

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

DANIEL DOURADO DE ARAGÃO SANTOS

**Abordagens hamiltoniana e vlasoviana
dos efeitos da interação onda-partícula
em plasmas não colisionais**

Brasília
Dezembro de 2016

DANIEL DOURADO DE ARAGÃO SANTOS

Abordagens hamiltoniana e vlasoviana dos efeitos da interação onda-partícula em plasmas não colisionais

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física de Plasmas.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Amato

Coorientador: Prof. Dr. Yves Elskens

Brasília
Dezembro de 2016

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Marco Amato, pela paciência e dedicação. Muito obrigado pela confiança e pela orientação de caminhos fundamentais para minha formação acadêmica e para o desenvolvimento desta tese.

Agradeço ao meu co-orientador Yves Elskens pelo empenho na minha orientação durante o período em Marselha. Obrigado pelas oportunidades de aprendizado e por ter contribuído de forma definitiva na minha formação como pesquisador.

Agradeço ao colega Bruno pelas várias discussões e sugestões ao longo da minha formação acadêmica e pela disponibilidade e dedicação em ajudar. Ao colega Luciano por ter compartilhado da experiência de um estágio no exterior e pelas contribuições para a realização deste trabalho.

Aos colegas Natália e Paulo minhas sinceras gratidões pelos momentos de trabalho e diversão juntos. Um muito obrigado aos colegas Carlos, Cíntia, Chris, João, Igor, Lilah, Moisés, Solano, Márcia, Everton, Rodrigo, Lydiane, Neymar e José por compartilharem momentos de estudo e descontração. Aos colegas em Marselha Paulo, Meirielen, Alberto, Natalia e Kostian por compartilharem a experiência de um período acadêmico no exterior e pelos momentos de diversão.

Aos meus pais Cecília e Joaquim agradeço as oportunidades e o incentivo. Obrigado pela dedicação incondicional que sempre tiveram por mim e por terem me ensinado a perseverar nos meus sonhos. À minha irmã Pricila agradeço pelos momentos de brincadeiras e de amizade verdadeira, pelo carinho e atenção de sempre.

À minha namorada e parceira Thiene por ter sempre me incentivado e me apoiado, por me trazer conforto e serenidade. Obrigado por compartilhar sonhos comigo e por estarmos juntos em busca deles.

Meus muito obrigado aos amigos da canoagem Baju e Olivier pelos momentos de descontração nos finais de semana. Minha gratidão ao pessoal do clube de canoagem oceânica CNPRS pelo acolhimento e aprendizagem.

Agradeço ao CNPq pela concessão da bolsa de doutorado e à CAPES pela concessão da bolsa de doutorado sanduíche no exterior.

“Given the restless mind and imagination of man, what else must follow but to dream of reaching the Moon.”

Isaac Asimov

Resumo

Santos, Daniel. **Abordagens hamiltoniana e vlasoviana dos efeitos da interação onda-partícula em plasmas não colisionais**. Brasília, Dezembro de 2016. 127p. Tese de Doutorado. Instituto de Física, Universidade de Brasília.

Nesse trabalho investigamos os efeitos da interação feixe-plasma por meio de um modelo hamiltoniano para um sistema composto de N partículas eletrostaticamente acopladas a uma onda.

A discretização do sistema em feixes monocinéticos permite fazer uma abordagem perturbativa do problema e destacar importantes conexões entre as formulações hamiltoniana e vlasoviana. Por meio de resultados numéricos, mostramos que tanto o amortecimento como a amplificação de Landau surgem como consequência de um processo de *phase mixing* dos vários modos normais do sistema linearizado. Observamos que esse mecanismo possui características distintas dependendo se o sistema é estável ou instável. Os resultados obtidos para sistemas de muitos graus de liberdade foram possíveis graças ao desenvolvimento de uma nova técnica para obtenção de raízes complexas.

Implementamos simulações de Vlasov via método semi-lagrangiano e descrevemos o processo de relaxação não colisional da distribuição de velocidades das partículas ressonantes e a evolução da intensidade da onda. Analisamos o espectro dos modos não amortecidos em plasmas livres quando se assume uma distribuição de velocidades estacionária com um pequeno (e suave) *plateau* nas vizinhanças da velocidade de fase da onda. Verificamos que essas oscilações são bastante sensíveis à forma do *plateau* principalmente quando possuem velocidades de fase próximas à velocidade térmica das partículas.

Investigamos também, por meio do cálculo da função dielétrica, as modificações na relação de dispersão dos modos eletrostáticos em plasmas livres e plasmas magnetizados sujeitos a campo externo de radiação. Os cálculos são feitos com base em um modelo semiclássico, em que elétrons são descritos quanticamente e os campos classicamente.

Palavras-chave

Hamiltoniana onda-partícula, *Phase mixing*, Amortecimento/amplificação de Landau, Relaxação não colisional, Função dielétrica

Abstract

Santos, Daniel. **Hamiltonian and vlasovian approaches of the effects of the wave-particle interaction in collisionless plasmas**. Brasília, Dezembro de 2016. 127p. PhD. Thesis. Instituto de Física, Universidade de Brasília.

In this work we discuss the effects of the beam-plasma interaction by means of a hamiltonian model for a system composed of N particles electrostatically coupled to a single wave.

The discretization of the system in monokinetic beams allows us to use a perturbative approach of the problem and highlight important connections between the hamiltonian and vlasovian formulations. By means of numerical calculations, we show that both Landau damping and growth emerge due to a phase mixing mechanism that involves many normal modes of the linearized system. We observe that this mechanism exhibits a distinct behavior depending on whether the system is stable or unstable. For systems with many degrees of freedom, the results obtained were possible due to the development of a new root-finding technique in the complex plane.

Using vlasovian simulations via semi-Lagrangian scheme we describe the process of collisionless relaxation of the velocity distribution for the resonant particles and the evolution of the wave intensity. We analyse the spectrum of undamped modes in free plasmas when one assumes a stationary velocity distribution with a small (and smooth) plateau centred on the wave phase speed. We find that these oscillations are quite sensitive to the shape of the plateau, mainly for those that have velocities close to the thermal particle velocity.

We also investigate, using a semiclassical approach, the modifications in the dispersion relation of the electrostatic modes in free and magnetized plasmas subjected to external radiation field.

Keywords

Wave-particle hamiltonian, Phase mixing, Landau damping/growth, Collisionless relaxation, Dielectric function

Sumário

Lista de Figuras	8
1 Introdução	10
1.1 Motivação	10
1.2 Fundamentos da Física de plasmas	12
1.2.1 Neutralidade macroscópica	12
1.2.2 Comportamento coletivo e a frequência de Plasma	15
1.2.3 Parâmetros de Plasma	15
1.3 Estrutura da Tese	16
2 Abordagem cinética não colisional	18
2.1 Função de distribuição de uma partícula	18
2.2 Descrição linear das oscilações eletrostáticas em plasmas livres	19
2.2.1 Propagação de ondas eletrostáticas	24
2.2.2 Teoria de Landau do amortecimento das ondas de Langmuir	25
2.3 Descrição linear para plasmas magnetizados	28
2.3.1 Modos de Bernstein	35
2.4 Modos coletivos na presença de campo de radiação	36
3 Efeitos não lineares decorrentes do aprisionamento de partículas	40
3.1 Rederivando o amortecimento de Landau por meio de um modelo mecânico simples	40
3.1.1 Conservação do momento total	45
3.2 Teoria Quase-Linear	46
3.2.1 Relaxação quase-linear	51
3.3 Método semi-lagrangiano para simulações numéricas	52
3.3.1 Equação de Liouville	53
3.3.2 Solução aproximada da equação de Liouville	54
3.3.3 Evolução $\Theta^{approx.}(\Delta t)$ das posições e momentos	55
3.3.4 Evolução da função de distribuição de uma partícula	56
3.3.5 Procedimento de interpolação	57
3.3.6 Exemplo teste: pêndulo não linear	58
4 Dinâmica do sistema de feixes monocinéticos e uma onda de Langmuir	60
4.1 O modelo hamiltoniano onda-partícula	60
4.1.1 Definição do estado de equilíbrio	61
4.1.2 Equações de movimento linearizadas	63
4.1.3 Soluções balísticas	64
4.1.4 Soluções tipo onda	65
4.1.5 Expansão em modos normais	69

4.2	O mecanismo de <i>phase mixing</i> e o amortecimento/amplificação de Landau	71
4.2.1	Espectra e fator de escala	72
4.2.2	Evolução de começo tranquilo	74
5	Relaxação não colisional e ondas eletrostáticas não amortecidas	79
5.1	Equação de Vlasov para o sistema onda-partícula	79
5.1.1	Separatriz e frequência de aprisionamento	81
5.1.2	Passos do integrador	82
5.2	Resultados da simulação	84
5.2.1	Inicialização com uma distribuição constante (<i>waterbag</i>)	84
5.2.2	Inicialização com uma distribuição normal nos momentos	86
5.3	Modelagem do plateau e a relação de dispersão	89
5.3.1	Espectro dos <i>corner modes</i>	90
5.4	Modos EAW e LAN na presença de campo externo	92
6	Considerações finais e perspectivas	95
	Referências Bibliográficas	98
A	Método da biseção no plano complexo via teorema de Cauchy	105
B	Códigos referentes à simulação de Vlasov do pêndulo não linear	108
C	Obtenção da função dielétrica de um plasma livre sujeito à radiação externa	113
D	Obtenção da função dielétrica de um plasma magnetizado sujeito à radiação externa	120

Lista de Figuras

1.1	Desenho esquemático da blindagem de Debye	13
2.1	Contorno de integração no plano complexo ν de acordo com a prescrição de Landau	26
2.2	Relação de dispersão dos modos longitudinais de um plasma magnetizado em regime quase-ressonante $\bar{\omega}_r \rightarrow 1$. Os gráficos correspondem a modos associados a processos envolvendo diferentes números de fótons do campo de radiação para os quatro primeiros <i>branches</i> .	37
2.3	Novas assíntotas da função dielétrica para plasmas magnetizados sujeitos a campo externo de radiação no regime não ressonante ($\omega_r \neq \omega_c$).	38
2.4	Relação de dispersão para plasmas magnetizados na presença de campo externo para diferentes valores da frequência da radiação em regime não ressonante.	39
3.1	Comportamento do valor médio da variação da velocidade da partícula com sua velocidade inicial u relativa à onda. Observamos nessa figura o padrão de sincronização onda-partícula.	43
3.2	Retrato de fase da função de distribuição do pêndulo não linear em regime confinado ($-\pi < x < \pi$) para malhas numéricas de (a) 128×128 pontos (b) 256×256 pontos.	58
4.1	Desenho ilustrativo de feixes monocinéticos para o caso de uma distribuição de velocidade com inclinação negativa.	62
4.2	Ilustração de uma possível configuração para um sistema composto por uma onda com frequência natural ω_0 e dez feixes monocinéticos. As velocidades dos feixes $v_s = v_1 + (s - 1)\Delta p$ são distribuídas em torno da velocidade de fase da onda ω_0/k . (a) Distribuição de velocidades das partículas, dada por $f(v_s) = f(v_1) + (s - 1)\Delta p f'$ no intervalo $I_v = [v_1 - \Delta p/2, v_b + \Delta p/2]$ e fixada em zero fora desse intervalo. (b) Representação gráfica da relação de dispersão (4.1.36) por meio da linha $y = \omega - \omega_0$ e da curva $y = \chi(\omega) \equiv (\epsilon^2/2) \sum_s (\omega - kv_s)^{-2} N_s$. O ponto intercepto situa a única solução puramente real dessa equação.	67
4.3	Análogos discretos das frequência de van Kampen no plano complexo para o caso estável; fase do fator de escala e seu módulo em escala logarítmica.	72
4.4	“Distância” média das autofrequências de van Kampen em relação ao eixo real em função do espaçamento entre os feixes.	73

4.5	Comportamento do módulo e da fase do fator de escala para diferentes quantidades de feixes monocinéticos; Espectro das autofrequências de van Kampen para sistemas de 100, 500 e 2000 feixes.	75
4.6	Evolução das componentes real e imaginária dos modos b_L e b_L^* e da superposição dos modos de van Kampen para um sistema de 2000 feixes.	76
4.7	Evolução da intensidade da onda para sistemas compostos por 30, 50 e 200 feixes para os casos estável e instável.	77
4.8	Ilustração do mecanismo de <i>phase mixing</i> por meio da representação no plano complexo das contribuições espectrais para a amplitude da onda.	78
5.1	Retrato de fase da função de distribuição para o modelo onda-partícula para uma distribuição inicial do tipo <i>waterbag</i> . A curva em azul representa a separatriz desse modelo.	85
5.2	Erros relativos da norma e da energia total do sistema.	86
5.3	Processo de relaxação não colisional da função de distribuição dos momentos para $t = 0, 2.0, 2.7, 4.0, 8.0, 9.3, 10.5, 26.9, 37.9$ (em unidades de τ_B) em uma malha de 512×512 .	87
5.4	Evolução não linear da intensidade da onda em escala logarítmica. O tempo é reescalado pelo período de aprisionamento $\tau_B = (\epsilon k Z(0))^{-1/2}$.	88
5.5	Distribuição de velocidades ligeiramente diferente de uma maxwelliana (devido a um achatamento nas vizinhanças da velocidade de fase da onda) e as alterações na função dielétrica resultantes da presença do <i>plateau</i> .	90
5.6	Duas modelagens distintas para o <i>plateau</i> e as modificações resultantes no espectro dos <i>corner modes</i> .	91
5.7	Função dielétrica para um plasma livre na presença de um campo eletromagnético externo para (a) diferentes números de fótons e para (b) diferentes magnitudes do campo de radiação.	93
5.8	Gráfico $\omega \times k$ para os modos coletivos longitudinais de um plasma sujeito a campo eletromagnético externo.	94
A.1	Ilustração do método da bisecção no plano complexo σ supondo uma raiz localizada à direita da linha correspondente ao s -ésimo feixe. Os triângulos sombreados destacam as regiões em que a integral de contorno não se anula e, conseqüentemente, possui uma raiz.	105

Introdução

1.1 Motivação

As oscilações eletrônicas em gases ionizados têm sido, desde sua observação experimental [1] (remontando às origens dos estudos de tais sistemas) objeto de pesquisa em inúmeros trabalhos que contribuíram para o estabelecimento de conceitos fundamentais em Física de Plasmas.

A fim de capturar diferentes aspectos da complexidade da dinâmica desse sistema, várias formulações foram desenvolvidas: desde as abordagens pioneiras hidrodinâmica [1, 2] e cinética [3, 4, 5] até modelos quânticos [6, 7], que se mostraram uma ferramenta bastante poderosa para o estudo dos efeitos de campos eletromagnéticos externos [8, 9, 10] sobre as propriedades dielétricas e as oscilações coletivas dos plasmas.

Nas últimas décadas, a interação das oscilações eletrônicas (ondas de Langmuir) com as partículas ressonantes ¹ do plasma é um tema que tem atraído bastante atenção. Em 1971 O'Neil, Winfrey e Malberg propuseram um modelo específico para o estudo da interação feixe-plasma [11] abrindo caminho para as primeiras simulações computacionais nesse tópico [12]. Esse modelo é revisitado e rederivado no contexto hamiltoniano [13, 14, 15], em que a dinâmica da onda e das partículas ressonantes é colocada em pé de igualdade por meio de variáveis canonicamente conjugadas. A abordagem hamiltoniana mostrou-se bastante frutífera para o estudo da interação feixe-plasma tanto do ponto de vista da análise de dados experimentais [16] quanto do ponto de vista teórico por meio de resultados analíticos [17, 18] e de simulações numéricas [19, 20, 21].

Podemos destacar o trabalho de L. D. Landau [4] em 1946 como um marco para o início dos estudos sobre interação feixe-plasma. Por meio de uma abordagem vlasoviana linear, Landau demonstrou que para uma distribuição de velocidades de equilíbrio do tipo Maxwell-Boltzmann as oscilações de Langmuir são atenuadas exponencialmente no tempo qualquer que seja a condição inicial. Esse fenômeno hoje conhecido como amortecimento de Landau, cuja taxa de decaimento é usualmente denotada por γ_L ,

¹Partículas do plasma que viajam com velocidade próxima à velocidade de fase da onda.

constitui um dos conceitos mais fundamentais em Física de Plasmas. Apesar de ser um problema antigo, o amortecimento de Landau é ainda hoje intensivamente investigado experimentalmente [22] e teoricamente [23, 24, 25, 26, 27, 28] com novos aspectos e pontos de vista sendo ainda explorados.

Nos anos seguintes às predições de Landau, houve vários questionamentos acerca do mecanismo físico responsável por essa atenuação. Fenômenos dissipativos em gases estão normalmente relacionados às colisões entre as partículas, porém isso não vem ao caso no contexto de Vlasov. Uma abordagem com maior intuição física para o amortecimento das ondas de Langmuir foi elaborada por J. M. Dawson [29] em 1961, que explicou o fenômeno como resultado de um mecanismo ressonante de transferência de energia (e momento) entre onda e partículas. O amortecimento de Landau foi completamente reconhecido após sua observação experimental em 1964 por Malmberg e Wharton [30].

Por não levar em consideração efeitos não lineares na equação de Vlasov, a teoria de Landau possui um limite temporal de validade expresso como $t \ll \tau_B$, onde τ_B representa o período de aprisionamento das partículas no poço de potencial da onda. As não linearidades decorrentes desse aprisionamento foram cuidadosamente estudadas na referência [31]. Nesse trabalho, T. O'Neil resolve analiticamente a equação de Vlasov para as partículas ressonantes por meio de funções elípticas e generaliza o cálculo do fator gama de Landau mostrando que a taxa de amortecimento tende à γ_L quando $t \ll \tau_B$, porém vai a zero quando $t/\tau_B \rightarrow \infty$.

A diminuição no módulo do coeficiente de amortecimento com o tempo é acompanhada pela relaxação da função distribuição de equilíbrio dos elétrons (formação de um *plateau*) nas vizinhanças da velocidade de fase da onda. Esse processo é conhecido como *relaxação quase-linear* e foi pioneiramente estabelecido em 1961 por Vedenov, Velikhov e Sagdeev [32] e de forma independente por Drummond e Pines [33]. A formação do *plateau* na distribuição de velocidades dos elétrons foi observada experimentalmente em 1971 e reportada na referência [34]. Equações de difusão com base nas aproximações da teoria quase-linear são obtidas também em outros contextos além da Física de Plasmas [35].

O propósito principal da presente tese é investigar os mecanismos associados ao amortecimento de Landau tanto no regime linear, em que efeitos de aprisionamento podem ser negligenciados, quanto no regime não linear em que notórias distorções na distribuição de equilíbrio dos elétrons são observadas. Pra isso, consideramos o modelo hamiltoniano proposto em [14, 15] que é resolvido em termos de uma expansão em modos normais [18, 36] no regime $t \ll \tau_B$ e por meio de simulações de Vlasov para tempos da ordem ou maiores que o período de aprisionamento das partículas. Investigamos o espectro das oscilações não amortecidas em plasmas livres quando introduzimos uma

distribuição de velocidades estacionária ligeiramente diferente de uma maxwelliana. Estudamos também o efeito da presença de um campo externo de radiação sobre as oscilações eletrônicas em plasmas livres e plasmas magnetizados [37, 38].

1.2 Fundamentos da Física de plasmas

Um plasma é essencialmente um gás composto de elétrons e átomos ionizados ou moléculas interagindo eletromagneticamente e que se caracteriza por dois aspectos fundamentais: a neutralidade macroscópica e o comportamento coletivo devido às forças coulombianas de longo alcance.

Durante o ano de 1929, Tonks e Langmuir observaram experimentalmente a existência de oscilações eletrônicas em gases ionizados a baixas pressões [1]. Verificaram ainda que essas variações elétricas eram tão rápidas (ca. 10^9 s^{-1}) que os íons, em razão de sua maior inércia, permaneciam praticamente fixos. Neste mesmo ano eles introduziram o termo *plasma* para se referir à porção do gás com densidades elevadas e aproximadamente iguais de íons e elétrons onde essas oscilações eram observadas. Surgia assim uma nova área da Física, conhecida hoje como Física de Plasmas.

1.2.1 Neutralidade macroscópica

Na ausência de campos externos e em um volume pequeno comparado com o comprimento característico de variação de parâmetros macroscópicos (e.g. densidade e temperatura), porém suficientemente grande para conter um elevado número de partículas, a carga líquida total é aproximadamente nula, i. e.

$$\sum_a e_a n_a \approx 0, \quad (1.2.1)$$

onde e_a e n_a representam, respectivamente, a carga elétrica e a densidade das partículas da espécie $a = i, e$ (íons ou elétrons).

Para compreender melhor a neutralidade macroscópica do plasma expressa pela equação (1.2.1) vamos considerar o seguinte exemplo: suponha que com o intuito de gerar um campo elétrico no interior do plasma, inserimos duas esferas carregadas conectadas a uma bateria conforme ilustrado na figura 1.1.

Para restaurar a neutralidade, o plasma responde de modo a formar uma nuvem de íons em torno da esfera negativa e uma nuvem de elétrons em torno da esfera positiva. Se a agitação térmica das partículas for muito pequena comparada à energia eletrostática das esferas, deverá existir na nuvem a mesma quantidade de carga, em módulo, que há na esfera. Neste caso, a blindagem é perfeita e nenhum campo elétrico residual é observado

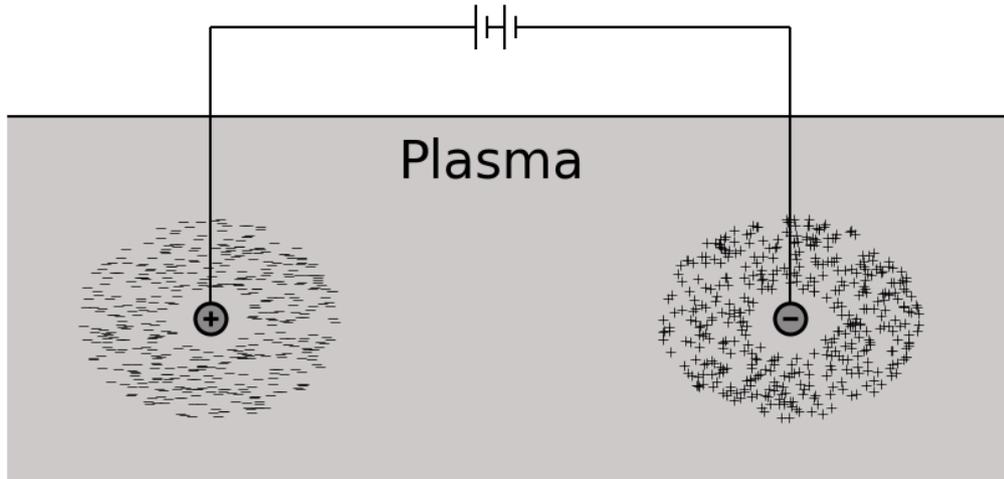


Figura 1.1: Desenho esquemático da blindagem de Debye.

fora da nuvem. Por outro lado, se a temperatura do gás for apreciável, as partículas que estiverem na borda ² da nuvem, onde o campo elétrico é fraco, possuem energia térmica suficiente para escapar do poço de potencial eletrostático. Nessa situação, a blindagem não é perfeita e potenciais da ordem de $K_B T/e$ podem penetrar no plasma, causando o aparecimento de campos elétricos.

Considerando que a esfera positiva encontra-se na origem do sistema de coordenadas e possui um potencial eletrostático ϕ_0 , o potencial nos pontos ao seu redor satisfaz a equação de Poisson, que em uma dimensão é dada por

$$\epsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = -e(n_i - n_e), \quad (1.2.2)$$

onde n_i e n_e representam, respectivamente, as densidades de íons e de elétrons.

Se assumirmos $m_i/m_e \rightarrow \infty$, então, dentro da escala de tempo do experimento, os íons não realizam movimentos significativos (aproximação de íons fixos). Dessa forma, temos que $n_i = n_0$, onde n_0 representa a densidade de partículas nas regiões distantes da esfera, livres de sua influência.

Na presença de um potencial elétrico a função de distribuição dos elétrons no equilíbrio térmico é

$$F_e(v) = n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi K_B T_e} \right)^{3/2} \exp \left[- \left(\frac{1}{2} m_e v^2 - e\phi \right) / K_B T_e \right]. \quad (1.2.3)$$

A densidade de elétrons pode ser obtida a partir da integração da função de

²Denominamos borda da nuvem a região em que a energia potencial eletrostática é aproximadamente igual a energia térmica das partículas.

distribuição sobre todas as velocidades

$$\begin{aligned} n_e &= \int_{-\infty}^{\infty} F_e(v) dv \\ &= n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{K_B T_e}\right), \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

que corresponde a uma distribuição de Boltzmann.

Substituindo a densidade de elétrons obtida em (1.2.4) na equação de Poisson, obtemos

$$\epsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = en_0 \left[\exp\left(\frac{e\phi}{K_B T_e}\right) - 1 \right]. \quad (1.2.5)$$

Expandindo a exponencial na equação acima em série de Taylor e assumindo que o potencial eletrostático é fraco o suficiente tal que podemos negligenciar os termos de ordem superior a $e\phi$ e, assim, obter

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 K_B T_e} \phi, \quad (1.2.6)$$

que admite solução dada por

$$\phi = \phi_0 \exp(-|x|/\lambda_D), \quad (1.2.7)$$

com

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 K_B T_e}{n_0 e^2} \right)^{1/2}. \quad (1.2.8)$$

A quantidade λ_D é denominada comprimento de Debye [39, 40, 41] e representa uma medida da distância a partir da qual potenciais localizados são blindados no plasma. A derivação do comprimento de Debye na equação anterior foi feita do ponto de vista de cargas testes (eletrólitos) estáticas, assim como é apresentada na maioria dos livros-textos. Uma análise mais completa, levando em consideração o movimento das partículas do plasma tem sido recentemente revisitada na referênia [42]. A partir do comprimento de Debye, podemos definir uma esfera de raio λ_D denominada *esfera de Debye* que representa a região do plasma que contém as partículas que blindam o potencial local. O número de partículas carregadas dentro da esfera é dado por

$$N_D = n_0 \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3. \quad (1.2.9)$$

As partículas dentro da esfera de Debye não sentem a presença de campos eletrostáticos gerados fora dela. Por esse motivo dizemos que o comportamento coletivo do plasma ocorre dentro dessa esfera, região onde as partículas interagem através de forças eletromagnéticas.

1.2.2 Comportamento coletivo e a frequência de Plasma

Quando um plasma experimenta uma perturbação em seu estado de equilíbrio, surgem campos autoconsistentes³ que agem sobre as partículas na tentativa de restaurar a neutralidade do sistema. Esses campos são responsáveis por colocar os elétrons em oscilação com uma frequência bem definida. Os íons, por sua vez, devido sua inércia, não têm tempo para responder aos campos oscilatórios e são considerados fixos.

Para ilustrar esse processo, vamos considerar que uma camada de elétrons de um plasma inicialmente uniforme e em repouso é deslocada, em relação a um *background* de íons fixos, pela ação de uma força externa. Quando essa influência externa é subitamente removida, o campo elétrico interno resultante do deslocamento das cargas acelera os elétrons, cuja dinâmica é dada pela equação

$$m_e \ddot{x} = -eE = -\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0} x, \quad (1.2.10)$$

onde $E = en_0 x / \epsilon_0$ é obtido a partir da lei de Gauss.

Obtemos de (1.2.10) que a dinâmica da camada de elétrons é uma oscilação harmônica com frequência

$$\omega_p = \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2}. \quad (1.2.11)$$

Essas oscilações, que estão intimamente associadas ao efeito da blindagem dos campos elétricos, são denominadas oscilações de *Langmuir* [1, 39, 40, 43] e são as mais simples que podemos observar em um plasma⁴. A frequência dessas oscilações é denominada *frequência natural de plasma* ou simplesmente *frequência de plasma*.

1.2.3 Parâmetros de Plasma

Conforme vimos anteriormente, as oscilações coletivas em um plasma estão intimamente associadas à blindagem dos campos elétricos. Essa blindagem, por sua vez, deve-se a uma distribuição de cargas em uma esfera de raio λ_D . Contudo, se as dimensões do plasma forem inferiores ao comprimento de Debye essa blindagem não será efetiva e o sistema não se comportará verdadeiramente como um plasma. Uma condição necessária para que um gás ionizado seja considerado plasma é que ele seja denso o suficiente tal que

$$\lambda_D \ll L, \quad (1.2.12)$$

³Campos gerados pelas partículas do próprio plasma.

⁴É importante ressaltar que para a derivação das oscilações de Langmuir negligenciamos a dinâmica dos íons e o movimento térmico dos elétrons.

onde L representa a dimensão do plasma.

Adicionalmente à (1.2.12) o comportamento coletivo requer ainda que haja um grande número de partículas na esfera de Debye

$$N_D \gg 1. \quad (1.2.13)$$

Se definirmos o parâmetro g como

$$g = \frac{1}{n_0 \lambda_D^3}, \quad (1.2.14)$$

a condição (1.2.13) pode ser reescrita como

$$g \ll 1. \quad (1.2.15)$$

O parâmetro g é chamado *parâmetro de plasma* e representa uma medida da razão da energia potencial média entre partículas e da energia cinética média do plasma [43, 40]. A condição (1.2.15), denominada *aproximação de plasma*, é satisfeita para um amplo intervalo de valores de densidade n_0 e temperatura T_e , o que justifica a diversidade de sistemas encontrados no estado de plasma.

Um último aspecto que deve ser observado diz respeito às colisões entre as partículas. Para que forças hidrodinâmicas comuns (forças de colisão) não determinem o comportamento do plasma, i.e. para que sua dinâmica possa ser regida pelas equações do eletromagnetismo, devemos ter

$$\omega_p \tau_c \gg 1, \quad (1.2.16)$$

onde τ_c representa o tempo médio entre colisões.

Em resumo, para que um gás ionizado possa ser classificado como um plasma os critérios (1.2.12), (1.2.15) e (1.2.16), juntamente com a condição de neutralidade (1.2.1) devem ser satisfeitos

1.3 Estrutura da Tese

No capítulo seguinte apresentamos a formulação cinética para plasmas não colisionais. A partir de uma análise linear das equações de Vlasov-Maxwell obtemos a relação de dispersão para as ondas eletrostáticas em plasmas livres e uma expressão para a taxa de decaimento ou amplificação da sua amplitude. Analisamos também sistemas magnetizados onde revisitamos os resultados da referência [44] e discutimos os principais

efeitos da presença de um campo de radiação externo sobre as oscilações eletrostáticas do plasma.

No capítulo 3 iniciamos o estudo dos efeitos não lineares em plasmas não magnetizados por meio de um modelo mecânico simples e paradigmático da interação onda-partícula. A partir desse modelo introduzimos importantes conceitos associados a esse sistema e rederivamos o amortecimento de Landau apresentado no capítulo 2 de uma forma mais intuitiva. Revisitamos a teoria quase-linear para plasmas e discutimos suas principais previsões feitas para o limite $t \rightarrow \infty$. Concluimos o capítulo apresentando o método semi-lagrangiano para resolver numericamente a equação de Vlasov no regime não linear.

No capítulo 4 apresentamos o formalismo de feixes monocinéticos para o modelo onda-partícula. Calculamos numericamente o espectro dos autovalores associados às soluções estacionárias do sistema linear e mostramos que, no regime linear, o amortecimento ou amplificação de Landau estão associados a um mecanismo de *phase mixing* de modos com diferentes velocidades de fase. Os resultados desse capítulo no regime de muitos feixes foram possíveis graças ao desenvolvimento de um método de procura de raízes no plano complexo mais bem detalhado no apêndice A.

No capítulo 5 investigamos os efeitos das não linearidades sobre a dinâmica do sistema onda-partícula. Implementamos simulações de Vlasov utilizando o método semi-lagrangiano para descrever a dinâmica da distribuição de velocidades das partículas e da amplitude da onda. Finalizamos a tese investigando os modos coletivos não amortecidos do plasma obtidos quando se assume uma distribuição de velocidades achatada nas vizinhanças da velocidade de fase da onda.

No último capítulo apresentamos as considerações finais do trabalho e as perspectivas de atuação futura.

Todos os resultados contidos nessa tese foram gerados com rotinas próprias escritas em linguagem de programação C. O tratamento dos resultados numéricos foi feito em linguagem Python (versão 3.5.2).

Abordagem cinética não colisional

Sistemas físicos clássicos compostos de muitas partículas são usualmente estudados em três níveis de descrição: uma descrição microscópica exata baseada em leis da mecânica clássica, uma descrição de fluido em que o estado do sistema é descrito localmente com base em cinco parâmetros macroscópicos (densidade, temperatura e as três componentes da velocidade do centro de massa de uma porção do fluido) e uma descrição cinética em uma escala intermediária mesoscópica.

Nesse capítulo, estamos interessados no estudo de plasmas não colisionais em um nível mesoscópico com base na formulação cinética. Essa abordagem, que surgiu no século XIX em decorrência da dificuldade de se tratar problemas de muitos corpos do ponto de vista da mecânica clássica, rapidamente mostrou-se bastante eficaz para o estudo dos gases. No contexto específico da Física de Plasmas não colisionais, além de resgatar a maioria de resultados obtidos pelas formulações microscópica e macroscópica, a teoria cinética atua como uma via capaz de conectar essas duas descrições para o sistema.

2.1 Função de distribuição de uma partícula

A formulação cinética introduz o conceito de função de distribuição $F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, de modo que

$$d\mathcal{N}_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v, \quad (2.1.1)$$

fornece o número de partículas da espécie $a = i, e$ (íons ou elétrons) que no instante t ocupam o elemento de volume $d^3x d^3v$ centrado no ponto (\mathbf{x}, \mathbf{v}) do espaço de fase.

A densidade de partículas dessa espécie, $n_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, pode ser obtida integrando (2.1.1) sobre todo o espaço das velocidades,

$$n_a(\mathbf{x}, t) = \int F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.1.2)$$

Dividindo ambos os membros da equação (2.1.2) por $n_a(\mathbf{x}, t)$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{n_a(\mathbf{x}, t)} d^3v = 1, \quad (2.1.3)$$

que nos motiva a definir a função de distribuição normalizada

$$f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \equiv \frac{1}{n_a(\mathbf{x}, t)} F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (2.1.4)$$

Esse tipo de distribuição mostra-se bastante conveniente para o cálculo de valores médios de quantidades físicas macroscópicas uma vez que pode ser considerada como um peso estatístico (que não requer interpretações probabilísticas).

Seja $G_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ uma grandeza física qualquer associada às partículas do tipo a do plasma, então seu valor médio é calculado da seguinte forma

$$\langle G_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle_{\mathbf{v}} = \int G_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (2.1.5)$$

e portanto, a velocidade média das partículas do tipo a de uma pequena porção do plasma centrada na posição \mathbf{x} é dada por

$$\mathbf{u}_a(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{v} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.1.6)$$

As equações (2.1.2) e (2.1.6) nos mostram como obter as variáveis macroscópicas fundamentais da teoria de fluido a partir da função de distribuição. A partir da densidade e da velocidade média das partículas podemos derivar sistematicamente as demais quantidades macroscópicas características do sistema como por exemplo os campos autoconsistentes do plasma.

2.2 Descrição linear das oscilações eletrostáticas em plasmas livres

Na ausência de colisões ($t \ll \tau_c$) a evolução da função de distribuição é dada pela equação de Vlasov [39, 40, 45, 43, 46]

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F_a + \frac{e_a}{m_a} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \cdot \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.2.7)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são os campos médios aos quais as partículas estão sujeitas.

A equação de Vlasov, juntamente com as equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\sum_a e_a \int \mathbf{v} F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (2.2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_a e_a \int F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (2.2.11)$$

compõem um sistema de equações autoconsistentes para as funções F_a , \mathbf{E} e \mathbf{B} .

Apesar da alta complexidade do sistema de equações não lineares em (2.2.7) - (2.2.11), podemos observar que ele admite uma solução trivial dada por

$$F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_{a0}(v), \quad \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{B} = 0, \quad (2.2.12)$$

que corresponde a um estado de equilíbrio do sistema.

Para resolver o sistema de equações diferenciais Vlasov - Maxwell consideramos que a solução não trivial desse sistema difere ligeiramente da solução de equilíbrio, isto é

$$F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_{a0}(v) + F_{a1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t); \quad |F_{a1}| \ll F_{a0}, \quad (2.2.13)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1, \quad (2.2.14)$$

onde as funções F_{a1} , \mathbf{E}_1 , \mathbf{B}_1 são perturbações pequenas o suficiente de tal forma que, quando substituirmos (2.2.13) e (2.2.14) no sistema de equações de Vlasov, seja possível desprezar os termos de ordem quadrática nessas quantidades.

Como resultado, obtemos o seguinte sistema de equações para as perturbações

$$\frac{\partial F_{a1}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F_{a1} + \frac{e_a}{m_a} \left(\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0, \quad (2.2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \left(\sum_a e_a \int \mathbf{v} F_{a1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \right), \quad (2.2.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \quad (2.2.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \quad (2.2.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_a e_a \int F_{a1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.2.19)$$

A partir de agora vamos omitir o subíndice 1, dado que trabalharemos exclusivamente com as perturbações.

A equação (2.2.15) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F_a = -\frac{e_a}{m_a} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right). \quad (2.2.20)$$

O segundo membro da equação acima representa um termo não uniforme e portanto, a solução F_a pode ser expressa como uma composição de duas partes: a solução da equação homogênea e a solução especial da equação não uniforme, dada por

$$F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_a(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}, 0) \quad (2.2.21)$$

$$- \frac{e_a}{m_a} \int_0^t \left(\mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(t - t'), t') dt' \cdot \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right). \quad (2.2.22)$$

Expandindo as perturbações em integrais de Fourier com respeito às coordenadas, i.e.

$$F_a = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3 k, \quad (2.2.23)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3 k, \quad (2.2.24)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3 k, \quad (2.2.25)$$

e substituindo (2.2.23) - (2.2.25) em (2.2.21), obtemos a seguinte equação para os coeficientes de Fourier da função de distribuição

$$F_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) = F_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, 0) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t) \quad (2.2.26)$$

$$- \frac{e_a}{m_a} \int_0^t \left(\mathbf{E}(\mathbf{k}, t') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t - t')) dt' \cdot \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right). \quad (2.2.27)$$

Multiplicando (2.2.26) por e_a , somando sobre a e integrando sobre \mathbf{v} , obtemos as componentes de Fourier da densidade de carga

$$\rho(\mathbf{k}, t) = \sum_a e_a \int F_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, 0) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t) d^3 v \quad (2.2.28)$$

$$- \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} \int \int_0^t \left(\mathbf{E}(\mathbf{k}, t') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t - t')) \cdot \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right) dt' d^3 v. \quad (2.2.29)$$

A expressão para a densidade total de carga consiste de duas partes. A primeira é completamente determinada pela configuração inicial da função de distribuição e é, portanto, uma função conhecida das coordenadas e do tempo. Denotaremos essa parte por ρ^{ext} (a densidade de cargas “externas”). A segunda parte, que é proporcional a magnitude do campo elétrico, corresponde a densidade de carga induzida, que denotaremos por ρ^{ind} .

Assim, a expressão (2.2.28) pode ser escrita na forma

$$\rho(\mathbf{k}, t) = \rho^{\text{ext}}(\mathbf{k}, t) + \rho^{\text{ind}}(\mathbf{k}, t). \quad (2.2.30)$$

Se agora multiplicarmos (2.2.26) por $e_a \mathbf{v}$, somarmos sobre a e integrarmos sobre \mathbf{v} , obtemos a seguinte expressão para as componentes de Fourier da densidade de corrente

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, t) = \sum_a e_a \int \mathbf{v} F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t) d^3v \quad (2.2.31)$$

$$- \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} \int_0^t \int \mathbf{v} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t-t')) \left(\mathbf{E}(\mathbf{k}, t') \cdot \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right) dt' d^3v, \quad (2.2.32)$$

que também pode ser representada pela soma de uma parte “externa” e outra induzida

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{J}^{\text{ext}}(\mathbf{k}, t) + \mathbf{J}^{\text{ind}}(\mathbf{k}, t). \quad (2.2.33)$$

Efetuada a transformada de Fourier dos campos dados em (2.2.24) e (2.2.25) e das densidades $\rho(\mathbf{k}, t)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{k}, t)$ em relação ao tempo e utilizando a prescrição $\omega \rightarrow \omega + i0^+$ [4, 83], obtemos

$$-i \int_0^\infty \exp(i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t) dt = \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \quad (2.2.34)$$

e conseqüentemente as seguintes expressões para os coeficientes de Fourier

$$\rho^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega) = i \sum_a e_a \int \frac{F_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, 0)}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v, \quad (2.2.35)$$

$$\mathbf{J}^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega) = i \sum_a e_a \int \frac{\mathbf{v} F_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, 0)}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v, \quad (2.2.36)$$

$$\rho^{\text{ind}}(\mathbf{k}, \omega) = -i \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} \int \frac{\mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v, \quad (2.2.37)$$

$$\mathbf{J}^{\text{ind}}(\mathbf{k}, \omega) = -i \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} \int \frac{\mathbf{v} \left(\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right)}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v. \quad (2.2.38)$$

Seja $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ o tensor condutividade elétrica, então, pela lei de Ohm, temos

$$J_i^{\text{ind}}(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.2.39)$$

A partir das equações (2.2.38) e (2.2.39), podemos obter a seguinte expressão para o tensor condutividade elétrica do plasma

$$\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_a \sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{k}, \omega) = -i \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} \int \frac{v_i \frac{\partial F_{a0}}{\partial v_j}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v, \quad (2.2.40)$$

onde $\sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{k}, \omega)$ é denominada condutividade de alta frequência das partículas a do plasma.

O vetor deslocamento elétrico \mathbf{D} é dado por

$$D_i(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_0 E_i(\mathbf{k}, \omega) + \frac{i}{\omega} \sigma_{ij} E_j(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j, \quad (2.2.41)$$

onde $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ é o tensor permissividade elétrica do plasma, que está relacionado com o tensor condutividade da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_0 \delta_{ij} + \frac{i}{\omega} \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.2.42)$$

Substituindo (2.2.40) em (2.2.42) obtemos a expressão para o tensor adimensional constante dielétrica (ou permissividade elétrica relativa)

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \equiv \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} = \delta_{ij} + \sum_a \frac{e_a^2}{\varepsilon_0 m_a \omega} \int \frac{v_i \frac{\partial F_{a0}}{\partial v_j}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v. \quad (2.2.43)$$

Para estabelecer a estrutura geral do tensor $\bar{\varepsilon}_{ij}$, devemos notar que como ele depende somente do vetor \mathbf{k} , os únicos tensores de segundo rank independentes que podemos construir são o tensor identidade δ_{ij} e o tensor $k_i k_j$. Portanto, o tensor $\bar{\varepsilon}_{ij}$ deve ter a estrutura

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \bar{\varepsilon}_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{k_i k_j}{k^2} \bar{\varepsilon}_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.2.44)$$

As funções $\bar{\varepsilon}_{\parallel}$, $\bar{\varepsilon}_{\perp}$ são chamadas respectivamente de constante dielétrica “longitudinal” e “transversal”.

Observamos de (2.2.44) que a constante dielétrica “longitudinal” é obtida a partir das componentes da diagonal do tensor $\bar{\varepsilon}_{ij}$. Tomando, sem perda de generalidade, o eixo x do sistema de coordenadas ao longo da direção do vetor de onda \mathbf{k} , obtemos

$$\bar{\varepsilon}_{\parallel}(k, \omega) = 1 - \sum_a \frac{e_a^2}{\varepsilon_0 m_a \omega} \int \frac{v_x}{kv_x - \omega} \frac{\partial F_{a0}}{\partial v_x} d^3 v. \quad (2.2.45)$$

Para uma função de distribuição que se anula nos extremos a integral acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int \frac{v_x}{kv_x - \omega} \frac{\partial F_{a0}}{\partial v_x} d^3 v &= \frac{1}{k} \int \frac{\partial F_{a0}}{\partial v_x} \left(\frac{\omega}{kv_x - \omega} + 1 \right) d^3 v \\ &= \frac{n_a \omega}{k} \int \frac{1}{kv_x - \omega} \frac{\partial f_{a0}}{\partial v_x} d^3 v, \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

onde utilizamos na última igualdade $F_{a0} = n_a f_{a0}$, com n_a representando a densidade de

partículas da espécie a no equilíbrio.

Podemos portanto reescrever a componente longitudinal da função dielétrica da seguinte forma

$$\bar{\epsilon}_{\parallel}(k, \omega) = 1 - \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{k^2} \int \frac{1}{v_x - \omega/k} \frac{\partial f_{a0}}{\partial v_x} d^3v, \quad (2.2.47)$$

onde $\omega_{p,a} = (n_a e_a^2 / \epsilon_0 m_a)^{1/2}$ representam, para $a = e, i$, as frequências de plasma eletrônica e iônica respectivamente.

A partir dessa quantidade é possível obter a relação de dispersão para os modos coletivos longitudinais (eletrostáticos) permitidos para o plasma e assim, fazer uma descrição completa da dinâmica do sistema [39, 45, 40]. Na referência [37] discutimos modificações para a constante dielétrica (2.2.47) e seus efeitos sobre os modos coletivos de um plasma não magnetizado quando consideramos a presença de um campo de radiação externo na aproximação de dipolo.

2.2.1 Propagação de ondas eletrostáticas

Os modos longitudinais do plasma são obtidos à partir das raízes da função dielétrica [39, 45, 40]. Dessa forma, da expressão em (2.2.47), obtemos a equação

$$1 - \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{k^2} \int \frac{\partial f_{a0} / \partial v_x}{v_x - \omega/k} d^3v = 0, \quad (2.2.48)$$

conhecida como relação de dispersão dos modos longitudinais, que define uma relação funcional entre a frequência ω e o vetor de onda k das oscilações que podem se propagar no plasma.

Examinaremos a solução da relação de dispersão para o caso mais simples, em que podemos negligenciar o movimento dos íons (aproximação de íons fixos) devido a sua baixíssima mobilidade comparada à dos elétrons. Efetuada a integral em (2.2.48) por partes, podemos reescrever a relação de dispersão da seguinte forma

$$1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{f_0}{(v_x - \omega/k)^2} d^3v = 0, \quad (2.2.49)$$

onde $f_0 = f_{e0}$ é a distribuição de velocidades de equilíbrio dos elétrons e $\omega_p = \omega_{p,e}$ representa a frequência de plasma eletrônica.

Em regime de plasma frio a função de distribuição eletrônica f_0 encontra-se bastante concentrada em torno de $\mathbf{v} = 0$ e portanto pode ser escrita na forma

$$f_0(\mathbf{v}) \approx \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z). \quad (2.2.50)$$

Substituindo (2.2.50) em (2.2.49) verificamos que, na aproximação de íons fixos e em regime de plasma frio, as únicas oscilações eletrostáticas possíveis são os modos de Langmuir, que possuem velocidade de fase ω/k infinita e velocidade de grupo $d\omega/dk$ nula.

2.2.2 Teoria de Landau do amortecimento das ondas de Langmuir

Vimos nas seções anteriores que a resolução das equações de Vlasov-Poisson nos leva à relação de dispersão (2.2.48) para as oscilações longitudinais. Assumindo um plasma eletrônico cuja função de distribuição $f_0(\mathbf{v})$ seja maxwelliana, a integral tripla na função dielétrica (2.2.47) resulta em uma única integral sobre a componente v_x (ou simplesmente v). Dessa forma, obtemos

$$\bar{\epsilon}(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{1}{v - \omega/k} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv, \quad (2.2.51)$$

onde omitimos o subíndice da função dielétrica dado que estamos interessados somente em sua componente longitudinal.

O tratamento matemático adequado para efetuar a integral em (2.2.51) foi feito pela primeira vez por L. D. Landau em 1946 que percebeu a necessidade de efetuá-la no plano complexo v . Landau supôs uma parte imaginária para a frequência das oscilações

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega'(\mathbf{k}) + i\gamma_L(\mathbf{k}), \quad (2.2.52)$$

tal que

$$|\gamma_L(\mathbf{k})| \ll \omega'(\mathbf{k}). \quad (2.2.53)$$

A condição (2.2.53) é conhecida como *prescrição de Landau* e informa que as oscilações do plasma são fracamente atenuadas ou amplificadas.

O contorno adequado para efetuar a integral em (2.2.51) com $\omega(\mathbf{k})$ dado por (2.2.52) e satisfazendo a prescrição de Landau é uma linha reta ao longo do eixo real de v com um pequeno semicírculo em torno do polo, conforme ilustrado na figura 2.1.

A integral ao redor do polo resulta em $i\pi$ vezes o resíduo calculado nesse ponto. Dessa forma, a função dielétrica em (2.2.51) fica dada por

$$\bar{\epsilon}(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{v - \omega'/k} dv + i\pi \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega'/k} \right], \quad (2.2.54)$$

em que identificamos as partes real e imaginária como

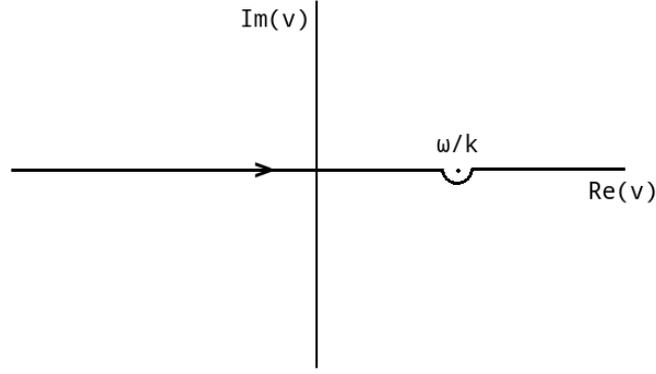


Figura 2.1: Contorno de integração no plano complexo v de acordo com a prescrição de Landau para o caso em que $\gamma_L \approx 0$.

$$\bar{\epsilon}_R(k, \omega') = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{v - \omega'/k} dv, \quad (2.2.55)$$

$$\bar{\epsilon}_I(k, \omega') = -\frac{\pi \omega_p^2}{k^2} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\omega'/k}, \quad (2.2.56)$$

onde P significa que o valor principal de Cauchy deve ser tomado na integral subsequente.

Por outro lado, podemos expandir a função dielétrica em (2.2.51) até primeira ordem em γ_L em torno de (k, ω') . Assim obtemos a seguinte relação de dispersão para os modos longitudinais

$$\bar{\epsilon}(k, \omega' + i\gamma_L) = \bar{\epsilon}_R(k, \omega') + i \left[\bar{\epsilon}_I(k, \omega') + \gamma_L \left. \frac{\partial \bar{\epsilon}_R}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega'} \right] = 0, \quad (2.2.57)$$

de onde segue imediatamente que

$$\bar{\epsilon}_R(k, \omega') = 0, \quad (2.2.58)$$

$$\gamma_L(k) = -\frac{\bar{\epsilon}_I(k, \omega')}{\partial \bar{\epsilon}_R / \partial \omega'}. \quad (2.2.59)$$

As raízes de (2.2.58) fornecem a parte real da frequência das oscilações, i.e. a relação de dispersão para os modos longitudinais, enquanto que a taxa de amortecimento ou de amplificação das ondas é obtida por meio da equação (2.2.59).

Das equações (2.2.55) e (2.2.58) e notando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v - v_\phi} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0}{(v - v_\phi)^2} dv \equiv \langle (v - v_\phi)^{-2} \rangle, \quad (2.2.60)$$

verificamos que as oscilações do plasma devem satisfazer a relação

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \langle (v - v_\phi)^{-2} \rangle, \quad (2.2.61)$$

onde $v_\phi = \omega'/k$ representa a velocidade de fase da onda.

Assumindo que a velocidade de fase da onda é muito maior que a velocidade térmica dos elétrons, i.e. $v_\phi \gg v_{th} = (k_B T_e / m_e)^{1/2}$, podemos expandir a função $(v - v_\phi)^{-2}$ na série binomial

$$(v - v_\phi)^{-2} = v_\phi^{-2} \left(1 - \frac{v}{v_\phi}\right)^{-2} = v_\phi^{-2} \left(1 + 2\frac{v}{v_\phi} + 3\frac{v^2}{v_\phi^2} + \dots\right). \quad (2.2.62)$$

Tomando a média em ambos os membros da equação (2.2.62) e notando que os termos ímpares se anulam, obtemos

$$\langle (v - v_\phi)^{-2} \rangle \approx v_\phi^{-2} \left(1 + 3\frac{\langle v^2 \rangle}{v_\phi^2}\right) = v_\phi^{-2} \left(1 + \frac{3}{v_\phi^2} \frac{k_B T_e}{m_e}\right), \quad (2.2.63)$$

onde utilizamos o teorema da equipartição da energia para obter o último membro.

Substituindo (2.2.63) em (2.2.61), obtemos

$$\omega'^2 = \omega_p^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega'^2} \frac{3k_B T_e}{m_e} k^2. \quad (2.2.64)$$

Percebemos pela equação (2.2.64) que se as correções térmicas forem pequenas, a frequência das oscilações diferem pouco da frequência de plasma. Dessa forma, podemos substituir ω'^2 por ω_p^2 no segundo membro dessa equação e assim obter

$$\omega'^2 = \omega_p^2 + 3v_{th}^2 k^2 = \omega_p^2 (1 + 3\lambda_D^2 k^2), \quad (2.2.65)$$

conhecida como *relação de dispersão de Bohm-Gross* [39, 40], que fornece a primeira ordem nas correções térmicas aos modos de Langmuir.

Vamos agora nos voltar para o cálculo da parte imaginária da frequência das oscilações. Considerando novamente que os efeitos térmicos são suficientemente pequenos, o denominador em (2.2.59) fica dado por $\partial \bar{\epsilon}_R / \partial \omega' = 2\omega' / \omega_p^2 \approx 2/\omega_p$ e assim, obtemos a expressão

$$\gamma_L(k) = \frac{\pi \omega_p^3}{2k^2} \left[\frac{\partial f_0}{\partial v} \right]_{v=\omega'/k} \quad (2.2.66)$$

para a parte imaginária da frequência.

A expressão anterior calculada originalmente na referência [4] é conhecida na literatura como taxa (ou fator gama) de Landau. Observamos que dependendo do sinal

da derivada da função de distribuição avaliada na velocidade de fase da onda $v_\phi = \omega'/k$, as oscilações de Langmuir podem ser tanto amortecidas como amplificadas. No caso de uma distribuição Maxwelliana, a parte imaginária da frequência assume valor negativo e portanto as oscilações eletrostáticas são amortecidas no tempo. Esse amortecimento é extremamente pequeno para $k\lambda_D \ll 1$, porém torna-se importante para $k\lambda_D = O(1)$.

O amortecimento de Landau permaneceu, mesmo após quase duas décadas de sua predição, sob forte ceticismo da comunidade científica. Em parte devido à aspectos matemáticos pouco intuitivos da sua derivação e ao fato de não ter havido preocupação em explicar a origem física do fenômeno. Uma derivação mais bem aceita foi proposta em 1961 por Dawson na referência [29]. Nesse trabalho o autor explica o amortecimento de Landau como resultado de um mecanismo quase-ressonante de transferência de energia (e momento) entre onda e partículas. Finalmente, quase após duas décadas da sua predição, o amortecimento de Landau foi completamente reconhecido após sua observação experimental [30].

Em 1955 N. G. van Kampen propõe uma forma alternativa para derivar o amortecimento de Landau [47]. Nessa formulação, van Kampen mostra que para uma dada oscilação de Langmuir que se propaga com um dado vetor de onda k existe um espectro contínuo de frequências reais, que satisfazem o sistema linearizado de Vlasov-Poisson. Nesse contexto, o amortecimento de Landau não está associado ao decaimento de um modo específico, mas a um tipo especial de superposição de soluções estacionárias (com diferentes frequências associadas) que hoje levam o nome de *modos de van Kampen*. O fato de tais soluções estacionárias nessa superposição viajarem com diferentes velocidades de fase faz com que a perturbação inicial seja amortecida por um mecanismo conhecido como *phase mixing*.

Esse mecanismo responsável por gerar o amortecimento de Landau foi estudado em outros contextos como, por exemplo, no modelo de fluido dividido em feixes introduzido por Dawson na referência [48]. No capítulo 4 estudamos o mecanismo de *phase mixing* e os efeitos do amortecimento e amplificação de Landau por meio de um modelo hamiltoniano para plasmas [18, 15, 36]. Apresentamos nossos resultados e discutimos conexões com as abordagens de Landau, van Kampen e Dawson quando o limite do contínuo é tomado.

2.3 Descrição linear para plasmas magnetizados

Nessa seção estamos interessados em descrever os modos eletrostáticos propagativos em plasmas magnetizados próximo às condições de equilíbrio. Para isso, calcularemos a função dielétrica do plasma sujeito a um campo magnetostático axial $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$ considerando novamente a baixa mobilidade dos íons (aproximação de íons fixos).

Admitindo que as partículas que compõem o sistema são descritas por uma função de distribuição do tipo

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_0(v_\perp, v_z) + F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t); |F_1| \ll F_0, \quad (2.3.67)$$

onde $F_0(v_\perp, v_z)$ corresponde à função de distribuição de equilíbrio dos elétrons, com \perp representando a componente da velocidade perpendicular ao campo \mathbf{B}_0 .

Assumindo que as perturbações se propagam no plasma como ondas planas na forma

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_1(\mathbf{v}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (2.3.68)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (2.3.69)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (2.3.70)$$

podemos novamente (assim como fizemos na seção anterior para plasmas livres) resolver a equação de Vlasov linearizada

$$\frac{\partial F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} = \frac{e}{m_e} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}}, \quad (2.3.71)$$

em termos dos coeficientes $F_1(\mathbf{v})$, \mathbf{E} e \mathbf{B} .

Substituindo (2.3.67) - (2.3.70) em (2.3.71), obtemos

$$-i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_1(\mathbf{v}) - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F_0(v_\perp, v_z)}{\partial \mathbf{v}} = \frac{e}{m_e} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial F_1(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.3.72)$$

Como o campo magnetostático externo possui somente componente ao longo do eixo-z, o segundo membro de (2.3.72) fica dado por

$$\frac{e}{m_e} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial F_1(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -\omega_c \left(v_x \frac{\partial F_1}{\partial v_y} - v_y \frac{\partial F_1}{\partial v_x} \right) = -\omega_c \frac{dF_1}{d\phi}, \quad (2.3.73)$$

onde $\omega_c = eB_0/m_e$ representa a frequência ciclotrônica dos elétrons e ϕ o ângulo polar no sistema de coordenadas cilíndricas definido no espaço das velocidades.

Das equações de Maxwell, temos

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (2.3.74)$$

que, juntamente com a identidade para o produto vetorial triplo, nos permite obter

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{\omega} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}] \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.3.75)$$

Substituindo (2.3.75) e (2.3.73) em (2.3.72), obtemos

$$\frac{dF_1}{d\phi} - i \frac{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{\omega_c} F_1 = \frac{e}{\omega_c m_e} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{\omega} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}] \right\} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.3.76)$$

Admitindo que a perturbação se propaga ao longo do eixo- x (i.e., $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$), obtemos a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dF_1}{d\phi} - i \frac{(\omega - kv_{\perp} \cos \phi)}{\omega_c} F_1 = \frac{e}{\omega_c m_e} \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} (\cos \phi E_x + \sin \phi E_y) + \left[\frac{k}{\omega} \left(v_z \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right) \cos \phi + \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right] E_z \right\}, \quad (2.3.77)$$

que admite a solução

$$F_1(\mathbf{v}) = \frac{1}{\mu(\phi)} \int_{-\infty}^{\phi} \mu(\phi') q(\phi') d\phi', \quad (2.3.78)$$

onde o fator integrante, $\mu(\phi)$, é dado por

$$\mu(\phi) = \exp \left[-i \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \phi + i \left(\frac{kv_{\perp}}{\omega_c} \right) \sin \phi \right] \quad (2.3.79)$$

e $q(\phi)$ representa o segundo membro de (2.3.77).

Se mudarmos a variável de integração para $\phi' = \phi - \phi''$, a equação (2.3.78) assume a forma

$$F_1(\mathbf{v}) = \frac{e}{m_e \omega_c} e^{-i \left(\frac{kv_{\perp}}{\omega_c} \right) \sin \phi} \int_0^{\phi} \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} [\cos(\phi - \phi') E_x + \sin(\phi - \phi') E_y] + \left[\frac{k}{\omega} \left(v_z \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right) \cos(\phi - \phi') + \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right] E_z \right\} e^{g(\phi')} d\phi', \quad (2.3.80)$$

onde

$$g(\phi') = -i \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \phi' + i \left(\frac{kv_{\perp}}{\omega_c} \right) \sin(\phi - \phi'). \quad (2.3.81)$$

A densidade de corrente é dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (2.3.82)$$

onde a amplitude complexa \mathbf{J} é

$$\mathbf{J} = -e \int \mathbf{v} F_1(\mathbf{v}) d^3 v. \quad (2.3.83)$$

Expressando a velocidade e o elemento de volume em coordenadas cilíndricas,

temos

$$\mathbf{J} = -e \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dv_z F_1(\mathbf{v}) (v_\perp \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + v_\perp \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}). \quad (2.3.84)$$

As amplitudes da densidade de corrente e do campo elétrico estão relacionados por meio do tensor condutividade elétrica da seguinte forma:

$$J_i = \sigma_{ij} E_j. \quad (2.3.85)$$

Substituindo (2.3.80) em (2.3.84) e utilizando as equações em (2.3.85), obtemos

$$\sigma_{ij} = V_i W_j(v_\perp, v_z, \phi), \quad (2.3.86)$$

onde definimos os vetores \mathbf{V} e \mathbf{W} por

$$\mathbf{V} = -\frac{e^2}{m_e \omega} \int_0^\infty v_\perp^2 dv_\perp \int_{-\infty}^\infty dv_z \int_0^{2\pi} d\phi \exp\left(-i \frac{kv_\perp}{\omega_c} \sin \phi\right) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3.87)$$

$$\mathbf{W} = \int_0^\infty d\phi' \exp[g(\phi')] \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \cos(\phi - \phi') \\ \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \sin(\phi - \phi') \\ \frac{k}{\omega} \left(v_z \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} - v_\perp \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right) \cos(\phi - \phi') + \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \end{pmatrix}. \quad (2.3.88)$$

Vamos nos limitar ao cálculo da componente σ_{xx} , que será suficiente para as análises posteriores. Para isso calcularemos primeiramente a integral em ϕ' da componente W_x dada por

$$I_1 = \int_0^\infty d\phi' \cos(\phi - \phi') \exp[g(\phi')]. \quad (2.3.89)$$

Diferenciando (2.3.81) em relação a ϕ' , obtemos

$$\cos(\phi - \phi') = \frac{\omega}{kv_\perp} + i \frac{\omega_c}{kv_\perp} \frac{dg(\phi')}{d\phi'}. \quad (2.3.90)$$

Assim, a equação (2.3.89) fica

$$I_1 = \frac{\omega}{kv_\perp} \int_0^\infty d\phi' \exp[g(\phi')] + i \frac{\omega_c}{kv_\perp} \int_0^\infty d\{\exp[g(\phi')]\}, \quad (2.3.91)$$

uma vez que $d\{\exp[g(\phi')]\} = \exp[g(\phi')] d\phi'$. Portanto,

$$I_1 = \frac{\omega}{kv_\perp} \int_0^\infty d\phi' \exp[g(\phi')] - i \frac{\omega_c}{kv_\perp} \exp\left(i \frac{kv_\perp}{\omega_c} \sin \phi\right). \quad (2.3.92)$$

Para calcular a integral em (2.3.92), vamos introduzir a variável

$$\xi = \frac{kv_{\perp}}{\omega_c} \quad (2.3.93)$$

e expressar o termo $\exp[g(\phi')]$ por uma série em termos das funções de Bessel $J_n(\xi)$

$$\exp[g(\phi')] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi) \exp(in\phi) \exp[i(\omega/\omega_c - n)\phi'] . \quad (2.3.94)$$

Substituindo (2.3.94) em (2.3.92) e efetuando a integração em ϕ' , obtemos

$$I_1 = -\frac{i}{\xi} \exp(i\xi \sin \phi) + \frac{i\omega}{kv_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\xi) \exp(in\phi)}{(\omega/\omega_c - n)} . \quad (2.3.95)$$

O próximo passo para obtermos a expressão de σ_{xx} é calcular a integral com relação a ϕ , que denotaremos por I_2 . Substituindo (2.3.95) em (2.3.86), obtemos

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \left[-\frac{i}{\xi} + \frac{i\omega}{kv_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\xi) \exp(in\phi - i\xi \sin \phi)}{(\omega/\omega_c - n)} \right] . \quad (2.3.96)$$

O primeiro termo entre colchetes se anula quando integrado, e para calcular o segundo termo devemos notar que é possível escrever

$$\cos \phi = \frac{n}{\xi} + \frac{i}{\xi} \frac{d}{d\phi} (in\phi - i\xi \sin \phi) . \quad (2.3.97)$$

Dessa forma, a integral I_2 fica dada por

$$I_2 = \frac{i\omega}{kv_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\xi)}{\omega/\omega_c - n} \left\{ \frac{n}{\xi} \int_0^{2\pi} d\phi \exp(in\phi - i\xi \sin \phi) + \frac{i}{\xi} \int_0^{2\pi} d[\exp(in\phi - i\xi \sin \phi)] \right\} . \quad (2.3.98)$$

A segunda integral entre chaves se anula, enquanto que a primeira integral pode ser obtida da relação

$$\int_0^{2\pi} d\phi \exp(in\phi - i\xi \sin \phi) = 2\pi J_n(\xi) , \quad (2.3.99)$$

conhecida como integral de Bessel.

A equação (2.3.98) assume portanto a forma

$$I_2 = \frac{2\pi i\omega}{\xi\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nJ_n^2(\xi)}{\omega/\omega_c - n} . \quad (2.3.100)$$

Esse resultado pode ainda ser reescrito de uma forma ligeiramente diferente

$$I_2 = \frac{2\pi i}{\xi^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[nJ_n^2(\xi) + \frac{n^2 J_n^2(\xi)}{(\omega/\omega_c - n)} \right]. \quad (2.3.101)$$

Como $J_{-n}(\xi) = (-1)^n J_n(\xi)$, o somatório do primeiro termo entre colchetes se anula e assim obtemos

$$I_2 = \frac{2\pi i}{\xi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 J_n^2(\xi)}{\omega/\omega_c - n}. \quad (2.3.102)$$

Uma vez efetuadas todas as integrais angulares, obtemos para a componente σ_{xx} a expressão

$$\sigma_{xx} = -\frac{e^2}{m_e \omega_c} \int_0^{\infty} v_{\perp}^2 dv_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} I_2 dv_z. \quad (2.3.103)$$

Assim, substituindo (2.3.102) em (2.3.103), temos

$$\sigma_{xx} = -\frac{2\pi i e^2}{m_e \omega_c} \int_0^{\infty} v_{\perp}^2 dv_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{\omega_c}{k v_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 J_n^2(\xi)}{\omega/\omega_c - n}. \quad (2.3.104)$$

Assumindo uma função de distribuição de equilíbrio maxwelliana

$$F_0(v) = n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi K_B T_e} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_e (v_{\perp}^2 + v_z^2)}{2K_B T_e} \right] \quad (2.3.105)$$

e definindo a variável adimensional

$$\bar{v} \equiv \frac{K_B T_e}{m_e} \frac{k^2}{\omega_c^2}, \quad (2.3.106)$$

a integral em (2.3.104) fica dada por

$$\sigma_{xx} = \frac{i n_0 e^2}{m_e \omega_c \bar{v}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(\omega/\omega_c - n)} \int_0^{\infty} \xi J_n^2(\xi) \exp \left(-\frac{\xi^2}{2\bar{v}} \right) d\xi, \quad (2.3.107)$$

onde utilizamos a integral Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (2.3.108)$$

Para efetuar a integral em (2.3.107) utilizaremos a integral segunda de Weber [49]

$$\int_0^{\infty} dx \exp(-p^2 x^2) J_l(ax) J_l(bx) x = \frac{1}{2p^2} \exp \left(-\frac{a^2 + b^2}{4p^2} \right) I_l \left(\frac{ab}{2p^2} \right), \quad (2.3.109)$$

onde $I_n(x)$ representa as funções de Bessel modificadas, que estão relacionadas com as

funções de Bessel por

$$I_n(x) = (-i)^n J_n(ix) . \quad (2.3.110)$$

Substituindo (2.3.109) em (2.3.107), obtemos

$$\sigma_{xx} = \frac{in_0 e^2}{m_e \omega_c} \frac{\exp(-\bar{v})}{\bar{v}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 I_n(\bar{v})}{(\omega/\omega_c - n)} . \quad (2.3.111)$$

As componentes σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zx} e σ_{zy} são nulas, haja vista que seus integrandos são funções ímpares de v_z .

Das equações de Maxwell e com os campos dados em (2.3.69) e (2.3.70), obtemos

$$k\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} , \quad (2.3.112)$$

$$ik\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} , \quad (2.3.113)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} + \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.3.114)$$

é o tensor constante dielétrica (ou permissividade elétrica relativa) do plasma.

De (2.3.111) e (2.3.114), temos

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c} \frac{\exp(-\bar{v})}{\bar{v}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 I_n(\bar{v})}{(\omega/\omega_c - n)} . \quad (2.3.115)$$

Nas formas de componentes, as equações (2.3.112) e (2.3.113) ficam dadas por

$$B_x = 0 , \quad (2.3.116)$$

$$E_z = -\frac{\omega}{k} B_y , \quad (2.3.117)$$

$$E_y = \frac{\omega}{k} B_z , \quad (2.3.118)$$

$$-\frac{\omega}{kc^2} (\varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y) = 0 , \quad (2.3.119)$$

$$-\frac{\omega}{kc^2} (\varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y) = -B_z , \quad (2.3.120)$$

$$-\frac{\omega}{kc^2} \varepsilon_{zz} E_z = B_y , \quad (2.3.121)$$

onde usamos o fato de que $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$.

2.3.1 Modos de Bernstein

Para analisarmos os modos longitudinais, vamos assumir $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$, isto é, $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}}$. Nesse caso, a equação (2.3.119) assume a forma

$$\epsilon_{xx} E_x = 0 \quad (2.3.122)$$

e conseqüentemente, para uma solução não trivial ($E_x \neq 0$), obtemos

$$\epsilon_{xx} = 0, \quad (2.3.123)$$

cujas expressão explícita é

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c} \frac{\exp(-\bar{\nu})}{\bar{\nu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 I_n(\bar{\nu})}{(\omega/\omega_c - n)}. \quad (2.3.124)$$

Utilizando a propriedade $I_{-n}(\bar{\nu}) = I_n(\bar{\nu})$ das funções de Bessel modificadas, temos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n I_n(\bar{\nu}) = 0. \quad (2.3.125)$$

Somando (2.3.125) ao segundo membro de (2.3.124) e introduzindo $\bar{\omega} \equiv \omega/\omega_c$, obtemos

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \frac{\exp(-\bar{\nu})}{\bar{\nu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n I_n(\bar{\nu})}{(\bar{\omega} - n)}. \quad (2.3.126)$$

Essa equação deduzida originalmente por Bernstein [44] estabelece uma relação implícita entre as quantidades adimensionais $\bar{\nu}$ e $\bar{\omega}$ relacionadas, respectivamente, ao vetor de onda e à frequência das oscilações longitudinais que se propagam perpendicularmente ao campo magnetostático. Diferentemente das oscilações de Langmuir discutidas na seção anterior, os *modos de Bernstein* não sofrem atenuação ou amplificação, dado que a equação (2.3.126) admite apenas soluções para $\bar{\omega}$ e $\bar{\nu}$ reais.

Um aspecto importante dessa relação de dispersão é que para um dado valor fixo de $\bar{\nu}$, existem infinitos valores possíveis de $\bar{\omega}$ tal que o primeiro e o segundo membro dessa equação se igualam. Essas ondas foram observadas por sondas espaciais e os dados coletados sobre sua dispersão foram utilizados, por exemplo, por Moncuquet, Meyer-Vernet e Hoang [50] para inferir a temperatura dos elétrons no plasma magnetizado da lua Io de Júpiter.

2.4 Modos coletivos na presença de campo de radiação

Vimos que quando um campo magnetostático $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ é o único campo externo presente no plasma as oscilações eletrostáticas que se propagam no plano- xy são os modos de Bernstein. Contudo, quando introduzimos no sistema um campo eletromagnético $\mathbf{E}(t) = E_0 \cos(\omega_r t) \hat{\mathbf{x}}$ na aproximação de dipolo elétrico ¹, a relação de dispersão é obtida a partir da função dielétrica [38] (cujos cálculos estão detalhados no apêndice D)

$$\varepsilon(\xi, \bar{\Omega}) = 1 - 2 \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi^2} \sum_{m=-M}^M J_m^2(\gamma \xi) \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{l}{(\bar{\Omega} - m\bar{\omega}_r)^2 - l^2} I_l(\xi^2), \quad (2.4.127)$$

expressa em termos das variáveis adimensionais $\xi = \frac{v_{th}}{\sqrt{2}\omega_c} k$ e $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_c$ associadas ao vetor de onda e à frequência dos modos respectivamente. A constante $\bar{\omega}_r$ é a razão entre a frequência da radiação e a frequência ciclotrônica e o inteiro M representa o número máximo de fótons do campo eletromagnético absorvido ou emitido pelos elétrons. A função I_l é a função de Bessel modificada de ordem l e J_m a função de Bessel de ordem m , cujo argumento envolve o parâmetro $\gamma = \sqrt{2} \frac{v_d}{v_{th}} \frac{1}{1-\bar{\omega}_r^2}$, com $v_d = E_0/B_0$ representando a velocidade de deriva dos elétrons devido aos campos cruzados.

Na presença de campo externo de radiação os modos coletivos do plasma são obtidos a partir das raízes da função dielétrica (2.4.127) e satisfazem portanto a equação

$$1 = 2 \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi^2} \sum_{m=-M}^M J_m^2(\gamma \xi) \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{l}{(\bar{\Omega} - m\bar{\omega}_r)^2 - l^2} I_l(\xi^2). \quad (2.4.128)$$

A estratégia utilizada para a obtenção das soluções de (2.4.128) foi fixar um valor $\xi = \xi^*$ e utilizar o método de Newton-Raphson para obter o valor de $\bar{\Omega}$ correspondente. Como para cada valor de ξ^* existe uma infinidade de soluções da relação de dispersão, se faz necessário também especificar o intervalo de frequências em que estamos procurando as raízes. Em nossos resultados nos detivemos ao cálculo das frequências próximas aos quatro primeiros harmônicos ciclotrônicos (i.e. $\Omega \leq 5\omega_c$). O segundo somatório em (2.4.127) foi truncado em $l = 30$ visto que, para os parâmetros utilizados na obtenção dos resultados, as contribuições dos termos $l > 30$ são desprezíveis.

Observamos que a influência do campo eletromagnético externo se faz exclusivamente por meio do parâmetro γ . Há dois fatores que contribuem para valores substanciais desse parâmetro: a razão entre as velocidades de deriva e térmica e a razão entre as frequências da radiação e ciclotrônica. Quando $\gamma \rightarrow 0$ ($v_d \ll v_{th}$ e $\omega_r \neq \omega_c$) as funções de

¹Nessa aproximação desprezamos a dependência espacial do campo dado que assumimos seu comprimento de onda muito superior ao comprimento de Debye.

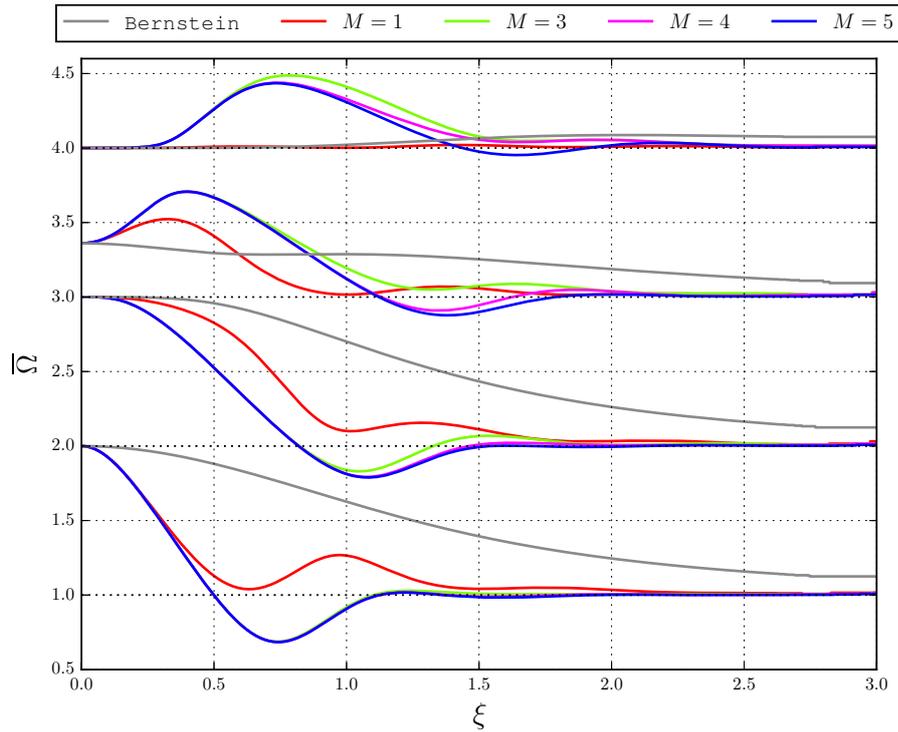


Figura 2.2: Relação de dispersão dos modos longitudinais de um plasma magnetizado em regime quase-ressonante $\bar{\omega}_r \rightarrow 1$. Os gráficos correspondem a modos associados a processos envolvendo diferentes números de fótons do campo de radiação para os quatro primeiros *branches* da função dielétrica. Utilizamos os seguintes parâmetros: $E_0 = 1.0 \text{ Vm}^{-1}$, $B_0 = 1.0 \text{ T}$, $K_B T = 10 \text{ eV}$ e $n_0 = 10^{20} \text{ m}^{-3}$.

Bessel J_m comportam-se como deltas de Kronecker e dessa forma, a equação (2.4.128) se reduz à relação de dispersão para os *modos de Bernstein* (2.3.126).

A figura 2.2 apresenta a relação de dispersão para diferentes números de fótons para os quatro primeiros ramos no regime quase-ressonante ($\bar{\omega}_r \approx 1$). As curvas em cinza correspondem aos *modos de Bernstein*. Observamos nesse regime que a presença do campo de radiação “acelera” a atenuação dos modos para os modos ciclotrônicos. Destacamos ainda um aspecto interessante que diz respeito a existência de um *cutoff* para frequências inferiores aos harmônicos ciclotrônicos. Observamos no primeiro *branch* ($\bar{\Omega} \leq 2$) da relação de dispersão ilustrada na figura 2.2 que não existe modo com frequência inferior à frequência ciclotrônica quando um único fóton é considerado nas transições eletrônicas. Para o segundo *branch*, notamos que além da curva $M = 1$, a curva referente a $M = 2$ também não admite modo com frequência inferior a frequência harmônica ciclotrônica $\Omega = 2\omega_c$. Esse comportamento se repete nos outros dois *branches*, onde fica nítido, por exemplo, no quarto *branch* que somente a curva $M = 5$ admite frequência abaixo do harmônico ciclotrônico $\Omega = 4\omega_c$. Para modos mais energéticos ($\bar{\Omega} \gg 1$), o cálculo das raízes da função dielétrica fica sujeito a muitas flutuações numéricas. Contudo, esperamos que o comportamento descrito anteriormente continue

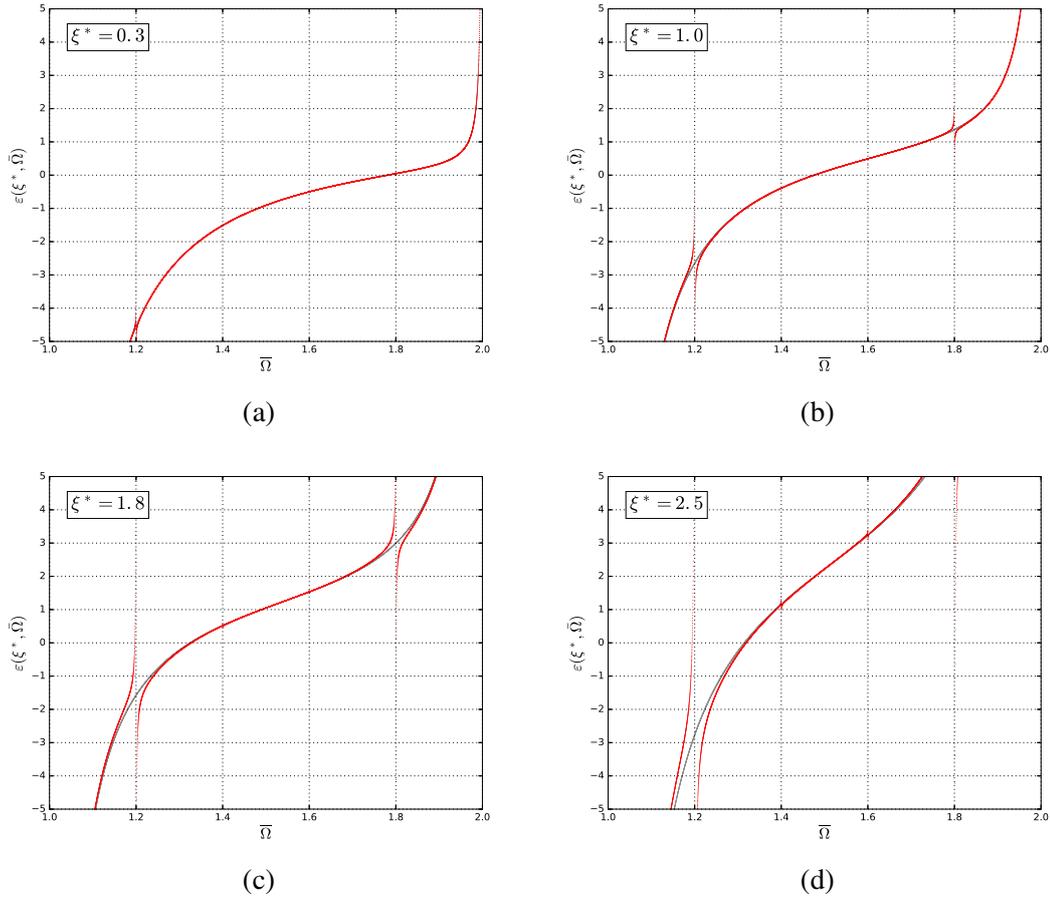


Figura 2.3: Novas assíntotas da função dielétrica no regime não ressonante. A curva em cinza corresponde à relação de dispersão de Bernstein. Utilizamos como parâmetros para as plotagens $B_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{T}$, $k_B T = 1 \text{ eV}$, $n_0 = 10^{10} \text{ m}^{-3}$, $M = 3$ e $E_0 = 1.0 \text{ Vm}^{-1}$. Fixamos $\bar{\omega}_r = 0.2$ e observamos que as assíntotas verticais tornam-se mais nítidas à medida que o número de onda aumenta.

se repetindo e assim, para o n -ésimo ramo, todos os modos $M \leq n$ devem possuir frequências superiores à frequência harmônica ciclotrônica associada a esse intervalo.

Nas figuras 2.3 e 2.4 analisamos os modos propagativos no regime não ressonante, i.e. quando a frequência do campo eletromagnético é significativamente diferente da frequência ciclotrônica. Notamos pela equação (2.4.128) que a presença do campo de radiação em regime não ressonante produz novas assíntotas da função dielétrica, além daquelas previstas na referência [44]. Essas novas assíntotas ocorrem em múltiplos de $\bar{\omega}_r$ e podem ser observadas nos gráficos em 2.3. Observamos que para baixos valores de ξ , a função dielétrica para plasmas magnetizados sujeitos a campo externo de radiação praticamente não difere da função dielétrica derivada por Bernstein (curva cinza). Contudo, à medida que o número de onda aumenta, essas novas assíntotas e novas raízes (novos modos propagativos) tornam-se mais nítidas. Conforme podemos observar na figura 2.4,

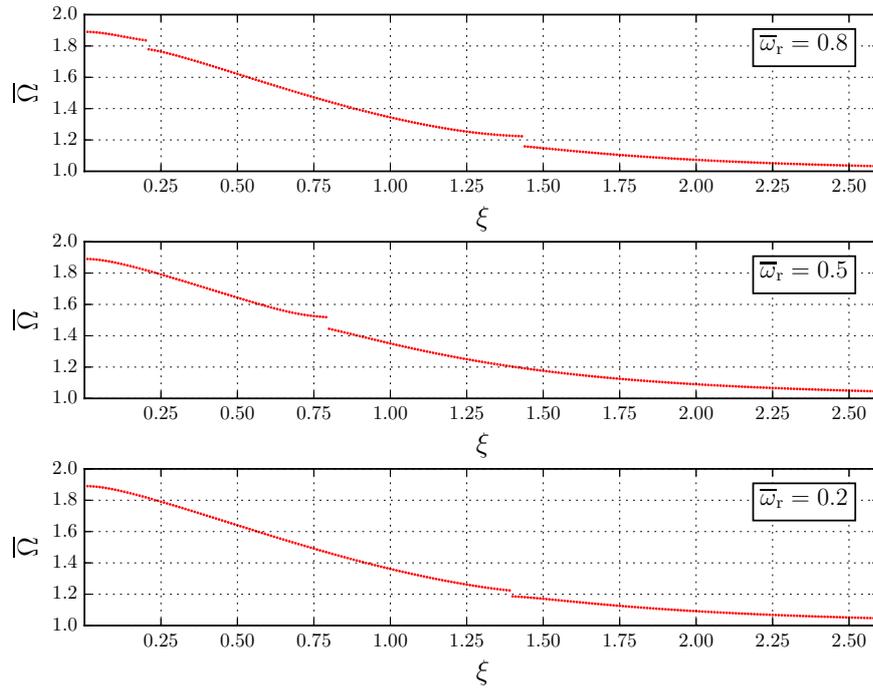


Figura 2.4: Relação de dispersão para diferentes valores de $\bar{\omega}_r$ no regime não ressonante.

as novas assíntotas se refletem (nos gráficos $\bar{\Omega}$ vs. ξ) em novas frequências assintóticas ² $\bar{\Omega} = n + n'\bar{\omega}_r$ com $n, n' \in \mathbb{N}^*$ dos modos propagativos do plasma. Assim, o principal efeito da presença de radiação em regime não ressonante ($\omega_r \neq \omega_c$) é introduzir novos modos harmônicos no sistema. Obsevamos que além dos modos harmônicos ciclotrônicos o sistema exibe também modos harmônicos associados à frequência do campo de radiação.

²Entenda por frequência assintótica $\bar{\Omega}(\xi)$ com $\xi \rightarrow \infty$.

Efeitos não lineares decorrentes do aprisionamento de partículas

Nesse capítulo discutiremos os efeitos não lineares em plasmas livres decorrentes do aprisionamento de partículas no poço de potencial da onda eletrostática (onda de Langmuir). Para isso, iniciamos com a apresentação de um modelo mecânico bastante simples, porém capaz de evidenciar importantes aspectos não lineares da dinâmica: como os conceitos de partículas ressonantes e sincronização onda-partícula. Em seguida, apresentaremos a teoria quase-linear [32, 33, 51, 45] bem como suas principais previsões e finalizaremos o capítulo discutindo o método semi-lagrangiano [52, 53, 54] amplamente utilizado para a resolução numérica da equação de Vlasov em sistemas unidimensionais.

3.1 Rederivando o amortecimento de Landau por meio de um modelo mecânico simples

Apresentaremos aqui, com base nas notas da referência [55], uma forma não muito usual nos livros texto para derivar a taxa de decaimento ou amplificação de Landau. Explicaremos esse fenômeno por meio de um modelo mecânico bastante simples e ferramentas matemáticas que não vão além de técnicas padrão para resolução de equações diferenciais ordinárias.

Consideremos o problema paradigmático de uma partícula carregada em um campo eletrostático, cuja equação de movimento é dada por

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{eE_w}{m} \cos(kX - \omega t), \quad (3.1.1)$$

onde X representa a trajetória da partícula¹, ω a pulsação da onda e $k = 2\pi/L$ seu vetor

¹Adotamos a letra maiúscula para evitar ambiguidade entre a condição inicial da partícula x_0 e a primeira aproximação de Picard $X_0(t)$. Essa notação será útil também mais adiante para fazer a distinção entre a trajetória da partícula $X(t)$ e o espaço sobre o qual a densidade de energia eletrostática será integrada.

de onda (com L representando o período espacial do campo eletrostático).

Por simplicidade, vamos adotar o referencial da onda tomando $\omega = 0$. Dessa forma, a equação de movimento pode ser reescrita como

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \varepsilon \cos kX, \quad (3.1.2)$$

onde $\varepsilon = -eE_w/m$ é um parâmetro com dimensão de aceleração, que será importante para as análises aproximativas que faremos a seguir.

Integrando a equação (3.1.2) em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{X}(t) = u + \varepsilon \int_0^t dt' \cos kX(t'), \quad (3.1.3)$$

onde u representa a velocidade inicial da partícula.

Conhecendo as condições iniciais $X(0) = x_0$ e $\dot{X}(0) = u$ podemos assumir o movimento livre (ou balístico) $X_0(t) = x_0 + ut$ como ponto de partida para a obtenção das soluções aproximadas de (3.1.3). Assim, a primeira aproximação é calculada da seguinte forma

$$\dot{X}_1(t) = u + \varepsilon \int_0^t dt' \cos kX_0(t'). \quad (3.1.4)$$

Iterando este processo $n + 1$ vezes obtemos uma sequência de aproximações sucessivas (sequência de Picard), satisfazendo $\dot{X}_n(0) = u$ e $X_n(0) = x_0$, cuja fórmula geral é dada por

$$\dot{X}_{n+1}(t) = u + \varepsilon \int_0^t dt' \cos kX_n(t'), \quad (3.1.5)$$

com n sendo um inteiro não negativo.

A primeira aproximação para a trajetória da partícula é obtida integrando-se ambos os membros da equação (3.1.4). Como resultado obtemos

$$X_1(t) = X_0(t) - \frac{\varepsilon}{ku} \left[\sin kx_0 t + \frac{1}{ku} \left(\cos kX_0(t) - \cos kx_0 \right) \right], \quad (3.1.6)$$

onde o segundo termo do lado direito representa a primeira correção ao movimento balístico.

Assumindo $n = 1$ na equação (3.1.5) e definindo $\Delta u_2(t) = \dot{X}_2(t) - u$ como a variação da velocidade em relação à velocidade inicial, então a contribuição de primeira ordem (na amplitude da onda) para $\Delta u_2(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}\Delta u_2^{(1)}(t) &= \varepsilon \int_0^t dt' [\cos kX_1(t')]^{(0)} \\ &= \varepsilon \int_0^t dt' \cos kX_0(t').\end{aligned}\quad (3.1.7)$$

Vale notar que nesta notação o índice inferior indica o elemento da sequência de Picard enquanto que o índice superior representa a ordem em ε .

A contribuição do termo de segunda ordem é dada por

$$\begin{aligned}\Delta u_2^{(2)}(t) &= \varepsilon \int_0^t dt' [\cos kX_1(t')]^{(1)} \\ &= \frac{\varepsilon^2}{ku^2} \int_0^t dt' \sin kX_0(t') \left[ut' \sin kx_0 + \cos kX_0(t') - \cos kx_0 \right].\end{aligned}\quad (3.1.8)$$

Tomando a média nas posições iniciais pode-se facilmente mostrar de (3.1.7) que, em primeira ordem em ε , não há variação na velocidade média da partícula, i.e.

$$\left\langle \Delta u_2^{(1)}(t) \right\rangle_{x_0} = 0. \quad (3.1.9)$$

Para o termo de segunda ordem, o valor médio da variação na velocidade da partícula é diferente de zero e dado por

$$\left\langle \Delta u_2^{(2)}(t) \right\rangle_{x_0} = \frac{\varepsilon^2}{k^2 u^3} \left(\cos kut - 1 + \frac{1}{2} kut \sin kut \right). \quad (3.1.10)$$

O gráfico na figura 3.1 nos permite fazer relevantes observações sobre a dinâmica do sistema onda-partícula descrito por meio desse simples modelo mecânico. Uma importante característica desse sistema é a localidade da interação no espaço das velocidades. Observamos que partículas que inicialmente possuem velocidades próximas à velocidade de fase da onda ($u \approx 0$) sofrem significativas alterações na trajetória balística, enquanto que as demais permanecem praticamente inalteradas.

Com base nessa observação, pode-se então dividir o sistema em dois conjuntos: o primeiro que contém as partículas com velocidades substancialmente diferentes da velocidade de fase da onda e que por isso não trocam momento e energia com ela (partículas não ressonantes) e o segundo que corresponde às partículas que efetivamente interagem com a onda (partículas ressonantes). Além da localidade nas velocidades outro importante aspecto da dinâmica é a sincronização que ocorre entre as velocidades das partículas e a velocidade da onda. Esse processo foi verificado experimentalmente em um *traveling-wave tube* (TWT) [22] (aparato especialmente projetado para o estudo da interação onda-partícula em plasmas) em concordância com a expressão de segunda ordem obtida em (3.1.10).

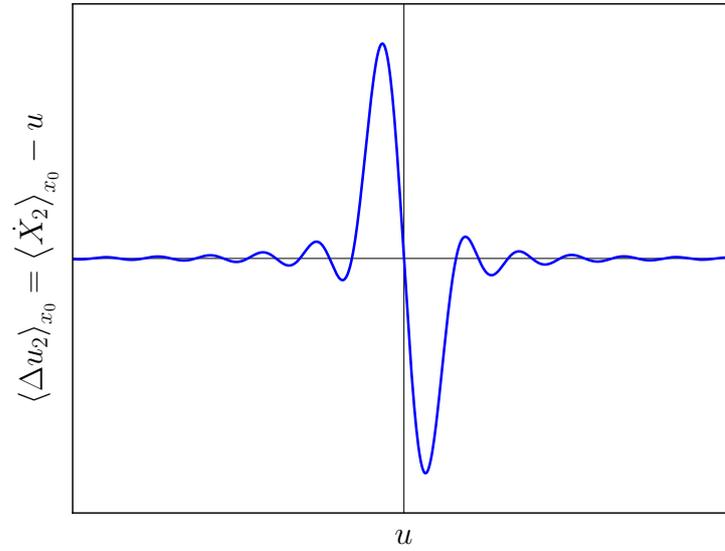


Figura 3.1: Comportamento do valor médio da variação da velocidade da partícula (com correção até segunda ordem em ϵ) com sua velocidade inicial u relativa à onda. O processo de sincronização pode ser verificado pela análise de sinal do produto $u \cdot \Delta u_2$.

De agora em diante, como todas as análises são feitas para valores médios das quantidades físicas, omitiremos a notação $\langle \dots \rangle_{x_0}$, porém subentende-se que a média sobre as posições iniciais é tomada. Além disso, podemos interpretar as quantidades físicas como sendo referentes a um feixe de partículas rotulado pela velocidade inicial u .

Assumindo que cada feixe possui uma densidade n_u de partículas, a variação na densidade de momento total das partículas é dada por

$$\Delta p_k(t) = m \sum_u n_u \Delta u_2^{(2)}(t). \quad (3.1.11)$$

No limite de uma distribuição contínua das velocidades dos feixes, a densidade de momento total transferido pela onda para as partículas (ou das partículas para a onda) no intervalo de tempo Δt é dada por

$$\Delta p_k(t) = \frac{m\epsilon^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} du F_w(u) \frac{1}{u^3} \left(\cos ku\Delta t - 1 + \frac{1}{2} ku\Delta t \sin ku\Delta t \right), \quad (3.1.12)$$

onde $F_w(u) = F(u + \omega/k)$ representa a distribuição de velocidades no referencial da onda e fizemos a substituição t por Δt por razões didáticas.

O fator $1/u^3$ no integrando indica que a maior contribuição para a integral vem do intervalo próximo a $u = 0$ (variação no momento é local nas velocidades), o que nos

motiva a expandir a função $F_w(u)$ em torno da origem para obter a seguinte expressão

$$\Delta p_k(t) = \frac{m\varepsilon^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \left[F_w(0) + F_w'(u)u + \frac{F_w''(0)}{2}u^2 + \dots \right] \times \left[\frac{1}{u^3} \left(\cos ku\Delta t - 1 + \frac{1}{2}ku\Delta t \sin ku\Delta t \right) \right]. \quad (3.1.13)$$

Como o segundo fator entre colchetes na integral é uma função ímpar, apenas as potências ímpares em u no primeiro fator fornecem contribuição não nula para a integral. Dessa forma, até segunda ordem em u , obtemos a seguinte expressão para o momento total transferido

$$\Delta p_k(t) = \frac{m\varepsilon^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} du F_w'(0) \left(\frac{\cos ku\Delta t - 1}{u^2} + \frac{k\Delta t \sin ku\Delta t}{2u} \right). \quad (3.1.14)$$

O termo $(\cos ku\Delta t - 1)/u^2$ pode ser integrado por partes e no limite $\Delta t \rightarrow 0$ a taxa de variação temporal no momento é calculada como

$$\frac{\Delta p_k(t)}{\Delta t} = -\frac{m\varepsilon^2 n_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{f_w'(0)}{2} \frac{\sin \alpha \Delta t}{\alpha} \quad (\Delta t \rightarrow 0), \quad (3.1.15)$$

onde $f_w(0) = n_0^{-1} F_w(0)$ com n_0 representando a densidade inicial de partículas e $\alpha \equiv ku$.

Podemos finalmente obter uma expressão compacta para a taxa de variação do momento total das partículas se utilizarmos a identidade $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sin(x\Delta t)/\Delta t = \pi\delta(x)$ no integrando em (3.1.15). Dessa forma, obtemos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p_k(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dp_k(t)}{dt} = -\frac{\pi m\varepsilon^2 n_0}{2k} f'(\omega/k), \quad (3.1.16)$$

onde omitimos o subíndice da função de distribuição para nos referir ao referencial do laboratório.

Nesse ponto vale notar, pelo sinal da derivada $f'(\omega/k)$, que as partículas podem estar (na média) ganhando ou perdendo momento para a onda. Dentro do contexto apresentado nessa seção, esse resultado é bastante razoável e intuitivo. Por exemplo, no caso de uma distribuição suave e monotonicamente crescente, existe um número maior de partículas “rápidas” ($v > \omega/k$) cedendo momento para a onda e portanto contribuindo para a amplificação das oscilações. Por outro lado, distribuições monotonicamente decrescentes possuem mais partículas “lentas” ($v < \omega/k$) que retiram energia da onda e portanto contribuem para a atenuação das oscilações.

3.1.1 Conservação do momento total

A análise feita até agora na perspectiva das partículas nos permite obter informações também referentes à onda uma vez que o sistema está sujeito ao vínculo de que a densidade de momento total $p_{\text{tot}} = p_k + p_w$ é conservada.

A densidade de momento da onda, por sua vez, é composta de duas partes com contribuições iguais [29, 55]. Uma parte referente ao momento armazenado no campo eletrostático $E_w(x, t) = E_w \cos(kx - \omega t)$ e outra associada ao movimento oscilatório das partículas do *bulk*²

$$p_w = p_{w,E} + p_{w,bulk} = 2p_{w,E} . \quad (3.1.17)$$

A contribuição do momento armazenado no campo eletrostático é dada por $p_{w,E}(x) = \epsilon_0 k E_w^2 \sin^2(kx) / 2\omega$ [55]. Tomando a média dessa quantidade no período espacial do campo, obtemos

$$p_{w,E} = \frac{\epsilon_0 k E_w^2}{2\omega} \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \sin^2 kx dx = \frac{\epsilon_0 k E_w^2}{4\omega} . \quad (3.1.18)$$

Podemos então recorrer à conservação do momento total ($dp_w/dt = -dp_k/dt$) e obter a seguinte equação de evolução para o quadrado da amplitude da onda

$$\frac{dE_w^2}{dt} = \frac{\pi\omega}{k^2} \omega_p^2 f'(\omega/k) E_w^2 . \quad (3.1.19)$$

Dessa forma, a evolução da amplitude da onda é descrita por uma solução exponencial na forma

$$E_w(t) = E_w(0) e^{\gamma_L t} , \quad (3.1.20)$$

com o coeficiente de amortecimento ou amplificação dado por

$$\gamma_L = \frac{\pi\omega_p^3}{2k^2} f'(\omega/k) . \quad (3.1.21)$$

Assim como fizemos na seção 2.2.2 também assumimos o limite de plasma frio ($\omega \approx \omega_p$) para deduzir a expressão acima para o fator de Landau. Mostramos nessa seção como os efeitos de Landau podem ser derivados por meio de um modelo mecânico simples para a interação onda-partícula. A análise perturbativa de segunda ordem na amplitude da onda foi capaz de evidenciar o mecanismo de sincronização entre onda e partículas responsável pelos fenômenos de atenuação ou amplificação da onda. Conforme vimos na equação (3.1.9), tal mecanismo não pode ser observado se considerarmos somente termos

²No contexto da teoria cinética o *bulk* da distribuição pode ser interpretado como o intervalo de velocidades que contém as partículas não ressonantes.

de primeira ordem na perturbação. Portanto, do ponto de vista da teoria linear, um outro mecanismo deve ser responsável por gerar o amortecimento ou a amplificação da onda. No capítulo 4 discutiremos esse mecanismo com base na formulação hamiltoniana de feixes monocinéticos. A derivação mecânica apresentada nessa seção tem a vantagem de ser mais intuitiva que a derivação cinética discutida no capítulo anterior uma vez que não há necessidade de lidar com singularidades e prescrições apropriadas de contornos de integração. Além disso, em cada etapa dos cálculos podemos evidenciar aspectos físicos da dinâmica.

3.2 Teoria Quase-Linear

Conforme vimos na seção 2.2, na teoria linear das oscilações eletrostáticas em plasmas, a função de distribuição eletrônica é dividida em dois termos: uma parte não oscilante estacionária e uma pequena correção oscilatória. Diferente da formulação linear, a abordagem quase-linear considera as variações temporais, embora que suaves, da componente não oscilatória, i.e. $\partial_t F_0 \neq 0$. Dessa forma, a função de distribuição passa a ser escrita como

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \underbrace{F_0(\mathbf{v}, t)}_{\text{não oscilante}} + \underbrace{F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}_{\text{correção oscilatória}}, \quad (3.2.22)$$

tal que $F_0(\mathbf{v}, t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x$, onde V é o volume sobre o qual a integral é efetuada.

Apesar da teoria linear apresentada no capítulo 2 não levar em consideração a conexão entre essas duas partes, as oscilações no plasma de fato afetam a parte não oscilante da função de distribuição [56] o que se reflete em alterações significativas dos modos longitudinais de propagação [57, 58]. Os primeiros trabalhos que relataram esse fenômeno estão reportados nas referências [32, 33] e deram origem ao que hoje conhecemos como *teoria quase-linear*.

As equações básicas da teoria quase-linear são obtidas a partir das equações de Vlasov e Poisson para as variáveis dinâmicas $F = F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ e $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F - \frac{e}{m_e} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0, \quad (3.2.23)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \nabla^2\phi = \frac{e}{\epsilon_0} \left(\int F d^3v - n_0 \right). \quad (3.2.24)$$

Assumimos que o campo eletrostático é suficientemente fraco de forma que podemos desprezar os efeitos associados à interação entre diferentes modos. Assim, o campo pode ser expresso pela seguinte superposição de modos linearmente independentes

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t) , \quad (3.2.25)$$

onde os coeficientes $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ da expansão em (3.2.25) representam as amplitudes complexas das oscilações, que variam lentamente com o tempo.

A teoria quase-linear se baseia ainda em duas suposições à respeito da natureza do pacote de onda em (3.2.25). A primeira é a de que as fases $\delta(\mathbf{k})$ de diferentes amplitudes complexas $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ são independentes e aleatórias³. Isso significa que a média de cada amplitude sobre as fases é nula, ou seja

$$\langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) \rangle = 0 , \quad (3.2.26)$$

onde o *braket* $\langle \dots \rangle$ indica a média sobre $\delta(\mathbf{k})$. Segue ainda dessa hipótese que

$$\langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}^*(t) \rangle = |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)|^2 \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} . \quad (3.2.27)$$

Fórmulas similares também são válidas para as amplitudes do potencial

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}}(t) \rangle = 0, \quad \langle \varphi_{\mathbf{k}}(t) \varphi_{\mathbf{k}'}^*(t) \rangle = \varphi_{\mathbf{k}}(t) \varphi_{\mathbf{k}'}^*(t) \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} . \quad (3.2.28)$$

A segunda consideração é de que o campo eletrostático é uma onda quase-monocromática, ou seja, o pacote de onda em (3.2.25) é dado sobre um intervalo estreito no espaço dos vetores de onda. Dessa forma, o número de partículas ressonantes interagindo com a onda é consideravelmente menor do que o número total de partículas

$$\int_{\Delta\omega} dv_{\parallel} \int d^2v_{\perp} F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \ll n_0 , \quad (3.2.29)$$

onde v_{\parallel} é a componente da velocidade paralela a \mathbf{k} e $\Delta\omega = \Delta(\omega(\mathbf{k})/k)$ é o intervalo das velocidades de fase, correspondente ao intervalo de valores de \mathbf{k} do pacote de onda.

Feitas essas considerações, podemos agora substituir a equação (3.2.25) em (3.2.23) e em seguida tomar a média sobre as fases $\delta(\mathbf{k})$ para obter a seguinte equação

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F_0 - \frac{e}{m_e} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0 , \quad (3.2.30)$$

que para uma distribuição de equilíbrio espacialmente uniforme assume a forma

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle . \quad (3.2.31)$$

³Essa hipótese é conhecida como aproximação de fase aleatória [59, 60] originalmente introduzida por Bohm e Pines (1951).

A equação (3.2.30) fornece a evolução da função de distribuição de equilíbrio dos elétrons. Diferentemente das equações da teoria linear que discutimos no capítulo anterior, a equação (3.2.31) é de segunda ordem na perturbação. Observamos que não há dinâmica da distribuição F_0 se o termo de $O(2)$ for negligenciado.

Sabemos, por outro lado, que a parte oscilatória da função de distribuição satisfaz a equação

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F_1 - \frac{e}{m_e} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0. \quad (3.2.32)$$

Nosso problema consiste em obter uma expressão para F_1 em termos de F_0 ($F_1 = F_1\{F_0\}$) e substituir essa expressão em (3.2.31) para obter uma equação contendo somente F_0 . Para isso, assim como fizemos para o campo eletrostático \mathbf{E} , vamos expandir a função $F_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ em série de Fourier

$$F_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{v}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t). \quad (3.2.33)$$

Substituindo (3.2.33) em (3.2.32) e notando que o campo pode ser escrito em termos dos potencial eletrostático, na forma

$$\mathbf{E} = - \sum_{\mathbf{k}} i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t), \quad (3.2.34)$$

obtemos uma equação diferencial de primeira ordem para cada coeficiente de Fourier

$$\frac{\partial F_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{v}, t)}{\partial t} + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega(\mathbf{k})) F_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{v}, t) = - \frac{ie}{m_e} \phi_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.2.35)$$

Integrando essa equação e assumindo que a perturbação é nula em $t = 0$, obtemos

$$F_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{v}, t) = - \frac{ie}{m_e} \int_0^t dt' \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)) \phi_{\mathbf{k}}(t') \left[\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_0(\mathbf{v}, t')}{\partial \mathbf{v}} \right]. \quad (3.2.36)$$

Das equações (3.2.33), (3.2.36), (3.2.34) e lembrando que estamos considerando uma perturbação quase-monocromática, o termo dentro dos brackets em (3.2.31) fica dado por

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{v}} = \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}}^*(t) \int_0^t dt' \exp(i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} - \omega(\mathbf{k}'))(t' - t)) \phi_{\mathbf{k}'}(t') \left[\mathbf{k}' \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} \right]. \quad (3.2.37)$$

Tomando a média do segundo membro de (3.2.37) sobre as fases e assumindo a aproximação de fases aleatória (3.2.28) podemos escrever a equação (3.2.31), no limite

de \mathbf{k} contínuo, da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} F_0(\mathbf{v}, t) = \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} J_i(\mathbf{v}, t), \quad (3.2.38)$$

com as componentes do vetor \mathbf{J} dadas por

$$J_i(\mathbf{v}, t) = \sum_j \frac{e^2}{m_e^2} \int d^2 k_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dk_\parallel k_i k_j \Phi_{\mathbf{k}}^*(t) \int_0^t dt' \exp(i(k_\parallel v - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)) \Phi_{\mathbf{k}}(t') \frac{\partial F_0}{\partial v_j}, \quad (3.2.39)$$

onde k_\parallel e k_\perp representam, respectivamente, as componentes de \mathbf{k} paralela e perpendicular à velocidade \mathbf{v} dos elétrons.

A equação (3.2.38) possui a forma de uma equação de difusão no espaço das velocidades

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij} \frac{\partial F_0}{\partial v_j}, \quad (3.2.40)$$

onde $D_{ij} = D_{ij}(\mathbf{v}, t)$ representa o coeficiente de difusão.

Considerando que $\partial F_0 / \partial t$ e os coeficientes $\Phi_{\mathbf{k}}(t')$ são funções suaves do tempo e que \mathbf{v} não é uma velocidade ressonante, a principal contribuição à integral em (3.2.39) vem do intervalo em que $t' \approx t$ por conta das oscilações rápidas do integrando. Por outro lado, se \mathbf{v} é uma velocidade ressonante, i.e., se $k_\parallel v \approx \omega(\mathbf{k})$, podemos expressar a exponencial no integrando em uma série de Taylor em torno de k_0 , onde k_0 é o valor de k_\parallel tal que $k_\parallel v = \omega(\mathbf{k})$. Dessa forma intercambiando as integrais em (3.2.39) obtemos um integrando da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_\parallel k_i k_j \Phi_{\mathbf{k}}^*(t) \Phi_{\mathbf{k}}(t') \exp(i(k_\parallel v - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)) \\ \approx \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k_\parallel k_i k_j \Phi_{\mathbf{k}}^*(t) \Phi_{\mathbf{k}}(t') \exp\left(i\left(v - \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial k_\parallel} \Big|_{k_\parallel=k_0}\right) \Delta k_\parallel (t' - t)\right). \quad (3.2.41)$$

Observamos pela equação (3.2.41) que para valores de t' não próximos de t a integral novamente se anula por conta das rápidas oscilações do integrando. Dessa forma, tanto para velocidades ressonantes quanto para velocidades não ressonantes a integral no tempo em (3.2.39) contribui somente para $t' \approx t$. Dessa forma podemos expandir as

funções $\varphi_{\mathbf{k}}(t')$ e $\partial F_0(\mathbf{v}, t')/\partial t$ em torno de t e assim obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \varphi_{\mathbf{k}}(t') \frac{\partial}{\partial v_j} F_0(\mathbf{v}, t') \exp(i(k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)) \\ \approx \varphi_{\mathbf{k}}(t) \frac{\partial}{\partial v_j} F_0(\mathbf{v}, t) \int_0^t dt' \left[1 + \frac{1}{\varphi_{\mathbf{k}}(t)} \frac{\partial \varphi_{\mathbf{k}}(t')}{\partial t'} \Big|_{t'=t} (t' - t) \right] \\ \times \left[1 + \frac{1}{\partial F_0(\mathbf{v}, t)/\partial v_j} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial v_j} F_0(\mathbf{v}, t') \Big|_{t'=t} (t' - t) \right] \\ \times \exp(i(k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)) , \quad (3.2.42) \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que as funções $\varphi_{\mathbf{k}}(t')$ e $\partial F_0(\mathbf{v}, t')/\partial t$ variam lentamente no tempo para considerar somente a primeira ordem na expansão.

Definindo as funções

$$\gamma(\mathbf{k}) \equiv \frac{\partial}{\partial t'} \ln \varphi_{\mathbf{k}}(t') \Big|_{t'=t} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\tau(\mathbf{v})} \equiv \frac{\partial}{\partial t'} \ln \frac{\partial}{\partial v_j} F_0(\mathbf{v}, t') \Big|_{t'=t} , \quad (3.2.43)$$

a equação (3.2.42) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \varphi_{\mathbf{k}}(t') \frac{\partial}{\partial v_j} F_0(\mathbf{v}, t') \exp(i(k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)) \\ \approx \varphi_{\mathbf{k}}(t) \frac{\partial}{\partial v_j} F_0(\mathbf{v}, t) \int_0^t dt' \exp(i(k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k}) - i\gamma(\mathbf{k}) - i/\tau(\mathbf{v}))(t' - t)) . \quad (3.2.44) \end{aligned}$$

Para tempos suficientemente grandes ($\omega t \gg 1$) podemos usar a identidade (2.2.34) como valor aproximado para a integral em (3.2.44). Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \varphi_{\mathbf{k}}(t') \frac{\partial}{\partial v_j} F_0(\mathbf{v}, t') \exp(i(k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)) \\ \approx -i\varphi_{\mathbf{k}}(t) \frac{\partial}{\partial v_j} F_0(\mathbf{v}, t) \cdot \frac{1}{k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k}) - i\gamma(\mathbf{k}) - i/\tau(\mathbf{v})} . \quad (3.2.45) \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Sokhotski-Plemelj[7]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x_0 \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0) , \quad (3.2.46)$$

a equação (3.2.39) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} J_i(\mathbf{v}, t) = - \sum \frac{ie^2}{m_e^2} \int dk_{\perp}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\parallel} k_i k_j |\varphi_{\mathbf{k}}(t)|^2 \partial F_0 / \partial v_j \\ \times \left[P \frac{1}{k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k}) - i\gamma(\mathbf{k}) - i/\tau(\mathbf{v})} + i\pi\delta(k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k})) \right] . \quad (3.2.47) \end{aligned}$$

Novamente, usando o fato de que as funções $\varphi_{\mathbf{k}}(t')$ e $\partial F_0(\mathbf{v}, t')/\partial t$ são suaves no tempo, temos, pelas definições em (3.2.43), que $\gamma(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ e $\tau(\mathbf{v}) \rightarrow \infty$. Dessa forma, o valor principal da integral em (3.2.47) se anula uma vez que o integrando é uma função ímpar de \mathbf{k} . A equação (3.2.38) fica então dada por

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int d^3 k k_i k_j |\varphi_{\mathbf{k}}(t)|^2 \delta(k_{\parallel} v - \omega) \frac{\partial}{\partial v_j} F_0(\mathbf{v}, t) . \quad (3.2.48)$$

Comparando esse resultado com a equação (3.2.40), podemos identificar o coeficiente de difusão

$$D_{ij}(\mathbf{v}, t) = \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int d^3 k k_i k_j |\varphi_{\mathbf{k}}(t)|^2 \delta(k_{\parallel} v - \omega) . \quad (3.2.49)$$

A equação (3.2.48) determina a taxa de variação da parte não oscilante da função de distribuição sob a influência das oscilações do plasma. O fato de que essa mudança ocorre apenas nas vizinhanças da velocidade de fase da onda está explicitada pela presença da distribuição delta no integrando dessa equação.

3.2.1 Relaxação quase-linear

A equação de difusão (3.2.48) prevê que o sistema composto pelas partículas ressonantes e uma oscilação eletrostática quase-monocromática se aproxima de um estado estacionário à medida que $t \rightarrow \infty$. Nesse processo de relaxação para o estado de equilíbrio, denominado *relaxação quase-linear* ou *relaxação não colisional*, a função de distribuição (integrada nas posições) F_0 sofre um achatamento nas vizinhanças da velocidade de fase da onda e as mudanças na amplitude da oscilação tornam-se cada vez menores.

Podemos demonstrar esse processo multiplicando ambos os lados da equação de difusão (3.2.48) por F_0 e integramos sobre todo o espaço de velocidades

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = -\frac{2\pi e^2}{m_e^2} \sum_{\mathbf{k}} \int d^3 v |\varphi_{\mathbf{k}}(t)|^2 \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial t} \right)^2 \delta(\omega(\mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})) , \quad (3.2.50)$$

onde a função $\sigma(t)$ é por definição

$$\sigma(t) \equiv \int F_0^2 d^3 v . \quad (3.2.51)$$

Como $\sigma(t)$ é uma função estritamente positiva e conforme vemos da equação

(3.2.50) é também monotonicamente decrescente, temos, necessariamente, que

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0^- . \quad (3.2.52)$$

Consequentemente, quando $t \rightarrow 0$ o segundo membro de (3.2.50) também se anula e como seu integrando é positivo, a seguinte equação deve ser válida

$$|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial t} \right)^2 \Big|_{\omega(\mathbf{k})=\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} = 0 . \quad (3.2.53)$$

Portanto, à medida que $t \rightarrow \infty$ devemos ter

$$|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 = 0 \quad (3.2.54)$$

ou

$$\left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial t} \right) \Big|_{\omega(\mathbf{k})=\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} = 0 . \quad (3.2.55)$$

Em outras palavras, as equações (3.2.54) e (3.2.55) mostram que para $t \rightarrow \infty$, ou as oscilações são completamente amortecidas ou elas são parcialmente amortecidas e um plateau é formado na função de distribuição. É importante também notar que se o intervalo no espaço das velocidades ocupado pelas partículas ressonantes for muito grande, isto é, se a condição (3.2.29) não for satisfeita, torna-se impossível que se forme um plateau, uma vez que seria necessário mais energia do que aquela armazenada inicialmente na onda.

3.3 Método semi-lagrangiano para simulações numéricas

No contexto da Física de Plasmas, o método semi-lagrangiano foi introduzido em 1976 para a resolução do sistema acoplado Vlasov-Poisson [61]. No entanto, esse método pode ser utilizado para obter a solução numérica de um ampla variedade de sistemas, descritos inclusive por outras equações de transporte [62] além da equação de Vlasov. Equações que regem a dinâmica de fluxos na atmosfera [63, 64] constituem exemplos de aplicação prática desse método.

Nosso objetivo nessa seção é fornecer as ferramentas teóricas e computacionais necessárias para o estudo da interação onda-partícula que faremos no capítulo 5. Discutiremos as idéias fundamentais do método semi-lagrangiano e, por meio da equação de Liouville, buscaremos fazer uma conexão entre o operador de evolução temporal *leapfrog*

utilizado em simulações de dinâmica molecular [65] e o operador de evolução temporal associado à equação de Vlasov.

3.3.1 Equação de Liouville

Dado um sistema unidimensional de N -partículas interagindo aos pares descrito pela hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i<j}^N \sum_{j=1}^N V(|x_i - x_j|), \quad (3.3.56)$$

a evolução de uma função dinâmica qualquer $B(x_1, \dots, x_N; p_1, \dots, p_N)$ associada a esse sistema é obtida a partir da equação de Liouville [41, 66]

$$\dot{B}(\chi_1, \dots, \chi_N) = -\hat{L} B(\chi_1, \dots, \chi_N), \quad (3.3.57)$$

onde definimos $\chi_i \equiv (x_i, p_i)$ como o vetor de estado associado a i -ésima partícula e o operador Liouvilliano \hat{L} dado por

$$\hat{L} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (3.3.58)$$

A solução formal da equação (3.3.57) é dada por

$$B(\chi_1(t_0 + \Delta t), \dots, \chi_N(t_0 + \Delta t)) = e^{-\Delta t \hat{L}} B(\chi_1(t_0), \dots, \chi_N(t_0)). \quad (3.3.59)$$

A exponencial no segundo membro representa um propagador para o sistema que mapeia $B(t_0)$ em $B(t_0 + \Delta t)$. Esse operador pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} e^{-\Delta t \hat{L}} &\equiv \Theta(\Delta t) = e^{-\Delta t \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right)} \\ &= e^{-\frac{\Delta t}{2} \sum_k \left[\sum_i \sum_j \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \sum_i \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{p_i^2}{m_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \right]} \\ &= e^{\frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_j} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial x_i}} \\ &= e^{\Delta t (\hat{v} + \hat{\kappa})}, \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

onde os operadores \hat{v} e $\hat{\kappa}$ são dados por

$$\hat{v} = \sum_{i<j}^N \sum_{j=1}^N F_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_j} \right), \quad \hat{\kappa} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3.3.61)$$

com $F_{ij} = -\partial V_{ij} / \partial x_i$ representando a força que a partícula j exerce sobre a i -ésima

partícula.

A princípio, para obter o valor da função dinâmica B no instante $t_0 + \Delta t$ é necessário expandir a exponencial (3.3.60) em potências dos operadores \hat{v} e $\hat{\kappa}$. Contudo, se assumirmos $\Delta t \ll 1$, é possível desprezar correções de ordem elevada em Δt e obter uma solução aproximada de cálculo mais simples.

3.3.2 Solução aproximada da equação de Liouville

Com o intuito de obter uma solução aproximada para a equação (3.3.57) vamos assumir que o operador de evolução temporal (3.3.60) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\Theta^{approx.}(\Delta t) = e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{\kappa}} e^{\Delta t\hat{v}} e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{\kappa}}. \quad (3.3.62)$$

Podemos verificar que reescrever o operador $\Theta(\Delta t)$ na forma explicitada acima gera um erro $\Theta^{approx.}(\Delta t) - e^{-\Delta t\hat{L}}$ de terceira ordem em Δt

$$\begin{aligned} \text{erro} &= \left[1 + \frac{\Delta t}{2}\hat{\kappa} + \frac{\Delta t^2}{8}\hat{\kappa}^2 + O(\Delta t^3) \right] \left[1 + \Delta t\hat{v} + \frac{\Delta t^2}{2}\hat{\kappa}^2 + O(\Delta t^3) \right] \\ &\quad \left[1 + \frac{\Delta t}{2}\hat{\kappa} + \frac{\Delta t^2}{8}\hat{\kappa}^2 + O(\Delta t^3) \right] - e^{\Delta t(\hat{v}+\hat{\kappa})} \\ &= 1 + \Delta t(\hat{\kappa} + \hat{v}) + \frac{\Delta t^2}{2}(\hat{\kappa}^2 + \hat{v}^2 + \kappa v + v\kappa) + O(\Delta t^3) - e^{\Delta t(\hat{v}+\hat{\kappa})} \\ &= O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (3.3.63)$$

Expandindo a última exponencial na penúltima linha da equação acima verificamos que todos os termos de ordem igual ou inferior a Δt^2 se cancelam e portanto o erro na aproximação

$$B(t_0 + \Delta t) \approx \Theta^{approx.}(\Delta t)B(t_0) \quad (3.3.64)$$

é de fato de terceira ordem em Δt .

Integradores simpléticos ⁴ de ordens mais elevadas são discutidos na referência [69]. Para ordens maiores em Δt , devemos recorrer às fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff e Zassenhaus [70] para a obtenção do operador de evolução aproximado.

⁴Integradores que preservam a estrutura simplética do fluxo de uma equação diferencial $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$, sendo $\mathbf{X}, \Phi \in \mathbb{R}^{2N}$. São utilizados para obter a evolução de sistemas dinâmicos cujas equações de movimento linearizadas podem ser descritas por mapas do tipo $\mathbf{X}(t+h) = \mathbf{M}_h \mathbf{X}(t)$, onde $\mathbf{M}_h \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ é uma matriz simplética, que portanto satisfaz a condição $\mathbf{M}_h^T \mathbf{J} \mathbf{M}_h = \mathbf{J}$, onde $\mathbf{J} = [[\mathbf{0}_d, \mathbf{I}_d], [-\mathbf{I}_d, \mathbf{0}_d]]$ (com $d = N \times N$) é a matriz elementar anti-simétrica. Por preservar a forma simplética de um fluxo hamiltoniano Φ_H , integradores simpléticos são a escolha natural como esquema numérico de integração das equações de Hamilton [67, 68].

Para determinar o valor de uma variável dinâmica qualquer em um dado instante de tempo t é mais fácil do ponto de vista prático discretizar o tempo em instantes $t_n = n\Delta t$ intermediários e obter o valor dessa variável através de sucessivas aplicações do operador $\Theta^{approx.}(\Delta t)$ com $\Delta t \ll 1$ em vez de uma única aplicação do operador $e^{-\Delta t \hat{L}}$, que fornece a solução exata, porém de cálculo muito dispendioso.

3.3.3 Evolução $\Theta^{approx.}(\Delta t)$ das posições e momentos

Discutiremos nessa seção como o operador $\Theta^{approx.}(\Delta t)$ age sobre as variáveis dinâmicas posição e momento de uma dada partícula. Nesse caso, nossa função dinâmica genérica B passa a ser representada por x_ℓ e p_ℓ e a equação (3.3.64) fica dada por

$$x_\ell(t_n + \Delta t) = x_\ell(t_{n+1}) \approx e^{\frac{\Delta t}{2} \hat{\kappa}} e^{\Delta t \hat{\nu}} e^{\frac{\Delta t}{2} \hat{\kappa}} x_\ell(t_n), \quad (3.3.65)$$

$$p_\ell(t_n + \Delta t) = p_\ell(t_{n+1}) \approx e^{\frac{\Delta t}{2} \hat{\kappa}} e^{\Delta t \hat{\nu}} e^{\frac{\Delta t}{2} \hat{\kappa}} p_\ell(t_n). \quad (3.3.66)$$

A evolução no passo de tempo Δt representada pelas equações acima pode ser dividida em três etapas:

(I) – Aplicação do operador $e^{\frac{\Delta t}{2} \hat{\kappa}}$ sobre o estado inicial $\chi_\ell(t_n)$:

$$\chi_\ell^{(I)}(t_n) = \left[\mathbf{1} + \frac{\Delta t}{2} \sum_i \frac{p_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{8} \sum_i \sum_j \frac{p_i p_j}{m_i m_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + O(\Delta t^3) \right] \chi_\ell(t_n), \quad (3.3.67)$$

onde utilizamos a notação compacta $\chi_\ell = (x_\ell, p_\ell)$.

Como o operador entre colchetes envolve somente derivadas nas posições, a componente p_ℓ do vetor χ_ℓ permanece inalterada. Para a componente x_ℓ , os termos de ordem superior a 1 nas derivadas não contribuem e, dessa forma, obtemos a seguinte transformação

$$x_\ell^{(I)}(t_n) = x_\ell(t_n) + \frac{p_\ell(t_n) \Delta t}{m_\ell}, \quad p_\ell^{(I)}(t_n) = p_\ell(t_n). \quad (3.3.68)$$

(II) – Aplicação do operador $e^{\Delta t \hat{\nu}}$ sobre o estado $\chi_\ell^{(I)}(t_n)$:

$$\chi_\ell^{(II)}(t_n) = \left[\mathbf{1} + \Delta t \sum_i \sum_j F_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_j} \right) + O(\Delta t^2) \right] \chi_\ell^{(I)}(t_n), \quad (3.3.69)$$

que nos fornece

$$x_\ell^{(II)}(t_n) = x_\ell^{(I)}(t_n), \quad p_\ell^{(II)}(t_n) = p_\ell^{(I)}(t_n) + \Delta t F_\ell(t_n), \quad (3.3.70)$$

onde $F_\ell = \sum_{j \neq \ell} F_{\ell j}$ representa a força resultante sobre a ℓ -ésima partícula.

(III) – Aplicação do operador $e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{\kappa}}$ sobre o estado $\chi_\ell^{(II)}(t_n)$:

$$\chi_\ell^{(III)}(t_n) = \left[\mathbf{1} + \frac{\Delta t}{2} \sum_i \frac{p_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + O(\Delta t^2) \right] \chi_\ell(t_n), \quad (3.3.71)$$

de onde obtemos

$$x_\ell^{(III)}(t_n) = x_\ell(t_{n+1}) = x_\ell^{(II)}(t_n) + \frac{p_\ell(t_n) \Delta t}{m_\ell}, \quad p_\ell^{(III)}(t_n) = p_\ell(t_{n+1}) = p_\ell^{(II)}(t_n). \quad (3.3.72)$$

Essas três etapas da evolução descrevem os passos do integrador *leapfrog* para a equação de Liouville. Conforme mostramos na equação (3.3.63), $\Theta^{approx}(\Delta t)$ é exato até segunda ordem em Δt e por esse motivo dizemos que é um integrador de segunda ordem.

3.3.4 Evolução da função de distribuição de uma partícula

Consideremos agora uma única partícula (de massa $m = 1$), com hamiltoniana $H = p^2/2 + V(x)$. Vejamos como a idéia apresentada nas seções anteriores pode ser utilizada aqui para gerar a evolução da função de distribuição $f(x, p, t)$ dessa partícula.

Nesse caso, a função dinâmica depende explicitamente do tempo e portanto a equação de Liouville assume a forma

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial t} - \hat{L}f \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + F \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \end{aligned} \quad (3.3.73)$$

onde F aqui representa a força sobre a partícula e a última igualdade diz respeito ao fato de f ser uma quantidade conservada ao longo da trajetória (curva característica) do sistema.

A solução formal da equação (3.3.73) é portanto

$$f(x, p, t_0 + \Delta t) = e^{-\Delta t \left(F \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial x} \right)} f(x, p, t_0), \quad (3.3.74)$$

onde o operador de evolução também admite uma forma aproximada decomposta em três partes, i.e.

$$f(x, p, t_0 + \Delta t) \approx e^{-\frac{\Delta t}{2} p \frac{\partial}{\partial x}} e^{-\Delta t F \frac{\partial}{\partial p}} e^{-\frac{\Delta t}{2} v \frac{\partial}{\partial x}} f(x, p, t_0) + O(\Delta t^3). \quad (3.3.75)$$

Nesse caso, as três etapas que compõem a evolução de f em um intervalo de tempo Δt são dadas por:

(I) – Advecção de f na direção- x por um passo de tempo $\Delta t/2$:

$$f^{(I)}(x, p) = f(x - p\Delta t/2, p, t_0) ; \quad (3.3.76)$$

(II) – Advecção de f na direção- p por um passo de tempo Δt :

$$f^{(II)}(x, p) = f^{(I)}(x, p - F\Delta t) ; \quad (3.3.77)$$

(III) – Advecção de f na direção- x por um passo de tempo $\Delta t/2$:

$$f^{(III)}(x, p) = f(x, p, t_0 + \Delta t) = f^{(II)}(x - p\Delta t/2, p) . \quad (3.3.78)$$

Os passos descritos anteriormente resumem o método semi-lagrangiano para integrar a equação de Vlasov para um sistema unidimensional. Esse método e sua eficiência são discutidos com maiores detalhes nas referências [71, 54, 52] com aplicações para o modelo Vlasov-Poisson a fim de descrever o amortecimento de Landau e instabilidades de dois feixes.

3.3.5 Procedimento de interpolação

Para analisar a evolução da função de distribuição f do ponto de vista numérico, o primeiro passo é gradear o espaço de fase em $N_x \times N_p$ pontos e inicializar a função de distribuição em cada um desses pontos com valores $f_{ij}^0 = f(x_i, p_j, t_0)$. Em seguida utilizamos as regras de evolução apresentadas na seção anterior para determinar os novos valores $f_{ij}^n = f(x_i, p_j, t_0 + n\Delta t)$ nos instantes seguintes.

Contudo, conforme observamos pela equação (3.3.76), para o cálculo de $f^{(I)}(x_i, p_j)$ é necessário o conhecimento do valor inicial de f no ponto $(x_i - p_j\Delta t/2, p_j)$, que não necessariamente é um ponto sobre a malha. O valor de $f(x_i - p_j\Delta t/2, p, t_0)$ deve ser portanto obtido através de uma interpolação (nas posições) de valores f_{ij}^0 conhecidos. Da mesma forma, no passo (II) não necessariamente o termo $F\Delta t$ é um múltiplo do intervalo $p_{j+1} - p_j$ da malha numérica e por esse motivo se faz necessária também efetuar uma interpolação, nesse caso em relação aos momentos. Em resumo, cada uma das atribuições representadas nas equações (3.3.76) - (3.3.78) devem ser feitas mediante uma interpolação.

Seja (x, p_j) um ponto qualquer do espaço de fase tal que $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, o valor interpolado (nas posições) para $f(x, p_j)$ é dado por [72]

$$f(x, p_j) = \alpha f_{kj} + \beta f_{k+1,j} + \gamma f''_{kj} + \delta f''_{k+1,j} . \quad (3.3.79)$$

onde

$$f''_{ij} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{ij} + f_{i-1,j}}{(x_{i+1} - x_i)^2} \quad (3.3.80)$$

representa uma expressão para o cálculo da derivada segunda numérica, e os coeficientes

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \beta &= 1 - \alpha \\ \gamma &= \frac{\alpha^3 - \alpha}{6}(x_{i+1} - x_i)^2, & \delta &= \frac{\beta^3 - \beta}{6}(x_{i+1} - x_i)^2 \end{aligned} \quad (3.3.81)$$

são tais a garantir a continuidade da segunda derivada de f .

O valor interpolado de f nos momentos é obtido de forma análoga. Nesse ponto, é importante notar que a interpolação descrita em (3.3.79) requer a utilização de 4 pontos da malha numérica, que representa a quantidade mínima de pontos necessários para efetuar uma interpolação cúbica. Outros tipos de interpolação são discutidos nas referências [72, 73].

3.3.6 Exemplo teste: pêndulo não linear

Utilizamos o pêndulo não linear como um exemplo prático para aplicação das ferramentas apresentadas nessa seção. Os códigos contendo os passos do integrador bem como a rotina de interpolação utilizados nessa simulação estão apresentados no apêndice B. Utilizamos condições de contorno periódicas nas posições e impusemos que para qualquer instante a distribuição se anula em pontos fora da malha numérica, i.e. $f(x, p, t) = 0$ se $|p| > 6$, que equivale a $f_{ij}^n = 0$ se $j < 0$ ou $j > N_p - 1$.

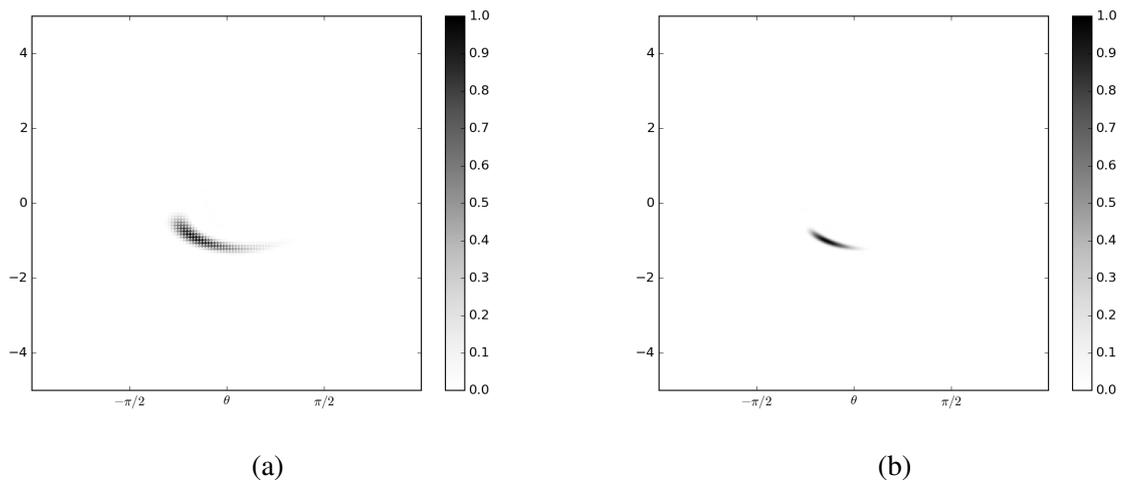


Figura 3.2: Retrato de fase da função de distribuição do pêndulo não linear em regime confinado ($-\pi < x < \pi$) após quatro oscilações completas (a) para uma malha numérica de 128×128 pontos e (b) para uma malha de 256×256 pontos.

Na figura 3.2 descrevemos a evolução da função de distribuição do sistema descrito pela hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2} + 1 - \cos(x)$ iniciando com uma função de distribuição localizada. Utilizamos duas diferentes discretizações para o espaço de fase: uma malha com 128×128 pontos e uma malha mais refinada com 256×256 pontos. A função de distribuição inicialmente concentrada em um único ponto rapidamente se difunde pelo espaço de fase como consequência do processo de interpolação e da finitude da malha. Esse espalhamento pode ser minimizado alterando o algoritmo de interpolação e aumentando o refinamento da malha numérica.

Finalizamos o capítulo destacando a possibilidade de paralelização das advecções nas posições e nos momentos descritas em (3.3.76) - (3.3.78) bem como da rotina de interpolação. Na referência [73] investigam-se os ganhos em tempo computacional resultantes da implementação paralelizada do método semi-lagrangiano para modelos hamiltonianos unidimensionais com interações de longo alcance em diferentes placas gráficas.

Dinâmica do sistema de feixes monocinéticos e uma onda de Langmuir

Nesse capítulo, discutimos o mecanismo de *phase mixing* responsável pelos fenômenos de atenuação e amplificação de uma onda de Langmuir com base no modelo hamiltoniano proposto em [13, 14, 15].

Iniciamos os cálculos partindo da definição da hamiltoniana que descreve a dinâmica autoconsistente entre uma onda de Langmuir e partículas ressonantes e estabelecemos como estado de equilíbrio do sistema a configuração em que a onda possui amplitude nula e as partículas encontram-se agrupadas em feixes monocinéticos¹ [18, 15]. A dinâmica linear do sistema composto por feixes monocinéticos e uma onda de Langmuir pode ser decomposta em duas partes: uma parte que designaremos balística, em que as perturbações nos momentos e posições independem da amplitude da onda, e uma parte do tipo onda que contém de fato toda a informação da interação entre onda e feixes.

Conforme veremos a seguir, os principais benefícios dessa abordagem discretizada do sistema são evitar os problemas relacionados a singularidades e a prescrição de contornos de integração apropriados inerentes à abordagem cinética.

4.1 O modelo hamiltoniano onda-partícula

Nesse modelo, o plasma é considerado como um sistema composto de uma única onda com frequência ω_0 e vetor de onda k_w que interage com N partículas ressonantes e cuja dinâmica é obtida a partir da seguinte hamiltoniana

$$H = \sum_{l=1}^N \frac{p_l^2}{2} + \omega_0 \frac{X^2 + Y^2}{2} + \varepsilon k_w^{-1} \sum_{l=1}^N (Y \sin k_w x_l - X \cos k_w x_l), \quad (4.1.1)$$

onde ε é a constante de acoplamento entre onda e partícula, X e Y correspondem as componentes cartesianas da amplitude da onda $Z = X + iY$. Assumimos que o vetor de

¹Denotamos por feixe monocinético o conjunto de partículas que viajam com mesma velocidade.

onda da oscilação é tal que $k_w = 2\pi j/L$, onde L representa o período espacial do sistema e j um número inteiro.

O primeiro termo em (4.1.1) representa a energia cinética das partículas ressonantes enquanto que o segundo termo corresponde à energia da onda, que está associado ao movimento vibratório das partículas do *bulk*. O último termo dessa hamiltoniana (responsável por introduzir o caráter não linear da dinâmica) representa a energia de interação entre a onda e as partículas ressonantes.

As variáveis dinâmicas x_l , p_l , X e Y compõem pares canonicamente conjugados que satisfazem as equações de Hamilton $\dot{x}_l = \partial H / \partial p_l$, $\dot{p}_l = -\partial H / \partial x_l$, $\dot{X} = \partial H / \partial Y$ e $\dot{Y} = -\partial H / \partial X$, de onde deriva o seguinte sistema de $2N + 1$ equações

$$\dot{x}_l = p_l, \quad 1 \leq l \leq N, \quad (4.1.2)$$

$$\dot{p}_l = \epsilon \text{Im} \left(Z e^{ik_w x_l} \right), \quad 1 \leq l \leq N, \quad (4.1.3)$$

$$\dot{Z} = -i\omega_0 Z + i\epsilon k_w^{-1} \sum_{l'=1}^N e^{-ik_w x_{l'}}. \quad (4.1.4)$$

Vale notar na equação (4.1.4) que a evolução das componentes cartesianas X e Y foi simplificada à uma única equação para a amplitude complexa Z . Essa quantidade representa um campo médio e guarda algumas semelhanças com a magnetização do modelo hamiltoniano XY de campo médio². Contudo, há duas diferenças fundamentais entre esses dois modelos: a primeira é que as componentes cartesianas da amplitude da onda Z , ao contrário das componentes da magnetização, são variáveis dinâmicas canonicamente conjugadas. A segunda diferença é que essas componentes existem independentemente da presença das partículas ressonantes. Nesse caso, a onda se propaga livremente no plasma sem sofrer amplificação ou atenuação.

4.1.1 Definição do estado de equilíbrio

O sistema onda-partícula descrito pelas equações (4.1.2) - (4.1.4) admite como estado de equilíbrio a configuração em que a onda possui amplitude nula e as N partículas estão agrupadas em b feixes monocinéticos, caracterizados por uma velocidade v_s e número de partículas N_s conforme ilustrado na figura 4.1.

Seja $x_{ns}^{(0)}$ a posição, na configuração de equilíbrio, da n -ésima partícula do feixe

²O modelo HMF (*Hamiltonian Mean Field*) com potencial do tipo cosseno é um modelo unidimensional simplificado de partículas interagindo por forças de longo alcance e em movimento restrito a uma circunferência de raio unitário [74].

s. A trajetória dessa partícula pode ser escrita da seguinte forma

$$x_{ns}^{(0)}(t) = \phi_s + n \frac{L}{N_s} + v_s t, \quad (4.1.5)$$

onde assumimos que em cada feixe as partículas encontram-se uniformemente distribuídas. A constante ϕ_s representa apenas um deslocamento entre as posições das partículas pertencentes a diferentes feixes.

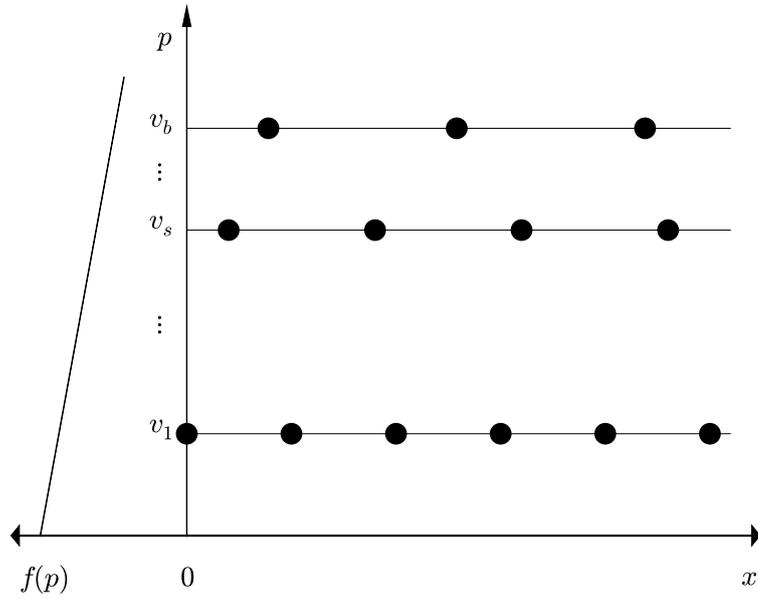


Figura 4.1: Ilustração dos feixes monocinéticos para o caso de uma distribuição de velocidade com inclinação negativa. Figura adaptada da referência [15].

Supondo que as coordenadas das partículas são dadas pela equação (4.1.5), o somatório em (4.1.4) pode ser reescrito como

$$\sum_{l'=1}^N e^{-ik_w x_{l'}} = \sum_{s=1}^b e^{-i \frac{2\pi}{L} j (\phi_s + v_s t)} \sum_{n=1}^{N_s} e^{-i 2\pi n (\frac{j}{N_s})}, \quad (4.1.6)$$

que é identicamente nulo desde que o número de partículas por feixe satisfaça a condição

$$\frac{j}{N_s} \notin \mathbb{Z} \quad \forall s \in [1, b]. \quad (4.1.7)$$

Do ponto de vista físico, podemos afirmar que a condição (4.1.7) é sempre satisfeita se considerarmos que cada feixe s possui mais de uma partícula contida no intervalo $\lambda_w = 2\pi/k_w$ de variação do campo, i.e., $L/N_s < \lambda_w$ resultando em $N_s > j$. Dessa

forma, os campos gerados pelas N partículas sofrem uma interferência destrutiva total e portanto, se inicialmente a amplitude da onda é nula, a estrutura de feixes monocinéticos representada por (4.1.5) é preservada ao longo da dinâmica.

O estado de equilíbrio do sistema é então definido como

$$x_l(t) = x_{ns}^{(0)}(t), \quad (4.1.8)$$

$$p_l(t) = v_s, \quad (4.1.9)$$

$$Z(t) = 0, \quad (4.1.10)$$

onde a nova indexação para as partículas em termos dos feixes é tal que $l = n$ se $s = 1$ e $l = n + \sum_{s'=1}^{s-1} N_{s'}$ para $1 < s \leq b$. Não existe solução de (4.1.2) - (4.1.4) similar à apresentada acima para Z diferente de zero [75].

4.1.2 Equações de movimento linearizadas

Considerando que o sistema esteja ligeiramente deslocado da configuração de equilíbrio (4.1.8) - (4.1.10), a evolução da amplitude da onda e das perturbações associadas à n -ésima partícula do feixe s são dadas pela forma linearizada das equações de movimento

$$\delta \dot{x}_{ns} = \delta p_{ns}, \quad (4.1.11)$$

$$\delta \dot{p}_{ns} = -\epsilon \text{Im} \left(Z e^{-ik_w x_{ns}^{(0)}} \right), \quad (4.1.12)$$

$$\dot{Z} = -i\omega_0 Z + \epsilon \sum_{s=1}^b \sum_{n=1}^{N_s} \delta x_{ns} e^{-ik_w x_{ns}^{(0)}}, \quad (4.1.13)$$

onde $\delta x_{ns}(t) = x_{ns}(t) - x_{ns}^{(0)}(t)$ e $\delta p_{ns}(t) = p_{ns}(t) - v_s$.

As perturbações nas posições e momentos podem ser representadas em termos de séries de Fourier da forma

$$\delta p_{ns}(t) = \sum_{m \in \mu_s} A_{ms}(t) e^{ik_m x_{ns}^{(0)}(t)}, \quad (4.1.14)$$

$$\delta x_{ns}(t) = -i \sum_{m \in \mu_s} C_{ms}(t) e^{ik_m x_{ns}^{(0)}(t)}, \quad (4.1.15)$$

onde $k_m = 2\pi m/L$ e o conjunto dos inteiros μ_s definido como

$$\mu_s = \begin{cases} \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq (N_s - 1)/2\}, & \text{se } N_s \text{ for ímpar} \\ \{m \in \mathbb{Z} : 1 - N_s/2 \leq m \leq N_s/2\}, & \text{se } N_s \text{ for par} \end{cases} \quad (4.1.16)$$

é tal que as exponenciais em (4.1.14) e (4.1.15) constituem um conjunto completo de funções ortogonais.

Os coeficientes das expansões satisfazem as relações $A_{-ms} = A_{ms}^*$ e $C_{-ms} = -C_{ms}^*$ e portanto, as perturbações nos momentos e nas posições são quantidades reais. Além disso, esses coeficientes podem ser escritos em termos da transformada inversa das perturbações da seguinte forma

$$A_{ms} = N_s^{-1} \sum_{n=1}^{N_s} \delta p_{ns}(t) e^{-ik_m x_{ns}^{(0)}(t)}, \quad (4.1.17)$$

$$C_{ms} = iN_s^{-1} \sum_{n=1}^{N_s} \delta x_{ns}(t) e^{-ik_m x_{ns}^{(0)}(t)}. \quad (4.1.18)$$

Separando nos somatórios (4.1.14) e (4.1.15) os termos $m = \pm j$, que correspondem a $k_m = \pm k_j = \pm k_w$, podemos reescrever as perturbações como a soma de duas partes, conforme dado a seguir

$$\delta p_{ns}(t) = 2\text{Re} \left(A_{js}(t) e^{ik_j x_{ns}^{(0)}(t)} \right) + \sum_{m \in \mu'_s} A_{ms}(t) e^{ik_m x_{ns}^{(0)}(t)}, \quad (4.1.19)$$

$$\delta x_{ns}(t) = 2\text{Im} \left(C_{js}(t) e^{ik_j x_{ns}^{(0)}(t)} \right) - i \sum_{m \in \mu'_s} C_{ms}(t) e^{ik_m x_{ns}^{(0)}(t)}. \quad (4.1.20)$$

O primeiro termo nas equações acima, que aparecem isolados dos somatórios, representa a parte que denominaremos do tipo onda enquanto que o segundo termo, envolvendo os somatórios sobre $\mu'_s = \mu_s \setminus \{m = j \wedge m = -j\}$, corresponde à parte que denotaremos por tipo balística das soluções.

4.1.3 Soluções balísticas

Substituindo as expressões em (4.1.19) e (4.1.20) nas equações de movimento (4.1.11) - (4.1.13), obtemos o seguinte sistema de equações para os coeficientes

$$\dot{A}_{ms} = -ik_m v_s A_{ms}, \quad (4.1.21)$$

$$\dot{C}_{ms} = -ik_m v_s C_{ms} + iA_{ms}, \quad (4.1.22)$$

com $m \in \mu'_s$ e $1 \leq s \leq b$.

O sistema dinâmico acima é facilmente integrável e admite solução, em termos das condições iniciais, dada por

$$A_{ms}(t) = A_{ms}(0) e^{-ik_m v_s t}, \quad (4.1.23)$$

$$C_{ms}(t) = (C_{ms}(0) + iA_{ms}(0)t) e^{-ik_m v_s t}, \quad (4.1.24)$$

de onde obtemos as seguintes órbitas para as partículas

$$\delta p_{ns}^{(\text{bal})}(t) = \sum_{m \in \mu'_s} A_{ms}(0) e^{ik_m x_{ns}^{(0)}(0)} = \delta p_{ns}^{(\text{bal})}(0), \quad (4.1.25)$$

$$\delta x_{ns}^{(\text{bal})}(t) = \delta x_{ns}^{(\text{bal})}(0) + \delta p_{ns}^{(\text{bal})}(0)t. \quad (4.1.26)$$

Essa componente da solução possui evolução trivial em termos das condições iniciais e não altera o caráter balístico do movimento das partículas. Notamos que a perturbação no momento permanece inalterada durante a dinâmica, que é uma consequência do fato de os coeficientes de Fourier para $m \neq \pm j$ não dependerem da amplitude da onda.

4.1.4 Soluções tipo onda

Para as componentes de Fourier do tipo onda, $m = \pm j$, as equações de movimento são dadas por

$$\dot{C}_{js} = -ik_j v_s C_{js} + iA_{js}, \quad (4.1.27)$$

$$\dot{A}_{js} = -ik_j v_s A_{js} + i\frac{\epsilon}{2}Z, \quad (4.1.28)$$

$$\dot{Z} = i\omega_0 Z - i\epsilon \sum_{s=1}^b C_{js} N_s, \quad (4.1.29)$$

com $1 \leq s \leq b$. Nas equações acima apresentamos somente a evolução da componente $m = j$. Os coeficientes $m = -j$ são obtidos através do complexo conjugado dessas equações.

Diferente do sistema de equações para a parte balística, o sistema acima não possui solução analítica trivial em termos das condições iniciais. Para resolvê-lo, assumimos que a solução admite a seguinte forma

$$C_s = c_s e^{-i\sigma t}, \quad A_s = a_s e^{-i\sigma t}, \quad Z = z e^{-i\sigma t}, \quad (4.1.30)$$

onde c_s , a_s , z e a frequência σ são constantes complexas. O subíndice j nos coeficientes foi omitido, dado que agora $m = j$ é a única componente de Fourier de interesse.

Substituindo as soluções (4.1.30) no sistema (4.1.27) - (4.1.29), obtemos

$$\sigma C = \mathcal{M} \cdot C, \quad (4.1.31)$$

com o vetor $C \in \mathbb{C}^{2b+1}$ dado por $C = [c_1, \dots, c_b, a_1, \dots, a_b, z]^\top$, onde as componentes c_s 's e a_s 's representam, respectivamente, a parte independente do tempo dos coeficientes de

Fourier das posições e dos momentos, e a matriz real \mathcal{M} , $(2b+1) \times (2b+1)$, é dada por

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} kv_1 & & 0 & -1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & kv_b & 0 & & -1 & 0 \\ 0 & & 0 & kv_1 & & 0 & -\varepsilon/2 \\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & & kv_b & -\varepsilon/2 \\ \varepsilon N_1 & \dots & \varepsilon N_b & 0 & \dots & 0 & \omega_0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.32)$$

A solução geral do sistema linear representado por (4.1.31) depende da determinação dos $2b+1$ autovetores e autovalores da matriz \mathcal{M} . Seja C_r um autovetor genérico de \mathcal{M} e $\sigma_r \in \mathbb{C}$ seu correspondente autovalor, então pela equação (4.1.31) as componentes de C_r são dadas por

$$c_{rs} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{z_r}{(\sigma_r - kv_s)}, \quad (4.1.33)$$

$$a_{rs} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{z_r}{(\sigma_r - kv_s)^2}, \quad (4.1.34)$$

$$z_r = \varepsilon \sum_{s=1}^b N_s c_{rs} / (\sigma_r - \omega_0), \quad (4.1.35)$$

onde $1 \leq r \leq 2b+1$.

Substituindo (4.1.33) em (4.1.35) obtemos a equação característica da matriz \mathcal{M} , dada por

$$\sigma_r = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{s=1}^b \frac{N_s}{(\sigma_r - kv_s)^2}. \quad (4.1.36)$$

Para um dado vetor de onda k , a equação acima informa a condição que deve ser satisfeita pelas autofrequências σ_r para que o sistema em (4.1.27) - (4.1.29) admita solução não trivial, isto é, para que as perturbações não sejam identicamente nulas. Essa equação representa portanto uma relação de dispersão para os modos normais do sistema, que designaremos modos feixe³. Vale notar que a relação de dispersão (4.1.36) pode ser reescrita como uma equação polinomial de grau $2b+1$ com coeficientes reais e portanto, admite $2b+1$ raízes complexas, sendo pelo menos uma delas puramente real. O fato de os coeficientes do polinômio característico serem quantidades reais implica que as raízes complexas σ_r aparecem em pares conjugados.

Observamos de (4.1.33) - (4.1.35) que devido à dependência particularmente

³O termo modos feixe foi originalmente utilizado na referência [48]. Essa denominação decorre do fato de tais modos surgirem quando o sistema é discretizado em feixes monocinéticos.

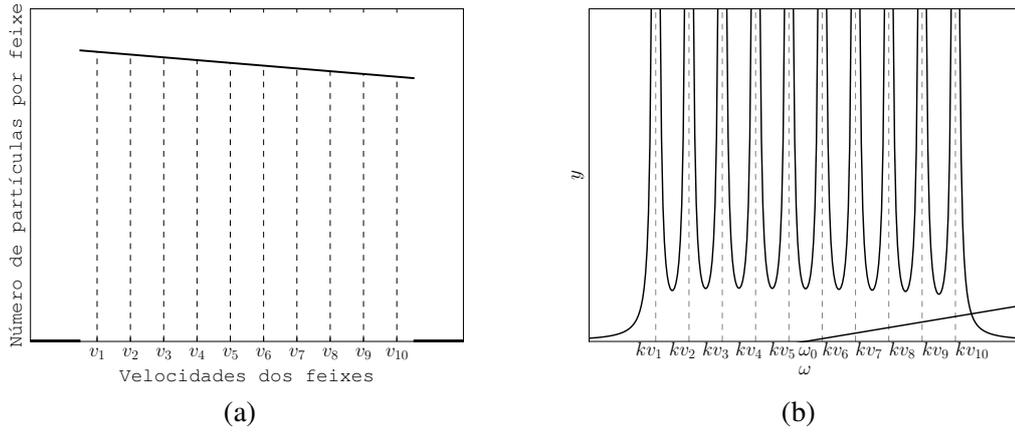


Figura 4.2: Ilustração de uma possível configuração para um sistema composto por uma onda com frequência natural ω_0 e dez feixes monocinéticos. As velocidades dos feixes $v_s = v_1 + (s-1)\Delta p$ são distribuídas em torno da velocidade de fase da onda ω_0/k . (a) Distribuição de velocidades das partículas, dada por $f(v_s) = f(v_1) + (s-1)\Delta p f'$ (que fornece $N_s = N\Delta p f(v_s)$ como número de partículas por feixe) no intervalo $I_v = [v_1 - \Delta p/2, v_b + \Delta p/2]$ e fixada em zero fora desse intervalo. (b) Representação gráfica da relação de dispersão (4.1.36) por meio da linha $y = \omega - \omega_0$ e da curva $y = \chi(\omega) \equiv (\varepsilon^2/2) \sum_s (\omega - kv_s)^{-2} N_s$. O ponto intercepto situa a única solução puramente real dessa equação.

simples do autovetor \mathcal{C}_r com a autofrequência σ_r , podemos, a partir do conhecimento do espectro das autofrequências, calcular todos os autovetores de \mathcal{M} e, conseqüentemente, determinar a solução geral do sistema dinâmico (4.1.27) - (4.1.29). A obtenção do espectro de autofrequências é portanto fundamental para a descrição completa da dinâmica do sistema de feixes e uma onda.

A figura 4.2b representa uma ilustração gráfica da equação (4.1.36) para um sistema composto por dez feixes monocinéticos. Observamos que o sistema possui uma única raiz real pura, dada pelo ponto intercepto no gráfico, e 20 raízes complexas, conjugadas entre si. À medida que o número de feixes aumenta, as raízes complexas tendem se acumular no eixo real. Esse comportamento pode ser observado quando calculamos numericamente o espectro das autofrequências para sistemas compostos por diferentes números de feixes o que é feito na seção 4.2.

As autofrequências podem ser escritas em termos das suas componentes cartesianas no plano complexo, isto é, $\sigma_r = \omega_r + i\gamma_r$. Dessa forma, obtemos de (4.1.36) as seguintes expressões para as partes real e imaginária, respectivamente

$$\omega_r = \omega_0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{s=1}^b N_s \frac{(kv_s - \omega_r)^2 - \gamma_r^2}{[(kv_s - \omega_r)^2 + \gamma_r^2]^2}, \quad (4.1.37)$$

$$\gamma_r = \varepsilon^2 \sum_{s=1}^b N_s \frac{\gamma_r (kv_s - \omega_r)}{[(kv_s - \omega_r)^2 + \gamma_r^2]^2}. \quad (4.1.38)$$

Com a finalidade de conectar os resultados apresentados nesse capítulo com resultados previstos pela abordagem vlasoviana, vamos considerar o limite $b \rightarrow \infty$, em que os feixes apresentam uma distribuição contínua de velocidades. Nesse limite, o segundo membro da equação (4.1.38) pode ser escrito em termos da função de distribuição de velocidades $f(v_s) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} N_s / (\Delta p N)$ da seguinte forma

$$\varphi(\gamma) = \varepsilon^2 N \int \frac{\gamma(kv - \omega)}{[\gamma^2 + (kv - \omega)^2]^2} f(v) dv, \quad (4.1.39)$$

onde omitimos o subíndice r dos modos haja vista que quando $b \rightarrow \infty$ o espectro de autofrequências também apresenta uma distribuição contínua.

Após integrada por partes a equação (4.1.39) fica dada por

$$\varphi(\gamma) = \frac{\varepsilon^2 N}{2k} \int \frac{\gamma}{\gamma^2 + (kv - \omega)^2} f'(v) dv. \quad (4.1.40)$$

Na hipótese de acoplamento fraco ($\varepsilon \rightarrow 0$) a Lorentziana em (4.1.40) torna-se uma função bastante concentrada em torno de ω/k o que nos permite utilizar a identidade $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha / (\alpha^2 + (x - x_0)^2) = \pi \delta(x - x_0)$ para obter a seguinte expressão para a parte imaginária da frequência da onda

$$\gamma = \gamma_L = \frac{\pi \varepsilon^2 N}{2k^2} f'(\omega_0/k), \quad (4.1.41)$$

onde consideramos que a distribuição de velocidades é uma função suave no intervalo que contém os feixes monocinéticos.

É importante notar que a expressão acima é válida somente para o caso em que $f' > 0$. No caso em que a distribuição de velocidades é uma função decrescente, o primeiro e o segundo membro da equação $\gamma = \varphi(\gamma)$ possuem sinais opostos e portanto a única solução possível é $\gamma = 0$. Isso significa que no regime perturbativo e no limite $b \rightarrow \infty$, somente o caso em que há instabilidade de Landau admite solução não nula para a parte imaginária da frequência. A expressão obtida em (4.1.41) representa a taxa de crescimento de Landau deduzida originalmente na referência [4] por meio de uma descrição cinética.

No capítulo seguinte mostraremos por meio de resultados numéricos que essa solução particular possui um comportamento dominante na dinâmica da onda.

No caso em que há amortecimento de Landau as autofrequências tendem a se acumular sobre a reta real em conformidade com o espectro contínuo de frequências discutido na referência [47]. Por esse motivo, denotamos os modos cujas frequências são obtidas a partir da equação (4.1.36) como modos análogos de van Kampen na formulação hamiltoniana. Mostraremos também no capítulo seguinte que no caso em que a distribuição de velocidades é uma função decrescente, a atenuação da onda não é um

efeito de um único modo particular dominante, mas do *phase mixing* resultante da superposição de vários modos normais do sistema linear. Esses modos são também denominados de modos feixe, uma vez que resultam da discretização do sistema em feixes monocinéticos.

4.1.5 Expansão em modos normais

Seja C_r com $r \in [1, 2b + 1]$ um autovetor genérico de \mathcal{M} , cujas componentes são dadas pelas equações (4.1.33) - (4.1.35), e σ_r seu correspondente autovalor. Então, pela linearidade da equação (4.1.31), sua solução geral é dada pela superposição das autosoluções $C_r e^{-i\sigma_r t}$, i.e.,

$$\mathcal{G}(t) = \sum_{r=1}^{2b+1} \xi_r C_r e^{-i\sigma_r t}, \quad (4.1.42)$$

onde os coeficientes ξ_r da combinação linear acima são constantes obtidas a partir das condições iniciais.

Nas equações (4.1.33) - (4.1.35) podemos tomar sem perda de generalidade $z_r = 1$. Assim, a solução geral $\mathcal{G}(t) = [C_1(t) \dots C_b(t), A_1(t) \dots, A_b(t), Z(t)]^\top$ pode ser escrita em termos de suas componentes da seguinte forma

$$C_s(t) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r=1}^{2b+1} \frac{\xi_r}{(\sigma_r - kv_s)^2} e^{-i\sigma_r t}, \quad (4.1.43)$$

$$A_s(t) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r=1}^{2b+1} \frac{\xi_r}{\sigma_r - kv_s} e^{-i\sigma_r t}, \quad (4.1.44)$$

$$Z(t) = \sum_{r=1}^{2b+1} \xi_r e^{-i\sigma_r t}. \quad (4.1.45)$$

A parte tipo onda das perturbações nos momentos pode ser obtida substituindo a componente A_s calculada em (4.1.44) no primeiro termo do segundo membro da equação (4.1.19). Da mesma forma, as perturbações nas posições são obtidas substituindo a componente C_s calculada em (4.1.43) no primeiro termo do segundo membro da equação (4.1.20). Assim, as perturbações nas órbitas das partículas são dadas por

$$\delta p_{ns}^{(\text{onda})}(t) = \varepsilon \text{Re} \left(\sum_{r=1}^{2b+1} \frac{\xi_r}{\sigma_r - kv_s} e^{-i\sigma_r t + ikx_{ns}^{(0)}} \right), \quad (4.1.46)$$

$$\delta x_{ns}^{(\text{onda})}(t) = \varepsilon \text{Im} \left(\sum_{r=1}^{2b+1} \frac{\xi_r}{(\sigma_r - kv_s)^2} e^{-i\sigma_r t + ikx_{ns}^{(0)}} \right). \quad (4.1.47)$$

Os coeficientes ξ_r da expansão dada pela equação (4.1.42) podem ser obtidos por meio do produto interno dos vetores $\mathcal{G}(0)$ e C_r . Porém, para efetuar essa operação,

precisamos primeiramente determinar os autovetores à esquerda da matriz \mathcal{M} , que denotaremos por $C'_r = [c'_{r1}, \dots, c'_{rb}, a_{r1}, \dots, a'_{rb}, z'_r]^\top$. Como \mathcal{M} é uma matriz real, os autovetores à esquerda satisfazem a equação

$$\sigma_r C'_r = \mathcal{M}^\top \cdot C'_r, \quad (4.1.48)$$

cujas componentes c'_{rs} e a'_{rs} são dadas por

$$c'_{rs} = \frac{\varepsilon N_s z'_r}{\sigma_r - kv_s}, \quad (4.1.49)$$

$$a'_{rs} = -\frac{\varepsilon N_s z'_r}{(\sigma_r - kv_s)^2}. \quad (4.1.50)$$

O fator z'_r que aparece em todas as entradas do vetor C'_r corresponde a um fator de escala que a princípio pode assumir qualquer valor complexo diferente de zero. Contudo, seu valor pode ser fixado se impusermos a condição de normalização $C'^{\top}_r \cdot C_r = \delta_{r',r}$. Dessa forma, obtemos

$$z'_r = \left[1 + \varepsilon^2 \sum_{s=1}^b \frac{N_s}{(\sigma_r - kv_s)^3} \right]^{-1}. \quad (4.1.51)$$

Uma vez determinadas todas as componentes dos autovetores à esquerda e à direita da matriz \mathcal{M} , os coeficientes da expansão (4.1.42) são calculados em termos das condições iniciais da seguinte forma

$$\xi_r = C'^{\top}_r \cdot \mathcal{G}(0) = z'_r Z(0) + \sum_{s=1}^b [c'_{rs} C_s(0) + a'_{rs} A_s(0)]. \quad (4.1.52)$$

As soluções analíticas dadas pelas equações (4.1.45), (4.1.46) e (4.1.47) mostram que no regime linear o sistema de uma única onda e feixes monocinéticos é completamente descrito uma vez que se conhecem o espectro das autofrequências σ_r e os valores das constantes ξ_r , obtidos através da condição inicial $(\delta x_{ns}(0), \delta p_{ns}(0), Z(0))$.

É importante notar pela equação (4.1.52) que, em particular, o fator de escala coincide com o fator de peso do autovetor C_r para uma condição inicial $(\delta x_{ns}(0) = 0, \delta p_{ns}(0) = 0$ e $Z(0) = 1$ vide que $C_s(0) = 0, A_s(0) = 0$). Denotaremos essa configuração inicial específica do sistema como condição inicial de começo tranquilo ⁴.

⁴Tradução literal do termo inglês “*quiet start initial condition*” encontrado na literatura.

4.2 O mecanismo de *phase mixing* e o amortecimento/amplificação de Landau

Nessa seção discutimos o formalismo teórico apresentado anteriormente com um enfoque numérico. Para isso, calculamos, a partir da equação (4.1.36), o espectro completo das frequências de van Kampen ⁵ para sistemas compostos por diferentes números de feixes. Conforme veremos, tanto amortecimento quanto crescimento de Landau surgem como consequência da interferência entre os $2b + 1$ modos normais representados na equação (4.1.42).

É importante notar que a abordagem de feixes monocinéticos deixa de ser válida para tempos da ordem do tempo de aprisionamento das partículas no poço de potencial da onda $\omega_B = (\epsilon k)^{-1/2} |Z|^{-1/4}$, onde as órbitas das partículas não podem mais ser consideradas quase-balísticas. Com o intuito de garantir que efeitos de aprisionamento desempenham um papel negligenciável e a estrutura de feixes é preservada, todos resultados numéricos apresentados nesta seção foram obtidos no regime de acoplamento fraco ($\epsilon \ll 1$). Para simplificar nossos cálculos, assumimos $\omega_0 = 0.0$ que, do ponto de vista físico, corresponde a fazer uma transformação Galileana para um referencial que se move com a velocidade de fase da onda.

Estabelecemos como estado de equilíbrio a configuração em que as velocidades dos feixes estão distribuídas uniformemente ($v_s = v_1 + (s - 1)\Delta p$) em um intervalo de comprimento I_v centrado na origem. Assumimos uma distribuição de velocidades para os feixes linear, dada por $f(v_s) = f(v_1) + (s - 1)f'\Delta p$, onde f' é uma constante e $\Delta p = I_v/b$ representa o intervalo de velocidades entre dois feixes adjacentes. A condição $f(v_1) = 1/I_v - (b - 1)\Delta p f'/2$ é imposta para garantir que para uma dada inclinação f' e um intervalo I_v , a função de distribuição é normalizada à unidade ($\sum_s N_s = N\Delta p \sum_s f(v_s) = N$).

No regime de acoplamento fraco e para sistemas de muitos feixes ($b \gtrsim 100$) o espectro de frequências de van Kampen encontra-se muito próximo do eixo real e portanto as soluções da equação (4.1.36) devem ser calculadas com bastante precisão. Para obter o conjunto completo das autofrequências com precisão suficiente para as análises numéricas subsequentes, desenvolvemos um algoritmo de busca de raízes no plano complexo baseado no Teorema dos Resíduos de Cauchy. A ideia central do algoritmo é discutida no apêndice A. O método nos permitiu explorar sistemas compostos de até 2000 feixes e evidenciar importantes aspectos macroscópicos e microscópicos do modelo.

⁵De agora em diante quando nos referirmos às frequências de van Kampen fica implícito que se tratam de seus análogos discretos na formulação hamiltoniana.

4.2.1 Espectra e fator de escala

Na gráfico inferior da figura 4.3, apresentamos o espectro das frequências de van Kampen para o caso estável ($f' < 0$) para sistema compostos por 50 e 200 feixes. Nos dois gráficos acima mostramos o logaritmo do módulo do fator de escala z'_r e sua fase $\text{Arg} z'_r$ ambos obtidos dos espectros ilustrados. Essas curvas correspondem somente aos modos com $\gamma_r \geq 0$. Para os modos estáveis a única diferença no que diz respeito ao fator de escala é o sinal oposto da fase ⁶. Independente do número de feixes, as velocidades de fase ω_r/k_w dos modos estáveis e instáveis estão confinadas ao intervalo $[-0.8, 0.8]$ que contém as partículas ressonantes. Quanto mais feixes consideramos, mais denso o espectro das frequências de van Kampen se torna e se aproxima como um todo para o eixo real.

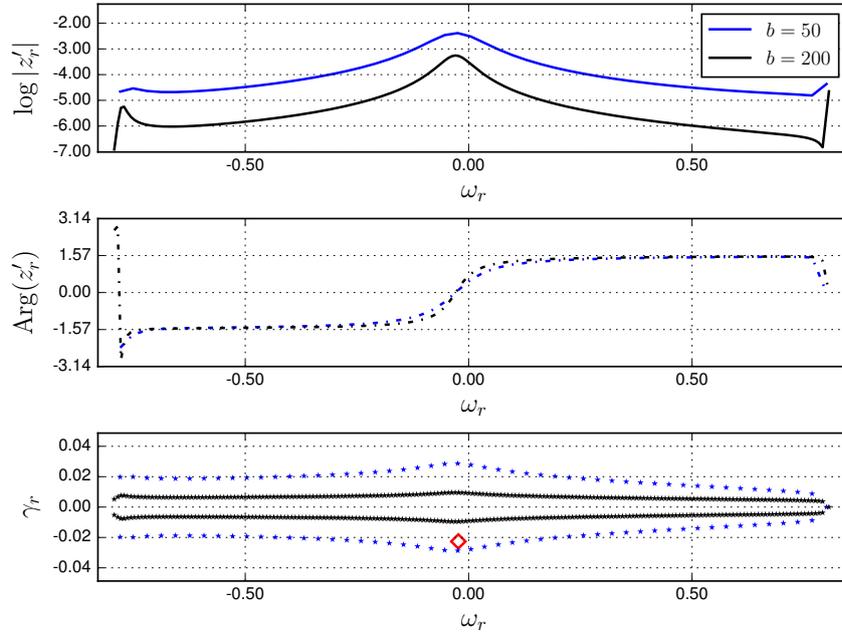


Figura 4.3: Análogos discretos das frequência de van Kampen no plano complexo (inferior), a fase (centro) e o logaritmo do módulo (superior) do fator de escala. As curvas nas duas figuras mais acima são guias para os olhos. O ponto losango em vermelho situa a posição do modo amortecido de Landau (que nesse caso não corresponde a nenhum modo normal do sistema). Os resultados foram obtidos para sistemas compostos de 50 (azul) e 200 (preto) feixes com parâmetros $I_v = 1.6$, $\omega_0 = 0.0$, $k_w = 1.0$, $\varepsilon N f' = -4.8$ e $\gamma_L = -2.26 \times 10^{-2}$.

A dependência do valor médio da parte imaginária $\bar{\gamma}_r = b^{-1} \sum_{r, \gamma_r > 0} \gamma_r$ com o espaçamento entre os feixes está ilustrada na Figura 4.4, indicando que, no limite contínuo

⁶Dadas duas autofrequências r e r^* complexo conjugadas entre si, o fator de escala dado em (4.1.51) é tal que $z'_{r^*} = z'_r$.

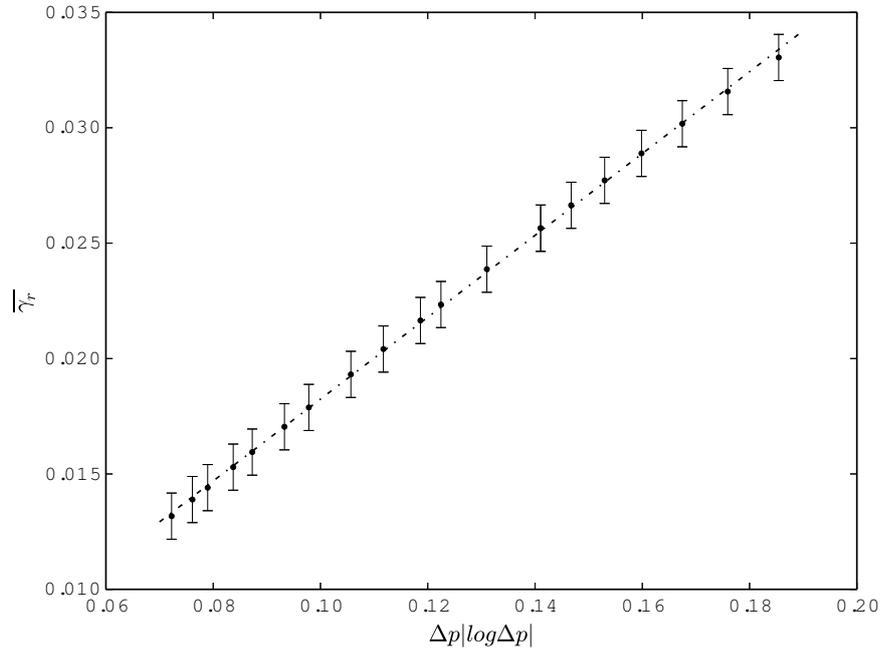


Figura 4.4: Comportamento da “distância” média em relação ao eixo real $\bar{\gamma}_r \equiv b^{-1} \sum_{r; \gamma_r > 0} \gamma_r$ como uma função do espaçamento entre os feixes. A regressão linear $y = (0.177 \pm 0.001)x \pm 0.001$ mostra que γ_r tende a zero com $x \equiv \Delta p |\log \Delta p|$ conforme reportado em [48]. As barras de erro representam a tolerância de 10^{-3} utilizada na obtenção das autofrequências.

($\Delta p \rightarrow 0$), essas autofrequências se acumulam no eixo real formando o que corresponde ao espectro contínuo das frequências de van Kampen deduzido a partir de uma descrição vlasoviana. Os espaçamentos entre as partes reais das frequências também vão à zero (nesse caso com Δp), pois há sempre um valor real ω_r/k_w entre dois feixes (velocidades) adjacentes. A forma $\gamma_r \sim \Delta p \ln \Delta p$ com que a parte imaginária das frequências tende ao eixo real está de acordo com previsões analíticas reportadas nas referências [48, 15, 24].

O valor de Landau $\sigma_L = \omega_L + i\gamma_L$, representado pelo ponto vermelho losango na figura 4.3, é obtido após tomar o limite do contínuo na equação (4.1.36). O ligeiro desvio $|\omega_L - \omega_0| = 2.30 \times 10^{-2}$ da frequência da onda livre é uma consequência da interação da onda com as partículas ressonantes.

Nas vizinhanças de ω_L podemos verificar um comportamento marcante do módulo e da fase do fator de escala. Observamos que nessa posição o módulo possui um valor máximo enquanto que a fase apresenta uma mudança de sinal. Esses dois comportamentos indicam que os modos com maior contribuição na composição da condição $(\delta x_{ns}(0), \delta p_{ns}(0), Z(0))$ são aqueles com frequências próximas à frequência de Landau. Isso pode ser mais facilmente checado para a condição inicial de começo tranquilo ($\delta x_{ns}(0) = \delta p_{ns}(0) = 0$ e $Z(0) = 1.0$) em que o fator de escala z'_r coincide com a componente ξ_r do autovetor C_r (vide eq. (4.1.52)). Nesse caso, a amplitude inicial da onda

pode ser decomposta na forma $Z(0) = \sum_r' |z_r'| \cos(\text{Arg } z_r') + |z_R'|$, com $r = R$ denotando a única autofrequência puramente real e \sum_r' representando a soma definida somente sobre os modos normais instáveis. Com essa decomposição podemos observar que as maiores contribuições para $Z(0)$ vem dos termos com maior módulo e com fase próxima de zero, que na figura encontram-se próximos ao modo de Landau.

Para o regime de instabilidade ($f' > 0$), o espectro e o fator de escala mostrados na figura 4.5 exibem dois aspectos distintos (comparados ao regime estável) para sistemas de muitos feixes. O primeiro é a presença de duas autofrequências específicas, complexo conjugadas entre si, que não se aproximam do eixo real à medida que o número de feixes aumenta. Denotaremos a autofrequência próxima à frequência de Landau por σ_{bL} (com o subíndice b em referência ao número finito de feixes) e sua correspondente complexo conjugada por σ_{rL}^* , ambas destacadas na figura. A segunda diferença marcante é o aspecto proeminente da curva para o módulo do fator de escala. Isso mostra, juntamente com $\text{Arg } z_{bL}' \approx 0$, que os modos bL e bL^* possuem uma contribuição dominante na configuração inicial do sistema.

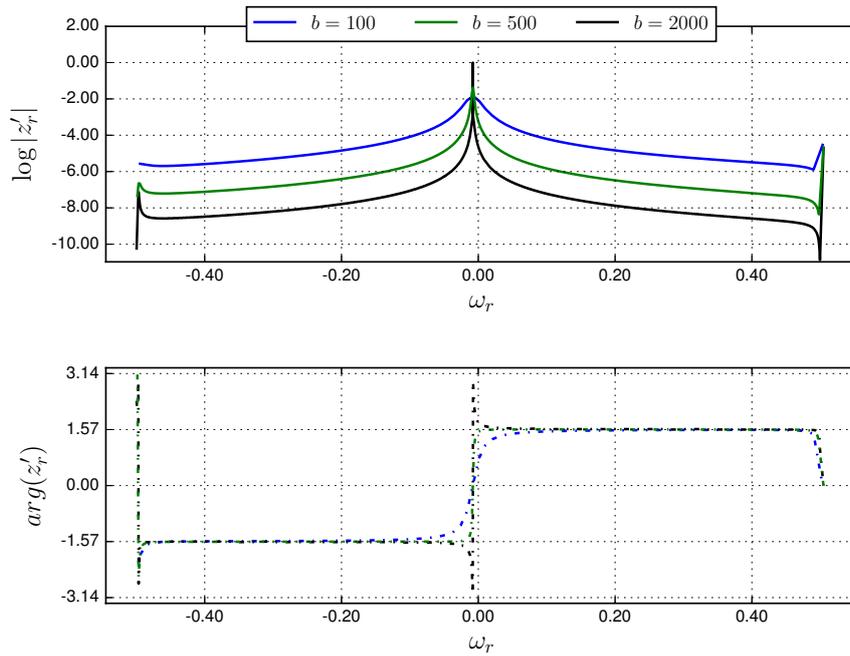
4.2.2 Evolução de começo tranquilo

Com o intuito de monitorar a evolução das contribuições desses dois modos específicos para a amplitude da onda, consideramos uma realização do sistema em que as partículas encontram-se inicialmente distribuídas em feixes monocinéticos igualmente espaçados e a onda é lançada com amplitude $Z(0) = 1.0$. Para essa realização específica, a evolução da amplitude da onda é dada de acordo com a equação (4.1.45)

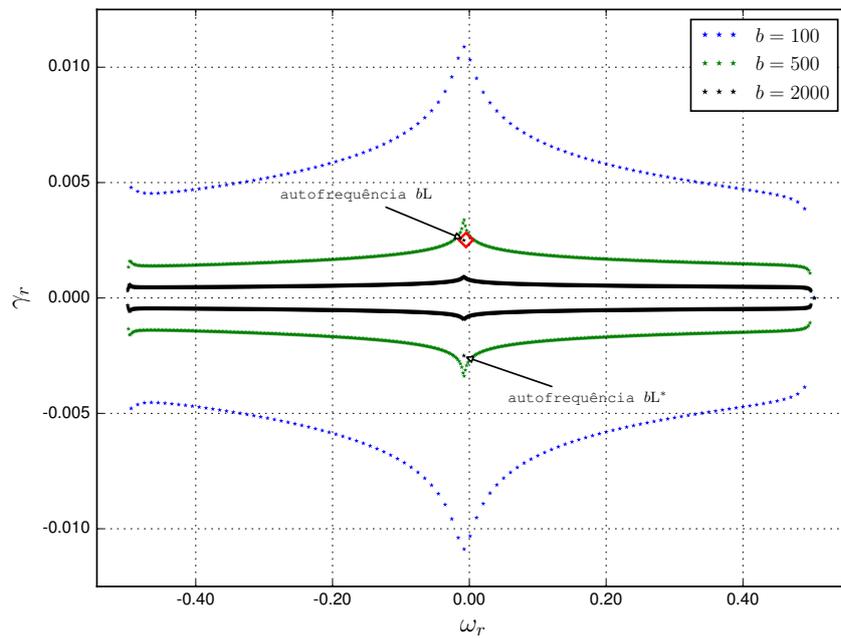
$$Z(t) = z_{rL}' e^{-i\sigma_{rL}t} + z_{rL}^*' e^{-i\sigma_{rL}^*t} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq rL, rL^*}}^{2b+1} z_r' e^{-i\sigma_r t}, \quad (4.2.53)$$

relembrando que z_r' corresponde a um fator de peso indicando quanto que cada modo contribui para compor a amplitude inicial.

Devido ao fato de que para sistemas de muitos feixes $z_{rL}' \approx 1$ e $\sigma_{rL} \approx \sigma_L$, conforme ilustrado pelas curvas em preto na figura 4.5, podemos esperar que o modo bL , por si só, seja capaz de descrever corretamente o crescimento da onda. Contudo, a contribuição dos outros $2b$ modos normais deve ainda ser levada em consideração. Devido a uma interferência destrutiva, esses $2b$ modos normais quando superpostos contribuem somente como uma pequena oscilação que não compromete o crescimento exponencial $\sim e^{\gamma t}$ da onda. Nas figuras 4.6 ilustramos essa interferência destrutiva monitorando a evolução das componentes cartesianas de cada termo da (4.2.53) para um sistema de 2000 feixes. Os gráficos apresentam uma clara simetria entre as curvas vermelha e verde, mostrando que a contribuição do modo bL^* é cancelada pela superposição do



(a)



(b)

Figura 4.5: Comportamento do (a) módulo (topo) e da fase (abaixo) do fator de escala na medida em que o número de feixes aumenta (as linhas representam guia para os olhos). (b) Espectro das autofrequências de van Kampen no plano complexo σ para sistemas compostos de 100, 500 e 2000 feixes. O ponto losango vermelho situa o modo de Landau, ligeiramente afastado da origem por $\omega_L = -4.87 \times 10^{-3}$. Os parâmetros foram fixados em $I_v = 1.0$, $\omega_0 = 0.0$, $k_w = 1.0$, $\epsilon N f' = 16.0$ and $\gamma_L = 2.51 \times 10^{-3}$.

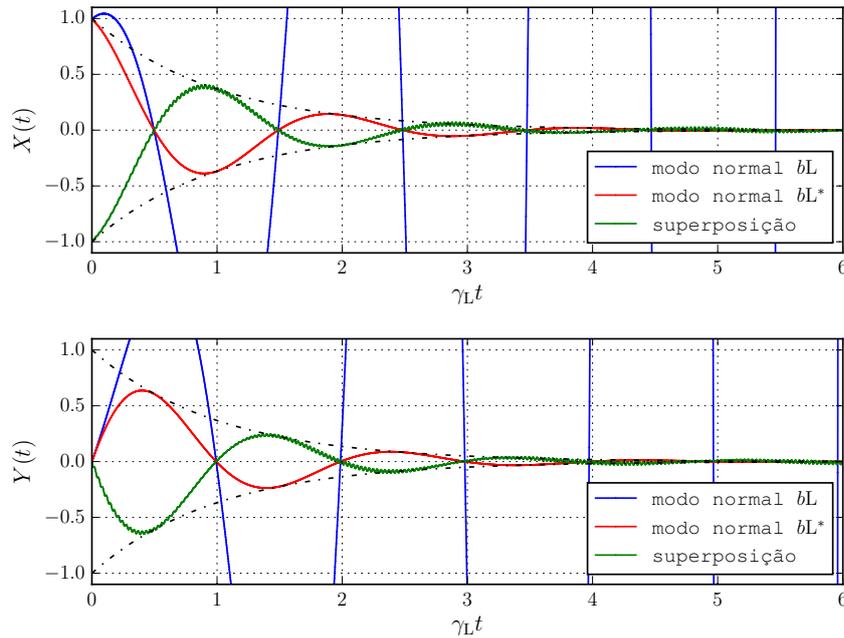


Figura 4.6: Evolução das componentes real (topo) e imaginária (inferior) dos modos b_L , b_L^* e da superposição dos modos de van Kampen para um sistema de 2000 feixes. A simetria entre as curvas vermelha e verde mostram a compensação entre o modo b_L^* e o espectro de van Kampen. A curva correspondente ao modo b_L cresce exponencialmente superando bastante o intervalo do nosso eixo da ordenada.

espectro (denso, individualmente pequeno) de van Kampen. As curvas tracejadas que aparecem como um envelope na figura 4.6 são dadas por $\pm e^{-\gamma_L t}$ e indicam que, assim como ocorre para o modo b_L^* , a superposição dos modos de van Kampen também decaem com a taxa $(-\gamma_L)$ de Landau. Essa peculiaridade do regime de instabilidade somente pode ser observada do ponto de vista numérico quando consideramos sistemas com muitos graus de liberdade. A necessidade de trabalhar com sistemas compostos de muitos feixes nos motivou a desenvolver o método de Cauchy para a procura de raízes no plano complexo uma vez que sistemas algébricos tradicionais⁷ falharam na obtenção do espectro completo.

A figura 4.7 ilustra a evolução da intensidade da onda $I = Z^*Z/2$, obtida através da superposição dos modos normais para sistemas compostos por 30, 50 e 200 feixes. Observamos que a onda de Langmuir é amortecida (ou amplificada) inicialmente de acordo com a taxa de Landau, i.e. $\log I_L(t) = \log I(0) \pm 2|\gamma_L|t$, representada pela linha preta tracejada. Para o caso instável notamos que, mesmo para números menores de feixes,

⁷Foram testados os sistemas de computação simbólica Maxima, Maple e Mathematica tanto para a obtenção de soluções algébricas quanto numéricas. Todos os sistemas citados forneceram raízes não esperadas quando tentamos trabalhar com sistemas com mais de 40 feixes.

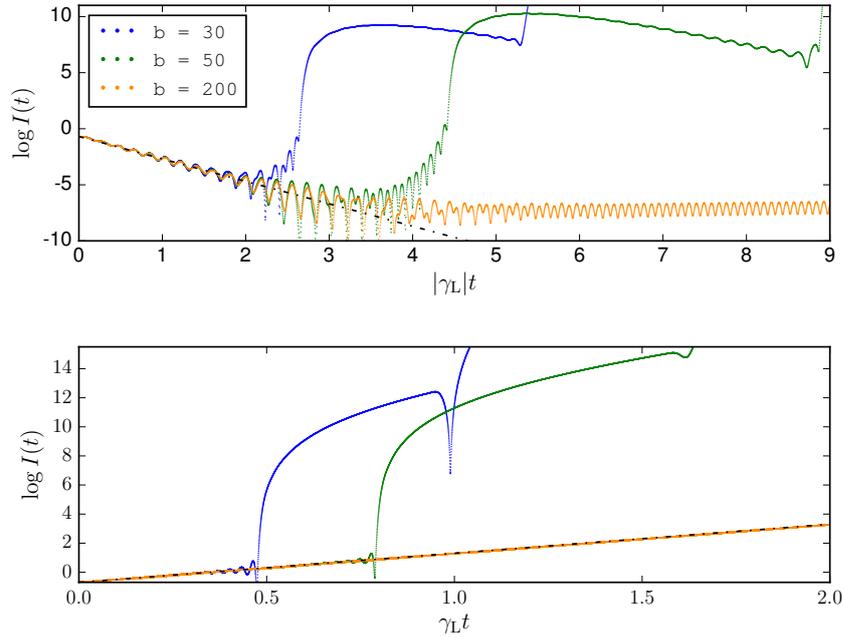


Figura 4.7: Evolução da intensidade da onda para sistemas compostos por 30 (azul), 50 (verde) e 200 (laranja) feixes para os casos estável (superior) e instável (inferior). Os parâmetros escolhidos são os mesmos utilizados na obtenção dos espectros nas figuras 4.3 e 4.5. Como condição inicial consideramos $Z(0) = 1.0$ e trajetórias não perturbadas $\delta x_{ns}(0) = \delta p_{ns}(0) = 0$ com partículas sendo iniciadas na configuração de feixes monocinéticos igualmente espaçados.

em que $\max\{\gamma_r\} > \gamma_L$ e os modos bL e bL^* não são proeminentes, os sistemas discreto e contínuo estão em consonância.

As divergências das curvas em azul e verde da reta de Landau, ilustradas nos gráficos da figura 4.7, ocorrem para tempos próximos ao tempo de recorrência $\tau_{\text{rec}} \sim 2\pi/\Delta\omega_r \sim 2\pi/(k_w\Delta p)$ quando ocorre uma quebra no padrão homogêneo das fases dos modos de van Kampen. Essa situação está ilustrada na figura 4.8 mais especificamente no item (f). Após esse tempo característico, a aproximação do sistema discreto composto por feixes monocinéticos por um sistema contínuo deixa de ser válida. Vale a pena notar que a dissonância entre a curva laranja e reta de Landau na parte superior da figura 4.7 não está relacionada à quebra da mistura de fases que nos referimos anteriormente, mas ao fato de $I_L(t)$ assumir valores pequenos comparados à amplitude das oscilações.

Na figura 4.8 apresentamos retratos das componentes espectrais associadas aos modos de van Kampen em diferentes instantes de tempo. Cada vetor corresponde a um termo do segundo membro da equação (4.2.53). Para garantir uma melhor visualização da distribuição das fases no decorrer da dinâmica, utilizamos uma escala logarítmica para os módulos desses vetores, invertendo o sinal no caso de argumento menor que um. Os resultados correspondem ao caso estável $b = 50$ da figura 4.7. Observamos

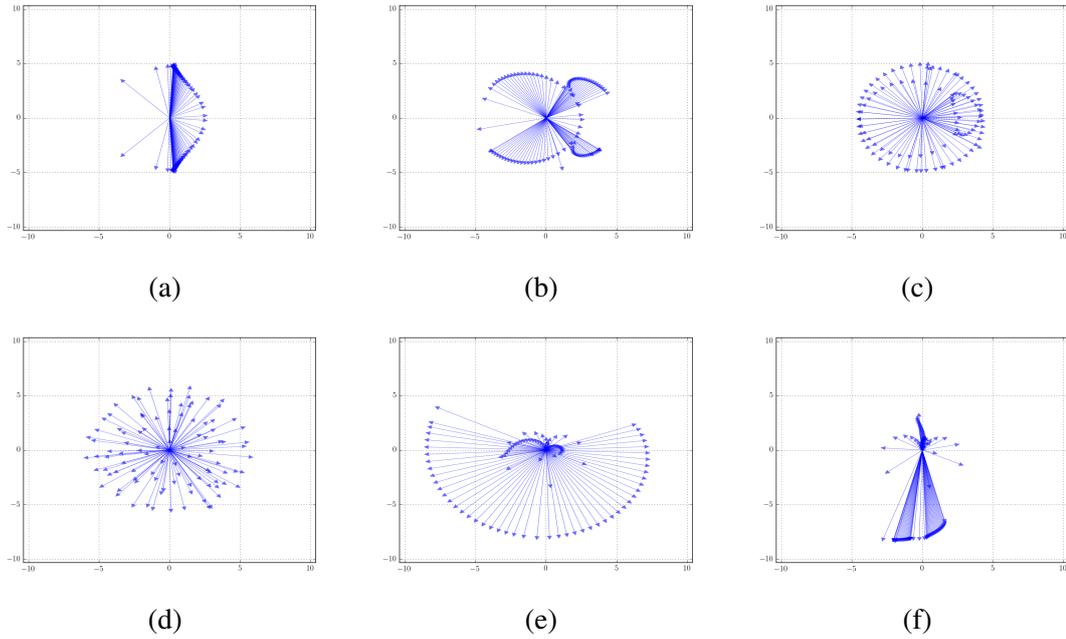


Figura 4.8: Ilustração do mecanismo de *phase mixing* por meio da representação no plano complexo das contribuições espectrais para a amplitude da onda. Os retratos correspondem aos instantes $|\gamma_L|t = 0, 0.03, 0.10, 1.36, 4.38, 4.43$ para o caso estável $b = 50$.

que inicialmente quase todos modos normais possuem fase no primeiro ou no quarto quadrantes, de acordo com o resultado apresentado na figura (4.3). Porém, após iniciada a dinâmica, rapidamente as fases se espalham preenchendo os demais quadrantes. A velocidade angular de rotação e a taxa de variação no módulo de um dado vetor $z'_r e^{-i\sigma_r t}$ são dadas respectivamente pelas componentes real e imaginária de sua autofrequência σ_r .

Nas figuras 4.8(e) e 4.8(f) ilustramos retratos das componentes espectrais de van Kampen para instantes próximos ao tempo de recorrência. Observamos nessas figuras que as fases tendem a se aglomerar, quebrando assim o padrão homogêneo da distribuição. Essa configuração aglomerada das fases, juntamente com o fato de o módulo das contribuições espectrais dos modos instáveis ($\gamma_r > 0$) de van Kampen assumirem valores elevados, são responsáveis pela divergência na intensidade da onda. Essa situação caracteriza a quebra do *phase mixing* e o instante em que o sistema discreto composto por feixes monocinéticos deixa de coincidir com o sistema contínuo.

Relaxação não colisional e ondas eletrostáticas não amortecidas

Conforme discutimos na seção 3.2, no limite $t \rightarrow \infty$ a abordagem quase linear prevê a formação de um plateau na função de distribuição e o surgimento de ondas eletrostáticas que se propagam no plasma sem sofrerem atenuação.

Com o intuito de investigar esse processo, implementamos simulações de Vlasov do modelo onda-partícula introduzido no capítulo anterior, e acompanhamos a evolução do sistema desde o regime linear, em que as partículas executam movimento balístico e a onda decai com a taxa de Landau, até tempos muito maiores que o período de aprisionamento ¹, em que os efeitos não lineares regem a dinâmica do sistema. Em seguida, assumimos o regime de saturação ², por meio de uma função de distribuição ligeiramente diferente de uma maxwelliana, para analisar a relação de dispersão dos modos não amortecidos em plasmas livres e plasmas sujeitos a campo externo de radiação.

5.1 Equação de Vlasov para o sistema onda-partícula

No contexto de distribuições, a dinâmica do sistema onda-partícula é dada pela equação de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p \frac{\partial f}{\partial x} - \varepsilon(Y \cos kx + X \sin kx) \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad (5.1.1)$$

onde o fator que multiplica a derivada parcial no último termo representa a força, dada em (4.1.3) e que pode ser decompostas em duas partes:

$$F_X = -\varepsilon X \sin kx \quad \text{e} \quad F_Y = -\varepsilon Y \cos kx, \quad (5.1.2)$$

¹Intervalo de tempo que as partículas profundamente aprisionadas no poço de potencial da onda levam para descrever um ciclo no espaço de fase (ver seção 5.1.1).

²Regime em que o processo de difusão nas velocidades das partículas ressonantes cessa e a amplitude da onda estabiliza.

referentes à contribuição de cada componente cartesiana da amplitude da onda $Z = X + iY$.

As componentes X e Y , por sua vez, evoluem de acordo com

$$\dot{X} = \omega Y + \varepsilon k^{-1} \int \cos kx f(x, p) dx dp, \quad (5.1.3)$$

$$\dot{Y} = -\omega X + \varepsilon k^{-1} \int \sin kx f(x, p) dx dp. \quad (5.1.4)$$

Além de ser capaz de descrever satisfatoriamente fenômenos coletivos em plasmas, como por exemplo o amortecimento de Landau tratado no capítulo anterior, o modelo hamiltoniano onda-partícula é utilizado também no estudo da interação entre laser e feixe de partículas carregas. Nesse caso, o segundo termo da hamiltoniana (4.1.1) representa a energia da onda eletromagnética propagante e não está associado com movimento vibratório de partículas. Simulações de dinâmica molecular para esse sistema, conhecido como *free electron laser* (FEL), mostram a formação de uma macropartícula no espaço de fase que interage autoconsistentemente com a onda modulando sua intensidade [76, 77].

As seguintes quantidades são conservadas no modelo onda-partícula:

$$\|f\|_{L^1} = \int f(x, p, t) dx dp, \quad (5.1.5)$$

$$P(t)[f, Z] = \int p f(x, p, t) dx dp + k \frac{X^2 + Y^2}{2}, \quad (5.1.6)$$

$$U(t)[f, Z] = \int f(x, p, t) \left[\frac{p^2}{2} + \frac{\varepsilon}{k} \left(Y \sin(kx) - X \cos(kx) \right) \right] dx dp + \omega \frac{X^2 + Y^2}{2}, \quad (5.1.7)$$

onde a primeira equação representa a conservação da norma L^1 da função de distribuição, a segunda e a terceira expressam, respectivamente, a conservação do momento total e da energia total do sistema.

Vale notar que apesar de termos destacado somente as três funções dinâmicas em (5.1.5)–(5.1.7) como exemplos de quantidades conservadas, elas não são as únicas. Na realidade, a dinâmica de Vlasov possui um número infinito de quantidades conservadas como, por exemplo, as normas L^q , definidas por $\|f\|_{L^q} = (\int f^q dx dp)^{1/q}$ com $1 \leq q < \infty$ e os invariantes de Casimir, $C[s] = \int s(f(x, p, t)) dx dp$, em particular $s(f) = f \log(f)$ que corresponde à entropia de Boltzmann. Apesar de não existir um teorema H para a equação de Vlasov (que é reversível no tempo), simulações computacionais [73] mostram que a invariância da entropia se restringe a um curto intervalo de tempo. No entanto, esse efeito é de natureza puramente numérica e se deve à perda de informação sobre o sistema que ocorre quando as filamentações na função de distribuição tornam-se da ordem do espaçamento da malha (efeito de finitude da malha).

Os Casimirs e as normas L^q podem, portanto, ser bem mais “frágeis”³ [54, 52, 73], do ponto de vista computacional, do que a norma L^1 (associada à massa total), o momento total e a energia total do sistema.

5.1.1 Separatriz e frequência de aprisionamento

As expressões para a frequência de aprisionamento e para a separatriz no modelo onda-partículas podem ser facilmente obtidas uma vez que expressamos o estado da onda em termos dos pares canonicamente conjugados (θ, I) em vez de suas componentes cartesianas. Nessa representação, a hamiltoniana (4.1.1) adquire a seguinte forma [15]

$$H = \sum_{l=1}^N \frac{p_l^2}{2} - \omega I - \epsilon k^{-1} \sum_{l=1}^N \sqrt{2I} \cos(kx_l - \theta), \quad (5.1.8)$$

onde $I = (X^2 + Y^2)/2$ representa a intensidade da onda e $\theta = \arctan(Y/X)$ a sua fase.

Se por simplicidade tomarmos o referencial da onda ($\omega = 0$), a energia da i -ésima partícula é dada por

$$e_i = \frac{p_i^2}{2} - \epsilon k^{-1} \sqrt{2I} \cos(kx_i - \theta), \quad (5.1.9)$$

onde o segundo termo representa a energia potencial de interação que depende da coordenada relativa da partícula.

Podemos calcular a energia da separatriz observando que os pontos do espaço de fase (x_i, p_i) tal que a energia potencial $V(x_i, \theta, I)$ é máxima e $p_i = 0$ representam pontos de sela [78] do sistema pertencentes à separatriz. Dessa forma, a energia da separatriz é dada por

$$E_s = \frac{\epsilon}{k} \sqrt{2I} = \frac{\epsilon}{k} \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (5.1.10)$$

Essa energia delimita dois tipos distintos de trajetória para as partículas e consequentemente nos permite dividí-las em duas categorias: as partículas aprisionadas (partículas ressonantes) que viajam pelo plasma sendo arrastadas pela onda e as demais partículas, denominadas partículas viajantes, cujas órbitas são pouco afetadas pela presença da onda.

³No sentido de que o integrador numérico conserva essas quantidades somente para um curto intervalo de tempo (a depender da resolução da malha) da simulação.

Podemos traçar a curva para a separatriz no espaço de fase impondo o vínculo $e_i = E_s$ para a energia. Dessa forma, de (5.1.10) e (5.1.9), obtemos a seguinte expressão

$$p_i = \frac{\omega}{k} \pm \sqrt{\frac{2\varepsilon}{k} \left(\sqrt{X^2 + Y^2} + X \cos kx_i - Y \sin kx_i \right)}, \quad (5.1.11)$$

onde utilizamos que $2I = X^2 + Y^2$ e fizemos a transformação $p_i \rightarrow p_i - \omega/k$ para voltar ao referencial do laboratório.

Uma partícula profundamente aprisionada no poço de potencial da onda ($e_i \ll E_s$) pode ser considerada como uma partícula teste⁴. Neste caso, sua equação de movimento é dada por

$$\ddot{x}_i + \varepsilon k^{-1} \sqrt{2I} x_i = \varepsilon \sqrt{2I} \theta, \quad (5.1.12)$$

que é uma equação do tipo oscilador harmônico com frequência

$$\omega_B = \sqrt{\varepsilon k \sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (5.1.13)$$

Essa frequência define um limiar no tempo $\tau_B = \omega_B^{-1}$ a partir do qual podemos distinguir os regimes linear e não linear do modelo. Para instantes de tempo $t \ll \tau_B$, os efeitos de aprisionamento podem ser negligenciados, e as trajetórias das partículas podem ser tomadas como aproximadamente balísticas. Essa hipótese foi fundamental para a validade da teoria apresentada no capítulo 4 e dos resultados numéricos obtidos.

5.1.2 Passos do integrador

Para resolver numericamente a equação de Vlasov (5.1.1), utilizamos o método semi-lagrangiano com algumas modificações em relação aos passos do integrador apresentados na seção 3.3. Essas alterações se devem ao fato de o modelo onda-partícula possuir o par canonicamente conjugado (X, Y) referente à onda, que deve evoluir juntamente com o par (x, p) em cada passo de tempo do integrador. Além disso, as advecções nos momentos devido às componentes X e Y da força devem ser consideradas separadamente. Os passos desse integrador são dados por:

(I) – Advecção na direção de p devido à componente X da força por um passo de tempo de $\Delta t/2$:

$$f^{(I)}(x, p) := f(x, p - F_X \Delta t/2); \quad (5.1.14)$$

⁴Partícula com energia pequena ou suficiente (relativamente à onda) para que mudanças no estado (θ, I) decorrentes da interação possam ser negligenciadas.

(II) – Evolução da componente Y por um passo de tempo de $\Delta t/2$:

$$Y \rightarrow Y - \left(\omega X - \varepsilon k^{-1} \int dx dp f^{(I)}(x, p) \cos kx \right) \frac{\Delta t}{2}; \quad (5.1.15)$$

(III) – Advecção na direção de x por um passo de tempo de $\Delta t/2$:

$$f^{(III)}(x, p) := f^{(I)}(x - p\Delta t/2, p); \quad (5.1.16)$$

(IV) – Advecção na direção de p devido à componente Y da força por um passo de tempo de Δt :

$$f^{(IV)}(x, p) := f^{(III)}(x, p - F_Y \Delta t); \quad (5.1.17)$$

(V) – Evolução da componente X por um passo de tempo de Δt :

$$X \rightarrow X + \left(\omega Y + \varepsilon k^{-1} \int dx dp f^{(IV)}(x, p) \sin kx \right) \Delta t; \quad (5.1.18)$$

(VI) – Advecção na direção de x por um passo de tempo de $\Delta t/2$:

$$f^{(VI)}(x, p) := f^{(IV)}(x - p\Delta t/2, p); \quad (5.1.19)$$

(VII) – Advecção na direção de p devido à componente X da força por um passo de tempo de $\Delta t/2$:

$$f^{(VII)}(x, p) := f^{(VI)}(x, p - F_X \Delta t/2); \quad (5.1.20)$$

(VIII) – Evolução da componente Y por um passo de tempo de $\Delta t/2$:

$$Y \rightarrow Y - \left(\omega X - \varepsilon k^{-1} \int dx dp f^{(VII)}(x, p) \cos kx \right) \frac{\Delta t}{2}. \quad (5.1.21)$$

Apesar de não termos explicitados as interpolações como passos do integrador (para não sobrecarregar o algoritmo), elas são necessárias logo após que é feita uma transformação na posição ou no momento. Assim, as atribuições nos passos (I), (IV) e (VII) devem ser feitas mediante uma interpolação de f em relação aos momentos, enquanto que as atribuições nas etapas (III) e (VI) requerem uma interpolação nas posições.

5.2 Resultados da simulação

A função de distribuição é representada em uma malha numérica (x_i, p_j) definida na região $[x_{\min}, x_{\max}] \times [p_{\min}, p_{\max}]$ do espaço de fase composta de $N_x \times N_p$ pontos. Os valores de $f(x_i, p_j)$ em cada ponto da malha são armazenados na matriz $f[i][j]$, com $i = 0, \dots, N_x - 1$ e $j = 0 \dots N_p - 1$.

A evolução da distribuição $f(x_i, p_j)$ é obtida de acordo com os passos descritos na seção 5.1.2 onde são impostas condições de contorno periódicas nas etapas (III) e (VI). Dois tipos de configurações iniciais foram testados:

Na primeira etapa partimos de uma distribuição constante do tipo *waterbag* dada por

$$f(x, p, t = 0) = \frac{1}{2\Delta x_{\text{wb}}\Delta p_{\text{wb}}} , \text{ se } 0 \leq x \leq \Delta x_{\text{wb}} \text{ e } -\Delta p_{\text{wb}}/2 \leq p \leq \Delta p_{\text{wb}}/2 , \quad (5.2.22)$$

e nula caso contrário.

As simulações foram executadas em uma malha de 1024×1024 pontos distribuídos uniformemente na região $[-\pi, \pi] \times [-6, 6]$ do espaço de fase. Utilizamos $\Delta x_{\text{wb}} = 2.258$, $\Delta p_{\text{wb}} = 4.227$ como largura da *waterbag* e $h = 0.01$ como passo de tempo. Para a onda utilizamos os parâmetros $k = 1.0$, $\omega = 1.5$, $X(0) = 1.0$, $Y(0) = 0.0$ e $\varepsilon = 1.0$ como parâmetro de acoplamento.

Na etapa seguinte, a simulação é inicializada com uma distribuição homogênea nas posições e normal nos momentos escrita como

$$f(x, p, t = 0) = \frac{1}{2L\sqrt{2\pi}} \exp(-p^2/2) , \quad (5.2.23)$$

onde escolhemos $L = \pi$.

Utilizamos para este caso os seguintes parâmetros numéricos: $N_x = N_y = 512$, $x_{\max} = -x_{\min} = \pi$ e $p_{\max} = -p_{\min} = 6$ (para a malha); $k = 1.0$, $\omega = 1.5$, $X(0) = 1.0$ e $Y(0) = 0.0$ (para a onda) e constante de acoplamento $\varepsilon = 0.01$. Nas simulações estabelecemos $f(x, p, t) = 0$ se $|p| > 6.0$.

5.2.1 Inicialização com uma distribuição constante (*waterbag*)

Nas figuras 5.1 apresentamos o retrato de fase da simulação para diferentes instantes de tempo partindo da distribuição inicial em (5.2.22). A curva em azul representa a separatriz desse modelo, calculada em cada instante pela expressão (5.1.11).

Os parâmetros adotados nessa simulação foram escolhidos de forma a garantir que aproximadamente metade da *waterbag* inicial fosse aprisionada no poço de potencial da onda e assim tivessemos uma boa visualização da sua dispersão no decorrer do tempo.

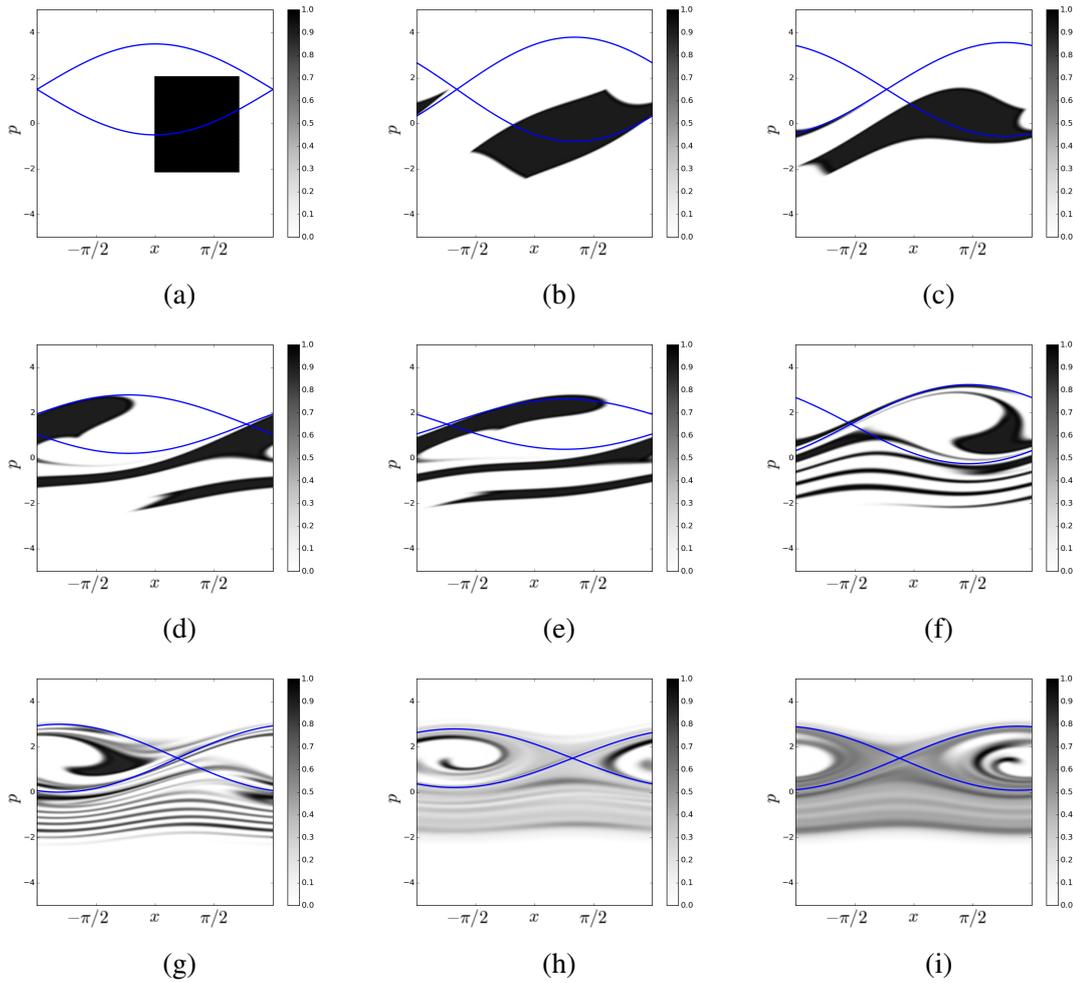


Figura 5.1: Retrato de fase da função de distribuição para $t = 0, 1, 2, 4, 5, 10, 20, 50, 100$ para o modelo onda-partícula em uma malha de 1024×1024 . A linha azul representa a separatriz desse sistema. Os parâmetros numéricos utilizados foram $x_{\max} = -x_{\min} = \pi$, $p_{\max} = -p_{\min} = 6.0$, $h = 0.01$, $\varepsilon = 1.0$, $k = 1.0$, $\omega = 1.5$, $X = 1.0$ e $Y = 0.0$.

As figuras nos permitem identificar comportamentos bastante distintos da função de distribuição: uma região de aprisionamento (dentro da separatriz) em que as partículas são arrastadas juntamente com a onda e uma região de “fluxo livre” (fora da separatriz) onde ocorrem as filentações ilustradas mais nitidamente nas figuras 5.1(f) e 5.1(g). Observamos também que com o passar do tempo as filentações aumentam em quantidade e dão um aspecto mais suave à função de distribuição na medida em que sua largura se torna da ordem do espaçamento da malha.

O erro relativos da norma L^1 , que expressa a conservação do volume no espaço de fase, e da energia total do sistema são monitorados ao longo da simulação e apresentados na figura 5.2. Os gráficos mostram que nosso integrador bem como a rotina de interpolação cúbica utilizada (ver seção 3.3) fornecem uma precisão satisfatória para os resultados.

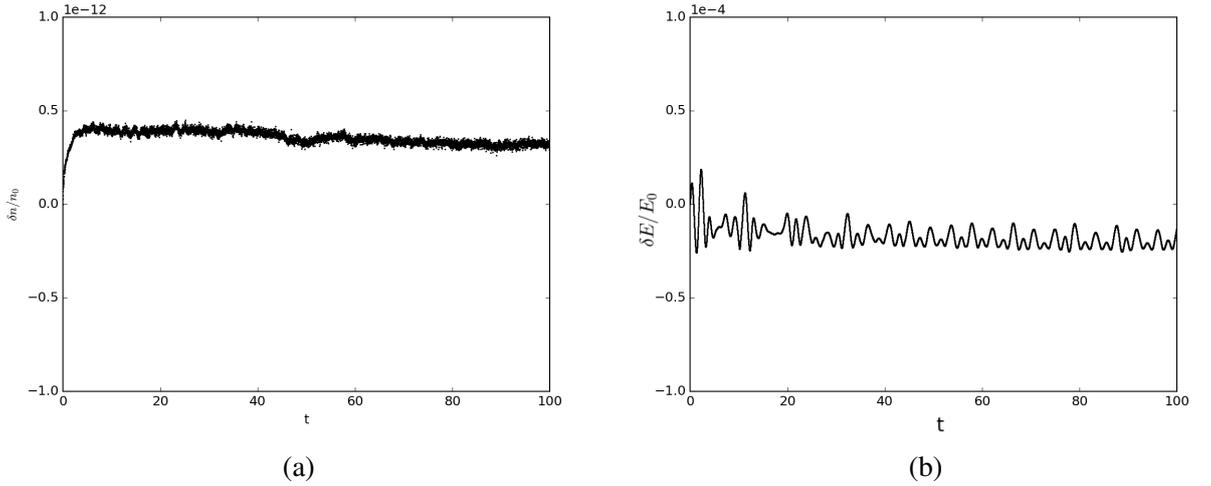


Figura 5.2: Erros relativos (a) da norma L^1 e (b) da energia total do sistema para uma função de distribuição inicial do tipo *waterbag*.

5.2.2 Inicialização com uma distribuição normal nos momentos

A motivação para começar a simulação com esse tipo de distribuição foi investigar seu processo de relaxação nas vizinhanças da velocidade de fase v_ϕ e a evolução da intensidade da onda em direção ao regime de saturação.

Conforme observamos nos retratos de fase apresentados na seção anterior, a largura da separatriz nos fornece uma medida do alcance da interação no espaço das velocidades. Assim, utilizamos essa quantidade para determinar a fração aproximada de partículas ressonantes do sistema.

Impusemos a condição

$$\eta \equiv \frac{n_{\text{ress}}}{n_0} = \frac{1}{\int f(x, p, 0) dp} \int_{\omega/k - \sqrt{2E_s}}^{\omega/k + \sqrt{2E_s}} f(x, p, 0) dp \ll 1, \quad (5.2.24)$$

por meio do parâmetro ε e das componentes X e Y para que o *bulk* da distribuição não fosse tão afetado pela presença da onda e assim o modelo onda-partícula fornecesse uma descrição mais coerente da interação feixe-plasma. Dessa forma, asseguramos que o sistema é composto por um *bulk* predominante e uma pequena fração de partículas ressonantes.

Na figura 5.3 ilustramos vários retratos da função de distribuição integrada nas posições partindo da distribuição dada em (5.2.23). Escolhemos como parâmetros $v_\phi = 1.5$ e $\varepsilon = 0.01$ de modo que a fração de partículas ressonantes representasse aproximadamente 4%. Essas partículas ocupam o intervalo de velocidades delimitado pelas linhas verticais azuis que correspondem aos valores mínimo e máximo ($\omega/k \pm \sqrt{2E_s}$) para os momentos da separatriz calculados em $t = 0$. Nas figuras 5.3(a) e 5.3(b) observamos o início da relaxação da função de distribuição decorrente do processo de sincronização

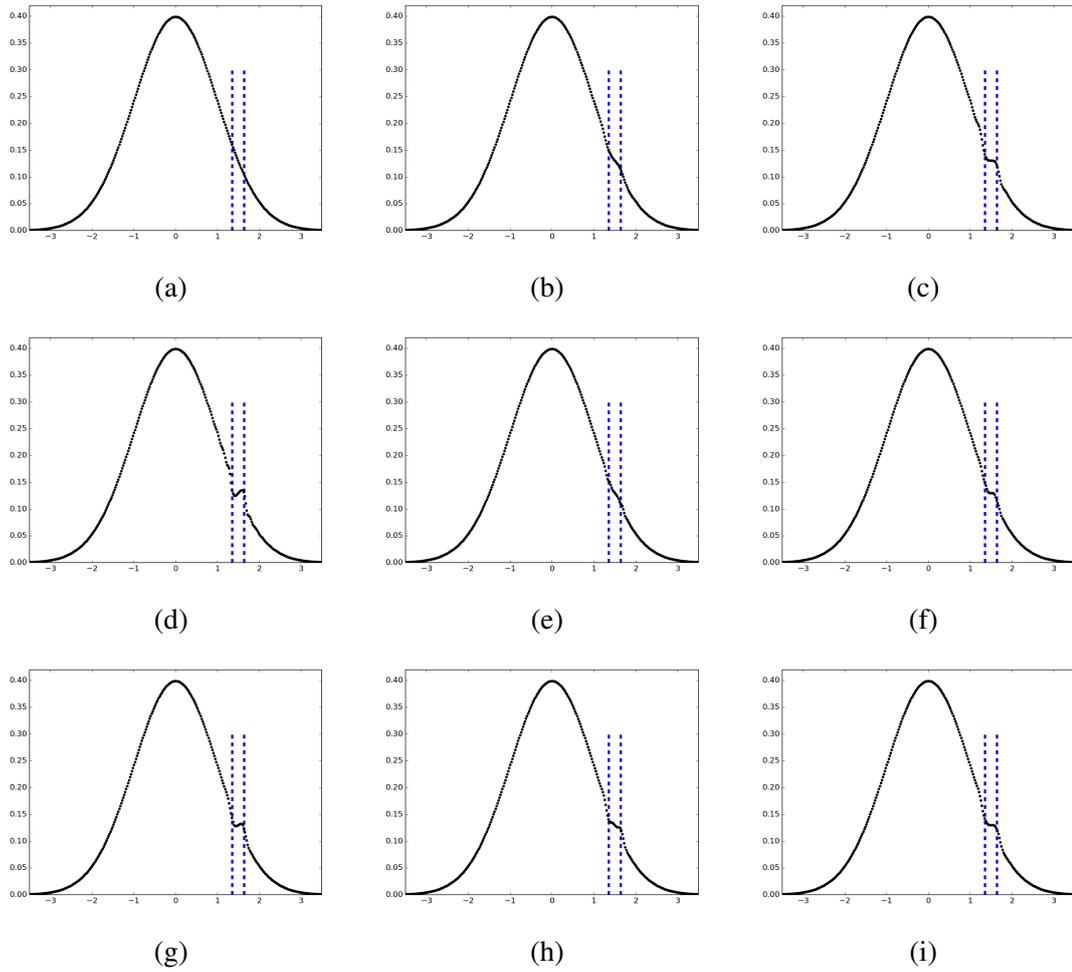


Figura 5.3: Processo de relaxação não colisional da função de distribuição dos momentos para $t = 0, 2.0, 2.7, 4.0, 8.0, 9.3, 10.5, 26.9, 37.9$ (em unidades de τ_B) em uma malha de 512×512 . O intervalo delimitado pelas linhas verticais azuis representa a largura da separatriz. Os parâmetros numéricos utilizados foram $x_{\max} = -x_{\min} = \pi$, $p_{\max} = -p_{\min} = 6.0$, $h = 0.001$, $\varepsilon = 0.01$, $k = 1.0$, $\omega = 1.5$, $X = 1.0$ e $Y = 0.0$.

entre a onda e as partículas ressonantes. No intervalo de tempo correspondente a essas duas figuras ($t \leq 2\tau_B$) o sistema passa do regime linear para o regime não linear.

Para $t \approx 2.7\tau_B$ observamos a formação do plateau na função de distribuição (vide Fig. 5.3(c)), que rapidamente é deformado dando origem a uma distribuição do tipo *bump on tail* [40]. Em seguida, a distribuição volta a relaxar, porém novamente ultrapassa a configuração com o plateau conforme ilustrado na figura 5.3(e). Esse processo de relaxação em direção a um estado estacionário⁵ é caracterizado pela alternância de regimes em que partículas são na média aceleradas ou desaceleradas, sendo essa difusão nas velocidades cada vez menos intensa com o passar do tempo.

⁵Para esse sistema a distribuição de equilíbrio das partículas não é maxwelliana e sim uma distribuição f_p achatada em torno da velocidade de fase da onda v_ϕ .

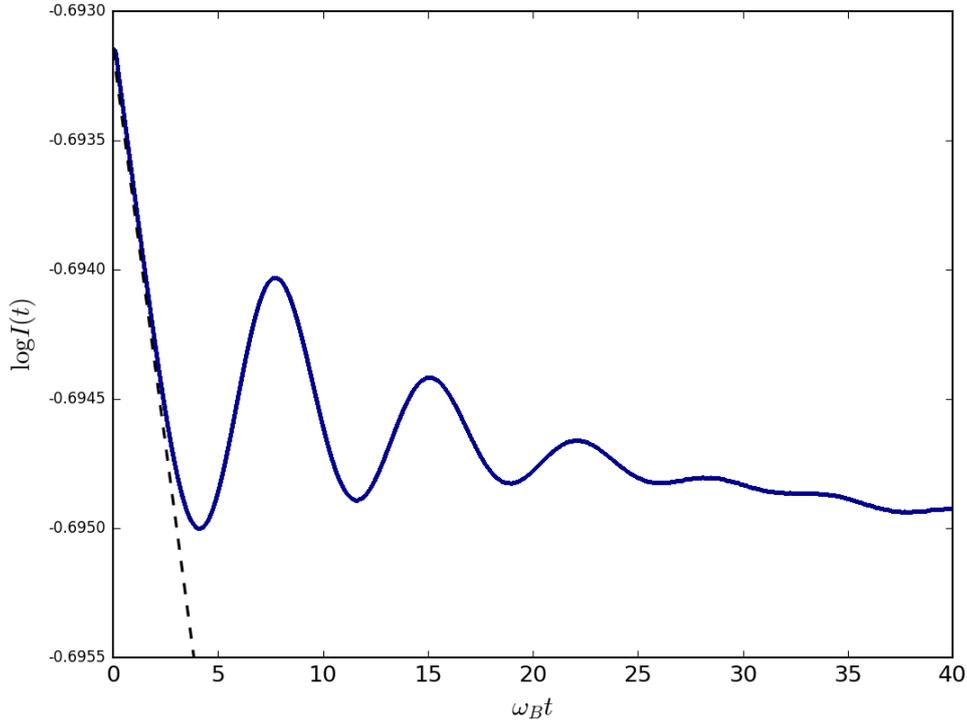


Figura 5.4: Evolução da intensidade da onda em escala logarítmica. O tempo é reescalado pelo período de aprisionamento $\tau_B = (\epsilon k |Z(0)|)^{-1/2}$. O efeito não linear fica nítido para $\omega_B t \sim 4$, onde a onda já não mais decai com a taxa de Landau (linha tracejada).

Analisamos também o processo de relaxação por meio da evolução da intensidade da onda. Observamos que inicialmente a onda decai com a taxa de Landau (4.1.41), representada pela linha tracejada na figura 5.4. Nessa perspectiva, a quebra do regime linear fica mais nítida por volta de $t = 4\tau_B$. A partir desse instante, a onda passa a ser amplificada atingindo um máximo de sua intensidade em $t \approx 7.5\tau_B$. É interessante notar que essa instabilidade se inicia no instante em que a distribuição de velocidades das partículas ressonantes apresenta uma inclinação máxima e termina por volta de $7.5\tau_B$ quando a inclinação é mínima. Esse processo se repete outras vezes porém com oscilações cada vez menos intensas.

Os resultados analíticos na referência [31] prevêm um decaimento exponencial inicial ($t \ll \tau_B$) com a taxa de Landau, seguindo de um regime oscilatório transiente para a amplitude da onda, e finalmente, quando $t \rightarrow 0$, um regime estacionário em que o processo de relaxação nas velocidades cessa e a amplitude da onda estabiliza. A evolução da intensidade da onda na figura 5.4 mostra que nossas simulações estão em acordo com essas previsões teóricas. As oscilações que observamos na intensidade da onda acompanhadas das variações no sinal da derivada $\partial_t(\partial_v f|_{v=v_0})$ expressam o mecanismo quase-ressonante de transferência de energia [29, 79] e momento [55, 15] que rege a

dinâmica do sistema onda-partícula.

5.3 Modelagem do plateau e a relação de dispersão

Para efetuar a integral de Landau (2.2.55) no regime de ondas não amortecidas, quando a distribuição de velocidades encontra-se achatada em torno de $v = v_\phi$, os autores da referência [58] propõem uma função de distribuição ligeiramente diferente de uma maxwelliana, dada por

$$f_p(v) = f_M(v) - \frac{f_M(v) - f_M(V_0)}{1 + [(v - V_0)/\Delta V_p]^{n_p}}, \quad (5.3.25)$$

onde $f_M = \exp(-v^2/2)/\sqrt{2\pi}$ é a maxwelliana usual, V_0 e ΔV_p representam, respectivamente, o centro e a largura do plateau e n_p um número inteiro par.

Além disso, as quantidades físicas são reescaladas em termos de quantidades características do plasma. Dessa forma, tempo e comprimento são dados, respectivamente, em unidades do inverso da frequência de plasma (ω_p^{-1}) e do comprimento de Debye (λ_D) e, conseqüentemente, a velocidade fica reescalada pela velocidade térmica dos elétrons (v_{th}). A relação de dispersão (2.2.58) assume portanto a seguinte forma

$$1 - \frac{1}{k^2} P \int \frac{df/dv}{v - v_\phi} dv = 0, \quad (5.3.26)$$

com P denotando o valor principal de Cauchy.

Assumindo uma distribuição de velocidades maxwelliana, representada pela linha tracejada na figura 5.5(a), e impondo que suas derivadas à esquerda e à direita se anulam na velocidade de fase da onda, a equação (5.3.26) admite para um dado vetor de onda k^* duas raízes, conforme ilustrado pela linha preta tracejada na Figura 5.5(b). Essas raízes são denominadas modo EAW (*Electron acoustic waves*), que para pequenos valores de k possui uma relação de dispersão típica de onda acústica, e modo LAN (em referência à oscilação de Langmuir), cuja frequência tende à frequência de plasma ω_p quando $k \rightarrow 0$. Na referência [57] é apresentada uma curva ⁶ para a relação de dispersão dessas ondas. Essa curva prevê a existência de um vetor de onda de *cutoff* para além do qual não existem modos permitidos para o plasma.

Por outro lado, se assumirmos uma função de distribuição com um plateau, a relação de dispersão (5.3.26) admite novas raízes além dos modos EAW e LAN, que podem ser mais bem visualizadas na região ampliada do gráfico em 5.5(b). Observamos

⁶A representação gráfica $\omega \times k$ da relação de dispersão dos modos EAW e LAN é conhecida hoje na literatura como *thumb curve* devido sua forma semelhante a um dedo polegar.

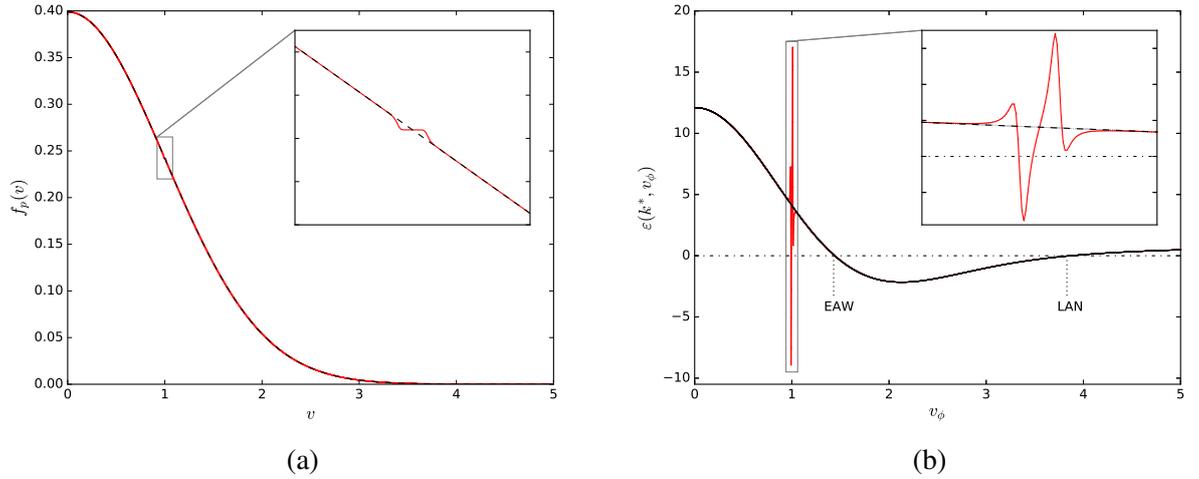


Figura 5.5: Distribuição de velocidades ligeiramente diferente de uma maxwelliana (devido a um achatamento nas vizinhanças da velocidade de fase da onda) e as alterações na função dielétrica resultantes da presença do *plateau* (a) Distribuição f_p dada pela Eq. (5.3.25) (vermelho). A curva tracejada representa a distribuição maxwelliana f_M . (b) Função dielétrica versus velocidade de fase calculada com $k = 0.3$ para a distribuição f_p com $\Delta V_p = 0.01$, $V_0 = 1.0$ e $n_p = 10$ (vermelho) e para uma distribuição f_M com derivada nula em $v = v_\phi$ (curva tracejada).

que na ausência de plateau a função dielétrica não se anula nesse pequeno intervalo em torno de $V_0 = 1.0$. Os autores em [58] denominaram essas novas soluções da função dielétrica de *corner modes* uma vez que surgem quando se introduz um pequeno *plateau* com bordas suaves na função de distribuição de tal forma que seu caráter contínuo não seja perdido.

5.3.1 Espectro dos *corner modes*

Para analisar o quão sensível o espectro dos *corner modes* é em relação à suavidade do plateau, propusemos uma forma alternativa para a função de distribuição, dada por

$$f_p(v) = f_M(v) - g(v)[f_M(v) - f_M(V_0)] , \quad (5.3.27)$$

onde $g(v)$ é uma função concentrada em torno de V_0 dada da seguinte forma:

$$g(v) = \frac{1}{4} [1 + \tanh((v - V_1)/T)] \cdot [1 - \tanh((v - V_2)/T)] , \quad (5.3.28)$$

com $V_1 = V_0 - \Delta V_p$ e $V_2 = V_0 + \Delta V_p$.

Nessa nova modelagem a suavidade do plateau não está associada a um parâme-

tro inteiro n_p , mas a um parâmetro⁷ real T que pode ser variado de forma contínua. Os dois diferentes plateaus estão ilustrados na Figura 5.6(a), em que a curva em vermelho representa o plateau dado por (5.3.25) e a curva em azul o plateau proposto em (5.3.27) em termos das tangentes hiperbólicas.

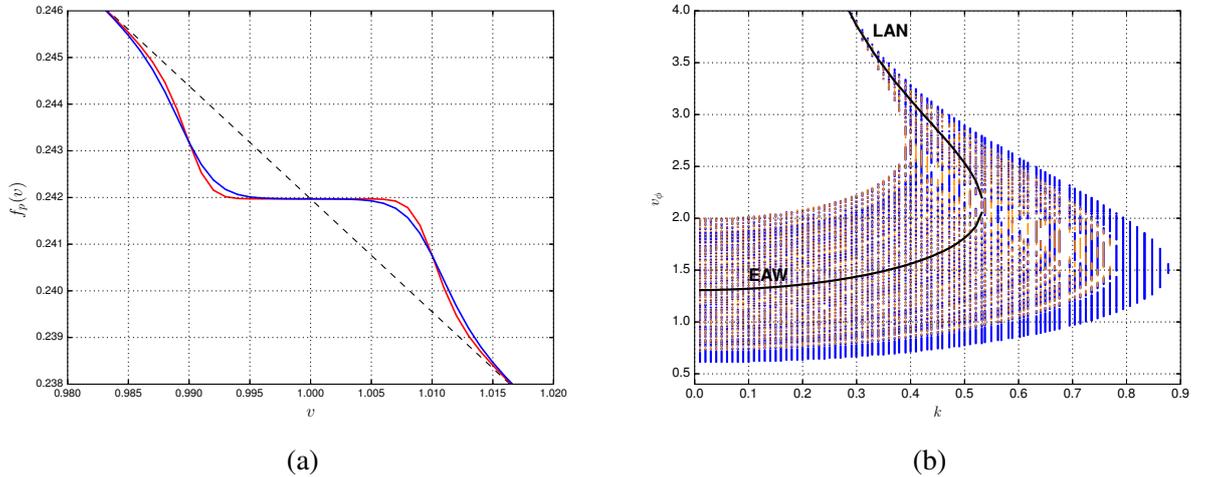


Figura 5.6: (a) Gráfico das distribuições de velocidades dadas por (5.3.25) (vermelho) e por (5.3.28) (azul) ampliados na região do plateau. (b) Espectra dos *corner modes* correspondentes a essas duas diferentes distribuições. A região em laranja reproduz corretamente o resultado da referência [58].

Na figura 5.6(b) mostramos o espectro dos *corner modes* calculado a partir das duas distribuições $f_p(v)$ apresentadas nessa seção. Observamos que apesar da diferença entre essas distribuições ser bastante sutil, os espectros associados a elas são significativamente diferentes conforme podemos ver pelas regiões laranja, obtida a partir da distribuição em (5.3.25), e azul, referente à modelagem em (5.3.27). Notamos ainda que essas diferenças são mais nítidas na região de menor velocidade de fase (por exemplo $v_\phi < 3.0$). Para justificar esse comportamento devemos lembrar que a integral no primeiro membro de (5.3.26) pode ser efetuada por partes dando origem ao seguinte integrando $(v - v_\phi)^{-2} f_p(v)$. O primeiro fator desse integrando é uma função bastante concentrada em torno de $v = v_\phi$ o que indica que sutis diferenças na forma do plateau podem alterar significativamente a relação de dispersão em (5.3.26) e conseqüentemente o espectro dos modos não amortecidos. Contudo, para velocidades de fase muito grandes $f_p(v) \rightarrow 0$ e essas diferenças sutis na forma do plateau tornam-se pouco influentes no cálculo da integral.

⁷Denotamos esse parâmetro pela letra T em analogia ao papel que a temperatura desempenha ao suavizar a “quina” da distribuição de Fermi-Dirac para um gás de elétrons livres nas vizinhanças da energia de Fermi [80].

5.4 Modos EAW e LAN na presença de campo externo

Nessa seção investigaremos os efeitos da presença de um campo externo de radiação sobre os modos não amortecidos discutidos na seção anterior. Para isso, partiremos da função dielétrica obtida em [81, 37] de onde obtemos a seguinte equação para a relação de dispersão

$$\epsilon_R(k, \Omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(\gamma_0 k) P \int \frac{\partial f_0 / \partial v}{v - \omega/k - m\omega_r/k} dv = 0, \quad (5.4.29)$$

com $\gamma_0 = eE_0/m_e\omega_r^2$ e m representando o número de fótons da radiação externa que contribui para a função dielétrica do plasma.

Os cálculos para a obtenção da função dielétrica em (5.4.29) estão mais bem detalhados no apêndice C.

Diferentemente do tratamento utilizado na referência [37], não faremos aqui uma expansão em série binomial do integrando em (5.4.29). Em vez disso, calcularemos numericamente essa integral nos mesmos moldes apresentados na referência [58]. Contudo, antes de procurar pelas raízes de (5.4.29) é conveniente reescrever essa equação em termos de variáveis adimensionais da seguinte forma

$$\epsilon_R(k, v_\phi) = 1 - \frac{1}{k^2} \sum_{m=0}^M J_m^2\left(\frac{\alpha_r}{\omega_r^2} k\right) I_m(k, v_\phi) = 0, \quad (5.4.30)$$

onde k é dado em unidades de λ_D^{-1} , as velocidades v e $v_\phi = \omega/k$ em unidades da velocidade térmica dos elétrons (v_{th}), as frequências ω e ω_r em unidades de ω_p e o parâmetro $\alpha_r \equiv \gamma_0\omega_r^2$ associado à amplitude do campo de radiação é dado em unidades de $v_{th}\omega_p$. O inteiro M representa um número de truncamento para a soma sobre o número de fótons do campo de radiação. A função $I_m(k, v_\phi)$ é definida como

$$I_m(k, v_\phi) = \begin{cases} P \int \frac{\partial f}{\partial v} / (v - v_\phi) dv, & m = 0 \\ P \left[\int \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{1}{v - v_\phi - m\omega_r/k} + \frac{1}{v - v_\phi + m\omega_r/k} \right) dv \right], & m > 0. \end{cases} \quad (5.4.31)$$

Vale notar que no limite $\alpha_r \rightarrow 0$ (campo de radiação fraco), as funções de Bessel comportam-se como deltas de Kronecker, i.e. $J_m \approx \delta_{m0}$ e assim podemos resgatar de (5.4.30) e (5.4.31) o resultado em (5.3.26) obtido via teoria cinética.

Para efetuar a integral em (5.4.31) utilizamos a regra trapezoidal de integração em uma malha numérica de $N = 12000$ pontos e estabelecemos $v_{max} = -v_{min} = 6$ como limite da integração numérica, i.e., assumimos que fora do intervalo $|v| \leq v_{max}$ a derivada da função de distribuição é nula. Com esses parâmetros, o passo de integração é dado por $\Delta v = 2v_{max}/N$. A integral é efetuada assumindo-se uma distribuição de velocidades

maxwelliana em $[v_{\min}, v_{\max}]$ exceto nos polos de (5.4.31) e no intervalo de largura $2\Delta v$ centrado na velocidade de fase da onda, onde assumimos que a função de distribuição possui derivada nula.

Na figura 5.7(a) fixamos o número de onda $k^* = 0.23$ e analisamos o comportamento da função dielétrica para diferentes valores do número inteiro M , que representa o valor de truncamento do somatório (5.4.30). Notamos que a presença do campo externo atua como um mecanismo capaz de excitar novos modos longitudinais no plasma, uma vez que as curvas para diferentes valores de M apresentam raízes distintas da curva tracejada, que corresponde aos modos na ausência de radiação. Observamos que para valores intermediários do vetor de onda ($k \sim 0.2$) os processos multi-fotônicos $m \leq 5$ possuem contribuições significativas para o cálculo das raízes da função dielétrica.

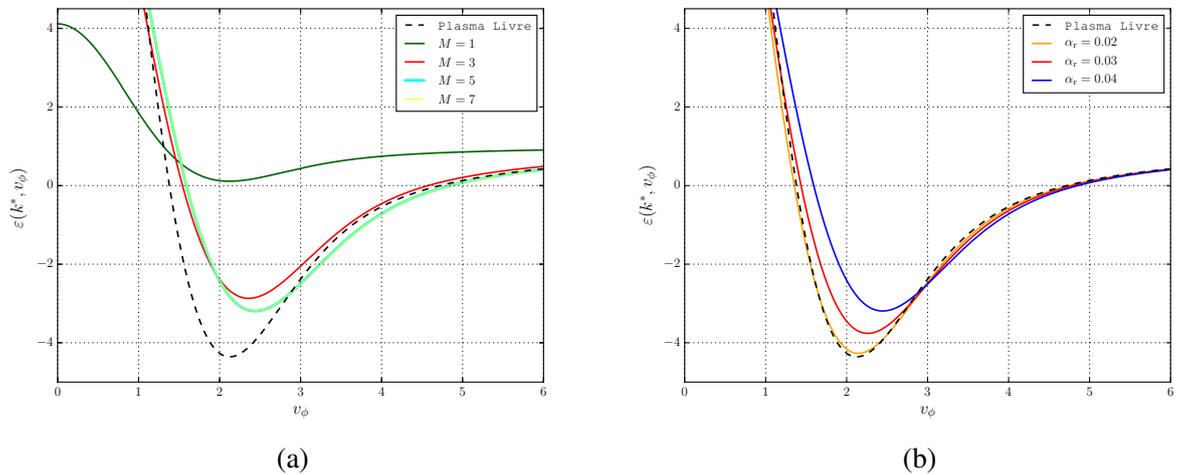


Figura 5.7: Função dielétrica para um plasma livre na presença de um campo eletromagnético externo com $\omega_r = 0.05$ e $k^* = 0.23$ para (a) diferentes números de fótons com $\alpha_r = 0.04$ e para (b) diferentes magnitudes do campo de radiação com $M = 10$. A curva tracejada representa a função dielétrica na ausência de campo externo cujas raízes correspondem os modos EAW e LAN.

Na figura 5.7(b) fixamos o número de fótons, a frequência do campo externo e o número de onda $k^* = 0.23$ e analisamos o comportamento da função dielétrica para diferentes amplitudes do campo externo por meio do parâmetro α_r . Notamos que ambos os modos (LAN e EAW) são sensíveis à variação da magnitude do campo de radiação, sendo essa mudança mais significativa sobre os modos EAW. Observamos ainda um deslocamento no ponto de mínimo dessa função indicando que a presença da radiação altera também o valor do vetor de onda de *cutoff*.

Apresentamos na figura 5.8 os gráficos da relação de dispersão dos modos não amortecidos quando são considerados processos multi-fotônicos envolvendo até M fótons. Para os parâmetros α_r e ω_r utilizados, verificamos que é possível, como boa aproximação, limitar o somatório em (5.4.30) a $M = 9$. Observamos que a presença do

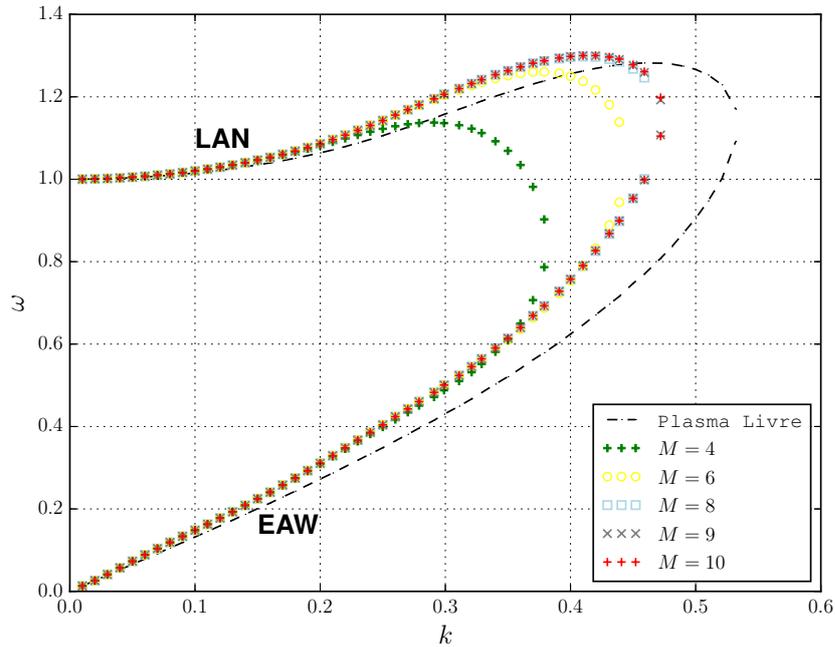


Figura 5.8: Gráfico $\omega \times k$ para os modos coletivos longitudinais de um plasma sujeito a campo eletromagnético externo. Nela podemos identificar os ramos LAN (superior) e EAW (inferior). Os gráficos foram obtidos assumindo a frequência da radiação $\omega_r = 0.05$. A linha tracejada (conhecida como *thumb curve* [58]) representa a relação de dispersão para os modos na ausência de campo externo.

campo externo tem pouca influência sobre os modos com grande comprimento de onda ($k \approx 0$). Contudo, para valores maiores de k , esses modos são significativamente alterados, conforme podemos observar pelo deslocamento das ordenadas (frequências) dos pontos ilustrados em relação à curva polegar original (linha tracejada). Além disso, notamos que a presença do campo externo confina os modos em um intervalo de k menor do que o valor $k = 0.53$ reportado na referência [58].

Considerações finais e perspectivas

Na presente tese, discutimos os efeitos da interação onda-partícula em plasmas não colisionais com base em um modelo hamiltoniano para N partículas eletrostaticamente acopladas a uma onda. Utilizamos duas abordagens distintas para o problema: uma linear, em que resolvemos as equações de movimento através da determinação do espectro das autofrequências análogas de van Kampen e, a outra, não linear, por meio de simulações de Vlasov para descrever a dinâmica do sistema desde o regime quase-balístico até o regime de aprisionamento forte das partículas. Investigamos também os modos coletivos em plasmas livres na hipótese de ondas não amortecidas e os modos coletivos em plasmas magnetizados sujeitos a campo externo de radiação.

A discretização das partículas em feixes monocinéticos no modelo onda-partícula nos permite definir um estado de equilíbrio e expandir a solução geral do sistema linear como uma superposição de modos normais. Esses modos normais possuem frequências complexas associadas, obtidas a partir de uma relação de dispersão envolvendo as velocidades dos feixes e o número de partículas em cada feixe. Observamos que cada modo normal contribui para compor a amplitude inicial da onda e que essas contribuições tem um comportamento diferenciado dependendo se o sistema é estável ou instável. Para o caso estável, observamos que independente do número de feixes, todos os modos possuem contribuição relevante para a amplitude inicial da onda. Contudo, no caso instável, observamos que no regime de muitos feixes dois modos específicos possuem contribuições dominantes: um modo próximo ao modo de Landau (bL) e o seu complexo conjugado (bL^*). Verificamos ainda que a contribuição do modo bL^* é cancelada (não somente em $t = 0$, mas ao longo de toda a dinâmica) pela superposição dos modos com autofrequências próximas ao eixo real. Nossos resultados mostram que no regime linear o *phase mixing* dos modos análogos de van Kampen é o mecanismo responsável pelo amortecimento/amplificação de Landau. No caso instável esse *phase mixing* tem ainda uma característica peculiar, que é um efeito de interferência destrutiva entre o modo bL^* e o espectro denso próximo ao eixo real. As análises envolvendo sistemas de muitos feixes foram possíveis graças ao desenvolvimento de uma nova técnica numérica suficientemente precisa para a determinação de raízes complexas.

O amortecimento das oscilações eletrostáticas foi também investigado por simulações de Vlasov via método semi-lagrangiano do modelo onda-partícula. Observamos que para uma pequena fração de partículas ressonantes e para uma distribuição de velocidades maxwelliana a onda decai inicialmente com a taxa de Landau. Porém, quando os efeitos de aprisionamento passam a ser relevantes, a intensidade da onda apresenta um comportamento oscilatório, sendo a amplitude dessas oscilações cada vez menor com o passar do tempo. Durante esse processo, a função de distribuição das velocidades é constantemente deformada nas vizinhanças da velocidade de fase da onda e essas deformações são também cada vez menos acentuadas. Estudamos também os modos coletivos não amortecidos do plasma quando introduzimos um pequeno plateau na distribuição de velocidades centrado na velocidade de fase da onda. Investigamos a sensibilidade da função dielétrica para duas modelagens diferentes para o plateau e constatamos que o espectro dos modos não amortecidos é significativamente alterado para ondas com velocidades de fase não muito superiores à velocidade térmica dos elétrons. Finalizamos a parte do trabalho envolvendo efeitos não lineares mostrando que a presença do campo externo de radiação desloca as raízes da função dielétrica e restringe os modos não amortecidos (EAW e LAN) a valores menores para o comprimento de onda.

Com os estudos para plasmas magnetizados sujeitos a campos externos de radiação, verificamos dois comportamentos distintos dependendo da relação entre as frequências da radiação e a frequência ciclotrônica dos elétrons. Observamos que no regime quase-ressonante ($\omega_r \approx \omega_c$), a presença do campo externo faz com que o decaimento da frequência dos modos eletrostáticos com o vetor de onda ocorra de forma mais abrupta. No regime não ressonante, a principal constatação é o surgimento de novas frequências assintóticas associadas a novas singularidades que surgem na função dielétrica. Nesse regime, constatamos que além dos modos harmônicos ciclotrônicos o plasma admite também modos harmônicos da frequência do campo de radiação.

Como perspectivas futuras de trabalho pretendemos estender as análises lineares do modelo onda-partículas para outras configurações de feixes monocinéticos e outras inicializações para o sistema. Esperamos que no regime de muitos feixes os cálculos do espectro de autofrequências e do fator de escala levem a resultados semelhantes para a evolução da intensidade da onda, reforçando assim os resultados obtidos no capítulo 4.

Pretendemos também otimizar o cálculo do espectro das frequências de van Kampen por meio de um código paralelizado em linguagem de programação CUDA. A idéia é atribuir à cada *thread* da GPU o cálculo de uma raiz da relação de dispersão. Obtivemos resultados preliminares para sistemas de poucos feixes e com baixa precisão para o cálculo das raízes. Porém, constatamos que quando exigimos maior precisão do método o tempo de execução da rotina definida no *device* torna-se muito longo e a execução é abortada. Mesmo quando desativamos o ambiente gráfico, forçando dedicação

quase integral da máquina ao programa, o sistema demora demasiadamente. Precisamos portanto, introduzir passos intermediários de comunicação entre a GPU e a CPU a fim de evitar laços muito demorados sendo executados na placa gráfica. Esperamos explorar mais o método e testá-lo para outros problemas, tanto em uma versão sequencial quanto em uma versão paralelizada.

As simulações de Vlasov nos permitiram investigar a interação onda-partícula em plasmas fora do regime linear. A paralelização desses códigos é também uma possibilidade de atuação futura, visto que permitirá atingir o regime de quase-saturação mais rapidamente.

Referências Bibliográficas

- [1] TONKS, L.; LANGMUIR, I. Oscillations in ionized gases. *Phys. Rev.*, v. **33**, p. 195–211, 1929.
- [2] LINDER, E. G. Effect of electron pressure on plasma electron oscillations. *Phys. Rev.*, v. **49**, p. 753–754, 1936.
- [3] VLASOV, A. A. On vibration properties of electron gas. *J. Exp. Theor. Phys.*, v. **8**, p. 291, 1938.
- [4] LANDAU, L. D. On the vibrations of the electronic plasma. *J. Phys. USSR*, v. **10**, p. 25–34, 1946.
- [5] BOHM, D.; GROSS, E. P. Theory of plasma oscillations. A. Origin of medium-like behavior. *Phys. Rev.*, v. **75**, p. 1851–1864, 1949.
- [6] PINES, D.; SCHRIEFFER, J. R. Approach to equilibrium of electrons, plasmons, and phonons in quantum and classical plasmas. *Phys. Rev.*, v. **125**, p. 804–812, 1962.
- [7] HARRIS, E. G. Classical plasma phenomena from a quantum mechanical viewpoint. *Adv. Plasma Phys.*, v. **3**, p. 157–241, 1969.
- [8] AMATO, M. A.; MIRANDA, L. C. M. Effect of laser-cyclotron resonance on the Landau damping of plasma waves. *Phys. Rev. A*, v. **14**, p. 877–879, 1976.
- [9] AMATO, M. A.; MIRANDA, L. C. M. Plasma wave instability in the field of an intense electromagnetic wave. *Phys. of Fluids*, v. **10**, p. 1031–1032, 1977.
- [10] LIMA, M. B. S.; LIMA, C. A. S.; MIRANDA, L. C. M. Coulomb screening in the simultaneous presence of a radiation field and a strong DC magnetic field. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, v. **12**, p. 4469–4475, 1979.
- [11] O'NEIL, T. M.; WINFREY, J. H.; MALMBERG, J. H. Nonlinear interaction of a small cold beam and a plasma. *Phys. Fluids*, v. **14**, p. 1204–1212, 1971.

- [12] ABE, H.; FUKUMASA, O.; ITATANI, R. Computer simulation of nonlinear interaction between a cold beam and a weakly collisional plasma. *Phys. Fluids*, v. **22**, p. 310–320, 1979.
- [13] ESCANDE, D. F. Large scale structures in kinetic plasma turbulence. *edited by J D Fournier and P L Sulem (Springer-Verlag, Berlin)*, p. 73–104, 1991.
- [14] ANTONI, M.; ELSKENS, Y ESCANDE, D. F. Explicit reduction of N -body dynamics to self-consistent particle-wave interaction. *Phys. Plasmas*, v. **5**, p. 841–852, 1998.
- [15] ELSKENS, Y.; ESCANDE, D. *Microscopic dynamics of plasmas and chaos*. Bristol: IoP publishing, 2003.
- [16] DOVEIL, F.; MACOR, A. Wave-particle interaction and hamiltonian dynamics investigated in a traveling wave tube. *Phys. Plasmas*, v. **13**, p. 055704, 2006.
- [17] FIRPO, M.-C.; ELSKENS, Y. Kinetic limit of N -body description of wave-particle self-consistent interaction. *J. Stat. Phys.*, v. **93**, p. 193–209, 1998.
- [18] ESCANDE, D. F.; ZEKRI, S.; ELSKENS, Y. Intuitive and rigorous microscopic description of spontaneous emission and Landau damping of Langmuir waves through classical mechanics. *Phys. Plasmas*, v. **3**, p. 3534–3539, 1996.
- [19] CARY, J. R.; DOXAS, I. An explicit symplectic integration scheme for plasmas simulations. *J. Computational Phys.*, v. **107**, p. 98–104, 1993.
- [20] TENNYSON, J. L.; MEISS, J. D.; MORRISON, P. J. Self-consistent chaos in the beam-plasma instability. *Physica D*, v. **71**, p. 1–17, 1994.
- [21] DOVEIL, F.; FIRPO, M. C.; ELSKENS, Y.; GUYOMARC'H, D.; POLENI, M.; BERTRAND, P. Trapping oscillations, discrete particle effects and kinetic theory of collisionless plasma. *Phys. Lett. A*, v. **284**, p. 279–285, 2001.
- [22] DOVEIL, F.; ESCANDE, D. F.; MACOR, A. Experimental observation of nonlinear synchronization due to a single wave. *Phys. Rev. Lett.*, v. **94**, p. 085003, 2005.
- [23] RYUTOV, D. D. Landau damping : half a century with the great discovery. *Plasma Phys. Control. Fusion*, v. **41 (Suppl. 3A)**, p. A1–A12, 1999. Proc. EPS Conf. Control. Fusion Plasma Phys. and Intl Cong. Plasma Phys. Prague 1998.
- [24] ELSKENS, Y. Irreversible behaviours in Vlasov equation and many-body hamiltonian dynamics : Landau damping, chaos and granularity in the kinetic limit. In *Topics in kinetic theory* (ed. Th Passot, C Sulem P-L Sulem), Fields institute communications series, Providence (RI): Am. Math. Soc., v. **46**, p. 89–108, 2005.

- [25] MOUHOT, C.; VILLANI, C. Landau damping. *J. Math. Phys.*, v. **51**, p. 015204, 2010.
- [26] MOUHOT, C.; VILLANI, C. On Landau damping. *Acta Math.*, v. **207**, p. 29–201, corr. fig. 391, 2011.
- [27] BRATANOV, V.; JENKO, F.; HATCH, D.; BRUNNER, S. Aspects of linear Landau damping in discretized systems. *Phys. Plasmas*, v. **20**, p. 022108, 2013.
- [28] BÉNISTI, D. Envelope equation for the linear and nonlinear propagation of an electron plasma wave, including the effects of Landau damping, trapping, plasma inhomogeneity, and the change in the state of wave. *Phys. Plasmas*, v. **23**, p. 102105, 2016.
- [29] DAWSON, J. M. On Landau damping. *Phys. Fluids*, v. **4**, p. 869–874, 1961.
- [30] MALMBERG, J. H.; WHARTON, C. B. Collisionless damping of electrostatic plasma waves. *Phys. Rev. Lett.*, v. **13**, p. 184–186, 1964.
- [31] O'NEIL, T. Collisionless damping of nonlinear plasma oscillations. *Phys. Fluids*, v. **8**, p. 2255–2262, 1965.
- [32] VEDENOV, A. A.; VELIKHOV, E. P.; SAGDEEV, R. Z. Nonlinear oscillations of rarified plasma. *Nuclear Fusion*, v. **1**, p. 82–100, 1961.
- [33] DRUMMOND, W. E.; PINES, D. Non-linear stability of plasma oscillations. *Nuclear Fusion*, v. **Supl. part 3**, p. 1049–1057, 1962.
- [34] ROBERSON, C.; GENTLE, K. W.; NIELSEN, P. Experimental test of quasilinear theory. *Phys. Rev. Lett.*, v. **26**, p. 2462, 1971.
- [35] CHAVANIS, P. H. Hamiltonian and brownian system with long-range interactions: Iv. general kinetic equations from the quasilinear theory. *Phys. A*, v. **387**, p. 1524–1508, 2008.
- [36] SANTOS, D. D. A.; ELSKENS, Y. Phase mixing importance for both Landau instability and damping. *J. Plasma Phys.* - submitted.
- [37] RIBEIRO, B. V.; SANTOS, D. D. A.; AMATO, M. A.; FONSECA, A. L. A. Collective modes in free plasmas subjected to a radiation field. *Journal of Physics: Conference Series*, v. **511**, p. 012005, 2014.
- [38] SANTOS, D. D. A.; RIBEIRO, B. V.; AMATO, M. A.; FONSECA, A. L. A. Collective oscillations in a magnetized plasma subjected to a radiation field. *WASET*, v. **6**, p. 867–873, 2012.

- [39] CHEN, F. F. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. 2. ed. New York: Plenum Press, 1985.
- [40] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. 3. ed. New York: Springer, 2004.
- [41] LIBOFF, R. L. *Kinetic theory: Classical, quantum, and relativistic descriptions*. 3. ed. New York: Springer, 2003.
- [42] ESCANDE, D. F.; DOVEIL, F.; ELSKENS, Y. *N*-body description of Debye shielding and Landau damping. *Plasma Phys. Control. Fusion*, v. **58**, p. 014040, 2016.
- [43] AKHIEZER, A. I.; AKHIEZER, I. A.; POLOVIN; SITENKO; STEPANOV. *Plasma eletrodynamics, volume 1: Linear theory*. Oxford: Pergamon Press, 1975.
- [44] BERSTEIN, I. B. Waves in a plasma in a magnetic field. *Phys. Rev.*, v. **109**, p. 10–21, 1958.
- [45] BELLAN, P. M. *Fundamentals of plasma physics*. London: Cambridge University Press, 2006.
- [46] KLIMONTOVICH, Y. L. *The statistical theory of non-equilibrium process in a plasma*. Oxford: Pergamon Press, 1967.
- [47] VAN KAMPEN, N. G. On the theory of stationary waves in plasmas. *Physica*, v. **XXI**, p. 949–963, 1955.
- [48] DAWSON, J. M. Plasma oscillations of a large number of electron beams. *Phys. Rev.*, v. **118**, p. 381–389, 1960.
- [49] WATSON, G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. 2. ed. London: Cambridge University Press, 1944.
- [50] MEYER-VERNET, N.; MONCUQUET, M.; HOANG, S. Temperature inversion in the lo plasma torus. *Icarus*, v. **116**, p. 202–213, 1995.
- [51] AKHIEZER, A. I.; AKHIEZER, I. A.; POLOVIN, R. V. *Non-linear theory and fluctuations. plasma electrodynamicics 2*. Oxford: Pergamon Press, 1975.
- [52] CROUSEILLES, N.; MEHRENBERGER, M.; SONNENDRÜCKER, E. Conservative semi-Lagrangian schemes for Vlasov equations. *J. Computational Phys.*, v. **229**, p. 1927–1953, 2010.

- [53] SONNENDRÜCKER, E. Numerical methods for the Vlasov equations. In Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Technische Universität München (Wintersemester 2012-2013).
- [54] FILBET, F.; SONNENDRÜCKER, E. Comparison of Eulerian Vlasov solvers. *Comput. Phys. Commun.*, v. **150**, p. 247–266, 2003.
- [55] ESCANDE, D. F. Wave-particle interactions in plasmas : A qualitative approach. In *Long-range interacting systems* (ed. Th Dauxois, S Ruffo L F Cugliandolo), Les Houches summer school, Oxford: Oxford university press, v. **XC**, p. 469-506, 2008.
- [56] BERNSTEIN, I. B.; ENGELMANN, F. Quasilinear theory of plasma waves. *Phys. Fluids*, v. **9**, p. 937–952, 1966.
- [57] HOLLOWAY, J. P. Undamped plasma waves. *Phys. Rev. A*, v. **44**, p. 3856–3868, 1991.
- [58] VALENTINI, F.; PERRONE, D.; CALIFANO, F.; PEGORARO, F.; VELTRI, P.; MORRISON, P. J. Undamped electrostatic plasma waves. *Phys. of Plasmas*, v. **19**, p. 092103, 2012.
- [59] BOHM, D.; PINES, D. A collective description of electron interactions. I. Magnetic interactions. *Phys. Rev.*, v. **82**, p. 625–634, 1951.
- [60] KREMP, D.; SCHLANGES, M.; KRAEFT, W.-D. *Quantum statistics of nonideal plasmas*. Netherlands: Springer, 2005.
- [61] CHENG, C. Z.; KNORR, G. The integration of Vlasov equation in configuration space. *J. Computational Phys.*, v. **22**, p. 330–351, 1976.
- [62] KOMETA, B. K. *Semi-Lagrangian methods and new integration schemes for convection-dominated problems*. 2011. Tese (Doutorado em Física) - Department of Mathematical Sciences, Faculty of Information Technology, Mathematics and Electrical Engineering, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2011.
- [63] STANFORTH, A.; CÔTÉ, J. Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models - a review. *Mon. Weather Rev.*, v. **119**, p. 2206–2223, 1991.
- [64] WILLIAMSON, D. L.; OLSON, J. G. Climate simulations with a semi-Lagrangian version of the NCAR community climate model. *Mon. Weather Rev.*, v. **122**, p. 1594–1610, 1993.
- [65] RAPAPORT, D. C. *The art of molecular dynamics simulations*. 2. ed. London: Cambridge, 2004.

- [66] BALESCU, R. *Statistical dynamics : Matter out of equilibrium*. London: Imperial college press, 1997.
- [67] HAIRER, E.; LUBICH, C.; WANNER, G. Geometric numerical integration illustrated by the Störmer/Verlet method. *Acta Numerica*, v. **12**, p. 399–450, 2003.
- [68] BLANES, S.; CASAS, F. *A concise introduction to geometric numerical integration*. Boca Raton, USA: CRC Press, 2016.
- [69] YOSHIDA, H. Construction of higher order symplectic integrators. v. **150**, p. 262–268, 1990.
- [70] CASAS, F.; MURUA, A.; NADINIC, M. Efficient computation of the Zassenhaus formula. *Comput. Phys. Commun.*, v. **183**, p. 2386–2391, 2012.
- [71] FILBET, F.; SONNENDRÜCKER; BERTRAND, P. Conservative numerical schemes for the Vlasov equation. *J. Computational Phys.*, v. **172**, p. 166–187, 2001.
- [72] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical recipes in C: The art of scientific computing*. 2. ed. London: Cambridge University Press, 1992.
- [73] ROCHA FILHO, T. M. Solving the Vlasov equation for one-dimensional models with long range interactions on a GPU. *Comput. Phys. Commun.*, v. **184**, p. 34–39, 2012.
- [74] ANTONI, M.; RUFFO, S. Clustering and relaxation in hamiltonian long-range dynamics. *Phys. Rev. E*, v. **52**, p. 2361–2374, 1995.
- [75] ELSKENS, Y. Finite- N dynamics admit no traveling-wave solutions for the hamiltonian XY model and single-wave collisionless plasma model. *ESAIM Proc.*, v. **10**, p. 211–215, 2001.
- [76] ANTONIAZZI, A.; DE NINNO, G.; FANELLI, D.; GUARINO, A.; RUFFO, S. Wave-particle interaction: from plasma physics to the free-electron laser. *Journal of Physics: Conference Series*, v. **7**, p. 143–153, 2005.
- [77] BACHELARD, R.; CHANDRE, C.; FANELLI, D.; LEONCINI, X.; VITTOT, M. Stabilizing the intensity for a hamiltonian model of the FEL. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.*, v. **593**, p. 94–97, 2008.
- [78] OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [79] NICHOLSON, D. R. *Introduction to plasma theory*. New York: John Wiley Sons, 1983.

- [80] ASHCROFT, N. H.; MERMIN, N. D. *Solid state physics*. Orlando: Harcourt College Publisher, 1976.
- [81] RIBEIRO, B. V. *Modos coletivos em um plasma livre sujeito a um campo de radiação*. 2011. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.
- [82] GALVÃO, R. M. O.; MIRANDA, R. C. M. Quantum theory of an electron in external fields using unitary transformations. *Am. J. Phys.*, v. **51**, p. 729–733, 1983.
- [83] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. *Physical kinetics*. Oxford, England: Pergamon Press, 1981.
- [84] ARFKEN, G. B. *Mathematical methods for physicists*. 6. ed. Burlington, USA: Elsevier, 2005.
- [85] GUIMARÃES, A. F. *Estudo, utilizando a mecânica quântica, das propriedades dielétricas e do efeito da blindagem dinâmica na taxa de aquecimento de plasmas macroscópicos*. 2006. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- [86] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. *Quantum mechanics, non-relativistic theory*. 3. ed. Oxford, England: Pergamon Press, 1977.
- [87] WALTERS, G. M.; HARRIS, E. G. Quantum-mechanical theory of nonlinear plasma phenomena in a strong magnetic field. *Phys. Fluids*, v. **11**, p. 112–22, 1968.

Método da biseccção no plano complexo via teorema de Cauchy

O teorema de Cauchy estabelece que se F é uma função analítica em um domínio simplesmente conexo \mathcal{D} delimitado por um contorno fechado $\partial\mathcal{D}$ então $\oint_{\partial\mathcal{D}} F(z) dz = 0$, e se F possui um número finito de pólos simples z_j em \mathcal{D} com resíduos R_j , então $\oint_{\partial\mathcal{D}} F(z) dz = 2\pi i \sum_j R_j$. Nesse apêndice, apresentamos um método direto baseado nessa ferramenta elementar de análise complexa com o objetivo de calcular numericamente o espectro completo das autofrequencias (análogas) de van Kampen.

Com $\chi(\sigma)$ sendo o segundo membro da equação (4.1.36), o método consiste em obter as raízes de $\sigma - \chi(\sigma)$, dentro de uma dada região, pela procura dos pólos de $(\sigma - \chi(\sigma))^{-1}$. Para encontrar uma raiz nas vizinhanças da velocidade do s -ésimo feixe, definimos dois retângulos : um à esquerda com vértices A_1 até A_4 e um outro à direita com vértices A'_1 até A'_4 , ambos ilustrados na figura A.1a. Primeiramente, estimamos o valor da integral de Cauchy ao longo desses contornos retangulares com o intuito de identificar de

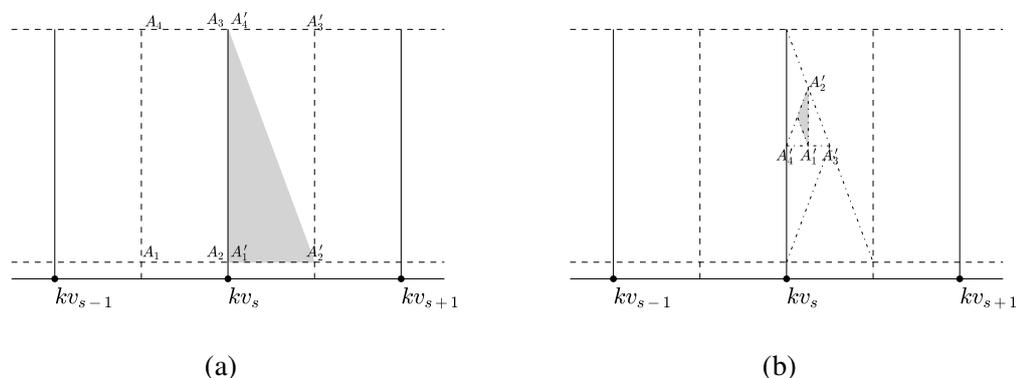


Figura A.1: Ilustração do método da biseccção no plano complexo σ supondo uma raiz localizada à direita da linha correspondente ao s -ésimo feixe. Os triângulos sombreados destacam as regiões em que a integral de contorno não se anula e, conseqüentemente, possui uma raiz.

qual lado do s -ésimo feixe a raiz está localizada. Se um desses retângulos fornece

$$\left| \oint_{\partial \mathcal{D}} (\sigma - \chi(\sigma))^{-1} d\sigma \right| \leq C_{\text{crit}}, \quad (\text{A.1})$$

com C_{crit} representando nosso critério para assumir a integral numericamente nula, ele é descartado como possível região contendo a raiz.

Após identificada a presença de uma raiz dentro de um retângulo, o próximo passo consiste em implementar o método da biseção, que se baseia em sucessivas divisões das regiões de procura. Na figura A.1, ilustramos esse procedimento com os triângulos sombreados em A.1(a) e A.1(b) mostrando, respectivamente, a configuração no início e após 6 iterações do método. As iterações são finalizadas quando o valor do maior lado do triângulo sombreado é menor do que a tolerância do método (que é um parâmetro de entrada). Nesse caso, a raiz aproximada de $\sigma - \chi(\sigma)$ é dada pelo centro geométrico do triângulo.

Algoritmo 1 MÉTODO DA BISECÇÃO NO PLANO COMPLEXO

```

Gside ← Larger_side ( $A'_1, A'_2, A'_4$ )
root ← NULL
if ¬exist_pole_inside ( $A'_1, A'_2, A'_4$ ) then
  if ¬exist_pole_inside ( $A'_3, A'_2, A'_4$ ) then
    return root
  else
     $A'_1 \leftarrow A'_3$ 
     $A'_3 \leftarrow A'_4$ 
     $A'_4 \leftarrow A'_2$ 
     $A'_2 \leftarrow A'_3$ 
  end if
end if
while Gside ≥ error do
  if exist_pole_inside ( $A'_1, (A'_2 + A'_4)/2, A'_4$ ) then
     $A'_3 \leftarrow A'_2$ 
     $A'_2 \leftarrow A'_4$ 
     $A'_4 \leftarrow A'_1$ 
     $A'_1 \leftarrow (A'_2 + A'_3)/2$ 
  else
     $A'_3 \leftarrow A'_4$ 
     $A'_4 \leftarrow A'_2$ 
     $A'_2 \leftarrow A'_1$ 
  end if

```

```

     $A'_1 \leftarrow (A'_3 + A'_4)/2$ 
end if
     $G_{side} \leftarrow \text{Larger\_side}(A'_1, A'_2, A'_4)$ 
end while
     $root \leftarrow (A'_1 + A'_2 + A'_4)/3$ 
return  $root$ 

end

```

O método da biseção é apresentado pelo pseudocódigo no algoritmo 1, onde chamamos a função “Larger_side (A,B,C)”, que fornece o comprimento do maior lado do triângulo ABC, e a função “exist_pole_inside (A,B,C)”, que retorna uma variável booleana informando, por meio do critério (A.1), se existe um pólo de $(\sigma - \chi(\sigma))^{-1}$ dentro do triângulo ABC. Os códigos foram implementados em linguagem de programação C com o auxílio da biblioteca “complex.h”.

Apesar de o método da biseção ter sido desenvolvido especificamente para tratar o problema de feixes monocinéticos apresentado no capítulo 4, é importante destacar que a priori ele pode ser utilizado de forma eficiente para calcular as raízes complexas de qualquer função $F(\sigma)$ que seja bem comportada no domínio de integração e tal que os pólos de $F^{-1}(\sigma)$ tenham resíduos não nulos.

Códigos referentes à simulação de Vlasov do pêndulo não linear

```
double Force (double x) {return -sin(x) ;}

void integrator (double **f, int xDIM, int pDIM,
                 double xMAX, double pMAX, double h)
{
    int i, j, k ;
    double x, p ;

    double dx = 2.0 * xMAX/((double)xDIM) ; /* Periodic boundary condition */
    double dp = 2.0 * pMAX/((double)pDIM - 1.0) ;

    double **fb = (double **) malloc (xDIM * sizeof (double)) ;
    for (i = 0; i < xDIM; i++)
        fb[i] = (double *) malloc(pDIM * sizeof (double));

    for (i = 0; i < xDIM; i++)
        for (j = 0; j < pDIM; j++)
            fb[i][j] = f[i][j] ;

    /* First step: semi-advection in x-direction */
    for (i = 0; i < xDIM; i++)
        for (j = 0; j < pDIM; j++)
        {
            p = -pMAX + (double)j * dp ;
            x = -xMAX + (double)i * dx ;
            x = x - p * h/2.0 ;

            fb[i][j] = interpolateX (i, j, x, fb, xMAX, xDIM, dx) ;
        }
}
```

```

for (i = 0; i < xDIM; i++)
  for (j = 0; j < pDIM; j++)
    fb[i][j] = f[i][j] ;

/* Second step: full advection in p-direction */
for (i = 0; i < xDIM; i++)
  for (j = 0; j < pDIM; j++)
  {
    p = -pMAX + (double)j * dp ;
    x = -xMAX + (double)i * dx ;
    p = p - Force (x) * h ;

    f[i][j] = interpolateP (i, j, p, fb, pMAX, pDIM, dp) ;
  }

for (i = 0; i < xDIM; i++)
  for (j = 0; j < pDIM; j++)
    fb[i][j] = f[i][j] ;

/* Third step: semi-advection in x-direction */
for (i = 0; i < xDIM; i++)
  for (j = 0; j < pDIM; j++)
  {
    p = -pMAX + (double)j * dp ;
    x = -xMAX + (double)i * dx ;
    x = x - p * h/2.0 ;

    f[i][j] = interpolateX (i, j, x, fb, xMAX, xDIM, dx) ;
  }

for (i = 0; i < xDIM; i++)    free (fb[i]) ;

return ;
}

double interpolateX (int i, int j, double xprime, double **fb,
                    double xMAX, int xDIM, double dx)
{
  int k, kp1, kp2, kml ;
  double x_kp1 ;

```

```

double alpha , beta , gamma , delta , fI ;

while (xprime >= xMAX) xprime -= 2.0 * xMAX ;
while (xprime <= -xMAX) xprime += 2.0 * xMAX ;

k = (int)((xprime + xMAX)/dx) ;

// Periodic boundary condition: =====
if (k < xDIM - 2)
{
    kp1 = k + 1 ;
    kp2 = k + 2 ;
    km1 = k - 1 ;

    x_kp1 = -xMAX + kp1 * dx ;
    if (k == 0)
        km1 = xDIM - 1 ;
}
else if (k == xDIM - 2)
{
    kp1 = k + 1 ;
    kp2 = 0 ;
    km1 = k - 1 ;

    x_kp1 = -xMAX + kp1 * dx ;
}
else if (k == xDIM - 1)
{
    kp1 = 0 ;
    kp2 = 1 ;
    km1 = k - 1 ;

    xprime = xprime - 2.0 * xMAX ;
    x_kp1 = -xMAX ;
}
// =====

alpha = (x_kp1 - xprime)/dx ;
beta = 1.0 - alpha ;
gamma = alpha * (alpha * alpha - 1.0)/6.0 ;
delta = beta * (beta * beta - 1.0)/6.0 ;

```

```

    fI = alpha * fb[k][j] + beta * fb[kp1][j]
+ gamma * (fb[kp1][j] - 2.0 * fb[k][j] + fb[km1][j])
+ delta * (fb[kp2][j] - 2.0 * fb[kp1][j] + fb[k][j]) ;

    return fI ;
}

double interpolateP (int i, int j, double pprime, double **fb,
                    double pMAX, int pDIM, double dp)
{
    int k, kp1, kp2, km1 ;
    double f_k, f_kp1, f_kp2, f_km1 ;
    double p_kp1 ;
    double alpha, beta, gamma, delta, fI ;

    k = (int)((pprime + pMAX)/dp) ;

    kp1 = k + 1 ;
    kp2 = k + 2 ;
    km1 = k - 1 ;

    if (km1 > pDIM - 1 || kp2 < 0) /* km1, k, kp1, kp2 out of the mesh */
        return 0.0 ;

    p_kp1 = -pMAX + kp1 * dp ;

    alpha = (p_kp1 - pprime)/dp ;
    beta = 1.0 - alpha ;
    gamma = alpha * (alpha * alpha - 1.0)/6.0 ;
    delta = beta * (beta * beta - 1.0)/6.0 ;

    f_km1 = f_k = f_kp1 = f_kp2 = 0.0 ;
    if (km1 == pDIM - 1)
        f_km1 = fb[i][km1] ;
    else if (km1 == pDIM - 2)
    {
        f_km1 = fb[i][km1] ;
        f_k = fb[i][k] ;
    }
    else if (km1 == pDIM - 3)

```

```
{
    f_km1 = fb[i][km1] ;
    f_k = fb[i][k] ;
    f_kp1 = fb[i][kp1] ;
}
else if (kp2 == 0)
    f_kp2 = fb[i][kp2] ;
else if (kp2 == 1)
{
    f_kp2 = fb[i][kp2] ;
    f_kp1 = fb[i][kp1] ;
}
else if (kp2 == 2)
{
    f_kp2 = fb[i][kp2] ;
    f_kp1 = fb[i][kp1] ;
    f_k = fb[i][k] ;
}
else /* Non border cases */
{
    f_km1 = fb[i][km1] ;
    f_k = fb[i][k] ;
    f_kp1 = fb[i][kp1] ;
    f_kp2 = fb[i][kp2] ;
}

fI = alpha * f_k + beta * f_kp1 + gamma * (f_kp1 - 2.0 * f_k + f_km1)
+ delta * (f_kp2 - 2.0 * f_kp1 + f_k) ;

return fI ;
}
```

Obtenção da função dielétrica de um plasma livre sujeito à radiação externa

Operador unitário e função de onda perturbada

Nosso ponto de partida para o cálculo da função dielétrica é a equação de Schrödinger

$$H_0(t)\Psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r},t), \quad (\text{C.1})$$

com H_0 representando o hamiltoniano para um elétron na presença exclusiva do campo externo de radiação (na aproximação de dipolo)

$$\mathbf{E}(t) = -\partial\mathbf{A}(t)/\partial t = E_0 \cos(\omega_{\text{r}}t)\hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{C.2})$$

onde \mathbf{A} e ω_{r} são, respectivamente, o potencial vetor e a frequência do campo.

O hamiltoniano em (C.1) é dado por

$$H_0(t) = \frac{1}{2m_e}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t))^2 = \frac{1}{2m_e}\left(p_x + \frac{eE_0}{\omega_{\text{r}}}\sin(\omega_{\text{r}}t)\right)^2 + \frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{p_z^2}{2m_e}. \quad (\text{C.3})$$

As soluções $\Psi_{\mathbf{k}}^{(0)}$ da equação (C.1) podem ser obtidas por meio de uma transformação unitária nas funções de onda $\Phi_{\mathbf{k}}$ do elétron livre [82, 37], i.e,

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r},t) = U\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t), \quad (\text{C.4})$$

onde o operador unitário e as funções de onda possuem respectivamente a seguinte forma

$$U = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{p}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\eta(t)\right), \quad (\text{C.5})$$

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{V^{1/2}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_{\mathbf{k}}t\right), \quad (\text{C.6})$$

sendo V o volume do sistema e $E_{\mathbf{k}}$ as autoenergias da partícula livre, dadas por

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_e}. \quad (\text{C.7})$$

Substituindo (C.4) em (C.1), obtemos

$$H_0 U \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = i\hbar \left[U \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \left(\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \cdot \mathbf{r} + \frac{d\eta}{dt} \right) U + \frac{i}{\hbar} U \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \cdot \mathbf{p} \right] \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{C.8})$$

Multiplicando a esquerda ambos os membros de (C.8) por U^\dagger e notando que qualquer observável $O(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ transforma-se de acordo com

$$O(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \longrightarrow U^\dagger O(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) U = O(\mathbf{r} - \boldsymbol{\beta}, \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}, t), \quad (\text{C.9})$$

temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m_e} (\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} - e\mathbf{A}(t))^2 \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \\ &= H_f \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) - \left[\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \cdot \mathbf{p} \right] \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

onde H_f é o hamiltoniano do elétron livre, i. e.,

$$H_f \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{C.11})$$

Da equação (C.10) obtemos

$$\begin{aligned} H_f = & \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} (\boldsymbol{\alpha} - e\mathbf{A}(t))^2 + \frac{\mathbf{p}}{m_e} \cdot (\boldsymbol{\alpha} - e\mathbf{A}(t)) + \\ & + \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \cdot \mathbf{r} + \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \cdot \mathbf{p} - \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \cdot \boldsymbol{\beta} + \frac{d\eta}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Como o primeiro termo do segundo membro de (C.12) representa o hamiltoniano H_f , a soma dos demais termos deve, necessariamente, ser identicamente nula. Dessa forma, as funções arbitrárias $\boldsymbol{\alpha}(t)$, $\boldsymbol{\beta}(t)$ e $\eta(t)$ devem ser escolhidas de forma a anular os termos lineares em \mathbf{r} e em \mathbf{p} e os que dependem exclusivamente do tempo

Podemos reescrever esse sistema de equações diferenciais da seguinte forma

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \frac{d\beta_y}{dt} = \frac{d\beta_z}{dt} = 0, \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{d\beta_x}{dt} = \frac{eE_0}{m_e \omega_r} \sin(\omega_r t), \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{e^2 E_0^2}{2m_e \omega_r^2} \sin^2(\omega_r t). \quad (\text{C.15})$$

Lembrando que as funções arbitrárias que definem o operador U devem satisfazer a condição inicial

$$U(t = 0) = 1, \quad (\text{C.16})$$

obtemos como solução para o sistema (C.13)-(C.15) as seguintes funções

$$\alpha = \beta_y = \beta_z = 0, \quad (\text{C.17})$$

$$\beta_x = \frac{eE_0}{m_e\omega_r^2} [1 - \cos(\omega_r t)], \quad (\text{C.18})$$

$$\eta = -\frac{e^2 E_0^2}{4m_e\omega_r^2} t + \frac{e^2 E_0^2}{8m_e\omega_r^3} \sin(2\omega_r t). \quad (\text{C.19})$$

Substituindo (C.17) - (C.19) em (C.5), o operador unitário fica dado por

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} 2\gamma_1 \omega_r t\right) \exp(i\gamma_0 k_x (1 - \cos(\omega_r t))) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \gamma_1 \sin(2\omega_r t)\right), \quad (\text{C.20})$$

onde $\gamma_0 = eE_0/m_e\omega_r^2$ e $\gamma_1 = e^2 E_0^2/8m_e\omega_r^3$.

Na presença de um potencial eletrostático fraco ($|e\varphi(\mathbf{r}, t)| \ll H_0$), a equação de movimento (C.1) assume a forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = (H_0(t) - e\varphi(\mathbf{r}, t)) \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{C.21})$$

Podemos ainda representar a perturbação eletrostática pela seguinte expansão em série de Fourier

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\Omega} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\Omega t) \varphi(\mathbf{q}, \Omega), \quad (\text{C.22})$$

onde \mathbf{q} e Ω representam, respectivamente, o vetor de onda e a frequência dos modos que compõem o potencial.

Como as funções de onda $\Psi_{\mathbf{k}}^{(0)}$ formam um conjunto ortonormal, podemos procurar soluções de (C.21) da forma

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}(t) \Psi_{\mathbf{k}'}^{(0)}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{C.23})$$

Substituindo (C.23) em (C.21), multiplicando em seguida ambos os membros por $\Psi_{\mathbf{k}''}^{(0)*}$ e integrando em todo espaço, obtemos

$$\frac{da_{\mathbf{k}'', \mathbf{k}}(t)}{dt} = \frac{ie}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}(t) \left\langle \Psi_{\mathbf{k}''}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \left| \varphi(\mathbf{r}, t) \right| \Psi_{\mathbf{k}'}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \right\rangle \quad (\text{C.24})$$

que integrada de t_0 até t resulta em

$$a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}(t) = a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}(t_0) + \frac{ie}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} \int_{t_0}^t dt' a_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}(t') \left\langle \Psi_{\mathbf{k}''}^{(0)}(\mathbf{r}, t') \left| \varphi(\mathbf{r}, t') \right| \Psi_{\mathbf{k}'}^{(0)}(\mathbf{r}, t') \right\rangle. \quad (\text{C.25})$$

Na hipótese de potencial fraco os coeficientes em (C.23) podem ser expandidos da seguinte forma

$$a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}(t) = a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(0)}(t) + a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(1)}(t) + a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(2)}(t) + \dots \quad (\text{C.26})$$

onde $a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(i)} = O(|e\varphi(\mathbf{r}, t)|^i)$.

Substituindo (C.26) em (C.25) e igualando os termos de mesma ordem entre os dois membros, obtemos

$$a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(0)}(t) = a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(0)}(t_0), \quad (\text{C.27})$$

$$a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(1)}(t) = a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(1)}(t_0) + \frac{ie}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} \int_{t_0}^t dt' a_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}(t') \left\langle \Psi_{\mathbf{k}''}^{(0)}(\mathbf{r}, t') \left| \varphi(\mathbf{r}, t') \right| \Psi_{\mathbf{k}'}^{(0)}(\mathbf{r}, t') \right\rangle \quad (\text{C.28})$$

Vamos admitir que os campos auto-consistentes não são estritamente harmônicos ($\propto e^{i\Omega t}$) mas que se anulam lentamente à medida que $t \rightarrow -\infty$ [4, 83]. Para isso adicionaremos à frequência uma parte imaginária infinitesimal e positiva, i. e, substituiremos em (C.22) Ω por $\Omega + i\delta$ com $\delta \rightarrow 0^+$.

Tomando $t_0 = -\infty$, obtemos

$$a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(0)}(t_0) = \delta_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}. \quad (\text{C.29})$$

Substituindo (C.29) em (C.27) e (C.28), temos

$$a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(0)}(t) = \delta_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}, \quad (\text{C.30})$$

$$a_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}}^{(1)}(t) = \frac{ie}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \left\langle \Psi_{\mathbf{k}''}^{(0)}(\mathbf{r}, t') \left| \varphi(\mathbf{r}, t') \right| \Psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t') \right\rangle. \quad (\text{C.31})$$

Assim, de (C.30), (C.31), (C.26), (C.23) e utilizando a expansão em série de Bessel [84]

$$\exp(ix \cos \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x) \exp(im\theta), \quad (\text{C.32})$$

a função de onda com correção até primeira ordem na perturbação (C.22) é dada por

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) &= \Psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + e \sum_{\mathbf{q}} \exp(-i\gamma_0 q_x) \sum_{m, \Omega} i^m J_m(\gamma_0 q_x) \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \\ &\quad \times \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega_r)t\right)}{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega_r - i0^+} \Psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

onde fizemos $\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$ para o cálculo do coeficiente $a_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}^{(1)}$. O segundo termo em (C.33) representa a primeira correção a função de onda, $\Psi_{\mathbf{k}}^{(1)}$.

Flutuação na densidade de carga e potencial induzido

A flutuação na densidade de carga devido a um elétron no estado \mathbf{k} sujeito ao campo de radiação e ao campo eletrostático do próprio plasma é dada, em primeira ordem em $\varphi(\mathbf{r}, t)$, por

$$\begin{aligned}\delta\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) &= -e\Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t)\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) - \rho_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}) \\ &= -e\left(\Psi_{\mathbf{k}}^{(0)*}(\mathbf{r}, t)\Psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \Psi_{\mathbf{k}}^{(1)*}(\mathbf{r}, t)\Psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)\right).\end{aligned}\quad (\text{C.34})$$

Substituindo (C.33) em (C.34) e usando o fato de que os somatórios em m , \mathbf{q} e Ω se dão em intervalos simétricos e, além disso, que

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \quad , \quad J_m(-x) = (-1)^m J_m(x), \quad (\text{C.35})$$

$$\varphi^*(-\mathbf{q}, -\Omega) = \varphi(\mathbf{q}, \Omega), \quad (\text{C.36})$$

obtemos

$$\begin{aligned}\delta\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{e^2}{V} \sum_{\mathbf{q}, \Omega} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\Omega t} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \exp(-i\gamma_0 q_x \cos(\omega_r t)) \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\gamma_0 q_x) e^{-im\omega_r t} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega_r - i0^+} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} + \hbar\Omega + m\hbar\omega_r + i0^+} \right\}.\end{aligned}\quad (\text{C.37})$$

A flutuação total da densidade de carga no plasma é dada por

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} \delta\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{C.38})$$

onde estamos assumindo uma função de distribuição Maxwelliana

$$F_{\mathbf{k}} = n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{1}{k_B T_e} (E_{\mathbf{k}} - \varepsilon_\gamma) \right), \quad (\text{C.39})$$

em que $\varepsilon_\gamma = 2\gamma_1 \omega_r$ corresponde a energia de interação do elétron com a radiação [85].

Substituindo (C.37) em (C.38) e utilizando novamente a identidade (C.32),

obtemos

$$\begin{aligned} \delta\rho(\mathbf{r}, t) = & \frac{e^2}{V} \sum_{\mathbf{q}, \Omega} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\Omega t} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \sum_{m, m'} i^{m-m'} J_m(\gamma_0 q_x) J_{m'}(\gamma_0 q_x) \\ & \times \exp(-i(m-m')\omega_r t) \sum_{\mathbf{k}} \frac{F_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - F_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega_r - i0^+}, \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

onde fizemos $\mathbf{k} - \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{k}$ no segundo termo entre chaves de (C.37).

A flutuação na densidade de carga (C.40) produz um potencial induzido no plasma que pode ser calculado por meio da equação de Poisson

$$\nabla^2 \varphi_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{\mathbf{q}, \Omega} q^2 \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) \exp(-i\Omega t) \varphi_{\text{ind}}(\mathbf{q}, \Omega) = - \frac{\delta\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}. \quad (\text{C.41})$$

Vamos assumir uma radiação de alta frequência de tal forma que quando tomarmos a média temporal do potencial induzido, os termos $m \neq m'$ não contribuem para o somatório devido as rápidas oscilações do fator $\exp(-i(m-m')\omega_r t)$. Dessa forma, substituindo (C.40) e (C.41) e usando o valor médio de (C.40), obtemos a seguinte expressão para os coeficientes de Fourier do potencial induzido

$$\varphi_{\text{ind}}(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 V q^2} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \sum_m J_m^2(\gamma_0 q_x) \sum_{\mathbf{k}} \frac{F_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - F_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega_r - i0^+} \quad (\text{C.42})$$

Função dielétrica

O potencial eletrostático auto-consistente do plasma é composto de um potencial induzido e um potencial “externo”

$$\varphi(\mathbf{q}, \Omega) = \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \varphi_{\text{ind}}(\mathbf{q}, \Omega) \quad (\text{C.43})$$

que por sua vez pode ser escrito em termos da função dielétrica da seguinte forma

$$\varphi(\mathbf{q}, t) = \frac{\varphi_{\text{ext}}}{\epsilon(\mathbf{q}, \Omega)}. \quad (\text{C.44})$$

No limite macroscópico, isto é, quando fazemos o volume do sistema tender ao infinito, temos

$$\sum_{\mathbf{k}} (\dots) \rightarrow V \int d^3v (\dots) \quad (\text{C.45})$$

e portanto, a partir de (C.43) e (C.44), a função dielétrica fica dada por

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{q}, \Omega) &= 1 - \frac{\Phi_{\text{ind}}(\mathbf{q}, \Omega)}{\varphi(\mathbf{q}, \omega)} \\ &= 1 - \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2} \sum_m J_m^2(\gamma_0 q_x) \int \frac{F_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - F_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega_r - i0^+} d^3v. \quad (\text{C.46})\end{aligned}$$

Reescrevendo (C.46) em termos da função de distribuição normalizada e em seguida utilizando a equação (3.2.46), obtemos para a parte real da função dielétrica a seguinte expressão

$$\varepsilon_{\text{R}}(q, \Omega) = 1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2 m_e}{q^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(\gamma_0 q) P \int \frac{f_{k+q} - f_k}{E_{k+q} - E_k - \hbar\Omega - m\hbar\omega_r} dv. \quad (\text{C.47})$$

onde assumimos propagação ao longo do eixo x para considerar apenas uma componente da velocidade dos elétrons.

No limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$) o denominador no integrando em (C.47) assume a forma

$$E_{k+q} - E_k - \hbar\Omega - m\hbar\omega_r \longrightarrow \hbar qv - \hbar\Omega - m\hbar\omega_r \quad (\text{C.48})$$

onde utilizamos $k = m_e v / \hbar$.

Admitindo $q \ll k$ podemos expandir f_{k+q} até primeira ordem em q e assim obtemos

$$f_{k+q} - f_k \approx \frac{\partial f_k}{\partial k} q = \frac{\hbar}{m_e} \frac{\partial f}{\partial v} q. \quad (\text{C.49})$$

Substituindo (C.48) e (C.49) em (C.47), obtemos

$$\varepsilon_{\text{R}}(q, \Omega) = 1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{q^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(\gamma_0 q) P \int \frac{\partial f / \partial v}{v - (\Omega + m\omega_r) / q} dv, \quad (\text{C.50})$$

onde relembramos que $\gamma_0 = eE_0 / m_e \omega_r^2$.

É importante notar que na ausência de radiação ($\gamma_0 = 0$) a função de Bessel comporta-se como uma delta de Kronecker ($J_m^2 = \delta_{m0}$) e assim recuperamos o resultado (5.3.26) deduzido via teoria cinética. Notando que aqui representamos o vetor de onda e a frequência das ondas eletrostáticas por \mathbf{q} e Ω . Observamos de (C.50) que os efeitos do campo externo sobre as propriedades dielétricas do sistema se fazem por meio dos parâmetros m e γ_0 que dizem respeito ao número de fótons e à amplitude do campo externo de radiação.

Obtenção da função dielétrica de um plasma magnetizado sujeito à radiação externa

Operador unitário e função de onda perturbada

A equação de Schrödinger para um elétron na presença de um campo magnetostático axial $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ e um campo eletromagnético do tipo (C.2) é dada por

$$H_0 \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{D.1})$$

com o hamiltoniano

$$H_0 = \frac{1}{2m_e} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(y, t))^2 = \frac{1}{2m_e} \left(p_x + \frac{eE_0}{\omega_r} \sin(\omega_r t) + eB_0 y \right)^2 + \frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{p_z^2}{2m_e}, \quad (\text{D.2})$$

obtido após assumir o calibre $\mathbf{A}_0 = -B_0 y \hat{\mathbf{x}}$ para o campo magnetostático.

Na ausência de radiação ($E_0 \rightarrow 0$), as funções de onda em (D.1) se reduzem as funções de onda de Landau [86]

$$\Phi_{n, k_x, k_z}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L_x L_z} \exp(ik_x x) \exp(ik_z z) \chi_n(y) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{n, k_z} t\right), \quad (\text{D.3})$$

onde L_x e L_z são os intervalos de comprimento em que a partícula está confinada, $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ o seu vetor de onda e as funções $\chi_n(y)$ são dadas por

$$\chi_n(y) = \frac{1}{\pi^{1/4} a_c^{1/2} \sqrt{2^n n!}} \exp\left[-\frac{(y - y_0)^2}{2a_c^2}\right] H_n\left(\frac{y - y_0}{a_c}\right), \quad (\text{D.4})$$

onde H_n representa os polinômios de Hermite, as constantes a_c e y_0 representam, respectivamente, o raio de Larmor e a coordenada y do centro da órbita ciclotrônica da partícula

e E_{n,k_z} são as autoenergias

$$E_{n,k_z} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar k_z^2}{2m_e}. \quad (\text{D.5})$$

para o elétron na presença de um campo magnético uniforme e estático.

Novamente, para resolver a equação (D.1), que possui um hamiltoniano dependente do tempo, vamos recorrer a uma transformação unitária do tipo

$$\Psi_{n,k_x,k_z}^{(0)}(\mathbf{r},t) = U\Phi_{n,k_x,k_z}(\mathbf{r},t). \quad (\text{D.6})$$

Procedendo de forma análoga à descrita no apêndice C, verificamos que as funções $\boldsymbol{\alpha}(t)$, $\boldsymbol{\beta}(t)$ e $\eta(t)$, que definem o operador unitário, devem satisfazer a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m_e} \left(\alpha_x + \frac{eE_0}{\omega_r} \sin(\omega_r t) - eB_0\beta_y \right)^2 + p_x \left(\frac{\alpha_x}{m_e} + \frac{eE_0}{m_e\omega_r} \sin(\omega_r t) - \omega_c\beta_y \right) \\ & + \omega_c y \alpha_x + \omega_c y + \frac{eE_0}{\omega_r} \sin(\omega_r t) - m_e \omega_c^2 y \beta_y + \frac{\alpha_y^2}{2m_e} + \frac{p_y \alpha_y}{m_e} + \frac{\alpha_z^2}{2m_e} + \frac{p_z \alpha_z}{m_e} \\ & + \frac{d\alpha_x}{dt} x + \frac{d\alpha_y}{dt} y + \frac{d\alpha_z}{dt} z - \frac{d\alpha_x}{dt} \beta_x - \frac{d\alpha_y}{dt} \beta_y - \frac{d\alpha_z}{dt} \beta_z + \frac{d\beta_x}{dt} p_x \\ & + \frac{d\beta_y}{dt} p_y + \frac{d\beta_z}{dt} p_z + \frac{d\beta_x}{dt} \alpha_x + \frac{d\beta_y}{dt} \alpha_y + \frac{d\beta_z}{dt} \alpha_z + \frac{d\eta}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Devemos escolher essas funções de tal forma que os termos lineares em \mathbf{r} , os lineares em \mathbf{p} e os que dependem exclusivamente do tempo sejam nulos independentemente. Dessa forma, dos termo lineares em \mathbf{r} , obtemos

$$\frac{d\alpha_x}{dt} = 0, \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{d\alpha_y}{dt} + \omega_c \alpha_x + \omega_c \frac{eE_0}{\omega_r} \sin(\omega_r t) - m_e \omega_c^2 \beta_y = 0, \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{d\alpha_z}{dt} = 0. \quad (\text{D.10})$$

Da mesma forma, dos termos lineares em \mathbf{p} , obtemos

$$\frac{d\beta_x}{dt} + \frac{\alpha_x}{m_e} + \frac{eE_0}{m_e\omega_r} \sin(\omega_r t) - \omega_c \beta_y = 0 \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{d\beta_y}{dt} + \frac{\alpha_y}{m_e} = 0 \quad (\text{D.12})$$

$$\frac{d\beta_z}{dt} + \frac{\alpha_z}{m_e} = 0. \quad (\text{D.13})$$

Dos termos que dependem exclusivamente do tempo, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{2m_e} \left[\alpha_x + \frac{eE_0}{\omega_r} \sin(\omega_r t) - eB_0 \beta_y \right]^2 + \frac{\alpha_y^2}{2m_e} + \frac{\alpha_z^2}{2m_e} \\ - \frac{d\alpha_y}{dt} \beta_y + \frac{d\beta_x}{dt} \alpha_x + \frac{d\beta_y}{dt} \alpha_y + \frac{d\beta_z}{dt} \alpha_z = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Para resolver o sistema de equações (D.8)-(D.14) devemos recorrer à condição inicial para o operador unitário, $U(0) = 1$, que, juntamente com (D.8) e (D.10), fornece

$$\alpha_x(t) = \alpha_z(t) = 0 \quad (\text{D.15})$$

e, conseqüentemente de (D.13),

$$\beta_z = 0. \quad (\text{D.16})$$

Da derivada de (D.12) e de (D.9), temos

$$\frac{d^2\beta_y}{dt^2} + \omega_c^2 \beta_y = \frac{\omega_c}{\omega_r} \frac{eE_0}{m_e} \sin(\omega_r t), \quad (\text{D.17})$$

que admite uma solução do tipo

$$\beta_y = A \sin(\omega_r t), \quad (\text{D.18})$$

onde A é uma constante a se determinar.

Substituindo (D.18) em (D.17), obtemos

$$\beta_y = \gamma'_0 \frac{\omega_c}{\omega_r} \sin(\omega_r t), \quad (\text{D.19})$$

onde $\gamma'_0 = eE_0/m_e(\omega_c^2 - \omega_r^2)$.

Substituindo (D.19) em (D.9) e (D.11) e em seguida integrando no tempo, temos

$$\alpha_y = -m_e \gamma'_0 \omega_c [\cos(\omega_r t) - 1] \quad (\text{D.20})$$

$$\beta_x = -\gamma'_0 [\cos(\omega_r t) - 1], \quad (\text{D.21})$$

onde as constantes de integração foram determinadas a partir da condição inicial para o operador unitário.

Substituindo os resultados obtidos para $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ em (D.14) e agrupando os termos em $\sin^2(\omega_r t)$, $\cos^2(\omega_r t)$ e os termos constantes, obtemos a seguinte equação

diferencial

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{\omega_r^2 e^2 E^2}{2m_e(\omega_c^2 - \omega_r^2)^2} \sin^2(\omega_r t) + \frac{\omega_c^2 e^2 E^2}{2m_e(\omega_c^2 - \omega_r^2)^2} \cos^2(\omega_r t) - \frac{\omega_c^2 e^2 E^2}{m_e(\omega_c^2 - \omega_r^2)^2} = 0. \quad (\text{D.22})$$

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}, \quad \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}, \quad (\text{D.23})$$

podemos reescrever (D.22) de uma forma ainda mais simples:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{e^2 E^2}{4m_e(\omega_c^2 - \omega_r^2)} [1 - \cos(2\omega_r t)], \quad (\text{D.24})$$

que integrada de 0 a t , fornece

$$\eta = \frac{e^2 E^2}{4m_e(\omega_c^2 - \omega_r^2)} t - \frac{e^2 E^2}{8m_e \omega_r (\omega_c^2 - \omega_r^2)} \sin(2\omega_r t). \quad (\text{D.25})$$

Calculadas todas as componentes das funções $\boldsymbol{\alpha}(t)$, $\boldsymbol{\beta}(t)$ e $\eta(t)$, o operador unitário é finalmente dado por

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_e \omega_c \gamma_0 (\cos(\omega_r t) - 1) y\right) \exp(-i\gamma_0 (\cos(\omega_r t) - 1) k_x) \\ \cdot \exp\left(i \frac{\omega_c}{\omega_r} \gamma_0 \sin(\omega_r t) k_y\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} 2\gamma_1 \omega_r t\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \gamma_1 \sin(\omega_r t)\right), \quad (\text{D.26})$$

onde $\gamma_1 = e^2 E^2 / 8m_e \omega_r (\omega_c^2 - \omega_r^2)$.

A primeira correção à função de onda pode ser obtida a partir da equação (C.31), com $t_0 = -\infty$. Utilizando as expansões

$$\exp(ix \cos \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(x) e^{im\theta}, \quad (\text{D.27})$$

$$\exp(ix \sin \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) e^{im\theta}, \quad (\text{D.28})$$

podemos efetuar a integral em (C.31) e assim, obtemos a seguinte expressão para a primeira ordem da correção à função de onda

$$\Psi_{n', k'_x, k'_z}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = e \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}, \Omega} \sum_{m_1, m_2} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \Theta_{m_1, m_2}(q_x, q_y) \exp(i\gamma_0 q_x) \\ \times \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_{n, k'_z + q_z} - E_{n', k'_z} + (m_1 + m_2) \hbar \omega_r - \hbar \Omega) t\right)}{E_{n, k'_z + q_z} - E_{n', k'_z} + (m_1 + m_2) \hbar \omega_r - \hbar \Omega - i0^+}$$

$$\times \langle n | \exp(iq_y y) | n' \rangle \Psi_{n', k'_x + q_x, k'_z + q_z}^{(0)}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{D.29})$$

onde

$$\langle n | \exp(iq_y y) | n' \rangle = \int dy \chi_n(y) \exp(iq_y y) \chi_{n'}(y), \quad (\text{D.30})$$

e, por conveniência de notação, definimos a função

$$\Theta_{m_1, m_2}(q_x, q_y) = (-1)^{m_1 + m_2} i^{m_1} J_{m_1}(\gamma'_0 q_x) \cdot J_{m_2}\left(\gamma'_0 \frac{\omega_c}{\omega_r} q_y\right). \quad (\text{D.31})$$

Flutuação na densidade de carga e potencial induzido

Uma vez calculada a primeira correção à função de onda, podemos obter, por meio da equação (C.34), a flutuação da densidade de carga para os elétrons no estado $|n', k'_z\rangle$, devido a presença dos campos auto-consistentes perturbativos do plasma

$$\begin{aligned} \delta\rho_{n', k'_z}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{e^2}{L_x L_z} \chi_{n'}(y) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mathbf{q}, \Omega} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \exp(iq_x x) \\ &\quad \times \exp(iq_z z) \chi_{n'+l}(y) \Xi_{m_3, m_4}^{m_1, m_2}(q_x, q_y) e^{i(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\omega_r t} \\ &\quad \times \exp(-\Omega t) \langle n' + l | \exp(iq_y y) | n' \rangle \{ \textcircled{1} + \textcircled{2} \} \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

onde definimos o inteiro $l = n - n'$ relacionado ao *gap* de energia entre os níveis de Landau e a função

$$\begin{aligned} \Xi_{m_3, m_4}^{m_1, m_2}(q_x, q_y) &= (-1)^{m_1 + m_2} i^{m_1 + m_3} J_{m_1}(\gamma'_0 q_x) \\ &\quad \times J_{m_2}\left(\gamma'_0 \frac{\omega_c}{\omega_r} q_y\right) J_{m_3}(\gamma'_0 q_x) J_{m_4}\left(\gamma'_0 \frac{\omega_c}{\omega_r} q_y\right). \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Para a obtenção da flutuação em (D.32) utilizamos as identidades (D.27) e (D.28) e as propriedades das funções de Bessel e do potencial dadas em (C.35) e (C.36). Os termos entre as chaves em (D.32) são dados por

$$\textcircled{1} = \left(\hbar\omega_c l + \frac{\hbar^2}{2m_e} (k'_z + q_z)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} k'^2_z + (m_1 + m_2)\hbar\omega_r - \hbar\Omega \right)^{-1}, \quad (\text{D.34})$$

$$\textcircled{2} = \left(\hbar\omega_c l + \frac{\hbar^2}{2m_e} (k'_z + q_z)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} k'^2_z - (m_1 + m_2)\hbar\omega_r + \hbar\Omega \right)^{-1}. \quad (\text{D.35})$$

Para uma distribuição de velocidades maxwelliana f_{n, k_z} , a flutuação total da

densidade de carga pode ser escrita como

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{n, k_z} f_{n, k_z} \delta\rho_{n, k_z}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{D.36})$$

Essa flutuação induz no meio um potencial que pode ser calculado via equação de Poisson. Expandindo o potencial induzido em uma série de Fourier e tomando a média temporal da equação (C.41), notamos que, devido às rápidas oscilações do integrando, somente os termos que satisfazem $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$ contribuem. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ind}}(\mathbf{q}, \Omega) = & -\frac{e^2}{\varepsilon_0 L_x L_z} \frac{\varphi(\mathbf{q}, \Omega)}{q^2} \sum_l \sum_{n, k_z} \chi_n(y) \cdot \exp(-iq_y y) \chi_{n+l}(y) \\ & \cdot \langle n+l | \exp(iq_y y) | n \rangle \sum_{\substack{m_1+m_2 \\ +m_3+m_4=0}} \Xi_{m_3, m_4}^{m_1, m_2}(q_x, q_y) f_{n, k_z} \{ \textcircled{1} + \textcircled{2} \}. \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Função dielétrica

A partir das equações (C.43) e (C.44) a função dielétrica pode ser escrita em termos do potencial induzido da seguinte forma

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{\varphi_{\text{ind}}(\mathbf{q}, \Omega)}{\varphi(\mathbf{q}, \Omega)}. \quad (\text{D.38})$$

Tomando a média espacial de (D.38) e relembrando a definição do elemento de matriz em (D.30), obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{q}, \Omega) = & 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 V q^2} \sum_l \sum_{n, k_z} |\langle n+l | \exp(iq_y y) | n \rangle|^2 \\ & \cdot \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} \Xi_{m_3, m_4}^{m_1, m_2}(q_x, q_y) f_{n, k_z} \{ \textcircled{1} + \textcircled{2} \}. \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

Usando o fato de que $l \ll n$ e $q \ll k_z$ e que as somas sobre n e k_z são infinitas, podemos fazer as transformações $n \rightarrow n-l$ e $k_z + q_z \rightarrow k_z$ no termo $\textcircled{1}$ da equação (D.39) e assim reescrever a função dielétrica como

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{q}, \Omega) = & 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 V q^2} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} \Xi_{m_3, m_4}^{m_1, m_2}(q_x, q_y) \sum_l \sum_{n, k_z} |\langle n+l | \exp(iq_y y) | n \rangle|^2 \\ & \times \frac{f_{n-l, k_z - q_z} - f_{n, k_z}}{\frac{\hbar^2}{2m_e} k_z^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_z - q_z)^2 + \hbar\omega_c l + (m_1 + m_2)\hbar\omega_r - \hbar\Omega}. \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

Nos limites macroscópicos e clássico ($\hbar \rightarrow 0$) as somas sobre n e k_z e as energias de Landau ficam dadas por

$$\sum_{n,k_z}(\dots) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} V \int (\dots) d^3v, \quad (\text{D.41})$$

$$\hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \frac{m}{2} v_{\perp}^2, \quad (\text{D.42})$$

e, de acordo com a referência [87],

$$|\langle n+l | \exp(iq_y y) | n \rangle|^2 \rightarrow J_l^2 \left(\frac{q_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right). \quad (\text{D.43})$$

Feitas essas considerações, a função dielétrica pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{q}, \Omega) = & 1 + \frac{e^2}{m_e \varepsilon_0 q^2} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1+m_3} J_{m_1}(\gamma'_0 q_x) \cdot J_{m_2} \left(\gamma'_0 \frac{\omega_c}{\omega_r} q_y \right) J_{m_3}(\gamma'_0 q_x) \\ & \times J_{m_4} \left(\gamma'_0 \frac{\omega_c}{\omega_r} q_y \right) \sum_l \int d^3v \frac{J_l^2 \left(\frac{q_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right)}{\Omega - \omega_c l - (m_1 + m_2) \omega_r - q_z v_z} \left[\frac{l \omega_c}{v_{\perp}} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} + q_z \frac{\partial F}{\partial v_z} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

onde expandimos $f_{n-l, k_z - q_z}$ até primeira ordem em torno de (n, k_z) para a obtenção do termo entre colchetes.

Para investigar as oscilações eletrostáticas perpendiculares ao campo magnetostático, tomamos a componente axial q_z do vetor de onda igual a zero. Resolvemos a integral em (D.44) em coordenadas cilíndricas com auxílio da integral segunda de Weber [49]. Dessa forma, obtemos a seguinte expressão para a função dielétrica

$$\varepsilon(\xi, \bar{\Omega}) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2(\gamma' \xi) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{\bar{\Omega} - l - m \bar{\omega}_r} I_l(\xi^2), \quad (\text{D.45})$$

onde definimos as variáveis adimensionais $\xi = (k_B T_e / \omega_c^2 m_e)^{1/2} q$ e $\bar{\Omega} = \Omega / \omega_c$ e assumimos oscilações ao longo do eixo de polarização da radiação, i. e., $\xi_{\perp} = \xi_x = \xi$. Definimos também a constante $\gamma' = \sqrt{2}(v_d / v_{th})(1 - \bar{\omega}_r^2)^{-1}$ onde $v_d = E_0 / B_0$ representa a velocidade de deriva devido aos campos cruzados \mathbf{E} e \mathbf{B}_0 , $\bar{\omega}_r = \omega_r / \omega_c$ e I_l é a função de Bessel modificada de ordem l .

Na ausência de campo externo ($\gamma' \rightarrow 0$), o argumento das funções de Bessel se anulam e assim, somente o somatório em l na equação (D.45) permanece. Dessa forma, recuperamos o resultado obtido na referência [44] para plasmas magnetizados sem campo

de radiação. É interessante também notar que na ausência de radiação, a expressão obtida em (D.44) se reduz ao resultado obtido por E. G. Harris [7], onde o campo eletrostático coletivo é quantizado e o plasma é tratado como uma coleção de partículas (elétrons) e quase-partículas (plasmons).