

**UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS ANALÍTICOS CLÁSSICOS E  
NUMÉRICO (MEF) PARA O CÁLCULO DE TABULEIRO DE PONTES EM  
GRELHAS.**

**HENALDO SANT'ANA DE MELO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS  
ANALÍTICOS CLÁSSICOS E NUMÉRICO (MEF) PARA O  
CÁLCULO DE TABULEIRO DE PONTES EM GRELHAS**

**HENALDO SANT'ANA DE MELO**

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM – 17A/16  
BRASÍLIA/DF: AGOSTO – 2016**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS ANALÍTICOS  
CLÁSSICOS E NUMÉRICO (MEF) PARA O CÁLCULO DE  
TABULEIRO DE PONTES EM GRELHAS**

**HENALDO SANT'ANA DE MELO**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE  
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADO POR:**

---

**Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (ENC-UnB)**

**(Orientador)**

---

**Prof. Paulo Chaves de Rezende Martins, Dr. ECP. (ENC-UnB)**

**(Examinador interno)**

---

**Prof. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro, DSc. (UFPE)**

**(Examinador externo)**

**BRASÍLIA/DF, 19 DE AGOSTO DE 2016.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

MM528e	MELO, HENALDO SANT'ANA DE <b>UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS ANALÍTICOS CLÁSSICOS E NUMÉRICO (MEF) PARA CÁLCULO DE TABULEIRO DE PONTES EM GRELHAS.</b> / HENALDO SANTANA DE MELO; ORIENTADOR LINEU JOSÉ PEDROSO. – Brasília, 2016. xix, 136 p.  Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, 2016 1. Grelha. 2. Método de Engesser-Courbon. 3. Método de Leonhardt. 4. Método de Guyon-Massonnet. 5. Pontes. I. PEDROSO, LINEU JOSÉ, oriente. II Título.
--------	---

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MELO. H.S. (2016). Um Estudo Comparativo entre Métodos Analíticos Clássicos e Numérico (Mef) para Cálculo de Tabuleiro de Pontes em Grelhas. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM – 17A/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 136 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Henaldo Santana de Melo.

TÍTULO: Um Estudo Comparativo entre Métodos Analíticos Clássicos e Numérico (Mef) para Cálculo de Tabuleiro de Pontes em Grelhas.

GRAU: Mestre

ANO: 2016

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado, para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Henaldo Sant'ana de Melo

Rua 24 Norte Lt 09/11 Apto 1001 B – Residencial Labelle Maison Personalisée.

71.916-750 Brasília – DF – Brasil.

Dedico a minha esposa Ângela  
e a meus filhos Gabriel e Rafael.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço ao Senhor Deus, pela imensa bondade em minha vida, por estar sempre presente ao meu lado durante esta trajetória dando-me perseverança e força para vencer os obstáculos e por ouvir minhas simples e humildes orações. Obrigado por tornardes esta conquista expressão fiel de Vossa Vontade;

Agradeço especialmente a minha esposa Ângela, que sempre me apoiou, aconselhou e incentivou a dar meu melhor. Sem você eu não teria conseguido chegar até aqui! Te amo;

Aos meus filhos Gabriel e Rafael aos sorrisos que curavam as dores do cansaço;

A minha mãe e a meu pai por plantar a semente do estudo em minha vida;

Ao professor Lineu José Pedroso que considero um excelente professor e orientador e, acima de tudo, um grande amigo, sempre presente em minhas dificuldades, muitas vezes emprestando seu ouvido, a me escutar e sempre me auxiliando, de uma forma bastante criativa, nas dúvidas que surgiram na realização deste trabalho. Serei grato a Você e sei que não poderia encontrar professor melhor para estar comigo neste período tão importante e de tantos desafios;

A cunhada Ciene Duarte, pela dedicação.

A minha prima Rejane de Carvalho, pelas sugestões e análises da língua inglesa.

Aos amigos Wilber e Adriana pela amizade, bondade, experiências e aprendizados;

Aos professores doutores Paulo Chaves de Rezende Martins e Paulo Marcelo Vieira Ribeiro que aceitaram compor minha banca de defesa, e pelas sugestões e análises significativas às quais buscarei atender na versão definitiva do texto.

Gostaria de agradecer também à Universidade de Brasília, ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC);

Aos colegas de sala Dyaloisio, Valéria, Carlos, Mayara e Cássia com quem convivi e aprendi muito com cada um;

Agradeço a todos vocês com o mais genuíno sentimento de gratidão.

## **RESUMO**

### **UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS ANALÍTICOS CLÁSSICOS E NUMÉRICO (MEF) PARA CÁLCULO DE TABULEIRO DE PONTES EM GRELHAS**

**Autor: Henaldo Santana de Melo**

**Orientador: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, agosto de 2016**

As pontes são de extrema importância num país de dimensão continental como o Brasil, que também é atravessado por rios de integração nacional. Na análise estrutural de uma ponte, as ferramentas computacionais nem sempre estiveram disponíveis para os engenheiros. Em geral, a análise da superestrutura é realizada separando-a dos demais elementos integrantes da obra: meso e infraestrutura. Nessa etapa de análise estrutural, a superestrutura em grelhas requer uma grande quantidade de cálculos, tornando a solução manual difícil de ser realizada. Por esta razão, hipóteses simplificadoras e métodos aproximados foram criados para que fosse possível a execução de cálculos analíticos; possibilitando a sua utilização na determinação das parcelas do carregamento na estrutura. Este trabalho tem como finalidade analisar o comportamento da distribuição dos coeficientes de repartição transversal das cargas, dos deslocamentos e dos momentos fletores. Foram utilizados os métodos analíticos de Engesser-Courbon, Leonhardt e Guyon-Massonnet, e o método numérico dos Elementos Finitos (MEF) através do programa SAP2000, em pontes de concreto armado com longarinas bi-apoiadas. A comparação entre esses métodos foi feita para se investigar a precisão do cálculo analítico em relação ao MEF. São descritas de forma progressiva análises de pontes com tabuleiros em grelha, com a inclusão de longarinas e transversinas adicionais, de forma clara, inclusive como cada modelagem foi feita, e como os métodos analíticos foram utilizados. Os resultados mostraram que quanto mais rígida for a estrutura em função dos números de elementos (barras) presentes no tabuleiro, mais próximo se encontram os resultados analíticos dos resultados do método numérico.

## **ABSTRACT**

### **A COMPARATIVE STUDY BETWEEN ANALYTICAL METHODS CLASSIC AND NUMERICAL (MEF) FOR BRIDGES ON SHELF TRAY CALCULATION**

**Author: Henaldo Santana de Melo**

**Orientador: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, August of 2016**

Bridges are extremely important in a country with such dimension as Brazil, which is also full of rivers that connect the whole territory. When analyzing the structure of a bridge, not always computer tools have been available for engineers. Mostly, the superstructure analysis is performed separating it from the other integrating elements of the construction, as the MESO and the infrastructure. At this analysis stage, the FRAMES superstructures demand a high quantity of calculus, turning the manual solution hard to be accomplished. So, for this reason, simplified hypothesis and approximated methods have been created to make the analytical calculus executable; allowing its application when determining portions of the total weight on the structure. This work has as main object the analysis of the behavior of the weights cross-cut parceling coefficients distribution, of the displacements and bending moments. Engesser-Courbon, Leonhardt and Guyon-Massonnet analytical methods have been used, just as the numerical method of Finiteness Elements (FEM) through the SAP2000 program, applying in reinforced concrete bridges with bi-supported stringer. The comparison between these methods has been made to investigate the precision of the analytical calculus in relation to FEM. In a progressive way, it is described the FRAME-BOARDED bridges analysis. Including additional stringers and crossbeams, in a clear way, including how each model was made and how the analytical methods were applied. The results showed that: the stiffer is the structure due to the number of elements (bars) allocated in the board, nearer will the analytical results be from the numerical method results.



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	1
1.1	GENERALIDADE .....	1
1.2	JUSTIFICATIVA .....	2
1.3	COLOCAÇÃO DO PROBLEMA .....	2
1.4	OBJETIVOS .....	3
1.5	METODOLOGIA .....	4
1.6	ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÕES .....	11
1.7	DESCRIÇÃO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	11
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	13
2.1	BREVE HISTÓRICO .....	13
2.2	PRINCIPAIS ESTUDOS .....	14
3	DESENVOLVIMENTO TEÓRICO .....	21
3.1	MÉTODO DE ENGESSER – COURBON .....	21
3.2	MÉTODO DE LEONHARDT .....	25
3.3	MÉTODO DE GUYON – MASSONNET .....	27
4	ASPECTOS COMPUTACIONAIS E MODELAGEM .....	33
4.1	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF) .....	33
4.2	PROGRAMA DE ANÁLISE ESTRUTURAL SAP/2000. ....	34
4.3	PROGRAMA MATLAB .....	36
4.4	PROGRAMA CALTAPEG .....	37
5	RESULTADOS .....	40
5.1	MODELO DE VERIFICAÇÃO DOS MÉTODOS ANÁLÍTICOS E NÚMÉRICO .....	40
5.1.1	Caso 1 – Estudo de validação .....	44
5.2	CASO 2 – MODELO GR2L1T .....	47
5.2.1	Carga sobre a transversina .....	48
5.2.2	Carga sobre o nó formado da longarina L2 e a transversina T1 .....	49

5.3 CASO 3 - MODELO GR3L1T .....	51
5.3.1 Carga sobre a transversina .....	51
5.3.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T1 .....	53
5.4 CASO 4 - MODELO GR4L1T .....	56
5.4.1 Carga sobre a transversina .....	56
5.4.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T1 .....	59
5.5 CASO 5 - MODELO GR4L2T .....	61
5.5.1 Carga sobre a transversina T1 .....	62
5.5.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T1 .....	65
5.6 CASO 6-A - MODELO GR4L3T – ESTUDO NA TRANSVERSINA T1.....	68
5.6.1 Carga sobre a transversina T1 .....	68
5.6.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T1 .....	71
5.7 CASO 6-B - MODELO GR4L3T – ESTUDO NA TRANSVERSINA T2.....	74
5.7.1 Carga sobre a transversina T2 .....	74
5.7.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T2.....	77
5.8 CASO 7-A - MODELO GR4L3T – ESTUDO INFLUÊNCIA DA LAJE .....	80
5.8.1 Carga sobre a transversina T1 .....	81
5.8.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T1 .....	84
5.9 CASO 7-B - MODELO GR4L3T – ESTUDO INFLUÊNCIA DA LAJE .....	87
5.9.1 Carga sobre a transversina T2.....	87
5.9.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T2.....	90
6 CONCLUSÕES.....	93
6.1 CONCLUSÕES GERAIS .....	93
6.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	95
6.3 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS .....	95
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	96
APÊNDICE .....	102

APÊNDICE A - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DOS ELEMENTOS DO TABULEIRO .....	103
APÊNDICE B - CENTRO ELÁSTICO PARA ESTRUTURA TRANSVERSAL DAS PONTES PELOS MÉTODOS ANALÍTICOS .....	107
APÊNDICE C - CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE DISTRIBUIÇÃO DA RIGIDÉZ EM DUAS VIGAS EM GRELHAS.....	112
APÊNDICE D - NOÇÕES GERAIS SOBRE A TEORIA DAS LAJES ORTÓTROPAS...	116

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 Valores do coeficiente de majoração.....	27
Tabela 5.1: Características Geométricas das longarinas e transversinas.....	40
Tabela 5.2 – Repertório dos modelos estudados.....	41
Tabela 5.3 - Coeficiente de Repartição ( $ri$ ). .....	46
Tabela 5.4 – Erro entre os modelos. ....	46

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Seções Transversais retangulares (a) e (b) e seção “te” (c). (Melo, 2016 d). ...	4
Figura 1.2 – Viga simplesmente apoiada. (Melo, 2016 d). .....	4
Figura 1.3 – Estrutura composta: duas vigas ortogonais. ....	5
Figura 1.4 – Estrutura composta: duas vigas ortogonais e diferente condição de apoio. (Melo, 2016 d).....	5
Figura 1.5 – Vigas com nó elástico no cruzamento de duas barras. (Melo, 2016 d).....	6
Figura 1.6 - Posição genérica do nó elástico no cruzamento de duas barras. (Melo, 2016 d). .....	6
Figura 1.7 – Posição e carga genérica do nó elástico no cruzamento de duas barras.....	7
Figura 1.8 - Tabuleiro da ponte, com duas longarinas e uma transversina. (Melo, 2016 d).	9
Figura 1.9 - Fluxograma de funcionamento do Programa CALTAPEG. (Melo, 2016 d)...	10
Figura 1.10 - Transversina com rigidez infinita, ligada à longarina, não transmitindo rotação no nó. (Melo, 2016 d).....	10
Figura 2.1- Teste de Superfície de Influência em meia escala. (McHenry,1960). .....	14
Figura 2.2 - Testes de carga Concentrada - Série 3 (McHenry,1960). .....	14
Figura 3.1 – Corte inferior de um tabuleiro de uma ponte em grelhas.....	22
Figura 3.2 - Reações nas longarinas. (Adaptado de San Martin, 1981). .....	22
Figura 3.3 - Posição genérica da carga (Melo,2016).....	24
Figura 3.4 - Deformação da transversina fictícia apoiada em longarinas (Adaptado de San Martin, 1981). .....	25
Figura 3.5 - Distribuição das vigas longitudinais e transversais no eixo cartesiano. (Massonnet, 1960).....	28
Figura 3.6 - Distribuição da carga longitudinal e sua deformação (Massonnet, 1960).....	31
Figura 4.1 – Etapas do Método dos Elementos Finitos. (Soriano, 2009).....	34
Figura 4.2 - Interface de Propriedade do Material. (SAP/2000). .....	35
Figura 4.3 – Coordenadas Global e Local. (Almeida, 2009).....	35
Figura 4.4 - Sistema de Coordenadas Globais de um Elemento FRAME/SAP2000. ....	36
Figura 4.5 – Tela inicial do MATLAB R2016a (Melo, 2016 d). .....	37
Figura 4.6 – Tela inicial da função Gui. (Melo, 2016 d).....	38
Figura 4.7 – Interface: Programa CALTAPEG. ( Melo, 2016 d).....	39

Figura 5.1 – Seção transversal da Ponte sem a contribuição da laje. (Adaptado de Frota, 2014).	44
Figura 5.2 – Cálculo dos métodos analíticos através do Programa CALTAPEG-interface visual.	44
Figura 5.3 – Deformação da Grelha.	45
Figura 5.4 – Diagrama de Momento Fletor (a) e Momento Torçor (b).	45
Figura 5.5 – Coeficiente de repartição ( $r_i$ ).	47
Figura 5.6 - Modelo de Grelha com 2 longarinas e uma transversina.	48
Figura 5.7 – Coeficiente de repartição e deslocamento para a carga aplicada na transversina.	48
Figura 5.8 – Momento Fletor atuante nas longarinas.	49
Figura 5.9 – Coeficiente de repartição e deslocamento para a carga aplicada no nó da L2 e T1.	49
Figura 5.10 – Momento fletor nas longarinas L1 e L2 devido à carga no nó.	50
Figura 5.11 – Deslocamento das longarinas L1 e L2 devido à carga atuante no Nó.	51
Figura 5.12 - Modelo de grelha com 2 longarinas e uma transversina.	51
Figura 5.13 – Posição da carga sobre a transversina (a) e excentricidade da carga (b).	52
Figura 5.14 – Coeficiente de repartição e deslocamento com carga aplicada na transversina.	52
Figura 5.15 – Momento fletor e deslocamento das longarinas com carga aplicada sobre a transversina.	53
Figura 5.16 – Vista superior da estrutura (a), e a posição da carga sobre o nó (b).	54
Figura 5.17 – Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento (b).	54
Figura 5.18 – Momento fletor de deslocamento longitudinal das longarinas.	55
Figura 5.19 – Vista superior e identificação das longarinas e transversinas.	56
Figura 5.20 – Posição da carga aplicada na longarina T1.	56
Figura 5.21 – Coeficiente de repartição transversal e deslocamento da transversina.	57
Figura 5.22 – Momento fletor e deslocamento nas longarinas.	58
Figura 5.23 – Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico (b).	59
Figura 5.24 - Coeficiente de repartição transversal e deslocamento da transversina.	59
Figura 5.25 - Momento fletor e deslocamento nas longarinas.	61
Figura 5.26 – Vista superior (a) e corte AA do tabuleiro (b).	62
Figura 5.27 – Modelo base para estudo da influência do número de transversinas.	62

Figura 5.28 – Carga de 10 toneladas aplicada sobre a transversina T1(a) cota em relação ao centro elástico (b).....	63
Figura 5.29 – Coeficiente de Repartição Transversal e Deslocamento da Transversina. ...	63
Figura 5.30 – Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L e L4. ....	65
Figura 5.31 - Carga de 10 toneladas aplicada sobre o nó formado por L3 e T1 (a), cota em relação ao centro elástico (b).....	65
Figura 5.32 - Coeficiente de repartição transversal e deslocamento da transversina. ....	66
Figura 5.33 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L e L4.....	67
Figura 5.34 - Vista superior (a) e corte AA do tabuleiro (b). ....	68
Figura 5.35 – Modelo base para modelagem no SAP/2000 (a) e identificação dos nós (b). .....	68
Figura 5.36 – Posição da carga sobre o tabuleiro (a) e cota de afastamento da carga em relação ao centro elástico (b).....	69
Figura 5.37 – Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b). .....	69
Figura 5.38 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L e L4.....	71
Figura 5.39 - Posição da carga sobre o tabuleiro sobre o nó (a) e as cotas de afastamento da carga em relação ao centro elástico (b). ....	71
Figura 5.40 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b). .....	72
Figura 5.41 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L e L4.....	74
Figura 5.42 - Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico (b). ....	74
Figura 5.43 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b). .....	75
Figura 5.44 – Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2,L3 e L4. ....	76
Figura 5.45 - Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico (b). ....	77
Figura 5.46 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b). .....	77
Figura 5.47 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2,L3 e L4 com carga aplicada no nó. ....	79
Figura 5.48 – Seção Te equivalente .....	80
Figura 5.49 – Dimensionamento da Seção “Te”. ....	80

Figura 5.50 – Modelo base para estudo da influência da laje sobre o tabuleiro, (a) nomenclatura dos elementos, (b) posição da carga sobre o tabuleiro, (c) vista inferior do tabuleiro e (c) posição da carga em relação ao centro elástico. ....	81
Figura 5.51 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b). ....	82
Figura 5.52 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2,L3 e L4 com carga aplicada no nó. ....	83
Figura 5.53 - Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico. ....	84
Figura 5.54 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b). ....	84
Figura 5.55 -Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2,L3 e L4 com carga aplicada no nó. ....	86
Figura 5.56 - Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico (b). ....	87
Figura 5.57 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b). ....	87
Figura 5.58 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L3 e L4 com carga aplicada no nó. ....	89
Figura 5.59 - Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico (b). ....	90
Figura 5.60 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b). ....	90
Figura 5.61 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L3 e L4. Com carga aplicada no nó. ....	92
Figura A.1 - Posição de carga P entre os apoios. ....	103
Figura A.2 – Seção T. (Adaptado de Bueno, 2014). ....	104
Figura A.3 – a) Excentricidade entre os <i>C.G.</i> da viga e laje; b) <i>C.G.</i> coincidentes (Souza,2015). ....	105
Figura B.1 - Molas com comportamento linear (Fonte: Ellwanger, 2005). ....	107
Figura B.2 - Transversina rígida vinculada por molas. (Ellwanger, 2005). ....	108
Figura B.3 – Deslocamento em função da transversina rígida. (Ellwanger, 2005). ....	108
Figura B.4 - Efeito de uma força com reta de ação. (Adaptado de Ellwanger, 2005). ....	109
Figura B.5 - Carga momento M, causando uma rotação no sistema. (Adaptado de Ellwanger, 2005). ....	110
Figura B.6 - Excentricidade de uma carga aplicada na viga rígida. (Stucchi, 2006). ....	110



Figura C.1 - Detalhamento de aplicação da carga na grelha de duas vigas (Adaptado de Stucchi, 2006). ..... 112

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES.

$A$	Área da seção transversal
$a$	Distância do apoio a nó
$b$	Distância do apoio a nó
$b_1$	Distância entre longarinas
$B_L$	Rigidez à flexão da longarina
$B_T$	Rigidez à flexão da transversina
$B$	Largura efetiva da carga distribuída
$C.G$	Centro de Gravidade
$C.E$	Centro de Elástico
$C_T$	Rigidez à torção da transversina
$C_L$	Rigidez à torção da transversina
$e$	Excentricidade
$ei$	Distância do Centro de Gravidade da transversina até a Longarina em estudo
$ej$	Distância do Centro de Gravidade da transversina até a carga em estudo
$E$	Módulo de Elasticidade Longitudinal
$F$	Força externa genérica aplicada no tabuleiro
$Fd$	Valor de cálculo das combinações últimas normais
$G$	Módulo de Elasticidade Transversal
$h$	Altura da seção transversal da viga
$I_i$	Momento de inércia
$I_L$	Momento de inércia da longarina
$I_T$	Momento de inércia da transversina
$I_p$	Momento de inércia polar
$L$	Comprimento do tabuleiro entre transversinas apoiadas
$L_1$	Distância entre transversinas
$LA$	Comprimento do tabuleiro no balanço inicial
$Lc$	Comprimento concomitante da carga distribuída
$Liv$	Vão definido conforme o tipo de estrutura
$K$	Coefficiente adimensional
$kL$	Rigidez média das longarinas
$kT$	Rigidez média das transversinas

$ki$	Constante de rigidez de mola
$M$	Momento relacionado com flexão composta
$N$	Esforço normal
$n$	Quantidade de longarinas
$NL$	Número de faixas
$Nb$	Número de vigas ao longo da seção transversal
$O$	Centro de gravidade da grelha
$P$	Carga concentrada sem majoração
$p$	Carga uniformemente distribuída sem majoração
$pa$	Pressão estática equivalente
$Q$	Carga concentrada ponderada
$q$	Carga uniformemente distribuída ponderada
$Ri$	Reação
$r_i$	Coefficiente de repartição transversal do i-ésimo elemento
$Si$	Seção
$T$	Largura do tabuleiro
$va$	Velocidade da água
$xi$	Distância horizontal
$yi$	Deslocamento vertical
$\alpha$	Parâmetro de torção – Massonnet
$\gamma$	Parâmetro de rigidez
$\gamma_T$	Rigidez à torção da transversina por unidade de largura
$\gamma_L$	Rigidez à torção da longarina por unidade de largura
$\gamma_{gi}$	Coefficiente de ponderação das ações permanentes
$\gamma_s$	Peso específico do solo
$\delta_i$	Deformação do i-ésimo elemento
$\zeta$	Grau de rigidez – Leonhardt
$\eta_{ej}$	Coefficiente da linha de influência oriundo de uma carga unitária
$\theta$	Parâmetro de travejamento - Massonnet
$\phi$	Ângulo de atrito do solo
$\psi_{oj}$	Fator de redução das ações variáveis secundárias
$\nu$	Coefficiente de Poisson

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
DNER	Departamento Nacional de Estradas de Rodagem
DNIT	Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes
MEF	Método dos Elementos Finitos
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
OAE	Obra de Arte Especial
NBR	Norma Brasileira Regulamentadora
UnB	Universidade de Brasília
PECC	Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil

# **1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo serão apresentados: de forma sucinta o conceito de pontes, a justificativa, os objetivos, os problemas a serem analisados, expondo os aspectos necessários ao entendimento das deduções dos métodos de Courbon–Engesser, Leonhardt e Guyon-Massonnet, apresentação das metodologias utilizadas e a abordagem ao problema.

## **1.1 GENERALIDADE**

As pontes fazem parte da evolução humana e, primitivamente, utilizavam-se troncos de árvores para se ultrapassar pequenos cursos d'água. Com o desenvolvimento da cidade e do comércio houve a necessidade de construir obras mais seguras (Pedrosa 2015). As guerras foram um fator propulsor no desenvolvimento das estruturas e na funcionalidade das pontes (Pedrosa 2015). As principais pontes de pedra no Brasil foram construídas entre os anos de 1700 e 1850, com destaque para a ponte da Cadeia (1798) e a do Rosário (1800), em São João Del-Rei/MG. Segundo Vitorio (2002) é encontrado na cidade de Ouro Preto/MG o maior número de pontes de pedras no País.

A partir da Revolução Industrial no século XIX, novos materiais de construção foram desenvolvidos e aplicados na construção de pontes. Assim, a partir dos materiais empregados, é possível traçar cronologicamente a evolução das pontes (Leonhardt 2013). As pontes são símbolos de acesso e conexão entre cidades, estados e países, quando separados por um obstáculo natural. Além disto, são consideradas fundamentais para o escoamento e funcionamento da cadeia produtiva (Nakamura (2005), Brito (2013)). Para Pfeil (1983), são chamadas de pontes quando utilizadas para transpor obstáculo constituído de água. Ao contrário, quando transpõem obstáculos de outra natureza, são chamados de viadutos. Para O'Connor (1979) a ponte é uma forma de administrar o tráfego de veículos e/ou pedestres entre duas margens, encerrando um bloqueio à dinâmica da expansão econômica de uma região, favorecendo assim o crescimento regional (Noronha 2004).

## **1.2 JUSTIFICATIVA**

Este trabalho vem contribuir com um texto nacional acessível a respeito da análise estrutural de tabuleiro de pontes em grelhas. Estudando o tema, verifica-se que os textos existentes são bastante diferentes em seus métodos de análise, expondo as condições teóricas de maneira muito simplista, dificultando o entendimento. Por conseguinte, faz-se necessário entender melhor tais métodos e validá-los para que se tenha maior segurança das possibilidades de utilização na prática da Engenharia.

Os métodos modernos de análise são caros, sofisticados e elaborados por grandes empresas, fato que tem onerado as pequenas municipalidades e empresas que buscam elaborar projetos de pontes. O desenvolvimento de métodos e modelos discretos que abordem a questão de maneira satisfatória, sem perder o cunho prático de aplicação corriqueira nos escritórios de cálculo, ainda é motivo de estudos para pesquisadores e projetistas.

A elaboração deste trabalho fundamenta-se na possibilidade de contribuir para o início de pesquisas mais aprofundadas no assunto em questão, determinando o grau de validade, as limitações, bem como as vantagens e desvantagens dos métodos clássicos. Além disto, trata-se de um assunto de extrema importância do ponto de vista prático, motivo pelo qual se julgou importante a realização, detalhada, de tal estudo. Pretende-se colaborar com o meio acadêmico, auxiliando o entendimento do comportamento da distribuição dos esforços em uma estrutura em grelha, ajudando novos profissionais no uso de ferramentas de cálculo mais avançadas e que demandam maior conhecimento da estrutura.

## **1.3 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA**

A análise de uma estrutura de vigas múltiplas requer a elaboração de muitos cálculos, o que torna o método laborioso e em muitos casos impraticável. Os engenheiros utilizavam hipóteses simplificadoras que tornavam a marcha de cálculo mais simples e mais facilmente executável. Com os computadores e calculadoras programáveis os cálculos matriciais se tornaram de fácil execução.

As pontes antigas, dimensionadas a partir dos métodos analíticos clássicos, estão em pleno funcionamento até os dias atuais. Contudo, por que não usar estes mesmos métodos para cálculo de novas pontes? Qual a diferença numérica entre os coeficientes de distribuição transversal resultantes da formulação analítica e os da computacional? É viável a utilização de métodos analíticos para dimensionamento de pontes com tabuleiro em grelha? Este trabalho, de forma modesta, tenta responder a estes questionamentos.

## **1.4 OBJETIVOS**

### **Objetivo Geral**

Estudos sobre método analítico clássico são poucos difundidos nos meios acadêmicos, ficando apenas em debates nos escritórios de cálculos estruturais. Assim, esta dissertação tem por objetivo estudar os principais métodos analíticos clássicos para resoluções de tabuleiros de pontes em grelha e comparar o estudo feito a partir de análises computacionais com modelagens no SAP/2000. Serão usados os métodos analíticos de Engesser-Courbon, Leonhardt e Guyon-Massonnet.

### **Objetivo Específico**

- Averiguar a precisão entre o método de Engesser-Courbon, Leonhardt, Guyon-Massonnet, e o cálculo numérico via MEF, pela modelagem, no Programa SAP/2000.
- Avaliar o comportamento da distribuição transversal da força nas diferentes longarinas com o aumento do número de transversinas;
- Investigar como a similaridade entre os métodos é afetada quando ocorrem mudanças na modelagem, como aumento de hiperestáticos, modificações na geometria do tabuleiro e alterações nas dimensões das vigas;
- Gerar uma metodologia progressiva de análise de grelhas que permita contribuir ao ensino de tabuleiro de pontes;
- Implementar uma rotina de cálculo em Matlab que possibilita o cálculo dos coeficientes de repartição dos métodos analíticos clássicos utilizados no estudo.

## 1.5 METODOLOGIA

A metodologia adotada inicialmente constou de um estudo sobre pontes e os métodos analíticos clássicos e o método numérico (MEF), bem como em livros e artigos acadêmicos, para a compreensão dos conceitos fundamentais.

Os métodos foram detalhados e explicados, em formulações iniciais até as deduções finais. Foi realizado um estudo progressivo analítico e numérico, em estruturas simplificadas até o modelo representativo do tabuleiro completo (Pedroso, 2015), com o objetivo permanente de qualificar o uso e a manipulação do Programa SAP/2000, pela inserção correta de dados, e a comparação dos resultados analíticos com os numéricos. Para este estudo foram fixados: o valor do módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) em  $2534563,6 \text{ Tonf}/\text{m}^2$ ; para o módulo de Elasticidade transversal ( $G$ ),  $1056068,2 \text{ Tonf}/\text{m}^2$ ; e o coeficiente de Poisson em 0,2. As seções transversais das estruturas foram definidas como retangulares. V. Figura 1.1, (a) e (b); retangular, com aumento da altura em função da espessura da laje (b) e com adição da laje na forma “te” (c).

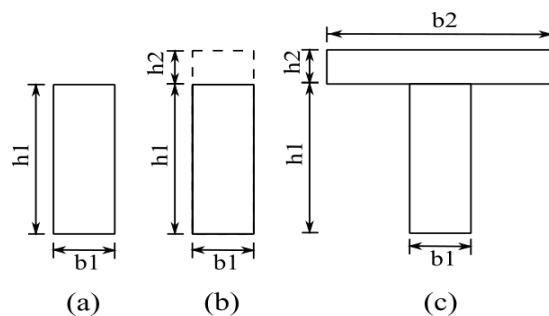


Figura 1.1 – Seções Transversais retangulares (a) e (b) e seção “te” (c). (Melo, 2016 d).

Nesta etapa, foi estudada uma viga simplesmente apoiada, apresentada na Figura 1.2, com carga concentrada variando a posição “S” ao longo do eixo longitudinal e alterando as condições de apoio, com o objetivo de aprender a como concentrar uma carga na estrutura usando a ferramenta SAP/2000, e inserir novas condições de apoio.

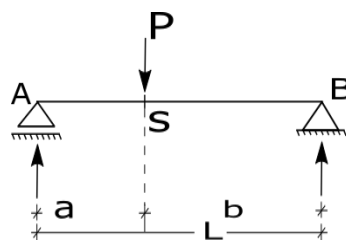


Figura 1.2 – Viga simplesmente apoiada. (Melo, 2016 d).



Em seguida, foi estudada uma estrutura composta de duas vigas unidas em um nó, com carga distribuída ao longo da viga L1. Para isto, dois modelos foram estudados como mostram as Figura 1.3 e Figura 1.4. A diferença entre os modelos está nas condições de apoio. Para solução, foi utilizado o Método das Deformações (Pedroso, 1998 b, Pedroso, 2004 d), com o objetivo de se conhecer a modelagem de uma estrutura com um nó elástico no cruzamento de duas barras, montar a matriz de rigidez, observar a influência da mesa nos momentos fletor, torção e cortante (Pedroso, 2015 a). E, por fim, compreender o comportamento da estrutura ao ser inserida uma deslocabilidade externa ( $\Delta_4$ ) ao sistema, Figura 1.4.

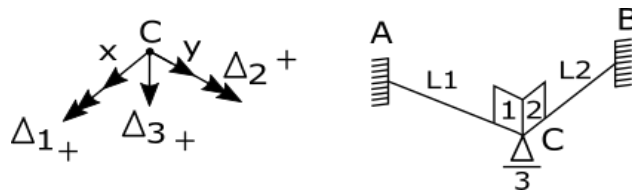


Figura 1.3 – Estrutura composta: duas vigas ortogonais.  
(Melo, 2016 d).

Destacam-se na equação (1.1): os parâmetros de módulo de elasticidade transversal e momento de inércia polar, que influenciam na determinação dos esforços na estrutura.

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \left(\frac{4EI}{L_1} + \frac{GI_P}{L_2}\right) \Delta_1 & 0 & \left(\frac{6EI}{L_2^2}\right) \rho_3 \\ 0 & \left(\frac{4EI}{L_1} + \frac{GI_P}{L_2}\right) \Delta_2 & \left(\frac{6EI}{L_2^2}\right) \rho_3 \\ \left(\frac{6EI}{L_1^2}\right) \Delta_3 & -\left(\frac{6EI}{L_2^2}\right) \Delta_2 & \left(\frac{24EI}{L_2^2}\right) \rho_3 \end{bmatrix}^{-1} X \begin{Bmatrix} -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

Podem-se observar nas equações (1.1) e (1.2): as posições do módulo de elasticidade transversal e do momento de inércia polar, que influenciam na determinação dos esforços na estrutura.

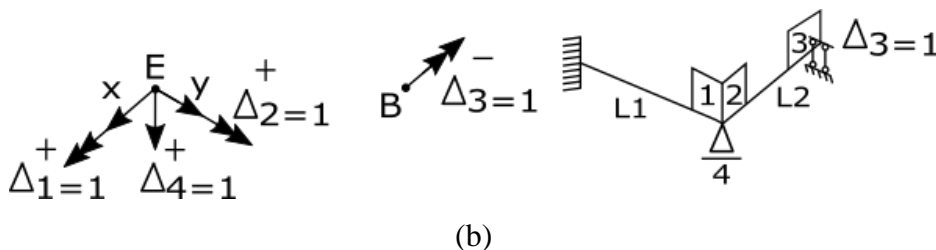


Figura 1.4 – Estrutura composta: duas vigas ortogonais e diferente condição de apoio.  
(Melo, 2016 d).

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \left(\frac{4EI}{L_1} + \frac{6GI_P}{L_2}\right) \Delta_1 & 0 & 0 & \left(\frac{6EI}{L_2^2}\right) \Delta_4 \\ 0 & \left(\frac{4EI}{L_2} + \frac{6GI_P}{L_1}\right) \Delta_2 & \left(\frac{2EI}{L_2}\right) \Delta_3 & -\left(\frac{6EI}{L_2^2}\right) \Delta_4 \\ 0 & \frac{2EI}{L_2} & \left(\frac{4EI}{L_2}\right) \Delta_3 & -\left(\frac{6EI}{L_2^2}\right) \Delta_4 \\ \left(\frac{6EI}{L_1^2}\right) \Delta_3 & -\left(\frac{6EI}{L_2^2}\right) \Delta_2 & -\left(\frac{6EI}{L_2^2}\right) \Delta_3 & \left(\frac{6EI}{L_2^2}\right) \Delta_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

Em sequência, foi estudada uma estrutura composta por duas vigas que se cruzam com uma carga concentrada nodal, e dois modelos foram utilizados: 1º) na Figura 1.5, com o nó na interseção do ponto médio do eixo longitudinal; 2º) na Figura 1.6, com um nó na posição genérica ao longo do eixo longitudinal de ambas as vigas. As condições de apoio foram mantidas para os dois modelos, utilizando-se o método das deformações e igualdade de flechas para a solução do problema.

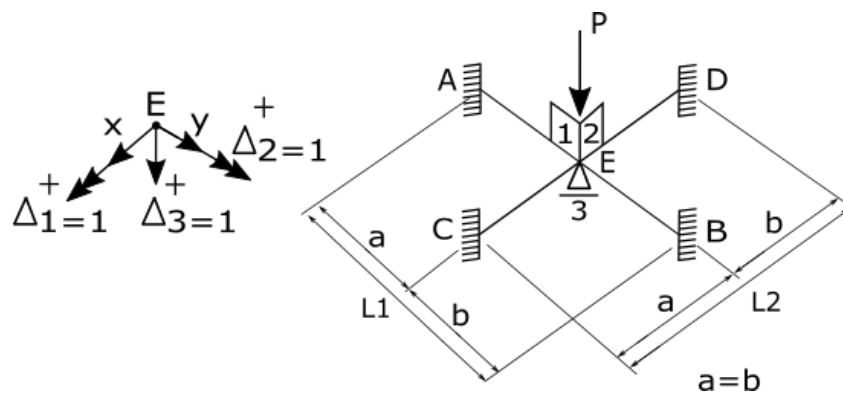


Figura 1.5 – Vigas com nó elástico no cruzamento de duas barras. (Melo, 2016 d).

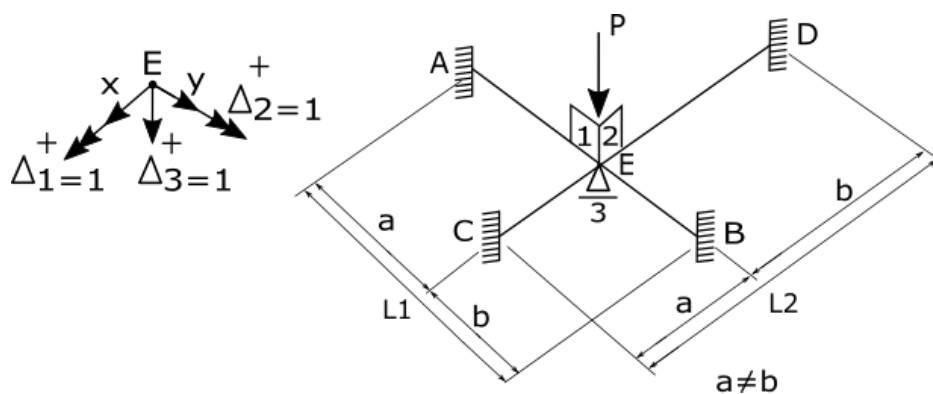


Figura 1.6 - Posição genérica do nó elástico no cruzamento de duas barras. (Melo, 2016 d).

Logo depois, foi estudada uma estrutura (Figura 1.7), com nó e carga em posições genéricas. Foi utilizado o método das deformações para este estudo. Os apoios apresentam restrição ao momento torçor e força cortante, nas direções  $x$  e  $y$ , e liberdade ao momento fletor na direção  $z$ , e sete deslocabilidade: seis internas, componentes da rotação do nó  $E$  em torno de dois eixos ortogonais, somando-se a uma deslocabilidade existente em cada apoio, um na direção  $x$  e outro na direção  $y$ , pertencentes ao plano da grelha; e uma externa, que é a deslocabilidade vertical do nó  $E$ . O objetivo foi criar uma solução analítica genérica para determinar os esforços solicitantes e o deslocamento na dada estrutura.

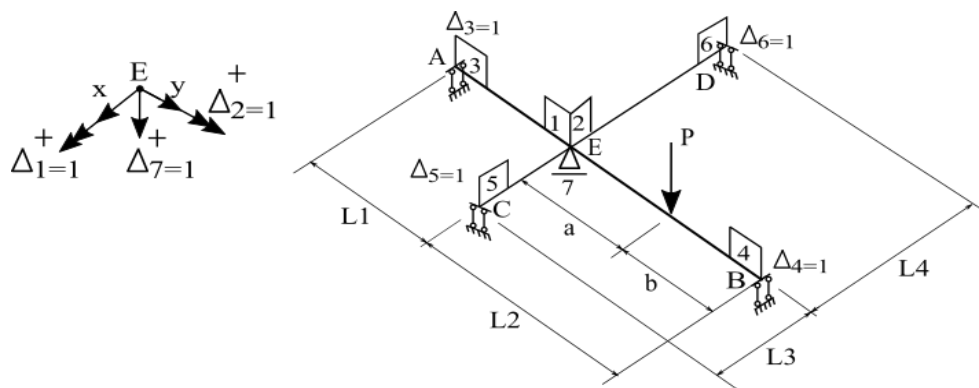


Figura 1.7 – Posição e carga genérica do nó elástico no cruzamento de duas barras.  
(Melo, 2016 d).

A resolução do sistema principal para o agente solicitante externo obteve o vetor  $\{\beta_0\}$ , para cada uma das deformações incógnitas  $\{\Delta_i\}$ , com o valor unitário arbitrado inicialmente, obtendo-se a matriz  $\{\beta\}$ . O cálculo das deformações foi conseguido pela solução da equação:  $\{\Delta_i\} = -[\beta]^{-1} \cdot \{\beta_0\}$ .

Vejamos:

$$\Delta_i = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \end{Bmatrix} ; \quad \beta_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{P \cdot a \cdot b^2}{(a+b)^2} \\ 0 \\ -\frac{P \cdot a \cdot b^2}{(a+b)^2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P \cdot b}{a+b} \end{Bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \left( \frac{4EI(L_3 + L_4)}{L_3 \cdot L_4} + \frac{GI_p(L_1 + L_2)}{L_1 \cdot L_2} \right) \Delta_1 & 0 & 0 & 0 & \left( \frac{2EI}{L_3} \right) \Delta_1 & \left( \frac{2EI}{L_4} \right) \Delta_1 & \left\{ \left( \frac{2EI}{L_3} \cdot \frac{L_3 + 2L_3}{L_3^2} \right) - \left( \frac{2EI}{L_4} \cdot \frac{L_4 + 2L_4}{L_4^2} \right) \right\} \Delta_1 \\ 0 & \left( \frac{4EI(L_3 + L_4)}{L_3 \cdot L_4} + \frac{GI_p(L_1 + L_2)}{L_1 \cdot L_2} \right) \Delta_2 & \left( \frac{2EI}{L_1} \right) \Delta_2 & \left( \frac{2EI}{L_2} \right) \Delta_2 & 0 & 0 & \left\{ \left( \frac{2EI}{L_1} \cdot \frac{L_1 + 2L_1}{L_1^2} \right) - \left( \frac{2EI}{L_2} \cdot \frac{L_2 + 2L_2}{L_2^2} \right) \right\} \Delta_2 \\ 0 & \left( \frac{2EI}{L_1} \right) \Delta_3 & \left( \frac{4EI}{L_1} \right) \Delta_3 & 0 & 0 & 0 & \left( \frac{2EI}{L_1} \cdot \frac{L_1 + 2L_1}{L_1^2} \right) \Delta_3 \\ 0 & \left( \frac{2EI}{L_2} \right) \Delta_4 & 0 & \left( \frac{4EI}{L_2} \right) \Delta_4 & 0 & 0 & - \left( \frac{2EI}{L_2} \cdot \frac{L_2 + 2L_2}{L_2^2} \right) \Delta_4 \\ \left( \frac{2EI}{L_3} \right) \Delta_5 & 0 & 0 & 0 & \left( \frac{4EI}{L_3} \right) \Delta_5 & 0 & \left( \frac{2EI}{L_3} \cdot \frac{L_3 + 2L_3}{L_3^2} \right) \Delta_5 \\ \left( \frac{2EI}{L_4} \right) \Delta_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left( \frac{4EI}{L_4} \right) \Delta_6 & - \left( \frac{2EI}{L_4} \cdot \frac{L_4 + 2L_4}{L_4^2} \right) \Delta_6 \\ \left\{ \left( \frac{2EI}{L_3} \cdot \frac{L_3 + 2L_3}{L_3^2} \right) - \left( \frac{2EI}{L_4} \cdot \frac{L_4 + 2L_4}{L_4^2} \right) \right\} \Delta_7 & \left\{ \left( \frac{2EI}{L_1} \cdot \frac{L_1 + 2L_1}{L_1^2} \right) - \left( \frac{2EI}{L_2} \cdot \frac{L_2 + 2L_2}{L_2^2} \right) \right\} \Delta_7 & \left( \frac{6EI}{L_1^2} \right) \Delta_7 & - \left( \frac{6EI}{L_2^2} \right) \Delta_7 & \left( \frac{6EI}{L_2^2} \right) \Delta_7 & - \left( \frac{6EI}{L_4^2} \right) \Delta_7 & 12EI \left( \sum_{i=1}^4 (L_i^3)^{-1} \right) \Delta_7 \end{bmatrix}$$

Efeitos finais:

$$E = E_0 + \sum E_i \Delta_i$$

Equação (1.3)

Como pertinente, foi estudada uma estrutura próxima ao tabuleiro da ponte, com duas longarinas e uma transversina, como é mostrado na Figura 1.8. Para esta solução foi usada a técnica de arranjo de cargas para análise de estruturas elásticas e geometricamente simétricas (Pedroso. 1998 c). Tendo por objetivo verificar o diagrama de momento torçor da transversina.

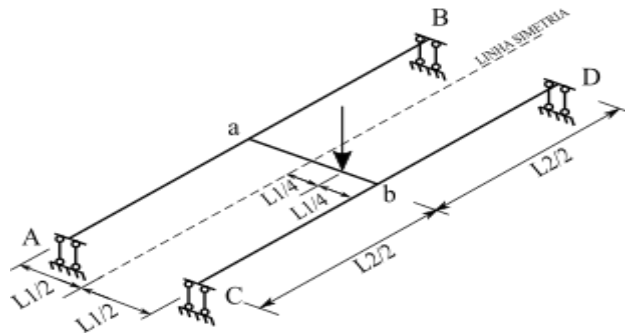


Figura 1.8 - Tabuleiro da ponte, com duas longarinas e uma transversina. (Melo, 2016 d).

Uma vez testado e calibrado o processo de obtenção das soluções, através do Programa SAP/2000 e, após confrontadas com as soluções analíticas exatas, procedeu-se à etapa final do acréscimo gradativo de mais barras na grelha do tabuleiro das pontes.

Nessa etapa foram comparados os métodos analíticos clássicos, com o MEF via SAP/2000, para várias grelhas do tabuleiro. Assim acrescentaram-se, gradativamente, mais barras (longarinas e transversinas). Tendo sido estudado detalhadamente os métodos envolvidos no processo de cálculo, foi desenvolvido um aplicativo capaz de calcular os coeficientes de repartição transversal e os deslocamentos da longarina, denominado de CALTAPEG, via Programa MATLAB. O fluxograma do Programa é mostrado a seguir, na Figura 1.9:

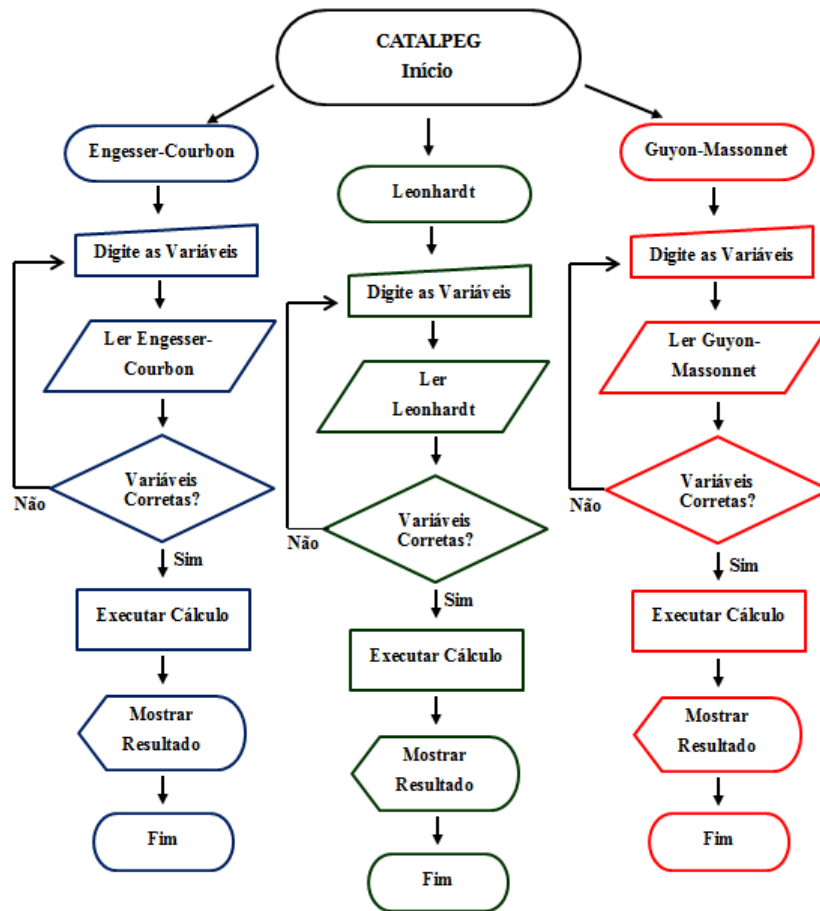


Figura 1.9 - Fluxograma de funcionamento do Programa CALTAPEG. (Melo, 2016 d).

Finalmente foi estudado um modelo no SAP/2000, capaz de representar as hipóteses simplificadoras adotadas nos modelos analíticos, que são: transversina com rigidez infinita ligada à longarina, não transmitindo rotação no nó, como mostra a Figura 1.10.

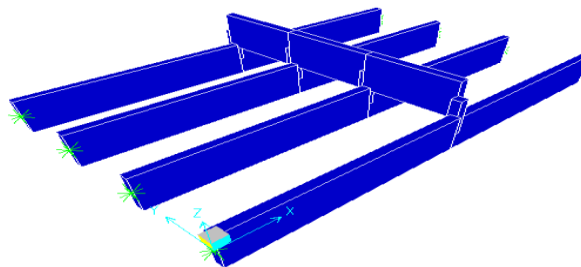


Figura 1.10 - Transversina com rigidez infinita, ligada à longarina, não transmitindo rotação no nó. (Melo, 2016 d).

Neste modelo final foi estudada a influência do número de longarinas, transversinas e também a influência da laje.

## **1.6 ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÕES**

Este trabalho trata do cálculo de tabuleiro de pontes em grelha. Mas não serão estudadas as ligações entre o tabuleiro e o restante da estrutura, tais como pilares ou encontros. Para todos os casos, o material constitutivo é o concreto armado com peso específico de 2,5 tf/m<sup>3</sup>. Apesar de certas aplicações de protensão neste tipo de estrutura, este efeito também não será considerado.

Considerando as limitações próprias dos métodos que serão estudados, apresentam-se as seguintes limitações:

1. As análises feitas partem das premissas básicas da teoria linear das estruturas.
2. O estudo realizado no texto limita-se a vigas apoiadas nas extremidades, com deslocabilidade apenas para flexão.
3. O material possui comportamento linear elástico com pequenos deslocamentos.
4. São válidos o princípio de Saint-Venant e a lei de Hooke.
5. O estudo analisou apenas o tabuleiro da ponte em grelha com os elementos básicos, transversinas e longarinas;
6. Foi adotado o comprimento longitudinal de 16 metros da ponte para que, na aproximação ao modelo de uma placa a ser associada a 5 longarinas e 4 transversinas, não se tivesse um painel muito grande de laje.
7. Atendendo à limitação matemática dos métodos analíticos utilizou-se apenas uma carga concentrada, que representa a somatória do trem-tipo, pontuando no centro de gravidade do próprio trem-tipo.
8. Neste estudo foi utilizada carga concentrada de 10 tonf, em caráter meramente adequado à simulação, e que não pretende representar uma situação real.

## **1.7 DESCRIÇÃO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

Este trabalho é composto de seis capítulos descritos a seguir:

O capítulo 1 contém uma breve introdução ao tema, definição do trabalho, motivação para sua concretização, seus objetivos e sua estrutura.

O capítulo 2 expõe a revisão bibliográfica do tema, onde são apresentadas as generalidades sobre a história dos métodos analíticos. São também descritos os diversos trabalhos pesquisados, suas finalidades e conclusões, para entendimento do estágio atual das pesquisas.

No capítulo 3 apresentam-se o desenvolvimento teórico dos métodos analíticos clássicos que são usados neste estudo, e explicações detalhadas das diversas fórmulas utilizadas por cada método, suas hipóteses simplificadoras e limitações.

No capítulo 4 são apresentadas as considerações relativas à modelagem da estrutura descrita e a programação dos métodos analíticos.

O capítulo 5 apresenta os resultados encontrados para os métodos de cálculos utilizados, com comentários e interpretação dos mesmos. São também comparados alguns casos, com representação de cada tipo de esforço, individualmente.

O capítulo 6 apresenta as conclusões, gerais e específicas, obtidas a partir dos resultados encontrados. São feitos também os comentários finais e as sugestões para trabalhos futuros.

O apêndice A mostra considerações matemáticas sobre as propriedades físicas e geométricas das estruturas básicas da superestrutura, já que se definem os parâmetros usados nos métodos analíticos.

O apêndice B apresenta a determinação teórica e matemática do centro elástico para uma transversina.

O apêndice C apresenta cálculo dos coeficientes de distribuição da rigidez em duas vigas, em grelhas, utilizando a teoria de igualdade de flechas.

O apêndice D apresenta noções gerais sobre a teoria das lajes ortótropas.



## **2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Este capítulo apresenta a evolução dos estudos de uma das questões mais palpitantes da teoria das estruturas: o estudo das grelhas. Este assunto tem sido objeto de tratamento em literatura técnica, desde os fins do século XVIII, reconhecendo que estes métodos e processos utilizados pecam pelo excessivo trabalho numérico.

### **2.1 BREVE HISTÓRICO**

Arnstein (1912) utilizando o método das forças, que aplicou em viga contínua sobre apoio elástico constituído de pilar ou vigas. Ainda neste mesmo ano, Lossier estuda a viga contínua sobre apoios elásticos (Ferraz 1951). Um novo estudo realizado por H. Lossier em 1922 escolhe, como ponto de partida dos novos estudos, a rigidez infinita da viga secundária, a transversina, aplicando novos cálculos e melhorando os resultados até então obtidos. Segundo o mesmo autor, é implementado no estudo da distribuição transversal de cargas, realizado por Faltus, em 1926, na elaboração do projeto de Friedensbrücke, obra construída na cidade de Viena, o conceito de “viga transversal fictícia” (Ferraz 1951). Mais tarde, este conceito veio a ser desenvolvido por Leonhardt.

Em 1946, Guyon estudou a possibilidade de aplicar o princípio de equivalência elástica a um sistema de pontes em grelhas. Em 1950, Massonnet aprimorou o método de Guyon, introduzindo na análise o efeito de torção. No método de Pelikan-Esslinger é utilizada a equação de Huber, simplificada, desprezando a rigidez, a torção e a flexão. O método de Engesser-Courbon, atribuído a Engesser e desenvolvido na França por Courbon e Mallet, considera a transversina com rigidez infinita sem o efeito de torção. Já no processo de Leonhardt, segundo Martin (1953), a estrutura real é substituída por uma grelha com longarinas ligadas por transversinas flexíveis. No Brasil, segundo Longo (1979), Ferraz (1951) aplicou o desenvolvimento em série, de Fourier, para as cargas, esforços e deformações ao longo das vigas principais.

## 2.2 PRINCIPAIS ESTUDOS

McHenry (1960) realizou um estudo experimental de um modelo completo de meia escala da ponte real, com o objetivo de verificar o comportamento contínuo da estrutura e investigar o grau de distribuição transversal de cargas concentradas sobre o tabuleiro da ponte. O ensaio é mostrado na Figura 2.1.

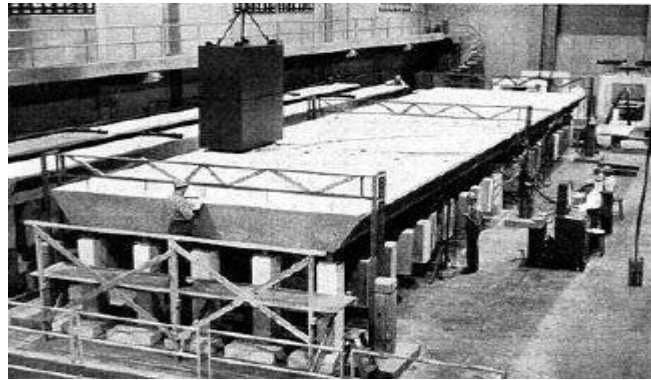


Figura 2.1- Teste de Superfície de Influência em meia escala. (McHenry,1960).

Os resultados experimentais são comparados com o coeficiente de repartição transversal e calculados usando o método de Guyon-Massonnet, considerando a torção e negligenciando-a, mostrados na Figura 2.2. Observou-se boa concordância entre os pontos experimentais e a curva teórica, levando-se em consideração a rigidez de torção dos membros da ponte.

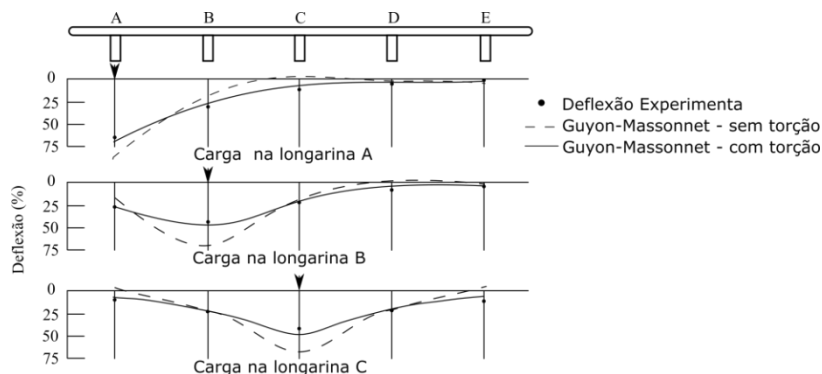


Figura 2.2 - Testes de Carga Concentrada - Série 3 (McHenry,1960).

Olivares *et al* (1961), realizam testes em laboratório com modelo de escala 1:5, uma ponte de uma estrada em concreto protendido com dez vigas e dois espaçadores de distribuição,

sendo os resultados experimentais comparados com o valores teóricos calculados pelo método de Guyon – Massonnet, satisfatórios.

Longo (1979), utilizando um modelo de tabuleiro de ponte em grelha, constituído de cinco longarinas e quatro transversinas internas, objetivou determinar os esforços máximos em pontes retas, esconsas, simplesmente apoiadas ou contínuas. Elaborando um programa computacional na linguagem FORTRAN chamado “Grelha”, e tendo como base o método da rigidez, determinou os momentos fletores máximos, levou em conta o conceito de superfícies de influência. A posição mais desfavorável do trem-tipo foi feita por um método iterativo, denominado Método de Procura Direta Fomax. Os coeficientes de repartição transversal obtidos pelo Programa foram comparados com os Métodos de Engesser-Courbon, Leonhardt e Guyon-Massonnet. Longo, então, verificou uma aproximação entre os coeficientes de repartição transversais calculados pelo Programa e os resultantes dos métodos analíticos.

Em seu trabalho, Gavioli (1998) aplicou o método de analogia das grelhas, possibilitando modelar de forma prática o tabuleiro de pontes formadas por elementos pré-moldados, descrevendo critérios básicos para distribuir as longarinas e as transversinas na elaboração do modelo em grelhas. O mesmo apresenta formulação para determinação da seção ideal do elemento pré-moldado e utilizou o programa Grelhas/TQS do CAD/FORMAS, versão 5.3 de 1986, desenvolvido pela TQS Informática Ltda. O autor concluiu que o método das grelhas é uma ótima ferramenta, além de ágil e de fácil uso de modelagem de tabuleiros pré-moldados de pontes. Ao engenheiro cabe o conhecimento do comportamento do tabuleiro ao ser este solicitado, fazendo ou não as considerações de regiões fissuradas para a melhor discretização da malha e caracterização geométrica.

Klinsky (1999) utilizou elementos finitos, programa ANSYS e analogia de grelhas, em seu estudo de pontes em vigas mistas. Teve como objetivo estudar a influência exercida pelo vão e posição da carga móvel, na distribuição de cargas nas vigas. Para isto considerou o comportamento elástico-linear, considerou a interação de todos os elementos que compõem a estrutura na transferência dos esforços até os apoios, e concluiu que a analogia de grelhas é uma técnica adequada para o cálculo estático de pontes de pequenos vãos.

Coelho (2000) afirma que simular uma placa através de elementos de barras, formando uma grelha, vem sendo usado em diversos programas de projetos de estruturas de concreto armado. Em seus estudos apresentou vários parâmetros que influenciam os resultados dessas formulações. O mesmo autor afirmou que os parâmetros mais importantes são as malhas utilizadas e o coeficiente de rigidez à torção a ser utilizado nas barras. Os resultados da analogia de grelhas foram comparados com soluções analíticas da teoria das placas e com o método dos elementos finitos, mostrando que é possível obter-se soluções muito aproximadas com teoria elástica. O trabalho de Coelho consistiu em analisar modelos de lajes quadradas, retangulares, sobre apoios rígidos ou sobre vigas usuais.

Stramandinoli (2003) aborda aspectos da análise elástica-linear de lajes nervuradas de concreto armado, através do modelo de analogia de grelhas, usando parâmetros do coeficiente de rigidez à torção, no modelo de analogia de grelhas ao espaçamento entre nervuras da laje nervurada. Os resultados obtidos são comparados com os encontrados, calculando a laje nervurada com a placa, pela teoria da elasticidade, conforme permite a NBR 6118/78, e com o modelo tridimensional em elementos finitos. O modelo de analogia de grelha mostrou, para as lajes maciças, certa irregularidade na variação dos resultados obtidos à medida que se diminui o espaçamento das barras da grelha. Em muitos casos não foi a grelha com barras menos espaçadas que apresentou os resultados mais próximos da teoria da elasticidade.

Alves *et al* (2004) apresentam os métodos de Engesser – Courbon, de Leonhardt, de Guyon – Massonnet e o de Homberg-Tranks, sendo os dois últimos considerando a torção. O autor compara os resultados com o método dos elementos finitos (MEF) para dimensionamento de estruturas de concreto protendido. Foi concluído, pelos autores, que as simplificações impostas, quer aos sistemas estruturais, quer aos modelos matemáticos de análise utilizados (Engesser-Courbon, Homberg e os demais acima citados), conduzem a resultados pouco satisfatórios nos casos gerais (casos de eixos curvos, não paralelismo das longarinas, esconsidade acentuada e outros).

Sieffert (2004), por sua vez apresenta, em seu estudo para determinação do número de transversinas em pontes ferroviárias de vigas múltiplas mistas, para vão pequenos e médios. Para isso, utiliza os métodos analíticos de Courbon-Engesser e Guyon-Massonnet para determinação dos coeficientes de repartição transversal nas longarinas. Segundo a

mesma autora, os métodos analíticos apresentam resultados satisfatórios comparados com o numérico através do Método de Elementos Finitos.

Góes *et al* (2005) fazem um comparativo entre os métodos analíticos de placas ortotrópicas equivalentes, vigas equivalentes e elementos finitos, para estudo do comportamento estrutural de tabuleiros ortótropos de madeira protendida, utilizando o carregamento estático de classe 45, conforme especificações da Norma Brasileira de Ações em Pontes (NBR 7188). O resultado comprovou uma equivalência entre os métodos de placas ortotrópicas e o método de elementos finitos. Chéray (2009) utilizou o método de Guyon–Massonnet para estudo do tabuleiro de um viaduto em área de sismo. Em seu trabalho verifica-se a utilização do *software* Guymas que tem seu algoritmo baseado no método de Guyon–Massonnet.

Oliveira (2010), em seu trabalho empenhou-se em calcular as armaduras dos elementos da superestrutura em grelha de uma ponte. Para determinar os esforços de momento fletor nas longarinas e transversinas, ele utilizou o método de Engesser–Courbon para obter o trem-tipo linearizado. Para tanto, considerou a linha de influência importante, pois esta fornece os esforços solicitantes quando uma carga se desloca ao longo da viga. As envoltórias de esforços solicitantes na longarinas e transversinas foram obtidas através do programa computacional FTOOL e de planilhas eletrônicas.

Batista (2013) analisou o comportamento da distribuição transversal do esforço, em tabuleiro de pontes com longarinas com entre-eixos variáveis, empregando ou não transversinas intermediárias. As linhas de distribuição transversal de esforços, determinadas a partir de modelos computacionais desenvolvidos com o SAP2000, foram comparadas com o método clássico de distribuição de Engesser–Courbon. As curvas obtidas para as pontes com e sem transversinas indicaram uma tendência de comportamentos semelhantes entre ambos os métodos estudados.

Schwartz (2013) desenvolveu em Arcadis (empresa francesa atuante no setor de projeto e construção), um *software* capaz de dimensionar um tabuleiro de pontes em grelhas. Assim, foi escolhido o método de Guyon–Massonnet para ser a base matemática do programa, por apresentar simplicidade em seus cálculos e não negligenciar o efeito de torção. Estudos já

realizados mostram que o método apresenta resultados muito próximos de outros métodos numéricos.

Zahra (2013), em seu estudo, compara uma estrutura em vigas transversais e longitudinais ortogonais entre si, utilizando dois programas computacionais, ABAQUS e SAP2000, em elementos finitos para modelagem da estrutura. Os resultados são comparados com os resultados obtidos, empregando o método de Guyon-Massonnet. Conclui, em seu trabalho, que o método de Guyon-Massonnet pode ser usado como pré-dimensionamento de vigas e lajes estruturais. Sendo muito utilizado antes do computador, entre as décadas de 70 e 80, oferecia maneiras fáceis de calcular os coeficientes de distribuição, as tensões e flechas nestas estruturas. Apresenta resultados com mais precisão quando a estrutura apresenta uma quantidade maior de longarinas e transversinas e pode resolver as equações diferenciais parciais das placas através de decomposições, tais como séries de Fourier. Foi pouco utilizado e praticamente abandonado, na concepção de *software* com base no método dos elementos finitos. Esses *softwares* têm seguido o desenvolvimento das capacidades de computadores, processando a equação cada vez mais rápida.

Seror (2013) demonstrou a viabilidade técnica de construir ponte rodoviária de madeira tropical serrada, classe de resistência D60, em vigas treliçadas tipo Pratt, apoiada nas extremidades em vão livre de 20 metros. Com carregamento submetido ao tráfego classe 45. Para o dimensionamento da superestrutura utilizou vigas longitudinais, longarinas apoiadas nas vigas transversais, transversinas. Assim pôde utilizar no cálculo toda a reserva mecânica das características geométrica dos elementos constituintes da superestrutura. Os resultados indicaram que os elementos da ponte, entre eles, o tabuleiro e transversinas podem ser construídos com peças de madeira serrada tropical de classe de resistência D60.

Frota (2014) compara os coeficientes de repartição transversal do método de Engesser-Courbon com o método de Elementos Finitos (MEF), por meio do elemento SHELL, automatizado pelo Programa CIBrige/SAP2000. As análises foram feitas na estrutura, aumentando a hiperasticidade, modificações na geometria do tabuleiro, alteração nas dimensões das vigas e condições de apoio. Com o Programa Ftool localizou os carregamentos baseados na linha de influência em pontos críticos na estrutura. O mesmo

autor compara os resultados analíticos com modelos MEF, que ficaram bem próximos dos resultados obtidos pelo sistema computacional (SAP2000).

Machelki (2014), na Polônia, compara os modelos desenvolvidos por Guyon – Massonnet e o Método de Leonhardt, sendo que os resultados da análise mostram que o modelo de placa ortotrópica obtido em soluções Guyon-Massonnet é mais geral do que o modelo grelha plana, desenvolvida por Leonhardt, pela comparação dos parâmetros característicos de ambos os modelos, isto é, a placa ortotrópica e as vigas equivalentes.

O estudo realizado por Tardivo (2014) baseou-se em soluções de superestrutura em laje em grelha, com ou sem transversina, com esconsidade variável entre zero e sessenta graus, eixo longitudinal reto, modelado por barras e elementos finitos. A modelagem matemática foi possível através de *softwares* especializados como o SAP2000 e o STRAP2000.

Ferreira (2014) estuda a deformação e os esforços que ocorrem nas lajes de tabuleiros de viadutos. O mesmo autor cita os Métodos de Courbon-Engesser e Guyon-Massonnet como os métodos possíveis de determinar os valores de coeficientes de distribuição, nas estruturas longitudinais das superestruturas de uma ponte.

Pedrosa (2015), na busca de automatizar o processo de geração dos coeficientes de repartição transversal, utiliza o *software* comercial SAP2000, e seus resultados são comparados com os valores calculados pelo método de Engesser-Courbon. Kaestner (2015) apresenta um estudo de dimensionamento de longarinas pós-tracionadas. Utilizou os dois métodos de cálculo analíticos, Courbon-Engesser e Leonhardt, para determinar os coeficientes de distribuição transversal, obtendo resultados satisfatórios nos modelos analisados. Souza (2015) realiza um estudo comparativo das envoltórias dos momentos fletores ao longo das vigas principais de pontes bi-apoiadas. Para a obtenção das envoltórias, foi utilizada a formulação de Engesser-Courbon, considerando a transversina infinitamente rígida, aplicando o Programa GAP-GELv1, que permitiu a entrada de dados paramétrica, que diminui a quantidade de dados necessários para o modelamento de diversos casos. Nos casos analisados, ele estudou uma ponte com três longarinas com influência do balanço e das cortinas, a de elementos de laje e a dos números de transversinas e longarinas. Nas pontes bi-apoiadas sem balanços verificou que os esforços de momentos fletores positivos foram maiores para o modelo de grelha. Porém, para os

momentos negativos, o processo de Engesser-Courbon resultou em valores mais críticos. A consideração dos elementos de laje na modelagem de pontes bi-apoiadas mostrou grande importância quanto aos esforços de momentos fletores positivos, nos modelos sem transversinas intermediárias, apresentando uma redução de 15% dos esforços positivos atuantes nas longarinas de extremidade, e uma redução de 45% dos esforços positivos nas longarinas centrais. Porém, para os modelos com transversinas intermediárias, a inclusão dos elementos de laje no modelamento não mostrou grandes variações nas envoltórias.



### 3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Durante muito tempo as pontes foram projetadas e construídas baseadas no conhecimento e na experiência da engenharia, (Sieffert 2004). Os métodos analíticos permitiram oferecer maneiras de conceber estas estruturas, levando em consideração a rigidez transversal das peças de contraventamento. Serão introduzidos brevemente esses métodos analíticos, desde os mais simples (Engesser-Courbon) para o mais sofisticado (Guyon-Massonnet). Para todos os métodos analíticos clássicos, os valores de momento fletor e do deslocamento nas longarinas são determinados a partir das formulações da Resistência dos Materiais.

#### 3.1 MÉTODO DE ENGESSER – COURBON

O método determina, de forma aproximada, o modo como uma carga se distribui sobre as longarinas de um tabuleiro monolítico. Segundo San Martin (1981), isto é a principal hipótese de transversinas com rigidez infinita sem o efeito de torção. Cada transversina pode ser tratada como um sólido rígido da mecânica racional, o qual permanece reto mesmo após a deformação do conjunto. O método se caracteriza pela sua simplicidade e se aplica ao caso de pontes em grelha, onde são respeitadas as seguintes condições:

- O vão da ponte é superior a duas vezes a sua largura;
- A altura das transversinas é da ordem da grandeza das longarinas;
- As espessuras das longarinas e das lajes são pequenas.

Admitem-se ainda válidas para as longarinas as hipóteses da Resistência dos Materiais:

- As longarinas são barras ( $b, h \ll L$ );
- O material é homogêneo e isótropo;
- É válida a lei de Hooke;
- É válida a hipótese de Navier;
- Os deslocamentos são pequenos.

As transversinas comportam-se como barras rígidas, de modo que, tendo seu eixo reto em configuração inicial, reto permaneceria após a deformação do conjunto, como ilustrado na

Figura 3.1. Tomando, então, como referência um sistema de eixos cartesianos ortogonais, pode-se expressar a equação (3.1):

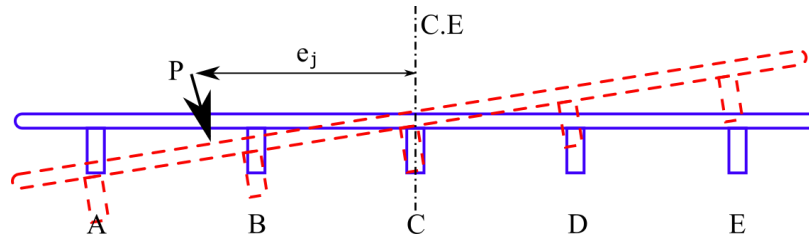


Figura 3.1 – Corte inferior de um tabuleiro de uma ponte em grelhas. (adaptado Souza, 2015).

$$y_i = a + b \cdot x_i \quad (3.1)$$

Em que:

$a$  e  $b$  constantes, a determinar.

Para a carga pontual  $P$ , aplicada com excentricidade  $e$ , em relação ao centro de gravidade da seção transversal. As reações são calculadas utilizando as equações de equilíbrio de força. Nesta condição, o problema fundamental do método consiste em determinar as reações,  $R_i$ , que traduzem a ação do carregamento sobre as vigas principais, a partir do carregamento do tabuleiro da ponte. A Figura 3.2, considera uma seção transversal da ponte segundo o plano vertical médio de uma transversina carregada.

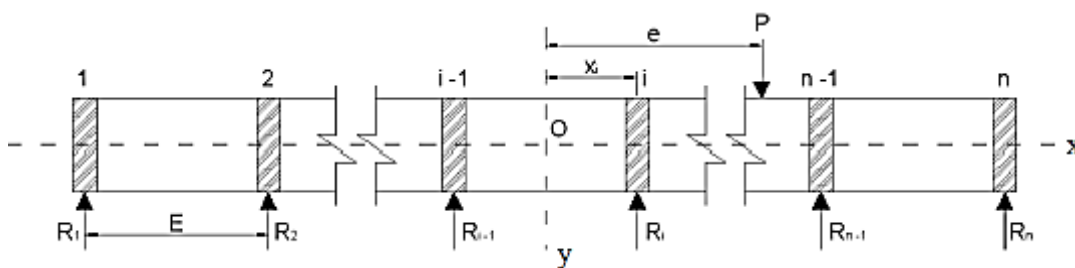


Figura 3.2 - Reações nas longarinas. (Adaptado de San Martin, 1981).

Desta forma, admitem-se as reações  $R_i$ , sendo proporcional ao deslocamento vertical,  $y_1$ , em  $i$ , relativo a um eixo baricentro, e a rigidez  $k_i$ , da longarina correspondente, expressas na equação (3.2).

$$R_i = k_i \cdot y_i \quad (3.2)$$

Ou seja, substituindo a equação (3.2) na equação (3.1)), tem-se:

$$R_i = k_i \cdot (a + b \cdot x_i) \quad (3.3)$$

O conjunto deve estar em equilíbrio. Das equações da estática têm-se as equações (3.4) e (3.6).

$$\left\{ \sum F_v = 0 \rightarrow P = \sum_{i=1}^n R_i \rightarrow P = \sum_{i=1}^n k_i \cdot y_i \right. \quad (3.4)$$

Substituindo  $y_i$  da equação (3.4) pela equação (3.1), obtém-se a equação (3.5).

$$\therefore P = \sum_{i=1}^n k_i \cdot (a + b \cdot x_i) \quad (3.5)$$

$$\left\{ \sum M = 0 \rightarrow P \cdot e = \sum_{i=1}^n R_i \cdot x_i \rightarrow P \cdot e = \sum_{i=1}^n k_i \cdot y_i \cdot x_i \right. \quad (3.6)$$

Substituindo  $y_i$  da equação (3.6) pela equação (3.1), obtém-se a equação (3.7).

$$P = \sum_{i=1}^n k_i \cdot (a + b \cdot x_i) x_i \rightarrow P = \sum_{i=1}^n k_i \cdot (a \cdot x_i + b \cdot x_i^2) \quad (3.7)$$

Caso as longarinas possuam rigidez desigual e estejam desigualmente espaçadas, tomando como origem o centro de gravidade das seções das longarinas supostamente afetadas de massas proporcionais aos momentos de inércia correspondentes, tem-se a equação (3.8):

$$\sum_{i=1}^n k_i \cdot x_i = 0 \quad (3.8)$$

Portanto, a partir desta consideração podem ser determinadas as variáveis  $a$  e  $b$ , substituindo na equação (3.8), na equação (3.7), descritas nas equações (3.9) e (3.10), a seguir:

$$a = \frac{P}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (3.9)$$

$$b = \frac{P \cdot e}{\sum_{i=1}^n (k_i \cdot x_i^2)} \quad (3.10)$$

Finalmente, substituindo as variáveis obtidas nas equações (3.9) e (3.10) na equação (3.3), pode ser obtida a reação  $R_i$ , descrita pela equação (3.11):

$$R_i = k_i \cdot \left( \frac{P}{\sum_{i=1}^n k_i} + \frac{P \cdot e}{\sum_{i=1}^n (k_i \cdot x_i^2)} \cdot x_i \right) \quad (3.11)$$

Sendo posto em evidência o termo comum dentro dos parênteses, obtêm-se equação (3.11):

$$R_i = k_i \cdot \frac{P}{\sum_{i=1}^n k_i} \cdot \left( 1 + \frac{\sum_{i=1}^n (k_i) \cdot e \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n (k_i \cdot x_i^2)} \right) \quad (3.12)$$

Para San Martín (1981) é importante destacar que nos pontos de cruzamento entre as longarinas e transversinas não carregadas, nenhuma reação é considerada. Assim, o tabuleiro se comporta como se não possuísse transversinas e desta forma a carga  $P$  se distribui entre as longarinas, proporcionalmente a um coeficiente de distribuição transversal  $r_{ie}$ , (relativo à longarina de abscissa  $i$  e correspondente a uma excentricidade  $e$  do ponto de aplicação da carga  $P$ ), conforme descrito na equação (3.12):

$$R_i = P \cdot r_{ie} \quad (3.13)$$

Substituindo a equação (3.12) em (3.11), encontra-se a equação (3.13), a qual descreve o coeficiente de distribuição, em função do momento de inércia, da excentricidade da carga, e da posição da longarina desejada  $i$ .

$$r_{ie} = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^n (k_i)} \cdot \left( 1 + \frac{\sum_{i=1}^n (k_i) \cdot e \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n (k_i \cdot x_i^2)} \right) \quad (3.14)$$

Analogamente, a teoria permite interpretar as longarinas como apoios elásticos, sendo o valor de sua rigidez genérica determinado pela equação (3.15), em qualquer posição da longarina, conforme apresentado na Figura 3.3.

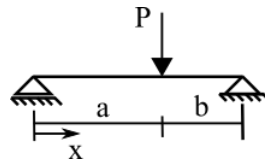


Figura 3.3 - Posição genérica da carga (Melo,2016).

$$k_i = \frac{3 \cdot E \cdot I \cdot l}{a^2 \cdot b^2} \quad (3.15)$$

Onde:  $a > b$ ;

$E$  é o módulo de elasticidade;

$I$  é o momento de inércia transversal.

### 3.2 MÉTODO DE LEONHARDT

Os engenheiros de estruturas sabem que o estudo completo e rigoroso de um tabuleiro de ponte implica em considerações de um conjunto tão complexo de fenômenos mecânicos e físicos que o seu tratamento matemático se apresenta, para o estático, geralmente impraticável (San Martin, 1981). Autores clássicos têm estudado o cálculo das grelhas de pontes, com o objetivo de apresentar os coeficientes de repartição transversal com maior grau de precisão que os da teoria de Engesser-Courbon. O método de Leonhardt é um dos mais simples e interessantes instrumentos de que dispõe o estudo das grelhas. Com este método, além das hipóteses básicas da teoria das estruturas, foram ainda admitidas as seguintes hipóteses:

- Todas as transversinas do tabuleiro são representadas por uma única transversina fictícia, apoiada nos pontos médios das diversas longarinas, paralelas e igualmente espaçada;
- A transversina fictícia é considerada como sendo simplesmente apoiada nas longarinas, e é suposta flexível;
- Desprezam-se os efeitos à torção das vigas.

Na Figura 3.4, a transversina fictícia, sob a ação de uma carga  $P_k$ , o conjunto (transversina e longarina) se deforma, originando-se, nos pontos nodais (cruzamento) as reações:

$$X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{ik}, \dots, X_{nk} \quad (3.16)$$

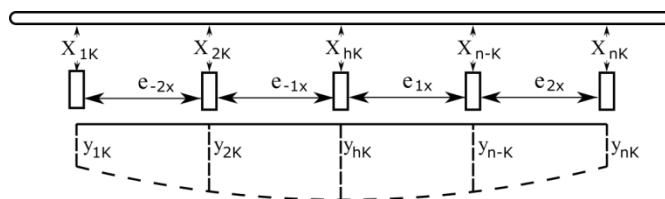


Figura 3.4 - Deformação da transversina fictícia apoiada em longarinas (Adaptado de San Martin, 1981).

Para o caso geral pondo-se para  $P_k = 1$ , obtêm-se:

$$X_{1k} = r_{1k}$$

$$X_{2k} = r_{2k}$$

... ..

$$X_{ik} = r_{ik}$$

... ..

$$X_{nk} = r_{nk}$$

$$r_{1k} + r_{2k} + \dots + r_{ik} + \dots + r_{nk} = \sum_{i=1}^n r_{ik} = 1 \quad (3.17)$$

Os valores de  $r_{ik}$  é o denominado coeficiente de repartição transversal, (reação correspondente à longarina  $i$  quando a carga unitária atua na transversina em  $k$ ).

Portanto, os coeficientes de repartição transversal nada mais são do que as ordenadas da linha de influência do deslocamento vertical da longarina  $K$ , correspondente às infinitas posições da carga unitária, atuante na transversina. Leonhardt (1938) propõe a existência de uma só transversina fictícia no centro das vigas principais, para a determinação exata dos respectivos coeficientes de repartição.

Apresentados por San Martin (1981), os coeficientes de repartição transversal dependem, nos casos normais, das seguintes grandezas:

- Relação entre inércia da transversina ( $I_T$ ) e das longarinas ( $I_L$ );

$$\eta = \frac{I_T}{I_L} \quad (3.18)$$

- Da relação entre o afastamento recíproco ( $\epsilon$ ) e o vão correspondente ( $L$ );

$$\lambda = \frac{\epsilon}{L} \quad (3.19)$$

Sendo as vigas principais iguais, igualmente espaçadas e de momento de inércia constante  $I = I_1 = I_2 = \dots = I_n$ , os coeficientes de repartição transversal podem ser algebricamente determinados em função dos parâmetros  $\eta$  e  $\lambda$ .

Os coeficientes de repartição transversal foram tabelados, tendo como parâmetro de entrada a relação constituída, denominada o grau de rigidez da estrutura, ( $\zeta$ ), descrito na equação (3.20), conforme exposto por San Martin (1981).

$$\zeta = \frac{\eta}{2 \cdot \lambda} = \frac{\frac{I_T}{I_L}}{\left(\frac{2\epsilon}{L}\right)^3} = \frac{I_T}{I_L} \cdot \left(\frac{L}{2 \cdot \epsilon}\right)^3 \quad (3.20)$$

Onde:

$L$  é o comprimento da longarina;

$\epsilon$  é o afastamento recíproco das longarinas;

$I_T$  é o momento de inércia das transversinas;

$I_L$  é o momento de inércia das longarinas.

Segundo demonstrou Leonhardt, por meio de ensaios em modelos, as diversas transversinas (de momento de inércia  $I_T$  cada uma), podem ser virtualmente substituídas por uma transversina única, fictícia, sendo o momento de inércia majorada pelo fator  $i$ , dado pela tabela abaixo:

Tabela 3.1 Valores do coeficiente de majoração.

Número de Transversinas Reais	$i$
1 ou 2	1,00
3 ou 4	1,60
5 ou mais	2,00

Adaptado de Martin (1981).

Inserindo o coeficiente de majoração  $i$ , também na equação (3.21), o grau de rigidez da estrutura ( $\zeta$ ) pode ser assim expresso:

$$\zeta = \frac{i}{\psi_v} \cdot \frac{J_T}{J_L} \cdot \left(\frac{L}{2 \cdot \epsilon}\right)^3 \quad (3.21)$$

### 3.3 MÉTODO DE GUYON – MASSONNET

Segundo Massonnet (1954), quando a rigidez à torção dos elementos de uma ponte não pode ser ignorada, a seção transversal da ponte é considerada deformável. Neste caso, é indicada a utilização do método de Guyon–Massonnet. Este método foi originalmente

desenvolvido por Guyon em 1946 e assim ter as tabelas formatadas por Massonnet-Bareš, em 1954, ficou conhecido por Guyon-Massonnet.

### Fundamentos principais do método

O princípio básico é substituir a estrutura da ponte real para uma ponte contínua, com a mesma rigidez média em flexão e torção de trabalho real. Tal princípio só é necessário para hipótese matemática (continuidade da função). O segundo princípio é analisar o efeito da distribuição de carga transversal, de forma aproximada, ao admitir que esta distribuição seja similar à distribuição de carga, quando esta ocorre no eixo longitudinal da ponte na forma senoidal, segundo a equação (3.22).

$$P(x) = P \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (3.22)$$

Onde:

$P$  é a carga aplicada ao eixo longitudinal da ponte;

$L$  é o comprimento do vão da ponte.

Os cálculos podem ser exibidos por meio do desenvolvimento da carga para uma Série de Fourier, como uma função do eixo das abcissas – longitudinal.

Foi considerada uma extensão independente, de comprimento  $L$  com  $2b$  de largura, cuja estrutura é constituída por  $m$  vigas longitudinais espaçadas de  $b_1$  metros, e por  $n$  vigas transversais espaçadas em  $L_1$  em metros, conforme é apresentado na Figura 3.5.

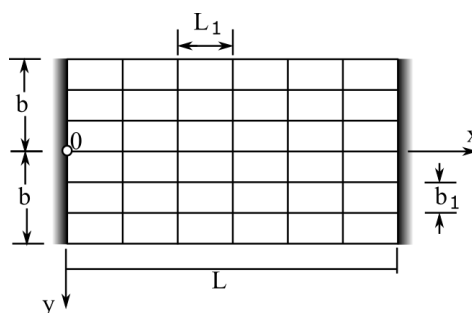


Figura 3.5 - Distribuição das vigas longitudinais e transversais no eixo cartesiano. (Massonnet, 1960).

Todas as vigas longitudinais são idênticas, caracterizadas pela equação de rigidez à flexão, equação (3.23) e a de rigidez à torção. Equação (3.24):

$$B_L = E \cdot I_L \quad (3.23)$$



$$C_L = G \cdot I_{PL} \quad (3.24)$$

Da mesma forma, todas as vigas transversais são idênticas e também caracterizadas pelas equações de rigidez à flexão. Equação (3.25) e para a rigidez à torção, a equação (3.26):

$$B_T = E \cdot I_T \quad (3.25)$$

$$C_T = G \cdot I_{PT} \quad (3.26)$$

A estrutura da ponte equivalente à ponte real terá uma rigidez à flexão por unidade de comprimento, para as longarinas e transversinas, segundo as equações (3.27) e (3.28):

$$\rho_L = \frac{B_L}{b_1} \quad (3.27)$$

$$\rho_T = \frac{B_T}{L_1} \quad (3.28)$$

De acordo com a teoria da flexão, se a ponte é deformada de acordo com uma determinada superfície  $w = w(x, y)$ , as curvas valem, segundo as equações (3.29) e (3.30):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.30)$$

A rigidez à torção pode ser determinada por unidade de comprimento para as longarinas e transversinas, pelas equações (3.31) e (3.32):

$$\gamma_L = \frac{C_L}{b_1} \quad (3.31)$$

$$\gamma_T = \frac{C_T}{L_1} \quad (3.32)$$

Desta forma, pode-se escrever a equação diferencial parcial de quarta ordem (3.33) que representa a superfície deformada:

$$\rho_P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\gamma_T + \gamma_L) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (3.33)$$

Onde:

$p(x, y)$  representa a intensidade da carga transversal distribuída por unidade de área.

Se a ponte é formada por vigas cuja rigidez à torção é insignificante, o coeficiente  $(\gamma_T + \gamma_L)$  do termo  $(\partial^2 w)/(\partial x^2 \partial y^2)$  é praticamente zero. No entanto, a ponte está formada por uma laje isotrópica, ou a grelha ortogonal cuja torção não pode ser negligenciada. A equação seguinte é a equação de Lagrange (3.34), e a equação (3.35) corresponde à rigidez na placa:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (3.34)$$

$$D = \frac{E e^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.35)$$

Uma dedução completa dessa equação pode ser encontrada na literatura (Pedroso, 1998).

Na prática, o coeficiente de  $(\gamma_T + \gamma_L)$  representa a rigidez de torção para evoluir sempre entre os dois casos extremos especiais que deve considerar.

$$\rho_P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \sqrt{\rho_T \cdot \rho_L} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (3.36)$$

Onde:

A influência relativa da torção é caracterizada pelo parâmetro de torção  $(\alpha)$ , que pode evoluir à medida que o valor fique entre zero e um (0 e 1). Observa-se que o comportamento da ponte está completamente definido por este parâmetro  $(\theta)$  chamado por Martin (1981), de *parâmetro de travejamento*, expresso pela equação (3.36).

$$\theta = \frac{b}{L} \cdot 4 \sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_T}} \quad (3.37)$$

Onde:

$b$  é a metade na largura da ponte;

$L$  é a extensão da ponte.

Aplica-se na equação (3.37), o também chamado de *parâmetro de Massonnet*, o coeficiente de rigidez à torção.

$$\alpha = \frac{\gamma_L + \gamma_L}{\sqrt{\rho_T \cdot \rho_L}} \quad (3.38)$$

### Coefficiente de distribuição transversal e as suas propriedades

Sob o efeito de uma carga linear distribuída de forma paralela ao eixo da ponte, com excentricidade ( $e$ ), seguindo a lei senoidal (equação 3.39), ocorre uma deformação na longarina conforme mostrado na Figura 3.6.

$$P' = P_1 \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (3.39)$$

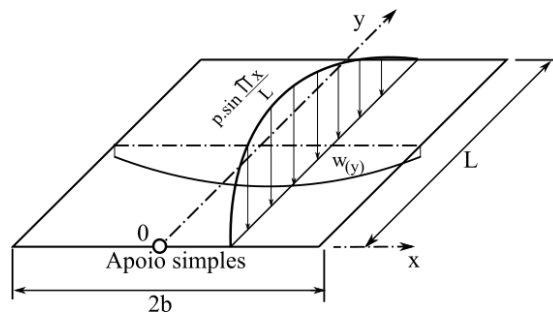


Figura 3.6 - Distribuição da carga longitudinal e sua deformação (Massonnet, 1960).

$$w_m(x, y) = W_y \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (3.40)$$

Analogamente, se a carga  $P_1$ , em vez de ser distribuída ao longo da linha, for distribuída uniformemente sobre a largura  $2b$  da ponte, permanecendo senoidal na direção do eixo, a ponte terá uma equação cilíndrica na forma da equação (3.40):

$$w_m(x, y) = W_m \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (3.41)$$

Por definição, a relação adimensional (3.42) é chamada de coeficiente de distribuição transversal.

$$k_{(y)} = \frac{W_{(y)}}{W_m} \quad (3.42)$$

Obs.: Sendo ( $k$ ) a relação entre o deslocamento vertical de um ponto da ponte sob o efeito da carga linear  $P(x)$ , e o deslocamento nesse mesmo ponto, se a carga  $P$  foi uniformemente distribuída sobre toda a largura da ponte.

O coeficiente ( $k$ ) depende: do valor do parâmetro de travejamento ( $\theta$ ); do valor do parâmetro de torção ( $\alpha$ ); da excentricidade relativa ( $e/b$ ); e da ordenada relativa ( $y/b$ ), a partir do ponto em questão. Segundo Massonnet (1954), estudos numéricos de muitos casos ajudaram a mostrar que, se variar apenas o coeficiente de torção ( $\alpha$ ), o coeficiente ( $k$ ) segue com a aproximação muito boa por simples interpolação, na equação (3.41):

$$k_{\alpha} = k_0 + (k_1 - k_0)\sqrt{\alpha} \quad (3.43)$$

Em que  $k_0$  e  $k_1$  representam os valores assumidos por  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$ , respectivamente nos subscritos dos coeficientes.

Desta forma resulta que, na determinação de  $k$ , é suficiente para saber as funções praticas:

$$k_0 = k_0\left(\theta, \frac{e}{b}, \frac{y}{b}\right) \quad e \quad k_1 = k_1\left(\theta, \frac{e}{b}, \frac{y}{b}\right) \quad (3.44)$$

Para que sejam comparados os valores dos coeficientes de distribuição transversal de Guyon–Massonnet com os apresentados por Engesser–Courbon e Leonhardt, deve-se utilizar a equação (3.45) apresentada por Ferrara (2012).

$$r_i = \frac{k_{\alpha}}{n} \quad (3.45)$$

Onde  $n$  é o número de longarinas da ponte.

## **4 ASPECTOS COMPUTACIONAIS E MODELAGEM**

Neste capítulo são apresentadas considerações relativas ao Método de Elementos Finitos e a programação dos métodos analíticos. A modelagem da estrutura de estudo será feita tridimensionalmente pelo Método dos Elementos Finitos, como grelha, utilizando-se o Programa SAP2000.

### **4.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)**

O Método de Elementos Finitos (MEF) obteve avanço graças ao advento do computador e à evolução da Análise Matricial de Estruturas.

Na solução de problemas físicos utilizam-se frequentemente modelos matemáticos expressos por soluções analíticas clássicas. Segundo Soriano (2009), estes métodos são de difícil aplicação em materiais de geometria e condições de contorno irregulares. Assim, o MEF surge como uma ferramenta numérica que busca soluções aproximadas, a partir da ideia de dividir o elemento estrutural em diversos elementos finitos, interconectados através de pontos nodais em seus contornos (chamado de discretização do modelo). Soriano (2009) apresenta uma sequência de etapas, esquematizadas na Figura 4.1, que caracterizam o processo de aplicação do MEF. Segundo o mesmo autor é a modularidade de etapas mostrada que torna o MEF adequado à resolução de uma ampla classe de modelos matemáticos em um mesmo programa automático. Esta sequência aplica-se ao comportamento linear, não dependente de tempo.

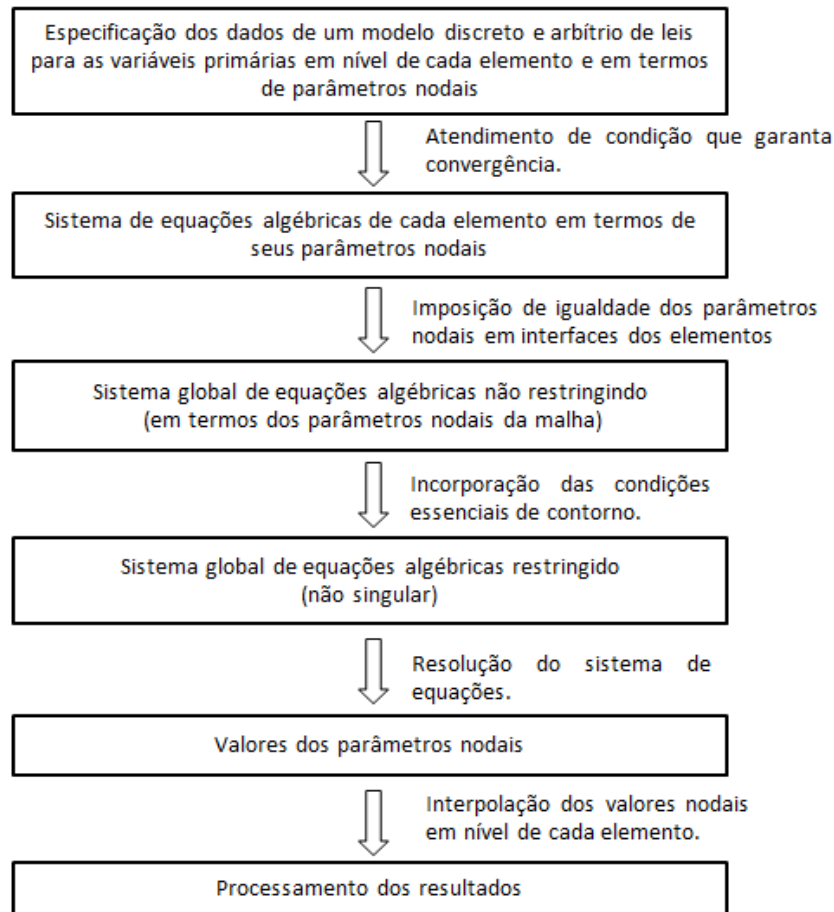


Figura 4.1 – Etapas do Método dos Elementos Finitos. (Soriano, 2009).

## 4.2 PROGRAMA DE ANÁLISE ESTRUTURAL SAP/2000

A modelagem foi feita utilizando-se o *software* SAP2000 na versão 14.0.0. Este Programa utiliza uma interface de fácil utilização e visualização em 3D, facilitando a modelagem da estrutura e os resultados. Especialmente em pontes, a atribuição de cargas móveis pode ser feita de acordo com as normas internacionais. Quanto à utilização de materiais e formas, o mesmo Programa possui uma biblioteca com os parâmetros utilizados nas análises, como coeficiente de Poisson, peso próprio, módulo de elasticidade, coeficiente de expansão térmica, dentre outros. Nos casos estudados, na interface de dados do material serão utilizadas as grandezas de tonelada-força (Tonf), para unidade de força; metros (m), para unidades de medidas lineares; e Graus Celsius (°C), para unidade térmica, conforme ilustrado na Figura 4.2. O *software* permite a análise de vários elementos da estrutura como os nós, as linhas e as áreas.

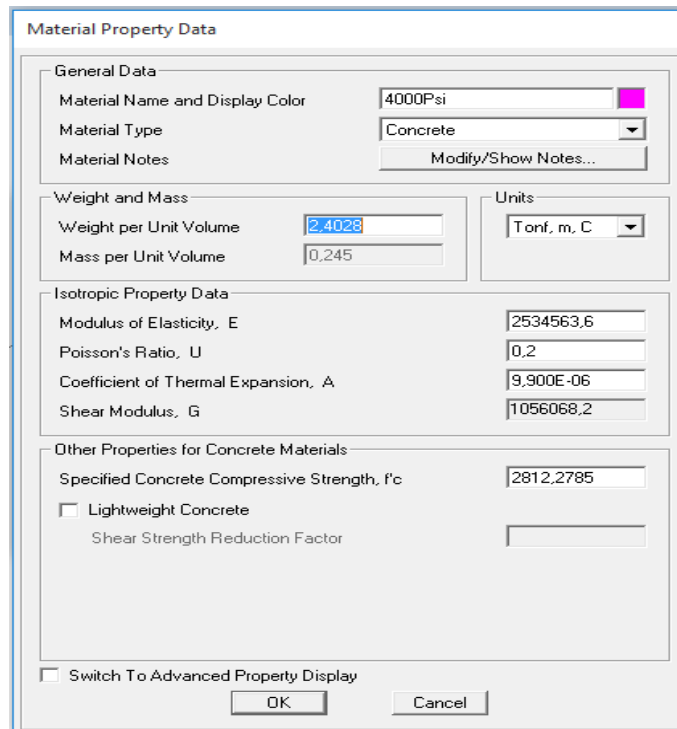


Figura 4.2 - Interface de Propriedade do Material. (SAP/2000).

No Método dos Elementos Finitos, MEF, o elemento FRAME é utilizado para modelagem de barras de estruturas planas ou espaciais, como pórticos planos e espaciais, grelhas ou vigas. Para este elemento, no cálculo dos deslocamentos, são consideradas as deformações axiais, flexão, torção e cisalhamento. O programa representa o elemento por uma linha reta conectando dois pontos distintos em suas coordenadas, denominados como nós e representados por letras do alfabeto. Estas mesmas linhas coincidem com o eixo longitudinal do elemento, que passa pelo centroide da seção transversal do mesmo. Os nós do elemento possuem, em seus graus de liberdade, seis coordenadas denominadas pelo Programa como  $U1$ ,  $U2$ ,  $U3$ , para translação, e  $R1$ ,  $R2$  e  $R3$  para rotações, como no sistema de coordenadas local dos nós, ilustrados na Figura 4.3.

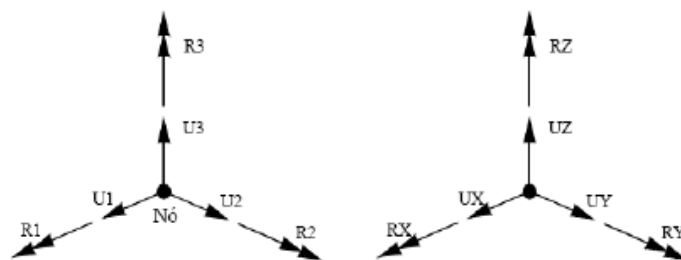


Figura 4.3 – Coordenadas Global e Local. (Almeida, 2009).

No Programa, os eixos no sistema global são denominados eixos 1, 2 e 3, sendo o eixo 1 localizado na direção longitudinal do elemento estudado. Os eixos 2 e 3 são situados no plano perpendicular ao eixo 1 da estrutura, e sua direção e sentido são definidos pelo Programa, podendo ser alterado pelo projetista. Escritos de Almeida (2009) informam que o projetista deve obedecer à regra da mão direita, ao lançar os elementos *frame* na estrutura. Para o elemento, as coordenadas locais são utilizadas para definir propriedades da seção transversal, cargas e esforços das barras. A Figura 4.4 apresenta os eixos e suas respectivas direções.

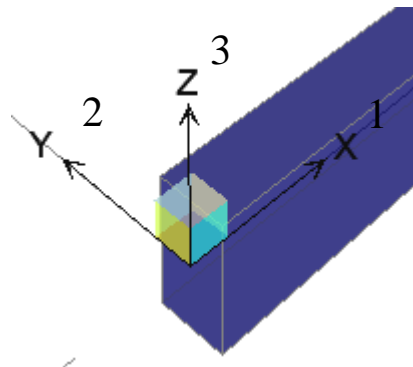


Figura 4.4 - Sistema de Coordenadas Globais de um Elemento FRAME/SAP2000.

### 4.3 PROGRAMA MATLAB

Os métodos analíticos foram calculados em uma rotina criada no Programa MATLAB (abreviação de MATrix LABoratory), desenvolvido na década de 70 por Clever Moler. Esta ferramenta apresenta alto desempenho voltado para o cálculo numérico, integrando análise numérica, cálculo de matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos. Os elementos básicos de informação é uma matriz que não requer um dimensionamento. O Programa dispõe uma ampla biblioteca de funções matemáticas pré-definidas, linguagem simples e direta, possibilitando realização de cálculo de engenharia com mais rapidez e simplicidade do que outras linguagens de computação. O uso típico do MATLAB ocorre nos cálculos matemáticos; desenvolvimento de algoritmos; análise, simulação e confecção de dados; gráficos científicos e de engenharia; e desenvolvimento de aplicação, incluindo a elaboração de interface gráfica com o usuário. A versão utilizada do MATLAB foi R2016a, cuja interface se encontra apresentada na Figura 4.5.



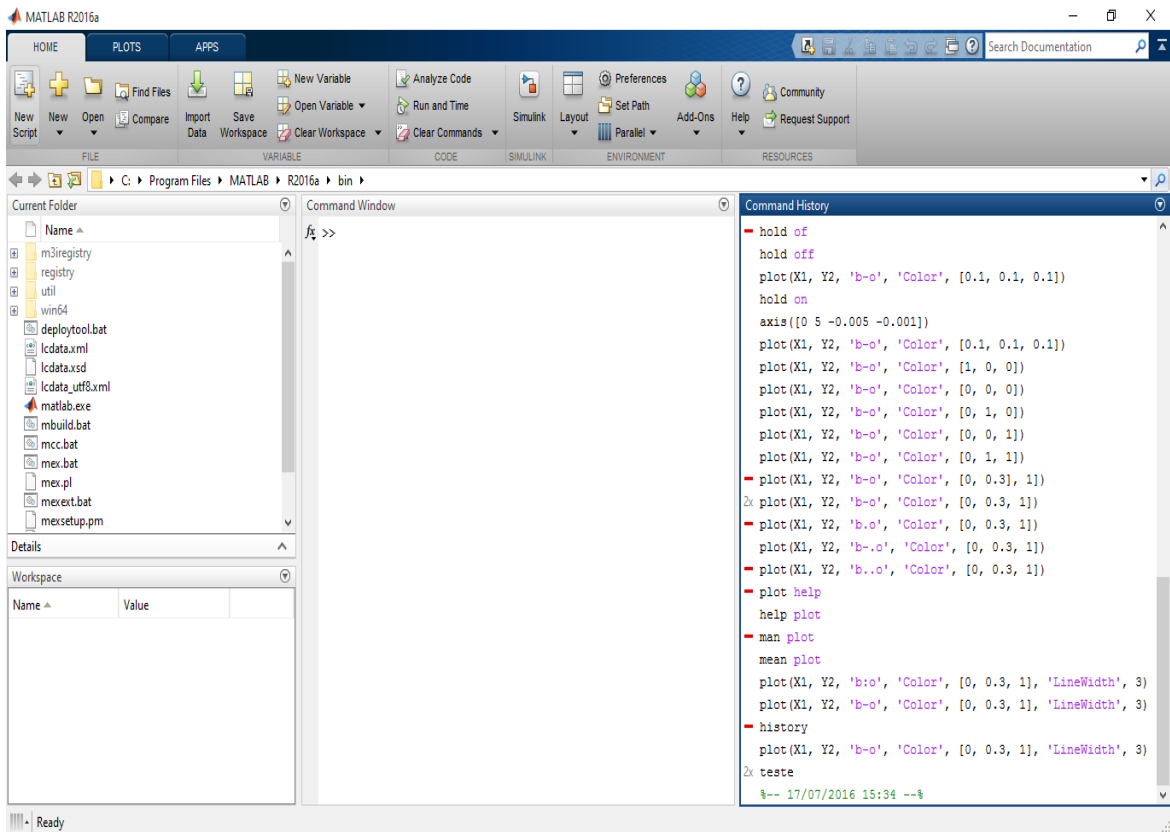


Figura 4.5 – Tela inicial do MATLAB R2016a (Melo, 2016 d).

Para facilitar o estudo, no próprio MATLAB foi criada uma interface gráfica, que agrupa os três métodos analíticos, e seus resultados foram apresentados em forma de gráfico.

#### 4.4 PROGRAMA CALTAPEG

O programa CALTAPEG foi desenvolvido com o objetivo de obter os coeficientes de repartição transversal e deslocamento dos três métodos analíticos de uma ponte em grelha, submetida à carga concentrada. A Figura 4.6 apresenta a tela geral do Programa. O MATLAB dispõe de uma ferramenta chamada GUIDE que permite construir interfaces gráficas de interação com o utilizador, mecanismo que auxilia o programador a implementar recursos gráficos mais rápida e facilmente: a GUI (Graphical User Interface), que é uma interface gráfica que apresenta um mecanismo mais atraente e mais amigável ao usuário na utilização do *software*. Basicamente, há dois meios de se criar uma GUI: Criando funções diretamente na linha de comando ou simplificando drasticamente a tarefa, com o uso da função Guide, disponibilizada pelo Matlab. Para iniciar o Guide, é digitado o

comando na janela do Matlab. Na Figura 4.6 é apresentada uma Guide com uma Gui em branco.

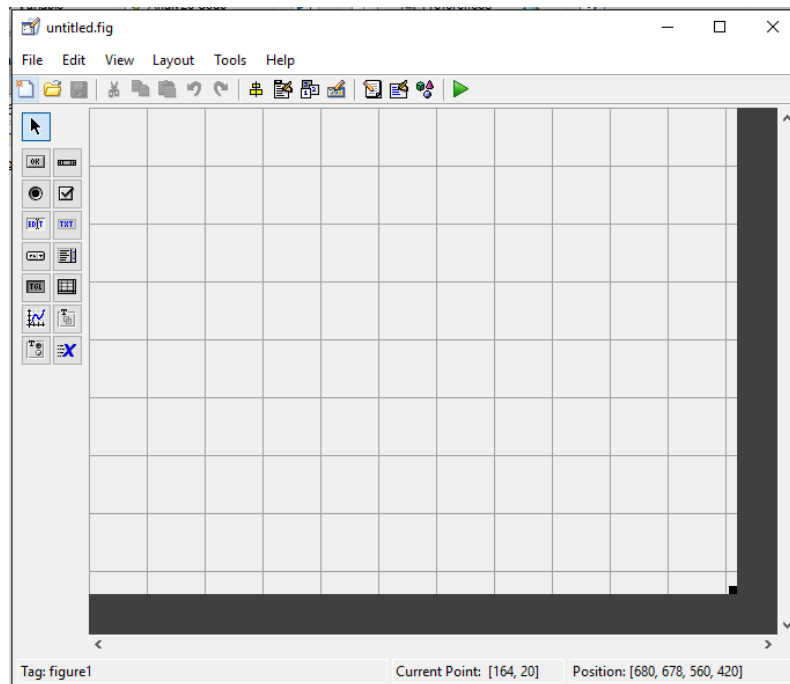


Figura 4.6 – Tela inicial da função Gui. (Melo, 2016 d).

O Guide é um programa simples de ser utilizado. Pode-se trabalhar facilmente, editando a GUI, colocando objetos como botões e caixas de texto diretamente na área de *layout*. Porém, para que a GUI interaja com o usuário de maneira satisfatória, é preciso programar as ações de seus objetos. A Figura 4.7 apresenta a interface do Programa CALTAPEG.

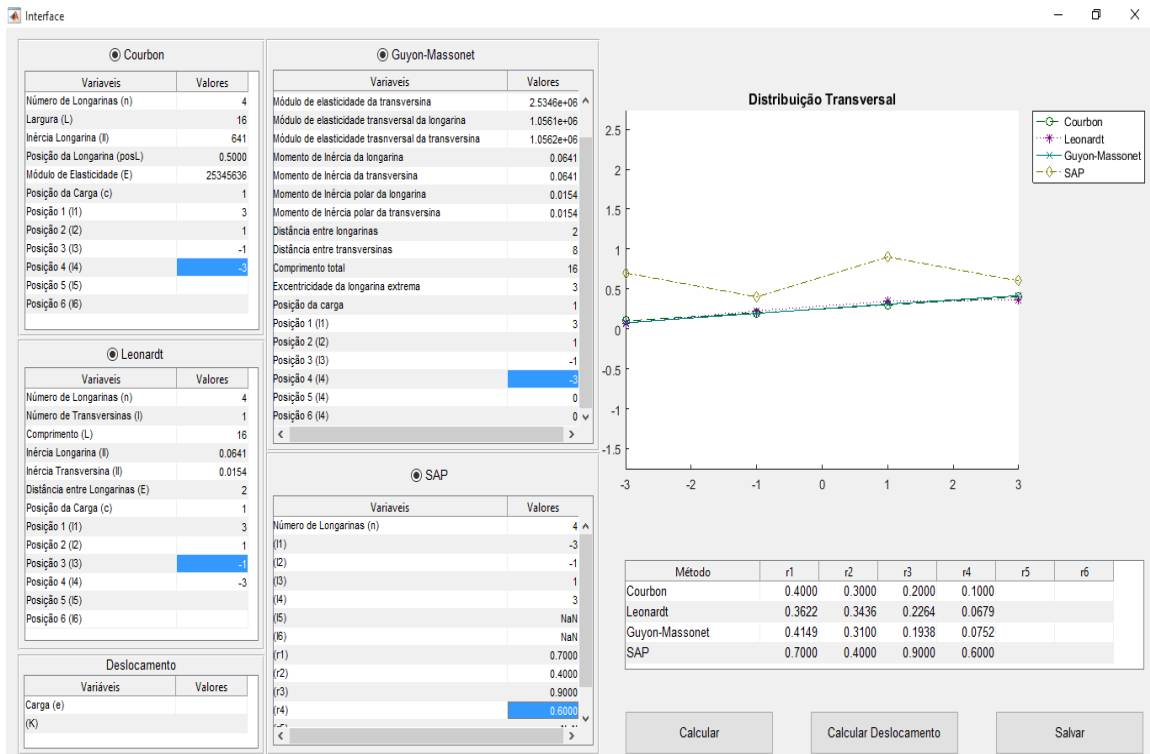


Figura 4.7 – Interface: Programa CALTAPEG. ( Melo, 2016 d)

Para dar início ao aplicativo, deve-se selecionar um dos métodos e inserir os valores dos parâmetros. Depois de conferidos os dados de entrada, inicia-se o processamento dos dados acionando o botão Calcular. Finalizando o processo, são exibidos nas janelas os resultados, apresentados em forma de tabela, acionando a opção “Salvar”.

## 5 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os cálculos e os resultados de verificação dos modelos propostos para o estudo. Nos casos tratados, os modelos dos tabuleiros apresentam as mesmas dimensões das seções transversais para todos os elementos.

### 5.1 MODELO DE VERIFICAÇÃO DOS MÉTODOS ANALÍTICOS E NÚMÉRICO

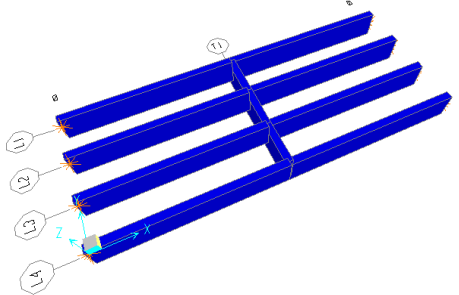
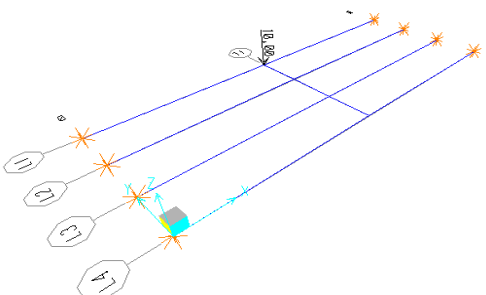
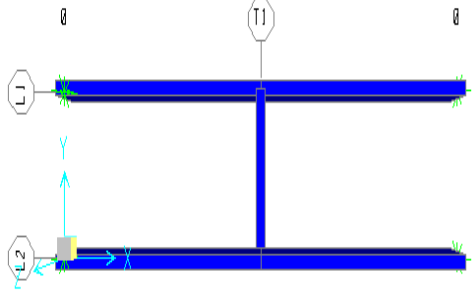
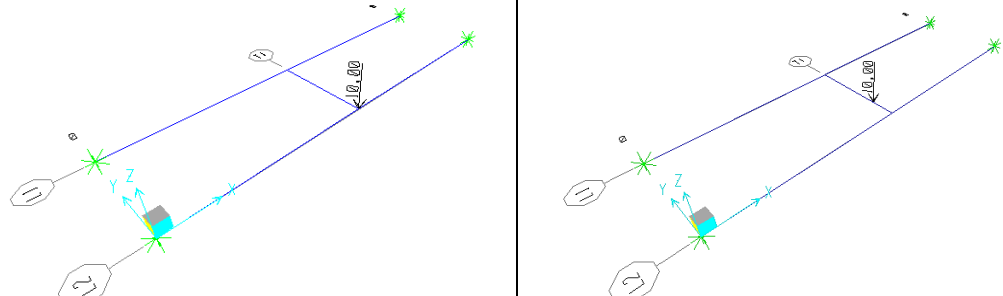
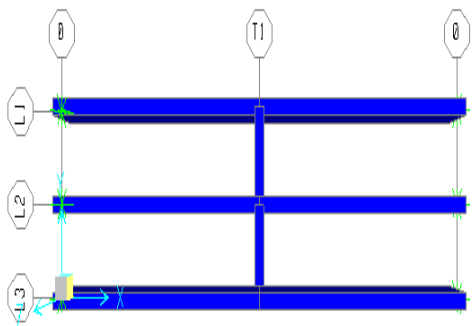
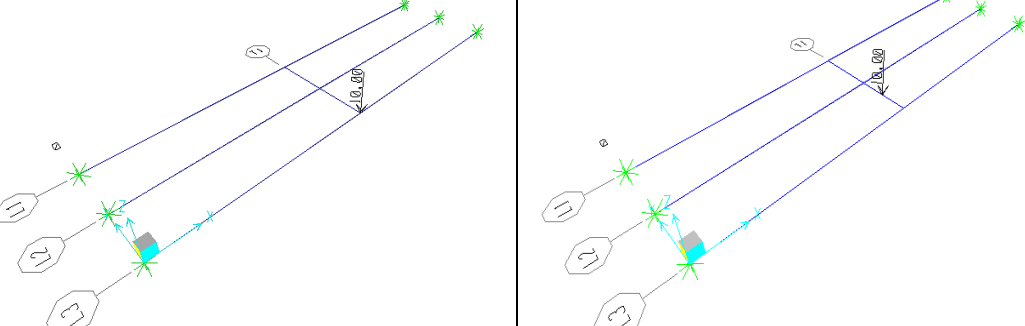
Os modelos estudados apresentam longarinas de comprimento longitudinal de 16 metros, seção transversal de 0,35 metros de largura 1,30 metros de altura. As denominações dos modelos adotados serão as seguintes: GR2L1T-RCT, onde, GR é abreviatura de grelha, 2L indica a quantidade de longarina, 1T é a quantidade de transversina. As letras R indicam a seção da transversina (R – retangular e T – “tê”), conforme a Tabela 5.1. Será aplicada apenas uma carga pontual que terá alternância em relação ao número de transversinas, mantendo a posição em relação à longarina mais extrema apresentada na Tabela 5.2.

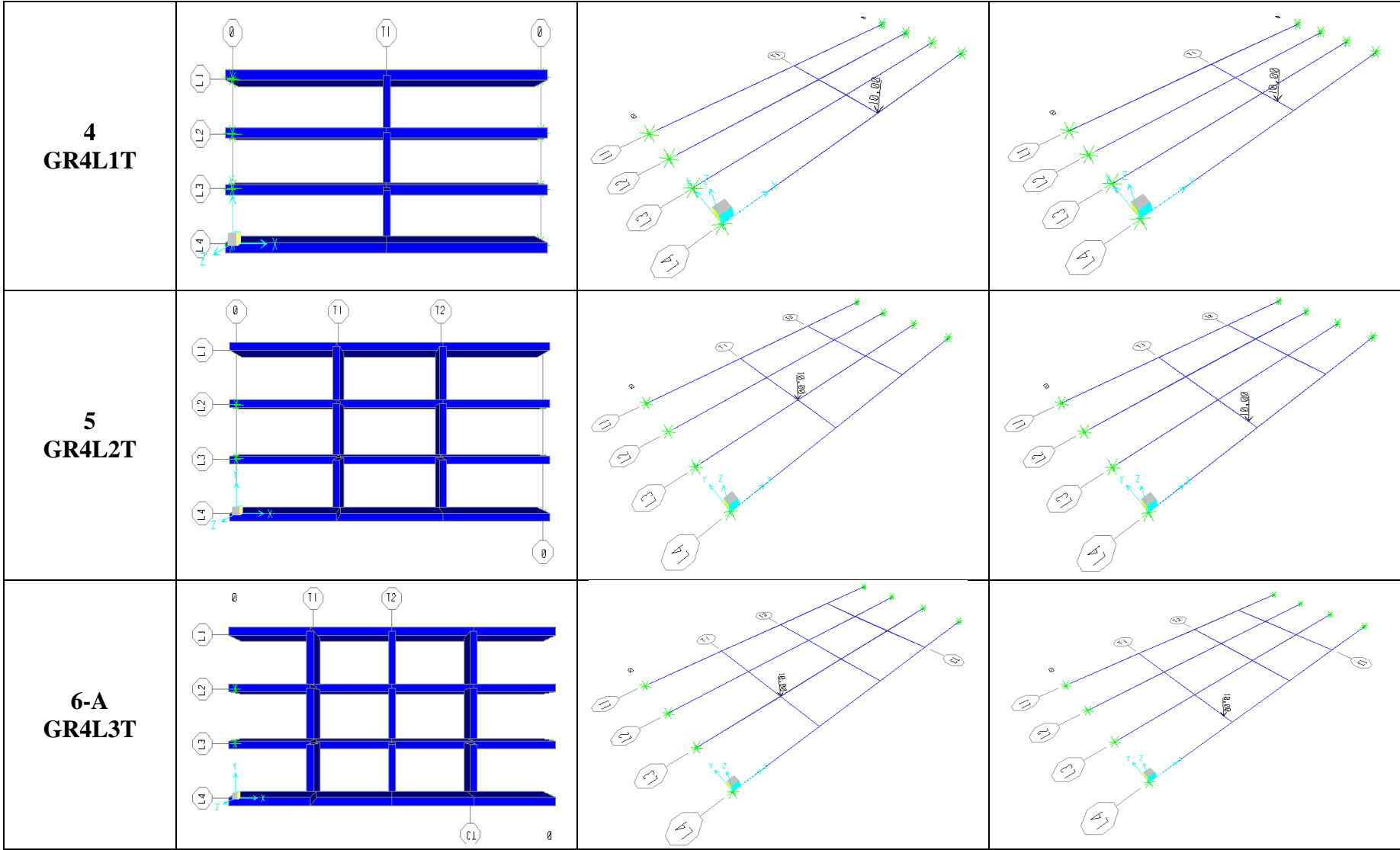
Tabela 5.1: Características Geométricas das longarinas e transversinas.

<b>Características Geométricas</b>					
<b>Seção “R”</b>	$A(cm^2)$	$E (T/m^2)$	$G(T/m^2)$	$I(m^4)$	$J_p(m^4)$
	0,455	2534563,6	1056068,2	0,0641	0,0154
<b>Seção “T”</b>	$A(cm^2)$	$E (T/m^2)$	$G(T/m^2)$	$I(m^4)$	$J_p(m^4)$
	1,205	2534563,6	1056068,2	0,2509	0,0383
<b>Seção “R”</b>	$A(cm^2)$	$E (T/m^2)$	$G(T/m^2)$	$I(m^4)$	$J_p(m^4)$
<b>Rig. Elevada.</b>	0,455	$2,534 \times 10^{12}$	$1,05 \times 10^{12}$	0,0641	0,0154

A Tabela 5.2 sintetiza, num quadro geral, todos os modelos estudados nesta dissertação.

Tabela 5.2 – Repertório dos modelos estudados

Caso	Perfil	Posição da Carga Concentrada	
<p><b>1</b> VALIDAÇÃO</p>			
<p><b>2</b> GR2L1T</p>			
<p><b>3</b> GR3L1T</p>			



<p><b>6-B GR4L3T</b></p>			
<p><b>7-A GR4L3TL</b></p>			
<p><b>7-B GR4L3TL</b></p>			

### 5.1.1 Caso 1 – Estudo de validação

A carga é aplicada sobre o nó formado pela longarina L1 e a transversina T1, mostrado na Figura 5.1, com excentricidade ( $e_j$ ) de 3,225 metros em relação ao centro de elástico (CE), e cotas de afastamento das longarinas em relação ao mesmo centro elástico.

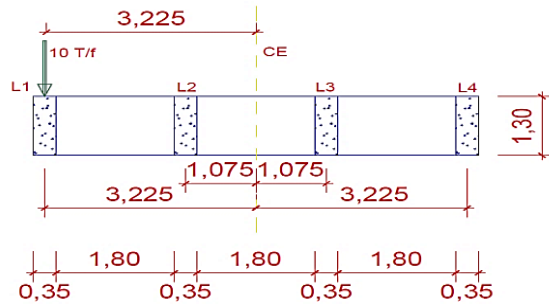


Figura 5.1 – Seção transversal da Ponte sem a contribuição da laje. (Adaptado de Frota, 2014).

Os métodos analíticos foram calculados pelo Programa CALTAPEG, como disposto na Figura 5.2.

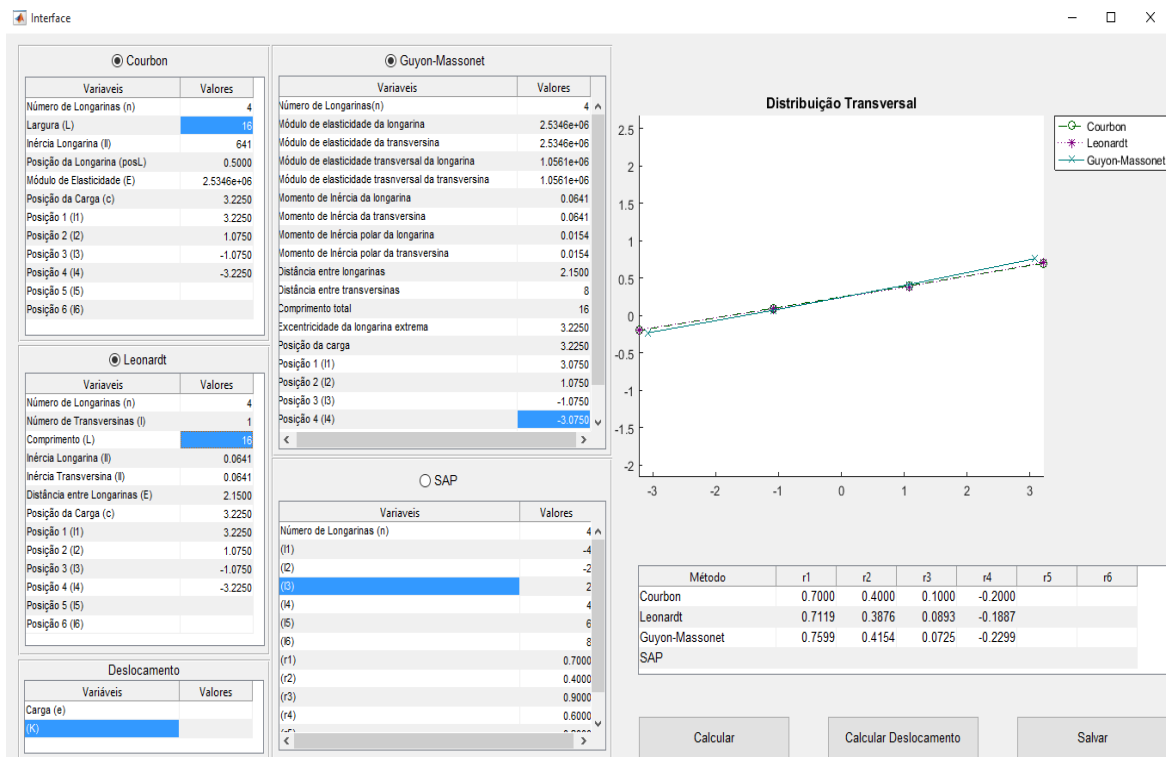


Figura 5.2 – Cálculo dos métodos analíticos através do Programa CALTAPEG-interface visual.



São apresentadas na Figura 5.3, as deformações da estrutura na linha de centro (a) e as deformações a partir da linha central (b).

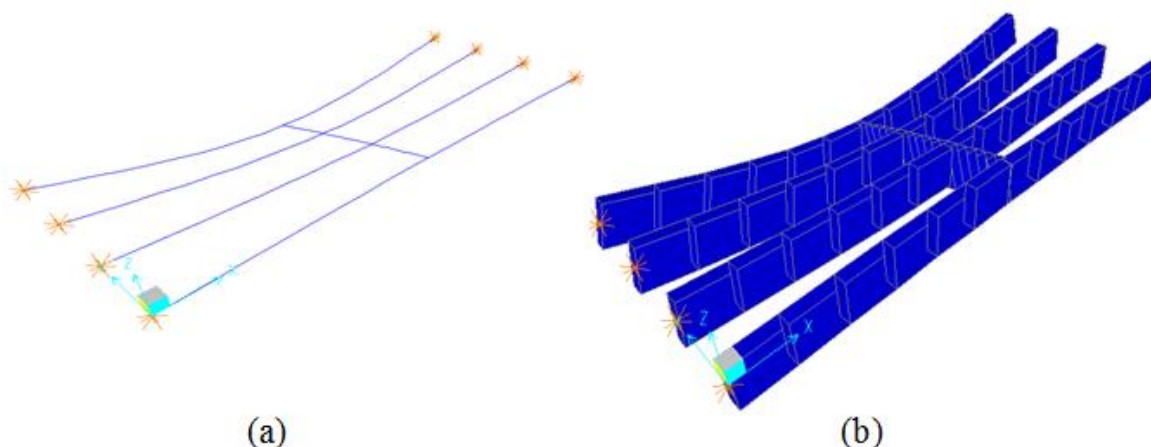


Figura 5.3 – Deformação da Grelha.

O uso do elemento FRAME permite verificar os momentos fletores e torçor, em todo o conjunto da grelha, como mostra a Figura 5.4.

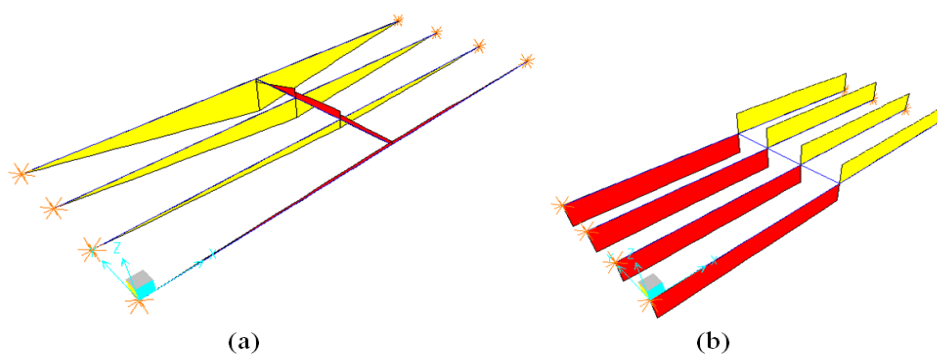


Figura 5.4 – Diagrama de Momento Fletor (a) e Momento Torçor (b).

O cálculo para os coeficientes de repartição foi obtido a partir da razão entre o momento fletor absorvido pela respectiva longarina em relação ao momento fletor total, mostrado na equação 5.1, para todas as longarinas.

$$r_i = \frac{m_1}{m_t} \cdot 100 \quad 5.1$$

Onde,

$m_1$  é o momento fletor absorvido pela respectiva longarina;

$m_{total}$  é o momento fletor total incidido sobre a mesma longarina.

Este momento fletor total é calculado a partir da equação 5.2, sendo a razão entre o produto da carga total pelo comprimento da longarina pela constante de valor (4) quatro.

$$m_{total} = \frac{q \cdot l}{4} \quad 5.2$$

Os coeficientes de repartição obtidos pelo Programa estão apresentados na Tabela 5.3, e os valores expressos em percentagem.

Tabela 5.3 - Coeficiente de Repartição ( $r_i$ ).

Coeficiente de Repartição dos Métodos Analíticos. (carregamento L1(%))					Resultados obtidos por Frota (2014)
	Courbon	Leonhardt	Guyon- Massonnet	SAP (Elemento FRAME)	Courbon
L 1	70,00	71,19	75,99	57,43	70,00
L 2	40,00	38,76	41,54	34,48	40,00
L 3	10,00	08,93	07,25	13,57	10,00
L 4	-20,00	-18,87	-22,99	-05,50	-20,00

Os erros entre os próprios métodos analíticos são apresentados na Tabela 5.4 os valores são expressos em percentagem. A determinação do erro entre o método analítico e numérico foi obtida através da modelagem no SAP/2000, que representa nó elástico transmitindo com transversina flexível.

Tabela 5.4 – Erro entre os modelos.

ERRO ENTRE OS MODELOS ANALÍTICO E SAP/2000 (NUMÉRICO)						
	Courbon X SAP/2000 (%)	Leonhardt X SAP/2000 (%)	Guyon- Massonnet X SAP/2000 (%)	Courbon X Leonhardt (%)	Courbon X Guyon (%)	Leonhardt X Guyon (%)
L 1	17,95	19,32	24,42	1,70	8,55	6,74
L 2	13,80	11,04	16,99	3,10	3,85	7,17
L 3	26,30	54,71	87,17	10,70	27,50	18,81
L 4	72,50	70,85	76,07	5,65	14,95	21,83

Observa-se na Figura 5.5 a aproximação dos valores dos coeficientes de repartição, para os métodos analíticos, e um pequeno distanciamento entre os métodos supracitados com o método numérico/SAP2000. Este distanciamento apresenta maior intensidade nas longarinas extremas, as quais constituem o erro, sendo que o mesmo ocorre devido às hipóteses simplificadoras do método analítico. Já o SAP/2000 considera nos nós o efeito elástico, distribuindo assim os esforços. Para as longarinas internas o erro diminui, apresentando valores bem próximos.

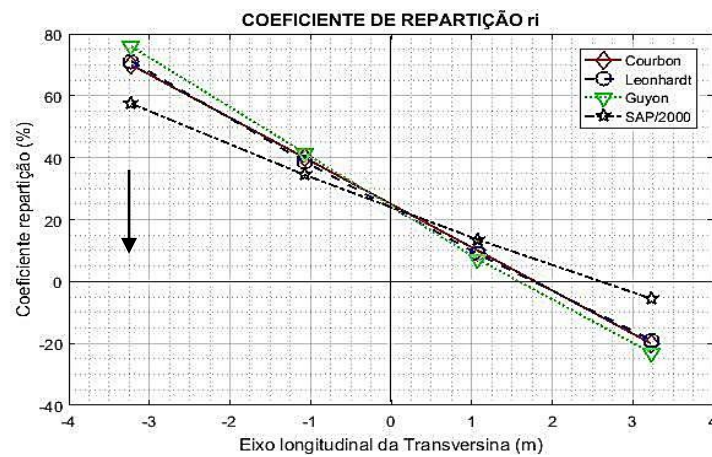


Figura 5.5 – Coeficiente de repartição ( $r_i$ ).

## 5.2 CASO 2 – MODELO GR2L1T

O modelo apresentado na Figura 5.6 representa uma grelha com duas longarinas (comprimento  $L = 8$  metros), uma transversina (T1) (comprimento  $L = 4$  metros) e com carga concentrada aplicada. A primeira carga, com excentricidade  $e_{j1}$  de 1 metro do centro elástico no sentido da longarina L2, é chamada de carga na transversina. A segunda carga, com excentricidade  $e_{j2}$  de 2 metros, incidindo sobre o ponto nodal formado entre as longarinas L2 e a transversina T1, é chamada de carga nodal.

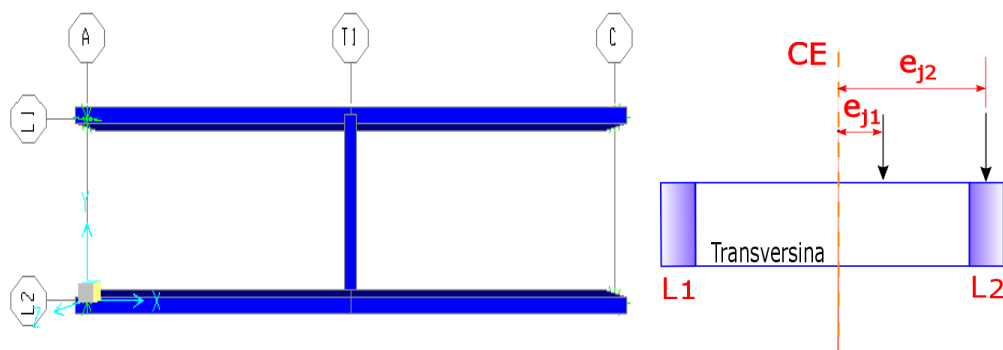


Figura 5.6 - Modelo de Grelha com 2 longarinas e uma transversina.

### 5.2.1 Carga sobre a transversina

Os coeficientes de repartição ( $r_i$ ) que incidem sobre as longarinas L1 e L2 são apresentados na Figura 5.7 juntamente com os respectivos deslocamentos.

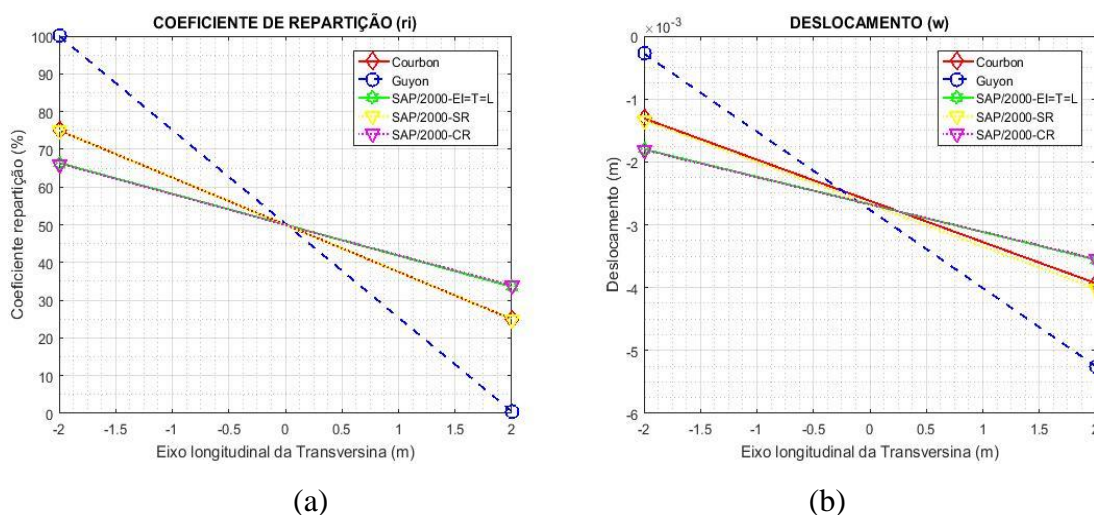
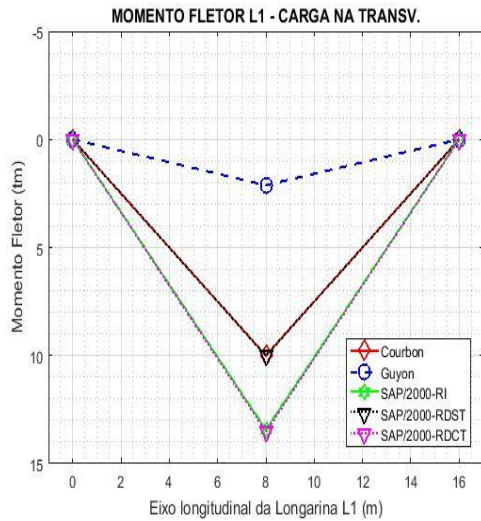


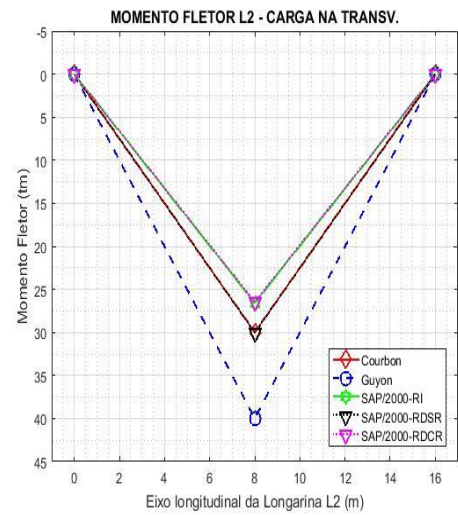
Figura 5.7 – Coeficiente de repartição e deslocamento para a carga aplicada na transversina.

Observa-se na solução de Courbon e no modelo SAP/2000-SR uma semelhança nos valores dos coeficientes de repartição transversal e de deslocamentos. Da mesma maneira os modelos SAP/2000-CR e SAP/2000-EI apresentaram uma semelhança entre si. Entretanto, a solução de Guyon afastou-se dos modelos analíticos e numéricos em relação aos valores do coeficiente de repartição e de deslocamento.

A Figura 5.8 (a) apresenta o momento fletor que ocorre nas longarinas L1 e (b) em L2.



(a)



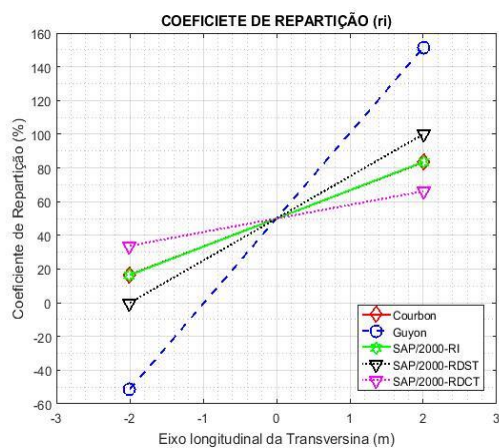
(b)

Figura 5.8 – Momento Fletor atuante nas longarinas.

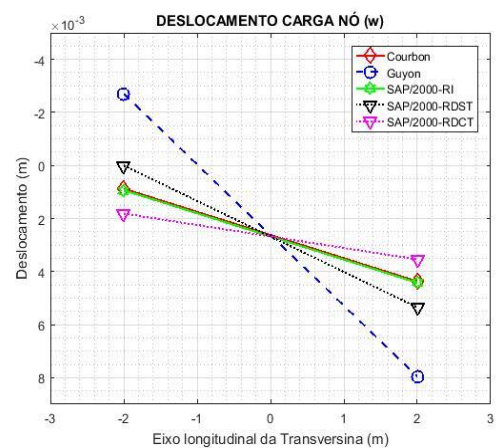
Observa-se nas longarinas L1 e L2 uma semelhança nos valores de momento fletor para a solução de Courbon e o modelo SAP/2000-RDSR. Como também para os modelos SAP/2000-RI e SAP/2000/RDCT. Contudo, verifica-se uma alternância em L1 e L2, na ordem de sequência de momento fletor.

### 5.2.2 Carga sobre o nó formado da longarina L2 e a transversina T1

Os valores dos coeficientes de repartição são apresentados na Figura 5.9 (a) e deslocamento que ocorre na estrutura (b).



(a)



(b)

Figura 5.9 – Coeficiente de repartição e deslocamento para a carga aplicada no nó da L2 e

T1.

Verifica-se na solução de Courbon e no modelo SAP/2000-RI uma semelhança nos valores dos coeficientes de repartição transversal e de deslocamento. Entretanto, um afastamento entre os modelos SAP/200-RDST e SAP/2000-RDCT. Além disto, a posição do centro elástico é o mesmo para todos os modelos.

Apresentados na Figura 5.10 os valores de momentos fletores (a) e deslocamentos (b), atuantes nas longarinas L1.

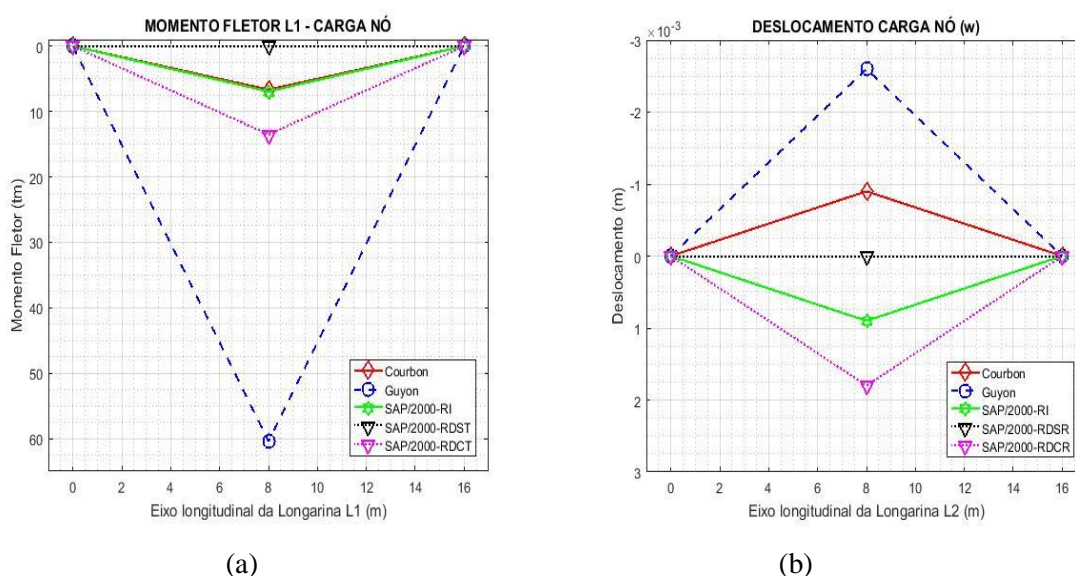


Figura 5.10 – Momento fletor nas longarinas L1 e L2 devido à carga no nó.

Nota-se uma semelhança entre os valores de momento fletor e de deslocamento na solução de Courbon e o modelo SAP/2000-RI. A solução de Guyon, entretanto, apresentou valores negativos de momento fletor e de deslocamento, como também houve alteração na ordem de sequência.

São mostrados na Figura 5.11 os valores de momento fletor em (a), e os valores de deslocamento em (b). Observa-se na solução de Guyon, valor de momento fletor e de deslocamento superior à solução de Courbon, confirmando a diferença entre as hipóteses simplificadoras de cada método. Além disto, verifica-se uma semelhança entre a solução de Courbon e o modelo SAP/2000-RI. Comparando a posição das soluções da longarina L1 em relação à L2, verifica-se uma mudança na ordem de sequência dos modelos do SAP/2000-RDCT, em relação ao SAP/2000-RDST.

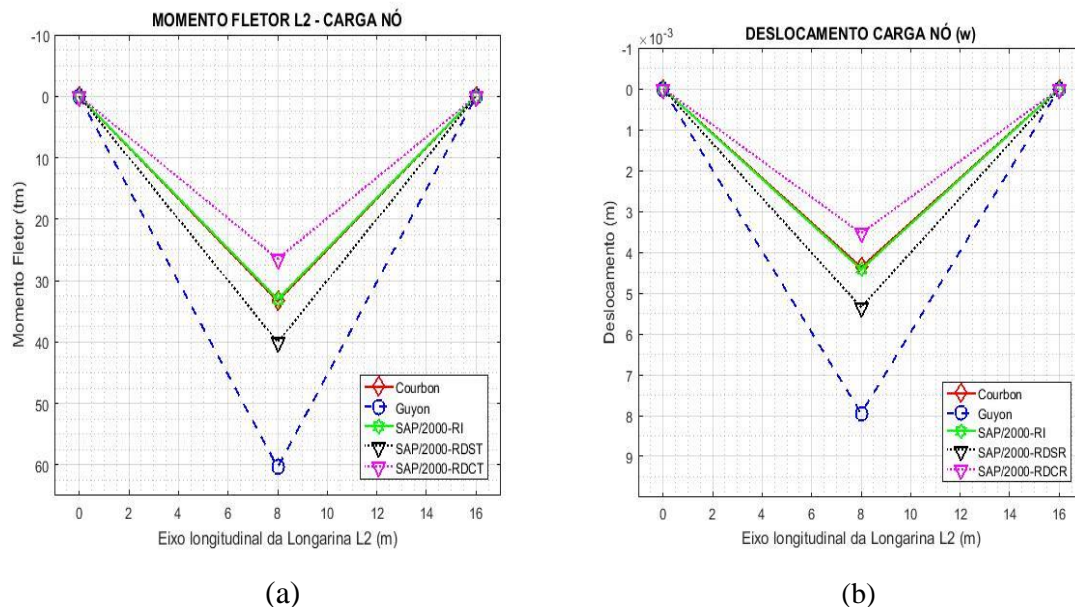


Figura 5.11 – Deslocamento das longarinas L1 e L2 devido à carga atuante no Nó.

### 5.3 CASO 3 - MODELO GR3L1T

O modelo GR3L1T, representa uma grelha com três longarinas, mantendo a quantidade de transversinas, como é mostrado na Figura 5.12.

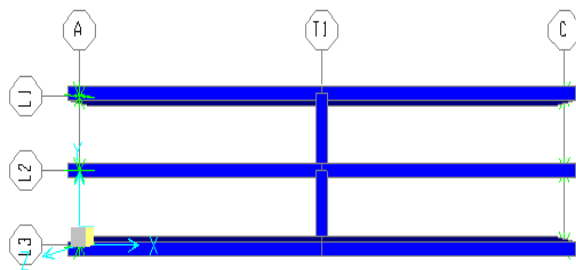


Figura 5.12 - Modelo de grelha com 2 longarinas e uma transversina.

#### 5.3.1 Carga sobre a transversina

A Figura 5.13 apresenta a posição da carga (a), e excentricidade ( $e_{j1}$ ) de 1 metro, em relação ao centro elástico (b).

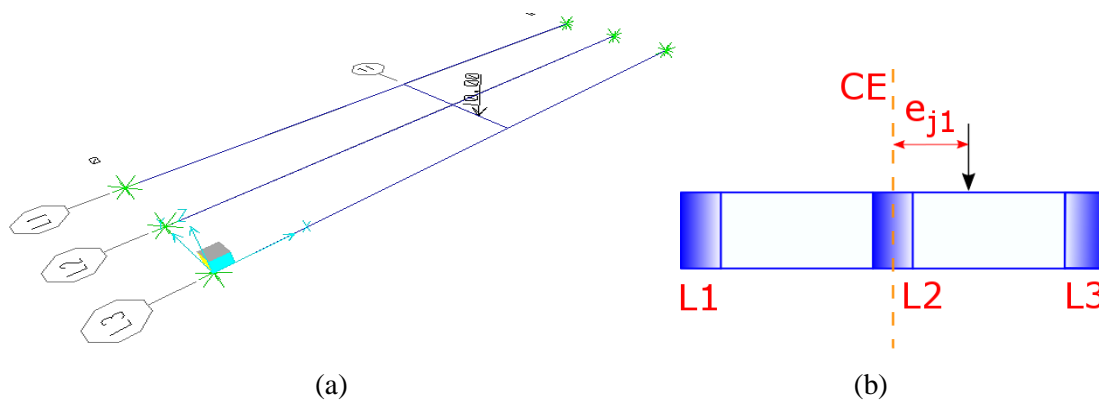


Figura 5.13 – Posição da carga sobre a transversina (a) e excentricidade da carga (b).

Observam-se na Figura 5.14 os valores dos coeficientes de repartição bem como deslocamentos na transversina.

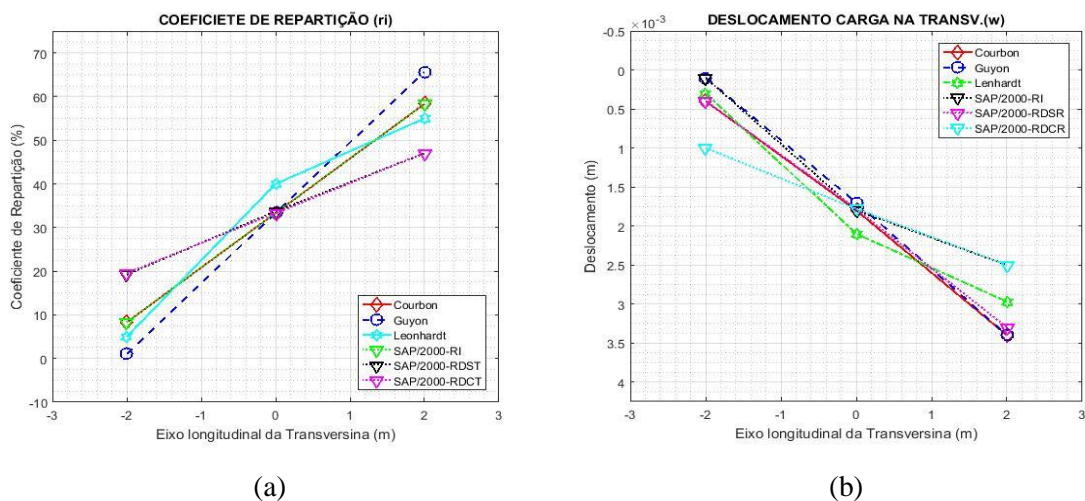
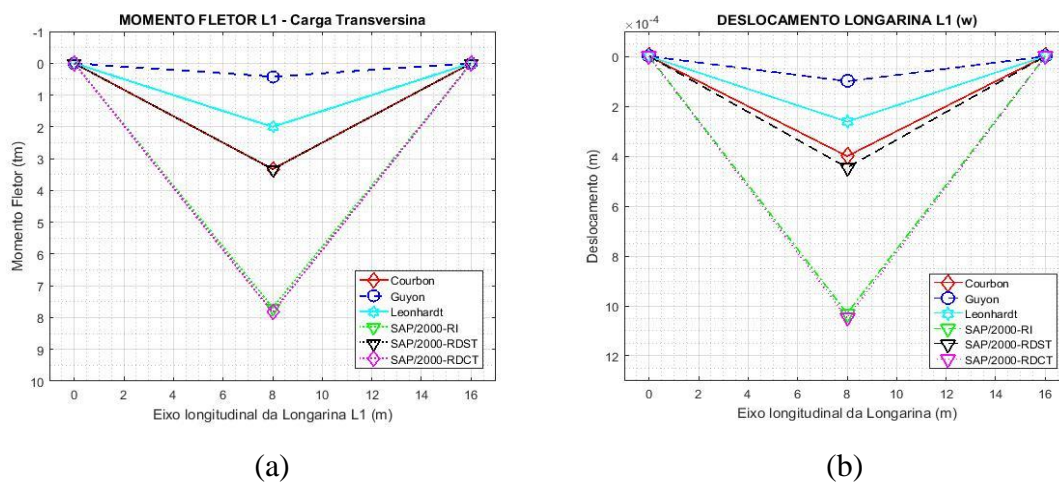
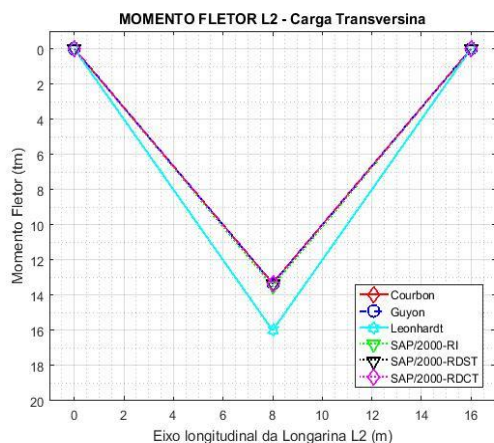


Figura 5.14 – Coeficiente de repartição e deslocamento com carga aplicada na transversina.

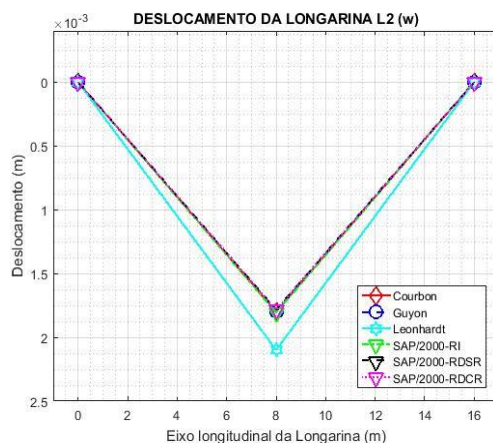
Na Figura 5.15 estão apresentados os momentos fletores como também deslocamentos das longarinas L1, L2 e L3.



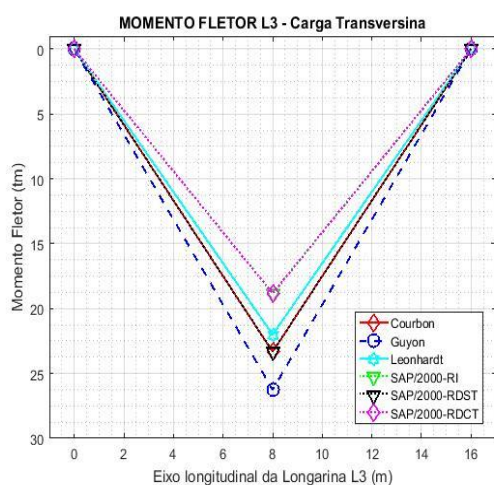




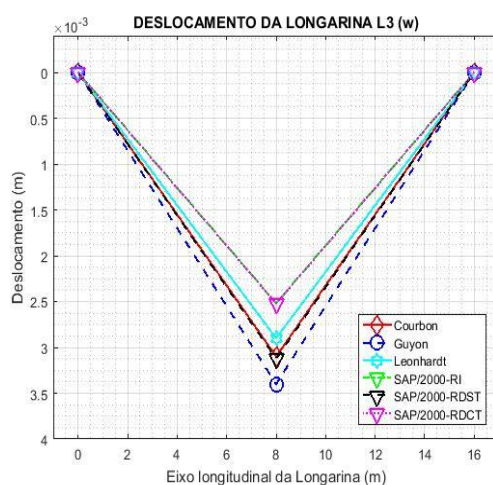
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.15 – Momento fletor e deslocamento das longarinas com carga aplicada sobre a transversina.

Neste caso, a partir de três longarinas, torna-se possível o estudo pelo método de Leonhardt. A solução de Courbon e o modelo SAP/2000-RDST continuam com seus valores de momento fletor e de deslocamento semelhantes na longarina L1 e L2; como também os modelos de SAP/2000-RDCT e SAP/2000-RI. A solução de Leonhardt, para as três longarinas, não apresenta semelhança com nenhuma outra solução ou modelo.

### 5.3.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T1

Em seguida é estudada a estrutura com carga sobre o nó, mostrado na Figura 5.16, a vista superior do tabuleiro (a), e a posição da carga sobre o nó (b).

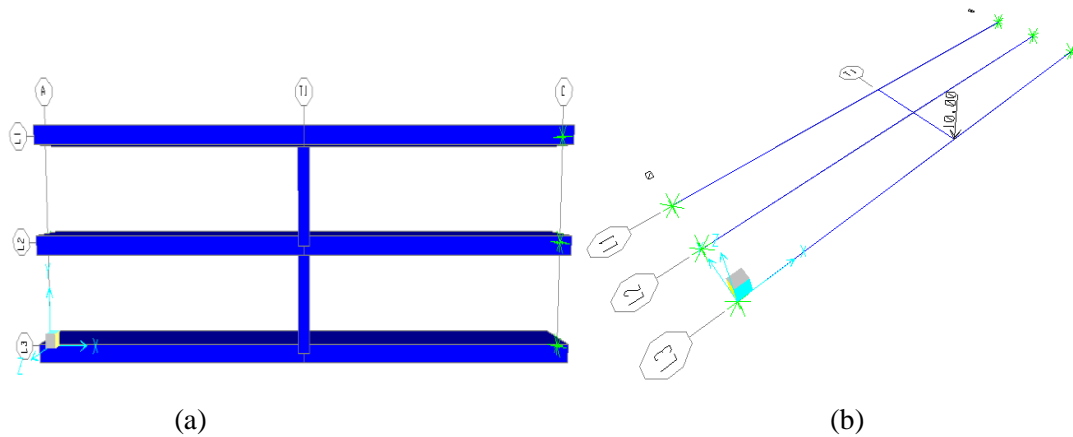


Figura 5.16 – Vista superior da estrutura (a), e a posição da carga sobre o nó (b).

Observa-se na Figura 5.17 uma transversina com os coeficientes de repartição (a), e o deslocamento longitudinal (b).

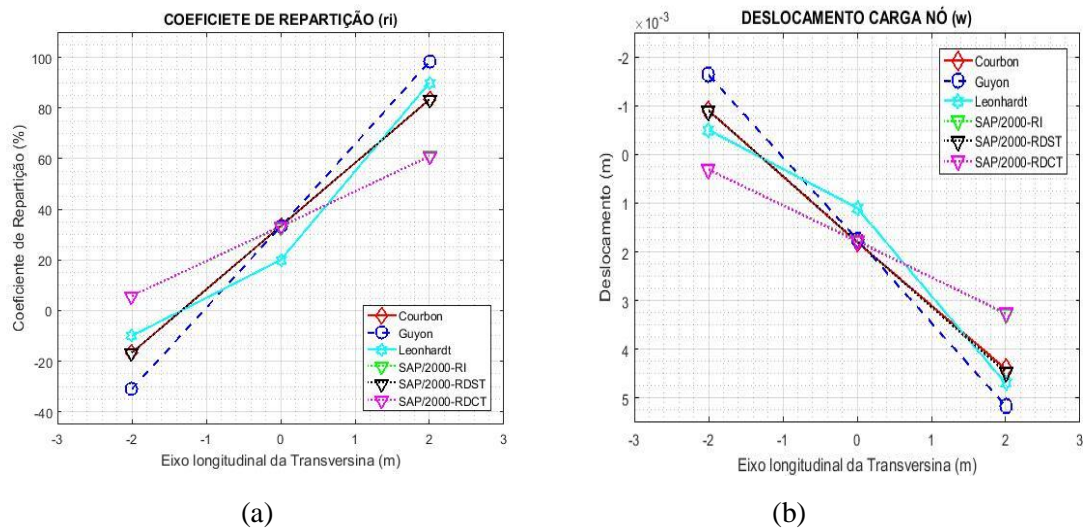


Figura 5.17 – Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento (b).

Verifica-se uma aproximação nos valores dos coeficientes de repartição transversal e deslocamento entre as soluções de Courbon, Leonhardt e os modelos SAP/2000-RDST e SAP/2000-RI. Além disto, há uma semelhança entre as soluções de Courbon e o modelo SAP/2000-RDST. A longarina L2 está sobre o centro elástico. Como resultado o valor do coeficiente de repartição é igual para os modelos, exceto para a solução de Leonhardt.

A Figura 5.18 dispõe os momentos fletores, e deslocamentos nas longarinas L1, L2 e L3.

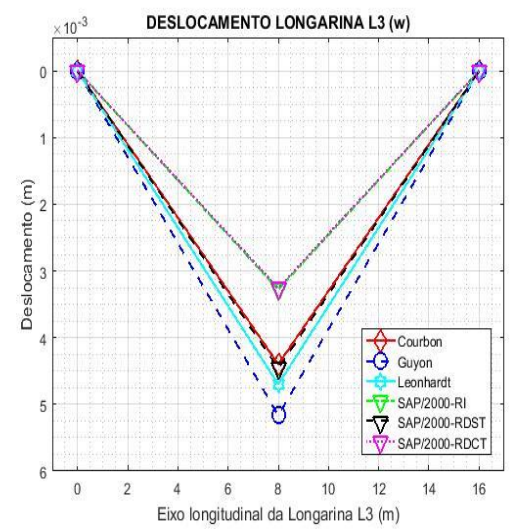
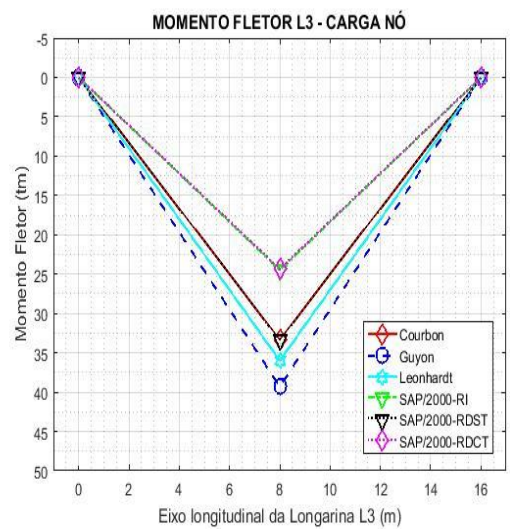
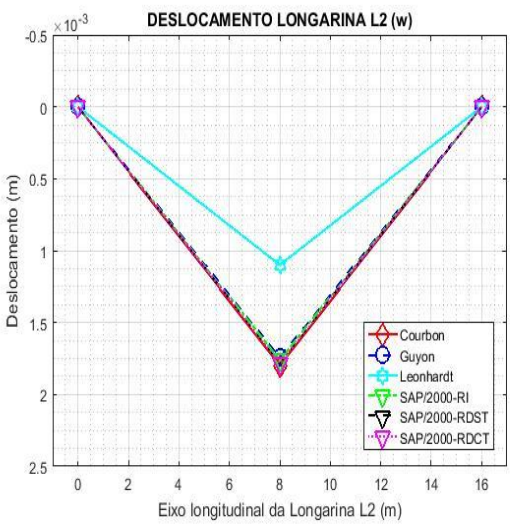
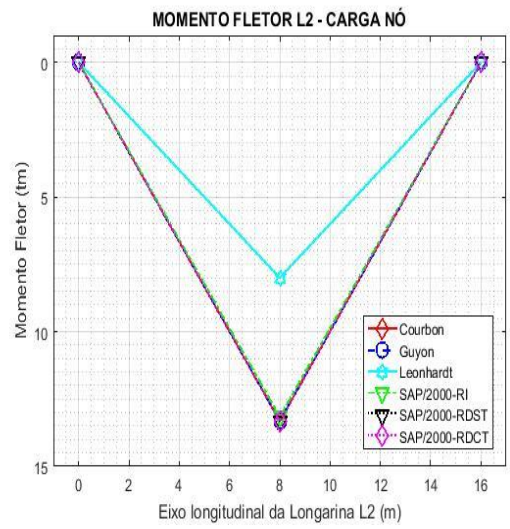
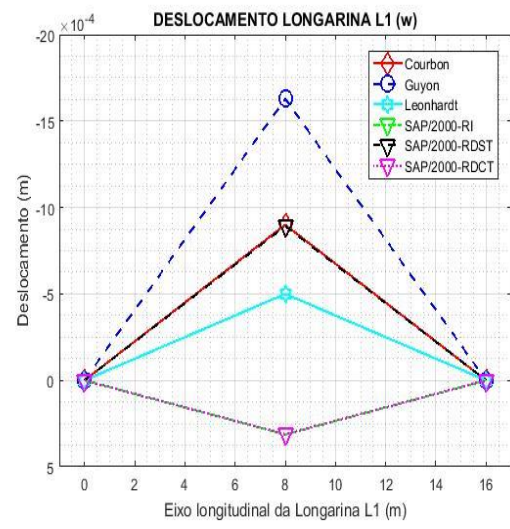
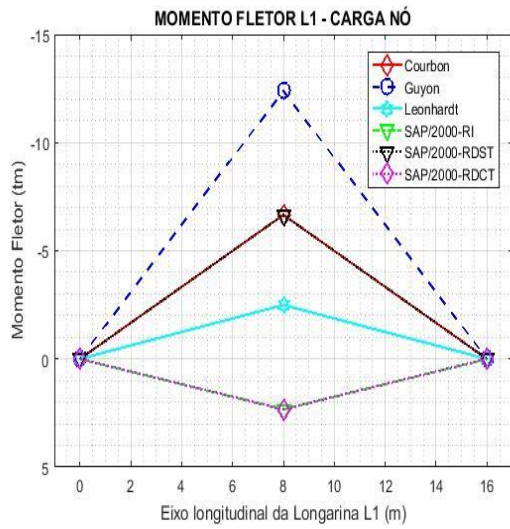


Figura 5.18 – Momento fletor de deslocamento longitudinal das longarinas.

Observa-se nas longarinas L1 e L3 uma semelhança nos valores de momento fletor e deslocamento entre as soluções de Courbon e o modelo SAP/2000-RDST, bem como os modelos SAP/2000-RDCT e SAP/2000RI. Por outro lado, na longarina L2, os valores são semelhantes entre os modelos, exceto para a solução de Leonhardt. Na longarina L1 as soluções analíticas e o modelo numérico (SAP/2000-RDST), apresentam valores negativos de momentos fletores e de deslocamentos.

#### 5.4 CASO 4 - MODELO GR4L1T

Em seguida é estudado o modelo GR4L1T, com quatro longarinas, mantendo a quantidade de uma transversina, como mostra a Figura 5.19.

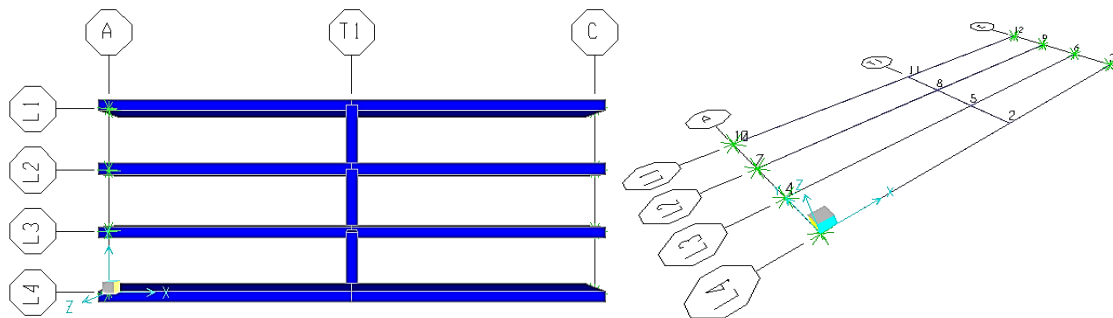


Figura 5.19 – Vista superior e identificação das longarinas e transversinas.

##### 5.4.1 Carga sobre a transversina

A Figura 5.20 mostra a posição da carga sobre a transversina em (a), e sua localização na cota 2 metros, em relação ao centro elástico em (b).

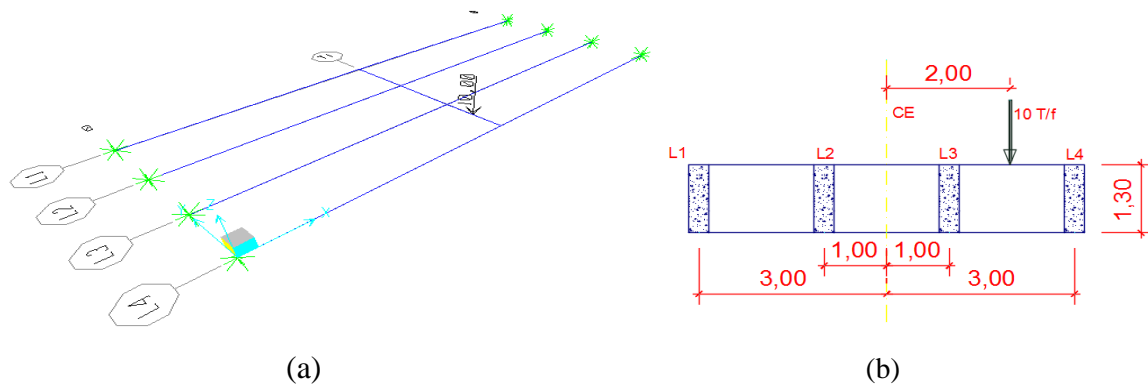


Figura 5.20 – Posição da carga aplicada na longarina T1.

Pode-se observar na Figura 5.21 os coeficientes de repartição transversal (a) e deslocamento (b).

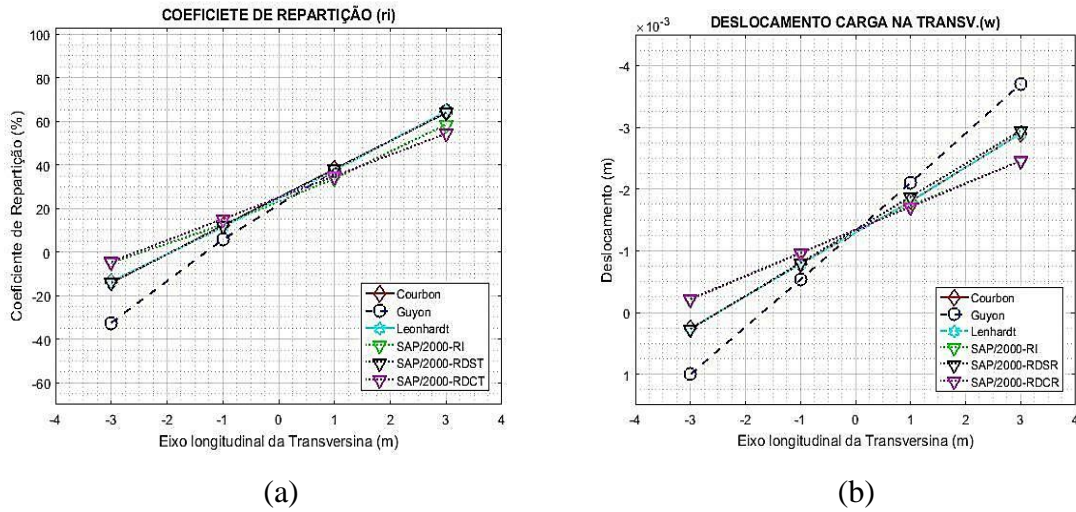
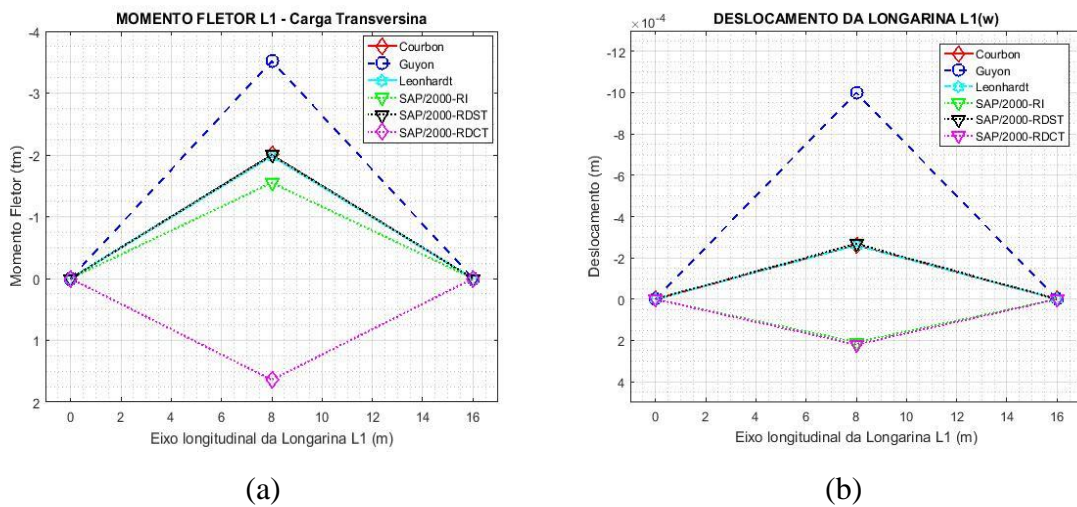
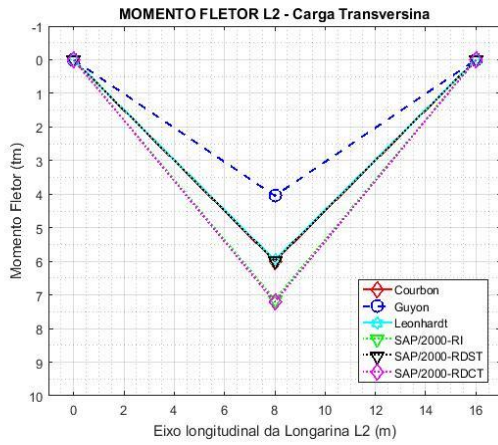


Figura 5.21 – Coeficiente de repartição transversal e deslocamento da transversina.

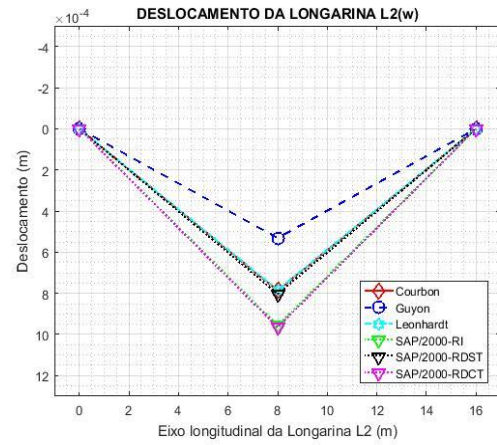
Os valores dos coeficientes de repartição transversal comparados aos casos anteriores aproximaram-se para todas as longarinas. Como também a semelhança nesses mesmos valores, para as soluções de Courbon e Leonhardt. Entretanto, em L3 ocorre um afastamento nessas mesmas soluções. Bem como, nas longarinas internas os mesmos valores tiveram maior aproximação.

Na Figura 5.22 são apresentados os momentos fletores, e deslocamentos nas longarinas.

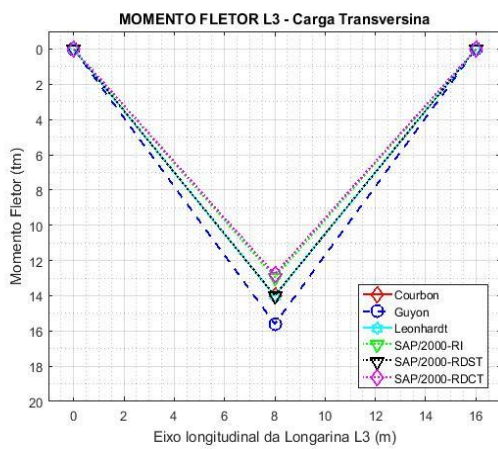




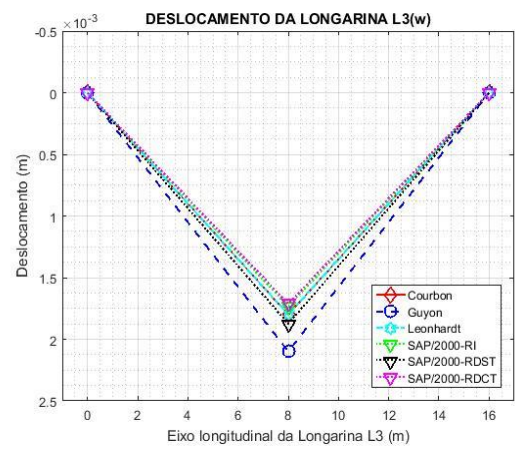
(c)



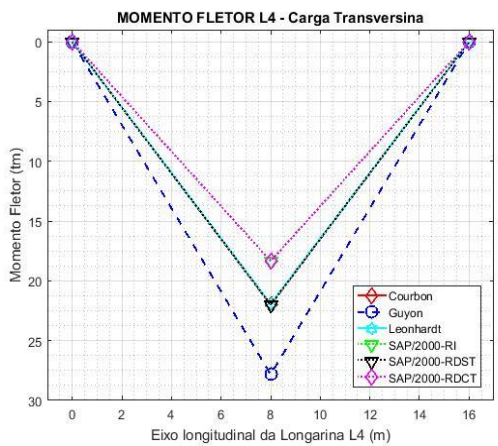
(d)



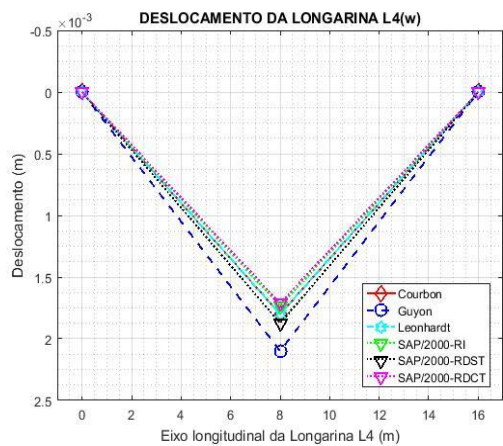
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.22 – Momento fletor e deslocamento nas longarinas.

Verifica-se uma aproximação nos valores de momento fletor e de deslocamento, nas longarinas L2, L3 e L4, para os modelos SAP/2000-RI e SAP/2000-RDCT, da mesma forma para os valores das soluções de Courbon, Leonhardt e o modelo SAP/2000-RDST.

Diferente na longarina L1, onde o modelo de Leonhardt afasta-se dos demais modelos. Em comparação ao caso com 3 longarinas, os valores de momento fletor e de deslocamentos estão mais próximos, por consequência do aumento da rigidez na estrutura, devido à quarta longarina. Logo, confirmando uma tendência da estrutura em tornar-se mais rígida na adição de novos elementos. Com a excentricidade de 2 metros observou-se um momento fletor e de deslocamento negativo, na longarina L1, para as soluções e modelos, exceto SAP/2000-RDCT.

### 5.4.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T1

É apresentada na Figura 5.23 a posição da carga sobre o nó (a), e a cota 3 metros em relação ao centro elástico da transversina em (b).

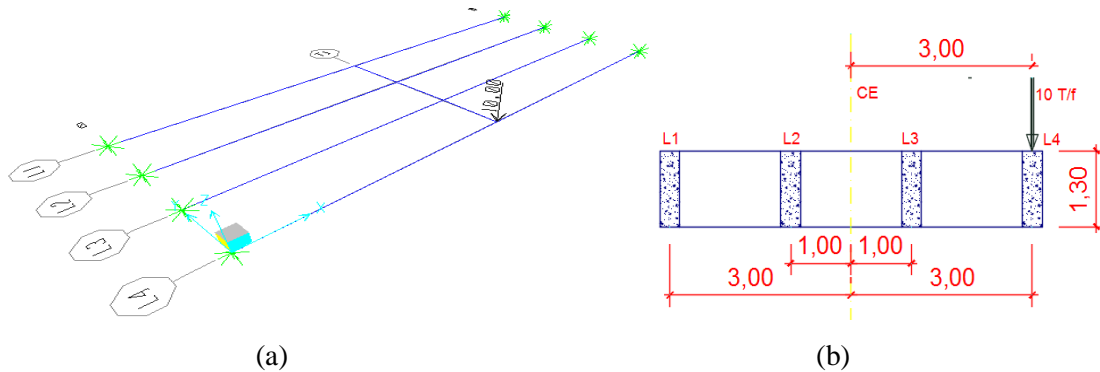


Figura 5.23 – Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico (b).

Na Figura 5.24 observam-se os coeficientes de repartição transversal (a) e o deslocamento da transversina (b) em relação ao carregamento aplicado no nó extremo da longarina L3.

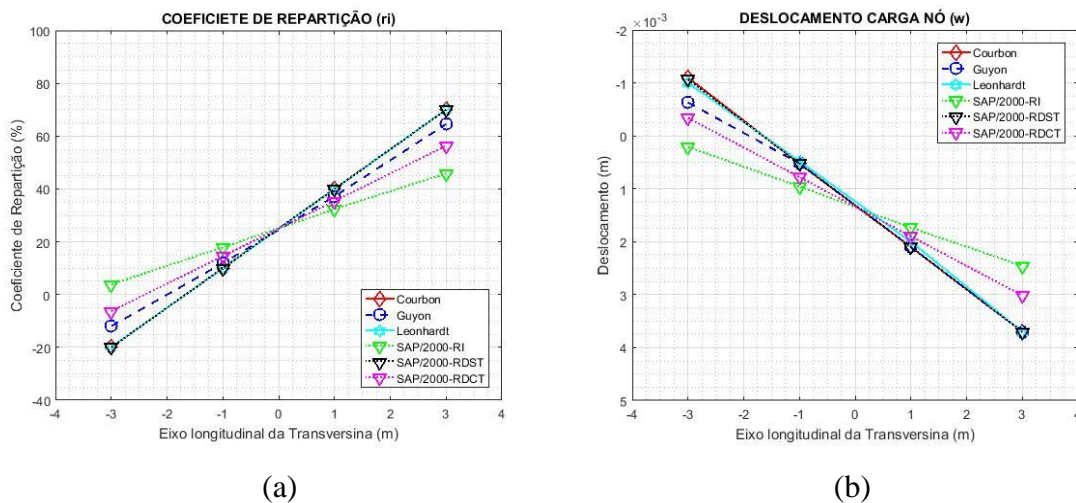
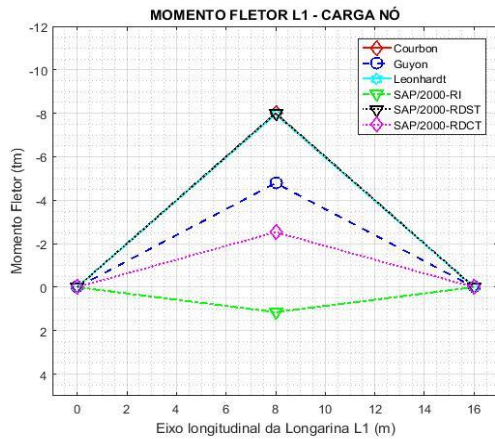


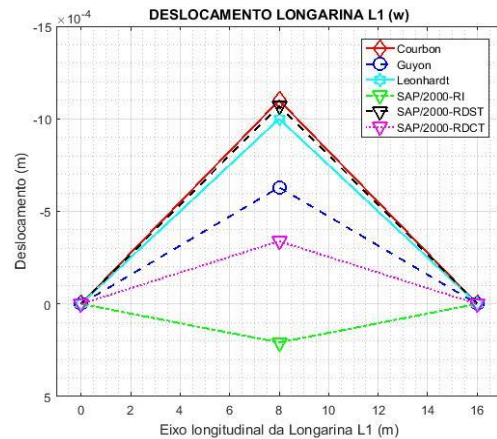
Figura 5.24 - Coeficiente de repartição transversal e deslocamento da transversina.

Em comparação com o caso anterior observou-se, para todos os modelos, um afastamento nos valores do coeficiente de repartição e deslocamentos.

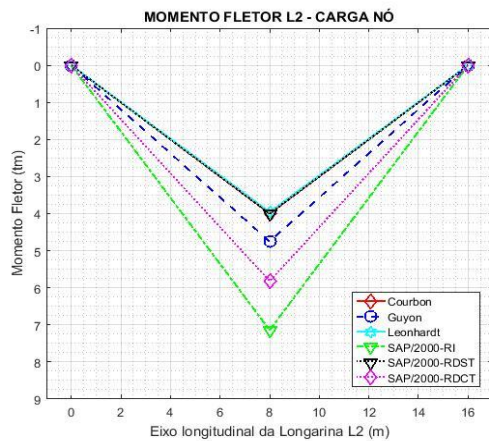
A Figura 5.25 apresenta os momentos fletores e deslocamentos nas longarinas L1, L2, L3 e L4.



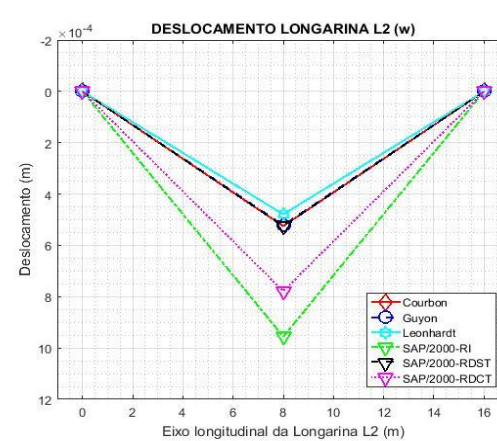
(a)



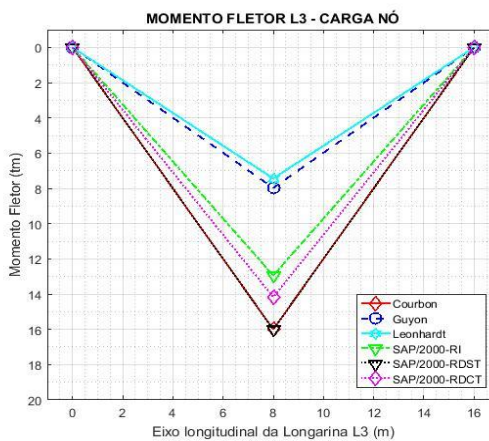
(b)



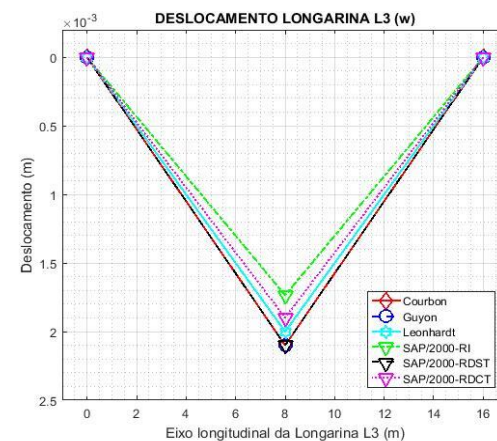
(c)



(d)

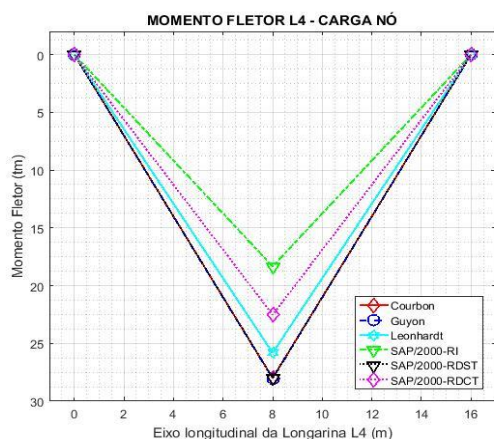


(e)

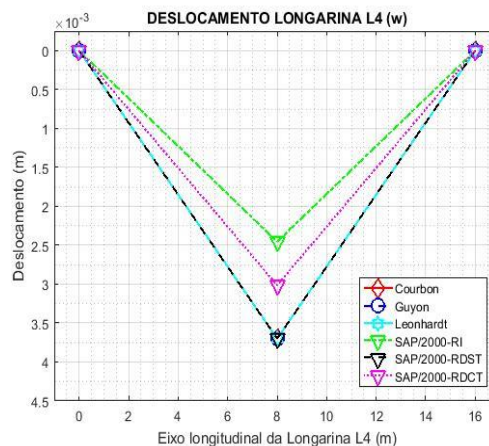


(f)





(g)



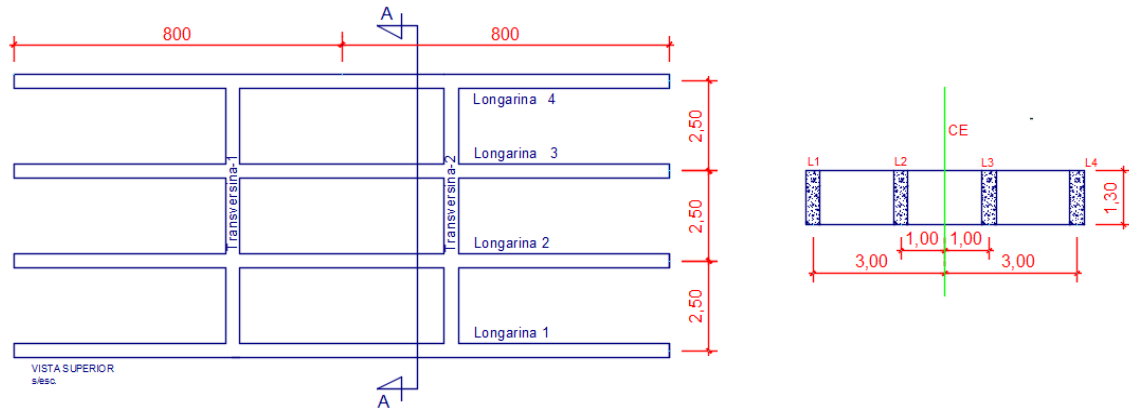
(h)

Figura 5.25 - Momento fletor e deslocamento nas longarinas.

Observa-se na longarina L1 valores de momento fletor e deslocamentos negativos para as soluções analíticas e modelos MEF, o que representa rigidez na transversina. O valores de momento fletor e de deslocamento na solução de Leonhardt é semelhante a solução de Courbon e o modelo SAP/2000-RDST nas longarinas L1 e L2. Todavia, os valores na solução de Leonhardt se afastam nas longarinas L3 e L4. Por fim, na longarina L4 verifica-se uma semelhança entre os valores de momento fletor e de deslocamento nas soluções de Guyon e Leonhardt.

## 5.5 CASO 5 - MODELO GR4L2T

Neste estudo verifica-se na estrutura o efeito causado pelo aumento progressivo no número de transversinas, e que a carga aplicada e o comprimento do tabuleiro permanecem com os mesmos valores. Além disto, a distância entre as longarinas foram ampliadas para 2,5 metros, totalizando uma largura de 7,5 metros. Por fim é mostrada na figura 5.26 a vista superior do tabuleiro (a), e o corte AA em (b).



(a)

(b)

Figura 5.26 – Vista superior (a) e corte AA do tabuleiro (b).

A Figura 5.27 apresenta o modelo base para os estudos da influência do número de transversinas no tabuleiro em grelha de uma ponte.

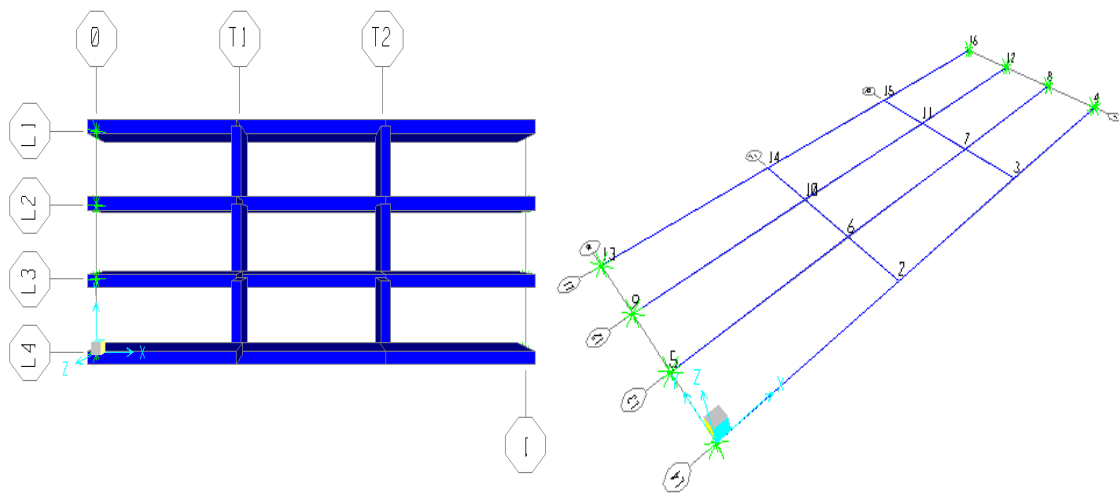


Figura 5.27 – Modelo base para estudo da influência do número de transversinas.

### 5.5.1 Carga sobre a transversina T1

Na Figura 5.28 é mostrada a carga de 10 toneladas aplicada sobre a transversina T1 (a), e a cota de 3,25 metros em relação ao centro elástico.

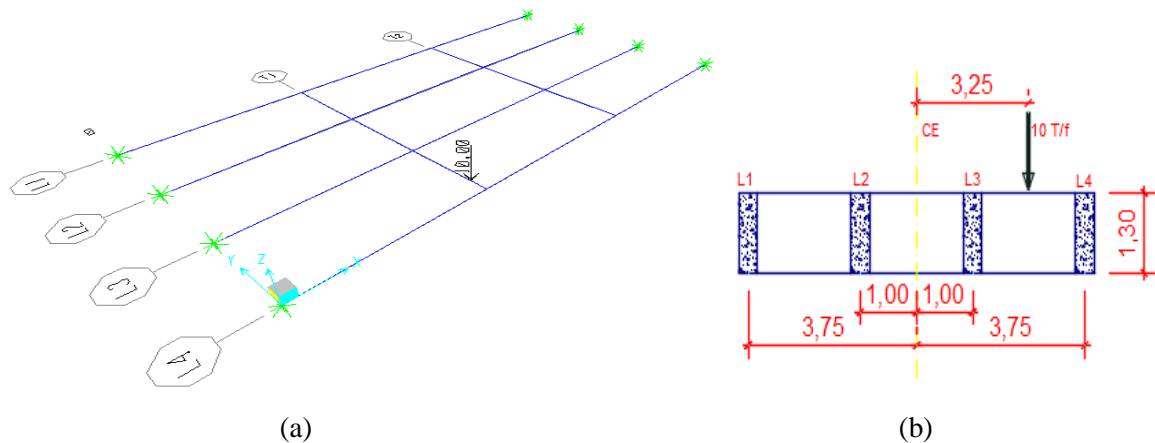


Figura 5.28 – Carga de 10 toneladas aplicada sobre a transversina T1(a) cota em relação ao centro elástico (b).

Os coeficientes de repartição transversal e deslocamento da transversina T1 estão dispostos na Figura 5.29 (a) e (b), respectivamente.

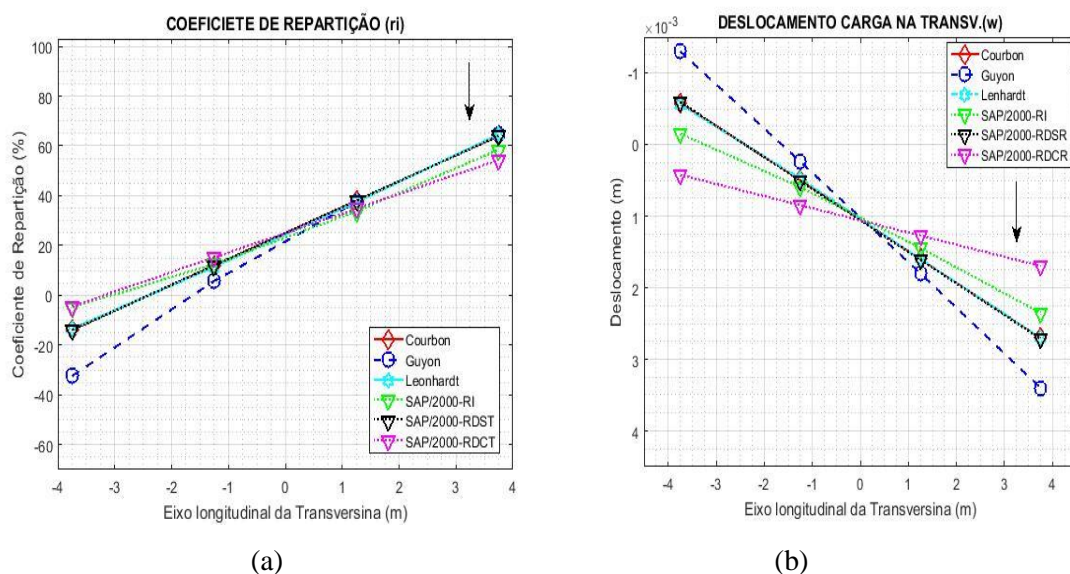
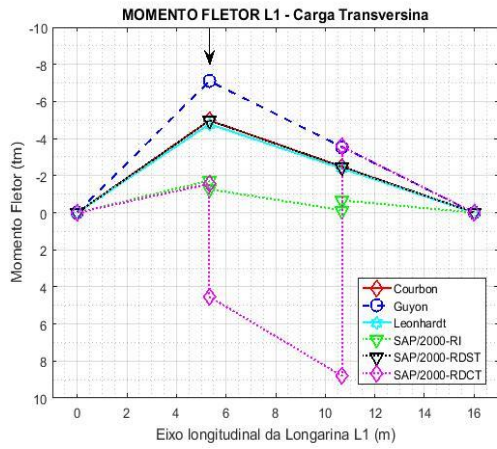


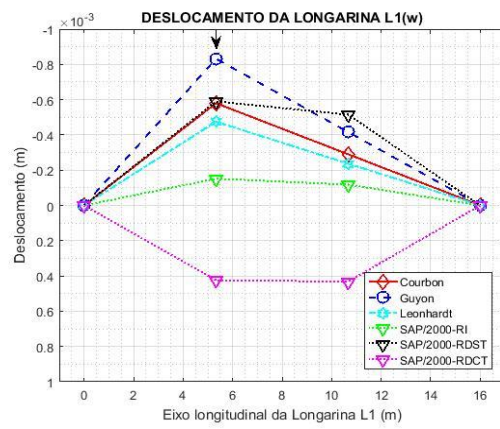
Figura 5.29 – Coeficiente de Repartição Transversal e Deslocamento da Transversina.

Assim como no caso anterior, os valores dos coeficientes de repartição transversal nas soluções modelos analíticas não sofreram alterações. Além disto, os mesmos valores tiveram uma aproximação nas longarinas internas, principalmente na longarina L3. A solução de Guyon apresenta-se com valores semelhantes as demais soluções analíticas e o modelo SAP/2000-RDST, na longarina L4. No entanto, na longarina L1, a solução de Guyon apresenta-se com valores diferentes de todos os demais modelos e soluções analíticas.

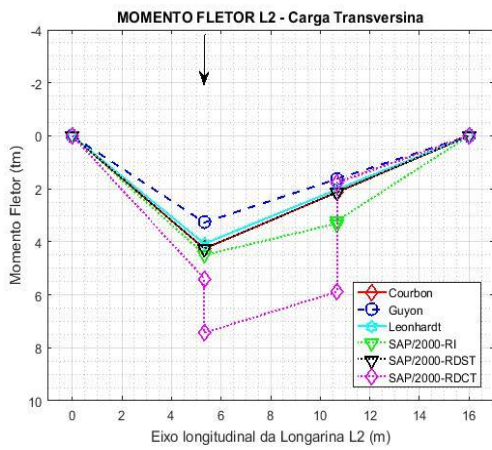
A Figura 5.30 mostra os momentos fletores e o deslocamento das longarinas, a partir da carga aplicada.



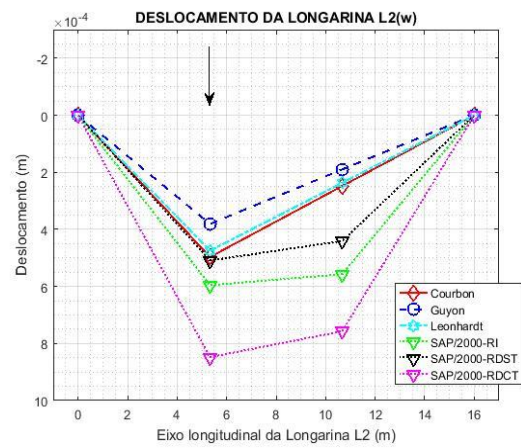
(a)



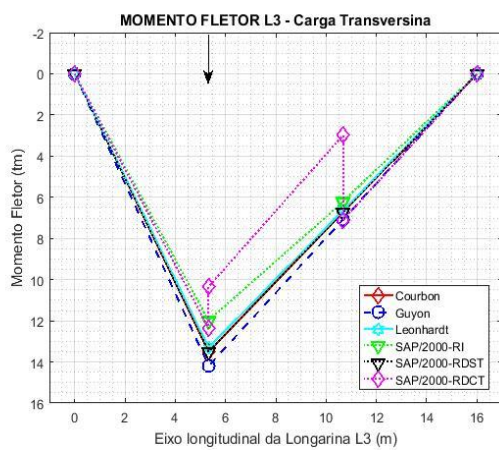
(b)



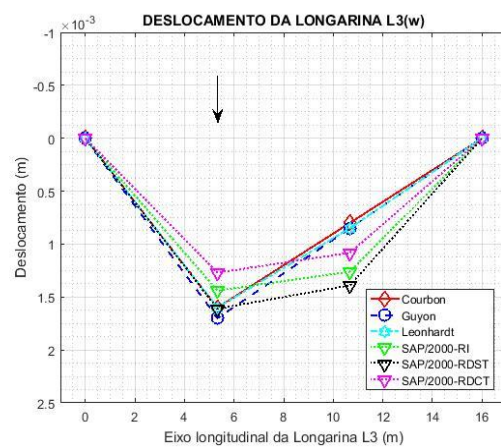
(c)



(d)



(e)



(f)

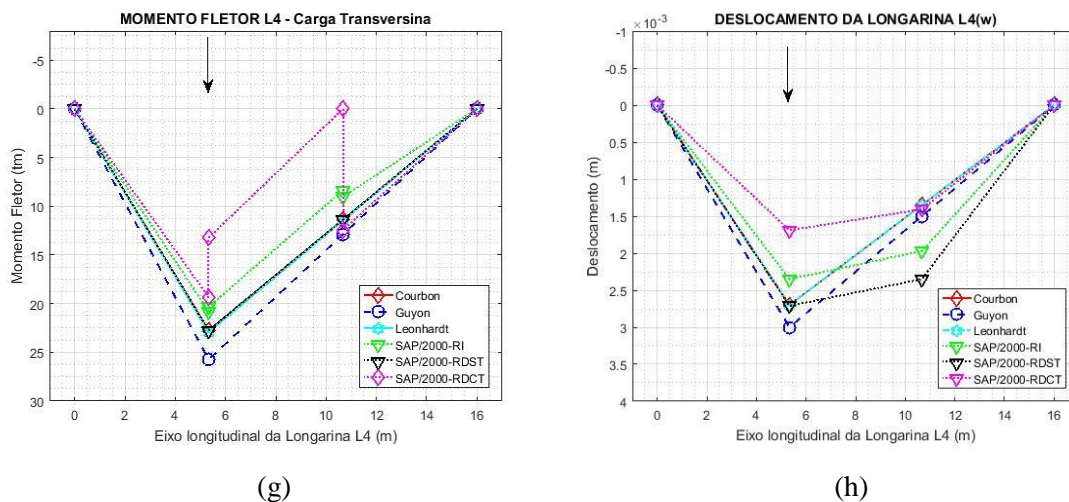


Figura 5.30 – Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L e L4.

Observa-se uma descontinuidade na evolução do momento fletor para os modelos SAP/2000-RI e SAP/2000-RDCT. Sendo assim, é possível a identificação do momento torçor nas transversinas, bem como sua intensidade. Entretanto, o modelo SAP/2000-RI apresenta valores menores em relação ao modelo SAP/2000-RDCT. Além disto, entre todos os modelos são observado uma aproximação nos valores de momento fletor e de deslocamento. Por outro lado, a longarina L1 sofreu momento fletor e de deslocamentos negativos. Por fim verifica-se uma semelhança nos valores de momento fletor e de deslocamento entre as soluções de Courbon, Leonhardt e o modelo SAP/2000-RDST.

### 5.5.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T1

A Figura 5.31 mostra a carga de 10 toneladas aplicada sobre a transversina T1 (a), e a cota de 1,25 metros em relação ao centro elástico.

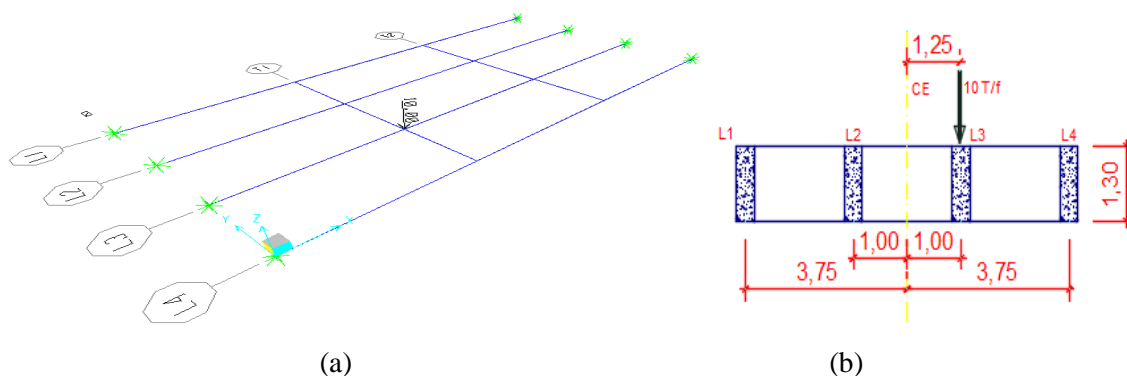


Figura 5.31 - Carga de 10 toneladas aplicada sobre o nó formado por L3 e T1 (a), cota em relação ao centro elástico (b).

Os coeficientes de repartição transversal e o deslocamento da transversina são apresentados pela Figura 5.32 (a) e (b), respectivamente.

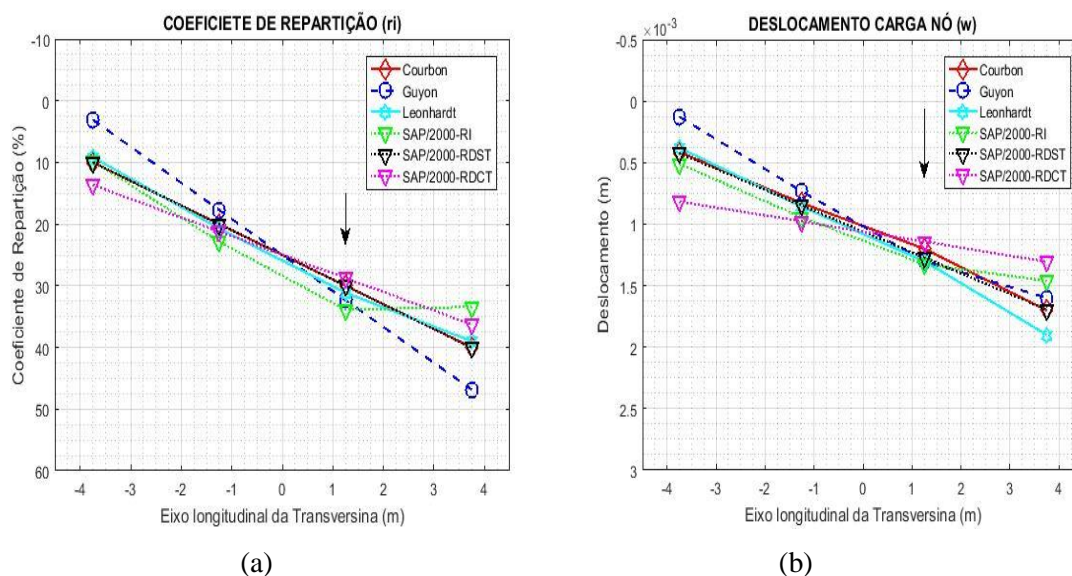
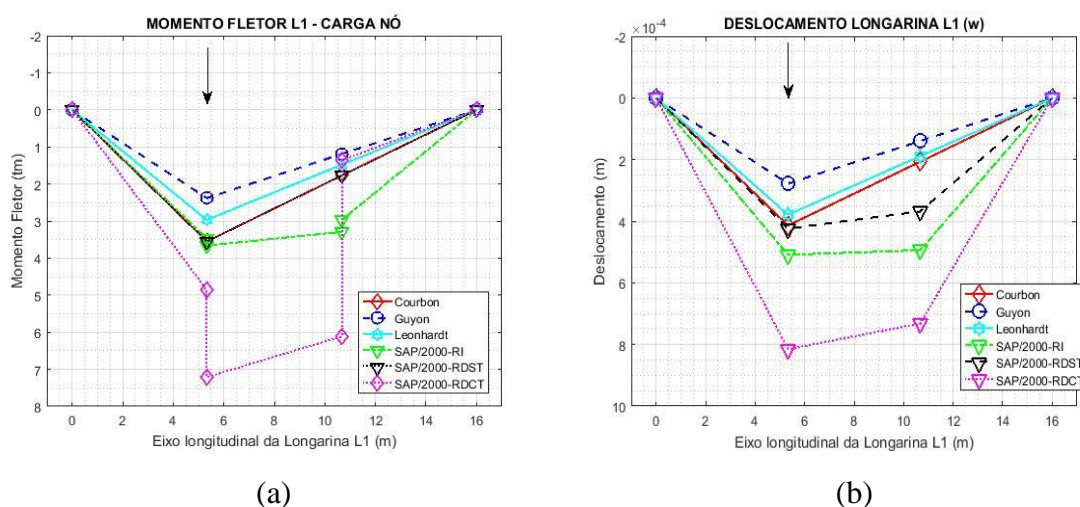
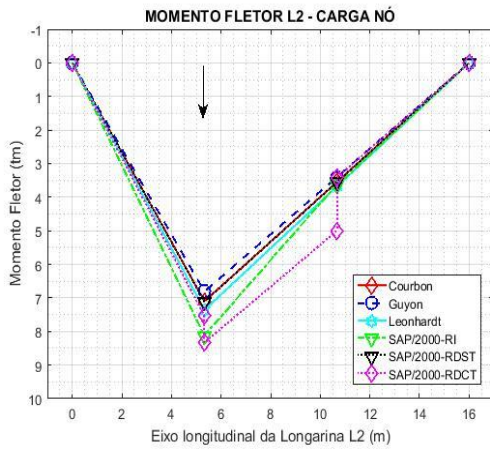


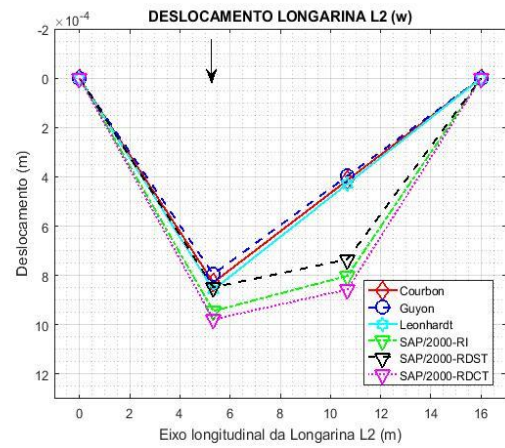
Figura 5.32 - Coeficiente de repartição transversal e deslocamento da transversina.

Observa-se na longarina L1 uma semelhança nos valores de coeficiente de repartição transversal entre as soluções Courbon, Leonhardt, os modelos SAP/2000-RI e SAP/2000-RDST. Porém, na longarina L4, apenas a solução de Courbon e o modelo SAP/2000-RDST são semelhantes. Entretanto, nas longarinas internas verifica-se uma aproximação nos valores de coeficiente de repartição transversal e de deslocamento entre todos os modelos numéricos e soluções analíticas. Na longarina L3 observa-se uma inclinação na evolução do modelo SAP/2000-RI, como também uma mudança na ordem sequencial na longarina L4 para este mesmo modelo. A Figura 5.33 apresenta os momentos fletores e deslocamento nas longarinas L1, L2, L3 e L4.

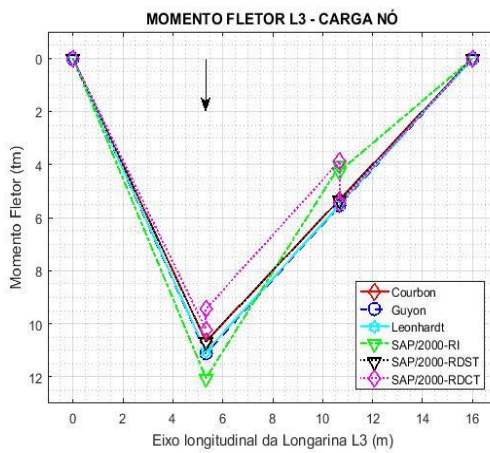




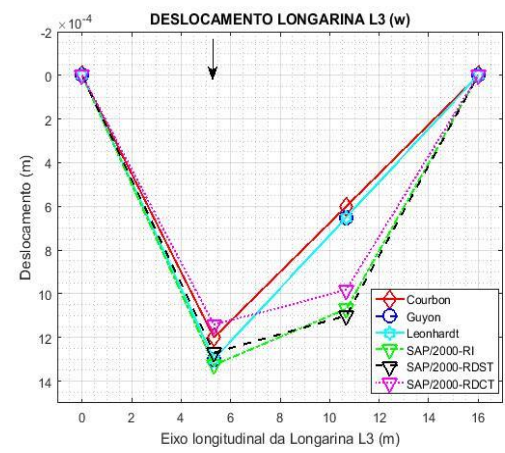
(c)



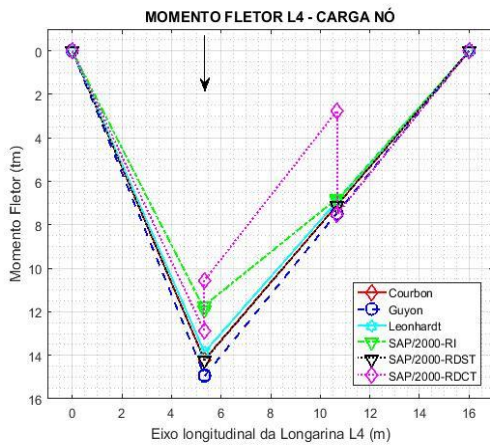
(d)



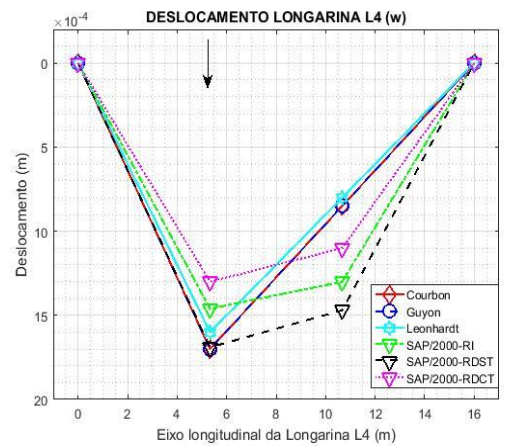
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.33 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L e L4.

Observa-se, uma maior aproximação dos valores de momento fletor e deslocamento entre todos os modelos numéricos e soluções analíticas. Como também um deslocamento uniforme, isto é, se a ocorrência de momento fletor e deslocamento negativo na longarina

L1 ao mover a carga para próximo do centro elástico. Verifica-se uma evolução linear para as soluções analíticas, porém aos modelos numéricos uma evolução côncava.

## 5.6 CASO 6-A - MODELO GR4L3T – ESTUDO NA TRANSVERSINA T1

Em seguida, foi inserida a terceira transversina, distanciada 4 metros, como mostra a Figura 5.34 com vista superior em (a), e corte AA em (b).

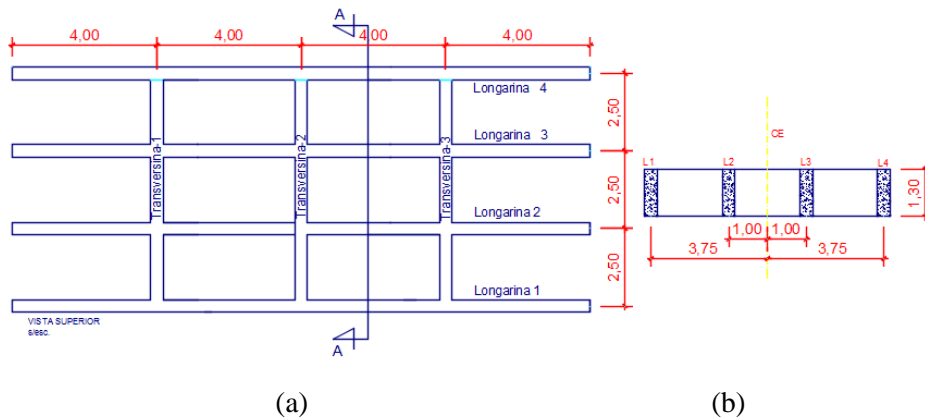


Figura 5.34 - Vista superior (a) e corte AA do tabuleiro (b).

A Figura 5.35 mostra o modelo base usada na modelagem no SAP/2000 em (a), e a identificação dos nós na estrutura em (b).

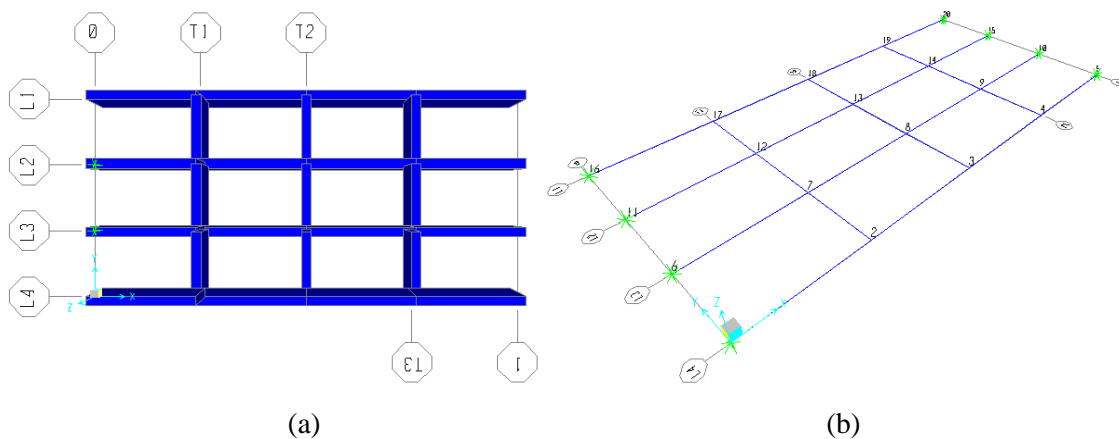


Figura 5.35 – Modelo base para modelagem no SAP/2000 (a) e identificação dos nós (b).

### 5.6.1 Carga sobre a transversina T1

A Figura 5.36 expõe a posição da carga sobre o tabuleiro (a), e a cota de afastamento em relação ao centro elástico (b).



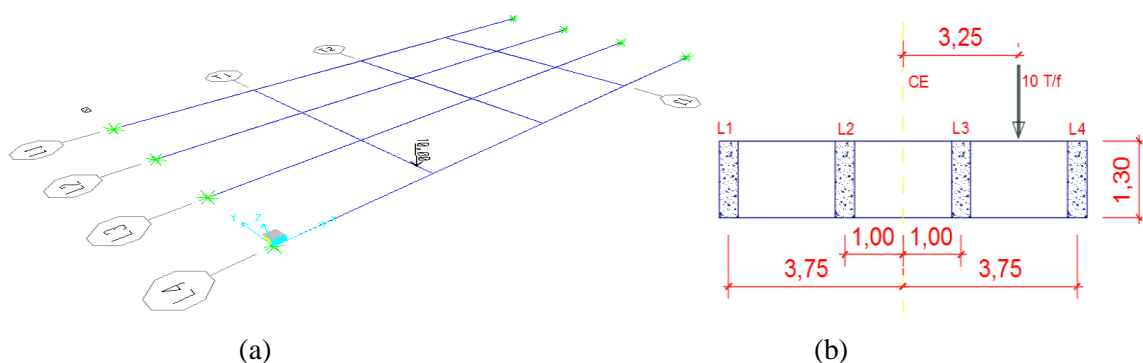


Figura 5.36 – Posição da carga sobre o tabuleiro (a) e cota de afastamento da carga em relação ao centro elástico (b).

Os coeficientes de repartição transversal e de deslocamento são mostrados na Figura 5.37. (a) e (b), respectivamente.

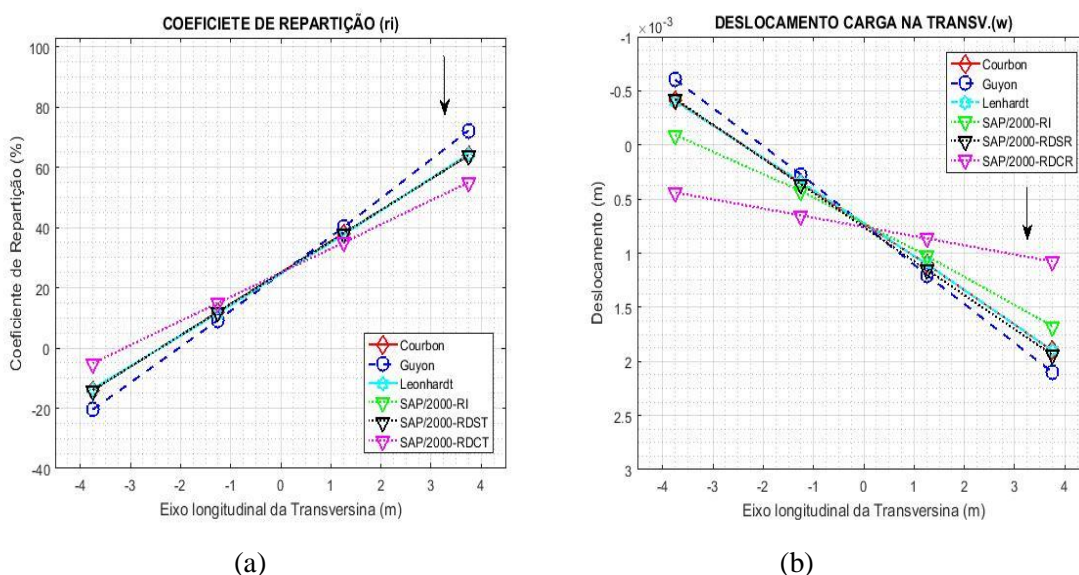
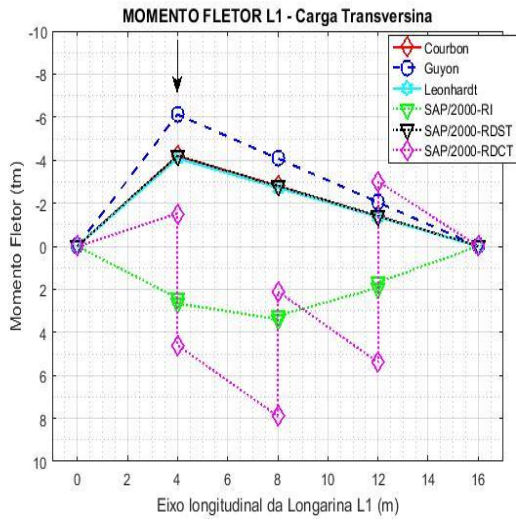
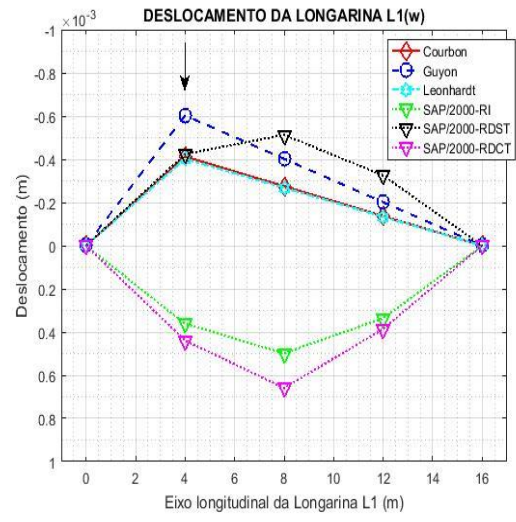


Figura 5.37 – Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b).

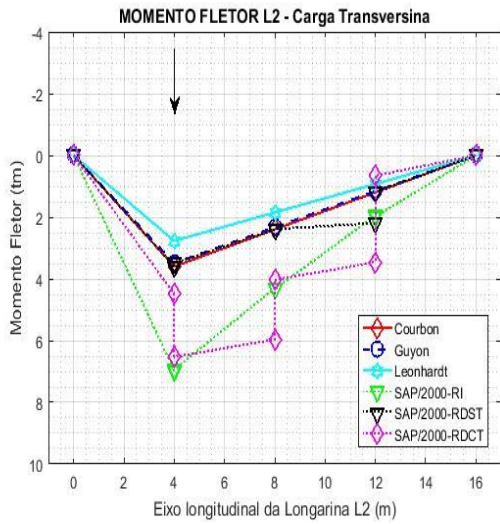
Observa nas longarinas internas, uma redução nos valores dos coeficientes de repartição transversal para todos os modelos numéricos e soluções analíticas. Além disto, os valores dos coeficientes de repartição transversal e de deslocamentos nos modelos SAP/2000-RDST, SAP/2000-RDCT, e soluções Leonhardt e Courbon são semelhantes. Como também, a solução de Guyon apresentou na longarina L1 valores próximos em relação aos demais métodos exceto o modelo SAP/2000-RDCT. Por fim na longarina L4 ocorre à alternância na ordem de sequência entre a solução de Guyon e o modelo SAP/2000-RDCT. Observa-se na Figura 5.38 os momentos fletores e deslocamentos nas longarinas L1, L2, L3 e L4.



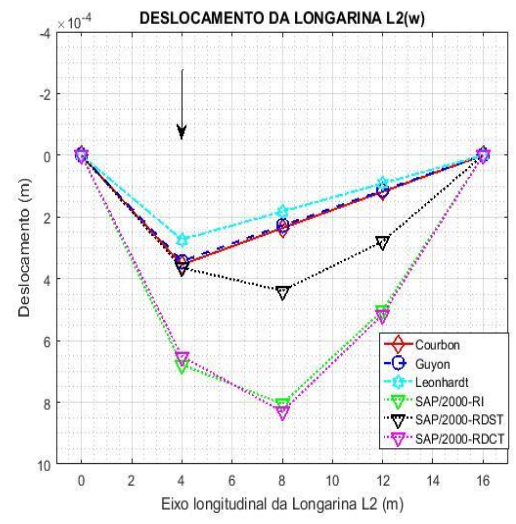
(a)



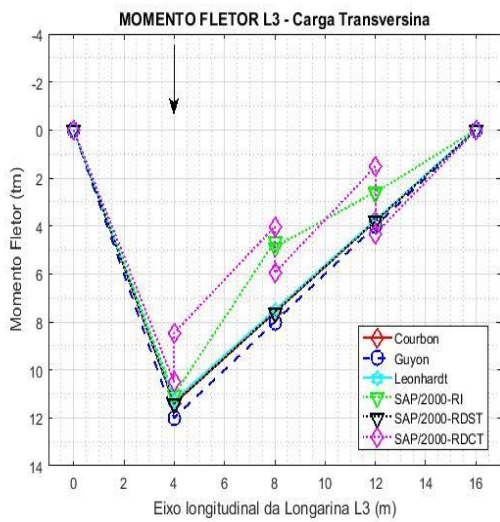
(b)



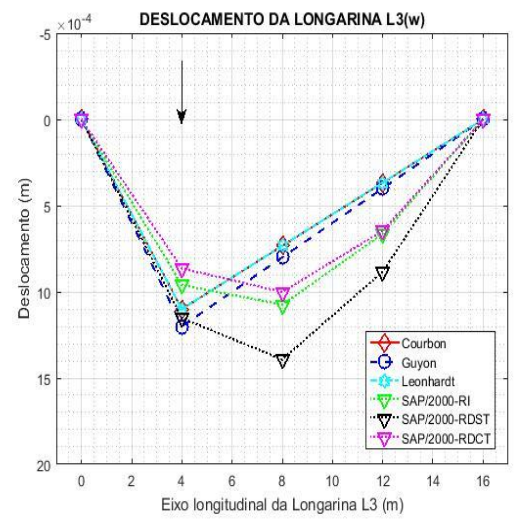
(c)



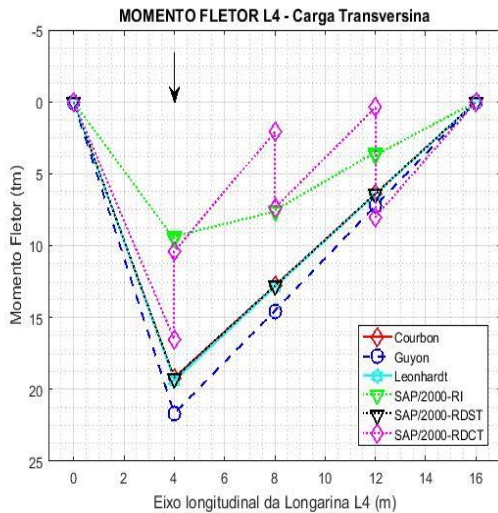
(d)



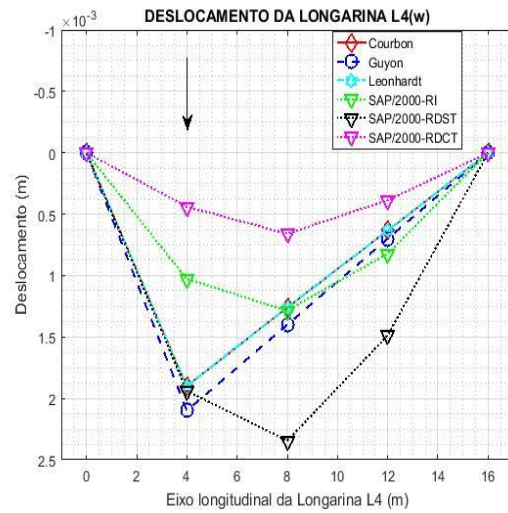
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.38 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L e L4.

Observa-se uma evolução linear nas soluções analíticas e uma evolução côncava para os modelos numéricos, inclusive o modelo SAP/2000-RDST. Os valores de momento fletor e deslocamentos, próximos entre os modelos analíticos, confirmam o enrijecimento do tabuleiro. Além disto, observa-se uma aproximação nos valores de momento fletor na longarina L3 (seção de aplicação da carga), entre o modelo SAP/2000-RI e as soluções de Courbon, Guyon e Leonhardt.

### 5.6.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T1

Neste caso, a carga é posicionada sobre o nó como mostra na Figura 5.39: a posição da carga sobre o nó em (a) e a cota de afastamento em relação ao centro elástico em (b).

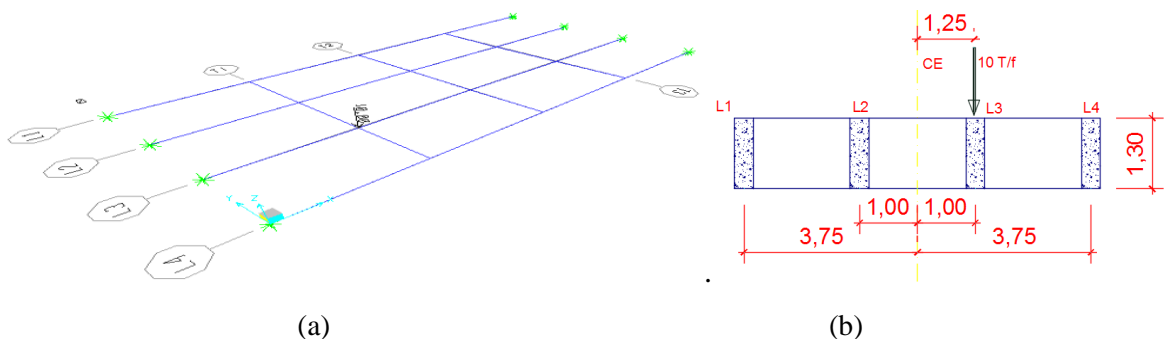


Figura 5.39 - Posição da carga sobre o tabuleiro sobre o nó (a) e as cotas de afastamento da carga em relação ao centro elástico (b).

Na Figura 5.40 estão dispostos os valores de coeficientes de repartição transversal, em (a), e de deslocamento nas transversinas, em (b).

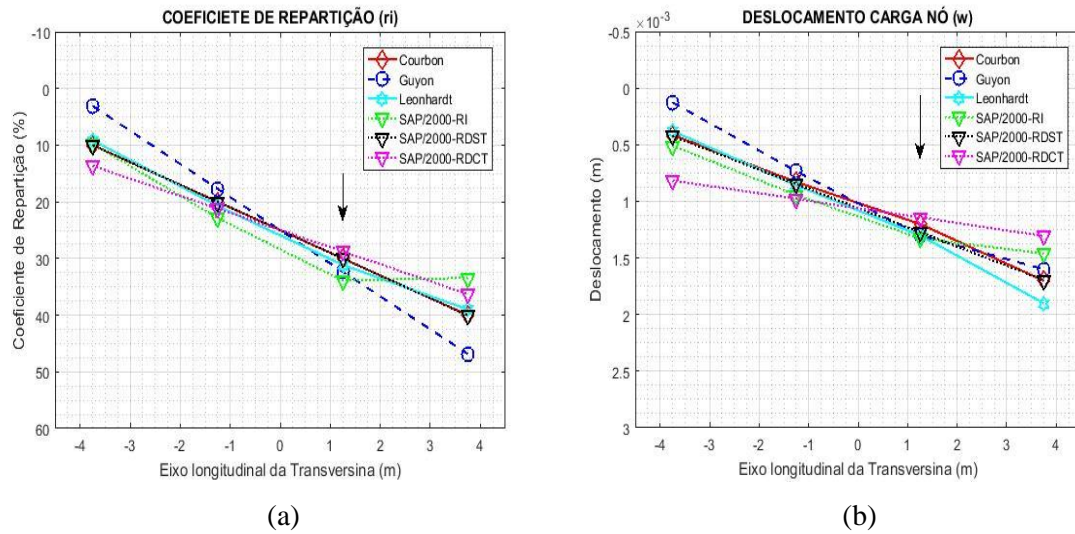
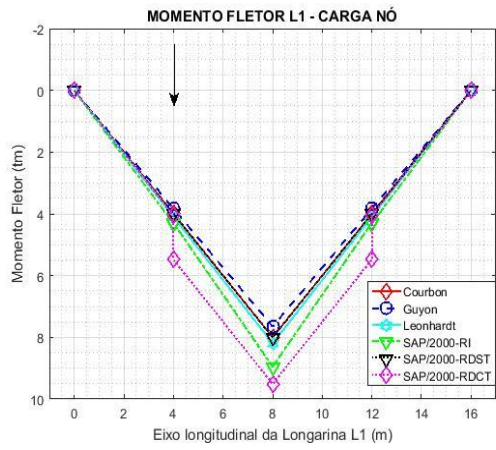
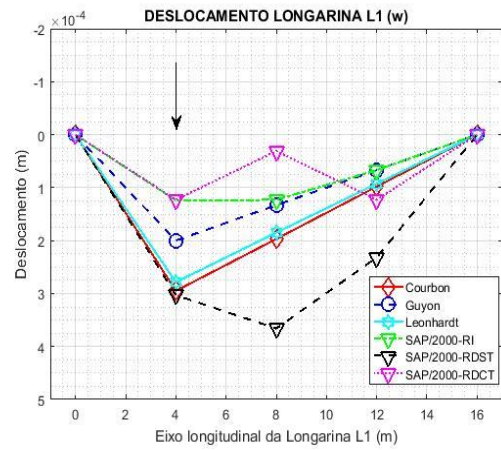


Figura 5.40 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b). Observa-se uma aproximação no valor do coeficiente de repartição transversal nas longarinas internas entre todos os modelos numéricos e soluções analíticas, como também, uma semelhança nos valores do coeficiente de repartição transversal na longarina L1, entre as soluções de Courbon, Leonhardt e os modelos SAP2000-RI e SAP/2000-RDST. Durante a evolução do modelo SAP/2000-RI ocorre um afastamento dos demais modelos nas longarinas consecutivas. Por fim, ocorre uma inversão na ordem de sequência deste modelo entre a longarina L3 e L4. Comparando-se este caso com o anterior verifica-se uma melhor aproximação entre os resultados das soluções analíticas e dos modelos numéricos, como efeito da distribuição direta da carga entre as da longarina e transversina. Portanto, os valores absorvidos por cada elemento são diretamente proporcionais à sua rigidez; o chamado de quinhão de carga.

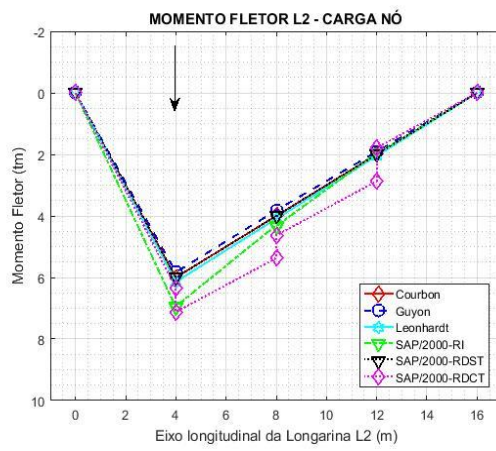
São observados na Figura 5.41 os momentos fletores e o deslocamento ao longo do eixo longitudinal das longarinas.



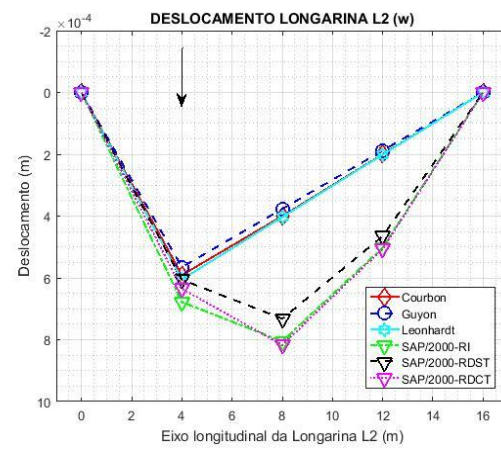
(a)



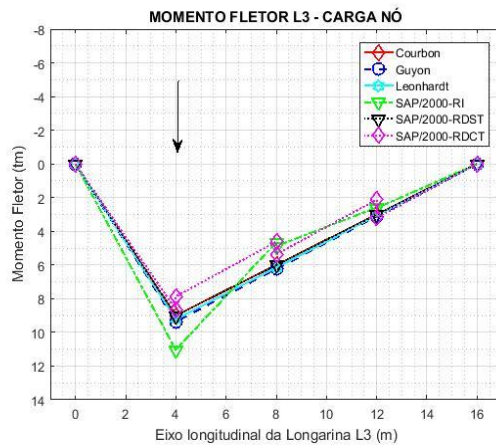
(b)



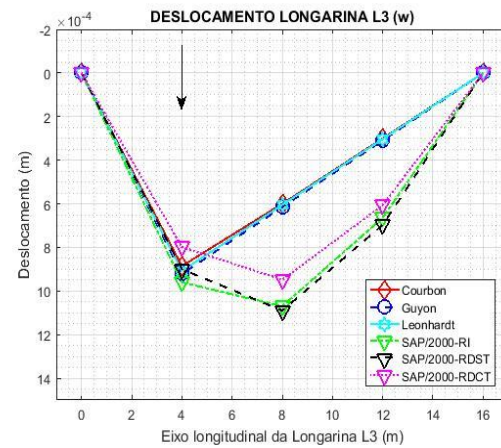
(c)



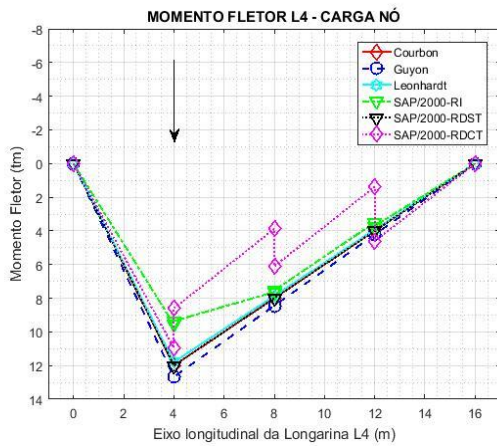
(d)



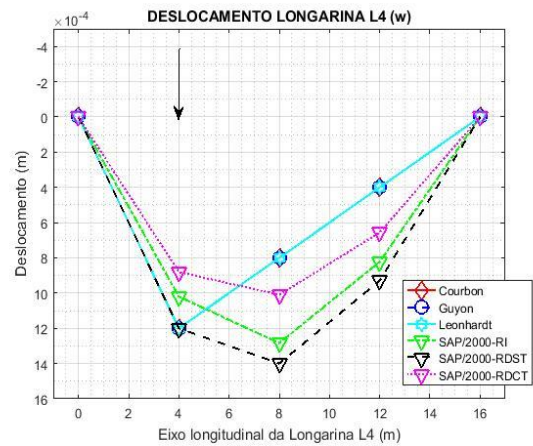
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.41 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L e L4.

Observa-se, entre as soluções analíticas e os modelos numéricos, uma aproximação nos valores de momento fletor e de deslocamento para todas as longarinas na seção onde a carga é aplicada. No entanto, as longarinas internas apresentam maior aproximação. Logo, menor descontinuidade do momento fletor do modelo SAP/2000-RDCT. Por fim, verifica-se continuidade na evolução côncava para o modelo SAP/2000-RDST.

## 5.7 CASO 6-B - MODELOGR4L3T – ESTUDO NA TRANSVERSINA T2

### 5.7.1 Carga sobre a transversina T2

A Figura 5.42 apresenta a posição da carga sobre a transversina (a), e excentricidade da carga em relação ao centro elástico em (b).

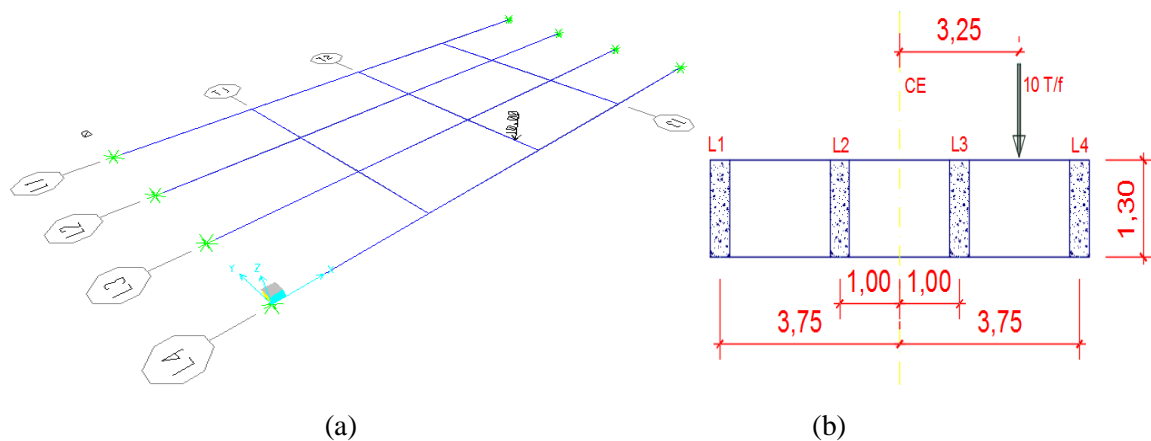


Figura 5.42 - Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico (b).

São mostrados na Figura 5.43 os coeficientes de repartição transversal em (a), e de deslocamento do eixo longitudinal da transversina em (b).

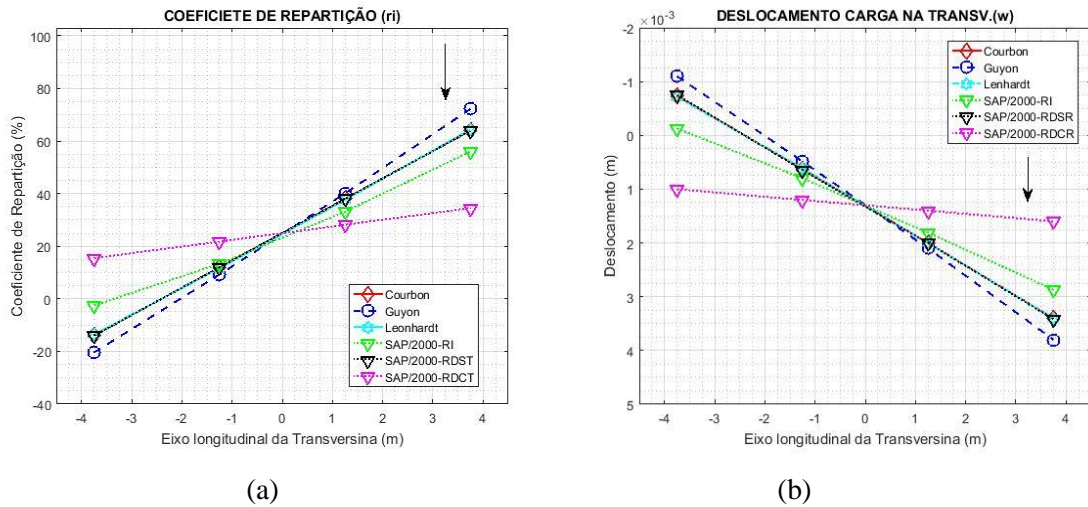
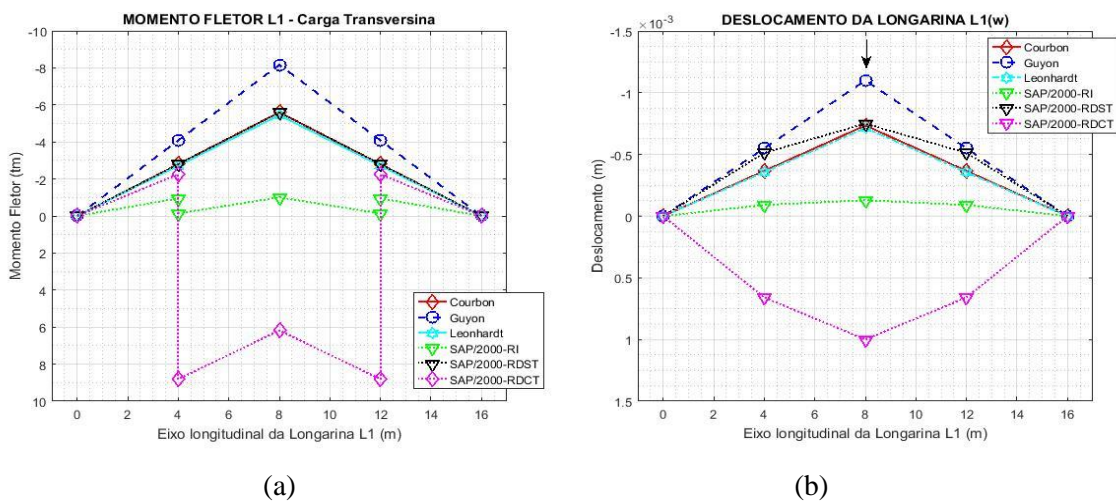
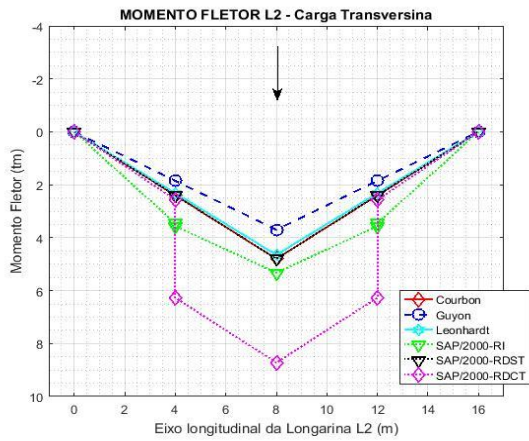


Figura 5.43 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b).

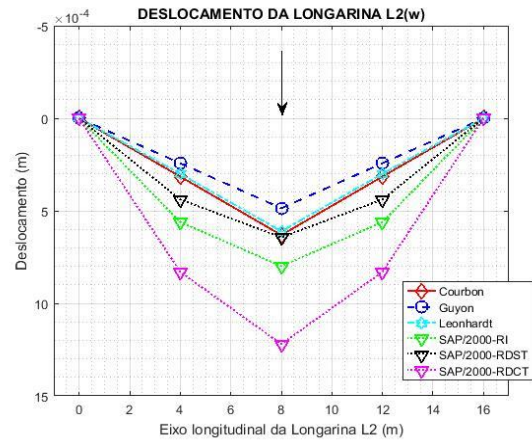
Verifica-se uma diminuição nos deslocamentos em relação ao modelo GR4L1T entre as soluções analíticas. Além disto, a solução de Guyon aproximou-se dos demais modelos numéricos e soluções analíticas, podendo assim confirmar um maior enrijecimento do tabuleiro. Por outro lado, os valores do coeficiente de repartição transversal e de deslocamento para o modelo SAP/2000-RDCT afastaram-se em relação aos demais modelos numéricos e soluções analíticas.

Na Figura 5.44 são apresentados os resultados dos momentos fletores e deslocamento das longarinas L1, L2, L3 e L4.

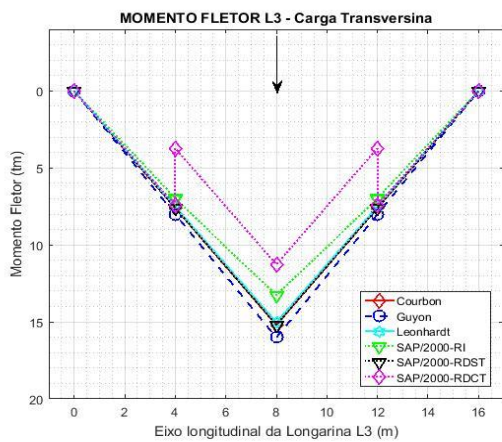




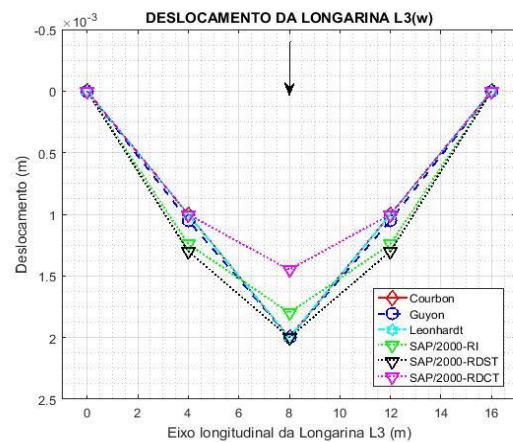
(c)



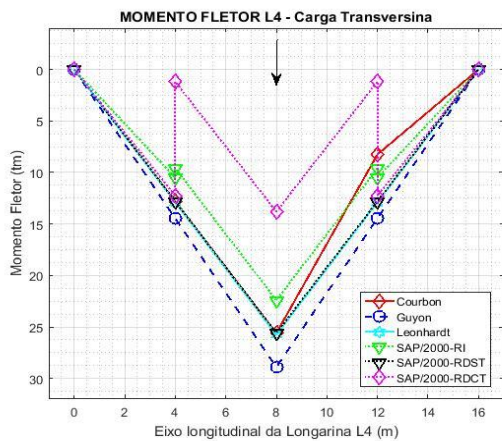
(d)



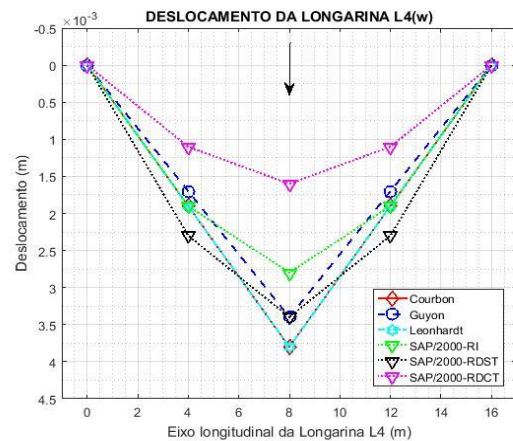
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.44 – Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L3 e L4.

Observa-se uma aproximação nos valores de momento fletor e deslocamento pelos métodos numéricos e soluções analíticas, com exceção do modelo SAP/2000-RDCT, o qual apresentou uma evolução com descontinuidade elevada nos valores de momento



fletor; diferente do modelo SAP/2000-RI. As longarinas internas apresentam valores de momento fletor e de deslocamento mais próximos em relação às longarinas externas. Verificam-se valores de momento fletor e de deslocamento negativo na longarina L1, devido ao afastamento da carga em relação ao centro elástico.

### 5.7.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T2

A carga foi concentrada sobre o nó, como mostradas na Figura 5.45: a posição da carga sobre o nó (a), e as cotas de afastamento da carga em relação ao centro elástico em (b).

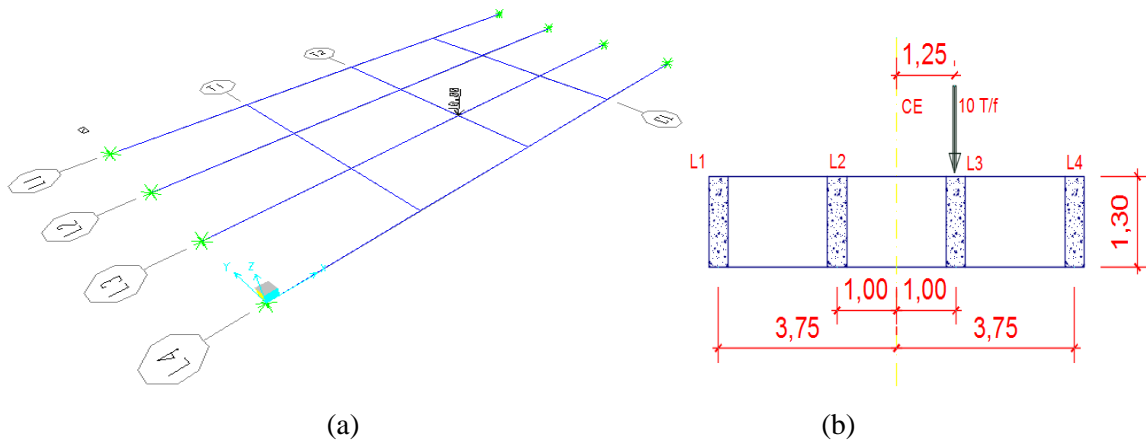


Figura 5.45 - Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico (b).

Observam-se na Figura 5.46 o coeficiente de repartição transversal (a) e o deslocamento para a carga posicionada no nó com excentricidade de 1,25 metros, em relação ao centro elástico em (b).

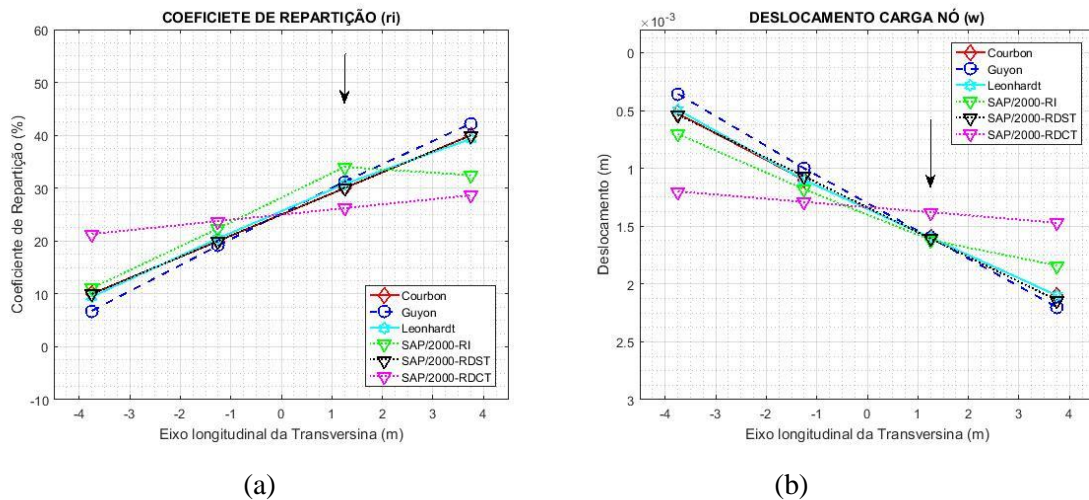
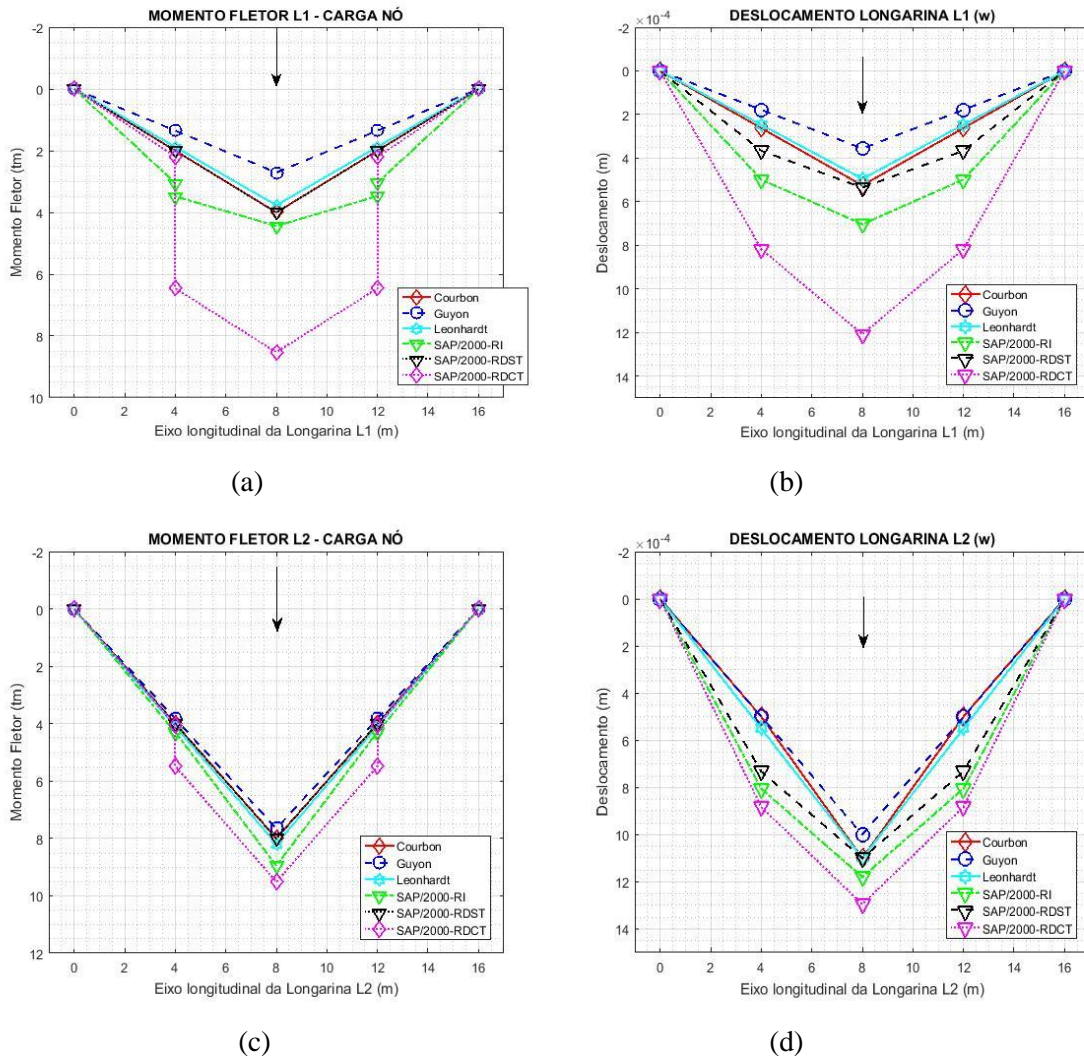
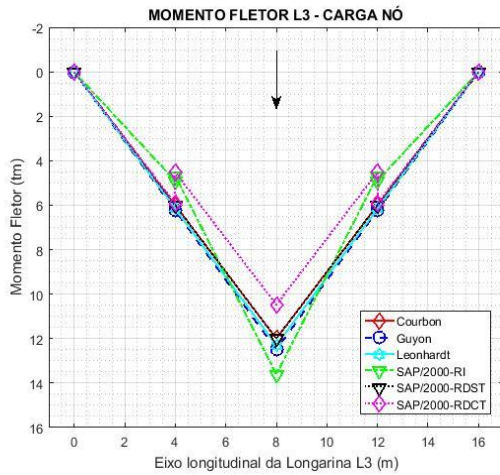


Figura 5.46 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b).

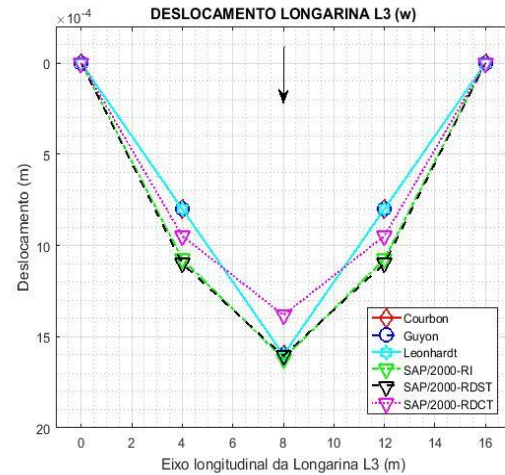
Verifica-se uma aproximação nos valores de momento fletor e deslocamento entre os modelos numérico e as soluções analíticas. Além disto, uma evolução côncava no modelo SAP/2000-RI, sofrendo uma flexão na longarina L3. Observa-se uma semelhança nos valores do coeficiente de repartição transversal entre as soluções de Courbon, Leonhardt e o modelo SAP/2000-RI.

A Figura 5.47 demonstra os momento fletores e os deslocamentos longitudinais das longarinas.

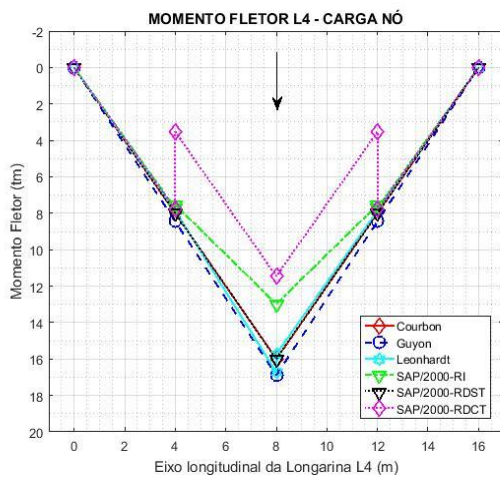




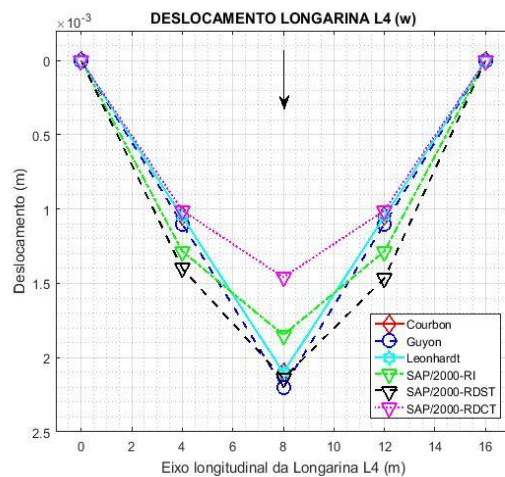
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.47 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L3 e L4 com carga aplicada no nó.

Observa-se uma aproximação dos valores de momento fletor e de deslocamento entre os métodos numéricos e soluções analíticas, principalmente na longarina L2 e L3, como também se verifica uma continuidade côncava na evolução do modelo SAP/2000-RI, tendo a longarina L3 como ponto angular. Desta forma, alternando a ordem de sequência entre os modelos SAP/2000-RI e SAP/2000-RDCT. Por fim observa-se uma semelhança nos valores de deslocamentos na longarina L3, entre os modelos numéricos e soluções analíticas, exceto no SAP/2000-RDCT.

## 5.8 CASO 7-A - MODELO GR4L3T – ESTUDO INFLUÊNCIA DA LAJE

Neste caso foi estudada a influência da mesa, isto é uma grelhas formada por vigas “tê” no tabuleiro. Como parâmetro usa-se o caso 6-A. Para os casos analíticos, foi determinada a inércia de cada longarina, referente à viga “Te” equivalente à laje associada, sendo:  $b2 = 2,5$  m,  $h2 = 0,30$  m,  $h1 = 1,30$  m e  $b1 = 0,30$  m, como mostra na Figura 5.48. A modelagem foi realizada no próprio SAP/2000, mostrada na Figura 5.49. Para os valores de inércia longitudinal ( $I$ ) e inércia polar ( $I_p$ ), foram adotados os valores calculados pelo SAP/2000.

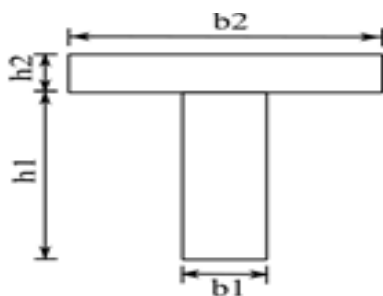


Figura 5.48 – Seção Te equivalente

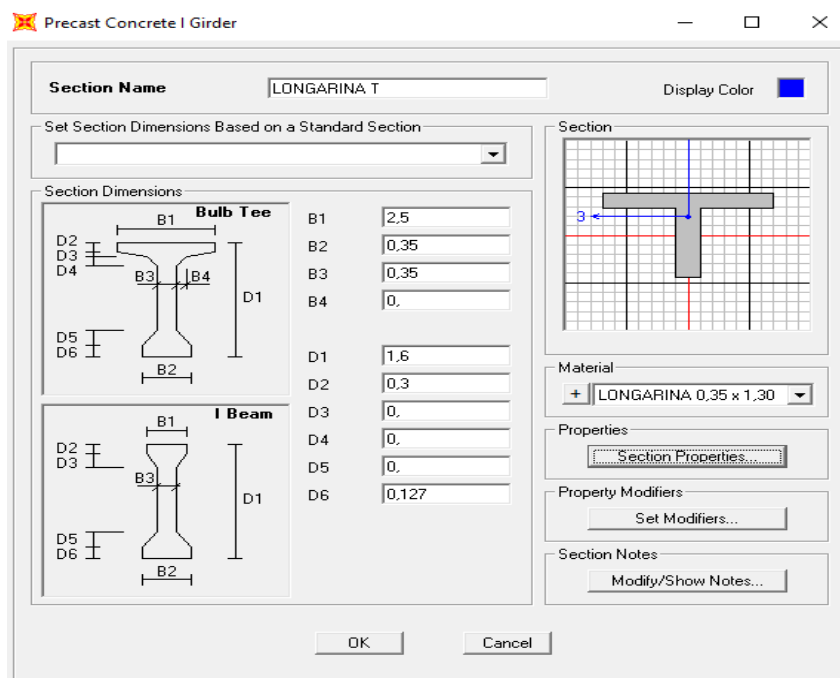


Figura 5.49 – Dimensionamento da Seção “Te”.

### 5.8.1 Carga sobre a transversina T1

Nas Figura 5.50 são mostradas as longarinas e transversinas em (a), e a posição da carga aplicada sobre o tabuleiro (b), e a vista inferior do tabuleiro base para este estudo em (c), e a posição da carga em relação ao centro elástico da transversina em (d).

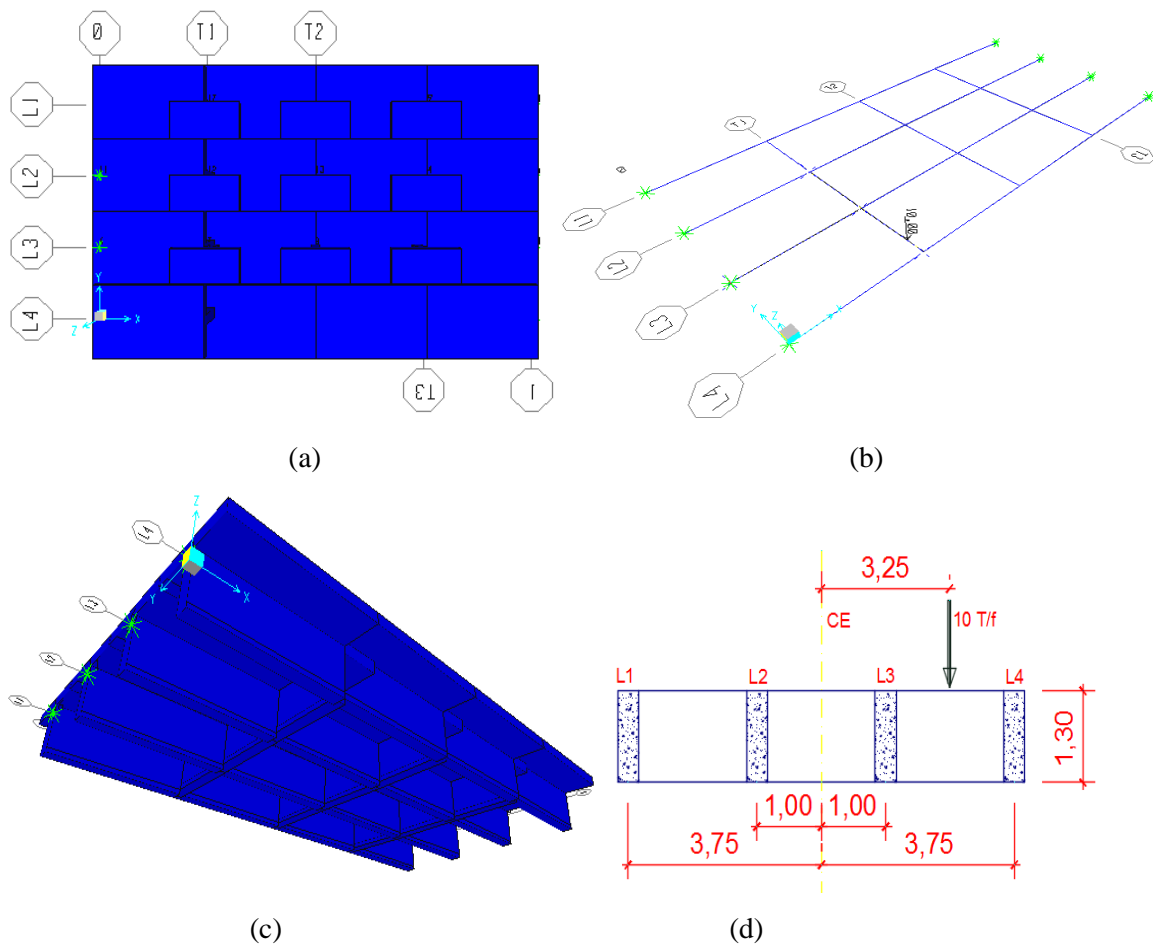
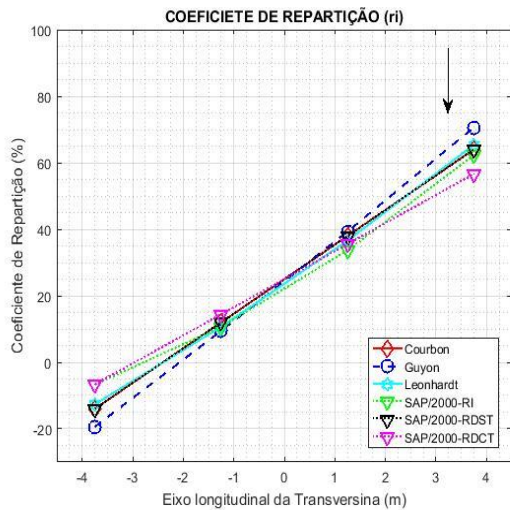
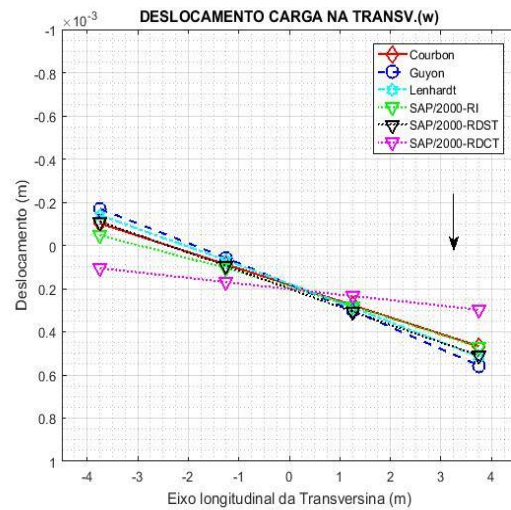


Figura 5.50 – Modelo base para estudo da influência da laje sobre o tabuleiro, (a) nomenclatura dos elementos, (b) posição da carga sobre o tabuleiro, (c) vista inferior do tabuleiro e (c) posição da carga em relação ao centro elástico.

Observados, na Figura 5.51, os coeficientes de repartição transversal em (a), e o deslocamento longitudinal da transversina em (b).



(a)

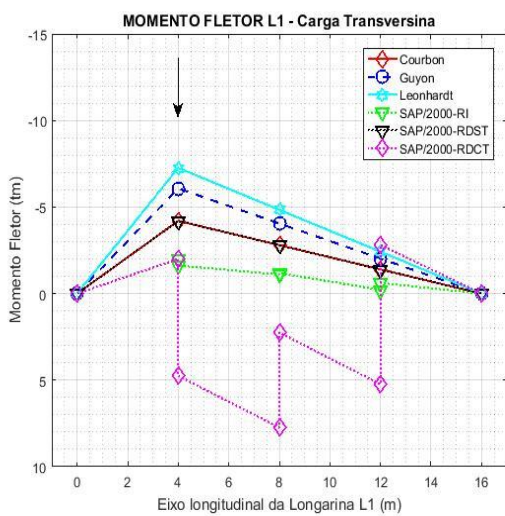


(b)

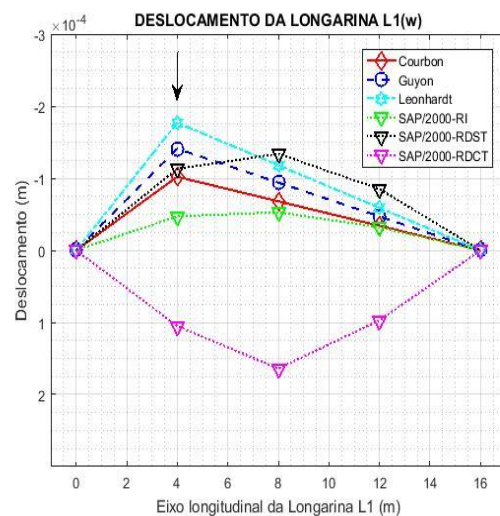
Figura 5.51 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b).

Observa-se uma aproximação nos valores do coeficiente de repartição transversal nas longarinas internas e L4, entre todos os modelos numéricos e soluções analíticas, como também um pequeno deslocamento na evolução do modelo SAP/2000-RI. Aos valores de deslocamento verificam-se diminuição e aproximação nos valores entre todos os modelos numéricos e soluções analíticas, como também uma melhor distribuição da carga em todas as longarinas. Destaque para a solução de Guyon e do modelo SAP/2000-RI.

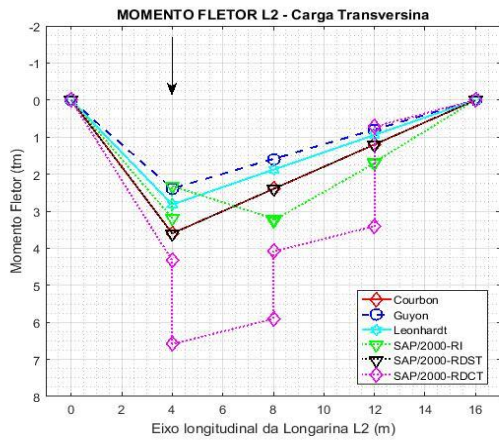
Os momentos fletores e deslocamentos das longarinas L1, L2, L3 e L4 são apresentados ilustrados na Figura 5.52.



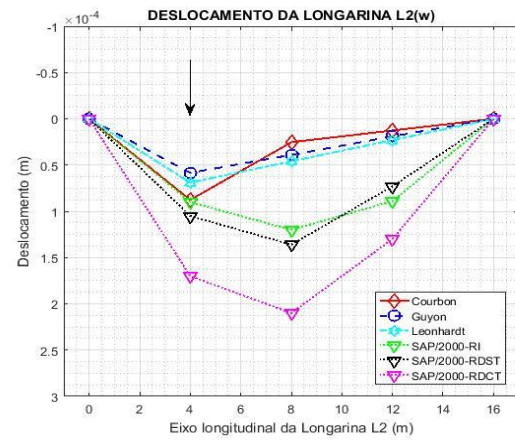
(a)



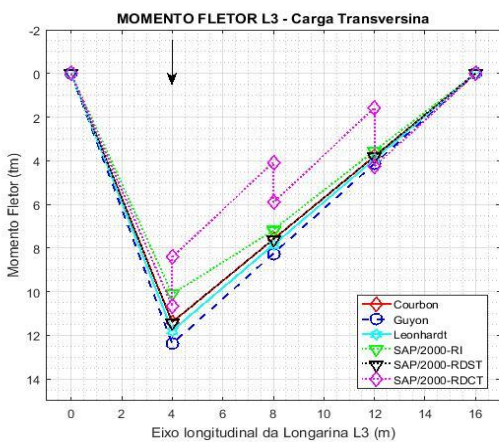
(b)



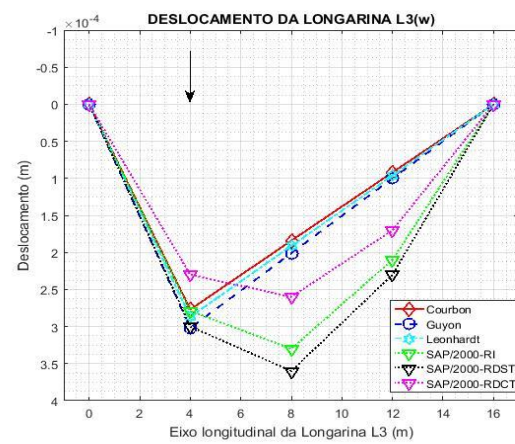
(c)



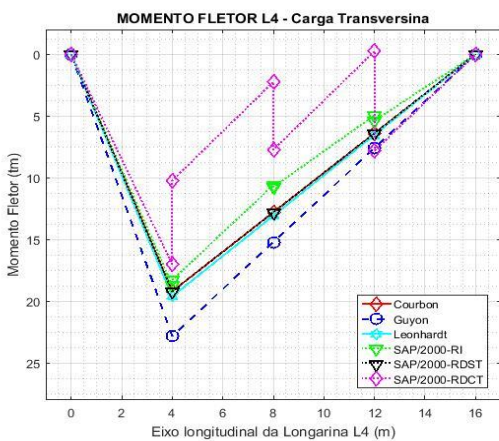
(d)



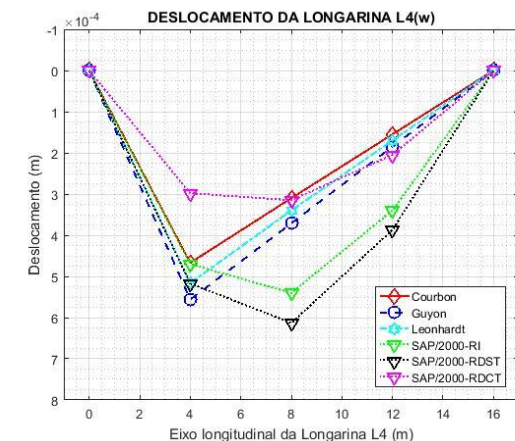
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.52 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2,L3 e L4 com carga aplicada no nó.

Observa-se uma redução nos valores de momento fletor e deslocamento no ponto de aplicação da carga, para todos os modelos numéricos e soluções analíticas, como também uma semelhança no valor de momento fletor e de deslocamento na longarina L1, entre as

soluções de Courbon e SAP/2000-RDST. Além disto, observam-se que os deslocamentos na curvas pelos modelos numéricos seguem uma evolução de forma curva, enquanto as soluções analíticas, forma linear. Por fim, verifica-se uma alternância na ordem de sequência entre as soluções de Guyon e Leonhardt, nas longarinas L1 e L2.

### 5.8.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T1

É mostrada na Figura 5.53 a posição da carga no nó (a), e a cota de afastamento da carga em relação ao centro elástico da transversina (b).

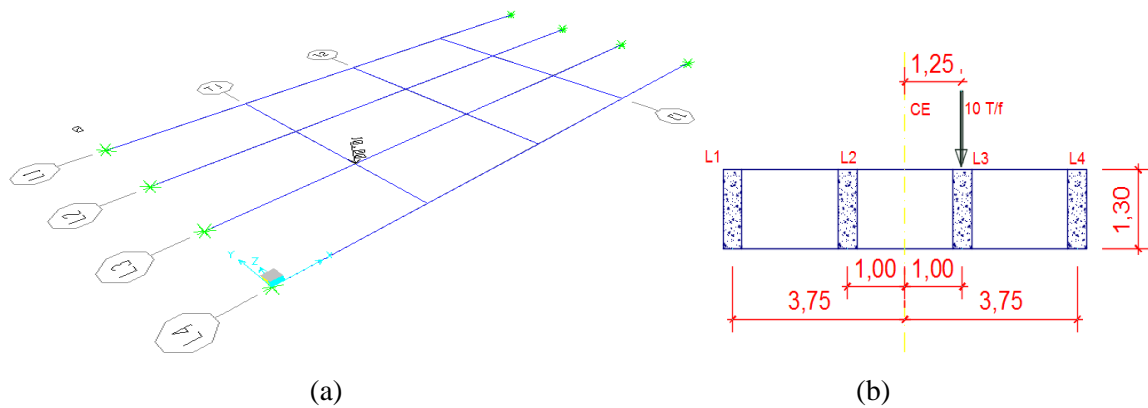


Figura 5.53 - Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico.

A Figura 5.54 apresenta o coeficiente de distribuição transversal em (a) e o deslocamento em (b).

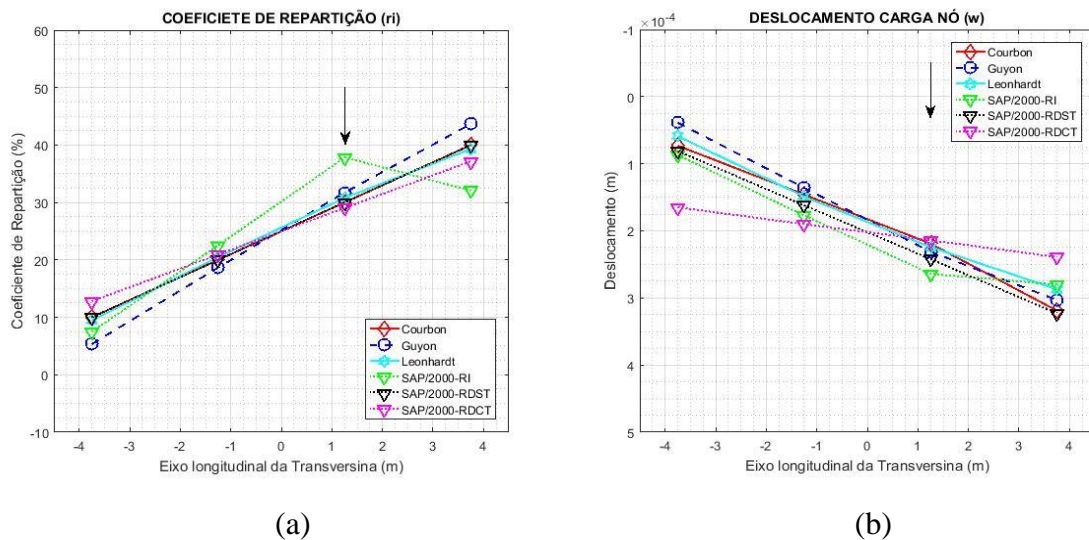


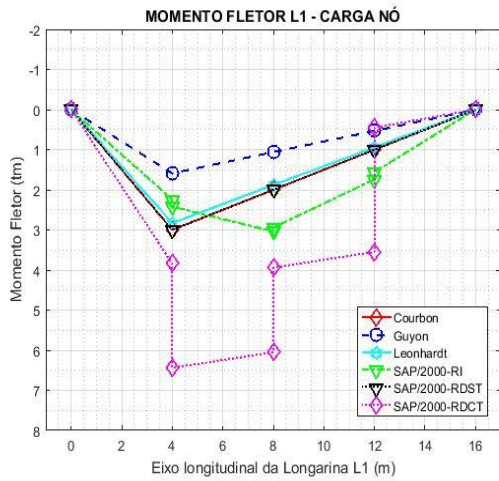
Figura 5.54 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b).

Observa-se uma melhor distribuição nos valores dos coeficientes de repartição transversal no modelo SAP/2000-RDCT, bem como uma aproximação nos valores do coeficiente de

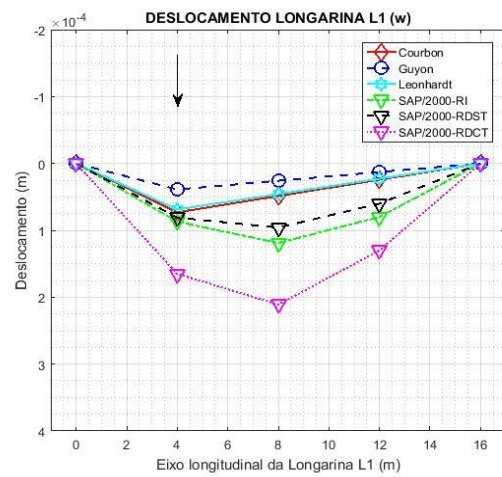


repartição transversal e de deslocamentos entre os modelos analíticos. E, na longarina L4, uma alternância na ordem de sequência entre os métodos SAP/2000-RI e SAP/2000-RDCT; como também entre as soluções analíticas de Leonhardt e Courbon.

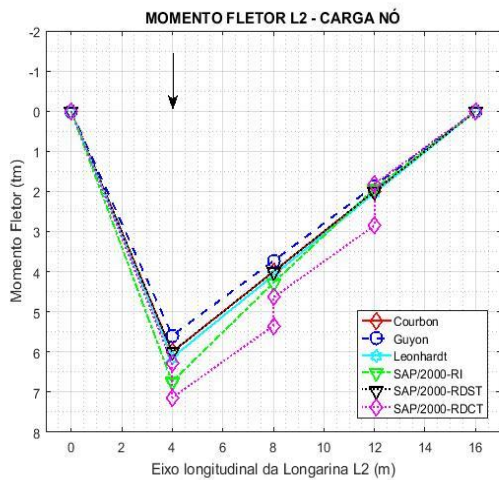
Nas Figura 5.55 são apresentados os momentos fletores e os deslocamentos longitudinais das longarinas.



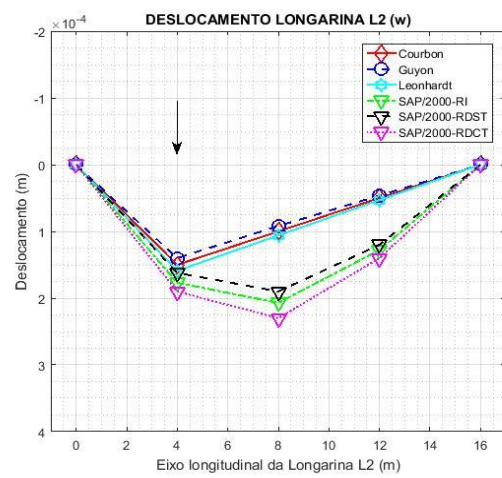
(a)



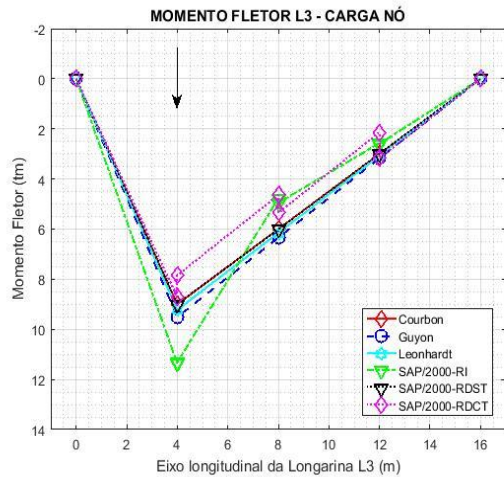
(b)



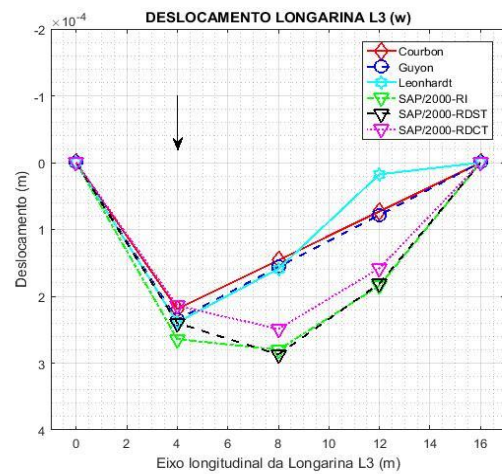
(c)



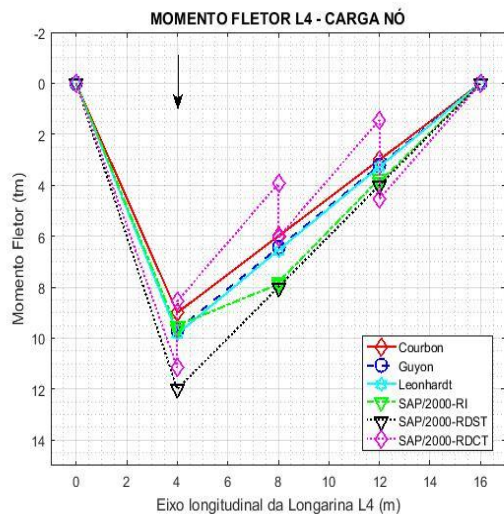
(d)



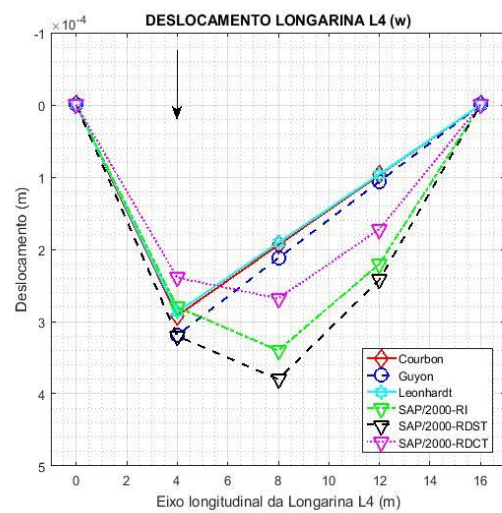
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.55 -Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2,L3 e L4 com carga aplicada no nó.

Observa-se, na longarina L1, uma redução nos valores de momento fletor e de deslocamento em todos os modelos numéricos e soluções analíticas, bem como uma alternância na ordem da sequência entre os modelos SAP/2000-RDST e SAP/2000-RDCT. Como também, uma aproximação dos valores entre os modelos analíticos e SAP/2000-RI e SAP/2000-RDST. E, nas longarinas L2 e L3, verificam-se um pequeno afastamento nos valores de momento fletor, entre todos os modelos numéricos e soluções analíticas. Na longarina L4 observa-se uma diminuição nos valores de momento fletor e deslocamento nas soluções de Courbon e Leonhardt. Por fim, os deslocamentos nas curvas pelo MEF seguem uma evolução de forma curva, enquanto nas soluções analíticas, de forma linear.

## 5.9 CASO 7-B - MODELO GR4L3T – ESTUDO INFLUÊNCIA DA LAJE

### 5.9.1 Carga sobre a transversina T2

Na Figura 5.56 está disposto o deslocamento da carga, sendo posicionada sobre o nó formado pela longarina L4 e a transversina T2.

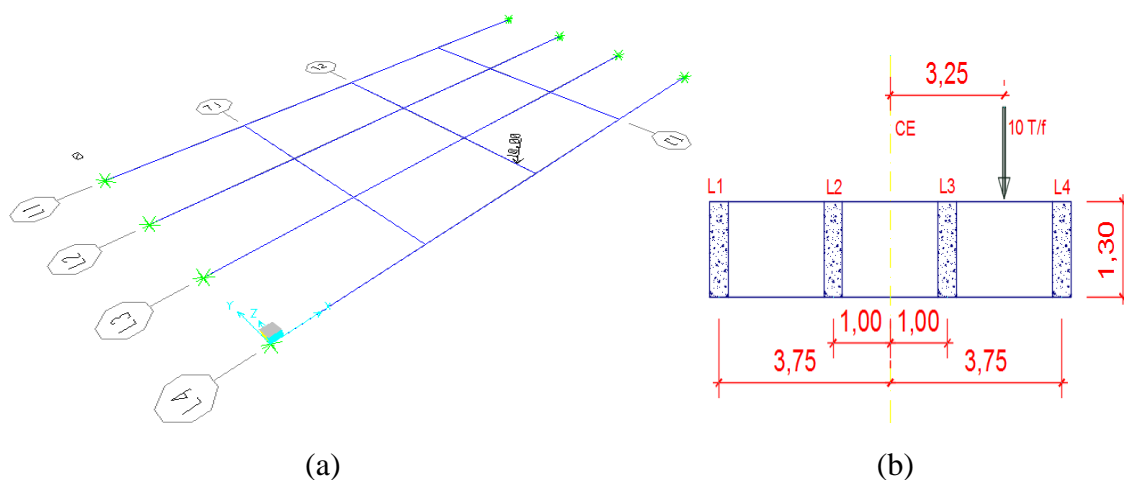


Figura 5.56 - Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico (b).

A Figura 5.57 indica o coeficiente de repartição transversal e o deslocamento para a carga posicionada no nó, com excentricidade de 3,25 metros em relação ao centro elástico.

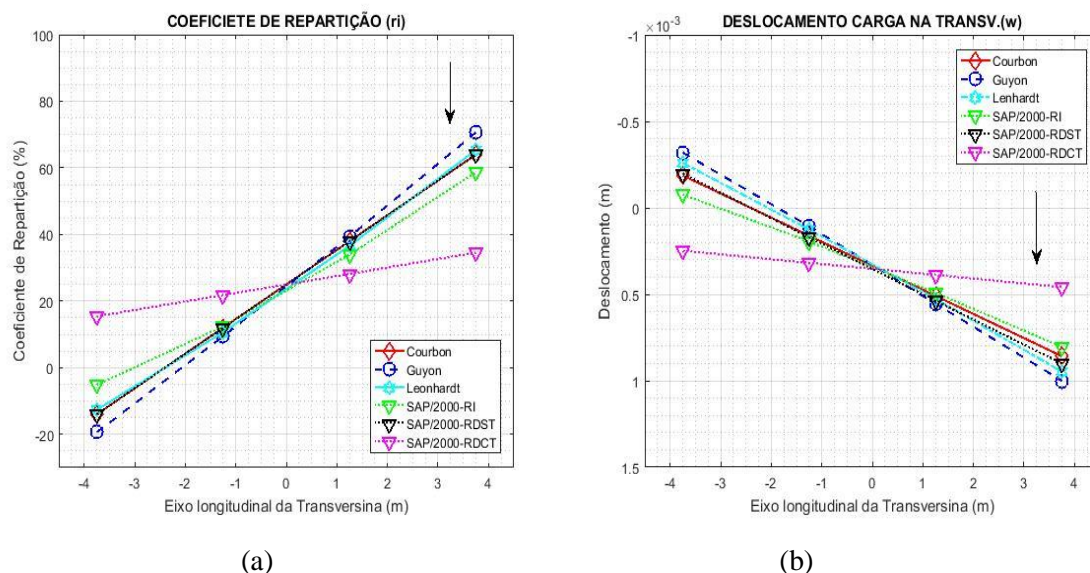
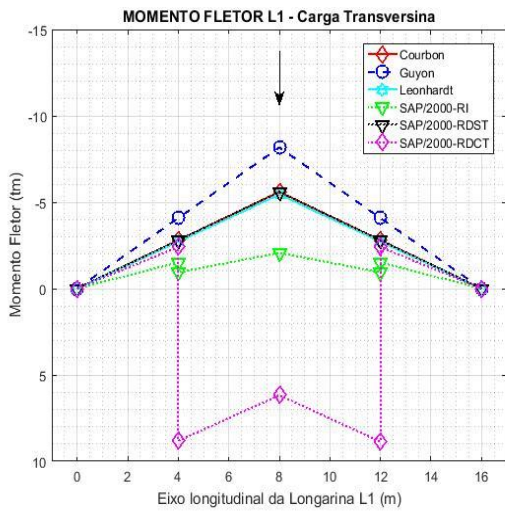


Figura 5.57 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b).

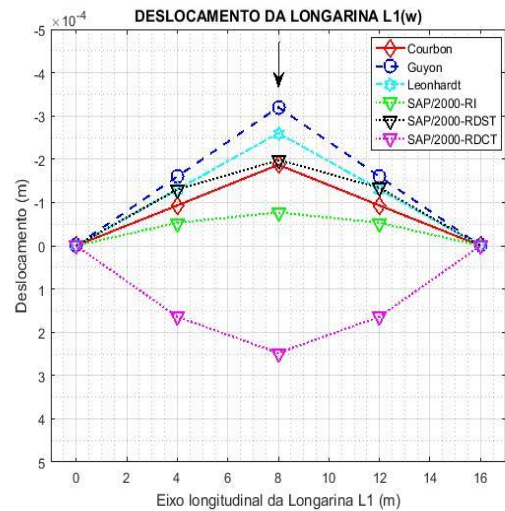
Observa-se uma leve redução nos valores de momento fletor entre os modelos numéricos e soluções analíticas, exceto o modelo SAP/2000-RDCT, bem como uma diminuição nos

valores de deslocamento em todos os modelos numéricos e soluções analíticas, mas sem alteração na ordem de sequência das curvas.

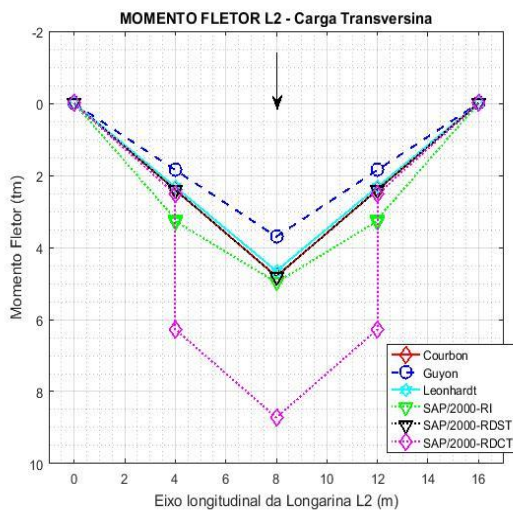
Nas Figura 5.58 são apresentados os momentos fletores e os deslocamentos longitudinais das longarinas.



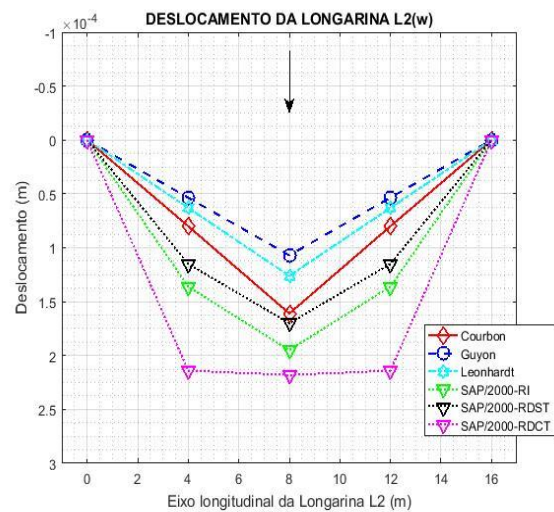
(a)



(b)



(c)



(d)

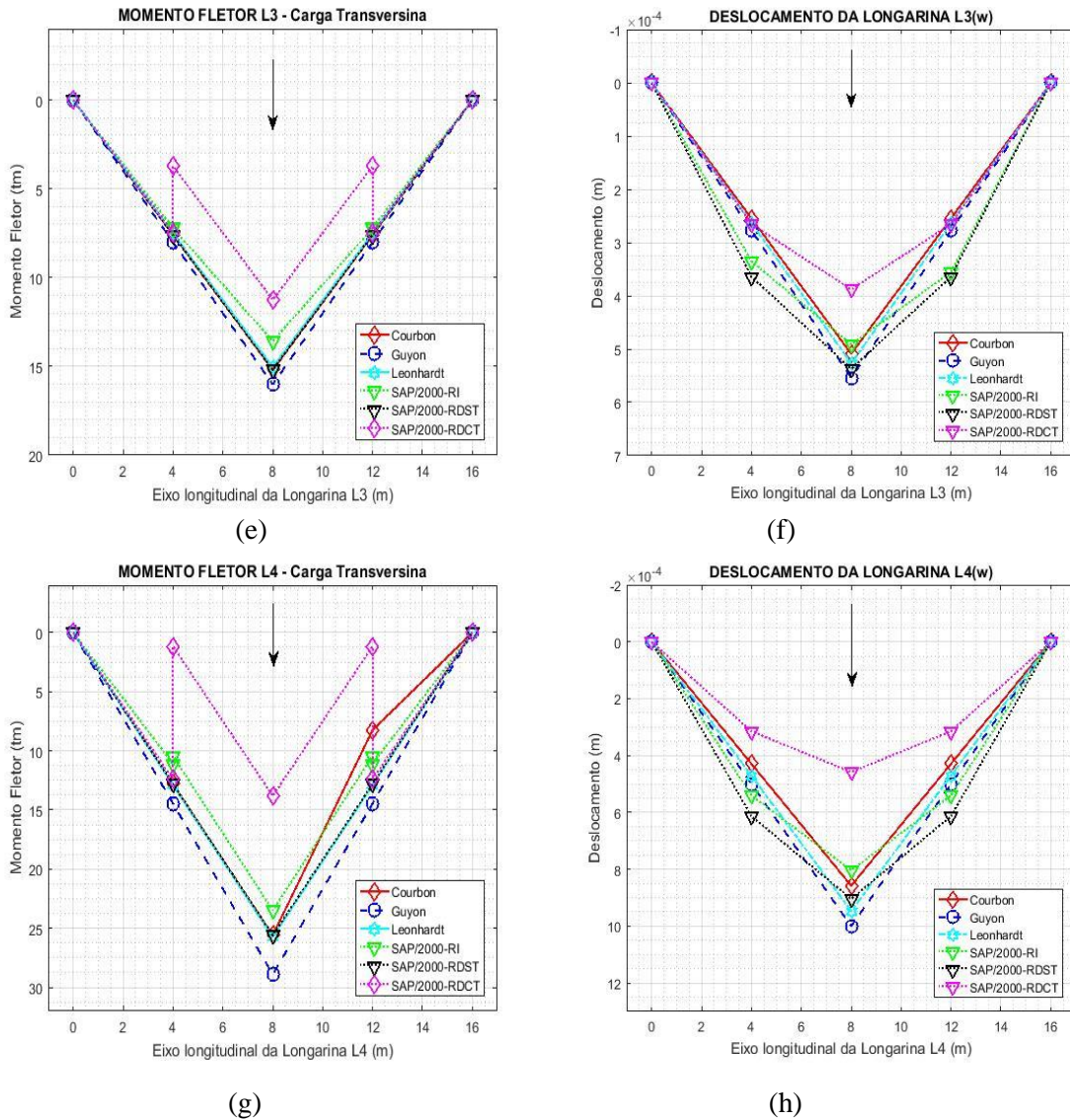


Figura 5.58 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L3 e L4 com carga aplicada no nó.

Na longarina L1 observa-se uma diminuição nos valores de deslocamento, permanecendo ainda uma semelhança nos valores de momento fletor, entre os modelos analíticos. Na longarina L3 verifica-se uma aproximação no valor do deslocamento entre as soluções de Leonhardt e Courbon. Por outro lado, na longarina L4 ocorre um afastamento entre os valores das soluções de Courbon e Leonhardt. Por fim, percebe-se nas longarinas uma redução nos valores de deslocamento, sem alteração significativa nos valores de momento fletor em todos os modelos numéricos e soluções analíticas.

## 5.9.2 Carga sobre o nó da longarina L3 e a transversina T2

A carga foi concentrada sobre o nó formado entre a longarina L3 e a transversina T2, posicionada no centro das longarinas, e as cotas de afastamento da carga ao centro elástico da transversina (b), como verificado na Figura 5.59 (a).

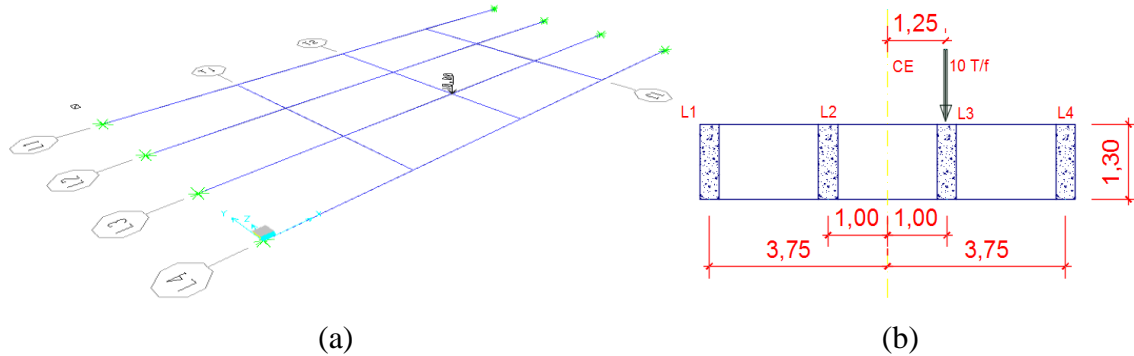


Figura 5.59 - Posição da carga aplicada (a) e cota em relação ao centro elástico (b).

Na Figura 5.60 o coeficiente de repartição transversal e o deslocamento.

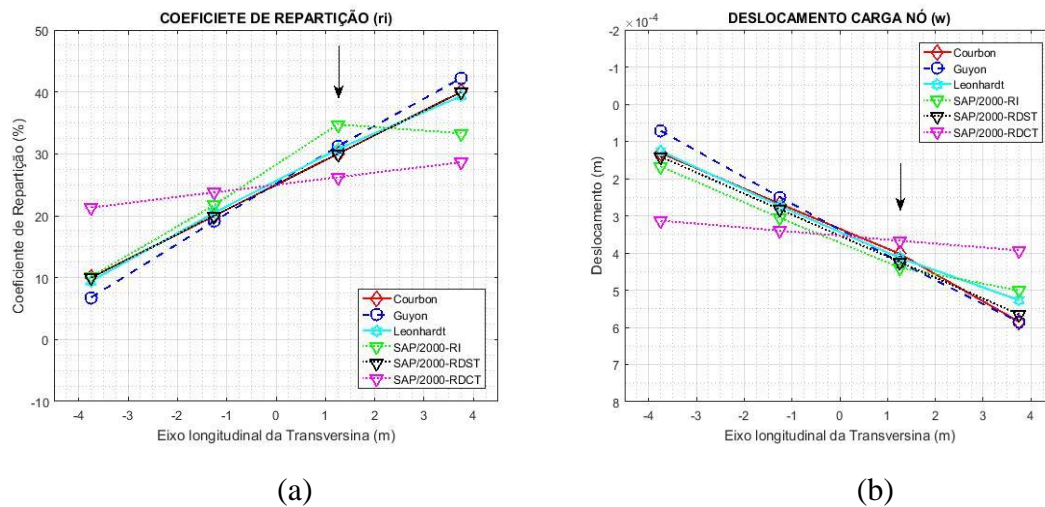
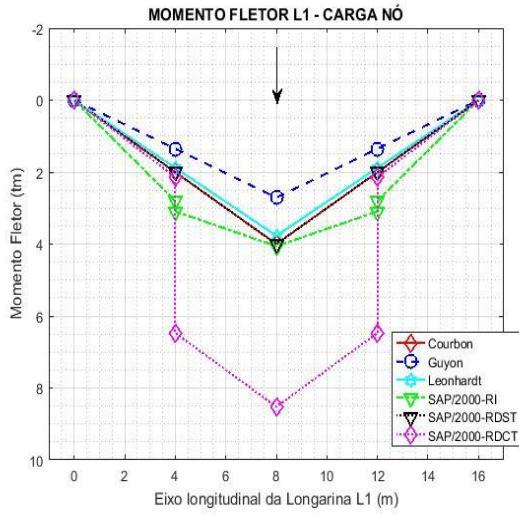


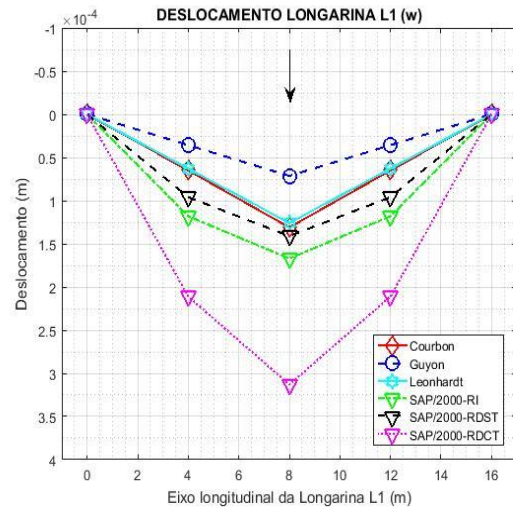
Figura 5.60 - Coeficiente de repartição transversal (a) e deslocamento da transversina (b).

Na longarina L3 observa-se um pequeno aumento no valor do coeficiente de repartição transversal na solução de Leonhardt, e isto causa um pequeno afastamento, em relação a solução de Courbon. Como também, uma aproximação no valor do deslocamento no modelo SAP/2000-RDCT em relação a solução de Courbon. Assim comprovando o aumento na rigidez do tabuleiro. Foi mantida a evolução côncava na curva de momento fletor no modelo SAP/2000-RI. Por fim, percebe-se uma redução nos valores de deslocamento, sem alteração significativa nos valores dos coeficientes de repartição transversal em todos os modelos numéricos e soluções analíticas.

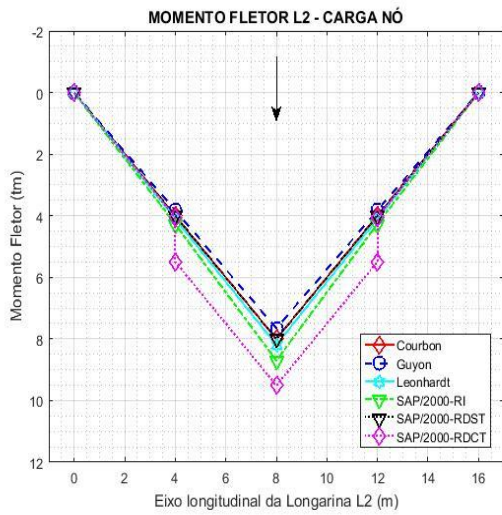
Na Figura 5.61 estão indicados os momentos fletores e os deslocamentos longitudinais das longarinas.



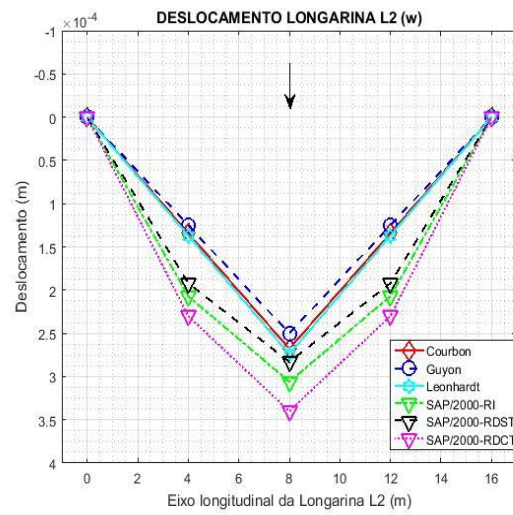
(a)



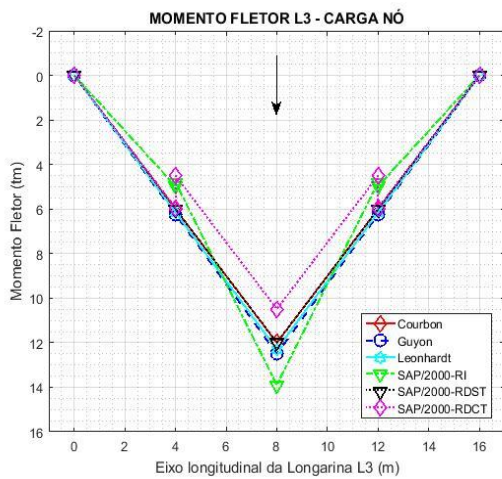
(b)



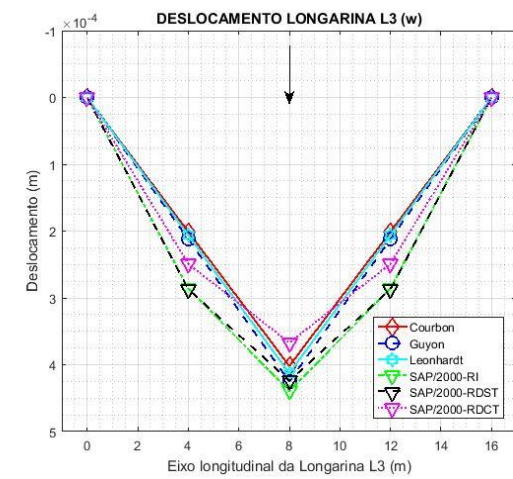
(c)



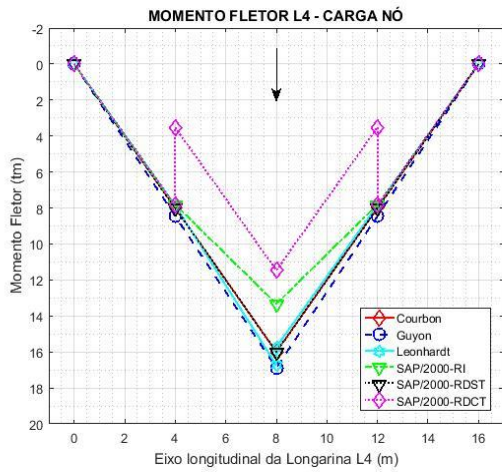
(d)



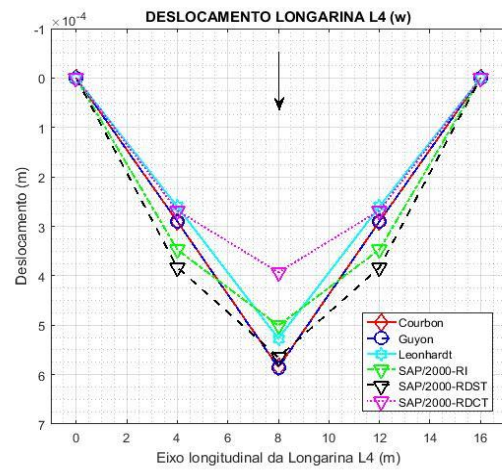
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.61 - Momento fletor e deslocamento das longarinas L1, L2, L3 e L4. Com carga aplicada no nó.

Na longarina L1 observa-se uma aproximação nos valores dos deslocamentos e momentos fletores entre as soluções analíticas, como também um pequeno afastamento entre a solução de Courbon e o modelo SAP/2000-RDST. Também, na longarina L2, verifica-se uma aproximação no valor da solução de Guyon em relação a solução de Courbon, bem como um afastamento da solução de Leonhardt. Na longarina L3 ocorre um afastamento dos valores analíticos em relação aos numéricos, bem como uma aproximação no valor do deslocamento da solução de Leonhardt em relação ao modelo SAP/2000-RI. Por fim, percebe-se nas longarinas uma redução nos valores de deslocamento, sem alteração significativa nos valores de momento fletor em todos os modelos numéricos e soluções analíticas.



## 6 CONCLUSÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões gerais, as considerações finais e as sugestões para trabalhos futuros.

### 6.1 CONCLUSÕES GERAIS

Sete modelos de tabuleiros em grelhas foram propostos para diversos estudos comparativos do comportamento estrutural em termos de esforços (momento fletor e deslocamentos). Uma vez entendido o funcionamento dos três métodos analíticos e os resultados comparados com o método numérico (MEF), ora apresentam-se as considerações práticas para projetos.

Analisando os vários casos e as condições de carregamento conclui-se que os métodos analíticos clássicos funcionam muito bem, em especial o método de Engesser-Courbon. Foi utilizado um modelo em elementos finitos (MEF) com ajuda do SAP/2000, sofisticando-se o processo com uma análise mais refinada, e seus resultados foram comparados com os resultados analíticos que se mostraram próximos.

O estudo abordou o comportamento do tabuleiro com variação de elementos: número de longarinas, número de transversinas e associação da mesa nas longarinas e transversinas. Dentre todas as combinações, a que apresentou melhor resultado quanto à redução nos valores de momento fletor e deslocamento foi a associação da mesa nas longarinas e transversinas. Todavia, neste estudo simples, as reduções nos valores dos momentos fletores não foram significativos. Por sua vez, os valores dos deslocamentos foram satisfatórios.

O método de Engesser-Courbon apresentou resultados que podem ser considerados bastante positivos, pois se aproximou dos resultados do MEF obtidos pelo SAP/2000. Este é o único método analítico que resolve, sem restrição, os sete casos estudados de tabuleiro. Contudo, os modelos analíticos, independente da posição do carregamento no tabuleiro, mostraram que os maiores momentos fletores ocorrem na seção onde a carga está aplicada, evoluindo linearmente desta seção até os apoios; enquanto que, nos tabuleiros com mais de

uma transversina, os deslocamentos nas longarinas pelo MEF segue uma evolução de forma curva (curva mais suave), enquanto que os deslocamentos analíticos variaram linearmente.

Os casos com mais de duas longarinas apresentaram resultados próximos para os momentos fletores, deslocamentos e coeficientes de repartição transversal de cargas nas longarinas internas, em especial nas longarinas mais próximas da carga. Porém, para as longarinas externas, os valores apresentaram diferenças significativas. Essas diferenças tendem a diminuir com o aumento do número de transversinas, comprovando o fato de que a estrutura está se tornando mais rígida.

Após as análises do comportamento da distribuição de cargas, deslocamentos e momentos fletores pelos métodos analíticos e numéricos, foi possível inferir que os modelos estudados apresentaram resultados bastante próximos entre si, especialmente o método de Courbon e o modelo SAP/2000–RDST. Os métodos de Leonhardt e Guyon apresentaram melhores resultados em tabuleiro com maior quantidade de longarinas e transversinas, confirmando as conclusões de Sieffert (2004) e Zahra (2013). Os mesmos métodos se distanciam dos demais nos casos de tabuleiros com duas longarinas e uma transversina.

Por entender que a modelagem depende do comportamento do fenômeno que o projetista quer analisar, a posição dos elementos da grelha deve ser adequada, a fim de serem obtidos os esforços desejados. Desta forma, os modelos analíticos atendem às necessidades dimensionais para o cálculo do tabuleiro de pontes em grelhas. Por fim, o estudo verificou que o emprego dos métodos analíticos clássicos geram bons resultados, desde que os modelos sejam bem representados. Também são recomendados para serem utilizados no dimensionamento de pequenas pontes e na validação de modelos mais complexos, em etapas preliminares e com arranjos simplificados.

Conclui-se, assim, que o modelo de Engesser-Courbon foi considerado como a melhor solução analítica para modelos de tabuleiro em grelha. Entretanto, para tabuleiros com maior número de transversinas, o melhor método analítico é o de Guyon–Massonnet, pois em sua formulação permite a análise do efeito de torção, obtendo resultados mais próximos das situações reais. Ou seja, quanto mais longarinas e transversinas estiverem distribuídas (simetricamente) num tabuleiro de ponte, formando células com barras entrecruzadas, mais

se comprova a analogia de grelha a uma placa contínua, formulação presente no método de Guyon-Massonnet. Todavia, quando o número de transversinas e longarinas diminuem, mais distanciamos de um sistema de barras (transversais) apoiadas em longarinas (que são mais flexíveis), situação em que se torna mais adequado o modelo de Engesser-Courbon.

## **6.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Devido ao acesso facilitado a programas de modelagem em elementos finitos, pode-se concluir que as melhores opções de análise são os modelos computacionais, pois há mais facilidades na representação dos modelos e mais qualidade nos resultados. No entanto, seu manuseio deve ser qualificado através de modelos analíticos inicialmente simples, e evoluindo o grau de complexidade na medida em que os resultados em fase anterior ficam mais próximos.

Acredita-se que os problemas inicialmente levantados foram adequadamente apresentados e desenvolvidos, contribuindo assim para o entendimento das questões pelos profissionais que se depararem com este tipo de estrutura. Os modelos de cálculo foram detalhados, e os interessados em se aprofundar nos estudos de tabuleiro de ponte em grelha encontrarão neste trabalho uma forma prática de progredir na análise de estruturas mais complexas.

## **6.3 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS**

Seguem abaixo algumas sugestões de pesquisa de temas que não puderam ser abordados nesta dissertação:

- Comportamento de estrutura em grelhas submetidas a forças de protensão;
- Análise da estrutura em grelha com o trem-tipo normatizado e o peso próprio da estrutura, determinando-se os pontos mais críticos para cada longarina;
- Análise de estruturas em grelhas com longarinas de geometria, condições de contorno e carregamento variados;
- Qualificação e uso de diferenças finitas na definição dos esforços solicitantes da estrutura;
- Uso de outros tipos de elementos finitos, com módulo acoplado da grelha reticulada e laje conjugada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, D. G. C. D. Análise Comparativa de Deslocamentos e Esforços Solicitantes de um Edifício Alto através de Modelos Estruturais Distintos pelo MEF. Escola de Engenharia - Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. 152. 2009.
- Alves, E. V.; Almeida, S. M. F. D.; Judice, F. M. D. S. Método de Análise Estrutural de Tabuleiros de Pontes em Vigas Múltiplas de Concreto Protendido. Engevista, Rio de Janeiro, v. 6, n. 2, p. 48-58, Agosto 2004.
- Barbier, L. *et al.* Les Ponts Courants en Béton. [S.l.]: DBG Studios, v. I, 2005.
- Brito, E. L. D. Dimensionamento dos Elementos da Superestrutura de uma Ponte em Arco Triarticulado de Madeira sob a ótica do Projeto de Revisão da NBR 7190 de 2011. Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá, p. 301. 2013.
- Bueno, J. R. Influência da Flexibilidade de Vigas de Apoio no Projeto de Lajes Maciças de Concreto Armado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 196. 2014.
- Chéray, O. Etude D'Ouvrages Courants en Zone Sismique dans le Cadre de la Liaison Altkirch-Mulhouse Burnhaupt. INSA - STRASBOURG. ARCADIS. [S.l.], p. 84. 2009.
- Coelho, J. D. Modelagem de Lajes de Concreto Armado por Analogia de Grelha. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 220. 2000.
- Ferraz, J. C. D. F. Contribuição ao Estudo das Grelhas. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 142. 1951.
- Ferreira, P. M. D. S. Tabuleiros de Viadutos Rodoviários: Modelos Numéricos e implicações das cargas preconizadas nos Eurocódigos. Faculdade de Engenharia Universidade do Porto. Porto - Portugal, p. 166. 2014.

- Fish, J.; Belytscheko, T. Um Primeiro Curso em Elementos Finitos. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- Freitas, M. D. Pontes - Introdução Geral - Definições. EPUSP. São Paulo, p. 120. 1978.
- Freuermuth, C. Service life and Sustainability of Concrete Bridges. *Aspire - The Concrete Bridge Magazine*, Chicago, v. 3, n. 4º, p. 12-15, 2009. ISSN 1935-2093.
- Frota, L. E. C. Estudo Comparativo entre o Método de Courbon e Modelos Computacionais para Análise de Tabuleiros de Pontes. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Brasília. Brasília-DF, p. 111. 2014.
- Gavioli, E. R. Análise de Tabuleiros de Pontes Formados por Elementos Pré-Moldados Mediante Método da Grelha: Recomendações de Projeto e Comparações dos Valores Teóricos com Experimentais. Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo. São Carlos, p. 195. 1998.
- Gilun, a.; meronk, J. Stress-Laminated Timber T-beam and Box-beam Bridges. Chalmers University Of Technology. Göteborg Sweden, p. 141. 2006.
- Góes, j. L. N. D.; dias, A. A. Comparação de Três Métodos de Cálculo para Pontes de Madeira Protendida Transversalmente. *Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, Passo Fundo, v. II, n. 3, p. 79-93, dez. 2005.
- Gonzalez, R. L. M. Análise de Lajes pela Teoria das Charneiras Plásticas e Comparação de Custos entre Lajes Maciças e Lajes Treliçadas. Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo. São Carlos, p. 144. 1997.
- Hambly, E. C. *Bridge Deck Behaviour*. 2. ed. London: Chapman & Hall, v. I, 1991.
- Kaestner, C. L. Dimensionamento de Longarinas Protendidas com a Consideração das Etapas Construtivas. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 184. 2015.

Leonhardt, F. Construção em Concreto: Princípios Básicos da Construção de Pontes de Concreto. Rio de Janeiro: Interciência, v. VI, 1979.

\_\_\_\_\_ Construção em Concreto: Princípios Básicos da Construção de Pontes de Concreto. Rio de Janeiro: Interciência, v. VI, 2013.

Longo, H. I. Esforços Máximos em Pontes tipo Grelha. Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ. Rio de Janeiro, p. 217. 1979.

Machelski, C. Parameters of Load Transverse Distribution Across Bridges. Roads and Bridges, n. 13, p. 131-143, 2014.

Marchetti, O. Pontes de Concreto Armado. 1ª. ed. São Paulo: Blucher, 2008. ISBN 978-85-212-0440-4.

Martin, F. J. S. Cálculo de Tabuleiros de Pontes. 1ª. ed. São Paulo: ICTE, 1981.

Massonnet, C. Méthode de Calcul des Ponts à Poutres Multiples Tenant Compte de leur Résistance à la Torsion. [www.retro.seals](http://retro.seals.ch), 1950. Disponível em: <<http://retro.seals.ch>>. Acesso em: 29 out. 2015.

\_\_\_\_\_ Compléments a La Méthode de Calcul des Ponts a Poutres Multiples. Annales de L'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris, Janeiro 1962. 1-62.

Mattos, T. S. Programa para Análise de Superestrutura de Pontes de Concreto Armado e Protendido. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p. 156. 2001.

Melo, H. S. D. Estudo para Determinação do Centro Elástico na Seção Transversal de Pontes em Grelha. UnB - FT - ENC- PECC - GDFE. Brasília - DF. 2016. (RTP-HSM2-04/2016).

\_\_\_\_\_ Um Estudo Comparativo dos Métodos Analíticos Clássicos usados no Cálculo de Tabuleiro de Pontes em Grelhas. UnB - FT - ENC - PECC - GDFE. Brasília - DF. 2016. (RTP-HSM3-5/2016).

- \_\_\_\_\_ Um Estudo de duas Vigas em Grelhas. UnB - FT - ENC - PECC - GDFE. Brasília- DF. 2016. (RTP-HSM1-01/2016).
- Melo, h. S. D.; pedroso, L. J. Uma Metodologia para o Estudo Progressivo dos Esforços no Cálculo de Tabuleiro de Pontes em Grelhas. UnB - FT - ENC - PECC - GDFE. Brasília. 2016. (RTP- HSM4 - 07/2016).
- Müller, R. Critérios para o Planejamento e Execução de Recuperação Estruturais em Pontes e Viadutos Rodoviários no Estado do Paraná. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, p. 136. 2004.
- Nakamura, J. Acidentes Anunciados. Técnica, São Paulo, n. 98, p. 48-51, Maio 2005.
- Noronha, M. P. Ponte Estaiada sobre o Rio Paranaíba. Técnica, São Paulo, n. 93, p. 56-64, dez. 2004.
- O'conner, C. Pontes: Superestruturas. São Paulo: EDUSP, 1976.
- O'connor, C. Pontes - Superestruturas. 1ª. ed. São Paulo: LTC/EDUSP, v. I, 1979.
- Olivares, A. E. Experimental Analysis of Grillage Girder Bridge. www.retro.seals.ch, 1961. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5169/seals-18255>>. Acesso em: 29 out. 2015.
- Oliveira, G. E. P. D. Dimensionamento da Superestrutura de uma Ponte de Concreto Armado.. Universidade Regional de Blumenau. Blumenau, p. 123. 2010.
- Pedrosa, P. V. Geração Automática de Modelos SAP2000 Aplicados na Análise de Distribuição Transversal de Cargas em Superestruturas de Pontes. Escola Politécnica - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p. 103. 2015.
- Pedroso, L. J. Método dos Deslocamento. UnB - ENC - FT - PECC - GDFE. Brasília - DF. 1998.

\_\_\_\_\_ O Método das Forças. UnB - ENC - FT - PECC - GDFE. Brasília - DF. 1998.

\_\_\_\_\_ Teoria de Placas e Cascas: Uma Abordagem Analítica e Numérica. 1. ed. Brasília-DF: UnB - FT - EnC - PECC - Grupo de Dinamica e Fluido-Estrutura, v. I, 1998.

\_\_\_\_\_ Método de Energia - Teoria das Estruturas 1. Unb - FT - ENC - PECC - GDFE. Brasília-DF. 2004.

\_\_\_\_\_ Manuscritos, Esquemas, Discussões e Notas de Seções de Orientações. Universidade de Brasília - UnB. In: Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil, Brasília-DF. 2015 - 2016.

Pfeil, W. Pontes em concreto armado: Elementos de Projeto, Solicitações, Superestrutura. 3ª. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., v. I, 1983.

Quiroga, A. F. S. Calculo de Estructuras de Puentes de Hormigon. Madrid - Espanha: Rueda, 1983.

Rebello, Y. C. P. A Concepção Estrutural e a Arquitetura. 1ª. ed. São Paulo: Zigurate , 2000.

Schwartz, A. Ecriture d'un Logiciel de Calcul de Dalles Iso ou Orthotropes Suivant la Méthodo de Guyon-Massonnet. INSA - ARCADIS. [S.l.], p. 153. 2013.

Seror, B. C. T. Dimensionamento dos Principais Elementos da Superestrutura de uma Ponte Treliçada de Madeira sob a Ótica do Projeto de Revisão da NBR - 7190 de 2011. Universidade Federal de Mato Grosso, Faculdade de Arquitetura, Engenharia e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Edificações e Ambiental. Cuiabá, p. 235. 2013.



- Sieffert, Y. L' Entretien des Ponts Mixtes Multipoutres Ferroviaires. Devant L'institut National Des Sciences Appliquees de Lyon. Lyon - France, p. 200. 2004.
- Soriano, H. L. Elementos Finitos - Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2009.
- Souza, C. F. P. Análise da Distribuição de Momentos Fletores em Pontes Bi-Apoiadas. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 156. 2015.
- Stramandinolo, J. S. B. Contribuição à Análise de Lajes Nervuradas por Analogia de Grelha. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 199. 2003.
- Timoshenko, P. S.; Woinowsky, K. S. Theory of Plates and Shells. [S.l.]: McGraw - Hill Kogakusha, ltda, 1959.
- Tyrrell, H. G. History of Bridge Engineering. 1ª. ed. Chicargo: Published by the Author, v. I, 1911.
- Vitório, J. A. P. Pontes rodoviárias: fundamentos, conservação e gestão. 1ª. ed. Recife: CREA - PE, 2002.
- Zahra, B. Etude de La Jonction Poutre-Plaque/Membrane Dans La Modelisation des Structures Complexes. Université Mohamed Khider. Biskra, p. 137. 2013.

## **APÊNDICE**

## APÊNDICE A - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DOS ELEMENTOS DO TABULEIRO

Este apêndice apresenta inicialmente considerações matemáticas quanto às propriedades físicas e geométricas das estruturas básicas da superestrutura, tema de grande importância, já que definem os parâmetros e variáveis usados nos métodos analíticos.

### A.1 PROPRIEDADES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS

Os resultados obtidos mediante os métodos aplicados dependem diretamente das propriedades das barras e, portanto, devem-se analisar vários aspectos, a saber:

#### A.1.1 Rigidez à flexão das barras:

Define-se como rigidez da viga ( $kv$ ) em qualquer ponto ao longo do seu eixo longitudinal, pela equação (A.1). A Figura A.1 apresenta uma viga com a carga  $P$  posicionada entre os apoios.

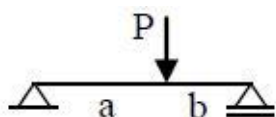


Figura A.1 - Posição de carga  $P$  entre os apoios.

$$k = \frac{3 \cdot E \cdot I \cdot L}{a^2 \cdot b^2} \quad (\text{A.1})$$

Sendo:

$E$  = o módulo de elasticidade longitudinal;

$I$  = o momento de inércia transversal;

$L$  = comprimento da longarina.

Cada barra da grelha irá representar certa “faixa”, com altura e largura, sendo esta dependente da malha da grelha. Desta forma o momento de inércia à flexão das barras longitudinais e transversais, de seção retangular, será calculado da seguinte forma pela equação (A.2):

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{A.2})$$

Sendo:

$b$  largura da barra, (menor dimensão);

$h$  altura da seção geométrica considerada.

Para determinação do momento de inércia ( $I$ ) a flexão da seção  $T$ , como apresentado na Figura A.2, considerou-se a influência do Coeficiente de Poisson na mesa e está apresentado na equação (A.3).

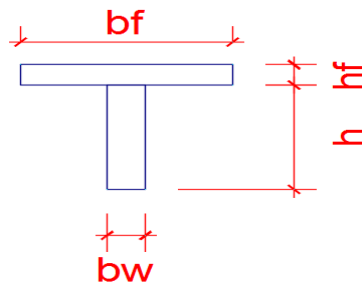


Figura A.2 – Seção T. (Adaptado de Bueno, 2014).

$$I_T = \frac{b_f h_f^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{A_f \cdot (y_{cg} - \frac{h_f}{2})^2}{(1-\nu^2)} + I + A_h (h_f + \frac{h}{2} - y_{cg})^2 \quad (\text{A.3})$$

Sendo,

$A_f = b_f \cdot h_f$  (é a área da seção da mesa);

$I = \frac{bL^3}{12}$  (é o momento de inércia da seção de viga abaixo da laje);

$y_{cg}$  é a ordenada do centroide da seção  $T$ , medida a partir da face superior da laje.

A Figura A.3 demonstra a mudança de posição do centro de gravidade ( $CG$ ) da viga da grelha quando associada à laje da grelha. Em (a) está representado o  $CG$  da laje e da viga em perfil I, podendo ser de concreto ou aço, ao passo que em (b) está representado o  $CG$  único para uma viga associada à laje, usando a inércia de seção  $T$  e considerando a largura da laje. Desta forma, segundo Klisnky (1999), é possível colocar a viga e a laje num mesmo plano. Para isto pode-se aplicar a teoria dos eixos paralelos.

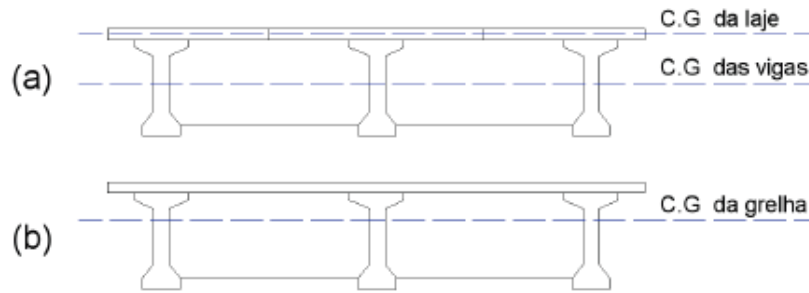


Figura A.3 – a) Excentricidade entre os C.G.da viga e laje; b) C.G coincidentes (Souza,2015).

### A.1.2 Rigidez à torção das barras da grelha

A determinação do parâmetro de rigidez à torção  $G.I_P$ . é obtida pelo módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) do material, que pode ser medida ou calculada, em função do módulo de elasticidade longitudinal ( $E_C$ ) e pelo momento de inércia à torção da seção transversal da barra ( $I_P$ ).

A determinação do módulo de elasticidade transversal segundo a lei de Hooke, para materiais isotrópicos homogêneos, é definida pela equação (A.4), descrita a seguir:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (\text{A.4})$$

Onde:

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal;

$\nu$  é o Coeficiente de Poisson.

A NBR 6118 (2014) fixa o valor do Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Para este trabalho os valores quando necessários foram calculados pela equação (A.4). O momento de inércia à torção ( $I$ ) da seção transversal não é simplesmente uma propriedade geométrica da barra, como é o momento de inércia à flexão ( $I$ ) (Hambly 1976, Coelho 2000 e Stramandinoli 2003). Para o caso de um retângulo de lados  $b$  e  $h$ , por exemplo, o  $I_P$  pode ser calculado da seguinte forma pelas equações (A.5) (Gere e Weaver 1980):

$$I_P = \beta \cdot h \cdot b^3 \quad (\text{A.5})$$

Sendo:

$b$  a menor dimensão da seção transversal;

$h$  a maior dimensão da seção transversal.

Para  $\beta$  é proposta a equação (A.6):

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{b}{h}\right) \cdot \left(1 - \frac{b^4}{12 \cdot h^4}\right) \quad (\text{A.6})$$

Segundo Coelho (2000), a equação exposta para determinação de  $\beta$  é, na verdade, uma simplificação de uma série, podendo ser visto em Timonshenko (1959).

## APÊNDICE B - CENTRO ELÁSTICO PARA ESTRUTURA TRANSVERSAL DAS PONTES PELOS MÉTODOS ANALÍTICOS

Assumindo um comportamento linear para a estrutura da grelha, no que diz respeito à absorção e transmissão de cargas verticais, podem ser modeladas por molas lineares, como mostrado na Figura B.1.

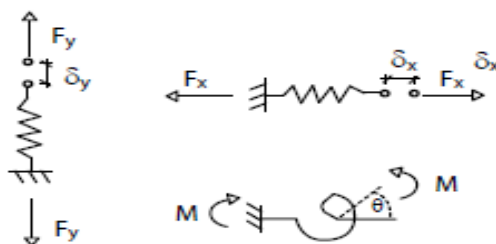


Figura B.1 - Molas com comportamento linear (Fonte: Ellwanger, 2005).

Desta forma, são válidas as seguintes relações entre deslocamentos e reações nas bases das molas:

$$F_x = K_x \cdot \delta_x \quad ; \quad F_y = K_y \cdot \delta_y \quad ; \quad M = K_r \cdot \theta \quad (B.1)$$

Onde:  $K_i$  e  $K_r$  são, respectivamente, a rigidez à flexão da longarina e a rigidez à torção de uma transversina.

Para Sussekind (1980), uma mola fica definida, numericamente, pela constante  $k$ , assim chamada de constante de mola, que representa a razão entre a força aplicada na mola e a deformação nela produzida por esta força (razão esta constante, pois estamos no regime elástico). É fundamental, na análise da estrutura de uma ponte em grelha formada de transversinas e longarinas, a determinação das parcelas de distribuição do carregamento vertical entre as longarinas, assumido o comportamento das transversinas como estruturas rígidas, em seu plano. As transversinas estão vinculadas horizontalmente por meio de molas que representam as longarinas, como pode ser observado na Figura B.2.

Aplicada uma carga vertical qualquer, a mesma causará o surgimento de reações nessas molas; invertendo-se o sinal das mesmas, obtêm-se as parcelas de distribuição da carga entre as referidas estruturas.

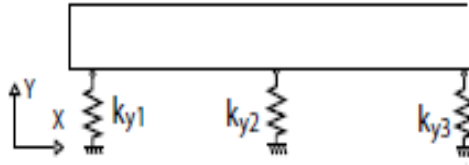


Figura B.2 - Transversina rígida vinculada por molas. (Ellwanger, 2005).

A condição assumida, de a transversina ser indeformável em seu respectivo plano, implica que possa ter somente movimentos de corpo rígido. Assim, conforme mostrado na Figura B.3, todos os pontos da transversina sofrerão a mesma rotação  $\theta$ ; além disto, conhecidos os deslocamentos  $\delta_{xA}$  e  $\delta_{yA}$  de um ponto A de referência, podem-se determinar os deslocamentos de um ponto qualquer P da transversina ( $\delta_{xP}$  e  $\delta_{yP}$ ) em função de  $\delta_{xA}$  e  $\delta_{yA}$ , e das coordenadas de A ( $x_A, y_A$ ) e de P ( $x_P, y_P$ ), através das seguintes expressões:

$$\delta_{xP} = \delta_{xA} - (y_P - y_A)tg\theta \approx \delta_{xA} - \theta(y_P - y_A) \quad (B.2)$$

$$\delta_{yP} = \delta_{yA} - (x_P - x_A)tg\theta \approx \delta_{yA} - \theta(x_P - x_A) \quad (B.3)$$

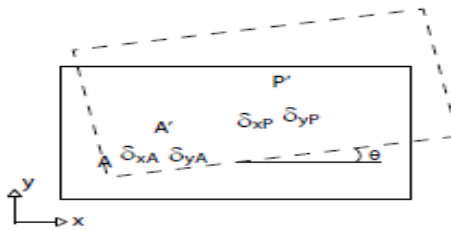


Figura B.3 – Deslocamento em função da transversina rígida. (Ellwanger, 2005).

Assim, o centro elástico é definido segundo Ellwanger (2005), como sendo a translação de um ponto dentro do seu plano, provocado por qualquer força cuja reta de ação passe por esse ponto de translação, sem provocar rotação ao sistema, e aplicando este conceito ao sistema da Figura B.2, seja uma força  $F_y$  (direção y) cuja reta de ação contém o centro elástico (CE), conforme mostra na Figura B.4. De acordo com o conceito recém-exposto, a atuação de  $F_y$  provocará no sistema somente uma translação de corpo rígido  $\delta_y$  na direção da própria força. Estão representadas na Figura B.4 as molas com rigidez  $K_i$ , as quais, em consequência da condição rígida da transversina, terão todas as mesmas deformações  $\delta_y$ . De acordo com Stuchi, 2006, a reação em cada uma delas será:

$$F_y = K_{yi} \cdot \delta_y \quad (B.4)$$



Estabelecendo a condição de equilíbrio de forças na direção  $y$  e aplicando a equação (B.4), obtém-se:

$$F_i = \sum_{i=1}^n F_{yi} = \delta_y \sum_{i=1}^n K_{yi} \quad (\text{B.5})$$

O deslocamento  $\delta_y$  provocado por uma força  $F_y$  passando pelo centro elástico, é expresso por:

$$\delta_y = \frac{F_y}{\sum_{i=1}^n K_{yi}} \quad (\text{B.6})$$

Substituindo a expressão (B.6) em (B.5), obtém-se a expressão de reação em uma mola  $i$ :

$$F_{yi} = \frac{F_y K_{yi}}{\sum_{i=1}^n K_{yi}} \quad (\text{B.7})$$

A coordenada  $X_0$  centro elástico pode ser determinada estabelecendo-se o equilíbrio de momentos das forças mostradas na Figura B.4, em relação à origem do sistema de eixos  $x - y$ , e aplicando-se a equação (B.7):

$$F_y \cdot X_0 = \sum_{i=1}^n (F_{yi} \cdot X_i) = \frac{\sum_{i=1}^n F_y K_{yi} X_i}{\sum_{i=1}^n K_{yi}} \cdot X_i = \frac{F_y (\sum_{i=1}^n F_{yi} \cdot X_i)}{\sum_{i=1}^n K_{yi}} \quad (\text{B.8})$$

Isolando o  $X_0$ :

$$X_0 = \frac{\sum_{i=1}^n K_{yi} X_i}{\sum_{i=1}^n K_{yi}} \quad (\text{B.9})$$

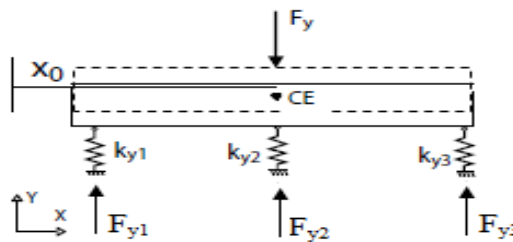


Figura B.4 - Efeito de uma força com reta de ação. (Adaptado de Ellwanger, 2005).

Para uma carga momento  $M$  (contida no plano  $x - y$ ) atuar no sistema da Figura B.2, este sofrerá uma rotação na mesma direção do momento aplicado. Aplicando o conceito de centro elástico e a não atuação de forças externas, conclui-se que o centro elástico não terá

nenhuma translação. Todo o sistema gira de um ângulo  $\theta$ , em torno do centro de elasticidade  $CE$ , conforme se pode observar na Figura B.5.

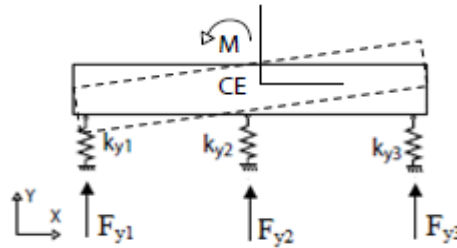


Figura B.5 - Carga momento  $M$ , causando uma rotação no sistema. (Adaptado de Ellwanger, 2005).

Quando a carga estiver atuando fora do centro elástico, o problema pode ser tratado com uma superposição de dois efeitos: Carga aplicada no centro elástico e atuação de um momento, igual ao produto da carga pela respectiva excentricidade em relação a  $CE$ .

A Figura B.6 mostra a deformação de uma viga rígida sobre apoios elásticos, devido à carga excêntrica em relação ao centros elásticos (rigidezes) das molas.

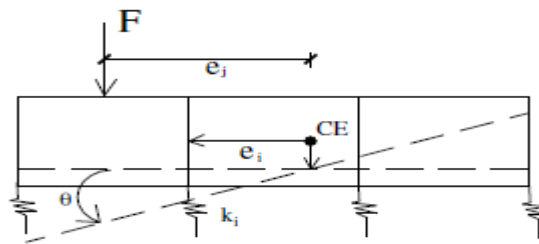


Figura B.6 - Excentricidade de uma carga aplicada na viga rígida. (Stucchi, 2006).

Pode-se considerar:

$$\delta_i = \delta + \theta \cdot e_i \quad (\text{B.10})$$

$$F_i = K_i \cdot \delta_i = K_i(\delta + \theta \cdot e_i) \quad (\text{B.11})$$

Onde:  $\delta$  é o deslocamento total da estrutura,  $\theta$  o ângulo de rotação e  $e_i$  é excentricidade da carga em relação ao centro elástico.

Para o sistema as duas equações de equilíbrio são necessárias:

$$\left[ \begin{array}{l} F = \sum_{i=1}^n F_i \\ F \cdot e_j = \sum_{i=1}^n F_i \cdot e_i \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

$$(\text{B.13})$$

Substituindo as expressões (B.10) e (B.11) nas expressões (B.12) e (B.13), resulta nas expressões:

$$\left[ \begin{array}{l} F = \sum_{i=1}^n K_i(\delta + \theta e_i) \\ F \cdot e_j = \sum_{i=1}^n K_i \cdot e_i(\delta + \theta e_i) \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} F = \delta \sum_{i=1}^n K_i + \theta \sum_{i=1}^n K_i \cdot e_i = \delta \sum_{i=1}^n K_i \quad (B.14) \\ F \cdot e_j = \delta \sum_{i=1}^n K_i \cdot e_i + \theta \sum_{i=1}^n K_i \cdot e_i^2 = \theta \sum_{i=1}^n K_i \cdot e_i^2 \quad (B.15) \end{array} \right.$$

Sendo por referência do centro elástico (*CE*) o produto da somatória de  $K_i$  pela  $e_i$  igual à zero, tem-se por definição:

$$\delta = \frac{F}{\sum_{i=1}^n K_i} \quad (B.16)$$

$$\theta = \frac{F \cdot e_j}{\sum_{i=1}^n K_i \cdot e_i^2} \quad (B.17)$$

## APÊNDICE C - CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE DISTRIBUIÇÃO DA RIGIDEZ EM DUAS VIGAS EM GRELHAS

As grelhas podem ser consideradas como o elemento mais comum utilizado em estruturas de pontes, sendo elas de concreto ou estrutura mista. Calcular, dimensionar e detalhar grelhas tem sido problema relevante, especialmente na área de projetos.

Segundo Sussekind (1983), a definição de uma grelha se dá a uma estrutura plana submetida a carregamento perpendicular a seu plano. O plano de ação da grelha seja o plano  $xy$ , será regido pelas três equações da Estática  $\Sigma Z = 0$ ,  $\Sigma M_x = 0$  e  $\Sigma M_y = 0$ . Em conceito geral, a grelha é uma estrutura reticulada plana submetida a carregamentos perpendiculares ao seu plano de forma que todas as barras, e os nós estão contidos no mesmo plano. Na construção civil, este tipo de sistema estrutural é composto por um sistema de vigas, perpendiculares ou não entre si, que se interceptam, estando interligadas nos pontos de interseção. Para Coelho (2000), os esforços de flexão tendem a predominar na análise, sendo os efeitos de torção secundários na análise de grelhas, porém importantes. Considerando as duas vigas  $AB$  e  $CD$  contidas no plano horizontal  $XY$ , tendo o ponto  $G$  em comum com uma carga concentrada  $P$ , atuando sobre o nó, as duas vigas constituem uma grelha uma vez Hiperestática existindo seis reações de apoio,  $V_A, H_A, V_B, V_C, H_C$ , e  $V_D$ . São necessárias cinco equações de equilíbrio da estática para cálculo dessas reações, a saber:

$$\Sigma V = 0 ; \Sigma H_x = 0 ; \Sigma H_y = 0 ; \Sigma M_x = 0 ; \Sigma M_y = 0. \quad (C.18)$$

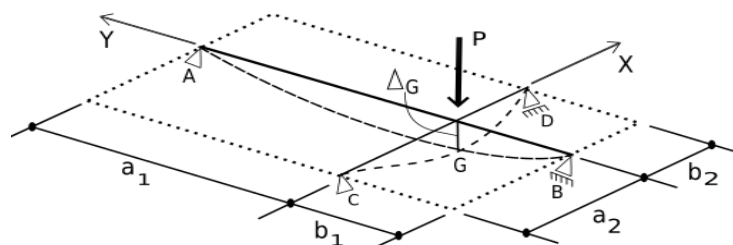


Figura C.1 - Detalhamento de aplicação da carga na grelha de duas vigas (Adaptado de Stucchi, 2006).

Na Figura C.1 a carga  $P$  é aplicada no nó da estrutura provocando um deslocamento simultâneo das vigas. A formulação para o deslocamento vertical  $\Delta_G$  do ponto  $G$  é o

mesmo para as duas vigas carregadas,  $AB$  e  $CD$ . Assim, a equação adicional é uma equação de compatibilidade de deslocamento. Pode-se considerar a equação (C.2):

$$P = \omega P + \psi P \quad (C.2)$$

Sendo:

$$\omega P = P_{AC}$$

$$\psi P = P_{CD}$$

Onde:  $P_{AB}$  é a parcela da carga  $P$  absorvida pela viga  $AB$ , e  $P_{CD}$  a parcela de carga também absorvida pela viga  $AC$ .

Em estruturas isostáticas o caminhamento das cargas é definido pelas condições de equilíbrio, mas nas hiperestáticas ele sofre também influência da rigidez (Stucchi, 2006). Segundo o mesmo autor, a carga caminha predominantemente pela estrutura com maior rigidez. Na Figura C.1, sendo  $L_1 \ll L_2$  e  $I_1 = I_2 = I$ , a viga  $V_1$  é muito mais rígida transportando muito mais carga.

Para determinação da deformação da estrutura com a compatibilidade em  $G$  utiliza-se a equação (C.3) de determinação da flecha, a saber:

Para  $a \geq b$ .

$$Flecha\ x = \frac{\omega P b_1}{3EI L_1} \sqrt{\left(\frac{L_1^2 - b_1^2}{3}\right)^3} = \frac{\psi P b_2}{3EI L_2} \sqrt{\left(\frac{L_2^2 - b_2^2}{3}\right)^3} \quad (C.3)$$

Simplificando o cálculo utilizando:

$$C_1 = \sqrt{\left(\frac{L_1^2 - b_1^2}{3}\right)^3}$$

$$C_2 = \sqrt{\left(\frac{L_2^2 - b_2^2}{3}\right)^3}$$

$$\frac{\omega b_1}{L_1} C_1 = \frac{\psi b_2}{L_2} C_2 \quad (C.4)$$

Obtendo o equilíbrio vertical através da equação (C.2):

$$\begin{aligned} \omega P + \psi P &= P \\ \omega + \psi &= 1 \end{aligned} \quad (C.5)$$

Dessa forma pode-se escrever a equação (C.6):

$$\omega = \psi \frac{L_1 b_2 C_2}{L_2 b_1 C_1} \gg \gg \beta \quad \text{pois } L_2 \gg L_1 \quad (\text{C.6})$$

Sendo  $\omega$  e  $\psi$  os coeficientes de distribuição onde a rigidez a flexão ( $K$ ) apresenta a equação (C.2). Obtêm-se as equações (C.7) e (C.8).

$$\omega = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \quad (\text{C.7})$$

$$\psi = \frac{K_2}{K_1 + K_2} \quad (\text{C.8})$$

Para a viga  $V_1$ , por ser mais rígida, a proporção de cargas transportadas é a proporção da rigidez apresentado na equação (C.9):

$$\frac{\omega}{\psi} = \frac{K_1}{K_2} \quad (\text{C.9})$$

Da equação (C.3) têm-se  $\Delta_G$  para cada viga:

$$\Delta_G = \frac{\omega P b_1}{3EIL_1} \sqrt{\left(\frac{L_1^2 - b_1^2}{3}\right)^3} \quad (\text{C.10})$$

$$\Delta_G = \frac{\omega P b_2}{3EIL_2} \sqrt{\left(\frac{L_2^2 - b_2^2}{3}\right)^3} \quad (\text{C.11})$$

Igualando as equações (C.10) e (C.11) obtém-se a equação (C.12):

$$\Delta_G = \frac{\omega P b_1}{3EIL_1} \sqrt{\left(\frac{L_1^2 - b_1^2}{3}\right)^3} = \frac{\omega P b_2}{3EIL_2} \sqrt{\left(\frac{L_2^2 - b_2^2}{3}\right)^3} \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{\omega P b_1}{3EIL_1} C_1 = \frac{\omega P b_2}{3EIL_2} C_2$$

$$\omega P \cdot b_1 \cdot C_1 \cdot I_{AB} \cdot L_2 = (P - \omega P) \cdot b_2 \cdot C_2 \cdot I_{CD} \cdot L_1$$

Isolando as variáveis podem ser obtidas as parcelas de cargas absorvida por cada viga pelas equações (C.13) e (C.14):

$$\omega P = \frac{P \cdot b_2 \cdot C_2 \cdot I_{CD} \cdot L_1}{b_1 \cdot C_1 \cdot I_{AB} \cdot L_2 + b_2 \cdot C_2 \cdot I_{CD} \cdot L_1} \quad (\text{C.13})$$

$$\psi P = \frac{P \cdot b_1 \cdot C_1 \cdot I_{AB} \cdot L_2}{b_1 \cdot C_1 \cdot I_{AB} \cdot L_2 + b_2 \cdot C_2 \cdot I_{CD} \cdot L_1} \quad (\text{C.14})$$

## **APÊNDICE D - NOÇÕES GERAIS SOBRE A TEORIA DAS LAJES ORTÓTROPAS**

Ao realizar o estudo teórico das lajes é admitido, em geral, que a espessura da laje é constante e pequena em relação às demais dimensões. Nas lajes isótropas, assim consideradas um ente mais geral, suas deformações são puramente elásticas e pequenas, em relação à espessura e se aplica a Lei de Hook. A laje anisótropa, no caso particular em que as direções, partindo de pontos situados na superfície média da laje, deslocam-se normalmente e somente na mesma. Pontos alinhados segundo uma normal à superfície média da laje indeformada, encontram-se também linearmente dispostos em uma normal à superfície média na configuração deformada (San Martin, 1981).

Segundo Gonzalez (1997), as lajes isótropas são assim denominadas por apresentarem a mesma resistência à flexão em quaisquer direções, em seu plano. Caso as lajes não apresentem a mesma resistência à flexão, em qualquer direção que seja considerada, estas são denominadas anisótropas. No caso particular, em que as direções aludidas são duas e ortogonalmente dispostas no plano médio da laje, esta toma a denominação de laje ortogonal-anisótropa ou, simplesmente, laje ortótropa (San Martin, 1981). A ortotropia assim conceituada pode ocorrer da laje ser diferentemente armada, ou ter suas nervuras ou rigidezes desiguais, segundo duas direções ortogonais.