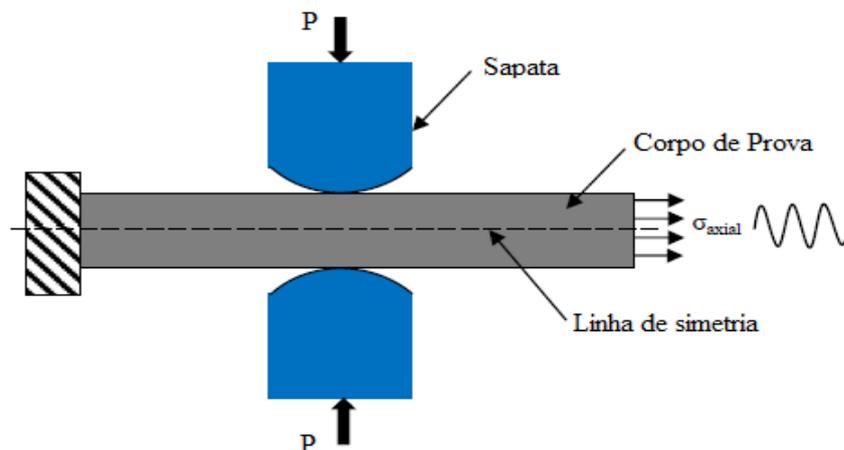


Figura 1.5. Desenho esquemático das geometrias consideradas na análise de *fretting*.

A carga “*P*” mostrada na Fig. 1.5 é responsável por gerar forças de contato e introduzir diferentes níveis de degradação inicial no corpo de prova. Este último, por sua vez, é submetido a cargas médias e alternadas, σ_{axial} , de forma análoga ao que acontece nas linhas de transmissão.

A partir de uma análise por elementos finitos do conjunto formado pela sapata e o corpo de prova, é possível se obter o histórico de deformações no ponto de Gauss tido como crítico. Este histórico alimenta uma rotina numérica baseada na micromecânica de defeitos de Gurson (1977). Para que os efeitos das cargas alternadas sejam capturados corretamente, propõe-se a introdução do mecanismo de endurecimento cinemático de Armstrong & Frederick (1966). Por último, considera-se o mecanismo de cisalhamento proposto por Xue (2007) para avaliar a evolução do dano micromecânico nas regiões de baixa triaxialidade.

1.2 OBJETIVOS

Diante do problema apresentado, propõe-se a utilização de um modelo baseado na micromecânica de defeitos, associado com mecanismos de cisalhamento e endurecimento cinemático para a previsão de vida à fadiga por *fretting* de cabos condutores de energia elétrica. Para isto, adota-se o modelo micromecânico de Gurson (1977), com o mecanismo de cisalhamento de Xue (2007) e endurecimento cinemático de acordo com a lei de Armstrong & Frederick (1966).

Para se avaliar o desempenho do modelo proposto, serão adotados dados experimentais de vida à fadiga por *fretting* gerados em corpos de prova em liga de alumínio 7050. A formulação constitutiva proposta é implementada através em um código numérico desenvolvido em linguagem Fortran, onde um histórico de deformação é introduzido e assim estimada a vida numericamente.

Para se chegar ao histórico de carregamento em um ponto crítico do problema apresentado, simulações prévias, em elementos finitos, são realizadas, bem como é feito um estudo do tamanho mínimo de elemento necessário para se observar os fenômenos de deformação plástica na escala micrométrica. Ao final, uma comparação entre a vida à

fadiga por *fretting* experimental é comparada a vida numericamente determinada pela modelagem proposta.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Visando atender os objetivos apresentados na seção anterior, o presente trabalho foi dividido em seis capítulos. No capítulo 1 são apresentados a contextualização do tema proposto, bem como os objetivos a serem alcançados.

No capítulo 2 são apresentados os aspectos teóricos referentes à elaboração do modelo elastoplástico proposto. Neste capítulo são expostos os conceitos básicos da plasticidade, leis de endurecimento, micromecânica de defeitos bem como o modelo matemático proposto.

No capítulo 3 são abordadas as estratégias numéricas para a implementação do modelo apresentado no capítulo anterior. São apresentados os mecanismos de integração implícita, método de Newton-Rhapson e o modelo numérico proposto.

No capítulo 4 é apresentada a análise por elementos finitos que objetivam a determinação dos históricos de deformação e os níveis de degradação inicial. Também é realizado um estudo sobre a influência do tamanho dos elementos finitos nos resultados numéricos.

No capítulo 5 são apresentadas as estimativas de vida realizadas através do modelo desenvolvido e, finalmente, são apresentadas as conclusões no capítulo 6.

2 ASPÉCTOS TEÓRICOS

Nos últimos anos a capacidade de processamento dos computadores vem aumentando significativamente, possibilitando a implementação de modelos mais complexos, os quais procuram descrever o comportamento de diferentes materiais sob diferentes carregamentos. Desta forma, é altamente desejável, principalmente em materiais dúcteis, modelar a evolução da degradação interna. Neste contexto, é possível apontar duas abordagens principais, a chamada mecânica do dano contínuo e a micromecânica de defeitos. Na mecânica do dano contínuo destaca-se o modelo constitutivo de Lemaitre (1985), baseado na teoria termodinâmica e quantifica a degradação do material através de uma variável contínua chamada de Dano. Na micromecânica de defeitos, a evolução da degradação do material é determinada pelo crescimento de vazios, os quais podem ser considerados cilíndricos como na proposição de McClintock (1968) ou esféricos como na abordagem de Rice-Tracey (1969). Um dos principais modelos a considerar o volume relativo de vazios como variável de dano foi proposto por Gurson (1977), no qual, posteriormente, foi adicionado o efeito da nucleação de novos vazios por Tvergaard e Needleman (1984), dando origem ao modelo conhecido como GTN (Gurson-Tvergaard-Needleman). Outras extensões, propostas por Xue (2007), Nahshon & Hutchinson (2008), Malcher (2012), incluíram o efeito dos mecanismos de cisalhamento na degradação do material.

2.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Para se entender os conceitos relativos à definição de um modelo constitutivo, é necessário inicialmente se apresentar algumas definições preliminares.

O tensor das deformações pode ser decomposto em uma parcela elástica e uma parcela plástica. O tensor das deformações elásticas pode ser escrito como uma função do tensor tensão, geralmente representada pela lei de Hooke. A plasticidade é um fenômeno conhecido como a capacidade que tem um material para se deformar permanentemente quando está submetido a tensões acima de seu limite de escoamento. Existem várias formulações para descrever o comportamento mecânico do material (Souza Neto *et al.*, 2008), o que leva ao estudo dos modelos constitutivos.

O chamado tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser escrito como a soma de uma contribuição volumétrica e uma contribuição desviadora (Souza Neto *et al.*, 2008), como mostra a equação (1):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} + p\mathbf{I}, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{S} representa o tensor das tensões desviadoras, p é a tensão hidrostática e \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem. A tensão hidrostática pode ser então definida como sendo:

$$p \equiv \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.2)$$

o termo $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ representa o traço do tensor tensão, ou seja, a soma dos elementos da sua diagonal principal. A contribuição desviadora do tensor tensão é escrita a partir da Eq. 2.3, como:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I} = \left[\mathbb{I}^4 - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] : \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{I}^d : \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.3)$$

onde \mathbb{I}^4 é o tensor identidade de quarta ordem e \mathbb{I}^d é o chamado tensor identidade de quarta ordem desviador.

A partir do tensor das tensões desviadoras, define-se outro parâmetro de extrema importância no estudo da plasticidade, a chamada tensão equivalente de von Mises, como segue na Eq. 2.4:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt{3J_2}. \quad (2.4)$$

2.1.1 Invariantes do tensor tensão

Os invariantes são quantidades relacionadas ao tensor que independem do sistema de coordenadas adotado (Holzapfel, 2000). Os invariantes do tensor tensão são comumente representados pela letra “ I ”, enquanto os invariantes do tensor desviador são representados pela letra “ J ”. O primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão e o segundo e terceiro invariantes do tensor desviador são determinados pelas Eqs. 2.5 e 2.6, como:

$$\begin{aligned} I_1 &= tr(\boldsymbol{\sigma}), \\ I_2 &= \frac{1}{2} [tr(\boldsymbol{\sigma})^2 - tr(\boldsymbol{\sigma}^2)], \\ I_3 &= det(\boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}), \\ J_3 &= det(\boldsymbol{S}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por definição, o traço do tensor desviador, \boldsymbol{S} , é igual a zero, assim, seu primeiro invariante, J_1 , será sempre nulo e por isso não foi apresentado na Eq. 2.6.

2.1.2 Razão de triaxialidade e ângulo de Lode

No estudo de modelos constitutivos, alguns parâmetros são comumente citados na descrição do estado de tensão. Dentre eles, destacam-se a tensão hidrostática, p , a tensão equivalente de von Mises, q , e a razão entre estas duas quantidades, que define um importante parâmetro na análise dos estados de tensão, a chamada razão de triaxialidade, η , como mostrado na Eq. 2.7.

$$\eta = \frac{p}{q}. \tag{2.7}$$

A razão de triaxialidade permite identificar se o estado de tensão é predominantemente compressivo ($\eta \leq -\frac{1}{3}$), predominantemente trativo ($\eta \geq \frac{1}{3}$), ou se está na região chamada de baixa triaxialidade ($-\frac{1}{3} \leq \eta < \frac{1}{3}$), onde são observados estados de tensão combinados, com esforços normais e cisalhantes. Em cisalhamento puro a razão de triaxialidade será sempre nula ($\eta = 0$).

O terceiro invariante do tensor desviador, definido pela Eq. 2.6, pode ser escrito na forma normalizada (ξ), como:

$$\xi = \left(\frac{r}{q}\right)^3, \quad (2.8)$$

onde “ r ” representa o terceiro invariante do tensor desviador definido alternativamente por Bai *et al.* (2008), expresso pela Eq. 2.9.

$$r = \left[\frac{27}{2} \det(\mathbf{S})\right]^{1/3} = \left[\frac{27}{2} J_3\right]^{1/3}. \quad (2.9)$$

A partir do parâmetro “ ξ ”, define-se o chamado ângulo de Lode, θ , que representa o ângulo formado entre a projeção do tensor desviador no plano π e a linha de cisalhamento puro.

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\xi). \quad (2.10)$$

O ângulo de Lode também pode ser escrito na sua forma normalizada ($\bar{\theta}$), como sendo:

$$\bar{\theta} = -\frac{6\theta}{\pi}. \quad (2.11)$$

A Tabela 2.1 mostra os valores de cada parâmetro elastoplástico apresentado nesta seção para diferentes estados de tensão.

Tabela 2.1. Tabela de parâmetros elastoplásticos.

Estado de Tensão	Parâmetro elastoplástico			
	η	ξ	θ	$\bar{\theta}$
Tração Uniaxial	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{\pi}{6}$	1
Compressão Uniaxial	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{\pi}{6}$	-1
Cisalhamento Puro	0	0	0	0

2.1.3 Plasticidade associativa

Nos modelos classificados como associativos, a função de escoamento, Φ , é definida pelo potencial de fluxo, Ψ , como mostrado na Eq. 2.12. Qualquer potencial de fluxo diferente da função de escoamento caracteriza o modelo elastoplástico como não-associativo (Souza Neto *et al.*, 2008).

$$\Psi \equiv \Phi. \quad (2.12)$$

Na plasticidade associativa, as equações que descrevem a evolução da deformação plástica e as variáveis de encruamento, são dadas por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.13)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ é o tensor das deformações plásticas, γ é o multiplicador plástico.

A plasticidade associativa também estabelece que a taxa de evolução do tensor das deformações plásticas será sempre normal à superfície de escoamento. Assim, o chamado vetor de fluxo, \mathbf{N} , é definido a partir da função de escoamento, como se segue:

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (2.14)$$

Em modelos não associativos, a evolução do tensor das deformações plásticas não é, necessariamente, normal à superfície de escoamento (Souza Neto *et al.*, 2008).

2.1.4 Leis de endurecimento

O efeito conhecido como endurecimento é caracterizado pela dependência da tensão de escoamento com o histórico de deformação plástica imposto ao material. Nos modelos bidimensionais e tridimensionais os efeitos do endurecimento são representados por uma variação na força termodinâmica associada ao endurecimento. Essa variação pode afetar o tamanho, forma ou posição da superfície de escoamento (Souza Neto *et al.*, 2008).

Nos modelos ditos perfeitamente plásticos a superfície de escoamento se mantém fixa para quaisquer níveis de deformação plástica. No endurecimento isotrópico considera-se apenas a expansão uniforme da superfície de escoamento sem que haja translação da mesma. Já no endurecimento cinemático observa-se o chamado efeito de Bauschinger, representado nos modelos elastoplásticos como uma translação da superfície de escoamento sobre o plano das tensões desviadoras (*plano π*), onde o seu tamanho é mantido constante. Finalmente, ambos os mecanismos de endurecimento podem ser considerados resultando na expansão e translação da superfície de escoamento. Nas Figuras 2.1 a 2.3, são mostradas as evoluções das superfícies de escoamento de von Mises para os diferentes mecanismos de endurecimento.

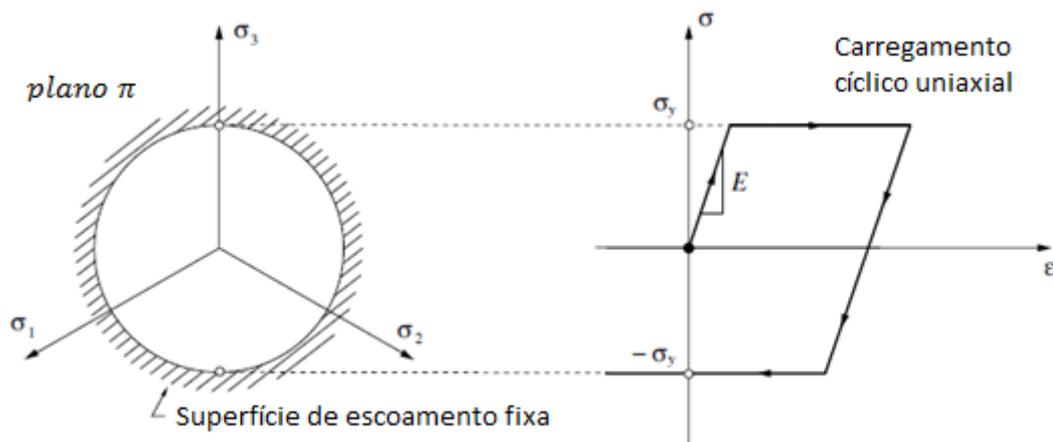


Figura 2.1: Evolução da superfície de escoamento na plasticidade ideal (Souza Neto *et al.*, 2008 - adaptada).

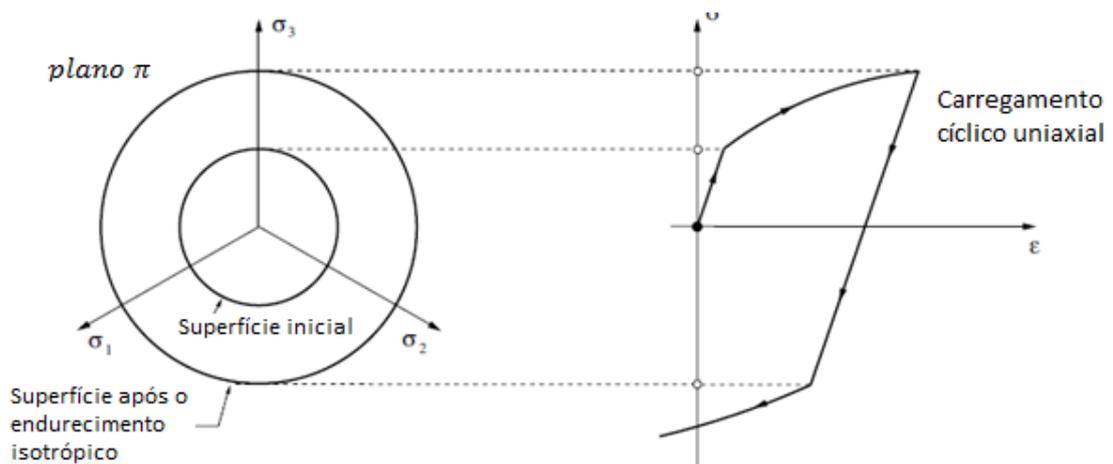


Figura 2.2: Evolução da superfície de escoamento com endurecimento isotrópico
(Souza Neto *et al.*, 2008 - adaptada).

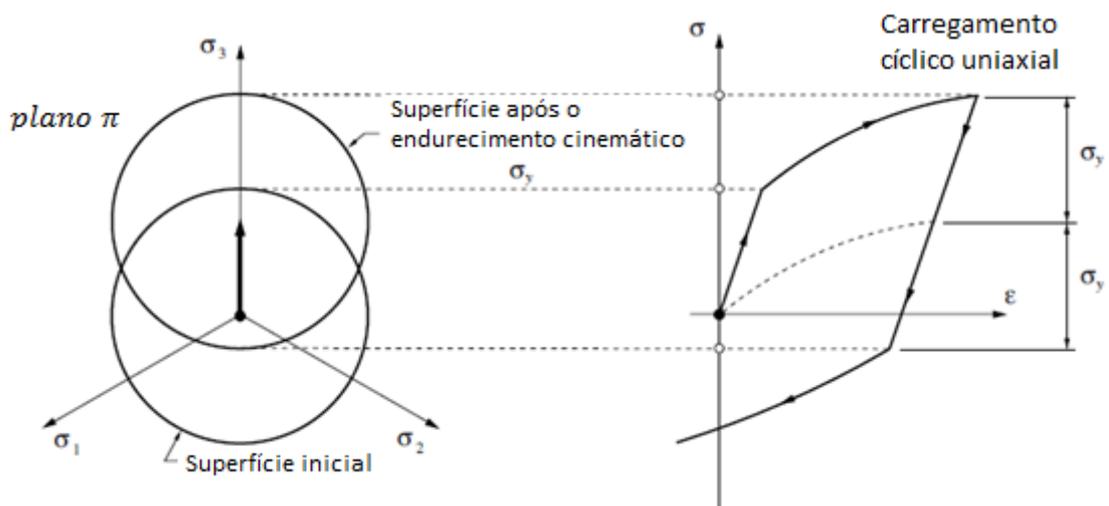


Figura 2.3: Evolução da superfície de escoamento com endurecimento cinemático
(Souza Neto *et al.*, 2008 - adaptada).

2.1.4.1 Endurecimento isotrópico

Um modelo com endurecimento isotrópico é caracterizado pela expansão uniforme (isotrópica), sem translação, da superfície inicial de escoamento. Para modelos elastoplásticos que utilizam a função de escoamento de von Mises, o endurecimento isotrópico corresponde ao aumento do raio da circunferência observada sobre o plano π (Souza Neto *et al.*, 2008).

A evolução da superfície de escoamento no endurecimento isotrópico depende de um conjunto de variáveis internas associadas a esse fenômeno que estão relacionadas com características específicas do material considerado (Lemaitre, 2001). Para material dúcteis, por exemplo, este conjunto de variáveis está diretamente associada com a densidade de discordâncias encontrada na microestrutura do material. Geralmente, o conjunto de variáveis associadas ao endurecimento isotrópico se resume à deformação plástica acumulada, como na Eq. 2.15:

$$\sigma_y(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_{y_0} + H\bar{\epsilon}^p{}^n, \quad (2.15)$$

onde $\sigma_y(\bar{\epsilon}^p)$ é o limite de escoamento para cada nível de endurecimento do material, σ_{y_0} é o limite de escoamento inicial, $\bar{\epsilon}^p$ é a deformação plástica acumulada, H e n são constantes do material chamadas de módulo de endurecimento e expoente de endurecimento, respectivamente.

2.1.4.2 Endurecimento Cinemático

Quando um material é carregado além do limite de escoamento em uma direção, há uma redução deste limite na direção oposta, este fenômeno é conhecido como efeito de Bauschinger e é frequentemente observado em componentes sujeitos à carregamentos cíclicos. Este é efeito é inserido nos modelos constitutivos através do tensor das tensões cinemáticas, $\boldsymbol{\beta}$, como mostrado na Eq. 2.16.

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{\beta}, \quad (2.16)$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ é o tensor relativo e $\boldsymbol{\beta}$ o tensor das tensões cinemáticas. Vale notar que ambos são tensores desviadores. Assim, o movimento da superfície de escoamento de um material modelado pelo endurecimento cinemático e carregado por um estado geral de tensões é mostrado na Fig. 2.4.

Ao longo do tempo, diversos autores propuseram diferentes leis de evolução para o tensor das tensões desviadores, dentre elas, destacam-se as seguintes:

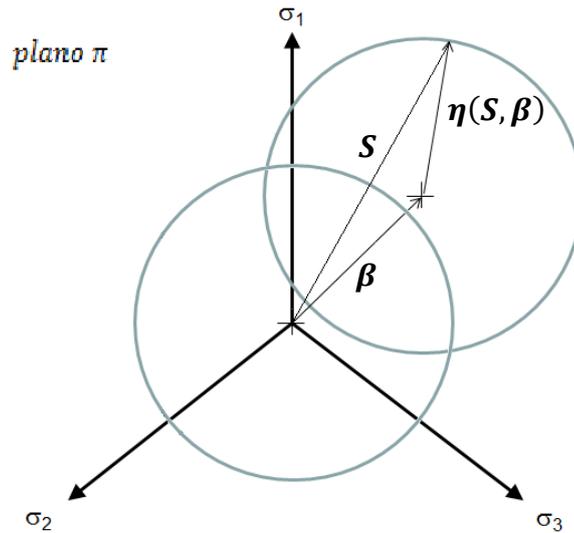


Figura 2.4. Tensores desviadores no endurecimento cinemático.

Prager (1955)

A lei de endurecimento cinemático de Prager (1955), também conhecida como lei de endurecimento cinemático linear, estabelece uma relação linear entre a taxa de evolução do tensor das tensões cinemáticas e a taxa de evolução do tensor das deformações plásticas. A constante de proporcionalidade desta relação linear é chamada de módulo de endurecimento cinemático linear que, por sua vez, é uma constante do material, como expresso na Eq. 2.17.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad (2.17)$$

onde H^k é o módulo de endurecimento cinemático linear.

A relação proposta por Prager consegue modelar matematicamente o efeito de Bauschinger, porém, por se tratar de uma lei linear, ela não consegue descrever de forma satisfatória a parte não linear do laço de histerese observado experimentalmente, conforme mostrado na Fig. 2.5. Outra desvantagem deste modelo é a incapacidade de descrever o efeito da saturação do tensor cinemático.

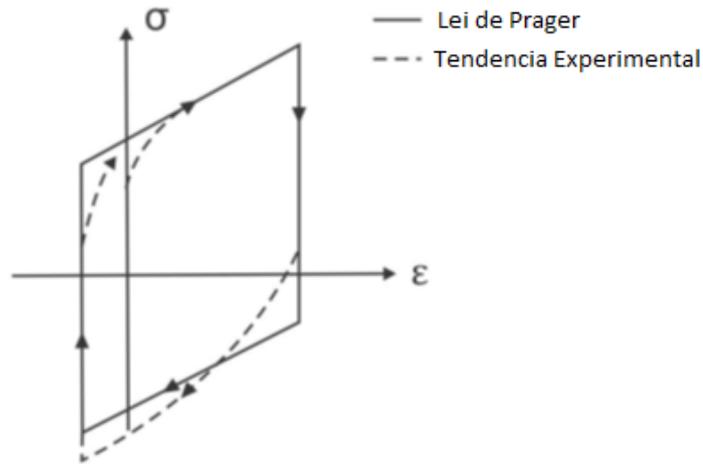


Figura 2.5. Comparação entre os laços de histerese obtidos pela lei de Prager e experimentalmente (Lopes, 2014).

Armstrong-Frederick (1966)

Nesta proposição, considera-se a introdução de um termo não linear à lei de endurecimento de Prager. Assim, a lei de evolução do tensor cinemático de Armstrong-Frederick é escrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p b \boldsymbol{\beta}, \quad (2.18)$$

onde H e b são constantes do material, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ representa a taxa de evolução do tensor das deformações plásticas e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ a taxa de evolução da deformação plástica acumulada. O termo não linear “ $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p b \boldsymbol{\beta}$ ” introduz o efeito da saturação no endurecimento cinemático. A saturação corresponde ao valor limite que a norma do tensor $\boldsymbol{\beta}$ pode assumir. Enquanto o valor de $\boldsymbol{\beta}$ for mantido neste limite, o material se comportará de acordo a plasticidade ideal (Souza Neto *et al.*, 2008). Na Figura 2.5, as leis de endurecimento de Prager e Armstrong-Frederick são comparadas e observa-se o efeito do termo de saturação na evolução do tensor cinemático.

Diferentemente de Prager, o Modelo proposto por Armstrong-Frederick é capaz de descrever o trecho não linear do laço de histerese observado experimentalmente. Outra

vantagem deste modelo é a capacidade de se descrever aspectos relativos à estabilização do ciclo de histerese estabilizado (Chaboche, 1986).

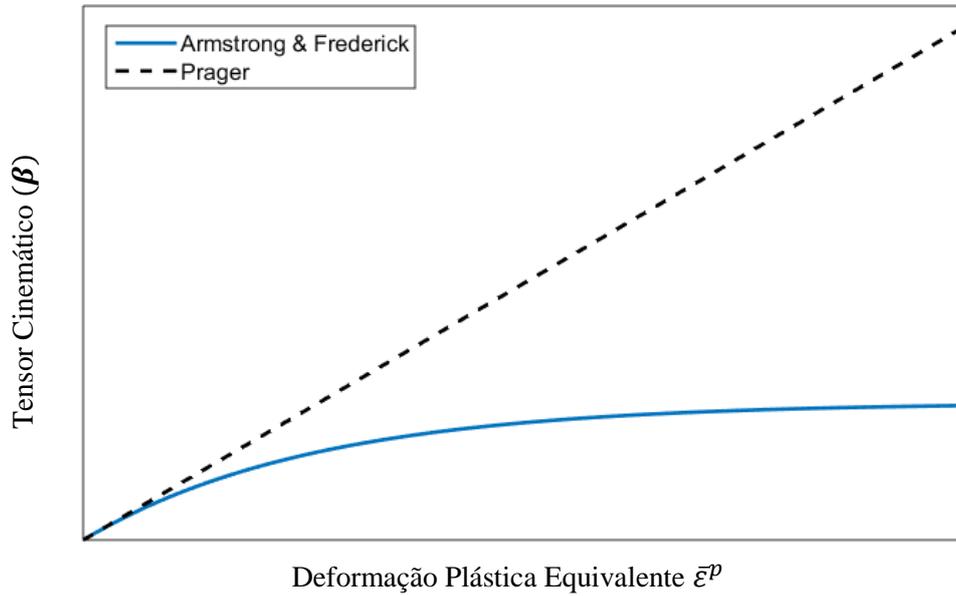


Figura 2.6. Evolução do tensor cinemático para as leis de Prager e Armstrong & Frederick.

Chaboche (1986)

Apesar de estimar de maneira satisfatória o efeito de Bauschinger, o modelo de Armstrong & Frederick superestima o efeito de *ratchetting*, quando comparado com dados experimentais (Chaboche, 1986). Este fenômeno está associado com o comportamento transiente de alguns materiais quando sujeitos a carregamentos cíclicos na presença de uma carga média (Dowling, 1999). Assim, Chaboche propôs que a taxa de evolução do tensor cinemático fosse escrita como um somatório de leis de Armstrong-Frederick, expressa pela Eq. 2.19, permitindo uma flexibilidade maior no ajuste das curvas que formam o laço de histerese.

$$\dot{\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{2}{3} H_i^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^p b_i \beta_i \quad (2.19)$$

onde n é o número de termos desejado. Segundo Chaboche (1986), para n igual a 3, o modelo apresenta boa correlação com dados experimentais.

Apesar da excelente correlação com os dados experimentais, a introdução do somatório faz com que mais constantes do material precisem ser calibradas. Enquanto na lei linear de Prager apenas um valor precise ser calibrado e em Armstrong-Frederick dois, no modelo de Chaboche é necessário que $2n$ termos sejam calibrados, ou seja, para n igual a 3, 6 constantes precisam ser calibradas.

2.2 MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS

Deformações plásticas vem sendo amplamente utilizadas em processos de conformação mecânica para formação de diversos componentes, entretanto, a heterogeneidade dos metais pode levar à falha dúctil prematura. Partículas e inclusões presentes na matriz de material devido aos processos de formação das ligas metálicas, são locais onde o dano pode se iniciar na forma de microvazios. Com a intensificação da deformação, os vazios já existentes crescem até o ponto onde ocorre a coalescência levando à formação de trincas e à falha dúctil do material, como mostrado na Fig. 2.7 (Chen, 2004).

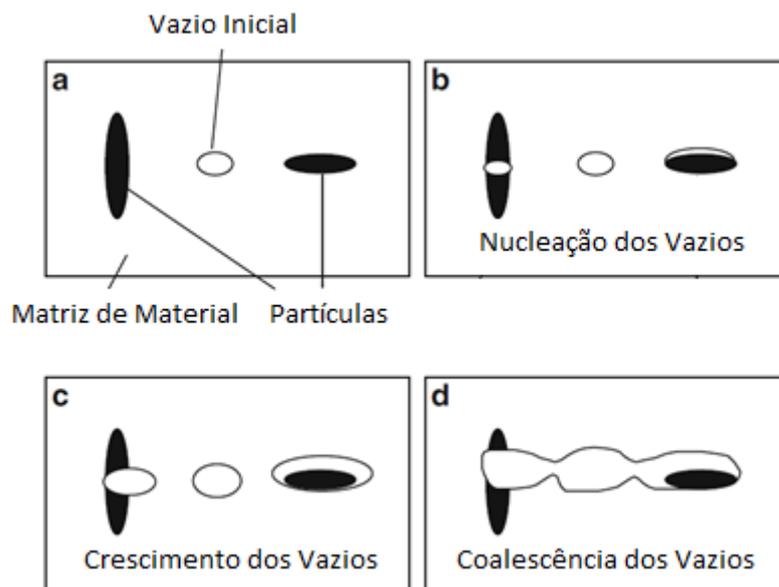


Figura 2.7. Constituição inicial (a), nucleação (b), crescimento (c) e coalescência de microvazios (d) (Chen, 2004).

De acordo com Kachanov (1986), grandes deformações em metais podem introduzir o fenômeno da nucleação, crescimento e a coalescência de microvazios no material. McClintock (1968) e Rice & Tracey (1969) foram pioneiros no estudo da influência da forma dos microvazios na previsão da falha dúctil do material. Evidências experimentais

mostram que a nucleação e o crescimento dos microvazios causam redução na rigidez do material e podem ser fortemente relacionados com o nível de triaxialidade do estado de tensão o qual o material está submetido. (McClintock, 1968; Rice & Tracey, 1969; Hancock & Mackenzie, 1976).

2.2.1 Modelo de Gurson (1977)

As duas principais metodologias para a modelagem do dano dúctil foram propostas por Gurson (1977), no âmbito da micromecânica de defeitos, e Lemaitre (1985), com a Mecânica do Dano Contínuo.

O modelo original de Gurson introduz uma forte relação entre a deformação plástica e o dano (Chaboche, 2006). Nesta proposição, a degradação do material é representada pela fração volumétrica de vazio, f , obtida a partir da divisão do volume de microvazios, V_{Vazios} , pelo volume representativo, V_{VR} , como mostrado na Eq. 2.20.

$$f = \frac{V_{Vazios}}{V_{VR}}. \quad (2.20)$$

O modelo constitutivo de Gurson descreve a evolução do dano para materiais porosos a partir do crescimento destes microvazios. Este modelo parte da premissa que metais porosos podem ser modelados como uma matriz de material sólido contendo vazios de geometrias simples, como esferas ou cilindros. Na sua formulação original, a matriz sólida de material era governada pelo modelo constitutivo rígido-plástico de von Mises e o aumento ou diminuição de rigidez do material como um todo estava associado apenas ao tamanho dos vazios, entretanto, outros modelos subsequentes consideram os fenômenos de encruamento na matriz sólida (Souza Neto *et al.*, 2008).

Esta formulação, resulta em uma função de escoamento dependente do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras ($J_2(\mathbf{S})$), da parcela hidrostática do tensor tensão (p) e da fração volumétrica de vazios (f). Desta forma, a função de escoamento do modelo de Gurson (1977) para um material poroso é expressa por:

$$\Phi = J_2(\mathbf{S}) - \frac{1}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2, \quad (2.21)$$

onde σ_y é lei de endurecimento do material.

Neste modelo, a variável de dano, f , pode assumir valores entre 0 e 1, onde $f = 0$ representa um material sem defeito e $f = 1$ representa a completa perda de capacidade do material de resistir a carregamentos. Vale notar que para f nulo, a função de escoamento de Gurson (1977) se reduz à função de escoamento de von Mises. Neste caso, o modelo deixa de contabilizar o dano, uma vez que a taxa de evolução desta variável é calculada assumindo-se apenas o crescimento de vazios já existentes no material.

Considerando a plasticidade associativa, Eq. 2.13, tem-se que a lei de fluxo plástico, segundo Gurson, é expressa por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \left[\mathbf{S} + \frac{1}{3} f \sigma_y \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \mathbf{I} \right]. \quad (2.22)$$

Da lei de fluxo, obtém-se a lei de evolução para a deformação plástica equivalente, como se segue:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{3} \left[f \sigma_y \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}}. \quad (2.23)$$

A lei de evolução do dano neste modelo contabiliza apenas a parcela de crescimento dos vazios, dada por:

$$\dot{f} = \dot{f}^G. \quad (2.24)$$

Por fim são postuladas as condições de consistência de Khun-Tucker. Estas condições garantem que ou o estado de tensão se encontra sobre a superfície de escoamento ou dentro do domínio elástico.

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0. \quad (2.25)$$

2.2.2 Crescimento de vazios

O crescimento de vazios é o estágio mais compreendido da falha dúctil. Enquanto a nucleação e a coalescência de vazios podem ocorrer de forma súbita, o crescimento de vazios ocorre de forma relativamente estável, sendo mais fácil de ser observado experimentalmente e modelado (Zhang e Skallerud, 2010).

Os vazios podem ser tipicamente modelados como cilindros, proposto por McClintock (1968), ou esferas perfeitas, proposto por Rice e Tracey (1969). Em ambas abordagens o material é descrito como sendo poroso, com vazios dispersos por uma matriz sólida. Desta forma, a densidade aparente do material poroso é expressa por:

$$\rho = \rho_m v_m, \quad (2.26)$$

onde ρ_m e v_m são, respectivamente, a densidade da matriz sólida e o volume de matriz sólida por unidade de volume aparente. Assim, expressa-se a fração volumétrica de vazios, f , como:

$$f = 1 - v_m. \quad (2.27)$$

Desta forma, é possível expressar a densidade aparente do material em termos de sua fração volumétrica de vazios, como se segue:

$$\rho = \rho_m(1 - f). \quad (2.28)$$

A diferencial temporal da Eq. (2.28) pode ser expressa por:

$$(1 - f)\dot{\rho}_m = \dot{\rho} + \rho_m \dot{f}. \quad (2.29)$$

A partir deste ponto, admite-se a simplificação de que as deformações elásticas são muito menores que as deformações plásticas, e, portanto, desprezíveis. Considera-se também que a matriz de material é plasticamente incompressível (Souza Neto *et al.*,

2008). Assim, para que haja conservação da massa, a densidade da matriz de material deve permanecer constante ao longo do tempo, ou seja:

$$\dot{\rho}_m = 0. \quad (2.30)$$

A Equação 2.29 pode ser reescrita como:

$$\dot{f} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho_m} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}(1 - f). \quad (2.31)$$

Ainda observando o princípio de conservação da massa, é necessário garantir que a evolução da componente volumétrica da deformação, $\dot{\epsilon}_v$, obedeça a seguinte relação:

$$\dot{\epsilon}_v = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (2.32)$$

Assumindo a parcela volumétrica elástica da deformação como desprezível, tem-se:

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^p, \quad (3.33)$$

onde $\dot{\epsilon}_v^p$ é a parcela volumétrica dos tensor das deformações plásticas.

A partir das igualdades apresentadas nas Eqs. (2.32) e (2.33) e da diferencial temporal apresentada na equação (2.31), é possível expressar a lei de evolução para a fração volumétrica de vazios, como se segue:

$$\dot{f} = (1 - f)\dot{\epsilon}_v^p. \quad (2.34)$$

Esta taxa de evolução considera apenas o efeito do crescimento dos vazios e é comumente representada como \dot{f}^G , onde o sobrescrito G indica crescimento (*Growth*). Desta forma a Eq. 2.34 pode ser reescrita, como:

$$\dot{f}^G = (1 - f)\dot{\epsilon}_v^p \quad (2.35)$$

2.2.3 Mecanismos de cisalhamento

Apesar de largamente utilizado, estudos mostram que o modelo de Gurson (1977) apresenta limitações, seja para determinar o local exato da fratura ou para quantificar o dano corretamente em corpos sujeitos a uma larga faixa de triaxialidade (Nahshon & Hutchinson, 2008; Malcher *et al.*, 2009; Reis *et al.*, 2010). Desta forma, autores como Xue (2007) e Nahshon & Hutchinson (2008) propuseram mecanismos de cisalhamento, capazes de contabilizar o dano em regiões de baixa triaxialidade. Estes mecanismos objetivam melhorar a capacidade preditiva dos modelos clássicos originais da micromecânica de defeitos.

A seguir são apresentados dois dos principais mecanismos de corte da literatura.

2.2.3.1 Mecanismo de corte de Xue

O mecanismo proposto por Xue (2007), foi elaborado a partir de relações geométricas de um vazio circular centrado em um volume representativo de matriz de material. Segundo Reis *et al.* (2010), tal mecanismo pode ser incluído no modelo de Gurson (1977) como função da deformação plástica acumulada ($\bar{\epsilon}^p$), da fração volumétrica de vazios (f) e o terceiro invariante do tensor desviador normalizado ($\xi(\mathbf{S})$). A taxa de evolução da fração volumétrica de vazios devido ao cisalhamento de Xue é dada por:

$$\dot{f}_{Xue} = q_1 f^{q_2} g_0(\mathbf{S}) \bar{\epsilon}^p \dot{\bar{\epsilon}}^p, \quad (2.36)$$

onde q_1 e q_2 são parâmetros relacionados com a dimensão desejada, para o caso 2D considera-se $q_1 = 1.69$ e $q_2 = 1/2$, na formulação 3D utiliza-se $q_1 = 1.86$ e $q_2 = 1/3$ (Xue, 2007). Por último, $g_0(\mathbf{S})$ é a chamada “função gatilho”. Ela é responsável por introduzir a dependência do terceiro invariante na lei de evolução do dano proposta por Xue.

No presente trabalho, a função gatilho utilizada foi proposta por Reis *et al.* (2010), como se segue:

$$g_0(\mathcal{S}) = 1 - \xi(\mathcal{S})^2, \quad (2.37)$$

onde o terceiro invariante normalizado é determinado de acordo com a Eq. 2.8.

Em estados de tensão dominados pelo cisalhamento, o valor do terceiro invariante normalizado, ξ , tende a zero, maximizando o valor da função g_0 , que, por sua vez, deixa o modelo mais sensível ao mecanismo de corte. Já em regiões dominadas por estados de tensão puramente trativos ou compressivos, o valor de ξ^2 tende a unidade, tornando o modelo insensível ao mecanismo.

2.2.3.2 Mecanismo de corte de Nahshon & Hutchinson

Também motivado pelo fato do modelo de Gurson não ser capaz de captar a evolução do dano em regiões de baixa triaxialidade, Nahshon & Hutchinson (2008) propuseram que a evolução da porosidade devido ao cisalhamento deve ser calculada como:

$$\dot{f}_{NH} = kf g_0(\mathcal{S}) \frac{\mathcal{S} : \dot{\epsilon}^p}{q}, \quad (2.38)$$

onde o parâmetro k é uma constante do material, q é a tensão equivalente de von Mises e $g_0(\mathcal{S})$ também representa a função gatilho expressa pela Eq. 2.37.

De forma semelhante ao mecanismo proposto por Xue, a contribuição do dano devido ao cisalhamento ocorrerá de forma mais severa nas zonas de baixa triaxialidade e será praticamente nula em regiões de alta triaxialidade.

2.3 MODELO DE GURSON COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO E MECANISMO DE CORTE

A partir dos conceitos matemáticos apresentados neste capítulo, propõe-se uma modificação do modelo elastoplástico baseado no modelo original da micromecânica de defeitos de Gurson (1977), que seja capaz de estimar a degradação do material submetido à carregamentos cíclicos e à diferentes níveis de triaxialidade. Para a capitação dos efeitos

provenientes de carregamentos cíclicos, foi escolhida a lei de endurecimento cinemático de Armstrong & Frederick (1966). Justifica-se tal escolha pelo fato do modelo de Armstrong & Frederick ser capaz de descrever os efeitos de Bauschinger e a estabilização do laço de histerese necessitando da calibração de apenas dois parâmetros (H e b). Para captar o efeito da degradação do material em regiões submetidas ao cisalhamento, optou-se pelo mecanismo de corte de Xue (2007). Apesar de ser considerado conservador quando comparado com dados experimentais (Reis *et al.*, 2010), este mecanismo não depende da calibração de nenhum parâmetro, tornando o modelo mais prático de ser utilizado.

Assim, a função de escoamento para o modelo de Gurson modificado é dada por:

$$\Phi = J_2(\boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_{y_0}}\right) \right] \sigma_{y_0}^2, \quad (2.39)$$

onde $J_2(\boldsymbol{\eta})$ é o segundo invariante do tensor relativo, f é a fração volumétrica de vazios, p é a componente volumétrica do tensor tensão e σ_{y_0} é a tensão de escoamento inicial.

Considerando a plasticidade associativa, o vetor de fluxo é dado por:

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{3} f \sigma_{y_0} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_{y_0}}\right) \mathbf{I}. \quad (2.40)$$

A taxa de evolução do tensor das deformações plásticas é dada pela lei de fluxo plástico, expressa como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left[\boldsymbol{\eta} + \frac{1}{3} f \sigma_{y_0} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_{y_0}}\right) \mathbf{I} \right]. \quad (2.41)$$

A lei de evolução da deformação plástica também pode ser decomposta em duas parcelas, uma desviadora ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p$) e outra volumétrica ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p$), como mostrado na Eq. 2.42.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p + \frac{1}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p \mathbf{I}, \quad (2.42)$$

onde:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p = \dot{\gamma} \boldsymbol{\eta}, \quad (2.43)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\gamma} f \sigma_{y_0} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_{y_0}}\right). \quad (2.44)$$

As leis de evolução para a deformação plástica equivalente ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$), tensor cinemático de Armstrong-Frederick ($\dot{\boldsymbol{\beta}}$) e fração volumétrica de vazios com mecanismo de corte de Xue (\dot{f}), são dadas pelas Eqs. 2.45, 2.46 e 2.47, respectivamente.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\varepsilon}^p} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{3} \left[f \sigma_{y_0} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_{y_0}}\right) \right]^2 \right\}}, \quad (2.45)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H \boldsymbol{\varepsilon}^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p b \boldsymbol{\beta}, \quad (2.46)$$

$$\dot{f} = \dot{f}^G + \dot{f}_{Xue} = (1 - f) \dot{\varepsilon}_v^p + q_1 f^{q_2} g_0(\mathbf{S}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (2.47)$$

Por último, são postuladas as condições de Kuhn-Tucker:

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0. \quad (2.48)$$

O quadro 1 mostra o modelo modificado de Gurson de forma resumida.

Quadro 1. Modelo matemático de Gurson modificado.

MODELO MATEMÁTICO
Gurson + Armstrong-Frederick + Xue

i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ii) Lei Elástica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

iii) Função de escoamento:

$$\Phi = J_2(\boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_{y_0}}\right) \right] \sigma_{y_0}^2$$

iv) Lei de fluxo plástico:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \left[\boldsymbol{\eta} + \frac{1}{3} f \sigma_y \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_{y_0}}\right) \mathbf{I} \right]$$

v) Atualização das outras variáveis internas:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{3} \left[f \sigma_y \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p b \boldsymbol{\beta},$$

$$\dot{f} = \dot{f}^G + \dot{f}_{Xue} = (1 - f) \dot{\gamma} f \sigma_{y_0} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_{y_0}}\right) + q_1 f^{q_2} g_0(\mathbf{S}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

onde:

$$g_0(\mathbf{S}) = 1 - \xi(\mathbf{S})^2$$

vi) Condição de Kuhn-Tucker

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0$$

3 MODELO NUMÉRICO

3.1 INTRODUÇÃO

Para alguns modelos elastoplásticos com comportamento dependente da trajetória, a solução do conjunto de equações constitutivas requer a formulação de um algoritmo de integração numérica, já que as soluções analíticas para esse tipo de problema geralmente não são conhecidas. Desta forma, estabelece-se um pseudo intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ onde o estado n é conhecido e deseja-se encontrar o estado $n + 1$, dado um incremento $\Delta \epsilon$ conhecido. A discretização das equações constitutivas no pseudo-tempo é feita de acordo com o método de Euler implícito (Souza Neto *et al.*, 2008).

O procedimento utilizado para a solução deste tipo de problema é a chamada metodologia da decomposição do operador, que consiste em dividir o problema em duas partes: um preditor elástico, onde o incremento de deformação é assumido como completamente elástico e um corretor plástico, no qual um sistema de equações residuais formado pela lei elástica, função de escoamento e equações de evolução de cada variável interna é resolvido, tomando os valores obtidos no preditor elástico como estimativas iniciais, formando o chamado “estado tentativa”, como mostrado na Fig. 3.1. O corretor plástico só é utilizado caso a função de escoamento seja violada. O método numérico para a solução de sistemas não lineares de Newton-Raphson é utilizado para solucionar sistema de equações residuais presentes no corretor plástico. Este método numérico é preferível por apresentar uma taxa de convergência quadrática para a solução.

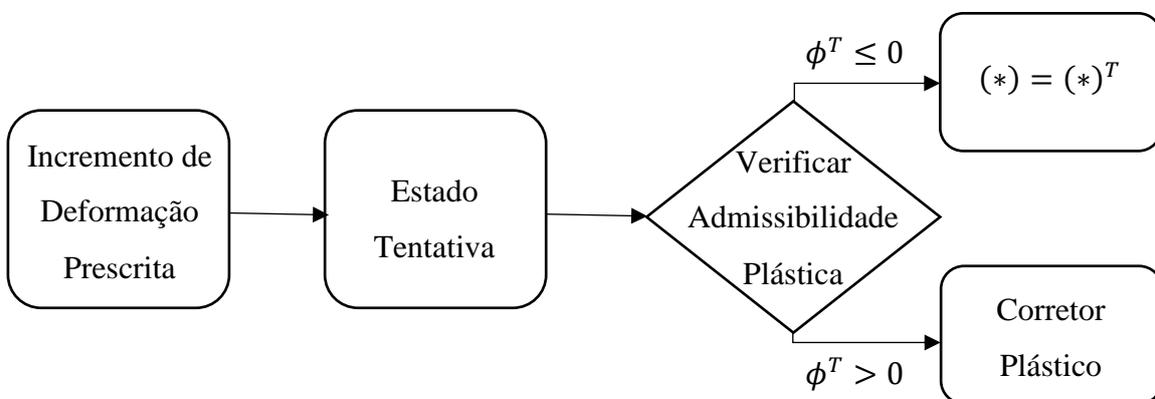


Figura 3.1. Decomposição do operador.

3.2 MODELO NUMÉRICO DE GURSON MODIFICADO

Para o modelo de Gurson modificado, descrito na seção 2.3, o estado tentativa é dado por:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}, \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^T &= \boldsymbol{\beta}_n, \\
 f_{n+1}^T &= f_n, & \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$ é o tensor das deformações elásticas, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T$ é o tensor das tensões, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$ é o tensor das deformações plásticas, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^T$ é o tensor das tensões cinemáticas, f_{n+1}^T é a fração volumétrica de vazios, e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT}$ é a deformação plástica equivalente, todos no estado tentativa. Como este passo foi completamente elástico, admite-se que não houve alteração no tensor das deformações plásticas ($\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$), no tensor das tensões cinemáticas ($\boldsymbol{\beta}_{n+1}^T$), na fração volumétrica de vazios (f_{n+1}^T) e na deformação plástica equivalente ($\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT}$).

Por se tratar de um modelo com plasticidade cíclica, o tensor relativo tentativa precisa ser definido:

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^T = \boldsymbol{S}_{n+1}^T - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^T. \tag{3.2}$$

O tensor das tensões tentativa, pode ser decomposto em uma parte desviadora e outra volumétrica, como se segue:

$$\boldsymbol{S}_{n+1}^T = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d n+1}^{eT}, \tag{3.3}$$

$$p_{n+1}^T = K \boldsymbol{\varepsilon}_v^{eT}, \tag{3.4}$$

onde \boldsymbol{S}_{n+1}^T e p_{n+1}^T representam, respectivamente, as componentes desviadora e volumétrica do tensor tensão tentativa. As constantes G e K representam as constantes de

Lamé e são denominadas de módulo de cisalhamento e módulo volumétrico, respectivamente. Os termos $\boldsymbol{\varepsilon}_d^{eT}$ e ε_v^{eT} são, respectivamente, a parte desviadora e volumétrica do tensor das deformações elásticas tentativa.

O próximo passo é checar a admissibilidade plástica do incremento dado. Neste procedimento é necessário avaliar a função de escoamento no estado tentativa (Φ_{n+1}^T), ou seja, verificar se o material continua no regime elástico. Caso o passo realmente seja elástico ($\Phi_{n+1}^T \leq 0$), então o estado tentativa passa a ser o estado real, $(*)_{n+1}^T = (*)_{n+1}$. Caso contrário ($\Phi_{n+1}^T > 0$), sabe-se que o incremento de deformação não foi completamente elástico e é necessário aplicar o corretor plástico para corrigir o estado tentativa. A função de escoamento tentativa é dada pela Eq. 3.5.

$$\phi_{n+1}^T = J_2(\boldsymbol{\eta}_{n+1}^T) - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^{T^2} - 2f_{n+1}^T \cosh\left(\frac{3p_{n+1}^T}{2\sigma_{y_0}}\right) \right] \sigma_{y_0}^2. \quad (3.5)$$

A correção do estado tentativa é feita removendo-se a parcela plástica do incremento de deformação dado:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (3.6)$$

onde o incremento de deformação plástica pode ser obtido pela lei de fluxo plástico, como sendo:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}, \quad (3.7)$$

sendo $\Delta\gamma$ o multiplicador plástico e \mathbf{N}_{n+1} o vetor de fluxo. Desta forma, a Eq. 3.6 pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}. \quad (3.8)$$

A parcela de deformação subtraída pelo termo $-\Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}$ na Eq. 3.8 deve ser adicionada na lei de atualização da deformação plástica, que pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p^T} + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}. \quad (3.9)$$

Para o modelo em estudo, tem-se:

$$\mathbf{N}_{n+1} = \left[\boldsymbol{\eta}_{n+1} + \frac{1}{3} f_{n+1} \sigma_{y_0} \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_{y_0}}\right) \mathbf{I} \right], \quad (3.10)$$

O vetor de fluxo dado pela Eq. (3.10) pode ser escrito como a soma de uma parcela desviadora e uma hidrostática, desta forma, obtém-se:

$$\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{d\ n+1} + N_{v\ n+1} \mathbf{I}, \quad (3.11)$$

onde:

$$\mathbf{N}_{d\ n+1} = \boldsymbol{\eta}_{n+1} \quad (3.12)$$

$$N_{v\ n+1} = \frac{1}{3} f_{n+1} \sigma_{y_0} \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_{y_0}}\right). \quad (3.13)$$

A Equação 3.8 pode ser reescrita em termos do campo de tensões como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{D}^e: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e^T} - \Delta\gamma \mathbb{D}^e: \mathbf{N}_{n+1}. \quad (3.14)$$

Reescrevendo o vetor de fluxo na forma obtida na Eq. 3.10, o campo de tensão pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_{d\ n+1} - K\Delta\gamma N_{v\ n+1} \mathbf{I}. \quad (3.15)$$

Decompondo os tensores tensão real e tentativa nas suas parcelas hidrostáticas e desviadoras, e organizando os termos da equação conforme a sua natureza, determina-se as equações de evolução para cada parcela do tensor tensão de acordo com as Eqs 3.16 e 3.17:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^T - 2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{d\,n+1}, \quad (3.16)$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{e^T} - K\Delta\gamma N_{v\,n+1}. \quad (3.17)$$

Para considerar o efeito do endurecimento cinemático, é necessário considerar a equação de atualização do tensor das tensões cinemáticas, a qual é dada pela lei de Armstrong & Frederick e pode ser expressa por:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^T + \Delta\boldsymbol{\beta}, \quad (3.18)$$

$$\Delta\boldsymbol{\beta} = \frac{2}{3}H\Delta\gamma(\mathbf{N}_{d\,n+1} + N_{v\,n+1}\mathbf{I}) - b\bar{\varepsilon}_{n+1}^p\boldsymbol{\beta}_{n+1}, \quad (3.19)$$

onde o termo $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ representa a deformação plástica equivalente real e pode ser calculada como mostrado nas Eqs. 3.20 e 3.21.

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\bar{\varepsilon}^p \quad (3.20)$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}^p = \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[\sigma_{y_0} f_{n+1} \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_{y_0}} \right) \right]^2 \right\}} \quad (3.21)$$

A atualização da fração volumétrica de vazios é dada pelas Eqs. 3.22 a 3.24.

$$f_{n+1} = f_{n+1}^T + \Delta f^G + \Delta f_{Xue}, \quad (3.22)$$

$$\Delta f^G = (1 - f_{n+1})\Delta\gamma f_{n+1} \sigma_{y_0} \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_{y_0}} \right), \quad (3.23)$$

$$\Delta f_{Xue} = g_{0\,n+1} q_1 f_{n+1}^{q_2} \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \Delta\bar{\varepsilon}^p, \quad (3.24)$$

onde a função gatilho ($g_{0\,n+1}$) pode ser obtida em termos da razão de triaxialidade normalizada, de acordo com a Eq. 3.25.

$$g_{0\,n+1} = 1 - \xi_{n+1}^2 (\mathbf{S}_{n+1}). \quad (3.25)$$

Finalmente, a tensão de escoamento para o estado real é expressa por:

$$\Phi_{n+1} = J_2(\boldsymbol{\eta}_{n+1}) - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_{y_0}}\right) \right] \sigma_{y_0}^2. \quad (3.26)$$

Verifica-se, ao se analisar as Eqs. 3.16, 3.17, 3.18, 3.20 e 3.22, que para se determinar o estado real do material, há a necessidade de se resolver um sistema não-linear de equações, onde as variáveis são \mathbf{S}_{n+1} , p_{n+1} , f_{n+1} , $\Delta\gamma$ e $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$.

O modelo numérico desenvolvido nesta seção é mostrado de forma resumida no quadro 2.

Quadro 2. Modelo numérico de Gurson modificado.

MODELO NUMÉRICO
Gurson + Armstrong-Frederick + Xue

i) Determinar o estado tentativa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} & \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1}^T &= \boldsymbol{\beta}_n & f_{n+1}^T &= f_n & \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \end{aligned}$$

ii) Verificar a admissibilidade plástica:

$$\phi_{n+1}^T = J_2(\boldsymbol{\eta}_{n+1}^T) - \frac{1}{3} \sigma_{y_0}^2 \left[1 + f_{n+1}^{T^2} - 2f_{n+1}^T \cosh\left(\frac{3p_{n+1}^T}{2\sigma_{y_0}}\right) \right]$$

Se $\phi_{n+1}^T \leq 0$, então $(*)_{n+1}^T = (*)_{n+1}$

Caso contrário, utilizar o corretor plástico.

iii) Corretor plástico: Resolver o sistema para \mathbf{S}_{n+1} , p_{n+1} , f_{n+1} , $\Delta\gamma$ e $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$:

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^T - 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_{d\ n+1} \\ p_{n+1} = p_{n+1}^{eT} - K\Delta\gamma \mathbf{N}_{v\ n+1} \\ f_{n+1} = f_{n+1}^T + \Delta f^G + \Delta f_{Xue} \\ \Phi_{n+1} = J_2(\boldsymbol{\eta}_{n+1}) - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_{y_0}}\right) \right] \sigma_{y_0}^2 \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^T + \Delta \boldsymbol{\beta} \end{array} \right.$$

onde:

$$\Delta \boldsymbol{\beta} = \frac{2}{3} H \Delta \gamma (\mathbf{N}_{d\ n+1} + \mathbf{N}_{v\ n+1} \mathbf{I}) - b \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \boldsymbol{\beta}_{n+1}$$

$$\Delta f^G = (1 - f_{n+1}) \Delta \gamma f_{n+1} \sigma_{y_0} \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_{y_0}}\right)$$

$$\Delta f_{Xue} = g_{0\ n+1} q_1 f_{n+1}^{q_2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

$$g_{0\ n+1} = 1 - \xi_{n+1}^2 (\mathbf{S}_{n+1})$$

iv) Atualizar outras variáveis:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta \gamma \mathbf{N}_{n+1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT} + \Delta \gamma \mathbf{N}_{n+1}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[\sigma_{y_0} f_{n+1} \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_{y_0}}\right) \right]^2 \right\}}$$

3.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Para a aplicação do método de Newton-Raphson, o sistema de equações que constituem o corretor plástico deve ser escrito na forma de equações residuais, conforme a Eq. 3.27.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\mathbf{S}_{n+1}} &= \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}^T + 2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{d\,n+1} \\
 R_{p_{n+1}} &= p_{n+1} - p_{n+1}^e + K\Delta\gamma N_{v\,n+1} \\
 R_{f_{n+1}} &= f_{n+1} - f_{n+1}^T - \Delta f^G - \Delta f_{Xue} \\
 R_{\Delta\gamma} &= \Phi_{n+1} - J_2(\boldsymbol{\eta}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_{y_0}}\right) \right] \sigma_{y_0}^2 \\
 \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^T - \Delta\boldsymbol{\beta}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Em seguida, o sistema de equações deve ser escrito na sua forma linearizada, como se segue:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\
 \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\
 \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\
 \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}}
 \end{bmatrix}^k
 \begin{bmatrix}
 \delta \mathbf{S}_{n+1} \\
 \delta p_{n+1} \\
 \delta f_{n+1} \\
 \delta \Delta\gamma \\
 \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}
 \end{bmatrix}^{k+1}
 = -
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{R}_{\mathbf{S}_{n+1}} \\
 R_{p_{n+1}} \\
 R_{f_{n+1}} \\
 R_{\Delta\gamma} \\
 \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}
 \end{bmatrix}^k \tag{3.28}$$

Para a primeira interação, $k = 0$, os valores de cada variável são dados pelo estado tentativa. A cada interação o valor das variáveis é atualizado adicionando-se o incremento $\delta(*)_{n+1}$ calculado. Este procedimento é repetido até que o critério de parada definido pela Eq. 3.29 seja atendido, de forma a garantir que o erro numérico seja menor que a tolerância pré-estabelecida. O Quadro 3 mostra de forma resumida a aplicação do método de Newton-Raphson.

$$erro = \frac{\Phi_{n+1}}{\sigma_{y_0}} \leq tolerância \tag{3.29}$$

Quadro 3. Método de Newton-Raphson.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON
Gurson + Armstrong-Frederick + Xue

i) Definir o estado inicial, $k = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1}^{(0)} &= \mathbf{S}_{n+1}^T & p_{n+1}^{(0)} &= p_{n+1}^T & f_{n+1}^{(0)} &= f_{n+1}^T \\ \Delta\gamma^{(0)} &= 0 & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(0)} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^T \end{aligned}$$

ii) Resolver o sistema linearizado para $\delta\mathbf{S}_{n+1}$, δp_{n+1} , δf_{n+1} , $\delta\Delta\gamma$, e $\delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\mathbf{S}_{n+1} \\ \delta p_{n+1} \\ \delta f_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{S_{n+1}} \\ R_{p_{n+1}} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^k$$

iii) Verificar convergência:

$$\text{Se } \frac{\Phi_{n+1}}{\sigma_{y_0}} \leq \text{tolerância, fim}$$

Caso contrário, repetir o passo *ii*.

As derivadas utilizadas para a linearização do sistema de equações não lineares (Eq. 3.28) são mostradas no ANEXO A deste trabalho.

4 ANÁLISE VIA ELEMENTOS FINITOS.

Esta etapa do trabalho consiste na realização de simulações numéricas que objetivam a determinação dos níveis iniciais de degradação dos corpos de prova e os históricos do tensor das deformações, após a aplicação de diferentes níveis de tensão no mesmo. As simulações foram realizadas através do programa comercial de elementos finitos *Abaqus* na sua versão 6.14, via rotina escrita em Python. A análise pelo método de elementos finitos é construída de forma a reproduzir as condições observadas durante o ensaio de fadiga por *fretting* realizados em liga de alumínio AA7050 por Sandoval (2016). Procura-se também avaliar a influência do refinamento da malha de elementos finitos na predição dos campos de tensão e deformação gerados pelas forças de contato. Assim, este capítulo foi dividido em três seções. Na primeira são determinadas as propriedades mecânicas utilizadas para a liga de alumínio AA7050, na segunda seção são apresentados os ensaios de *fretting* realizados por Sandoval (2016) e, por último, apresenta-se a análise por elementos finitos que resulta na determinação dos históricos dos tensores deformação e nos níveis de degradações iniciais.

4.1 PROPRIEDADES DO MATERIAL

As propriedades da liga de alumínio AA7050 foram obtidas através de ensaios mecânicos realizados no Laboratório de Ensaios Mecânicos da Universidade de Brasília. O módulo de elasticidade (E), coeficiente de Poisson (ν), e limite de escoamento inicial (σ_{y_0}) foram estimados a partir de ensaios monotônicos conduzidos por Ashiuchi (2009) e a curva tensão-deformação cíclica foi obtida por Fabara (2016). As constantes utilizadas na lei de endurecimento cinemático de Armstrong & Frederick (H e b) foram calculadas através do método de identificação de parâmetros a partir da curva tensão-deformação cíclica. A composição química desta liga estipulada pela norma ASM A1-233, bem como as propriedades obtidas experimentalmente são mostradas nas Tabs. 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1. Composição química da liga de AA7050 em percentual de massa (ASM A1-233).

Zn	Ti	Mg	Cu	Zr	Fe	Mn	Cr	Si
5,70-6,70	0,06	1,90-2,60	2,00-2,60	0,08-0,15	0,15	0,10	0,04	0,12

Tabela 4.2. Propriedades mecânicas da liga AA7050 (Ashiuchi, 2009; Fabara, 2016).

E [GPa]	ν	σ_{y0} [MPa]	H [MPa]	b
73,4	0,33	426	2738.9	25.37

4.2 ENSAIOS DE FADIGA POR FRETTING

Nestes ensaios utiliza-se um corpo de prova plano e duas sapatas com superfícies cilíndricas. No primeiro estágio do experimento, o corpo de prova é submetido a uma carga de tração fixa, F_m . Em seguida, aciona-se o atuador das sapatas fazendo com que estas entrem em contato com o corpo de prova mediante a aplicação de uma carga, P . O último estágio deste ensaio consiste em aplicar com uma amplitude controlada, F_a , até que se observe a ruptura do corpo de prova. Desta forma, o número de ciclos observados até este ponto define a vida à fadiga por *fretting* observada experimentalmente. O aparato experimental utilizado é mostrado na Fig. 4.1.

Para este conjunto de ensaios serão aplicados dois níveis diferentes de força normal nas sapatas, P_1 e P_2 , bem como duas amplitudes de tração distintas, F_{a_1} e F_{a_2} , totalizando quatro condições de carregamento diferentes. Os níveis de pressão de contato foram definidos de forma a gerar tensões que excedessem o limite de escoamento do material. Desta forma, definiu-se que o atuador da sapata deveria exercer forças de 11,38 kN e 17,35 kN. A aplicação desta força gera um dano inicial no corpo de prova semelhante ao que é observado nos cabos condutores devido ao aperto do grampo. A carga de tração média para todos os ensaios foi fixada em 30,69 kN e as amplitudes F_{a_1} e F_{a_2} valem, respectivamente, 7,67 kN e 9,21 kN. Neste conjunto de testes experimentais, foram realizados dois ensaios para cada condição de carregamento.

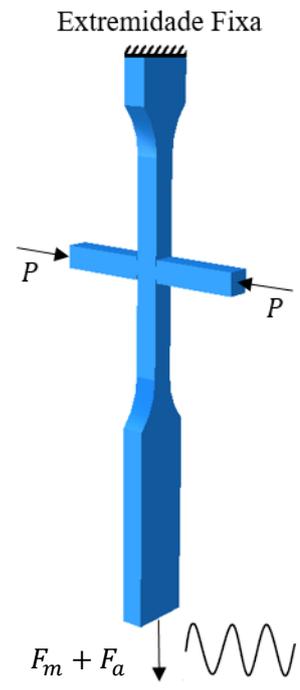


Figura 4.1. Aparato experimental utilizado nos ensaios de *fretting*.

As vidas observadas experimentalmente são apresentadas na Tab. 4.3, onde é possível notar a influência do aperto das sapatas na vida do corpo de prova. Observa-se que para a amplitude $F_{a_1} = 7,67 \text{ kN}$, a aplicação de forças maiores na sapata gera uma pequena redução na vida à fadiga medida de 8,8 %. Este comportamento não é observado para os ensaios com a amplitude $F_{a_2} = 9,21 \text{ kN}$, nos quais as vidas medidas não variam de forma significativa para as diferentes cargas de aperto na sapata. Também nota-se que o aumento da carga alternada de $7,67 \text{ kN}$ para $9,21 \text{ kN}$ gera reduções maiores nas vidas observadas.

Tabela 4.3. Vidas medidas experimentalmente considerando uma carga de tração média de $30,69 \text{ kN}$.

Condição de Carregamento	$F_{a_1} = 7,67 \text{ kN}$		$F_{a_2} = 9,21 \text{ kN}$	
	$P_1 = 11,38 \text{ kN}$	$P_2 = 17,35 \text{ kN}$	$P_1 = 11,38 \text{ kN}$	$P_2 = 17,35 \text{ kN}$
Ensaio 1	134852	103991	87795	92496
Ensaio 2	108636	118024	90148	86876
Média	121744	111007	88971	89686

4.3 ANÁLISE PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Para a realização da análise desta etapa numérica, o conjunto formado pela sapata e o corpo de prova foi modelado como um problema de contato do tipo arco de círculo-plano 2-D, onde o raio e a altura da sapata, bem como o comprimento e largura do corpo de prova foram como mostrado na Fig. 4.2. Segundo Vásquez *et al.* (2015), os modelos 2-D para este tipo de problema conseguem prever resultados similares aos modelos tridimensionais, contudo demandam um custo computacional muito menor. Ainda visando a redução do custo computacional, modelou-se apenas a metade do problema, já que este é simétrico ao longo do eixo X. Nesta análise utilizou-se o modelo de Gurson original já presente no programa comercial de elementos finitos *Abaqus*. O nível de porosidade inicial adotado foi de $f_0 = 0.01$.

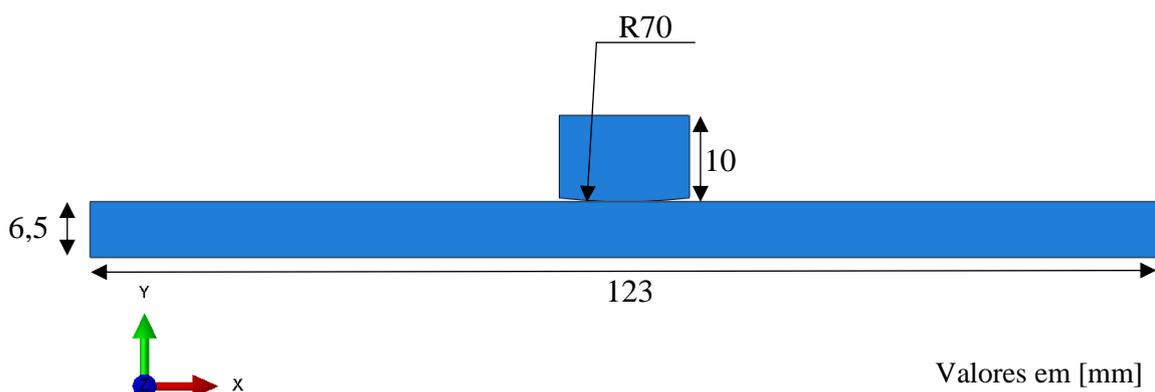


Figura 4.2. Geometria utilizada nas simulações numéricas.

As simulações numéricas foram divididas em três etapas, onde cada etapa constitui um passo (*step*) do modelo. No primeiro passo, o corpo de prova é tracionado até a força média estipulada, F_m . No segundo passo é aplicada a pressão da sapata, P e no último passo são aplicados cinco ciclos com amplitude F_a . A aplicação dos cinco ciclos é necessária para garantir a estabilização do laço de histerese formado devido a aplicação das cargas alternadas repetitivas. Os valores das forças axiais aplicadas nas análises numéricas precisam ser corrigidos, já que apenas metade do problema está sendo modelado. Na Figura 4.3 é possível observar como estão variando os carregamentos conforme o avanço do tempo de simulação. Os instantes $T_1 = 2$ e $T_2 = 7$ correspondem

ao final do aperto da sapata e final do quinto ciclo respectivamente. Na Tabela 4.4 são apresentadas as forças utilizadas em cada simulação.

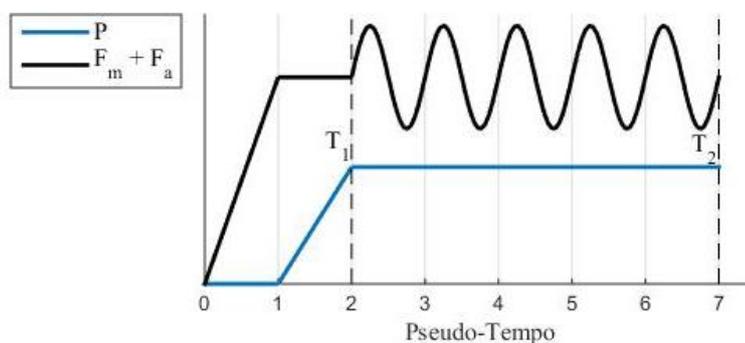


Figura 4.3: Histórico de carregamentos.

Tabela 4.4. Condições de carregamento para simulação 2-D.

Forças Aplicadas:	P [kN]	F_m [kN]	F_a [kN]
Simulação 1	11,38	30,69	7,67
Simulação 2	17,35	30,69	7,67
Simulação 3	11,38	30,69	9,21
Simulação 4	17,36	30,69	9,21

Todos os carregamentos descritos foram introduzidos no programa de elementos finitos como forças concentradas aplicadas em pontos de referências, RP1 e RP2. Estes pontos, por sua vez, estão conectados às superfícies que serão submetidas aos carregamentos por meio de uma restrição chamada “*coupling*”. Essa restrição permite que as forças concentradas e as condições de contorno aplicadas nos pontos de referência sejam distribuídas de forma uniforme por toda a superfície selecionada. As condições de contorno foram inseridas no modelo levando-se em conta a fixação corpo de prova e sapata e a simetria apresentada pelo problema. Na superfície superior da sapata foi aplicada uma condição de deslocamento nulo para translação na direção X e para rotação em torno do eixo Z. Na Figura 4.4 são mostrados os pontos de referência para a aplicação das cargas e as condições de contorno adotadas.

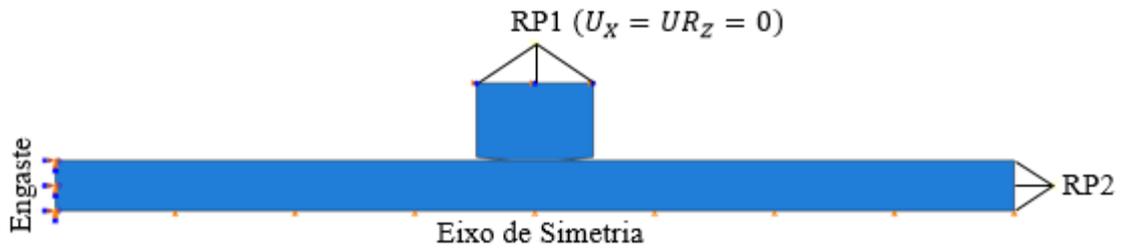


Figura 4.4: Pontos de referência e superfícies para aplicação dos carregamentos.

O contato entre a sapata e o corpo de prova foi definido usando o algoritmo superfície-para-superfície presente no programa *Abaqus*. A face circular da sapata foi definida como mestra e a face superior do corpo de prova foi definida como escrava. Por se tratar de um modelo que pretende replicar os efeitos observados em um ensaio de *fretting*, é necessário considerar as forças tangenciais na interface de contato, sendo assim, a formulação de Lagrange foi utilizada para calcular o atrito entre as partes. O coeficiente de atrito foi definido como 0,6, de acordo com o trabalho de Sadoval (2016).

A malha de elementos finitos é constituída de elementos bidimensionais, com quatro nós, integração reduzida (CPE4R) e uma espessura associada de 13 mm, valor este que corresponde a espessura do corpo de prova ensaiado. Como as tensões geradas pelas forças de contato se concentram em uma pequena área do corpo de prova, foi admitida a hipótese de estado plano de deformações. Na região de contato, a malha foi construída de forma estruturada, enquanto nas demais regiões foi permitido o uso de elementos triangulares para diminuir o nível de discretização fora da área de interesse. Na região de contato foram testados quatro tamanhos diferentes de elemento: 0.05 mm, 0.025 mm, 0.01mm e 0.005 mm. Elementos menores que 0.005 mm foram evitados pois esse tamanho já se assemelha com a dimensão dos grãos encontrados na liga AA7050, que medem entre 0.004 mm e 0.007 mm (Rossino, 2008).

Para o estudo de convergência da malha foram utilizados os valores das deformações plásticas equivalentes (Fig. 4.6) e das cargas normais (Fig 4.7) e tangenciais (Fig. 4.8) de contato lidas ao longo de um caminho na superfície de contato do corpo de prova como mostrado na Fig. 4.5.

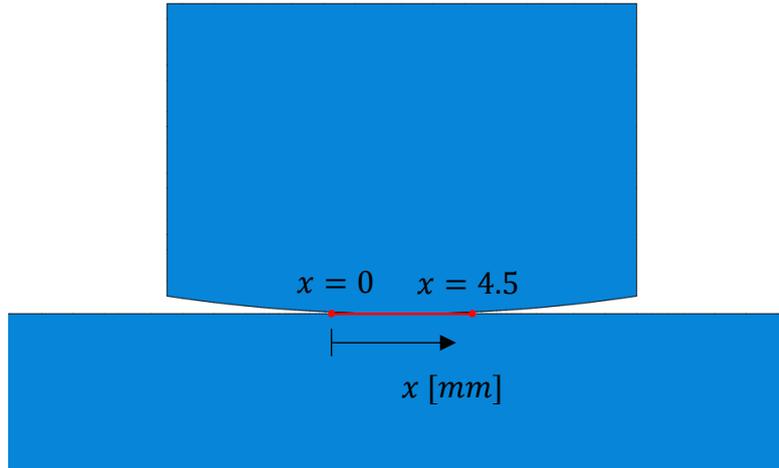


Figura 4.5. Caminho definido para tomada de resultados e análise da malha de elementos finitos.

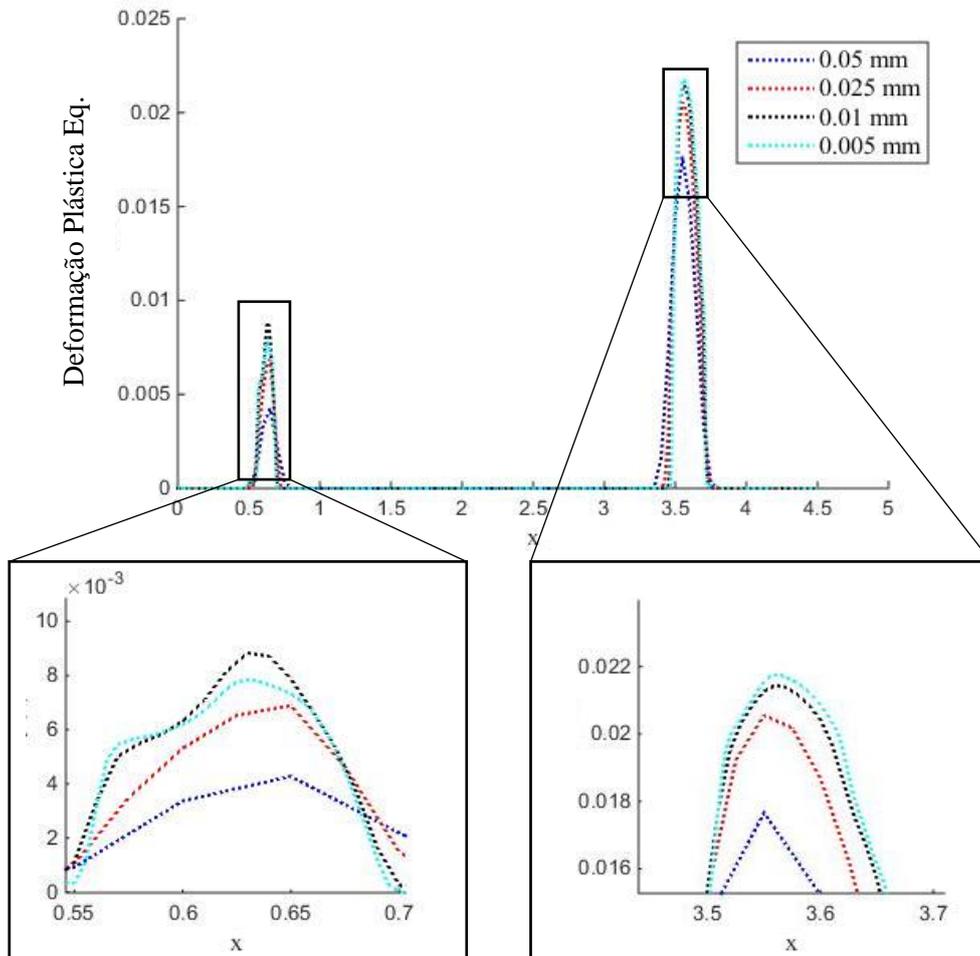


Figura 4.6. Deformações plásticas equivalentes.

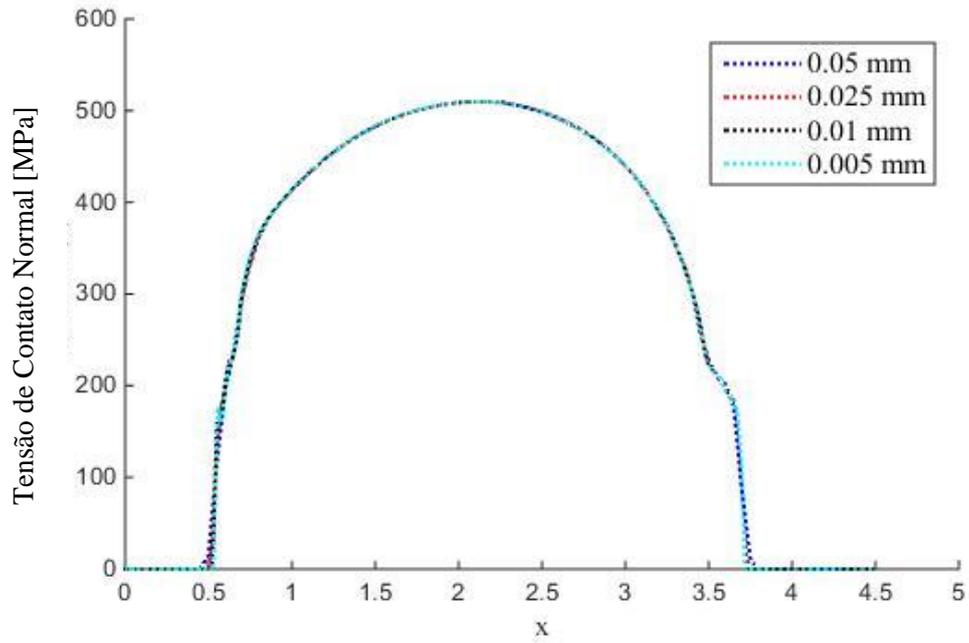


Figura 4.7: Carga normal de contato.

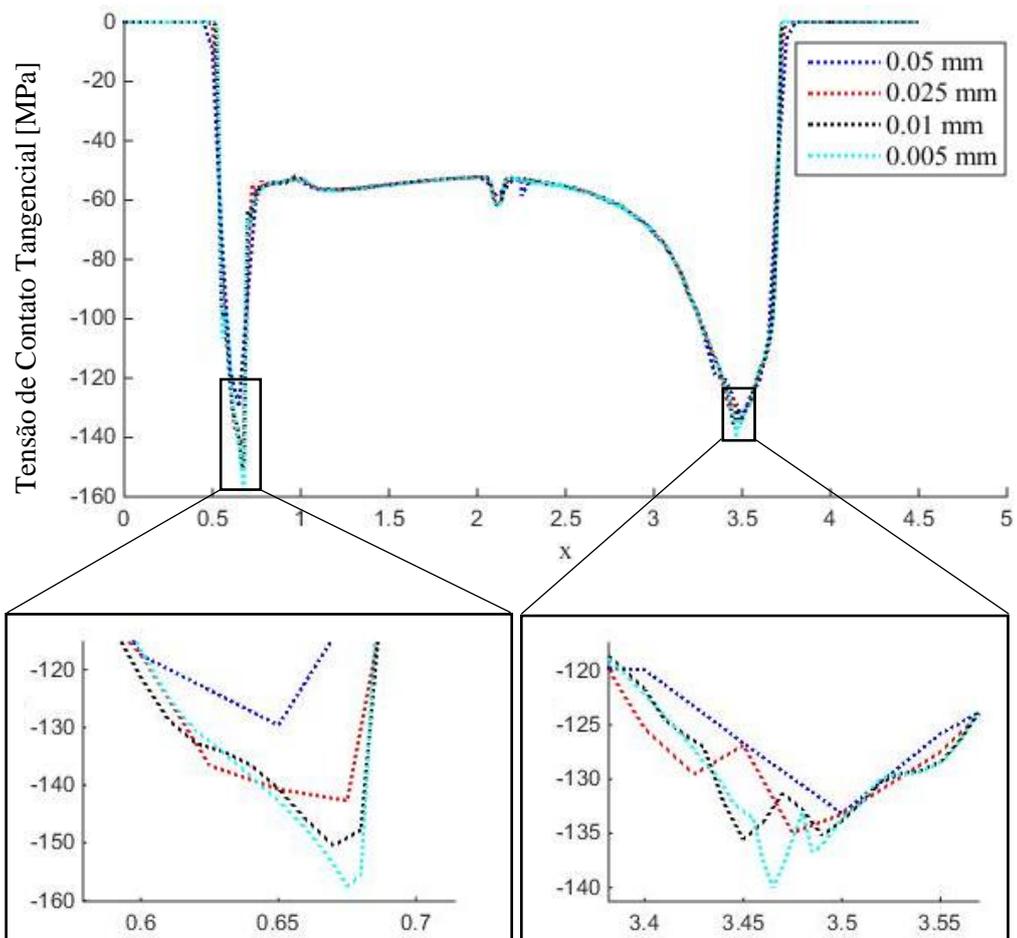


Figura 4.8. Carga tangencial de contato.

Observa-se que cargas cisalhantes distribuídas pela superfície do corpo de prova são fortemente influenciadas pelo nível de refinamento da malha, registrando uma diferença de 17.2% entre os valores lidos com os elementos de 0.05 mm e 0.005 mm. Esta diferença reflete nas deformações plásticas equivalentes, que chegam a apresentar uma diferença de 18.8% para os tamanhos de elementos considerados. Já para as cargas normais de contato, os valores lidos são virtualmente idênticos para todos os níveis de refinamento. Sendo assim, é possível concluir que a malha utilizada tem um papel fundamental na determinação dos campos de tensão e deformação, principalmente nas extremidades da superfície de contato.

Após a análise de convergência, optou-se por utilizar os elementos de 0.01 mm, pois eles geram resultados próximos aos obtidos com os elementos de 0.005 mm com um tempo de processamento 73 % menor, como mostrado na Tab. 4.4. Nesta análise utilizou-se uma estação de trabalho do Laboratório de Mecânica Computacional da Universidade de Brasília. A estação de trabalho é equipada com dois processadores físicos e de 32 núcleos de processamento. Durante as simulações a unidade de processamento gráfico *NVIDIA Quadro K4200* também foi habilitada.

Para o nível de refinamento escolhido, foram utilizados 287267 elementos finitos e 287513 nós no conjunto formado pelo corpo de prova e sapata, dos quais 70% se encontram na área de contato.

Tabela 4.5. Tempos de simulação para as malhas analisadas.

Tamanho do elemento finito [mm]	0.05	0.025	0.01	0.005
Deformação Plástica Eq.	0.0177	0.0206	0.0214	0.0218
Carga Normal [MPa]	510	510	510	510
Carga Tangencial [MPa]	-133	-142	-150	-157
Tempo de Processamento	3h 50min	8h 35m	43h 30m	166h

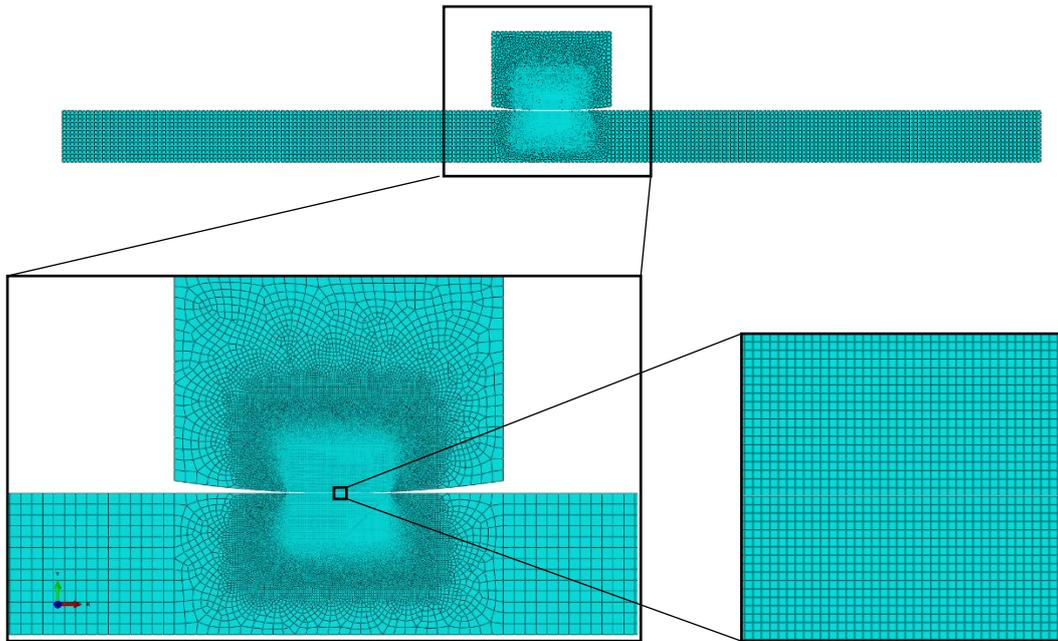


Figura 4.9: Malha de elementos finitos.

4.3.1 Determinação dos históricos do tensor deformação no ponto crítico

Desta forma, as condições de contorno descritas na Tab. 4.3 são aplicadas e os resultados numéricos para a tensão equivalente de von Mises e a deformação plástica equivalente nos instantes $T_1 = 2$ e $T_2 = 7$ são mostrados nas Figs. 4.9 a 4.12. Nesta análise, adotou-se a deformação plástica equivalente como parâmetro para se definir o ponto crítico do corpo de prova, do qual é extraído o histórico do tensor deformação durante o último ciclo ($T = 6$ a $T = 7$). Este histórico é usado como entrada para a estimativa de vida a fadiga por *fretting*, através do modelo numérico de Gurson modificado, descrito no Capítulo 3. Os históricos do tensor deformação obtidos para cada condição de carregamento são mostrados nas Tabs. 4.6 a 4.9.

Nas Figuras 4.10 e 4.11 são mostrados os campos de tensão e deformação plástica equivalente gerados pela aplicação dos níveis de pressão P aplicados. Percebe-se que o maior nível de pressão gerou uma plastificação mais intensa e sobre uma área maior no corpo de prova. Este efeito também é percebido no instante T_2 (Fig. 4.13), onde, para as simulações 2 e 4, percebe-se uma região plastificada maior e valores mais elevados de deformação plástica equivalente máxima.

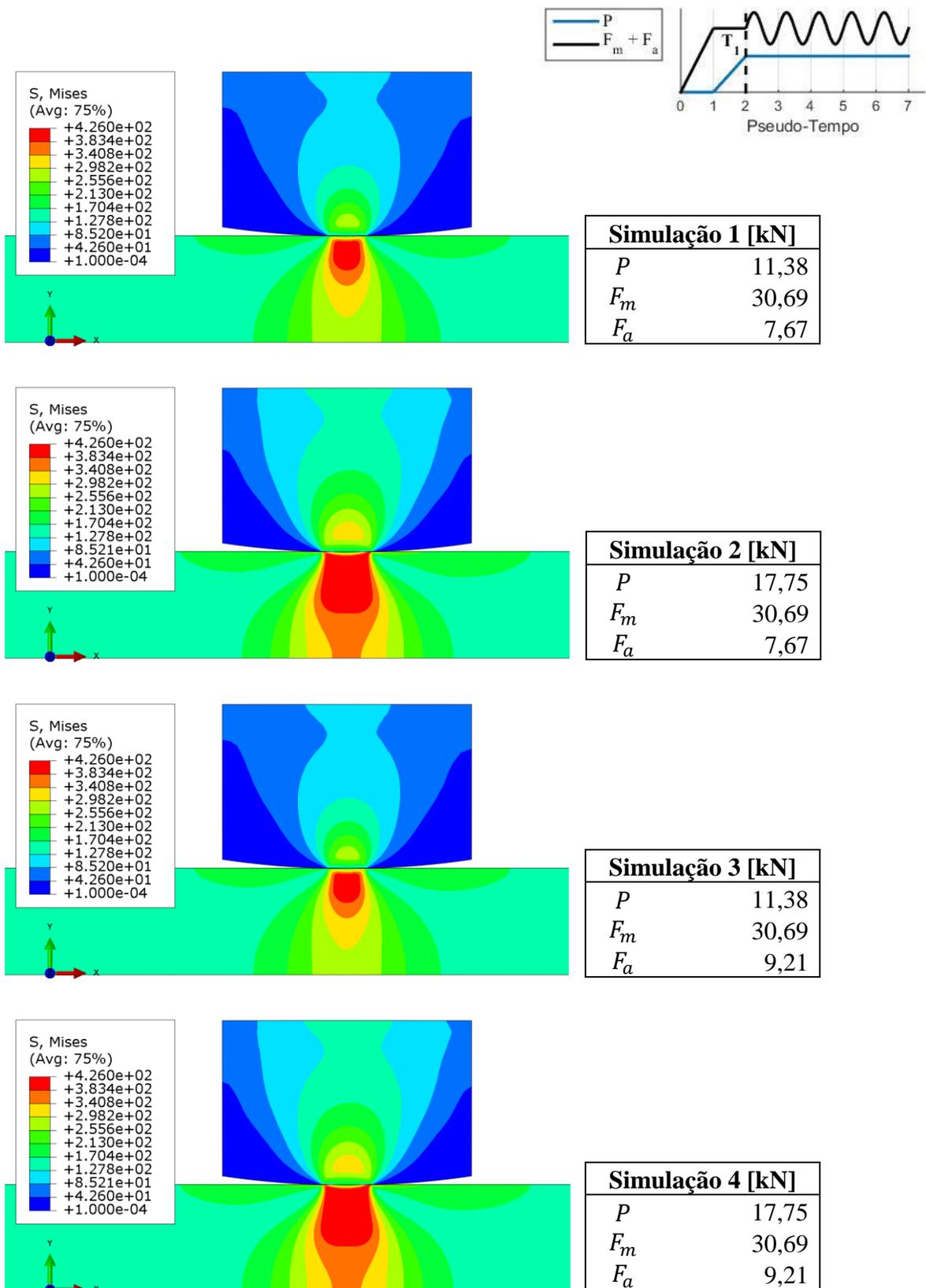


Figura 4.10. Tensão equivalente de von Mises no instante T_1 .

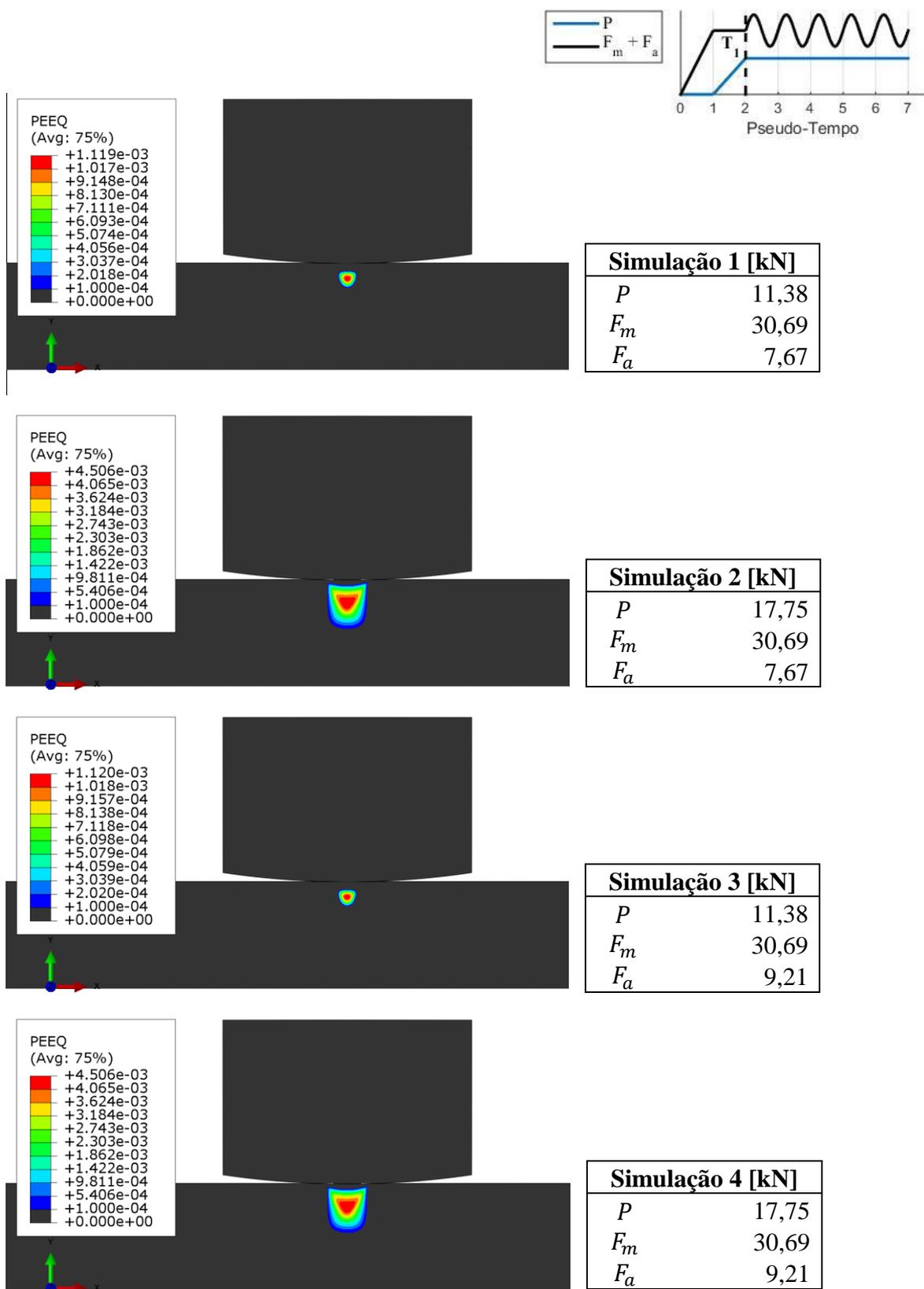


Figura 4.11. Deformação plástica equivalente no instante T_1 .

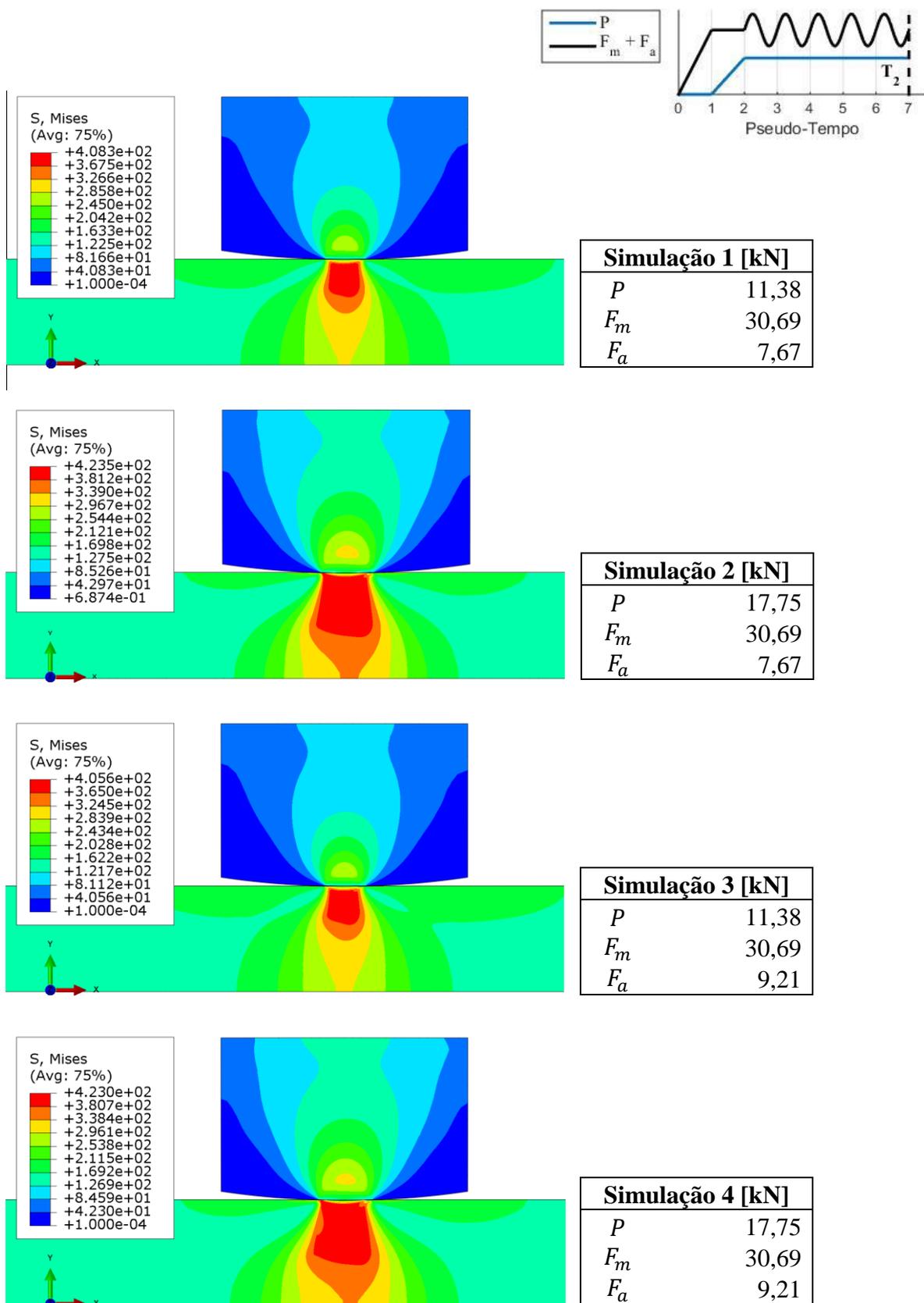


Figura 4.12. Tensão equivalente de von Mises no instante T_2 .

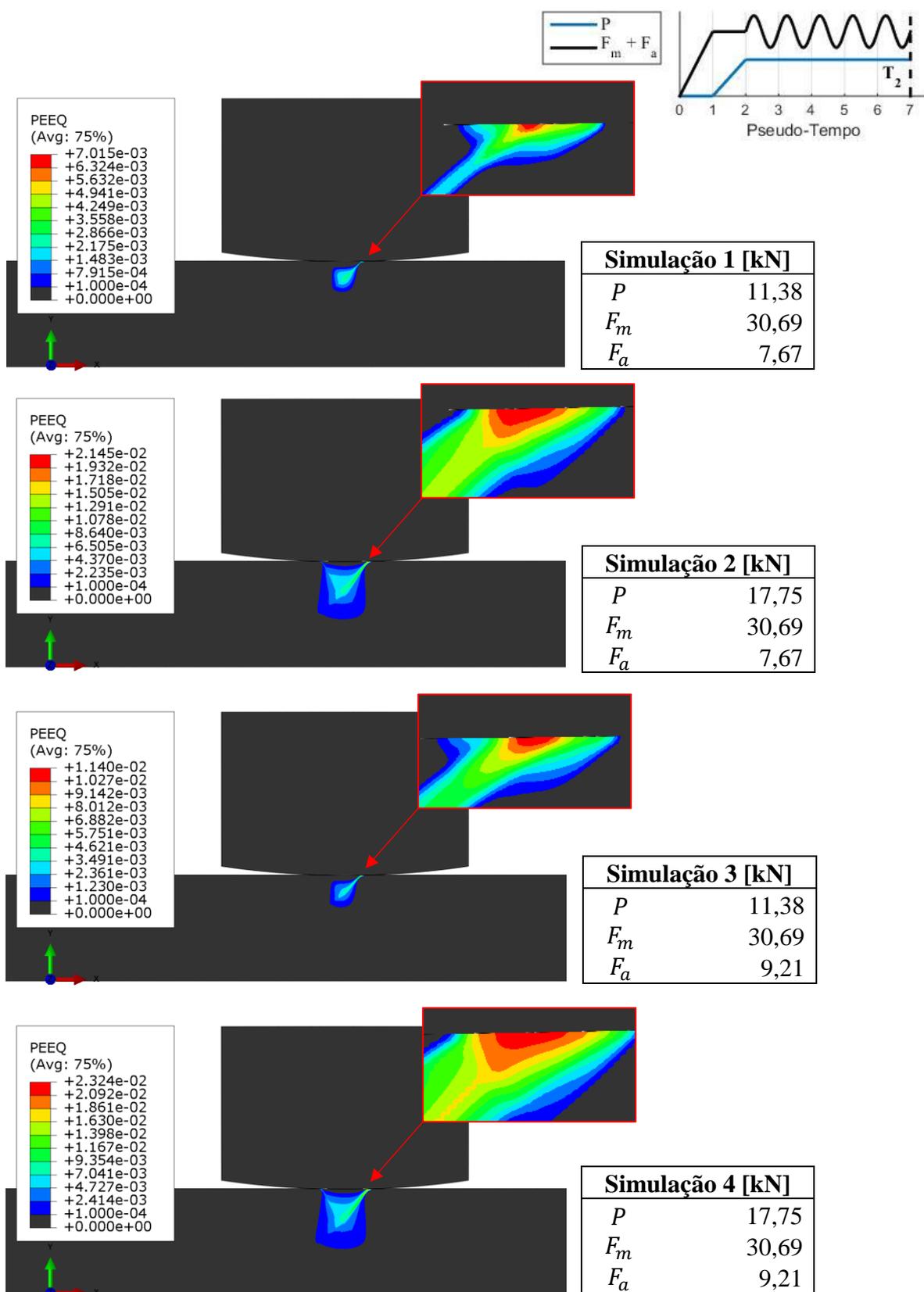


Figura 4.13. Deformação plástica equivalente no instante T_2 .

Tabela 4.6. Histórico do tensor deformação no ponto de máxima deformação plástica equivalente para a simulação 1.

Pseudo-Tempo	Elemento Finito	Componente de Deformação					
		ϵ_{11}	ϵ_{22}	ϵ_{33}	ϵ_{12}	ϵ_{13}	ϵ_{23}
6	75860	0.004085	-0.00687	0	-0.00637	0	0
6.05	75860	0.005635	-0.00759	0	-0.00968	0	0
6.1	75860	0.007587	-0.00849	0	-0.00995	0	0
6.15	75860	0.008686	-0.009	0	-0.00994	0	0
6.2	75860	0.009308	-0.00928	0	-0.00992	0	0
6.25	75860	0.009524	-0.00938	0	-0.0099	0	0
6.3	75860	0.009503	-0.00937	0	-0.00971	0	0
6.35	75860	0.009436	-0.00935	0	-0.00908	0	0
6.4	75860	0.00932	-0.00931	0	-0.00798	0	0
6.45	75860	0.009146	-0.00923	0	-0.00632	0	0
6.5	75860	0.008814	-0.00904	0	-0.00374	0	0
6.55	75860	0.006624	-0.00807	0	-0.00147	0	0
6.6	75860	0.005173	-0.0074	0	-0.00122	0	0
6.65	75860	0.004254	-0.00697	0	-0.0011	0	0
6.7	75860	0.003718	-0.00672	0	-0.00104	0	0
6.75	75860	0.003533	-0.00664	0	-0.00102	0	0
6.8	75860	0.003551	-0.00665	0	-0.0012	0	0
6.85	75860	0.00361	-0.00666	0	-0.00178	0	0
6.9	75860	0.003707	-0.0067	0	-0.00275	0	0
6.95	75860	0.003851	-0.00675	0	-0.0042	0	0
7	75860	0.004085	-0.00687	0	-0.00637	0	0

Tabela 4.7. Histórico do tensor deformação no ponto de máxima deformação plástica equivalente para a simulação 2.

Pseudo-Tempo	Elemento Finito	Componente de Deformação					
		ϵ_{11}	ϵ_{22}	ϵ_{33}	ϵ_{12}	ϵ_{13}	ϵ_{23}
6	66635	0.017534	-0.01935	0	-0.01368	0	0
6.05	66635	0.017756	-0.01945	0	-0.01536	0	0
6.1	66635	0.018437	-0.01983	0	-0.01799	0	0
6.15	66635	0.020283	-0.02063	0	-0.01864	0	0
6.2	66635	0.021012	-0.02096	0	-0.01863	0	0
6.25	66635	0.021245	-0.02106	0	-0.01861	0	0
6.3	66635	0.021223	-0.02106	0	-0.01845	0	0
6.35	66635	0.021151	-0.02103	0	-0.01794	0	0
6.4	66635	0.021036	-0.021	0	-0.0171	0	0
6.45	66635	0.020882	-0.02094	0	-0.01595	0	0
6.5	66635	0.020691	-0.02086	0	-0.0145	0	0
6.55	66635	0.020415	-0.02072	0	-0.0126	0	0
6.6	66635	0.01904	-0.0201	0	-0.01025	0	0
6.65	66635	0.017797	-0.01953	0	-0.00996	0	0
6.7	66635	0.017218	-0.01927	0	-0.00988	0	0
6.75	66635	0.017028	-0.01918	0	-0.00985	0	0
6.8	66635	0.017049	-0.01919	0	-0.01001	0	0
6.85	66635	0.017115	-0.01921	0	-0.0105	0	0
6.9	66635	0.017221	-0.01924	0	-0.01129	0	0
6.95	66635	0.017361	-0.01929	0	-0.01235	0	0
7	66635	0.017534	-0.01935	0	-0.01368	0	0

Tabela 4.8. Histórico do tensor deformação no ponto de máxima deformação plástica equivalente para a simulação 3.

Pseudo- Tempo	Elemento Finito	Componente de Deformação					
		ϵ_{11}	ϵ_{22}	ϵ_{33}	ϵ_{12}	ϵ_{13}	ϵ_{23}
6	75860	0.006896	-0.00993	0	-0.0103	0	0
6.05	75860	0.009054	-0.01093	0	-0.01337	0	0
6.1	75860	0.010819	-0.01175	0	-0.01341	0	0
6.15	75860	0.011892	-0.01224	0	-0.01335	0	0
6.2	75860	0.012516	-0.01253	0	-0.0133	0	0
6.25	75860	0.012735	-0.01263	0	-0.01328	0	0
6.3	75860	0.012711	-0.01262	0	-0.01306	0	0
6.35	75860	0.012633	-0.01259	0	-0.01235	0	0
6.4	75860	0.012501	-0.01254	0	-0.01113	0	0
6.45	75860	0.012301	-0.01245	0	-0.00927	0	0
6.5	75860	0.011805	-0.01216	0	-0.00609	0	0
6.55	75860	0.00925	-0.01103	0	-0.00463	0	0
6.6	75860	0.007885	-0.0104	0	-0.00446	0	0
6.65	75860	0.006983	-0.00999	0	-0.00437	0	0
6.7	75860	0.006447	-0.00974	0	-0.00431	0	0
6.75	75860	0.006259	-0.00966	0	-0.0043	0	0
6.8	75860	0.00628	-0.00967	0	-0.0045	0	0
6.85	75860	0.006349	-0.00969	0	-0.00515	0	0
6.9	75860	0.006462	-0.00973	0	-0.00624	0	0
6.95	75860	0.006627	-0.00979	0	-0.00786	0	0
7	75860	0.006896	-0.00993	0	-0.0103	0	0

Tabela 4.9. Histórico do tensor deformação no ponto de máxima deformação plástica equivalente para a simulação 4.

Pseudo- Tempo	Elemento	Componente de Deformação					
		ϵ_{11}	ϵ_{22}	ϵ_{33}	ϵ_{12}	ϵ_{13}	ϵ_{23}
6	66635	0.018174	-0.02044	0	-0.01516	0	0
6.05	66635	0.018445	-0.02057	0	-0.01718	0	0
6.1	66635	0.020151	-0.02138	0	-0.02005	0	0
6.15	66635	0.021691	-0.02208	0	-0.02012	0	0
6.2	66635	0.022384	-0.02239	0	-0.02006	0	0
6.25	66635	0.022617	-0.0225	0	-0.02004	0	0
6.3	66635	0.02259	-0.02249	0	-0.01986	0	0
6.35	66635	0.022509	-0.02246	0	-0.01929	0	0
6.4	66635	0.022378	-0.02241	0	-0.01836	0	0
6.45	66635	0.022204	-0.02235	0	-0.01708	0	0
6.5	66635	0.021981	-0.02226	0	-0.01541	0	0
6.55	66635	0.021603	-0.02204	0	-0.01289	0	0
6.6	66635	0.019434	-0.02108	0	-0.01113	0	0
6.65	66635	0.018346	-0.02058	0	-0.01097	0	0
6.7	66635	0.01779	-0.02033	0	-0.01091	0	0
6.75	66635	0.017599	-0.02025	0	-0.01089	0	0
6.8	66635	0.017623	-0.02025	0	-0.01107	0	0
6.85	66635	0.017698	-0.02028	0	-0.01161	0	0
6.9	66635	0.017818	-0.02032	0	-0.01249	0	0
6.95	66635	0.017977	-0.02037	0	-0.01367	0	0
7	66635	0.018174	-0.02044	0	-0.01516	0	0

4.3.2 Determinação dos níveis de degradação inicial nos corpos de prova

Esta etapa das simulações numéricas objetivam a determinação do nível de degradação inicial imposto pelo aperto da sapata. A partir da Fig. 4.14 observa-se que em todas as condições de carregamento, o aperto aplicado pela sapata é suficiente para introduzir uma degradação ao corpo de prova. Esta degradação, baseada apenas no modelo original de Gurson, é utilizada como uma simplificação para estimar o nível de degradação inicial na rotina numérica proposta. Esta simplificação foi adotada pois o programa comercial *Abaqus* já apresenta uma sub-rotina para o cálculo do crescimento de vazios segundo o modelo original de Gurson. A Tabela 4.10 mostra os valores das frações volumétricas de vazios obtidas nos pontos críticos no instante T_2 .

Tabela 4.10. Níveis de degradação a serem utilizados como entradas na rotina numérica proposta.

	Simulação 1	Simulação 2	Simulação 3	Simulação 4
Degradação Inicial [%]	1.004	1.011	1.006	1.013

De posse das propriedades do material, dos históricos de deformação e os níveis de degradação no ponto crítico é possível realizar as estimativas de vida, para o ponto material crítico, através do modelo numérico descrito no capítulo 3. Os históricos apresentados nas Tabs. 4.6 a 4.9 são utilizados para prescrever as deformações totais do ciclo estabilizado para cada condição de carregamento analisada. Também são considerados níveis de degradações iniciais diferentes para cada condição de carregamento, conforme mostrado na Tab 4.10. A cada ciclo verifica-se a evolução da fração volumétrica de vazios até que esta variável de dano atinja o valor crítico estabelecido.

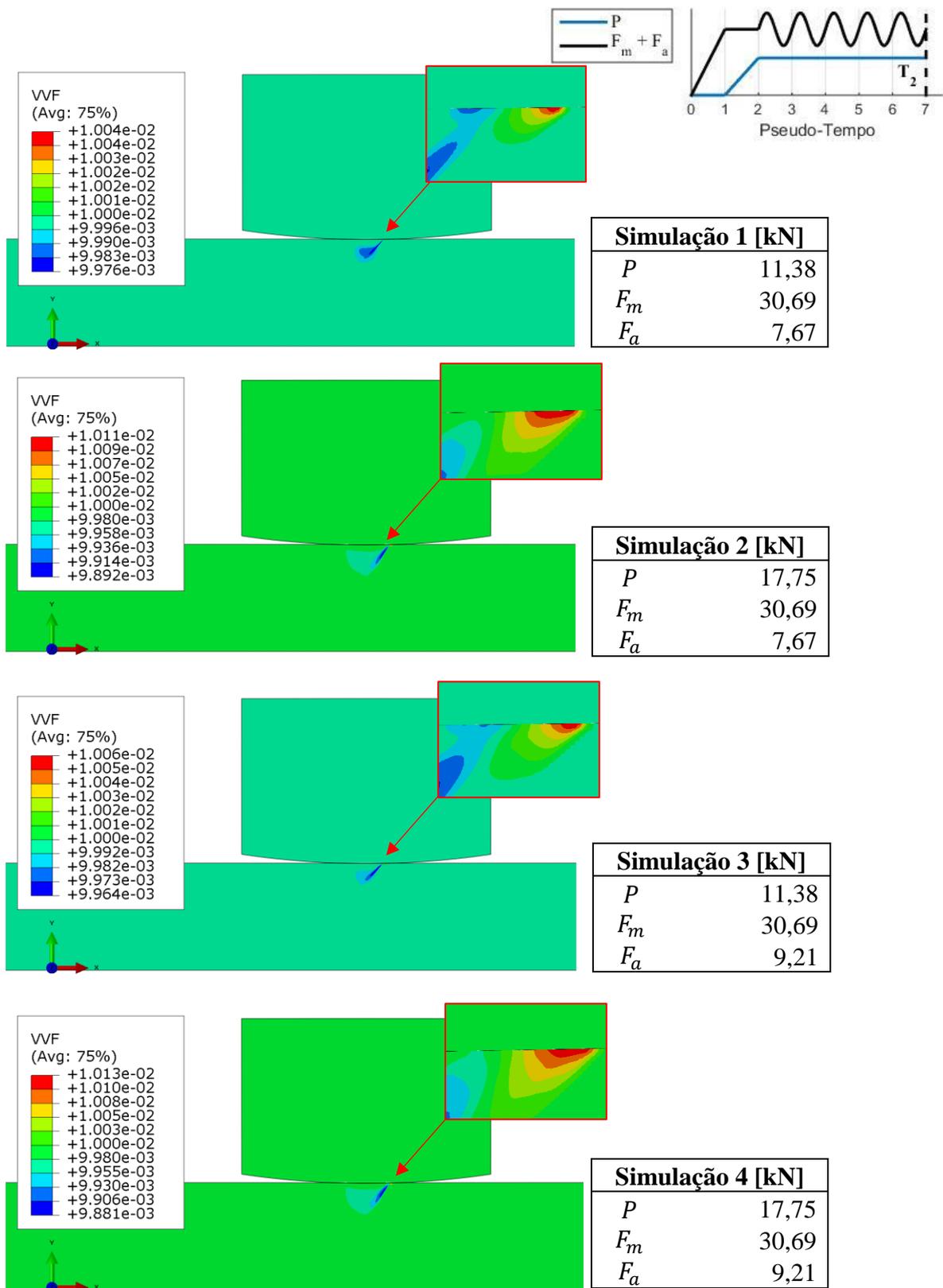


Figura 4.14. Fração volumétrica de vazios no instante T_2 .

5 ESTIMATIVA DE VIDA À FADIGA

Neste capítulo são apresentadas as estimativas de vida do corpo de prova de *fretting* realizadas através do modelo de Gurson com mecanismo de corte de Xue e lei de endurecimento de Armstrong & Frederick, conforme descrito no capítulo 2. Foram consideradas as quatro condições de carregamento impostas nos ensaios experimentais conforme mostrado na Tab. 5.1.

Tabela 5.1. Condições de carregamento para as análises de previsão de vida.

$F_m = 30.69 \text{ kN}$		
	$F_{a_1} = 7,67 \text{ kN}$	$F_{a_2} = 9,21 \text{ kN}$
$P_1 = 11,38 \text{ kN}$	Caso 1	Caso 3
$P_2 = 17,35 \text{ kN}$	Caso 2	Caso 4

O algoritmo de atualização de tensões foi implementado em linguagem FORTRAN, presente no Anexo C, e aplicado em um ponto material. As previsões de vida foram realizadas considerando cinco níveis de porosidade crítica: 0.1, 0.3, 0.5, 0.8 e 1.0. As vidas obtidas numericamente para cada condição de carregamento e nível de porosidade crítica foram confrontadas com as vidas experimentais obtidas por Sandoval (2016) com o objetivo de avaliar a aderência do modelo proposto com os dados obtidos em laboratório.

Nas Figuras 5.1, 5.3, 5.5 e 5.7 são mostradas a evolução da porosidade para cada condição de carregamento e cada valor de porosidade crítica, onde $f/f_c = 1$ representa a falha do material. Nas Figuras 5.2, 5.4, 5.6 e 5.8 as vidas estimadas e obtidas experimentalmente são comparadas.

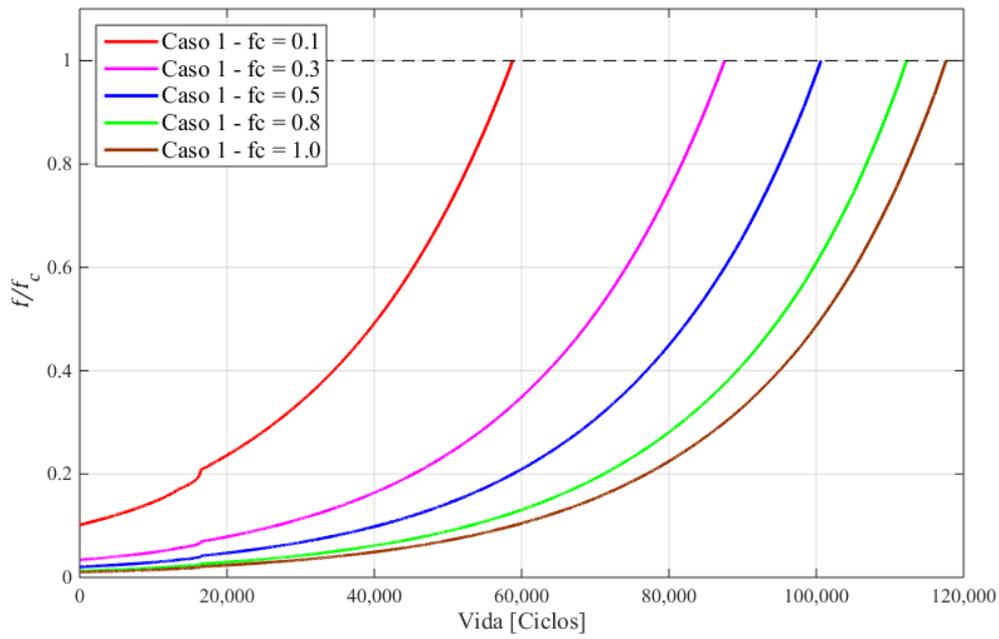


Figura 5.1. Evolução da porosidade para o caso 1.

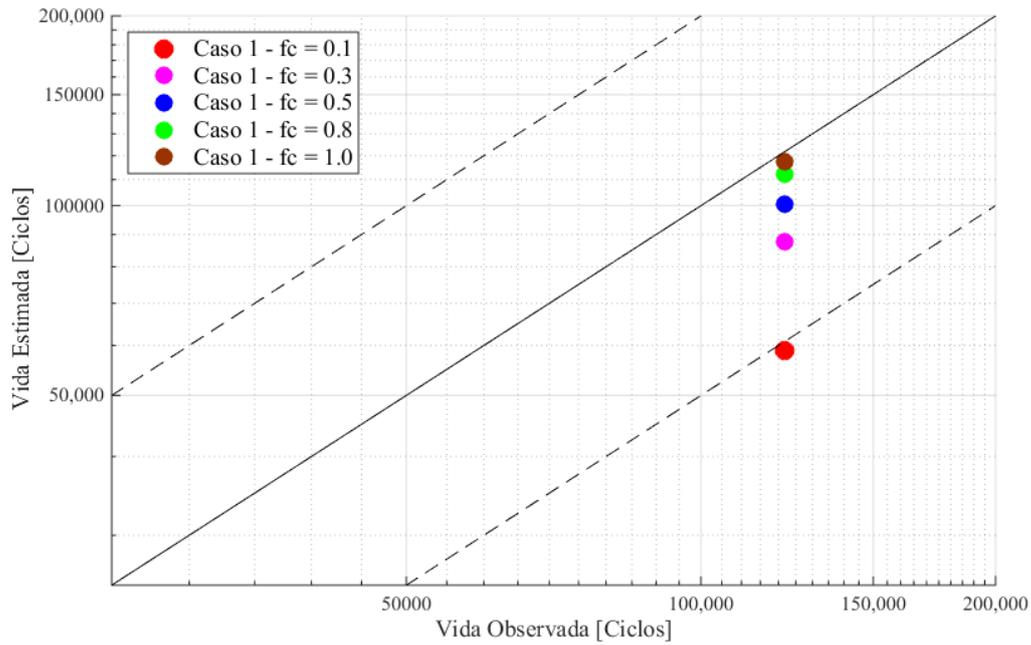


Figura 5.2. Comparação entre vida estimada e vida observada para o caso 1.

Tabela 5.2. Vidas obtidas para o caso 1.

Porosidade Crítica:	Resultados Numéricos					Experimental
	0.1	0.3	0.5	0.8	1	
Caso 1	58780	87570	100650	112270	117630	121744
Erro [%]	51.7	28.1	17.3	7.8	3.4	

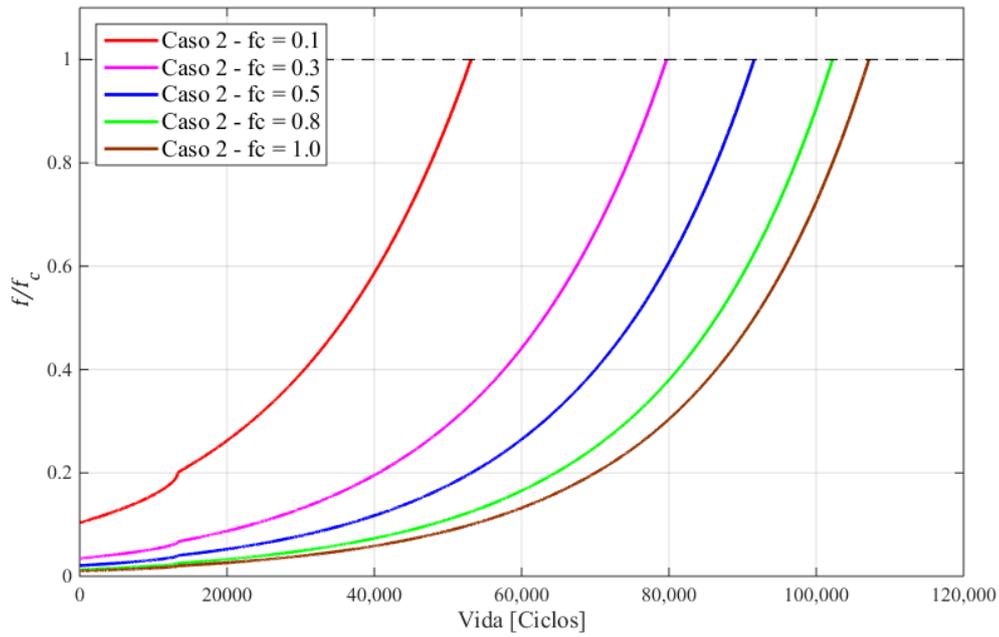


Figura 5.3. Evolução da porosidade para o caso 2.

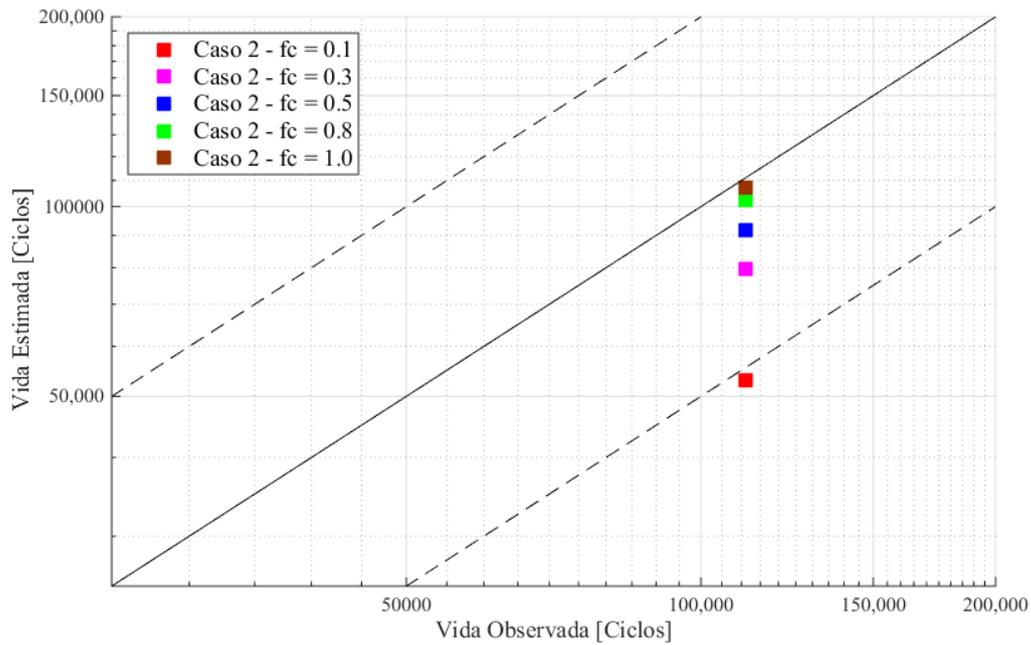


Figura 5.4. Comparação entre vida estimada e vida observada para o caso 2.

Tabela 5.3. Vidas obtidas para o caso 2.

Porosidade Crítica:	Resultados Numéricos					Experimental
	0.1	0.3	0.5	0.8	1	
Caso 2	53140	79680	91570	102210	107150	111007
Erro [%]	52.1	28.2	17.5	7.9	3.5	

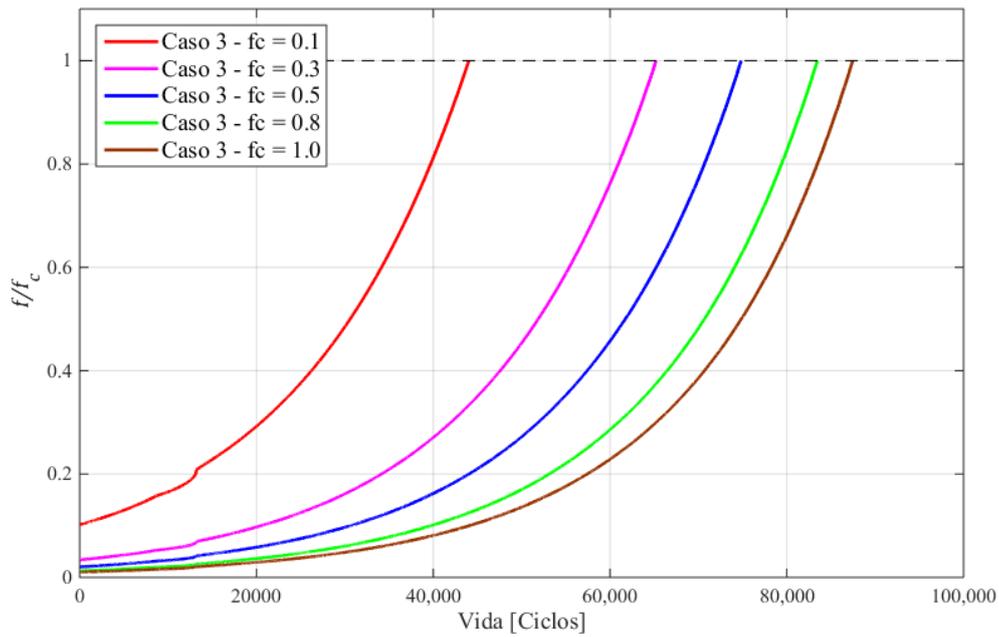


Figura 5.5. Evolução da porosidade para o caso 3.

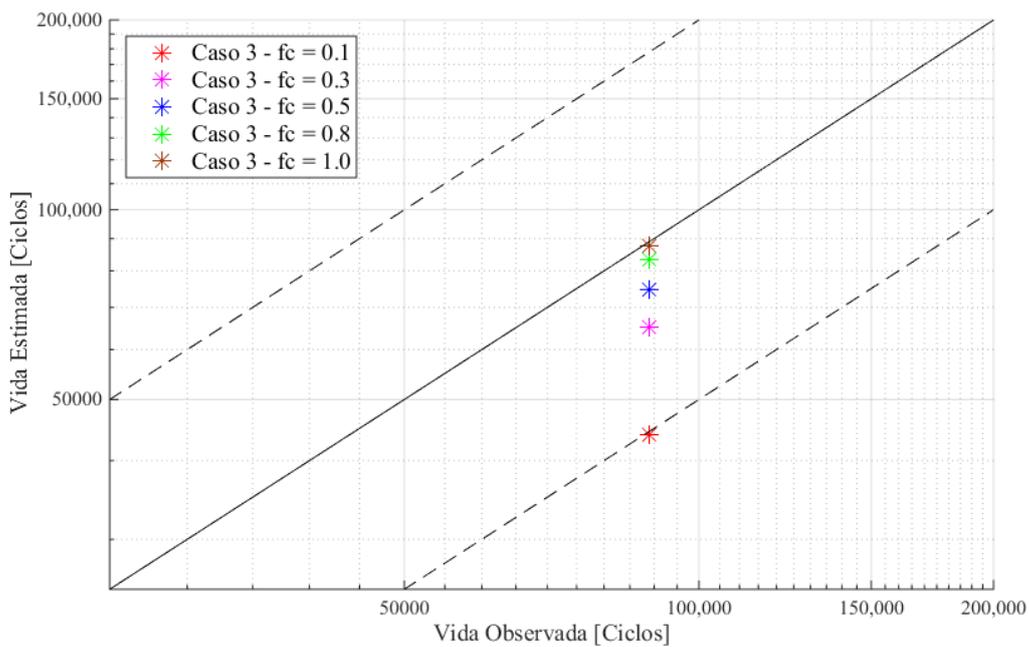


Figura 5.6. Comparação entre vida estimada e vida observada para o caso 3.

Tabela 5.4. Vidas obtidas para o caso 3.

	Resultados Numéricos					Experimental
Porosidade Crítica:	0.1	0.3	0.5	0.8	1	
Caso 3	44030	65210	74840	83450	87470	88971
Erro [%]	50.5	26.7	15.9	6.2	1.7	

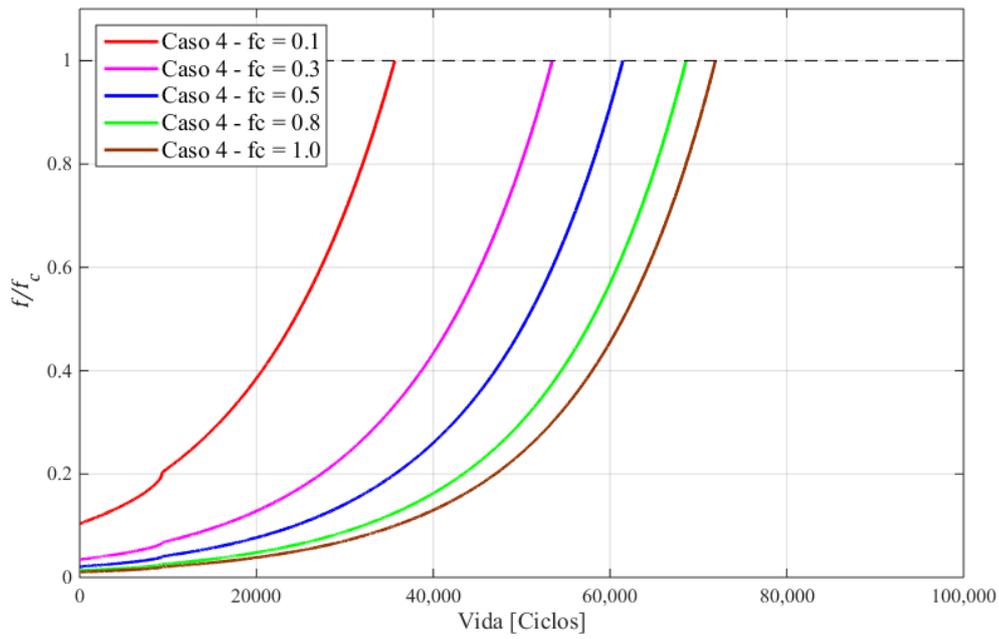


Figura 5.7. Evolução da porosidade para o caso 4.

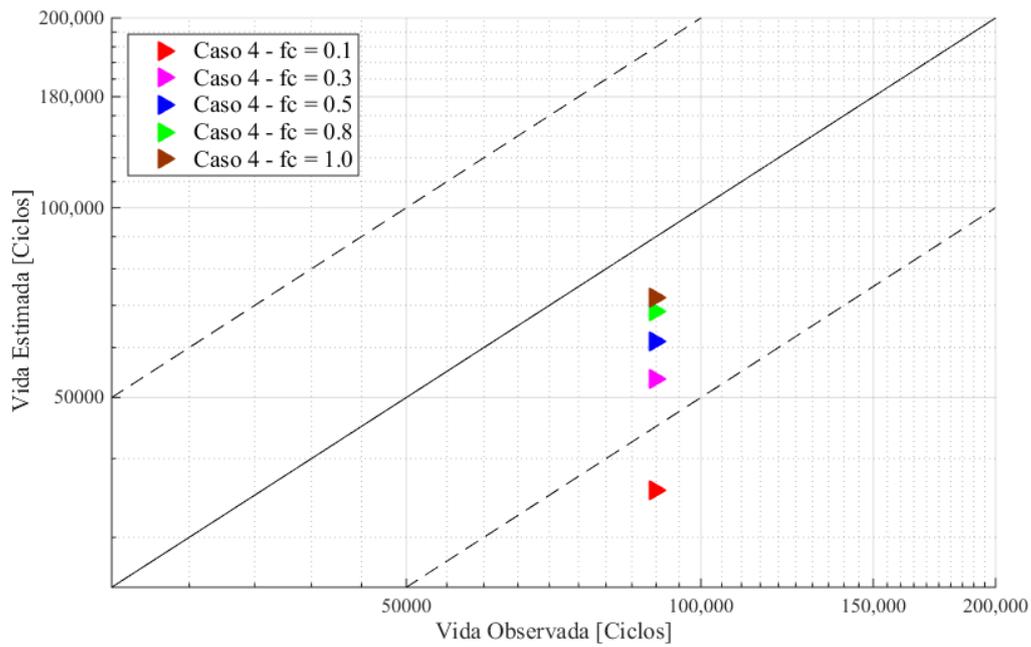


Figura 5.8. Comparação entre vida estimada e vida observada para o caso 4.

Tabela 5.5. Vidas obtidas para o caso 4.

	Resultados Numéricos					Experimental
Porosidade Crítica:	0.1	0.3	0.5	0.8	1	
Caso 4	35650	53460	61450	68600	71930	89686
Erro [%]	60.3	40.4	31.5	23.5	19.8	

A partir das vidas obtidas para os casos 1 e 2 nota-se que o aumento de força de aperto das sapatas provoca uma diminuição na vida do corpo de prova. Este efeito é captado tanto pelas vidas obtidas experimentalmente quanto pelas estimativas realizadas pelo modelo proposto. Em ambos os casos o modelo gerou excelentes estimativas de vida para o nível de porosidade crítica $f_c = 1$, resultando em diferenças menores que 4% quando comparados com os dados experimentais. De todos os valores de porosidade crítica analisados, apenas o primeiro ($f_c = 0.1$) resultou em estimativas fora das bandas de fator 2, indicadas pelas linhas tracejadas nas Figs. 5.2 e 5.4.

Ao se analisar os casos 1 e 3, é possível perceber uma diminuição mais acentuada das vidas experimentais com o aumento da amplitude da força axial. Este fenômeno também é captado pelo modelo proposto no caso 3, o qual, para $f_c = 1$, estima uma vida apenas 1.7% menor daquela observada em laboratório. Novamente, $f_c = 0.1$ foi o único valor de porosidade crítica que resultou em vidas fora das bandas tracejadas, como mostrado na Fig. 5.6.

No caso 4, aumenta-se tanto a força de aperto das sapatas quanto a amplitude da força axial. Entretanto, as vidas experimentais obtidas para este caso foram virtualmente idênticas àquelas obtidas no caso 3. Devido ao baixo número de ensaios realizados é possível que este fato tenha sido causado por um ponto experimental fora da tendência. As estimativas numéricas para este caso foram mais conservadoras, prevendo vidas 19.8 % e 60.3 % menores para $f_c = 1$ e $f_c = 0.1$, respectivamente.

A partir das Figuras. 5.1, 5.3, 5.5 e 5.7 percebe-se que as curvas de evolução do dano tendem a se aproximar para valores maiores de porosidade crítica, resultando em previsões de vida próximas para os níveis $f_c = 0.8$ e $f_c = 1$.

Na Figura 5.9 são apresentadas as estimativas de vida para todas as condições de carregamento. É possível notar a capacidade do modelo de realizar boas previsões para todas as condições de carregamento analisadas para $f_c = 1$. Considerando todos os níveis de porosidade crítica, percebe-se que o modelo tende ser mais conservativo. Na Tabela 5.6 são mostradas todas as estimativas de vidas obtidas durante as simulações.

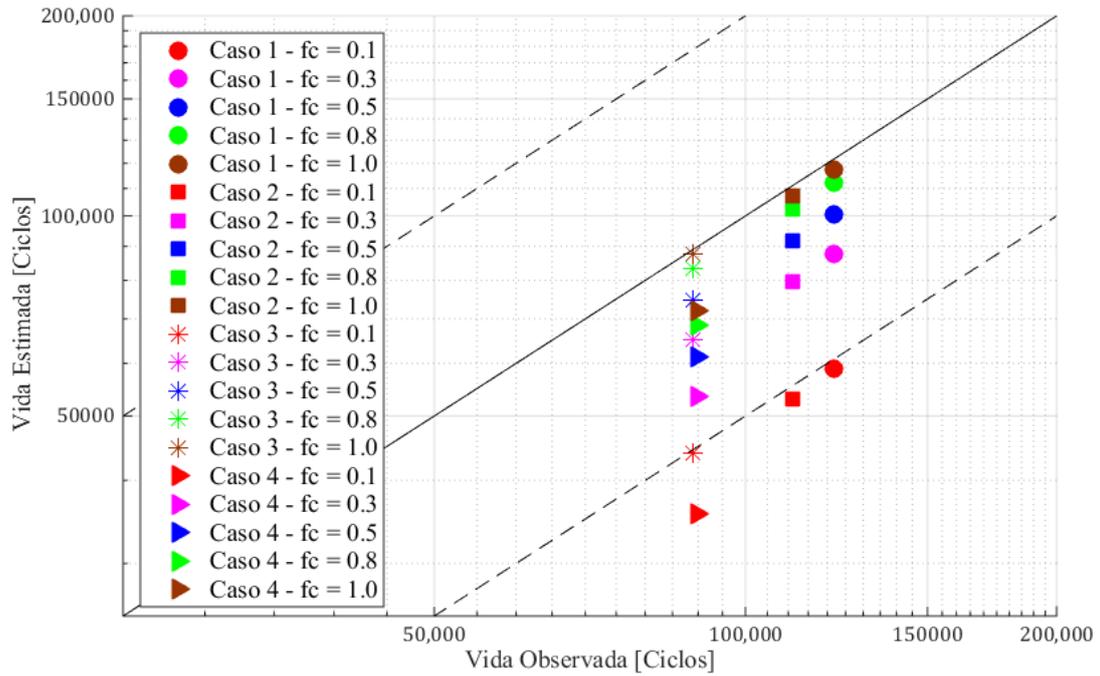


Figura 5.9. Comparação entre vida estimada e vida observada para todos os casos.

Tabela 5.6. Vidas obtidas para todos os casos.

Porosidade Crítica	Resultados Numéricos					Experimental
	0.1	0.3	0.5	0.8	1	
Caso 1	58780	87570	100650	112270	117630	121744
Caso 2	53140	79680	91570	102210	107150	111007
Caso 3	44030	65210	74840	83450	87470	88971
Caso 4	35650	53460	61450	68600	71930	89686

6 CONCLUSÕES

Como previsto nos objetivos, o presente trabalho consolidou a elaboração do modelo numérico baseado na micromecânica de defeitos de Gurson com mecanismo de corte de Xue e endurecimento cinemático de acordo com a lei de Armstrong & Frederick. Ao analisar os resultados, nota-se que o modelo proposto é capaz de prever adequadamente o comportamento de vida em fadiga da liga de alumínio AA 7050 em um ponto material. O modelo também se mostrou capaz de incorporar corretamente o efeito da degradação inicial na determinação da vida em fadiga do material.

A análise de convergência realizada no Cap. 4 mostrou que o tamanho dos elementos finitos na região de contato tem grande influência nos valores das deformações plásticas equivalentes e tensões tangenciais de contato lidas nesta área. Desta forma, houve um custo computacional considerável na obtenção dos históricos de deformação pelo método de elementos finitos, sendo este o principal obstáculo para o desenvolvimento de um modelo numérico completo do conjunto formado pelo cabo condutor e o grampo de suspensão, que, desde já, fica como sugestão para trabalhos futuros. Entretanto, a escolha de apenas um ponto material para a previsão das vidas fez com que esta etapa do trabalho pudesse ser realizada rapidamente.

A escolha do mecanismo de cisalhamento de Xue e lei de endurecimento cinemático de Armstrong & Frederick gerou um modelo com bom desempenho. A tendência levemente conservativa das vidas estimadas por este modelo pode estar relacionada com o mecanismo de corte adotado, já que, segundo Reis *et al.* (2010), tende a prever a falha de maneira antecipada. O uso de outros mecanismos de cisalhamento, como Nahshon & Hutchinson, implicaria em um número maior de constantes a serem calibradas.

Por fim, conclui-se que o modelo proposto é capaz de realizar boas previsões de vida, desde que o nível de porosidade crítica seja definido corretamente. Para os casos simulados, $f_c = 1.0$ apresentou os melhores resultados.

Como sugestão de trabalhos futuros, propõe-se a aplicação do modelo apresentado neste trabalho no conjunto 3D formado pelo cabo condutor e grampo de suspensão, como no trabalho realizado por Nunes Filho (2016). Sugere-se também que o modelo proposto seja testado para diferentes materiais dúcteis com o objetivo de se determinar as limitações desta abordagem.

7 REFERÊNCIAS

- ARMSTRONG, P. J., FREDERICK, C. O. (1966). A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. Report RD/B/N731, CEGB, Central Electricity Generating Board, Berkley, UK.
- ASHIUCHI, E. S. (2009). Influência do Tratamento Criogênico da Fadiga sob Condições de Fretting no Al 7050-T451. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas – Universidade de Brasília, 95p.
- Bai, Y. (2008). Effect of Loading History on Necking and Fracture. Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- CHABOCHE, J. L. (1986). Time-independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity.
- Chaboche, J.L., Boudifa, M., Saanouni, K., (2006). A CDM approach of ductile damage with plastic compressibility. *International Journal of Fracture*, 137:51–75.
- Chen, Z. T. (2004). The role of heterogeneous particle distribution in the prediction of ductile fracture. Ph.D. thesis, University of Waterloo, Canada.
- CIGRE WG 04 SC 22 (1979), Recommendations for the evaluation of the lifetime of transmission line conductors. *ELECTRA* 63.
- Cruzado, A., Leen, S. B., Urchegui, M. A., Gmez, X. (2013). Finite element simulation of fretting wear and fatigue in thin steel wires. *International Journal of Fatigue*, 55, 7-21.
- Dowling, N. E., (1999). *Mechanical Behavior of Materials – Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue*. Preason Prentice Hall. United States.
- EPRI (1979), *Transmission Line Reference Book: The Orange Book*. Electric Power Research Institute. Palo Alto, CA.
- Fabara H. K. V. (2016). Fadiga e comportamento tensão-deformação cíclico da liga de alumínio 7050-T7451. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas – Universidade de Brasília
- Fadel, A.A. (2010), Avaliação do Efeito de Tracionamento em Elevados Níveis de EDS Sobre a Resistência em Fadiga do Condutor IBIS, UnB.
- Fricke Jr, W. G. and Rawlins, C.B. (1968), “Importance of Fretting in Vibration Fatigue of Stranded Conductors”, *IEEE Transactions Paper*, Vol. PAS-87, No 6, pp; 1381-1384.
- Gurson, A.L. (1977). Continuum Theory of ductile rupture by void nucleation and growth - Part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engrg. Mat. Tech.*, 99:2-15.

- Hancock, J. W., Mackenzie, A. C. (1976). On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24:147–160.
- Henriques, A. M. D. (2006), *Bancada de Ensaios Mecânicos à Fadiga de Cabos Condutores de Energia Tese de Doutorado*, Universidade de Brasília-UnB.
- Holzapfel, G.A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering*. London: John Wiley & Sons.
- Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (2008) – disponível em ipeadata.gov.br (Acessado em 06/09/2016)
- Kachanov, L. M. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers.
- Lemaitre, J., (1985). A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J. Engng. Mat. Tech., Trans. ASME*, v.107, p.83-89.
- Lemaitre, J., (2001). *Handbook of Materials Behavior Models*, edited by Jean Lemaitre, Academic Press, Burlington.
- Malcher, L. (2012). *Continuum Modelling and Numerical Simulation of Damage for Ductile Materials*”, Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Universidade do Porto
- McClintock, F. A., (1968). A criterion for ductile fracture by growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*. v.35, p.363-371.
- Ministério de Minas e Energia (2008) – disponível em www.mme.gov.br (Acessado em 06/09/2016)
- Nahshon, K., Hutchinson, J. (2008). Modification of the Gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27:1–17.
- Nunes Filho, E. L. S. A., (2016). *Análise de esforços internos em cabos condutores de linhas de transmissão*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília.
- Pereira, J. C. R., de Jesus, A. M. P., Fernandes, A. A. (2015), *Ultra-Low-Cycle Fatigue Behavior of Pipeline Steels Based on Theory of Critical Distances*, ISOPE, ISBN 978-1-880-89-0
- Poffenberger, J. C., Swart, R. L. (1965), *Differential Displacement and Dynamic Conductor Strain*”, IEEE Transactions Paper, Vol PAS 84, pp. 281-289
- PRAGER, W. (1955) *The theory of plasticity: a survey of recent achievements*. Proceedings, Institution of Mechanical Engineers, 169:41-57.

- Ramberg, W. and Osgood, W. R., (1943). Description of Stress-Strain-Curves by Three Parameters. Technical Report, Technical Note No. 902, NACA.
- Reis, F.J.P., Malcher, L., Andrade Pires, F.M., César de Sá, J.M.A., (2010), A modified GTN model for the prediction of ductile fracture at low stress triaxialities. *International Journal of Structural Integrity*
- Rice, J. R., Tracey, D. M., (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.17, p.201-217.
- Sandoval, C. F. B., (2016). Influência do Comportamento Elastoplástico Não-linear na Estimativa de Vida à Fadiga de Cabo Condutor Tipo CAAA. Qualificação de Doutorado, Universidade de Brasília.
- Souza Neto, E.A., Peric, Owen, D.R.J. (2008). Computational methods for plasticity: theory and applications. *John Wiley & Sons Ltd*.
- Tvergaard, V. and Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Met.* 32:157–169.
- Vázquez, J. Navarro, C., Domínguez, J., (2015), Two dimensional versus three dimensional modelling in fretting fatigue life prediction. *Journal of Strain Analysis*.
- Xue, L. (2007). Ductile Fracture Modeling – Theory, Experimental Investigation and Numerical Verification, Ph.D Thesis, *Massachusetts Inst. of Technology*.
- Zhang, Z. L., & Skallerud, B. (2010). Void coalescence with and without prestrain history. *International Journal of Damage Mechanics*, 19, 153–174.

ANEXOS

		Pag.
ANEXO A	DERIVADAS UTILIZADAS NO PROCESSO DE LINEARIZAÇÃO DO MODELO DE GURSON MODIFICADO	67
ANEXO B	ROTINA EM PYTHON PARA A ANÁLISE VIA ELEMENTOS FINITOS	72
ANEXO C	ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES	80

ANEXO A – DERIVADAS UTILIZADAS NO PROCESSO DE LINEARIZAÇÃO DO MODELO DE GURSON MODIFICADO

O sistema de equações residuais utilizados para a solução do corretor plástico do modelo de Gurson modificado é dado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta S_{n+1} \\ \delta p_{n+1} \\ \delta f_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta \beta_{n+1} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{S_{n+1}} \\ R_{p_{n+1}} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\beta_{n+1}} \end{bmatrix}^k \quad (A.1)$$

Onde a primeira equação residual é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} &= \mathbb{I}^4 + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial S_{n+1}}, \\ \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} &= 0, \\ \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} &= 0, \\ \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= 2GN_{d_{n+1}}, \\ \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}}. \end{aligned} \quad (A.2)$$

Segunda equação residual:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= \mathbf{0}, \\
\frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} &= 1 + K\Delta\gamma \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial p_{n+1}}, \\
\frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} &= K\Delta\gamma \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial f_{n+1}}, \\
\frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= KN_{v_{n+1}}, \\
\frac{\partial R_{p_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} &= \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Terceira equação residual:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= q_1 f_{n+1}^{q_2} \left[g_{0_{n+1}} \Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} (\bar{\varepsilon}^p_{n+1} + \Delta\bar{\varepsilon}^p) - 2\xi_{n+1} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \bar{\varepsilon}^p_{n+1} \Delta\bar{\varepsilon}^p \right] \\
\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} &= -(1 - f_{n+1}) \frac{3}{2} \Delta\gamma f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \\
&\quad + g_{0_{n+1}} q_1 f_{n+1}^{q_2} \Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial p_{n+1}} (\bar{\varepsilon}^p_{n+1} + \Delta\bar{\varepsilon}^p) \\
\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} &= 1 - \left[(1 - 2f_{n+1}) \Delta\gamma \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \\
&\quad + g_{0_{n+1}} q_1 \left[q_2 f_{n+1}^{q_2-1} \bar{\varepsilon}^p_{n+1} \Delta\bar{\varepsilon}^p \right. \\
&\quad \left. + f_{n+1}^{q_2} \Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial f_{n+1}} (\bar{\varepsilon}^p_{n+1} + \Delta\bar{\varepsilon}^p) \right] \\
\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= -(1 - 2f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \\
&\quad + g_{0_{n+1}} q_1 f_{n+1}^{q_2} \sqrt{A} (\bar{\varepsilon}^p_{n+1} + \Delta\bar{\varepsilon}^p) \\
\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} &= g_{0_{n+1}} q_1 f_{n+1}^{q_2} \Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} (\bar{\varepsilon}^p_{n+1} + \Delta\bar{\varepsilon}^p)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Quarta equação residual:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= \boldsymbol{\eta}_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial p_{n+1}} &= 2f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} &= -\frac{1}{3}\sigma_y \left[2f_{n+1} - 2\cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right] \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} &= 0 \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} &= -\boldsymbol{\eta}_{n+1}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Quinta equação residual:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= -\frac{2}{3}H^k \Delta\gamma \left[\frac{\partial \mathbf{N}_{d_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}}\right] + b\Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \otimes \boldsymbol{\beta}_{n+1} \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} &= -\frac{2}{3}H^k \Delta\gamma \left[\frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} \mathbf{I}\right] + b\Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial p_{n+1}} \boldsymbol{\beta}_{n+1} \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} &= -\frac{2}{3}H^k \Delta\gamma \left[\frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} \mathbf{I}\right] + b\Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial f_{n+1}} \boldsymbol{\beta}_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{2}{3}H^k (N_{d_{n+1}} + N_{v_{n+1}} I) + b\sqrt{A} \boldsymbol{\beta}_{n+1} \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} &= \mathbb{I}^4 - \frac{2}{3}H^k \Delta\gamma \left[\frac{\partial \mathbf{N}_{d_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}}\right] + b\Delta\gamma \left(\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \otimes \boldsymbol{\beta}_{n+1} + \sqrt{A} \cdot \mathbb{I}^4\right)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Onde:

$$A = \frac{2}{3} \left\{ \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[\sigma_y f_{n+1} \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\} \tag{A.7}$$

Outras derivadas úteis:

$$\frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} = \mathbb{I}^4 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} = -\mathbb{I}^4 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial p_{n+1}} = \frac{1}{2} f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = \frac{1}{3} \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} = \mathbb{I}^4 \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{A}} \left(\frac{2}{3} \cdot 2\boldsymbol{\eta}_{n+1} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial p_{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{A}} \left\{ \frac{2}{3} \left[f_{n+1}^2 \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \right\} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial f_{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{A}} \left\{ \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} f_{n+1} \sigma_y^2 \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \right\} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{A}} \left(\frac{2}{3} \cdot -2\boldsymbol{\eta}_{n+1} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial g_{0_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} = -9\xi_{n+1}^2 \left(\frac{3}{r_{n+1}^3} J_3 \mathbf{S}_{n+1}^T - \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{q_{n+1}} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} = \frac{9}{2} \xi_{n+1} \left(\frac{3}{r_{n+1}^3} J_3 \mathbf{S}_{n+1}^T - \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{q_{n+1}} \right) \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial r_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} = \frac{9}{2} \left(\frac{27}{2} J_3 \right)^{-2/3} J_3 \mathbf{S}_{n+1}^T \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial q_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} = \frac{3 \mathbf{S}_{n+1}}{2 q_{n+1}} \quad (\text{A.21})$$

ANEXO B – ROTINA EM PYTHON PARA A ANÁLISE VIA ELEMENTOS FINITOS

```
*****
# CP Fretting 2D

# Felipe Azevedo Canut
*****

*****
# ENTRADAS:

# Nome da simulacao:

nome = 'SIMULACAO1_0,05'

# Geometria do Corpo de Prova:

ComprimentoCP = 123.0 # [mm]
LarguraCP = 13.0 # [mm]
EspessuraCP = 13.0 # [mm]

# Geometria da Sapata:

ComprimentoS = 10.0 # [mm]
LarguraS = 15.0 # [mm]
EspessuraS = 13.0 # [mm]
RaioS = 70.0 # [mm]

# Nivel de refinamento da malha:

# Corpo de prova:
cpe1 = 0.05
cpe2 = 0.5
cpe3 = 1.0

# Sapata:
se1 = cpe1
se2 = cpe2
se3 = cpe3

# Semi Comprimento de Contato:

a = 1.5

#-----
# Numero de Ciclos:
NCiclos = 5
#-----
# Carregamentos:

Bulk = 30690.0 # [N]
Bulk_Alt = 7672.0 # [N]
ApertoSapata = 17353.0 # [N]

# -----
# Propriedades do material:
ModuloDeElasticidade = 73400 # [MPa]
```

```

Poisson = 0.3

# Cruva de encruamento:

CurvaDeEncruamento = ((426.0, 0.0), (
    426.1091, 0.019844), (427.0813, 0.020003), (434.1554, 0.02107),
    (439.6889,
    0.022053), (444.3515, 0.023031), (448.7861, 0.024014), (452.6763,
    0.025008), (455.671, 0.026029), (458.7827, 0.027057), (462.1277,
    0.028063),
    (463.9686, 0.029058), (466.4935, 0.030016), (468.8965, 0.031091),
    (
    470.9675, 0.032041), (472.8468, 0.033022), (475.3332, 0.034072),
    (476.7045,
    0.03501), (478.7426, 0.036003), (480.6032, 0.037043), (483.1413,
    0.038014),
    (484.9495, 0.039018), (486.3729, 0.040021), (488.1657, 0.041053),
    (
    489.6177, 0.042061), (491.4658, 0.043028), (493.5375, 0.044129),
    (494.9829,
    0.045037), (496.6722, 0.046), (498.4249, 0.047027), (499.777,
    0.048046), (
    501.0795, 0.049016), (502.5988, 0.050058), (504.4053, 0.051054),
    (505.7608,
    0.052028), (507.1133, 0.053015), (508.2036, 0.054066), (509.4745,
    0.055003), (511.3189, 0.056225), (512.3596, 0.057077), (513.5783,
    0.058011), (514.7535, 0.059035), (516.1357, 0.060002), (517.3355,
    0.061043), (518.3753, 0.062014), (519.1621, 0.063045), (520.6973,
    0.064049), (522.4105, 0.065054), (522.6107, 0.066002), (524.2903,
    0.067028), (524.9127, 0.068024), (525.8622, 0.069034), (526.8206,
    0.07002),
    (527.8199, 0.07105), (528.6387, 0.072067), (529.9857, 0.073088),
    (530.338,
    0.074058), (531.19, 0.07503), (532.2145, 0.076062), (532.242,
    0.077003), (
    533.4342, 0.078083), (534.1942, 0.079009), (534.511, 0.080025),
    (535.3682,
    0.081011), (536.2577, 0.082032), (536.5584, 0.083073), (537.4639,
    0.084002), (537.2202, 0.085002), (538.5552, 0.086013), (539.3552,
    0.087065), (539.8905, 0.088062), (540.6118, 0.089058), (540.602,
    0.090021),
    (540.887, 0.09101), (541.2684, 0.092002), (541.7071, 0.093036),
    (541.2264,
    0.094058), (541.738, 0.095045), (542.0779, 0.096037), (542.0009,
    0.097), (
    541.6613, 0.098012))
#*****
#*****

from abaqus import *
from abaqusConstants import *
import regionToolset

session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=None)

#-----
#-----
# Modelo
mdb.models.changeKey(fromName='Model-1', toName='Fretting')
Fretting = mdb.models['Fretting']

```

```

#-----
#-----
# Partes

import sketch
import part

# Corpo de Prova:
CPSketch = Fretting.ConstrainedSketch(name='CP Sketch', sheetSize=100)
CPSketch.rectangle(point1=(-ComprimentoCP/2 ,0.0),
point2=(ComprimentoCP/2 , -LarguraCP/2))

CPPart = Fretting.Part(name='CP', dimensionality=TWO_D_PLANAR,
type=DEFORMABLE_BODY)
CPPart.BaseShell(CPSketch)

f = CPPart.faces

CPPartPartition = CPPart.MakeSketchTransform(sketchPlane=f[0],
sketchPlaneSide=SIDE1, origin=(0.0,
0.0, 0.0))

CPPartPartitionProfile = Fretting.ConstrainedSketch(name='profile',
sheetSize=50,
gridSpacing=1.0, transform=CPPartPartition)
CPPartPartitionProfile.rectangle(point1=(-1.5*a, 0), point2=(1.5*a, -
1.5*a))
CPPartPartitionProfile.rectangle(point1=(-3*a, 0), point2=(3*a, -3*a))
CPPartPartitionProfile.rectangle(point1=(-LarguraS/2, 1),
point2=(LarguraS/2, -LarguraCP/2-1))
CPPart.PartitionFaceBySketch(faces=f[0],
sketch=CPPartPartitionProfile)

# Sapata:
SSketch = Fretting.ConstrainedSketch(name='Sapata Sketch',
sheetSize=100)
SSketch.CircleByCenterPerimeter(center=(0.0, RaioS), point1=(0.0,
0.0))
SSketch.Line(point1=(-LarguraS/2, ComprimentoS), point2=(LarguraS/2,
ComprimentoS))
SSketch.Line(point1=(LarguraS/2, ComprimentoS), point2=(LarguraS/2,
0.0))
SSketch.Line(point1=(-LarguraS/2, ComprimentoS), point2=(-LarguraS/2,
0.0))
SSketch.autoTrimCurve(curve1=SSketch.geometry[2], point1=(-RaioS, 0))
SSketch.autoTrimCurve(curve1=SSketch.geometry[4], point1=(LarguraS/2,
0.001))
SSketch.autoTrimCurve(curve1=SSketch.geometry[5], point1=(-LarguraS/2,
0.001))

SPart = Fretting.Part(name='Sapata', dimensionality=TWO_D_PLANAR,
type=DEFORMABLE_BODY)
SPart.BaseShell(SSketch)

f = SPart.faces

SPartPartition = SPart.MakeSketchTransform(sketchPlane=f[0],
sketchPlaneSide=SIDE1, origin=(0.0,
0.0, 0.0))

```

```

SPartPartitionProfile = Fretting.ConstrainedSketch(name='profile',
sheetSize=50,
    gridSpacing=1.0, transform=SPartPartition)
SPartPartitionProfile.rectangle(point1=(-1.5*a, 0), point2=(1.5*a,
1.5*a))
SPartPartitionProfile.rectangle(point1=(-3*a, 0), point2=(3*a, 3*a))
SPart.PartitionFaceBySketch(faces=f[0], sketch=SPartPartitionProfile)
#-----
# Material

FrettingMaterial = Fretting.Material(name='AL 7050')
FrettingMaterial.Elastic(table=((ModuloDeElasticidade, Poisson),))
FrettingMaterial.Plastic(table=CurvaDeEncruamento)

#-----
# Secao

import section

FrettingSection = Fretting.HomogeneousSolidSection(name='AL
7050',material = 'AL 7050')

CPf = CPPart.faces.findAt(((0.0,-a,0.0),),((0.0,-2*a,0.0),),((0.0,-
4*a,0.0),),
((-LarguraS/2-1,-4*a,0.0),),((LarguraS/2+1,-4*a,0.0),))
CPF = regionToolset.Region(faces=(CPf))
CPPart.SectionAssignment(region=CPF, sectionName='AL 7050')

Sf =
SPart.faces.findAt(((0.0,a,0.0),),((0.0,2*a,0.0),),((0.0,4*a,0.0),))
SF = regionToolset.Region(faces=(Sf))
SPart.SectionAssignment(region=SF, sectionName='AL 7050')

#-----
# Montagem

import assembly

# Create the part instance
FrettingAssembly = Fretting.rootAssembly
CPInstance = FrettingAssembly.Instance(name='CP Instance',part =
CPPart, dependent=ON)
SInstance = FrettingAssembly.Instance(name='Sapata Instance',part =
SPart, dependent=ON)

#-----
# Criar Steps

Fretting.StaticStep(name='TracaoCP', previous='Initial',
    maxNumInc=100000, initialInc=0.0001, minInc=1e-09, maxInc=0.02,
nlgeom=ON)

Fretting.StaticStep(name='Aperto', previous='TracaoCP',
    maxNumInc=10000, initialInc=0.0001, minInc=1e-09, maxInc=0.02,
nlgeom=ON)

Fretting.StaticStep(name='Ciclos', previous='Aperto',

```

```

        timePeriod=NCiclos+0.25, maxNumInc=100000, initialInc=0.0001,
minInc=1e-10,
        maxInc=0.01, nlgeom=ON)

Fretting.fieldOutputRequests['F-Output-1'].setValues(
    timeInterval=0.05)

Fretting.fieldOutputRequests['F-Output-1'].setValues(variables=(
    'S', 'PE', 'PEEQ', 'PEMAG', 'LE', 'U', 'RF', 'CF', 'CSTRESS',
'CDISP',
    'CSTATUS'))
#-----
# Contato

Fretting.ContactProperty('CP-Sapata')
Fretting.interactionProperties['CP-Sapata'].TangentialBehavior(
    formulation=LAGRANGE, directionality=ISOTROPIC,
slipRateDependency=OFF,
    pressureDependency=OFF, temperatureDependency=OFF, dependencies=0,
table=((
    0.6, ), ), shearStressLimit=None)
Fretting.interactionProperties['CP-Sapata'].NormalBehavior(
    pressureOverclosure=HARD, allowSeparation=ON,
constraintEnforcementMethod=DEFAULT)

# Superfícies em contato:
teta=asin((a)/Raios)
CPContactSurface = CPInstance.edges.findAt(((0.0,0.0,0.0),))
region1=Fretting.rootAssembly.Surface(sidelEdges=CPContactSurface,
name='Slave')
SContactSurface1 = SInstance.edges.findAt((-a,Raios-
Raios*cos(teta),0.0),((a,Raios-Raios*cos(teta),0.0),))
region2=Fretting.rootAssembly.Surface(sidelEdges=SContactSurface1,
name='Master1')

Fretting.SurfaceToSurfaceContactStd(name='Int-1',
    createStepName='TracaoCP', master=region2, slave=region1,
sliding=FINITE,
    thickness=ON, interactionProperty='CP-Sapata', adjustMethod=NONE,
initialClearance=OMIT, datumAxis=None, clearanceRegion=None)

# Pontos de Referencia

Fretting.rootAssembly.ReferencePoint(point=(0.0,ComprimentoS+5,0.0))
Fretting.rootAssembly.ReferencePoint(point=(ComprimentoCP/2+5,-
LarguraCP/4,0.0))

r1 = Fretting.rootAssembly.referencePoints
RP1= Fretting.rootAssembly.Set(referencePoints=(r1[7],), name='m_Set-
1')
RP2= Fretting.rootAssembly.Set(referencePoints=(r1[8],), name='m_Set-
2')

# Restricoes

SConstraintSurface = SInstance.edges.findAt(((0.0,ComprimentoS,0.0),))
CPConstraintSurface = CPInstance.edges.findAt(((ComprimentoCP/2,-
LarguraCP/4,0.0),))

```

```

S1=Fretting.rootAssembly.Surface(sidelEdges=SConstraintSurface,
name='S_Top')
S2=Fretting.rootAssembly.Surface(sidelEdges=CPConstraintSurface,
name='CP_L')

Fretting.Coupling(name='Constraint-1', controlPoint=RP1,
    surface=S1, influenceRadius=WHOLE_SURFACE, couplingType=KINEMATIC,
    localCsys=None, u1=ON, u2=ON, ur3=ON)

Fretting.Coupling(name='Constraint-2', controlPoint=RP2,
    surface=S2, influenceRadius=WHOLE_SURFACE,
    couplingType=KINEMATIC,
    localCsys=None, u1=ON, u2=ON, ur3=ON)

#-----
# Aplicar Condicoes de Contorno

# Simetria em Y - CP
CPBC1e = CPInstance.edges.findAt(((0.0,-LarguraCP/2,0.0),))
CPBC1 = regionToolset.Region(edges=(CPBC1e))

Fretting.DisplacementBC(name='Simetria CP',
    createStepName='Initial',region=CPBC1,
    u1=UNSET, u2=SET, ur3=UNSET)

# Engaste CP
CPBC2e = CPInstance.edges.findAt((-ComprimentoCP/2,0.0,0.0),)
CPBC2 = regionToolset.Region(edges=(CPBC2e))

Fretting.DisplacementBC(name='Engaste',
    createStepName='Initial',region=CPBC2,
    u1=SET, u2=SET, ur3=SET)

# Condicao de Contorno - Sapata

Fretting.DisplacementBC(name='BC Sapata',
    createStepName='Initial',region=RP1,
    u1=SET, u2=UNSET, ur3=SET)

# Condicao de Contorno - CP

Fretting.DisplacementBC(name='BC CP',
    createStepName='Initial',region=RP2,
    u1=UNSET, u2=SET, ur3=SET)

#-----
# Definir Carregamentos

# Definir Amplitude Senoidal
Fretting.PeriodicAmplitude(name='Sin', timeSpan=STEP,
    frequency=6.28, start=0.0, a_0=0.0, data=((0.0, 1.0), ))

# Carregamentos:

# Bulk
Fretting.ConcentratedForce(name='Bulk',

```

```

        createStepName='TracaoCP', region=RP2, cf1=Bulk/(2*EspessuraCP),
        distributionType=UNIFORM, field='', localCsys=None)

# Bulk Alternada
mdb.models['Fretting'].ConcentratedForce(name='BulkAlt',
        createStepName='Ciclos', region=RP2, cf1=Bulk_Alt/(2*EspessuraCP),
        amplitude='Sin',
        distributionType=UNIFORM, field='', localCsys=None)

# Aperto Sapata
Fretting.ConcentratedForce(name='ApertoSapata',
        createStepName='TracaoCP', region=RP1, cf2=-10,
        distributionType=UNIFORM, field='', localCsys=None)

Fretting.loads['ApertoSapata'].setValuesInStep(stepName='Aperto',
        cf2=-ApertoSapata/EspessuraS)

#-----
# Malha de Elementos Finitos

import mesh

# Malha - CP

elemType1 = mesh.ElemType(elemCode=CPE4R, elemLibrary=STANDARD,
        secondOrderAccuracy=OFF, hourglassControl=DEFAULT,
        distortionControl=DEFAULT)
elemType2 = mesh.ElemType(elemCode=CPE3, elemLibrary=STANDARD)

CPMeshEdges1 = CPInstance.edges.findAt(((0.0,0.0,0.0)),((-1.5*a,-
a,0.0)),
((1.5*a,-a,0.0)),((0.0,-1.5*a,0.0)))
CPPart.seedEdgeBySize(edges=CPMeshEdges1, size=cpe1,
        deviationFactor=0.1,
        minSizeFactor=0.1, constraint=FINER)

CPMeshEdges2 = CPInstance.edges.findAt(((2*a,0.0,0.0)),((-
2*a,0.0,0.0)),
((-3*a,-a,0.0)),((3*a,-a,0.0)),((0.0,-3*a,0.0)))
CPPart.seedEdgeBySize(edges=CPMeshEdges2, size=cpe2,
        deviationFactor=0.1,
        minSizeFactor=0.1, constraint=FINER)

CPMeshEdges3 = CPInstance.edges.findAt(((0.0,-LarguraCP/2,0.0)),((-
4*a,0.0,0.0)),
((4*a,0.0,0.0)),((-ComprimentoCP/2,-a,0.0)),((ComprimentoCP/2,-
a,0.0)))
CPPart.seedEdgeBySize(edges=CPMeshEdges3, size=cpe3,
        deviationFactor=0.1,
        minSizeFactor=0.1, constraint=FINER)

CPPart.setElementType(regions=CPF, elemTypes=(elemType1, elemType2))
CPPart.generateMesh()

# Malha - CP

teta2=asin((2*a)/Raios)
teta3=asin((4*a)/Raios)

```

```

elemType1 = mesh.ElemType(elemCode=CPE4R, elemLibrary=STANDARD,
    secondOrderAccuracy=OFF, hourglassControl=DEFAULT,
    distortionControl=DEFAULT)
elemType2 = mesh.ElemType(elemCode=CPE3, elemLibrary=STANDARD)

SMeshEdges1 = SInstance.edges.findAt((( -a,RaioS-
RaioS*cos(teta),0.0),), ((a,RaioS-
RaioS*cos(teta),0.0),), ((1.5*a,a,0.0),),
((-1.5*a,a,0.0),), ((0.0,1.5*a,0.0),))
SPart.seedEdgeBySize(edges=SMeshEdges1, size=se1, deviationFactor=0.1,
    minSizeFactor=0.1, constraint=FINER)

SMeshEdges2 = SInstance.edges.findAt((( -2*a,RaioS-
RaioS*cos(teta2),0.0),), ((2*a,RaioS-
RaioS*cos(teta2),0.0),), ((3*a,a,0.0),),
((-3*a,a,0.0),), ((0.0,3*a,0.0),))
SPart.seedEdgeBySize(edges=SMeshEdges2, size=se2, deviationFactor=0.1,
    minSizeFactor=0.1, constraint=FINER)

SMeshEdges3 = SInstance.edges.findAt((( -4*a,RaioS-
RaioS*cos(teta3),0.0),), ((4*a,RaioS-
RaioS*cos(teta3),0.0),), ((LarguraS/2,a,0.0),),
((-LarguraS/2,a,0.0),), ((0.0,ComprimentoS,0.0),))
SPart.seedEdgeBySize(edges=SMeshEdges3, size=se3, deviationFactor=0.1,
    minSizeFactor=0.1, constraint=FINER)

SPart.setElementType(regions=SF, elemTypes=(elemType1, elemType2))
SPart.generateMesh()

#-----
#-----
# Create and run the job

import job

mdb.Job(name=nome, model='Fretting', type=ANALYSIS,
explicitPrecision=SINGLE,
    nodalOutputPrecision=SINGLE, description='Simula o ensaio de
fretting',
    parallelizationMethodExplicit=DOMAIN,
multiprocessingMode=DEFAULT, numDomains=12, userSubroutine='',
    numCpus=12, memory=90, memoryUnits=PERCENTAGE, scratch='',
echoPrint=OFF, modelPrint=OFF, contactPrint=OFF,
    historyPrint=OFF)

# Run the job
#mdb.jobs['Ensaio1'].submit(consistencyChecking=OFF)

# Do not return control till job is finished running
#mdb.jobs['Ensaio1'].waitForCompletion()

# End of run job
#-----
#-----

```

ANEXO C – ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES

```

! BEGIN SUBROUTINE SUAR
! Lucival Malcher and Felipe Canut, September, 2016
SUBROUTINE SUGAF(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS , RSTAVA , &
    STRAN , STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , &
    NSTRE , NLALGV , IINCS)
IMPLICIT NONE
!PARAMETER DECLARATION
INTEGER, PARAMETER:: IPHARD=8, KSTRE=4
!DATA DECLARATION
REAL(8) R0 /0.0D0/
REAL(8) RP5 /0.5D0/
REAL(8) R1 /1.0D0/
REAL(8) R2 /2.0D0/
REAL(8) R3 /3.0D0/
REAL(8) R4 /4.0D0/
REAL(8) R5 /5.0D0/
REAL(8) R27 /27.0D0/
REAL(8) R81 /81.0D0/
REAL(8) R243 /243.0D0/
REAL(8) R1458 /1458.0D0/
REAL(8) TOL /1.D-01/
REAL(8) PI /3.14150D0/
INTEGER MXITER /500/
!=====
=====
!=====
=====
!SCALAR VARIABLES FROM ARGUMENTS
INTEGER NTYPE , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE , NLALGV ,
IINCS

REAL(8) DGAMA

INTEGER, DIMENSION(NIPROP) :: IPROPS
REAL(8) , DIMENSION(NRPROP) :: RPROPS
REAL(8) , DIMENSION(NRSTAV) :: RSTAVA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRA) :: STRAN
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE) :: STRES
LOGICAL, DIMENSION(NLALGV) :: LALGVA
!=====
=====
!=====
=====
! DECLARATION OF LOCAL VARIABLES
LOGICAL IFPLAS , SUFAIL , ERROR

INTEGER NHARD , IITER , I , J , K

REAL(8) EPBARN , YOUNG , POISS , SIGMAT , SIGMAS , GMODU , BULK
, R2G , &
R3G , & , EEV , P , EEVD3 , SIGMAY , XI , PHI ,
QTRIAL , &
VARJ2T , DETS , EPBAR , NORMS , SEQ , EQ2 , ADBETA ,
BDBETA , VARJ2 , &
CDBETA , DDBETA , EDBETA , ADALPHA , BDALPHA , DDALPHA , RESNOR ,
HSLOPE,HKSLOPE,BKIN, EQ3,EQ4, &
POROS0 , POROSN , POROS , PTRIAL, ALPHAV, DALPHAP, DALPHAF, TEMP,
TEMP2, &

```

```

Q4, Q5, qdev, detdev, rdev, ksi, g0

REAL(8), DIMENSION(4) :: EET , STRIAL , ALPHAD , SINVT , BETA ,
PROSINVT, ETA, ETAN, BACKN, BACK
REAL(8), DIMENSION(4) :: EQ1 , EQ5
! FOURTH ORDER IDENTITY TENSOR
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: FOID , DFOID
REAL(8), DIMENSION(4) :: SOID
! DYADIC PRODUCT BETWEEN S AND S
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: SDOTS
! DYADIC PRODUCT BETWEEN S^(-T) AND S^(-T)
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: SITDSIT , PROSITDSIT
! DYADIC PRODUCT BETWEEN S^(-T) AND S
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: SITDS , PROSITDS
! DYADIC PRODUCT BETWEEN S AND S^(-T)
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: SDSIT
! DERIVATIVE OF BETA IN RELATION TO S
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: DBETA
! DERIVATIVE OF XI IN RELATION TO S
REAL(8), DIMENSION(4) :: DXI
! DYADIC PRODUCT BETWEEN DXI AND BETA
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: DXIDBETA
! DERIVATIVE OF PARAMETER ALPHA IN RELATION TO S
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: DALPHA
! DERIVATIVE OF PARAMETER ALPHA IN RELATION TO BACK
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: DALPHAB
! DERIVATIVE OF S^(-T) IN RELATION TO S
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: SDSINVT , PRODSITDS
! MATRIX WITH TEH DERIVATIVES FOR THE NEWTON-RAPHSON METHOD
REAL(8), DIMENSION(11,11) :: MATRIX , INVMATRIX
REAL(8), DIMENSION(11) :: RHS , RES
! DERIVATIVE OF S^-T IN ORDER TO S
REAL(8), DIMENSION(4,4) :: DSITDS
! DXI\OTIMES \BETA

REAL(8) PLFUN , DPLFUN

real(8), dimension(4,4) :: aux

! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! FÁBIO REIS & FILIPE XAVIER - AUGUST, 2012
! *****
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE DALPHA E O TENSOR DAS TENSÕES
! GLOBAIS
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: DC_DALPHA_SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE ALPHA E SIGMA
REAL(8) DC_ALPHA_SIGMA
!=====
=====
!=====
=====
! INITILIZE LOCAL VARIABLES
IFPLAS=.FALSE.
SUFAIL=.FALSE.
ERROR=.FALSE.

NHARD=0 ; IITER=0 ; I=0 ; J=0 ; K=0

```

```

EPBARN=R0 ; YOUNG=R0 ; POISS=R0 ; SIGMAT=R0 ; SIGMAS=R0 ; GMODU=R0
; BULK=R0
R2G=R0 ; R3G=R0 ; EEV=R0 ; P=R0 ; EEVD3=R0 ;
SIGMAY=R0 ; XI=R0
PHI=R0 ; QTRIAL=R0 ; VARJ2T=R0 ; DETS=R0 ; EPBAR=R0 ; NORMS=R0
; SEQ=R0
ADBETA=R0 ; BDBETA=R0 ; CDBETA=R0 ; DDBETA=R0 ; EDBETA=R0 ;
ADALPHA=R0 ; BDALPHA=R0
DDALPHA=R0 ; RESNOR=R0 ; HSLOPE=R0 ; HKSLOPE=R0 ; BKIN=R0 ; EQ2=R0
; EQ3=R0 ; EQ4=R0
PROSITDSIT=R0 ; PROSITDS=R0 ; PRODSITDS=R0 ; PROSINVT=R0 ;
DXIDBETA=R0 ; VARJ2=R0

EET=R0 ; STRIAL=R0 ; SINVT=R0 ; BETA=R0 ; EQ5=R0 ; PTRIAL=R0

POROS0=R0 ; POROSN=R0 ; POROS=R0 ; Q4=R0 ; Q5=R0 ; qdev=R0 ;
detdev=R0 ; rdev=R0 ; ksi=R0 ; g0=R0

aux=R0

! INITIALIZE THE IDENTITY FOURTH ORDER TENSOR
FOID=R0
FOID(1,1)=R1
FOID(2,2)=R1
FOID(3,3)=R1
FOID(4,4)=R1

DFOID=R0
SOID=R0
SOID(1)=R1
SOID(2)=R1
SOID(4)=R1

DO I=1,4
  DO J=1,4
    DFOID(I,J)=FOID(I,J) - (R1/R3)*SOID(I)*SOID(J)
  ENDDO
ENDDO
DFOID(3,3)=DFOID(3,3)*R2

SDOTS=R0 ; MATRIX=R0 ; SITDSIT=R0 ; SITDS=R0 ; DBETA=R0 ; DXI=R0 ;
RHS=R0
RES=R0 ; DSITDS=R0 ; INVMATRIX=R0
! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO

! FÁBIO REIS & FILIPE XAVIER - AUGUST, 2012
! *****
SIGMA=R0 ; DC_DALPHA_SIGMA=R0 ; DC_ALPHA_SIGMA=R0
!=====
=====
!=====
=====
! ALGORITHM
! Stop program if neither plane strain nor axisymmetric state
!IF(NTYPE.NE.2.AND.NTYPE.NE.3)CALL ERRPRT('EI0013')
! Initialise some algorithmic and internal variables
DGAMA=R0
STRES=R0
EPBARN=RSTAVA(KSTRE+1)

```

```

!
BACKN(1)=RSTAVA(KSTRE+1+2)
BACKN(2)=RSTAVA(KSTRE+1+3)
BACKN(3)=RSTAVA(KSTRE+1+4)
BACKN(4)=RSTAVA(KSTRE+1+5)
! Set some material properties
YOUNG=RPROPS(2)
POISS=RPROPS(3)
POROS0=RPROPS(4)
NHARD=IPROPS(3)
SIGMAY=RPROPS(5)
HKSLOPE=RPROPS(6)
BKIN=RPROPS(7)
Q4=R3/SQRT(PI)
Q5=R1/R2
! Shear and bulk moduli and other necessary constants
GMODU=YOUNG/(R2*(R1+POISS))
BULK=YOUNG/(R3*(R1-R2*POISS))
R2G=R2*GMODU
R3G=R3*GMODU
! Elastic predictor: Compute elastic trial state
! -----
! Volumetric strain and pressure stress
EEV=STRAN(1)+STRAN(2)+STRAN(4)
PTRIAL=BULK*EEV
! Elastic trial deviatoric strain
EEVD3=EEV/R3
EET(1)=STRAN(1)-EEVD3
EET(2)=STRAN(2)-EEVD3
EET(4)=STRAN(4)-EEVD3
! Convert engineering shear component into physical component
EET(3)=STRAN(3)/R2
!
ETAN(1)=R2G*EET(1)-BACKN(1)
ETAN(2)=R2G*EET(2)-BACKN(2)
ETAN(3)=R2G*EET(3)-BACKN(3)
ETAN(4)=R2G*EET(4)-BACKN(4)
! Compute trial porosity
IF (IINCS.EQ.3) THEN
    POROSN=POROS0/100
    RSTAVA(11)=POROS0
ELSE
    POROSN=RSTAVA(KSTRE+1+1)
ENDIF
! Compute trial effective stress and uniaxial yield stress
VARJ2T= (R1/R2)* (
ETAN(1)*ETAN(1)+ETAN(2)*ETAN(2)+R2*ETAN(3)*ETAN(3)+ETAN(4)*ETAN(4) )

PHI=VARJ2T-(R1/R3)*SIGMAY*SIGMAY*(R1+POROSN*POROSN-
R2*POROSN*DCOSH(R3*PTRIAL/(R2*SIGMAY)))
!
TEMP=(R1/R3)*SIGMAY*SIGMAY*(R1+POROSN*POROSN-
R2*POROSN*DCOSH(R3*PTRIAL/(R2*SIGMAY)))
!
IF ((PHI/TEMP).GT.TOL) THEN
! write(*,*) '=====
! PLASTIC DOMAIN
IFPLAS=.TRUE.
! INITILIZE THE VARIABLES FOR THE NEWTON-RAPHSON METHOD
EPBAR=EPBARN
STRIAL=R2G*EET

```

```

STRES=STRIAL
BACK=BACKN
ETA=ETAN
POROS=POROSN
P=PTRIAL
DO IITER=1,50
  !*****
  ! COMPUTE S \OTIMES S
  !*****
  DO I=1,4
    DO J=1,4
      IF (I.EQ.3) THEN
        IF (J.EQ.3) THEN
          SDOTS (I, J)=R2*ETA (I) *BACK (J)
        ELSE
          SDOTS (I, J)=ETA (I) *BACK (J)
        ENDIF
        GOTO 100
      ELSEIF (J.EQ.3) THEN
          SDOTS (I, J)=R2*ETA (I) *BACK (J)
      ELSE
          SDOTS (I, J)=ETA (I) *BACK (J)
      ENDIF
    100 CONTINUE
    ENDDO
  ENDDO
  !
  ! VARJ2 -> J2
  VARJ2=(R1/R2) * (ETA (1) *ETA (1) +ETA (2) *ETA (2) +R2*ETA (3) *ETA (3) +&
    ETA (4) *ETA (4) )
  !
  DO I=1,4
    ALPHAD (I) =ETA (I)
  !
  ENDDO
  ALPHAV=(R1/R3) *SIGMAY*POROS*DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY) )
  !
  !Cálculo de g0
  qdev=DSQRT (
  (R3/R2) * (STRES (1) *STRES (1) +STRES (2) *STRES (2) +R2*STRES (3) *STRES (3) +STRE
  S (4) *STRES (4) ) )
  detdev=STRES (1) *STRES (2) *STRES (4) -STRES (3) *STRES (3) *STRES (4)
  rdev=(r27/r2) *detdev
  ksi=rdev/ (qdev**3)
  rdev= ((r27/r2) *detdev) ** (r1/r3)
  g0=r1-ksi*ksi
  !
  !
  TEMP2=DSQRT ( (R2/R3) * ( (R2*VARJ2) +
  (R1/R3) *POROS*POROS*SIGMAY*SIGMAY*DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY) ) *DSINH (R3*P/ (
  R2*SIGMAY) ) ) ) )
  !
  ! INITILIZE THE RESIDUAL EQUATION --> EQi
  EQ1 (1) =STRES (1) -STRIAL (1) +R2G*DGAMA*ALPHAD (1)
  EQ1 (2) =STRES (2) -STRIAL (2) +R2G*DGAMA*ALPHAD (2)
  EQ1 (3) =STRES (3) -STRIAL (3) +R2G*DGAMA*ALPHAD (3)
  EQ1 (4) =STRES (4) -STRIAL (4) +R2G*DGAMA*ALPHAD (4)
  !
  EQ2=P-PTRIAL-BULK*DGAMA*ALPHAV
  !

```

```

EQ3=POROS-POROSN- (R1-
POROS) *DGAMA*POROS*SIGMAY*DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY) ) -
g0*Q4* (POROS**Q5) *EPBAR*DGAMA*TEMP2
!
EQ4=VARJ2- (R1/R3) *SIGMAY*SIGMAY* (R1+POROS*POROS-
R2*POROS*DCOSH (R3*P/ (R2*SIGMAY) ))
!
EQ5 (1) =BACK (1) -BACKN (1) -
(R2/R3) *HKSLOPE*DGAMA* (ALPHAD (1) +ALPHAV*SOID (1) ) +
BKIN*DGAMA*TEMP2*BACK (1)
EQ5 (2) =BACK (2) -BACKN (2) -
(R2/R3) *HKSLOPE*DGAMA* (ALPHAD (2) +ALPHAV*SOID (2) ) +
BKIN*DGAMA*TEMP2*BACK (2)
EQ5 (3) =BACK (3) -BACKN (3) -
(R2/R3) *HKSLOPE*DGAMA* (ALPHAD (3) +ALPHAV*SOID (3) ) +
BKIN*DGAMA*TEMP2*BACK (3)
EQ5 (4) =BACK (4) -BACKN (4) -
(R2/R3) *HKSLOPE*DGAMA* (ALPHAD (4) +ALPHAV*SOID (4) ) +
BKIN*DGAMA*TEMP2*BACK (4)

! =====
===

! =====
===

! CONSTRUCT THE MATRIX WITH THE DERIVATIVES

! =====
===

! =====
===

! =====
===

! =====
! COMPUTE DALPHA
! =====
DALPHA=R0
DALPHAB=R0
DO I=1,4
DO J=1,4
DALPHA (I, J) =FOID (I, J)

DALPHAB (I, J) =-FOID (I, J)
ENDDO
ENDDO
DALPHAP= (R1/R2) *POROS*DCOSH (R3*P/ (R2*SIGMAY) )
DALPHAF= (R1/R3) *SIGMAY*DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY) )

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!
!Derivada do g0
!

NORMS=DSQRT (STRES (1) *STRES (1) +STRES (2) *STRES (2) +R2*STRES (3) *STRES (3) +&
STRES (4) *STRES (4) )
!
ADBETA=R27*detdev/ (R2* (qdev**R3) )
BDBETA=DSQRT (R3/R2) * (R81*detdev) / (R2* (qdev**R4) *NORMS)

```

```

!
SINVT (1)=STRES (2)*STRES (4)/detdev
SINVT (2)=STRES (1)*STRES (4)/detdev
SINVT (3)=-STRES (3)*STRES (4)/detdev
SINVT (4)=(STRES (1)*STRES (2)-STRES (3)*STRES (3))/detdev
!
! =====
! COMPUTE DXI
! =====
IF (DABS(KSI).LE.TOL) then
    DXI=R0
ELSE
    DO I=1,4
        DXI (I)=ADBETA*SINVT (I)-BDBETA*STRES (I)
    ENDDO
ENDIF

! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À PRIMEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

MATRIX=R0
DO I=1,4
    DO J=1,4
        MATRIX (I,J)=FOID (I,J)+R2G*DGAMA*DALPHA (I,J)
    ENDDO
ENDDO

MATRIX (1,5)=R0
MATRIX (2,5)=R0
MATRIX (3,5)=R0
MATRIX (4,5)=R0

MATRIX (1,6)=R0
MATRIX (2,6)=R0
MATRIX (3,6)=R0
MATRIX (4,6)=R0

MATRIX (1,7)=R2G*ALPHAD (1)
MATRIX (2,7)=R2G*ALPHAD (2)
MATRIX (3,7)=R2G*ALPHAD (3)
MATRIX (4,7)=R2G*ALPHAD (4)

DO I=1,4
    DO J=1,4
        MATRIX (I,J+7)=R2G*DGAMA*DALPHAB (I,J)
    ENDDO
ENDDO

! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À SEGUNDA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

MATRIX (5,1)=R0
MATRIX (5,2)=R0
MATRIX (5,3)=R0
MATRIX (5,4)=R0
!
MATRIX (5,5)=R1+BULK*DGAMA*DALPHAP
!

```

```

MATRIX (5,6)=BULK*DGAMA*DALPHA F
!
MATRIX (5,7)=BULK*ALPHA V
!
MATRIX (5,8)=R0
MATRIX (5,9)=R0
MATRIX (5,10)=R0
MATRIX (5,11)=R0
!
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À TERCEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====
MATRIX (6,1)= (r2*ksi*dxi (1)) *Q4*(POROS**Q5)*EPBAR*DGAMA*TEMP2
- g0*Q4*(POROS**Q5)*DGAMA*( (R1/(R2*TEMP2)) *(R2/R3)*R2*ETA (1)
)* (DGAMA*TEMP2 + EPBAR)
MATRIX (6,2)= (r2*ksi*dxi (2)) *Q4*(POROS**Q5)*EPBAR*DGAMA*TEMP2
- g0*Q4*(POROS**Q5)*DGAMA*( (R1/(R2*TEMP2)) *(R2/R3)*R2*ETA (2)
)* (DGAMA*TEMP2 + EPBAR)
MATRIX (6,3)= (r2*ksi*dxi (3)) *Q4*(POROS**Q5)*EPBAR*DGAMA*TEMP2
- g0*Q4*(POROS**Q5)*DGAMA*( (R1/(R2*TEMP2)) *(R2/R3)*R2*ETA (3)
)* (DGAMA*TEMP2 + EPBAR)
MATRIX (6,4)= (r2*ksi*dxi (4)) *Q4*(POROS**Q5)*EPBAR*DGAMA*TEMP2
- g0*Q4*(POROS**Q5)*DGAMA*( (R1/(R2*TEMP2)) *(R2/R3)*R2*ETA (4)
)* (DGAMA*TEMP2 + EPBAR)
!
MATRIX (6,5)=- (R1-
POROS)* (R3/R2)*DGAMA*POROS*DCOSH (R3*P/(R2*SIGMAY)) -
g0*Q4*(POROS**Q5)*DGAMA*( (R1/(R2*TEMP2)) *(R2/R3)*POROS*POROS*SIGMAY*
&
DSINH (R3*P/(R2*SIGMAY))*DCOSH (R3*P/(R2*SIGMAY)) )*(DGAMA*TEMP2 +
EPBAR)
!
MATRIX (6,6)=R1- ((R1-
R2*POROS)*DGAMA*SIGMAY*DSINH (R3*P/(R2*SIGMAY))) -
g0*Q4*Q5*(POROS** (Q5-R1))*DGAMA*TEMP2*EPBAR - &
g0*Q4*(POROS**Q5)*DGAMA*(
(R1/(R2*TEMP2))* (R2/R3)* (R2/R3)*POROS*SIGMAY*SIGMAY* &
DSINH (R3*P/(R2*SIGMAY))*DSINH (R3*P/(R2*SIGMAY)) )*(DGAMA*TEMP2 +
EPBAR)
!
MATRIX (6,7)=- (R1-POROS)*POROS*SIGMAY*DSINH (R3*P/(R2*SIGMAY)) -
g0*Q4*(POROS**Q5)*TEMP2*(DGAMA*TEMP2 + EPBAR)
!
MATRIX (6,8)= - g0*Q4*(POROS**Q5)*DGAMA*(
(R1/(R2*TEMP2))* (R2/R3)* (-R2)*ETA (1) )*(DGAMA*TEMP2 + EPBAR)
MATRIX (6,9)= - g0*Q4*(POROS**Q5)*DGAMA*(
(R1/(R2*TEMP2))* (R2/R3)* (-R2)*ETA (2) )*(DGAMA*TEMP2 + EPBAR)
MATRIX (6,10)= - g0*Q4*(POROS**Q5)*DGAMA*(
(R1/(R2*TEMP2))* (R2/R3)* (-R2)*ETA (3) )*(DGAMA*TEMP2 + EPBAR)
MATRIX (6,11)= - g0*Q4*(POROS**Q5)*DGAMA*(
(R1/(R2*TEMP2))* (R2/R3)* (-R2)*ETA (4) )*(DGAMA*TEMP2 + EPBAR)
!
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À QUARTA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

MATRIX (7,1)=ETA (1)
MATRIX (7,2)=ETA (2)

```

```

MATRIX (7,3)=R2*ETA (3)
MATRIX (7,4)=ETA (4)
!
MATRIX (7,5)=R2*SIGMAY*POROS*DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY))
!
MATRIX (7,6)=- (R1/R3)*SIGMAY* (R2*POROS-
R2*DCOSH (R3*P/ (R2*SIGMAY)))
!
MATRIX (7,7)=R0
!
MATRIX (7,8)=-ETA (1)
MATRIX (7,9)=-ETA (2)
MATRIX (7,10)=-R2*ETA (3)
MATRIX (7,11)=-ETA (4)
!
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À QUINTA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

DO I=1,4
  DO J=1,4
    MATRIX (I+7,J)= -
    (R2/R3)*HKSLOPE*DGAMA*DALPHA (I,J)+BKIN*DGAMA* (R1/ (R2*TEMP2))* (R2/R3)*R
    2*SDOTS (I,J)
  ENDDO
ENDDO
!
MATRIX (8,5)=-
(R2/R3)*HKSLOPE*DGAMA*DALPHAP*SOID (1)+BKIN*DGAMA* (R1/ (R2*TEMP2))* (R2/R
3)*POROS*POROS*SIGMAY* &
DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*DCOSH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*BACK (1)
MATRIX (9,5)=-
(R2/R3)*HKSLOPE*DGAMA*DALPHAP*SOID (2)+BKIN*DGAMA* (R1/ (R2*TEMP2))* (R2/R
3)*POROS*POROS*SIGMAY* &
DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*DCOSH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*BACK (2)
MATRIX (10,5)=-
(R2/R3)*HKSLOPE*DGAMA*DALPHAP*SOID (3)+BKIN*DGAMA* (R1/ (R2*TEMP2))* (R2/R
3)*POROS*POROS*SIGMAY* &
DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*DCOSH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*BACK (3)
MATRIX (11,5)=-
(R2/R3)*HKSLOPE*DGAMA*DALPHAP*SOID (4)+BKIN*DGAMA* (R1/ (R2*TEMP2))* (R2/R
3)*POROS*POROS*SIGMAY* &
DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*DCOSH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*BACK (4)
!
MATRIX (8,6)=-
(R2/R3)*HKSLOPE*DGAMA*DALPHAF*SOID (1)+BKIN*DGAMA* (R1/ (R2*TEMP2))* (R2/R
3)* (R2/R3)*POROS*SIGMAY*SIGMAY* &
DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*BACK (1)
MATRIX (9,6)=-
(R2/R3)*HKSLOPE*DGAMA*DALPHAF*SOID (2)+BKIN*DGAMA* (R1/ (R2*TEMP2))* (R2/R
3)* (R2/R3)*POROS*SIGMAY*SIGMAY* &
DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*DSINH (R3*P/ (R2*SIGMAY))*BACK (2)
MATRIX (10,6)=-
(R2/R3)*HKSLOPE*DGAMA*DALPHAF*SOID (3)+BKIN*DGAMA* (R1/ (R2*TEMP2))* (R2/R
3)* (R2/R3)*POROS*SIGMAY*SIGMAY* &

```

```

DSINH (R3*P / (R2*SIGMAY)) *DSINH (R3*P / (R2*SIGMAY)) *BACK (3)
      MATRIX (11, 6) =-
      (R2/R3) *HKSLOPE *DGAMA *DALPHAF *SOID (4) +BKIN *DGAMA * (R1 / (R2*TEMP2)) * (R2/R
3) * (R2/R3) *POROS *SIGMAY *SIGMAY * &

DSINH (R3*P / (R2*SIGMAY)) *DSINH (R3*P / (R2*SIGMAY)) *BACK (4)
      !
      MATRIX (8, 7) =-
      (R2/R3) *HKSLOPE * (ALPHAD (1) +ALPHAV*SOID (1)) +BKIN *TEMP2 *BACK (1)
      MATRIX (9, 7) =-
      (R2/R3) *HKSLOPE * (ALPHAD (2) +ALPHAV*SOID (2)) +BKIN *TEMP2 *BACK (2)
      MATRIX (10, 7) =-
      (R2/R3) *HKSLOPE * (ALPHAD (3) +ALPHAV*SOID (3)) +BKIN *TEMP2 *BACK (3)
      MATRIX (11, 7) =-
      (R2/R3) *HKSLOPE * (ALPHAD (4) +ALPHAV*SOID (4)) +BKIN *TEMP2 *BACK (4)
      !
      DO I=1, 4
        DO J=1, 4
          MATRIX (I+7, J+7) =FOID (I, J) -
          (R2/R3) *HKSLOPE *DGAMA *DALPHAB (I, J) + &
          BKIN *DGAMA * (
          (R1 / (R2*TEMP2)) * (R2/R3) * (-R2) *SDOTS (I, J) + TEMP2 *FOID (I, J) )
        ENDDO
      ENDDO
      !
      RHS=R0
      RHS (1) =-EQ1 (1)
      RHS (2) =-EQ1 (2)
      RHS (3) =-EQ1 (3)
      RHS (4) =-EQ1 (4)
      RHS (5) =-EQ2
      RHS (6) =-EQ3
      RHS (7) =-EQ4
      RHS (8) =-EQ5 (1)
      RHS (9) =-EQ5 (2)
      RHS (10) =-EQ5 (3)
      RHS (11) =-EQ5 (4)

!=====
=
      ! SOLVE THE EQUATION SYSTEM

!=====
=
      RES=R0
      CALL SOLVERMA (MATRIX, RHS, RES, 11)

!=====
=
      ! SOLVE THE EQUATION SYSTEM

!=====
=
      ! UPDATE VARIABLES
      STRES (1) =STRES (1) +RES (1)
      STRES (2) =STRES (2) +RES (2)
      STRES (3) =STRES (3) +RES (3)
      STRES (4) =STRES (4) +RES (4)
      P=P+RES (5)
      POROS=POROS+RES (6)

```

```

DGAMA=DGAMA+RES ( 7 )
BACK ( 1 ) =BACK ( 1 ) +RES ( 8 )
BACK ( 2 ) =BACK ( 2 ) +RES ( 9 )
BACK ( 3 ) =BACK ( 3 ) +RES ( 10 )
BACK ( 4 ) =BACK ( 4 ) +RES ( 11 )

```

```

!=====
=
! CHECK CONVERGENCE
!=====
=

```

```

RESNOR=R0
IF (DABS (STRES ( 1 ) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 1 ) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 1 ) /STRES ( 1 ) )
ENDIF
IF (DABS (STRES ( 2 ) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 2 ) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 2 ) /STRES ( 2 ) )
ENDIF
IF (DABS (STRES ( 3 ) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 3 ) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 3 ) /STRES ( 3 ) )
ENDIF
IF (DABS (STRES ( 4 ) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 4 ) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 4 ) /STRES ( 4 ) )
ENDIF
IF (P.LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 5 ) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 5 ) /P)
ENDIF
IF (POROS.LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 6 ) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 6 ) /POROS)
ENDIF
IF (DGAMA.LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 7 ) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 7 ) /DGAMA)
ENDIF
IF (DABS (BACK ( 1 ) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 8 ) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 8 ) /BACK ( 1 ) )
ENDIF
IF (DABS (BACK ( 2 ) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 9 ) )
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 9 ) /BACK ( 2 ) )
ENDIF
IF (DABS (BACK ( 3 ) ) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES ( 10 ) )

```



```
STRES (3) =R2G*EET (3)
STRES (4) =R2G*EET (4) +PTRIAL
```

```
RSTAVA (1) =STRAN (1)
RSTAVA (2) =STRAN (2)
RSTAVA (3) =STRAN (3)
RSTAVA (4) =STRAN (4)
RSTAVA (5) =EPBARN
RSTAVA (6) =POROSN
RSTAVA (7) =BACKN (1)
RSTAVA (8) =BACKN (2)
RSTAVA (9) =BACKN (3)
RSTAVA (10) =BACKN (4)
```

```
ENDIF
```

```
1000 CONTINUE
```

```
!
```

```
!=====
```

```
=====
```

```
!
```

```
!=====
```

```
=====
```

```
!! Update some algorithmic variables before exit
```

```
LALGVA (1) =IFPLAS
```

```
LALGVA (2) =SUFAIL
```

```
RETURN
```

```
END
```