



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ALGUMAS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA DE
FINSLER NA GRAVIDADE BIMÉTRICA**

Brasília – DF

2017



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**ALGUMAS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA DE
FINSLER NA GRAVIDADE BIMÉTRICA**

Antonio Santos do Carmo

Orientador: Prof. Dr. Aleksandr Nikolaievich Pinzul

Co-orientador: Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa.

Brasília – DF

2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CC287a Carmo, Antonio Santos do
Aplicações da Geometria de Finsler na Gravidade
Bimétrica / Antonio Santos do Carmo; orientador
Aleksandr Nikolaievich Pinzul; co-orientador Sérgio
Costa Ulhoa. -- Brasília, 2017.
62 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Física) --
Universidade de Brasília, 2017.

1. Geometria de Finsler. 2. Geometria
Riemanniana. 3. Relatividade Geral. 4. Gravidade. I.
Pinzul, Aleksandr Nikolaievich , orient. II. Ulhoa,
Sérgio Costa, co-orient. III. Título.

“ALGUMAS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA DE FINSLER NA GRAVIDADE BIMÉTRICA.”

Por

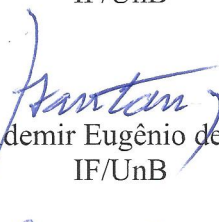
Antônio Santos do Carmo.

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada por:



Prof. Aleksandr Nikolaievich Pinzul
IF/UnB



Prof. Ademir Eugênio de Santana
IF/UnB



Prof. Ronni Geraldo Gomes de Amorim
SEDF

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Albuquerque
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

“Na ciência tentamos informar as pessoas, de um modo que seja entendido por todos, alguma coisa que ninguém sabia até então.”
Paul Dirac

“Dedico este trabalho à minha querida mãe, senhora Maria Francisca, pois diante de todas as adversidades vividas, entre elas a de não poder estudar, sempre se esforçou para me manter na escola, e inspirou-me a buscar o melhor e sempre lutar por aquilo que eu sonhava para minha vida”.

Agradecimentos

À minha família, principalmente à minha mãe, a senhora Maria Francisca e ao meu irmão João e sua esposa Vilma por me receberem em sua casa durante todo esse período.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Aleksandr Nikolaievich Pinzul, pelos ensinamentos e paciência, pois muito do que aprendi neste trabalho devo a ele.

Ao meu co-orientado, Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa, pela dedicação esclarecer e eliminar muitas dúvidas que eu apresentei a ele durante todo o desenvolvimento desse trabalho.

Ao Professor Dr. Ademir Eugênio de Santana por tudo que aprendi em Física e Matemática, bem como em outras áreas, que contribuíram para minha formação pessoal, nas discussões em aulas por ele ministradas e conversas informais.

Aos amigos do bloco 3 – Ítalo, Arlon, Artur, Eduardo (o Jack), Alan, Laís, Rennan, Dione, Tom – pela amizade conquistada.

À CAPES pela concessão da bolsa de estudos, sem a qual seria muito mais difícil minha estadia aqui em Brasília.

A todos, muito obrigado!

Resumo

A incompatibilidade da Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG) com a Mecânica Quântica fez surgir a necessidade de se discutir a possibilidade da formulação de uma teoria de gravitação que seja compatível com esta. Uma teoria que seja mais ampla do que a TRG, e que possa ser aplicada a nível atômico e subatômico. Essa possível teoria de gravitação é muitas vezes chamada Gravitação Quântica. Nesse contexto, muitos pesquisadores têm se empenhado na busca por uma formulação consistente, física e matematicamente, dessa nova teoria e alguns modelos têm sido propostos. No entanto, esse não é um trabalho simples, pois, embora já se tenha avançado bastante, muita coisa ainda permanece obscura. Na ausência de teoria completa de gravidade quântica, qualquer generalização consistente de Relatividade Geral pode ser útil, porque poderia sugerir como essa nova teoria pode ser.

Nossa proposta consiste em um modelo de gravitação bimétrica fundamentado em geometria Finsler. As vantagens de uma formulação fundamentada nessa geometria consistem no fato de que a Geometria Finsler é uma geometria Riemanniana sem a limitação quadrática, e assim, a recuperação de dados obtidos a partir da aplicação da TRG se torna teoricamente mais simples.

Neste trabalho foi utilizado, na construção da métrica, uma função formada a partir da soma de duas métricas riemannianas, $F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$, onde, $\alpha(x, y) = \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j}$ e $\beta(x, y) = \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j}$. A escolha dessa métrica se deu pela própria proposta do trabalho, uma vez que sua estrutura, dentre outras características, facilita a adição de um termo de massa, utilizando-se, para isto, o termo $\beta(x, y)$.

O trabalho está organizado da seguinte forma, no primeiro capítulo são abordados algumas relações entre as geometrias de Riemann e Finsler e destas com a TRG. No segundo capítulo, apresenta-se uma breve revisão dos conceitos matemáticos da geometria Finsler, tais como a métrica, conexões, geodésicas, integração em uma variedade Finsler. No capítulo três, tem-se um estudo sobre modelos de gravitação fundamentados em geometria Finsler, onde são apresentados alguns trabalhos de diversos autores, desenvolvidos em gravitação bimétrica. No quinto, apresentamos nossos cálculos para a obtenção de uma métrica Finsler g_{ij} . Concluímos no capítulo seis, onde também são apresentadas nossas perspectivas de trabalhos futuros.

Palavras chaves: Relatividade Geral. Geometria Finsler. Gravitação bimétrica.

Abstract

The incompatibility of Einstein's General Theory of Relativity (GR) with Quantum Mechanics (QM) has raised the need to discuss the possibility of formulating a theory of gravitation that is compatible with the QM, a theory that generalizes GR, and that can be applied at the atomic and subatomic level. This possible theory of gravitation is often called Quantum Gravity (QG). In this context, many researchers have been engaged in the search for a consistent formulation, physically and mathematically, of this new theory and some models have been proposed. However, this is not a simple job, because, although considerable progress has already been made, a lot still remains unclear. In the absence of a complete theory of quantum gravity, any consistent generalization of General Relativity could be useful, because it might suggest how the theory of QG should look like.

Our proposal consists of a bi-metric gravity model based on Finsler geometry. The advantages of a formulation based on this geometry consist in the fact that the Finsler Geometry is essentially Riemannian geometry without the quadratic limitation, and so, the retrieval of data obtained from the application of this modification GR becomes theoretically more simple.

In this work was used, in the metric construction, a function formed from the sum of two Riemannian metrics, $F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$, where, $\alpha(x, y) = \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j}$ and $\beta(x, y) = \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j}$. The choice of this metric was based on the work proposal itself, since its structure, among other characteristics, facilitates the addition of a mass term, using, for this, the term $\beta(x, y)$.

The work is organized as follows, in the first chapter we discuss some relations between the geometries of Riemann and Finsler and of these with the GR. In the second chapter, we present a brief review of the mathematical concepts of Finsler geometry, such as the metric, connections, geodesics, integration on a Finsler manifold. In chapter three, we study gravity models based on Finsler geometry, where some works in bi-metric gravity are presented. In the fifth, we present our calculations to obtain a Finsler metric g_{ij} . We conclude in chapter six, where our perspectives for future work are also presented.

Keywords: General Relativity. Finsler Geometry. Bimetric gravity.

LISTA DE FIGURAS

1 Relação entre os elementos de um fibrado 34

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Por que a geometria Riemanniana é importante?	15
1.2	Por que nós queremos olhar para as generalizações?	20
1.3	A geometria Finsler como generalização natural da geometria Riemanniana e possíveis aplicações	21
1.4	Nosso interesse: a possível relação entre a geometria Finsler e a gravitação massiva	24
2	REVISÃO DE GEOMETRIA FINSLER	26
2.1	O que precisamos saber sobre geometria Finsler	26
2.2	Bases da geometria Finsler	27
2.2.1	Métricas Finsler	28
2.2.2	Tensor de Cartan	29
2.2.3	Transporte paralelo e Conexões	31
2.2.4	Geodésicas	36
2.2.5	Integração em uma variedade Finsler	40
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE GRAVITAÇÃO BIMÉTRICA E DISCUSSÃO DE ARTIGOS	45

4	REVISÃO DE MODELOS DE GRAVITAÇÃO EM GEOMETRIA DE FINSLER	51
4.1	Modelos de Gravitação	51
5	APLICAÇÕES DA GEOMETRIA DE FINSLER NA GRAVIDADE BIMÉTRICA	54
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE PESQUISAS FUTURAS	59

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A incompatibilidade da Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG) com a Mecânica Quântica fez surgir a necessidade de se discutir a possibilidade da formulação de uma teoria de gravitação que seja mais ampla do que a TRG, e que possa ser aplicada a nível atômico e subatômico. Essa possível teoria de gravitação é muitas vezes chamada Gravitação Quântica. Nesse contexto, muitos pesquisadores têm se empenhado na busca por uma formulação consistente, física e matematicamente, dessa nova teoria e alguns modelos têm sido propostos. No entanto, esse não é um trabalho simples, pois, embora já se tenha avançado bastante, muita coisa ainda permanece obscura. Na ausência de teoria completa de gravidade quântica, qualquer generalização consistente de Relatividade Geral pode ser útil, porque poderia sugerir como essa nova teoria pode ser.

Nesse contexto, existem propostas teóricas que envolvem um modelo de gravitação fundamentado em geometria Finsler. As vantagens de uma formulação encontra-se no fato de que a Geometria Finsler é fundamentalmente uma geometria Riemanniana sem a limitação quadrática. Em geral, estruturas diferenciáveis são formuladas a partir de uma métrica Riemanniana, que é uma forma diferencial quadrática. Em seus trabalhos, ele deu especial atenção a uma métrica definida pela raiz quadrada de uma forma diferencial quadrática positiva definida e conhecida como métrica.

O que chamamos de métrica está relacionado ao conceito intuitivo de distância. Este conceito é representado matematicamente na geometria Euclidiana pelo *Teorema de Pitágoras*. Esse teorema funciona perfeitamente em espaços planos, mas não em espaços curvos e portanto precisa ser generalizado. Para isto, podemos utilizar o fato de que, em regiões infinitésimas, um

espaço curvo pode ser tratado como plano e, assim, podemos descrever uma distância infinitésima como

$$ds^2(x,y) = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.1)$$

Ainda assim, esta expressão está limitada ao uso de coordenadas retangulares. Precisamos portanto generalizá-la para uma forma onde seja possível o uso de coordenadas mais gerais. Para isto, podemos fazer uma mudança de coordenadas $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$. Assim, dx^μ se transforma como

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\nu, \quad (1.2)$$

e ds^2 passa a ter a seguinte forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\mu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\mu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu + \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\mu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\mu} + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\mu} + \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\mu} \right) d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \\ &= g_{\mu\nu}(\bar{x}) d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu, \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde, $g_{\mu\nu}$ é uma matriz quadrada a qual chamamos de métrica. A expressão acima fornece a distância ds expressa em um sistema de coordenadas qualquer e pode ser entendida como uma generalização do teorema de Pitágoras.

Riemann analisou a possibilidade de se introduzir uma estrutura métrica em uma variedade diferenciável M de dimensão n em que o comprimento de arco de uma curva diferenciável na variedade é dado por

$$ds = F(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n), \quad (1.4)$$

onde, $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ é uma função diferenciável em $TM \setminus \{0\}$ homogênea de grau zero em y , e $(x, y) \in TM$. Portanto, no caso em que $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ seja uma curva diferenciável em M e que $a \leq t \leq b$. A integral de F , definida no intervalo $[a, b]$, corresponde ao comprimento de arco da curva γ nesse intervalo.

Como foi falado anteriormente, Riemann desenvolveu sua geometria a partir de um caso especial em que a função F possui a seguinte forma

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x) y^i y^j. \quad (1.5)$$

O estudo do caso mais geral proposto por ele foi realizado inicialmente no ano de 1918, na tese de P. Finsler. Esse trabalho deu origem à *Geometria Finsler*, e assim, esta geometria corresponde, então, a uma geometria Riemanniana sem a restrição quadrática expressa na Eq. (1.5).

Esse trabalho aborda alguns princípios da Geometria Riemanniana que fundamentam a Teoria da Relatividade Geral, bem como os fundamentos da geometria Finsler na aplicação do desenvolvimento de algumas estruturas matemáticas necessárias a formulação de um modelo de gravitação bimétrica. Nesse primeiro capítulo, abordamos a relação entre as geometrias de Riemann e Finsler e suas relações com a TRG. No segundo capítulo, apresenta-se uma breve revisão dos conceitos matemáticos da geometria Finsler, tais como: métrica, conexões, geodésicas, integração em uma variedade Finsler. No capítulo 3, tem-se um estudo sobre alguns modelos de gravitação fundamentados em geometria Finsler, onde são apresentados algumas trabalhos publicados, desenvolvidos em gravitação bimétrica. No quarto, há uma breve revisão de modelos de gravitação em geometria de Finsler. No quinto, apresentamos nossos cálculos para a obtenção de uma métrica Finsler g_{ij} . Concluímos no capítulo seis onde também são apresentadas nossas perspectivas de trabalhos futuros.

1.1 Por que a geometria Riemanniana é importante?

A geometria Riemanniana é importante porque generaliza os conceitos existentes na geometria Euclidiana, uma geometria descrita em um espaço plano, para espaços curvos. Mas, não é somente isto, pois a maioria dos problemas físicos abordados na Mecânica Clássica e gravitação newtoniana são analisados a partir de espaços planos. Entretanto, com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein surgiram novos conceitos que não podiam ser abordados considerando apenas esse tipo de espaço geométrico, a exemplo, tem-se o conceito de força, que foi adotado por Newton para descrever o movimento dos planetas em torno do Sol em seu modelo de gravitação. Na teoria de Einstein, essa interação é resultado da curvatura do espaço-tempo provocada pela presença de matéria e energia, e assim, o movimento dos planetas em torno do Sol ocorre devido a essa curvatura.

Durante muito tempo acreditou-se que a geometria Euclidiana descrevia perfeitamente todos os espaços geométricos possíveis, e que o conceito de retas paralelas tal como definido pelo *Quinto Postulado de Euclides*¹, era verdadeiro para todos os espaços, o que provocou uma busca incessante por uma prova desse postulado. Entretanto, buscas frustradas por essa prova

¹Se duas retas A e B, em um plano, são interceptadas por uma reta C tal que os ângulos α e β de um mesmo lado de C somam um valor menor que 180° , então as retas A e B, quando prolongadas do lado dos ângulos α e β , irão encontrar-se em algum ponto.

levou alguns matemáticos a se perguntarem o que ocorreria se esse postulado fosse desprezado, e passasse a ser considerado uma situação tal que, através de um ponto C não situado sobre uma dada linha reta AB, fosse possível traçar não uma mas duas, e conseqüentemente, um número infinito de linhas paralelas à reta AB. Assim, a busca se concentrava em definir uma geometria baseada nesse novo postulado, pois, acreditava-se que uma geometria desenvolvida com base neste conceito em algum momento apresentaria inconsistências lógicas e assim, o quinto postulado de Euclides estaria provado e seria de fato um teorema. Isto não aconteceu, o que fez surgir novos conceitos geométricos os quais levaram ao desenvolvimento de geometrias não-euclidianas, fundamentais para o desenvolvimentos da gravitação moderna.

Um conceito importantíssimo estudado na geometria Euclidiana é a noção de métrica, mais precisamente, a forma quadrática que define a distância entre dois pontos em um plano, ou seja, dados dois pontos distintos em um plano, qual é menor distância entre eles? A resposta, como se sabe, é uma linha reta. Porém, o mesmo não é verdadeiro quando se trata de espaços curvos.

Definido um sistema de coordenadas retangulares em um espaço plano bidimensional, a distância entre dois pontos, dados pelas coordenadas (x^1, y^1) e (x^2, y^2) , e conseqüentemente o comprimento d de um segmento de reta orientado é obtido pelo *Teorema de Pitágoras*. O comprimento d em função de suas coordenadas é dado, portanto, pela raiz quadrada da soma dos quadrados da diferença de suas componentes, tal que $d = \sqrt{(x^1 - x^2)^2 + (y^1 - y^2)^2}$. Esse conceito é facilmente estendido para um espaço n -dimensional, pois, dado um espaço \mathbb{R}^n , em coordenadas cartesianas, a distância d é fornecida pela seguinte expressão,

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_1^i - x_2^i)^2}, \quad (1.6)$$

onde, o raio-vetor de um ponto é dado por

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i, \quad (1.7)$$

em que \mathbf{e}_i são vetores diretores ortonormais. Observe que isto indica uma soma sobre todos os valores do índice i ; neste caso, para simplificar a notação em nossos cálculos, utilizaremos a *convenção de Einstein* para a soma, e assim, sempre que aparecer um índice repetido neste texto e que não haja nenhuma advertência em contrário, entende-se que há um símbolo de somatório implícito, conforme exemplo a seguir.

$$\sum_{i=1}^n A_{ij} x_j \equiv A_{ij} x_j. \quad (1.8)$$

Nos casos mais gerais, ou seja, em geometrias não-euclidianas, a menor distância entre dois pontos é dado por uma curva chamada *geodésica*. Este conceito é de grande importância no estudo da gravitação, pois generaliza o teorema de Pitágoras para os espaços curvos. Uma vez que, de acordo com a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, os fenômenos gravitacionais são provocados pela curvatura do espaço-tempo, têm-se ainda que, mantidas as condições iniciais, todos os corpos puntiformes, na presença de campos gravitacionais, irão se deslocar da mesma maneira, independente de sua massa ou carga. Isto permite estabelecer uma relação entre os campos gravitacionais e os referenciais não-inerciais. De acordo com a Primeira Lei da mecânica newtoniana, um sistema de referência inercial é um sistema em que na ausência de forças externas agindo sobre um corpo, esse corpo vai manter seu estado inicial, seja parado ou em movimento retilíneo uniforme, ou seja, sua velocidade no instante inicial permanecerá constante durante todo o movimento. Sendo assim, “se consideramos esse movimento em um dado sistema não-inercial, então relativamente a esse sistema todos corpos irão se mover da mesma forma” [1]. Portanto, as propriedades do movimento em um sistema de referência não-inercial são as mesmas em um sistema inercial na presença de um campo gravitacional, ou seja, um sistema de referência não inercial equivale a um campo gravitacional. Este princípio é conhecido como *Princípio de Equivalência*.

A Teoria da Relatividade Geral foi publicada por Einstein em 1916, dez anos após a publicação da Relatividade Restrita. De acordo com o princípio de equivalência, campos gravitacionais devem provocar deflexão em um feixe de luz, ou seja, segundo esta teoria, a massa dos corpos deforma o espaço próximo a eles, de modo que um raio luz será desviado por essa deformação. Este efeito só poderia ser observado a partir de um eclipse total do Sol, fato este confirmado durante o eclipse total que ocorreu em 29 de maio de 1919². Ainda segundo tal princípio, fótons que se movimentam próximos a campos gravitacionais sofrem uma mudança em sua frequência característica, um efeito Doppler relativístico, fenômeno no qual o comprimento de onda das ondas eletromagnéticas mudam devido ao movimento relativo da fonte e do observador. Diferentemente do que ocorre com as ondas mecânicas, aqui tem-se de fato uma mudança na frequência e, necessariamente, tem-se uma mudança na energia do fóton. Outro resultado importante da relatividade geral é a explicação para precessão do periélio de Mercúrio, pois havia uma pequena diferença entre a precessão calculada pela mecânica newtoniana e a observada.

Algumas características relacionadas a essas duas teorias nos permitem afirmar que a gravitação de Newton é uma teoria gravitacional em um espaço plano, e o efeito gravitacional é

² Arthur Stanley Eddington (1882 – 1944), astrofísico britânico, convenceu as autoridades britânicas a financiar duas expedições para observar o eclipse. Uma delas, liderada pelo próprio Eddington, foi para a ilha de Príncipe, na África, e outra foi a Sobral, no Ceará, nesta ocasião, Einstein veio ao Brasil.

devido à força da gravidade que provoca a atração entre dos corpos formados por matéria. Mas, segundo a TRG, como a presença de matéria curva o espaço, o efeito gravitacional é provocado pela curvatura do espaço-tempo. Portanto, torna-se necessária a busca por uma geometria definida em espaços curvos. Como a Riemanniana é uma geometria em um espaço curvo, ela pode então ser usada para descrever melhor os fenômenos gravitacionais do que a geometria Euclidiana, uma geometria plana. Entende-se então que a busca por geometrias mais gerais é uma forma natural de generalização da teoria gravitacional.

Em muitos problemas físicos, torna-se mais conveniente adotar um sistema de coordenadas mais geral do que o sistema cartesiano, podemos então recorrer ao sistema de coordenadas curvilíneas. Localmente, um sistema de coordenadas curvilíneas possui as mesmas características de um sistema cartesiano. Em coordenadas curvilíneas, o vetor posição de um ponto qualquer do espaço é dado por $\mathbf{r} = (u_i); i = 1,2,3$ em que u_i são uma curvas parametrizadas. Um vetor tangente à curva u_1 em um ponto P qualquer sobre essa curva, no qual u_2 e u_3 são constantes, é igual a $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$. Logo, o vetor tangente unitário nessa direção é $h_1 \mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$, onde, $h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|$. De forma análoga, o mesmo ocorre em relação às curvas u_2 e u_3 . Nessas condições, é possível definir o comprimento diferencial ds a partir da relação $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$. Em coordenadas retangulares (x,y,z) a diferencial do arco ds é dada por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, transformando essa expressão para coordenadas curvilíneas obtém-se

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j. \quad (1.9)$$

A Eq. (1.9) é conhecida como “*forma quadrática fundamental* ou *forma métrica*” [2]. A quantidade g_{ij} é simétrica, ou seja, $g_{ij} = g_{ji}$ e nos casos em que $g_{ij} = 0, i \neq j$ o sistema é ortogonal. Percebe-se também que este termo define as componentes covariantes de um tensor de ordem dois, chamado de *tensor métrico* ou *tensor fundamental*.

Com base nesse conceitos, podemos agora calcular a distância entre dois pontos t_1 e t_2 em um espaço curvo. Sobre uma curva $x^r = x^r(t)$, a distância entre dois pontos é dada por

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt. \quad (1.10)$$

Assim, em um espaço curvo qualquer, a geodésica, ou seja, a menor distância entre dois pontos é obtida com o auxílio do cálculo variacional e possui a forma seguinte

$$\frac{d^2 x^r}{ds^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0. \quad (1.11)$$

Na Eq. (1.11), o termo Γ_{ij}^r é conhecido como *símbolo de Christoffel³ de segunda espécie*, definido por

$$\Gamma_{ij}^r \equiv \frac{1}{2} g^{rk} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (1.12)$$

Os símbolos de Christoffel, “são certas funções das coordenadas, cuja forma depende, claramente, da escolha do sistema de coordenadas; em um sistema cartesiano $\Gamma_{ij}^r = 0$ ” [1]. A função geométrica dos símbolos de Christoffel é transformar as derivadas em componentes de um vetor, ajustar os parâmetros da curva de forma a evitar que variem bruscamente, possibilitando o transporte paralelo do vetor tangente à curva definido nas derivadas.

O estabelecimento de uma métrica em um dado espaço torna possível a definição de *Espaço Métrico*, conceito muito importante no estudo da Geometria. A métrica aplicada a espaços com mais de três dimensões possui importância fundamental na TRG. Um espaço métrico pode ser definido como um conjunto de pontos onde é possível determinar uma função que defina a distância entre dois pontos quaisquer, ou seja, dado um conjunto M qualquer, com $M \neq \emptyset$ e seja definida uma aplicação $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ no intervalo $[0, +\infty)$. Define-se $d(x,y)$ a imagem de um par $(x,y) \in M \times M$ projetada por meio da função d . Esta função deve satisfazer as seguintes propriedades:

i) Para quaisquer pontos $p,q \in M$,

$$d(p,q) \geq 0$$

e igual a zero, se e somente se $p = q$;

ii) Para quaisquer pontos $p,q,r \in M$,

$$d(p,q) \geq d(p,r) + d(r,q),$$

essa propriedade é conhecida como *Desigualdade Triangular*;

iii) Se, para quaisquer pontos $p,q \in M$,

$$d(p,q) = d(q,p)$$

então, d é chamada *métrica reversível*.

Satisfeitas as propriedades acima, o par (M,d) , com d sendo a métrica sobre M é o que se chama de espaço métrico. Espaços euclidianos são os mais simples espaços métricos, no entanto,

³Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1900)

é possível construir, a partir destes conceitos, espaços métricos mais gerais, como é o caso do espaço métrico riemanniano. Existem ainda outros espaços mais gerais, um deles é o *espaço Finsler*, que é uma generalização natural do espaço Riemanniano. Para estudos mais detalhados sobre os espaços métricos o leitor pode utilizar [3], [4] ou ainda [5].

1.2 Por que nós queremos olhar para as generalizações?

Embora não exista de fato um referencial que seja absolutamente inercial, na gravitação newtoniana sempre é possível escolher um determinado sistema de coordenada que seja aproximadamente inercial, mas isso constitui uma restrição dessa teoria, e portanto, faz-se necessária a busca por uma teoria que elimine tal limitação, e seja capaz de fornecer uma melhor compreensão dos fenômenos estudados. Como já foi citado anteriormente, na Relatividade Geral, o conceito de força existente na gravitação de Newton é substituído pelo estudo da geometria, e assim, o estudo da interação gravitacional é realizado por meio da análise dos efeitos da curvatura do espaço-tempo na dinâmica dos corpos, e como a gravitação de newtoniana é definida em um espaço plano uma generalização para espaços curvos constitui algo natural a essa teoria. Assim como a geometria Riemaniana é uma generalização da geometria Euclidiana, a Teoria da Relatividade Geral de Einstein constitui uma generalização natural da gravitação de Newton. Os avanços proporcionados pela TRG, dentro dos conceitos físicos existentes atualmente, são inquestionáveis, uma vez que muitas de suas previsões são comprovadas experimentalmente. No entanto, como vários estudos apontam, esta também não deve ser uma teoria fechada e assim surge necessariamente a busca por uma teoria ainda mais completa. Uma dessas limitações é a incompatibilidade da TRG com a Mecânica Quântica, uma vez que parece natural, dado os avanços proporcionados por esta teoria, a quantização da interação gravitacional, de modo que a TRG possa se compatível com a Mecânica Quântica e Teoria Quântica de Campos, mas é necessário que se tenha em mente que uma teoria mais completa precisa fornecer os resultados experimentais já obtidos, bem como a previsão de novos fenômenos.

A busca por uma teoria mais geral e que descreva melhor os fenômenos observados no Universo não é algo exclusivo da Astrofísica, mas sim, algo intrínseco à própria Física. O estudo da História desta ciência mostra que a generalização dos conceitos e teorias sempre foi objetivo de pesquisadores de todos os tempos. A exemplo, tem-se o caso de Newton, ele mostrou que o fenômeno físico por trás da queda dos corpos na superfície da Terra é o mesmo que rege o movimento dos astros no cosmos; Maxwell unificou magnetismo, eletricidade e ótica em uma única teoria, o Eletromagnetismo. Percebe-se que a ciência é construída em blocos, muitas vezes isso é provocado pela própria limitação tecnológica, como é o caso da precessão do periélio

de Mercúrio, não explicado pela Lei de Gravitação Universal de Newton, porém claramente demonstrado na teoria de Einstein e medido com maior precisão atual. A Teoria da Relatividade Geral previu um movimento ligeiramente diferente do qual era previsto pela teoria de Newton, fato este, provado devido a melhoria dos instrumentos de observações, mas isso não quer dizer que a gravitação de Newton deve ser abandonada, até porque, para casos mais simples, é mais conveniente usar esta do que aquela. Assim, uma teoria torna-se apenas a extensão de outra já existente. Entretanto, este não é o único motivo dessa fragmentação, pois o Universo é muito vasto e complexo o que torna muito difícil a elaboração de uma teoria “do tudo”, outro fato que corrobora para essa fragmentação é a própria complexidade dos fenômenos físicos, e portanto, é natural que se divida em linhas de pesquisas, isolando conceitualmente cada fenômeno a fim de tornar mais simples seus estudos, esta tem sido a prática de pesquisadores atuais e do passado, e assim foi construído todo conhecimento existente atualmente. Mas, mesmo assim, de acordo com Stephen Hawking, “o objetivo eventual da ciência é promover uma teoria única que descreva todo o Universo” [6].

Atualmente, as leis que regem os fenômenos físicos no Universo são descritas a partir de duas teorias básicas, a Teoria Quântica, que descreve o universo atômico e subatômico, e a Teoria da Relatividade Geral, esta descreve a mecânica dos corpos. Embora seja comum se referir a esta teoria quando são consideradas velocidades próximas à velocidade da luz, no limite de baixas velocidades, ela se reduz à Mecânica newtoniana. Todavia, essas duas teorias não são compatíveis, embora em seus domínios possuam resultados experimentais que comprovam ser ambas boas teorias. Mas, por entendermos que o Universo não é arbitrário, e sim, regido por leis bem definidas e que podem ser formuladas e expressas em linguagem matemática, tem-se, então, a necessidade de unificação de ambas em uma única teoria, mais completa e que descreva todos os fenômenos físicos observados, além de fazer previsão de novos fenômenos ainda não conhecidos. Assim, um dos caminhos para essa busca é o aperfeiçoamento da TRG, e uma estratégia para atingir esse objetivo é justamente fazer uso do conhecimento existente. Neste caso, a busca por uma geometria mais geral que a Riemanniana constitui uma forma natural de atingir tal objetivo.

1.3 A geometria Finsler como generalização natural da geometria Riemanniana e possíveis aplicações

A geometria de Finsler é uma generalização natural da geometria Riemanniana, e embora, os trabalhos relacionados essa geometria possam ser rastreados até Paul Finsler (Matemático alemão, nasceu em 11 Abril 1894 in Heilbronn, Alemanha e falecido em 29 Abril 1970 in Zürich, Suíça) seus fundamentos foram completados somente em meados de 1930. “A generalização finsleriana

surge do desejo de se determinar o comprimento de vetores por um método suficientemente geral que não seja restringida pela definição riemanniana de comprimento em termos da raiz de uma forma quadrática” [7], pode-se, então, afirmar que a geometria de Finsler é uma extensão da geometria Riemanniana sem a restrição quadrática. De acordo ainda com [7], para desenvolver sua geometria, Paul Finsler parte da definição de uma variedade diferenciável M n -dimensional dotada de uma função escalar $F(x,y)$ dependente do ponto x^i de M e do vetor y^i tangente a M no ponto x^i , neste caso, o valor de $F(x,y)$ pode ser considerado o comprimento do vetor y^i no ponto x^i . Além das condições de que a função F seja suave e convexa, a ela é imposta somente que seja positiva, homogênea e de grau 1 em y^i , isso significa que, se as componentes de um vetor são λ vezes maior que as componentes de outro vetor, então o comprimento do primeiro vetor é λ vezes maior que o comprimento do segundo vetor. Essa função F define um tensor métrico Finsler, se

$$g_{ij}(x,y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}, \quad (1.13)$$

portanto, depende do ponto x^i e da direção dada pelo vetor tangente y^i .

A função $F : TM \rightarrow [0,\infty)$ é uma estrutura Finsler se satisfazer as seguinte propriedades:

- i) $F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$, $\lambda > 0$ (Homogênea e de grau 1 em y);
- ii) $F(x,y)$ é C^∞ para todo $y \neq 0$;
- iii) $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$, ($y \neq 0$) é positivo definido.

Uma variedade M , C^∞ , com uma estrutura Finsler F é chamada *variedade Finsler* ou *Espaço Finsler*. A geometria Finsler foi gradativamente se tornando um ramo clássico da geometria diferencial, muitos trabalhos têm surgidos desde a tese de Paul Finsler, *Curvas e Superfícies em espaços gerais*, em 1918. Inspirado pelos avanços na Relatividade Geral, tem-se buscado desenvolver uma nova teoria geométrica para descrever melhor o Universo e com isso, buscase também uma forma de unificar TRG e Teoria Quântica. Por ser a geometria Finsler uma generalização natural da geometria Riemanniana, entende-se que ela pode ser utilizada como generalização natural da TRG e, talvez, alcançar esse objetivo. O que buscamos neste trabalho, é uma possível extensão que seja mínima e natural à geometria de Riemann, e a de Finsler parece ser esta extensão mínima porque só retira-se a restrição quadrática, portanto esta extensão deve ser muito mínima e muito natural.

O sucesso da TRG deveria ter atraído a atenção para o problema da definição de quais são as propriedades métricas fundamentais de um espaço-tempo real. No entanto, a definição de métrica Riemanniana tem dominado a vasta maioria das literaturas dedicadas à Gravitação. De fato, a

frente de uma onda de luz no vácuo possui propriedades que podem ser descritas muito bem por uma métrica riemanniana. Tem-se então que, justamente, pelo grande nível de concordância entre a Relatividade Restrita e as observações, torna a substituição de uma métrica de Riemann por uma outra qualquer no mínimo temerosa, uma vez que isto pode trazer muitos problemas em relação aos fatos já comprovados experimentalmente. Portanto, uma generalização para a geometria Finsler deve ser tal que a função que define a métrica do espaço-tempo, quando igualada a zero, deve produzir uma equação que descreve uma frente de onda de luz. Assim, será possível a manutenção dos dados experimentais já comprovados, e possivelmente o surgimento de novos fenômenos devido ao caráter mais geral que possui o conceito finsleriano.

A busca por uma descrição dos fenômenos físicos a partir das ideias finslerianas não são exclusivas dos pesquisadores envolvidos com o estudo da gravitação, outras áreas da Física também apresentam problemas que podem ser descritos por esse tipo de função, como é o caso da ótica não-linear. Para uma melhor compreensão, apresentaremos alguns conceitos fundamentais sobre a geometria Finsler. Conforme [8], um desses conceitos encontra-se no fato de que a geometria Finsler possui sua origem em um tipo de integral definida de acordo com a seguinte forma

$$s(x) = \int_a^b F(x^1, \dots, x^n; \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt}) dt, \quad (1.14)$$

em que a função $F(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$; e que $y^i = \frac{dx^i}{dt}$ com $i = 1, \dots, n$ é positiva, e igual a zero se e somente se $y^i = 0$, lembrando ainda, como já foi falado, essa função precisa ser homogênea, suave, de grau um em y . Em alguns exemplos, x pode ser usado para representar a posição e y a velocidade no ponto x . Assim, F corresponderia à trajetória da partícula e t representaria o tempo. Este é talvez o caso mais comum, no entanto, deve-se perceber que o movimento da partícula depende não somente da geometria do espaço-tempo, mas também da velocidade da partícula. Outro caso, talvez menos comum, ocorre, a saber, na propagação da luz em meios anisotrópicos. Alguns cristais, embora homogêneos, são anisotrópicos, isto significa que a velocidade de um feixe de luz que se propaga em meios assim depende da direção de propagação. Uma forma mais simples de imaginar uma situação análoga consiste na análise de um maratonista percorrendo um pista que possui em seu caminho declives e aclives, sua velocidade pode aumentar ou diminuir conforme ele esteja realizando um subida ou uma descida. Um feixe de luz não polarizada refratando nesse tipo de cristal se transforma em dois feixes polarizados ortogonalmente. A geometria Finsler pode ser usada também em um modelo de gravitação bimétrica para acrescentar às equações da TRG um termo de massa. Outra aplicação da geometria Finsler é na descrição geométrica da mecânica dos fluidos.

1.4 Nosso interesse: a possível relação entre a geometria Finsler e a gravitação massiva

A existência de uma generalização consistente para a TRG que inclua um termo de massa é uma questão de grande importância para a Teoria de Campos e, conseqüentemente, para a Física em geral. Uma vez que a presença de um termo de massa nessa possível generalização pode resultar em uma melhor compreensão da estrutura do espaço-tempo, bem como um melhor entendimento acerca da energia de ponto zero, associada às flutuações do vácuo, o que poderia resolver o problema da constante cosmológica⁴, bem como solucionar o problema da incompatibilidade da TRG com a Mecânica Quântica.

Antes de aprofundarmos mais a discussão sobre a relação da geometria Finsler com a gravitação massiva é preciso destacar que, do ponto de vista físico, a Eq.(1.10) representa tão somente a ação de uma partícula pontual livre e quando substituída na Equação de Euler-Lagrange produz uma equação que descreve sua trajetória. Portanto, fica fácil perceber porque na Relatividade Geral a interação gravitacional é descrita pela curvatura do espaço-tempo a partir de uma métrica lorentziana, pois a curva parametrizada definida pela métrica é uma solução da equação de Euler-Lagrange, e como é sabido, tal solução define a menor distância entre dois pontos em um espaço curvo. Nesse contexto, aquilo que era entendido como força na gravitação de newtoniana corresponde ao efeito provocado pelo movimento da partícula em um espaço curvo.

Entre as diversas métricas Finsler existentes, a que mais se enquadra no objetivo deste trabalho é a conhecida como métrica de Randers. De acordo com [9], essa métrica foi introduzido em 1941 por G. Randers em um espaço-tempo de quadridimensional, a fim de estudar a inclusão de uma direção de tempo específica para a geometria do espaço-tempo. Espaços Finsler que possuem um elemento de comprimento tipo Randers são chamados *espaços Randers*. Sua forma original contém uma métrica $\alpha(x,y)$ e adicionada a ela um campo vetorial $\beta(x,y) = b_i y^i$, tal que $F = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i$. Os elementos $a_{ij}(x)$ são as componentes da métrica Riemanniana α e $b_i(x)$ são componentes da 1-forma β que estão definidas em uma variedade M . Se, $\beta(x,y) = 0$, F se reduz a uma métrica Riemanniana. Sendo $\beta(x,y)$ linear em relação a y , para que F seja sempre positiva em $TM \setminus \{0\}$ as componentes $b_i(x)$ precisam ser controladas. A condição suficiente para

⁴A energia de ponto zero associada às flutuações do vácuo e prevista pela Mecânica Quântica é fonte de um campo gravitacional que atua semelhante a uma constante cosmológica, quando analisada sob a ótica da TRG. Assim como o campo gravitacional altera a estrutura do espaço-tempo, a energia do vácuo pode ser aferida analisando a geometria do Universo. O problema ocorre por causa da discordância entre as estimativas teóricas dadas pela Teoria Quântica de Campos e o Modelo Padrão de Partículas Elementares, uma vez que este atribui um valor, para a densidade de energia do vácuo, incrivelmente maior do que as medidas obtidas pela Cosmologia.

que F seja sempre positiva, conforme [10], é que a norma dual com respeito à métrica α seja tal que

$$\|\beta\|_{\alpha}^* = \sqrt{a^{ij}(x)b_i b_j} < 1,$$

onde $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$. Define-se então que métricas tipo $F = \alpha + \beta$ são métricas Randers. Tem-se ainda que, de acordo com [9], as geodésicas de espaços Randers são soluções das equações da força Lorentz, portanto, podem ser vistas como trajetórias de partículas carregadas em um campo eletromagnético externo descrito pelo potencial vector \mathbf{b} e assim, espaços Randers podem vistos como uma abordagem para o estudo do electromagnetismo e gravidade, como sendo descritos por uma geometria anisotrópica, em que essa anisotropia é induzida pelo o potencial vector \mathbf{b} . Nesse caso, o vetor \mathbf{b} pode ser entendido como perturbação de uma métrica Riemanniana. Embora tenhamos a intenção de no futuro estudar as consequência físicas de uma teoria de perturbação, neste trabalho busca-se algo ainda mais geral e por isto tem-se considerado a possibilidade de um duplo acoplamento de matéria, usando para isso duas métrica simultaneamente, em que a função F seja definida tal que $F = \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j} + \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j}$, isto corresponde a uma possível teoria de gravitação bimétrica. Daqui já podemos perceber porque isto é uma generalização – chamada **Generalização Bimétrica**. Cada termo possui forma riemanniana, assim fazendo α ou β igual a zero voltamos para o caso riemanniano. Podemos até entender que esta função pode corresponder a uma perturbação da métrica. Neste caso, basta tornar β bastante pequeno, tendendo a zero. Perceba que a métrica não é pequena, apenas o acoplamento do termo de massa.

Quando se trabalha a gravitação com acoplamento de matéria surgem problemas experimentais e teóricos. O experimental é que o duplo acoplamento conduz ao ”problema de identificar os observáveis da teoria“[11], o que dificultaria a possibilidade de se obter uma comprovação experimental. O problema teórico é que, na Física, a métrica não é Riemanniana, mas pseudo-riemmaniana. Esse tipo de métrica define o *Cone de Luz* e isto define quais as direções em que a luz vai se propagar. Vamos supor que α e β sejam peseudo-riemannianas, então cada uma definiria seu próprio cone de luz, fica então a pergunta: o que é o cone de luz agora? Não temos como responder isto nesse momento, mas fica claro que se perde tal definição e a consequência disto é a quebra da simetria de Lorentz. Quebra da simetria de Lorentz é intrínseco à geometria de Fínsler, pois, pela sua própria definição a velocidade de propagação depende da direção, e assim, existiria um observador privilegiado. Tem-se ainda um problema bastante discorrido na literatura, teorias de gravitação massiva possuem uma anomalia relacionada aos graus de liberdade do gráviton, conhecida como *ghost-free*. No capítulo 3 trataremos deste problema mais detalhadamente.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DE GEOMETRIA FINSLER

A geometria Finsler não constitui em sentido estrito uma generalização da geometria Riemanniana, ela provavelmente seja melhor descrita como uma geometria Riemanniana sem a restrição quadrática. Seus conceitos são fundamentados no cálculo tensorial e geometria diferencial, bem como, no caso mais geral da geometria Riemanniana. Nesse capítulo, apresentaremos alguns conceitos que serão usados ao longo deste trabalho e são essenciais para sua compreensão.

2.1 O que precisamos saber sobre geometria Finsler

Uma das atividades experimentais fundamental na física é efetuar mediadas, para isso são utilizados diversos meios, sejam relógios, régua, espectrômetros, dentre outros. O hábito de medir nos permite comparar coisas e estabelecer padrões, mesmo em física teórica existe essa necessidade, pois uma teoria de pouco vale se não for capaz de estabelecer formas para sua comprovação experimental. Assim, para se medir uma curva suave γ é necessário que ela seja parametrizada, que seja possível estabelecer uma forma de mapear todos os seus pontos, ou seja, essa curva deve obedecer a uma relação do tipo $\gamma = \gamma(t)$, em que $a \leq t \leq b$, isto, em uma variedade M . Nessas condições, para definir o comprimento de tal curva basta se estabelecer uma função escalar não-negativa $F(x, \dot{x})$ sobre todo o espaço tangente $T_x M$, semelhante à forma de se estabelecer o comprimento de uma reta em um espaço plano. No contexto dos espaços curvos, o comprimento da curva c é dado por

$$S_F(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt, \quad (2.1)$$

condiciona-se isto ao fato de que $S_F(\gamma)$ deve ser independente da parametrização, pois comprimento é físico, podemos medir, mas parametrização é algo muito artificial. Neste caso, a função F é positiva, homogênea e de grau 1. Assim, a estrutura de comprimento induz uma função $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ por intermédio de

$$d(p, q) := \inf_{\gamma} S_F(\gamma). \quad (2.2)$$

O *infimum* \inf é o maior limite inferior de um conjunto S , definida como uma quantidade m tal que nenhum membro do conjunto é menor que m , mas se ϵ é qualquer quantidade positiva, ainda que pequena, há sempre um membro que é menor do que $m + \epsilon$ [12]. De acordo com [13] o infinitésimo deve ser tomado de todas as curvas suaves C no intervalo entre p e q e, em geral d é irreversível, pois existe algum par de pontos (p, q) onde $d(p, q) \neq d(q, p)$. Nesse caso, faz-se exigência de que a função F determine a distância d de forma única e que respeite a seguinte relação

$$F(x, y^1 + y^2) \leq F(x, y^1) + F(x, y^2) \text{ em que } y^1, y^2 \in T_x M.$$

Satisfeitas estas condições, a função $F(x, y)$, com $y = \dot{x}$, é uma norma sobre o espaço $T_x M$ não reversível. Podemos ainda, assumir que F é diferenciável sobre $TM \setminus \{0\}$ e assim, aplicar os fundamentos do Cálculo no estudo das propriedades geométricas da norma. Aplicando ainda uma convexidade mais forte, tal que

$$g_{ij} := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}. \quad (2.3)$$

Temos que, no caso em que a Eq.(2.3) é positiva definida para y pertencente ao espaço $T_x M \setminus \{0\}$ F_x , tal norma é chamada norma de Minkowski e uma função escalar F que possui essas propriedades constitui uma métrica Finsler. No caso em que a norma dada por F_x em todos os pontos $x \in M$ é uma norma Euclidiana, a métrica Finsler é dita Riemanniana.

2.2 Bases da geometria Finsler

Definição 2.1 *Seja M uma variedade n -dimensional, é dito ser uma variedade Finsler se o comprimento s de toda curva x , com $x^1(t), \dots, x^n(t)$ e $a \leq t \leq b$, é dado pela seguinte integral*

$$s(x) = \int_a^b F(x^1, \dots, x^n; \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt}) dt. \quad (2.4)$$

As propriedades da função F foram apresentadas na seção 1.3. A imposição para que F seja homogênea e de grau 1 é para que essa função seja invariante sob a parametrização, como já foi falado anteriormente.

Uma variedade Finsler M possui um fibrado tangente $\pi : TM \rightarrow M$ e um cotangente $\pi^* : T^*M \rightarrow M$. A partir de TM obtemos a projeção para fibrado tangente da variedade M e identificamos os vetores não-nulos diferentes uns dos outros por um fator real. Geometricamente, a projeção para o fibrado tangente é o espaço formado pelos elementos de linha sobre a variedade M . Podemos então definir um sistema de coordenadas locais em M , sendo x^i , $1 \leq i \leq n$. Matematicamente, isso corresponde a

$$y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.5)$$

Quando analisado o ponto $x \in M$, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ refere-se à base de um vetor em M . No caso em que avalia-se o ponto $(x,y) \in TM$, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ corresponde à base de um vetor em TM , e assim, $\frac{\partial}{\partial y^i}$ correspondem à base de um vetor sobre o fibrado tangente TM .

2.2.1 Métricas Finsler

Podemos agora aprofundar os conceitos sobre métricas Finsler em uma variedade M . É preciso destacar que sempre assumiremos ser a variedade do tipo C^∞ e de dimensão finita.

Definição 2.2 *Seja M uma variedade n -dimensional. Para um ponto $x \in M$, denota-se por T_x ao espaço tangente de M no ponto x . O fibrado tangente TM de M é a união do espaço tangente com uma natural estrutura diferencial*

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Os elementos de TM são descritos por (x,y) , em que $x \in M$. Nesse caso, podemos dizer que uma métrica Finsler sobre uma variedade M é uma função escalar C^∞ no fibrado tangente $TM_0 := TM \setminus \{0\}$, cuja restrição para cada espaço $T_x M$ é dado por uma norma de Minkowski. Sendo assim, para que uma função $F = F(x,y)$ sobre M seja uma métrica Finsler na variedade M deve possuir as seguintes propriedades

F1) $F(x,y)$ é C^∞ em TM_0 ;

F2) $F_x(y) := F(x,y)$ é uma norma de Minkowski em $T_xM \forall x \in M$.

Respeitadas as propriedades F1 e F2, o par (M,F) é chamado de variedade Finsler. Nos casos mais gerais não se impõem a condição reversibilidade. Além do mais, no caso em que a métrica Finsler F em M , com a propriedade $F_x := F_x(x,y)$ constitui uma norma Euclidiana em $T_xM \forall x \in M$, sendo que

$$F_x(y) = \sqrt{\langle y, y \rangle_x}, \quad y \in T_xM,$$

em que o termo \langle , \rangle_x corresponde ao produto interno em T_xM , a métrica é dita Riemanniana. Portanto, pode-se dizer que as métricas Riemannianas são métricas Finsler reversíveis.

2.2.2 Tensor de Cartan

Uma propriedade bastante importante utilizada nesse trabalho está relacionada ao Tensor de Cartan. Introduzido por Élie Joseph Cartan (1869 – 1951), o tensor de Cartan serve para fazer distinção entre normas euclidianas e normas de Minkowski, para isso, ele relacionou uma quantidade específica às normas Minkowski.

Seja (M,F) uma variedade Finsler com um tensor fundamental g_{ij} , definimos então

$$C_{ijk} := \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} \quad (2.6)$$

$$C := C_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k.$$

Onde, C é conhecido como Tensor de Cartan na variedade TM .

Proposição 2.1 *Seja (M,F) uma variedade Finsler, então*

C1) C_{ijk} é simétrico, tal que, $C_{ijk} = C_{jik} = C_{ikj}$;

C2) $y^i C_{ijk} = 0$;

C3) (M,F) é Riemanniano se e somente se $C = 0$.

Os itens (C1) e (C3) resultam da definição da Eq. (2.6). Para provar (C2), nós precisamos utilizar o *Teorema de Euler para Funções Homogêneas*.

Seja f uma função real definida em \mathbb{R}^n diferenciável fora da origem de \mathbb{R}^n . Então, as duas afirmações abaixo são equivalentes.

1) f é positiva homogênea de grau n , tal que

$$f(\lambda y) = \lambda^n f(y), \forall \lambda > 0$$

2) A derivada na direção radial de f é n vezes f , isto é

$$y^i \frac{\partial f}{\partial y^i} = n f(y^i).$$

Demonstração 2.1 Seja $f(x^1, \dots, x^k)$ uma função homogênea de grau n de modo que seja válida a seguinte relação

$$f(\lambda x^1, \dots, \lambda x^k) = \lambda^n f(x^1, \dots, x^k),$$

fazendo $\bar{x}^i = \lambda x^i$, temos

$$\begin{aligned} n\lambda^{n-1} f(x^1, \dots, x^k) &= \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \lambda} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \lambda} \\ &= x^i \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i} + \dots + x^k \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^k} \\ &= x^i \frac{\partial f}{\partial (\lambda x^i)} + \dots + y \frac{\partial f}{\partial (\lambda x^k)}, \end{aligned}$$

fazendo $\lambda = 1$, temos

$$x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \dots + x^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = n f(x^1, \dots, x^k),$$

ou ainda

$$x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = n f(x^i). \text{ Como} \tag{2.7}$$

$$F(\lambda x) = \lambda F(x), \text{ logo,}$$

$$F^2(\lambda x) = \lambda^2 F^2(x), \text{ portanto,}$$

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x)}{\partial y^i \partial y^j} \text{ é homogênea de grau zero. Então, pelo teorema de Euler, temos}$$

$$y^i C_{ijk} = \frac{1}{2} y^i \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^k}.$$

Queremos agora analisar outras propriedades da função F que descreve uma métrica Finsler. Para isto, podemos definir as seguintes quantidades, $g := g_{ij}$ e $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$, podemos ver que

$$\begin{aligned} F \frac{\partial}{\partial y^k} \log \sqrt{\det g} &= \frac{F}{2} \frac{\partial}{\partial y^k} \log \det g \\ &= \frac{F}{2} \frac{1}{\det g} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} G_{ij}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde

$$G_{ij} = (\det g) g^{ij} = (\det g) g^{ji}. \quad (2.9)$$

Relacionando a Eq. (2.8) e a Eq. (2.6), obtemos a seguinte relação

$$F \frac{\partial}{\partial y^k} \log \sqrt{\det g} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} g^{ij} = C_{ijk} g^{ij}, \quad (2.10)$$

portanto, podemos dizer que o $\det g$ é independente de y se e somente se $C_i \equiv 0$, onde

$$C_i = g^{jk} C_{ijk}. \quad (2.11)$$

O Tensor de Cartan é critério para saber se a métrica é Riemanniana ou não, como é mostrado em C3. Se C não é zero, sabemos então que g depende de y e aí concluímos que a métrica é Finsler. Para nós ele é importante porque será sempre diferente de zero, isto porque na Geometria Finsler, no caso de uma métrica dinâmica, a velocidade depende da direção.

2.2.3 Transporte paralelo e Conexões

O conceito matemático de espaço curvo fundamenta-se basicamente no estudo das variedades. Uma variedade é essencialmente um espaço contínuo o qual, localmente, olhamos

como se fosse um espaço euclidiano, por exemplo, a superfície de uma esfera é uma variedade. O espaço-tempo pode ser estudado utilizando-se o conceito de variedade. Mas, para podermos estudar os fenômenos físicos faz-se necessária a aplicação do conhecimento adquirido a partir do Cálculo, como é o caso da derivação. No entanto, é fácil perceber que, diferentemente do que ocorre em espaços planos, comparar dois vetores em pontos distintos de um espaço curvo não é trivial. Surge assim, a necessidade de uma estrutura extra, chamada conexão. Uma conexão específica como vetores podem ser transportados de um ponto a outro ao longo de uma curva qualquer. Podemos então, utilizar os conceitos do Cálculo no estudo de campos vetoriais e definir matematicamente o conceito de derivada desse tipo de campo, $\mathbf{V} = V_\mu \mathbf{e}_\mu$, como

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V^\mu(\dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots) - V^\mu(\dots, x^\nu, \dots)}{\Delta x^\nu}. \quad (2.12)$$

O termo da esquerda na Eq. (2.12) é a derivada parcial de um campo vetorial em um espaço \mathbb{R}^n . Já o primeiro termo do numerador do lado direito é definido para o argumento $x + \Delta x = (x_1, \dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots, x^n)$, enquanto o segundo termo é somente para $x = x^\mu$. A subtração desses dois termos só será possível caso transportemos $V^\mu(x)$ para o ponto $x + \Delta x$ sem que haja nenhuma mudança no vetor. Esse tipo de transporte é conhecido como *Transporte Paralelo*. Para isso, é preciso assumir que $V|_x$ transportado paralelamente para $x + \Delta x$ possui as mesmas características $V^\mu(x)$ e, naturalmente, as mesmas componentes. Entretanto, não há uma maneira natural com a qual isso ocorra em uma variedade, e assim, é necessário especificar como ocorre o transporte paralelo de um vetor de um ponto a outro.

Seja $\tilde{V}|_{(x+\Delta x)}$ um vetor $V|_x$ transportado paralelamente para $x + \Delta x$. Exigimos que ele satisfaça as seguintes relações

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \propto \Delta x, \quad (2.13)$$

$$(\tilde{V}^\mu + \tilde{W}^\mu)(x + \Delta x) = \tilde{V}^\mu(x + \Delta x) + \tilde{W}^\mu(x + \Delta x). \quad (2.14)$$

Estas condições são em geral satisfeitas se e somente se tomarmos

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \Delta x. \quad (2.15)$$

Assim, a derivada de V em relação a x^ν é definida por

$$\lim_{\Delta x^{\nu} \rightarrow 0} \frac{V^{\mu}(x + \Delta x) - \tilde{V}^{\mu}(x + \Delta x)}{\Delta x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + V^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.16)$$

Esta quantidade corresponde a um vetor em $x + \Delta x$, uma vez que é a diferença de dois vetores, $V|_{x+\Delta x}$ e $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$, definidos no mesmo ponto. A Eq. (2.16) constitui a definição matemática de derivada covariante no contexto da teoria das variedades. Perceba ainda que, no caso de um espaço euclidiano \mathbb{R}^n , em coordenadas cartesianas (x, y) , todas as componentes de Γ desaparecem, de modo que $\tilde{V}^{\mu}(x + \Delta x, y + \Delta y) = V^{\mu}(x, y)$ para todo Δx e Δy , corresponde ao transporte paralelo de um vetor de acordo com o conceito elementar de geometria.

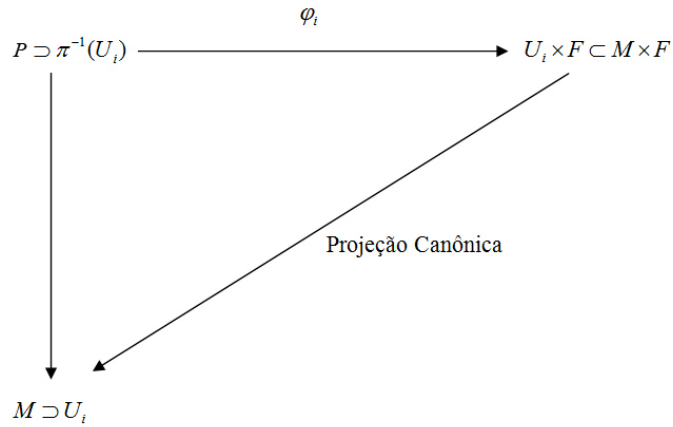
Dada uma variedade M qualquer, existem diversas maneiras de se fazer o transporte paralelo de um vetor de um ponto a outro, uma para cada escolha que fizermos de Γ . Se uma variedade, dotada de um espaço métrico, na qual exista um escolha preferida de Γ , a conexão é chamada *Conexão de Levi-Civita*¹. Nessas condições, uma conexão é dita simétrica, ou seja, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$, o que corresponde a um espaço cuja torção é nula. Isso implica que a norma de um vetor, dada uma conexão simétrica, é invariante sob transporte paralelo. Neste contexto, uma conexão pode ser entendida como separação do fibrado tangente TM na soma de dois espaços, VTM e HTM , subespaço vertical – que é igual ao fibrado tangente – e o espaço vertical, respectivamente, definido por Γ , ou seja, $T_x TM = H_x TM \oplus V_x TM$, onde $V_u P$ é o espaço tangente vertical. A conexão de Levi-Civita é uma conexão afim que possui algumas características distintas. Uma conexão é também chamada de *derivada covariante*. Há uma única e distinta derivada covariante, a derivada covariante de Levi-Civita, definida unicamente por uma métrica g sobre uma variedade a partir dos símbolos de Christoffel². De forma natural, uma conexão em um fibrado tangente TM induz a uma conexão no fibrado dual T^*M .

A Fig. 1 representa a relação entre os elementos de um fibrado P . Para maiores detalhes, o leitor pode consultar [14]. π é definido globalmente, enquanto a trivialização φ_i é somente local. A trivialização φ_i e a estrutura das variedades M e F – F é um fibrado tangente à variedade M – conduzem às coordenadas naturais em P : $\forall u \in P, \phi(u) = \{x^1, \dots, x^{\dim M}; y^1, \dots, y^{\dim F}\}$.

¹Devido a Tullio Levi-Civita (1873 – 1941)

²Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1900)

Figura 1 – Relação entre os elementos de um fibrado



Nessas coordenadas, o espaço tangente $T_u P$ e o cotangente T_u^* são espaços munidos localmente pelas seguintes estruturas

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^a} =: \partial_a \right\} \cup \left\{ \frac{\partial}{\partial y^a} =: \bar{\partial}_a \right\}, \text{ para } T_u P. \quad (2.17)$$

$$\{dx^a\} \cup \{dy^a\}, \text{ para } T_u^* P. \quad (2.18)$$

Assim, podemos escrever para qualquer vetor de $T_u P$, tal que $\forall \mathbf{X} \in T_u P$

$$\mathbf{X}|_u = X^a(u)\partial_a|_u + X^\alpha(u)\bar{\partial}_\alpha|_u. \quad (2.19)$$

Para a projeção π , fazendo $\pi : P \rightarrow M$, então $d\pi : TP \rightarrow TM$, definido tal que $\forall f \in C^\infty(M)$ e $\forall \mathbf{X} \in TP$.

$$\begin{aligned} d\pi(X)|_{\pi(u)}[f] &:= X|_u(f \circ \pi) \\ &= X^a(u)\partial_a|_{\pi(u)}f(x). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Em coordenadas locais, temos

$$d\pi(X) = X^a(u)\partial_a|_{\pi(u)}. \quad (2.21)$$

A importância destas relações está no fato de que a existência de um mapa global π nos permite construir de forma natural um subespaço de TP .

Definição 2.3 $V_uP := \ker(d\pi|_u) \equiv \text{span}\{\bar{\partial}|_u\}$.

Esta é a definição matemática de *Espaço Vertical*. Onde, $V_uP \subset T_uP$. É importante enfatizar que a imagem de $d\pi$ não é parte de T_uP , mas de $T_{\pi(u)}M$. Isto ocorre pelo fato de que não se pode tomar essa imagem como um espaço horizontal natural. Um espaço horizontal introduz uma projeção $\omega : T_uP \rightarrow V_uP$ tal que, $\omega_u \circ \omega_u = \omega_u$. Assim, podemos ver que ω é um vetor 1-forma e, em coordenadas locais, temos

$$\omega_u = (dy^\alpha|_u + N_b^\alpha(u)dx^b|_u) \otimes \bar{\partial}|_u, \quad (2.22)$$

onde, $N_b^\alpha(u)$ é conhecido como os coeficientes da conexão. Devido ao fato de que ω_u é uma projeção, $T_uP = \text{Im } \omega_u \oplus \ker \omega_u \equiv V_uP \oplus H_uP$, que $\text{Im } \omega_u = V_uP$. Definimos, então, o *Espaço Horizontal* como $H_uP := \text{Ker } \omega_u$. Como, N_b^α é arbitrário, o espaço horizontal não é único, no entanto, o espaço vertical sim.

O espaço vertical V_uP é controlado por sua base natural $\bar{\partial}_\alpha$, mas o mesmo não ocorre com o espaço horizontal H_uP . Podemos verificar a base do espaço horizontal da seguinte forma, a dimensão de V_uP é igual à dimensão da variedade F , ou seja, $\dim V_uP = \dim F$, em seguida, usamos o fato que $T_uP = V_uP \oplus H_uP$ e $\dim T_uP = \dim M + \dim F$. Segue-se, então que, $\dim H_uP = \dim M$. Nesse caso, $\{\delta_a|_u := \partial_a|_u - N_a^\alpha(u)\bar{\partial}_\alpha|_u\}$ é uma base de H_uP , como pode ser visto pela seguinte relação

$$\omega(\delta_a)|_u = (N_a^\alpha(u) - N_a^\alpha(u)\bar{\partial}_\alpha|_u) = 0. \quad (2.23)$$

Como já se sabe, $d\pi(x)|_{\pi(u)} = X^\alpha(u)\partial|_{\pi(u)}$, tem-se então que, $d\pi(\delta_a) = \partial_a|_{\pi(u)}$, ou seja, $d\pi : H_uP \rightarrow T_{\pi(u)}M$ é isomorfismo de ambos os espaços. Precisamos agora estudar o comportamento do espaço dual T^*P .

Para os fins deste trabalho, busca-se um espaço dual que possa ser definido a partir da seguinte relação $T_u^*P = H_u^* \oplus V_u^*P$. Para isto, impõe-se que H_u^*P seja controlado por $dx^a|_u$ e V_u^*P por $\delta y^\alpha|_u := dy^\alpha|_u + N_a^\alpha(u)dx^a|_u$, temos então que

$$dx^a(\partial_b - N_b^\alpha\bar{\partial}_\alpha) = \delta_b^a, \quad (2.24)$$

$$dx^a(\bar{\partial}_\alpha) = 0, \quad (2.25)$$

$$\delta y^\alpha (\partial_b - N_b^\beta \bar{\partial}_\beta) = (dy^\alpha + N_a^\alpha dx^a) (\partial_b - N_b^\beta \bar{\partial}_\beta), \quad (2.26)$$

$$\delta y^d (\bar{\partial}_\beta) = \delta_\beta^\alpha. \quad (2.27)$$

Portanto, $\{dx^a|_u\} \cup \{\delta y^\alpha|_u := dy^\alpha|_u + N_a^\alpha(u)dx^a|_u\}$ é verdadeiramente dual de $\{\delta_a|_u\} \cup \{\bar{\partial}_\alpha\}$.

Passemos agora a analisar a integrabilidade dos espaços horizontal e vertical. Seja X alguma variedade e $p \in X$. Considere ainda $D_p \subset T_p X$. D_p é chamado *Integrabilidade* se existir uma subvariedade $W \subset M$, tal que, $\forall X \in D_p \Rightarrow X \in T_p W$. Pelo teorema de Frobenius³ tem-se que, $D_p \subset T_p X$ é integrável se e somente se $\forall X, Y \in D_p \Rightarrow [X, Y]|_p \in D_p$. Temos então as seguintes relações

i) $[\bar{\partial}_\alpha, \bar{\partial}_\beta]|_u = 0 \in V_u P$, portanto o espaço vertical é integrável;

ii) Analisemos agora o seguinte caso,

$$\begin{aligned} [\delta_a, \delta_b] &= [\partial_a - N_a^\alpha \bar{\partial}_\alpha, \partial_b - N_b^\beta \bar{\partial}_\beta] \\ &= -[N_a^\alpha \bar{\partial}_\alpha, \partial_b] - [\partial_a, N_b^\beta \bar{\partial}_\beta] + [N_a^\alpha \bar{\partial}_\alpha, N_b^\beta \bar{\partial}_\beta] \\ &= (\partial_b N_a^\alpha) \bar{\partial}_\alpha - (\partial_a N_b^\beta) \bar{\partial}_\beta + N_a^\alpha (\bar{\partial}_\alpha N_b^\beta) \bar{\partial}_\beta + N_b^\beta (\bar{\partial}_\beta N_a^\alpha) \bar{\partial}_\alpha \\ &\equiv (\delta_b N_a^\alpha - \delta_a N_b^\beta) \bar{\partial}_\alpha. \end{aligned}$$

Assim, $H_u P$, em geral, não é integrável. No entanto, a medida dessa não integrabilidade é a *curvatura*.

$$R_{ab}^\alpha := [\delta_a, \delta_b]^\alpha \equiv \delta_b N_a^\alpha - \delta_a N_b^\alpha. \quad (2.28)$$

Portanto, o espaço horizontal é integrável se e somente se $R_{ab}^\alpha = 0$.

2.2.4 Geodésicas

Em relação aos coeficientes da conexão, podemos analisar o caso em que sua estrutura seja definida tal que $N_b^a(x, y) = \Gamma_{bc}^a(x) y^c$. Essa é uma conexão chamada linear (corolário do caso geral de uma conexão não linear, quando a dependência em y é geral). Usando a seguinte relação,

$$R_{bc}^a = \delta_b N_a^c - \delta_a N_b^c \text{ e}$$

³Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917)

$$\begin{aligned}
\delta_a N_b^c &= \delta_a \Gamma_{bd}^c(x) y^d \\
&= (\partial_a - \Gamma_{as}^p(x) y^s \bar{\partial}_p) (\Gamma_{bd}^c(x) y^d) \\
&= (\partial_a \Gamma_{bd}^c) y^d - \Gamma_{as}^p y^s \Gamma_{bd}^c y^d.
\end{aligned}$$

Temos, então, a seguinte relação

$$\begin{aligned}
R_{ab}^c &= (-\partial_a \Gamma_{bd}^c + \partial_b \Gamma_{cd}^c + \Gamma_{ad}^p \Gamma_{bp}^c - \Gamma_{bd}^p \Gamma_{ap}^c) y^d \\
&\equiv -R_{dab}^c(x) y^d,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

onde, $R_{dab}^c(x)$ é o tensor de Riemann em M . Assim, neste caso nós recuperamos a usual Geometria Riemanniana baseada na Eq. (2.3) e na Eq. (2.16).

Por definição, $F(x, y)$ é uma métrica Finsler em uma variedade M , temos então que

$$\begin{aligned}
L &= \int F\left(\frac{dx}{dt}\right) dt := \int dS \\
&= \int \frac{dS^2}{dS^2} dS \\
&= \int F^2\left(\frac{dx}{dt}\right) \frac{dt^2}{ds^2} dS \\
&\equiv \int F^2\left(\frac{dx}{dS}\right) dS.
\end{aligned}$$

Considere agora uma curva $x(t)$ em M , diferenciável. Para determinar o comprimento desta curva, temos

$$L = \int F[x(t), \dot{x}(t)] dt.$$

Assim, pelo princípio da mínima ação, podemos então aplicar a equação de Euler-Lagrange, tal que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{2.30}$$

O primeiro termo da Eq. (2.30) é igual a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y^i \partial x^k} y^k + \frac{\partial L}{\partial y^i \partial y^j} \frac{d^2 x^j}{dt^2} \\ &= \frac{\partial L}{\partial y^i \partial x^k} y^k + 2g_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2g_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \frac{\partial L}{\partial y^i \partial x^k} y^k - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

Podemos reorganizar os termos, colocar $2g_{ij}$ em evidência e utilizar o fato de que $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$

$$2g_{ij} \left\{ \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial L}{\partial y^i \partial x^k} y^k - \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{d^2 x^j}{dt^2} \right\} = 0.$$

Definindo,

$$2G^j = \frac{g^{il}}{2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial y^i \partial x^k} y^k - \frac{\partial L}{\partial x^i} \right\}.$$

Obtemos,

$$2g_{ij} \left\{ 2G^j + \frac{d^2 x^j}{dt^2} \right\} = 0.$$

Como $\det 2g_{ij} \neq 0$, concluímos que a curva $x(t)$ é solução das da Equação de Euler-Lagrange, em que

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + 2G^j = 0.$$

Considerando agora o funcional $F^2(x, y) = \alpha$, com $\alpha = \sqrt{\alpha_{ij} y^i y^j}$, é trivial demonstrar que são válidas as seguintes relações

$$\ddot{x} + 2G^i(x, \dot{x}) = 0, \quad (2.31)$$

onde,

$$G^i(x, \dot{x}) = \frac{1}{4} g^{ik} \left\{ \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} \right\} y^j y^l. \quad (2.32)$$

Entendemos, portanto, que as geodésicas da geometria Riemannianas são recuperada para o caso de uma conexão linear.

Um dos conceitos mais importantes na geometria Finsler é a medida de comprimento de uma curva $\gamma(\tau) = (x^a(\tau), \dot{x}^b(\tau))$ em uma variedade M , obtido pela seguinte integral

$$S[\gamma] = \int_{\gamma} F(x, \dot{x}) d\tau. \quad (2.33)$$

Com o auxílio do Cálculo Variacional, sabemos que a curva de comprimento mínimo constitui uma solução da equação de Euler-Lagrange e, portanto, desempenha o papel semelhante à curva geodésica na geometria Riemanniana. Essa geodésica possui a forma matemática conforme expresso na Eq. (2.34).

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} + 2G^a(x, \dot{x}) = 0, \quad (2.34)$$

onde, $G^a(x, \dot{x}) = G^a(x, y) = \frac{1}{4} g^{ab} (\partial_d g_{cb} + \partial_c g_{db} - \partial_b g_{cd}) y^c y^d$ e $g^{ab} = (g_{ab})^{-1}$. Portanto, percebe-se que a Eq. (2.34) possui forma semelhante a da equação de uma geodésica, semelhante ao caso riemanniano. Podemos perceber isso partindo do seguinte argumento. Como a função $F(x, y)$ é uma função Finsler, tal que, $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$, são válidas a seguintes propriedades

- i) F é suave em $\tilde{TM} \equiv TM \setminus \{0\}$;
- ii) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$;
- iii) $g_{ab} := \frac{1}{2} \bar{\partial}_a \bar{\partial}_b F^2$ é não degenerado e possui *rank* constante em \tilde{TM}

Precisamos agora introduzir um campo vetorial em $TM \setminus \{0\}$ chamado *geodesic spray* [8], definido como

$$G = y^a \partial_a - 2G^a \bar{\partial}^a. \quad (2.35)$$

Para reforçar a compreensão das características de geodésicas Finsler analisemos aqui como se transformam os objetos $\bar{\partial}_a$ e $\bar{\partial}_b$ sob uma transformação de coordenada na variedade M .

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}_a &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^a} \\
&= \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} \partial_b + \frac{\partial y^b}{\partial \tilde{x}^a} \bar{\partial}_b \\
&= \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} \partial_b + \frac{\partial^2 x^b}{\partial \tilde{x}^a \partial \tilde{x}^c} \tilde{y}^c \bar{\partial}_b,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}_b &= \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^b} \\
&= \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{y}^b} \partial_a + \frac{\partial y^a}{\partial \tilde{y}^b} \bar{\partial}_a \\
&= \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b} \bar{\partial}_a,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde, $\tilde{y}^b = \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^a} y^a$. Como se pode ver, o $\tilde{\partial}_b$ se transforma como tensor, porém o mesmo não ocorre com $\bar{\partial}_b$. Temos ainda que as integrais da curva geodesic spray são dadas por $\frac{dy}{dt} = G$, ou em termos das componentes

$$\begin{cases} \frac{dx^a}{dt} = y^a; \\ \frac{dy^a}{dt} = -2G^a. \end{cases}$$

ou seja, recuperamos a Eq. (2.34)

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} + 2G^a(x, \dot{x}) = 0.$$

Embora já se tenha discutido muitos conceitos da geometria Finsler, ainda não temos condições de desenvolver uma teoria de campo, uma vez que precisamos introduzir o conceito de casualidade no espaço-tempo Finsler. Para isso, é necessário desenvolver uma ação integral bem definida, e só então seremos capazes de formular equações de movimento.

2.2.5 Integração em uma variedade Finsler

Precisamos agora definir um conceito sobre integração em uma variedade Finsler. Por tudo que já foi discutido até aqui, nos é permitido dizer que objetos geométricos em espaço-tempo Finsler são campos tensoriais que existem no fibrado tangente. Ainda assim, precisamos definir o que de fato queremos integrar, sejam funções sobre a variedade M , ou funções sobre TM . Para o

nosso caso, parece ser mais natural tomarmos funções sobre TM , e assim, essa integral teria a forma

$$S = \int_{TM} d^4x d^4y f(x,y). \quad (2.38)$$

Fisicamente, S é uma integral de ação que define a dinâmica de campos tensoriais que vivem no fibrado tangente de um espaço-tempo Finsler, e f é alguma densidade lagrangiana cuja escolha depende apenas da dinâmica do sistema físico. Levando em consideração a homogeneidade da métrica Finsler, é natural que, todos os campos físicos possuirão propriedades de homogeneidade em relação à y [9].

Faremos agora duas análises que nos permitiram entender melhor as condições para a determinação desse conceito. Bem como, nos permitirá analisar qual a melhor forma para uma possível ação que possa ser utilizada na formulação de uma equação de movimento.

- 1) Seja $\{\partial_i\}$ uma base em TM e $\{dx^i\}$ uma base dual. Então, o volume n -forma deve ser dado por $dV_F = \mu_F(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Nesse caso, para alguma medida $\mu_F(x)$, temos

$$\mu_F(x) = \frac{Vol(B^n(1))}{V_{R^n}(B_F(1),y)}, \quad (2.39)$$

onde, $B^n(1)$ é uma bola euclidiana unitária. A definição de B_F é tal que, $B_F(1) := \{y \in TM : F(x,y) \leq 1\}$. Podemos então escrever $dV_{R^n} = dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$, esta relação é conhecida como *medida de Busemann*⁴. O fato mais importante consiste em que, se $F(x,y) = F(x, -y)$ podemos definir $d_F(x,y)$ tal que

$$d_F(x,y) := \inf_C \int_C F(c(t),\dot{c}(t))dt. \quad (2.40)$$

A Eq. (2.40) define uma distância, portanto a variedade M constitui um espaço métrico. Sabe-se que, segundo [15] o volume de uma variedade de Finsler deve ser a sua *medida de Hausdorff*⁵. Assim, podemos definir a medida de Hausdorff da seguinte forma:

- i) Usando a distância $\forall V \in M$, o diâmetro de V é definido por

$$d(V) := \sup_{x,y \in V} d_F(x,y);$$

⁴Herbert Busemann (1905 – 1994)

⁵Felix Hausdorff (1868 – 1942)

ii) Considere a cobertura contável (countable covering) de V por V_i

$$V_i \subset \bigcup_i V_{i_r}$$

tal que, $d(V_i) < \epsilon$ para algum ϵ dado, $\epsilon > 0$ e $\forall i$;

iii) Definimos então,

$$\begin{aligned} \mu_H^\epsilon(V) &:= \Omega^n \inf_{\wedge} \sum_i d(V_i)^n \\ \Omega^n &= \frac{1}{2} \text{Vol}(B^n(1)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, \end{aligned}$$

onde, \wedge é o conjunto de todos os coverings;

iv) Temos ainda que

$$\mu_H(V) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_H^\epsilon(V).$$

Para o caso riemanniano, tomamos uma métrica $F = \sqrt{g_{ij}(x)y^i y^j}$, com $y^i = \partial_i|_x \in TM$. Se, $g_{ij}(x)$ é simétrico, $\exists a : a^T g a$ é uma matriz diagonal $(1, 1, \dots, 1)$. Definimos uma mudança de variável no espaço $\mathbb{R}_y^n : \tilde{y} = a^{-1}y$. É fácil mostrar que

$$\mu_F = \sqrt{g(x)} \frac{V_{\mathbb{R}^n}(B_F(1), y)}{V_{\mathbb{R}^n}(B_F(1), \tilde{y})} \equiv \sqrt{g(x)}. \quad (2.41)$$

Em um espaço tipo Randers com uma métrica $F(x, y) = \|y\|_\alpha^2 + \beta(y)$, em que $\|y\|_\alpha^2 = \alpha_{ij}(x)y^i y^j$, $\beta(y) = \beta_i(x)y^i$ e $\alpha_{ij}(x)$ é positivo definido não-degenerado. Surge portanto a necessidade de garantirmos que $g_{ij}(x) = \frac{1}{2} \partial_i \partial_j F^2$ seja também positivo definido, impomos $\|B_\beta\|_\alpha < 1$. Para encontramos μ_F , deve-se calcular a seguinte integral

$$V_{\mathbb{R}^n}(B_F(1), y) = \int_{F(x, y) \leq 1} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n. \quad (2.42)$$

Antes, faremos a análise da seguinte relação

$$\begin{aligned}\sqrt{y^T \alpha y} + \beta y &\leq 1 \\ y^T \alpha y &\leq 1 - 2\beta y + y^T \beta^T \beta y \\ y^T (\alpha - \beta^T \beta) y + 2\beta y &\leq 1.\end{aligned}$$

Fazemos $\alpha - \beta^T \beta = A$ e, usando a condição $\|\beta\|_\alpha < 1$, $\exists A^{-1}$. Isso deve ser verdade, uma vez que $\det(\alpha - \beta^T \beta) = \det \alpha (1 - \|\beta\|_\alpha^2) \neq 0$. Podemos ainda, utilizar uma mudança de variável tal que $\tilde{y} = Cy + D$, em que C e D são matrizes, encontramos

$$\beta^T A^{-1} \beta = \frac{\|\beta\|_\alpha^2}{1 - \|\beta\|_\alpha^2}.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{F(x,y) \leq 1} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n &= \int_{|y| \leq \sqrt{1 + \frac{\|\beta\|_\alpha^2}{1 - \|\beta\|_\alpha^2}}} \det C^{-1} d\tilde{y}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{y}^n \\ &= [\det \alpha (1 - \|\beta\|_\alpha^2)]^{-\frac{1}{2}} [1 - \|\beta\|_\alpha^2]^{-\frac{n}{2}} \text{Vol } B^n(1), \quad \text{ou ainda,} \\ \mu_F(x) &= (1 - \|\beta\|_\alpha^2)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\det \alpha}.\end{aligned}$$

Neste caso, $\mu_F(x)$ é uma medida riemanniana para $\alpha_{ij}(x)$ com a “correção” de um fator $(1 - \|\beta\|_\alpha^2)^{\frac{n+1}{2}}$.

2) Outra escolha consiste de duas parte:

Na primeira parte consideramos o caso riemanniano com $F(x,y) = \sqrt{g_{ab}(x,y)y^a y^b}$. É fácil mostrar que

$$\int_{F(x,y)=1} y^a y^b dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \equiv \frac{1}{\sqrt{\det g}} g^{ab}(x) S^{n-1},$$

em que, S^{n-1} corresponde ao volume de uma $(n-1)$ -esfera. Assim, teremos

$$g^{ab}(x) = \frac{1}{S^{n-1}} \int_{F(x,y)=1} \sqrt{\det g}|_{F=1} y^a y^b d^n y.$$

Para a segunda parte, vamos utilizar o fato já conhecido de que, no caso riemanniano, $R_{bc}^a(x,y) = -R_{dbc}^a(x)y^d$. Então, $R_{ac}^a(x)y^c = -R_{ab}(x)y^a y^b$. Se tomamos a ação de Einstein–Hilbert, S_{E-H} , tal que, $S_{E-H} \sim \int d^4 x \sqrt{g} R_{ab} g^{ab}$ e utilizando o termo g^{ab} dado acima, temos

$$S_{E-H} \sim \frac{1}{S^{n-1}} \int d^4x d\Sigma \sqrt{g} \sqrt{h} R_{ac}^a(x,y) y^c(\theta). \quad (2.43)$$

Neste caso, Σ corresponde à superfície de $F(x,y) = 1$, θ suas coordenadas e h , um pull-back de g para Σ . Assim, nos parece natural que nossa medida tenha a seguinte forma

$$\mu_F(x,y) = \frac{1}{S^{(n-1)}} \sqrt{g(x,y)} \sqrt{h(x,y)} \Big|_{\sigma}. \quad (2.44)$$

Esta medida é também adequada para integração de funções sobre todo espaço TM .

CAPÍTULO 3

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE GRAVITAÇÃO BIMÉTRICA E DISCUSSÃO DE ARTIGOS

Partículas pontuais não existem como um objeto fisicamente observável, carregando massa, carga, momento, rotação e outros atributos no espaço-tempo. Entretanto, independentemente destes atributos, partículas pontuais sempre correspondem a pontos matemáticos no espaço de parâmetros \mathbb{R}^n o qual é localmente equivalente a uma variedade física. Por outro lado, pelo princípio da dualidade da mecânica quântica todos os campos que satisfazem uma equação de onda estão relacionados a partícula com certo spin ou momento angular intrínseco.

Quando trabalhamos com teorias de gravitação massiva dois elementos precisam estar bem entendidos, pois são problemas conhecidos desde a década de setenta do século passado. O primeiro consiste no fato de que um campo massivo de spin 2 possui cinco graus de liberdade, independente de quão pequena seja sua massa. De acordo com [16], isto parece sugerir que, mesmo em um limite sem massa, uma teoria de gravitação massiva nunca poderia se assemelhar à Teoria de Relatividade Geral. O segundo ponto está relacionado com extensões não lineares de gravidade massiva de Fierz-Pauli¹, pois possuem o problema chamados “fantasmas”, atualmente conhecido como fantasma Boulware-Deser (BD).

O teorema de spin-estatística da Mecânica Quântica consiste em uma relação ente spin e estatística apresentada por Fierz e Pauli em 1940. Este teorema constitui a demonstração teórica da descoberta empírica de que as partículas que obedecem à estatística de Fermi²-Dirac³,

¹Markus Eduard Fierz (1912 – 2006) e Wolfgang Ernst Pauli (1900 – 1958)

²Enrico Fermi (1901 – 1954).

³Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984).

os férmions, têm spin semi-inteiro, enquanto que as partículas que obedecem a estatística de Bose⁴-Einstein, os bósons, têm spin inteiro. Esse teorema auxilia a relacionar o número de componentes independentes de um campo clássico medido em seu menor estado de energia, em um espaço tridimensional, chamados de graus de liberdade, Degrees of Freedom (*Dof*), com o spin da partícula. Assim, os campos escalares correspondem a partículas de spin 0. Os campos vetoriais correspondem a partículas de spin 1 e campos tensoriais simétricos de segunda ordem correspondem a partículas de spin 2. Por outro lado, as partículas de spin de semi-inteiro são descritas por campos espinoriais e obedecem à estatística de Fermi-Dirac e por isso são chamados fermions. No caso de uma partícula massiva quântica de spin S os graus de liberdade podem ser obtidos por meio da seguinte expressão

$$Dof = 2S + 1. \quad (3.1)$$

Por exemplo, no caso de uma partícula de spin 0, há apenas um grau de liberdade, de modo que descreve um campo escalar. Uma partícula de spin 1/2 possui dois graus de liberdade, corresponde aos dois geradores da álgebra dos quatérnions, cuja representação unitária descreve 2 componentes de um campo espinorial. Na Mecânica Quântica não relativística, para acomodar os dois estados de spin do elétron, usa-se a seguinte representação

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

em que, ψ_1 corresponde ao estado cuja projeção do spin é $\frac{\hbar}{2}$ e ψ_2 a $-\frac{\hbar}{2}$.

A Eq. (3.1) deve ser aplicada somente no estudo de partículas massivas, uma vez que a massa constitui um invariante do grupo de *Grupo de Poincaré*⁵ fazendo com que o resultado obtido para partículas sem massa seja incorreto. Como exemplo, no caso do fóton teríamos 3 graus de liberdade, mas como se sabe, o resultado correto é de apenas 2 e, portanto, um bóson de spin 1.

O campo eletromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, é derivado de um potencial eletromagnético em um espaço-tempo de Minkowski. Corresponde, assim, a um campo vetorial A_μ de três dimensões espaciais, para o caso de uma partícula massiva tem-se $Dof = 3$. Isto representa a interação do campo com uma partícula massiva, no caso o elétron, uma partícula massiva e que possui

⁴Satyendra Nath Bose (1894 – 1974).

⁵O Grupo de Poincaré é o grupo de todas as isometrias no espaço-tempo de Minkowski. Em outras palavras, é o grupo de todos os difeomorfismos $f : \mathbb{R}^{3,1}$ tais que

$$\mathbf{b}(u,v) = b(f'_p(u), f'_p(v)), \quad \forall p \in \mathbb{R}^4 \text{ e } \forall u, v \in T_p\mathbb{R}^4.$$

spin $\pm 1/2$ e, portanto, um férmion.

No caso da interação fraca, o potencial é determinado pela álgebra dos quatérnions. A álgebra dos quatérnions possui sua origem no estudo dos números complexos. William Rowan Hamilton (1805 – 1865) apresentou o primeiro conceito moderno dos números complexos com pares ordenado reais. Ele ainda tentou generalizar este conceito para o espaço \mathbb{R}^3 . Porém, após inúmeras tentativas verificou-se que a existência de espaço complexo tridimensional era impossível. Com isto, ele descobriu os quatérnions, uma álgebra de dimensão quatro sobre o *corpo*⁶ dos números reais e que possui todas as propriedades de um corpo, com exceção da comutatividade da multiplicação. Esta álgebra foi a primeira não comutativa descoberta. Os mediadores da interação fraca são bósons, W^+ , W^- , Z^0 . A interação fracas explica os processos de decaimento radiativo, tais como o decaimento beta, decaimento do pión, do múon e de várias outras partículas. Na teoria de Weinberg⁷ e Salam⁸, o fóton, cuja emissão e absorção produz a força eletromagnética, as partículas W e Z atuaram de forma semelhante.

Para o caso da interação forte, temos que sua determinação é a partir de uma álgebra do grupo $SU(3)$, composto de matrizes 3×3 com 8 parâmetros. Essas matrizes representam a ação em um espaço de três dimensões, e assim, todas as interações de calibre possuem spin 1 ou $Dof = 3$. Após estabelecerem o teorema, Fierz e Pauli estudaram o campo bosônico massivo de spin 2, tensor $h_{\mu\nu}$ em um espaço-tempo de Minkowski. Eles concluíram que esse campo deve ter $Dof = 5$, ou seja, cinco graus de liberdade.

No caso do campo gravitacional, a excitação do campo é o gráviton, um bóson de spin 2. Geralmente, teorias gravitacionais bimétricas dão origem a uma partícula massiva e uma sem massa de spin 2. Assim, teorias com múltiplos campos de interação spin 2 necessariamente incluirão um campo de spin 2 massivo. De fato, não há nenhuma teoria consistente de interação spin 2 sem massa. Assim, nestas teorias o gráviton deve ter $dof = 5$. Isso já é um problema sério, como mencionado acima. Mas a situação é ainda mais complicada, as teorias bimétricas são flageladas com um problema que aflige genericamente teorias da gravidade massiva, a aparição de um sexto grau de liberdade, conhecido como *Boulware-Deser (BD) ghost*.

Uma teoria gravitacional massiva tem se mostrado muito difícil de generalizar para o nível não linear, pois, “em geral, a restrição Hamiltoniana se perde e, como resultado, surge um sexto grau de liberdade” [17], este sexto grau de liberdade é a instabilidade conhecida por fantasma Boulware-Deser. Têm-se ainda que, segundo [18] teorias de gravitação bimétrica não linear

⁶Seja K um conjunto munido de duas operações, denotadas por “+” e “ \times ”. Diz-se que $(K, +, \times)$ é um corpo se satisfizer algumas propriedades bem definidas.

⁷Steven Weinberg (Nova Iorque, 3 de maio de 1933).

⁸Abdus Salam (1926 – 1996).

possuem esse mesmo problema. Uma revisão mais detalhada sobre gravitação massiva é apresentada em [17] e [19].

Podemos utilizar a geometria Finsler em uma descrição geométrica eficaz da mecânica de uma partícula pontual. Tal conceito pode ser utilizado no estudo teórico de fenômenos naturais, uma vez que, do ponto de vista físico, a medida de comprimento dada pela Eq. (1.14) corresponde a ação de uma partícula pontual e as equações geodésicas, tais como a Eq. (1.11), correspondem a equações de movimento. Portanto, devido a sua estrutura, a geometria Finsler pode ser utilizada na descrição matemática da estrutura do espaço-tempo.

Há atualmente diversos trabalhos em teoria de campo que visam desenvolver uma estrutura matemática para uma possível teoria de gravitação massiva, bem com fornecer uma descrição geométrica do espaço-tempo. Mas, o problema do Boulware-Deser, que aparece em teorias de gravitação massiva não lineares, parece não ter solução trivial. Portanto a possibilidade do acoplamento de um termo de massa por uma ação definida como a soma de duas métricas dever ser considerada. Uma vez que, no contexto da Teoria da Relatividade Geral, o gráviton é entendido com sendo flutuações da métrica que descreve a curvatura do espaço-tempo. Sendo assim, para descrever essas flutuações considerando um termo de massa precisa ser adicionado uma segunda métrica.

Cada vez mais tem surgido teorias de gravitação mais gerais que consideram esse acoplamento do termo de massa, essas teorias são conhecidas como *teorias de gravitação bimétrica*. Mas, todas essas novas teorias possuem o problema do Boulware-Deser. Não apenas isso, pois, teorias de gravitação massiva possuem também a dificuldade na identificação dos observáveis, conforme descreve [11]. Uma possível solução para esse problema pode ser buscado no contexto da geometria Finsler. Nesse sentido, um trabalho relevante é apresentado em [11]. Nesse trabalho, os autores propõem o estudo de um modelo de gravitação bimétrica massiva em que ambas as métricas são minimamente acopladas à matéria. Ainda segundo os autores, se a matéria é acoplada somente com uma métrica, isso mantém seu papel normal como uma métrica física, enquanto a outra partícula de spin 2 pode ser interpretada como matéria extra cuja interação com o gráviton produz a massa [11].

Uma solução para o problema do BD é apresentada por S. F. Hassan e Rachel A. Rosen em [20]. Nesse trabalho, é discutida a construção de uma ação bimétrica não linear que seja livre de BD. Esse artigo baseada no trabalho também de mesma autoria publicado em [21]. Seus autores afirmam que, para se construir generalizações não lineares da teoria de Fierz-Pauli, com um termo de massa, faz-se necessário a inclusão de uma métrica $f_{\mu\nu}$ como referência, onde, no trabalhos desses autores citados anteriormente, essa métrica foi definida de forma a ser plana e

não dinâmica. Mas, a consistência desse trabalho reside no fato que, segundo os autores, uma métrica $f_{\mu\nu}$, para uma teoria de gravitação bimétrica massiva, deve se comportar como uma variável dinâmica, sendo assim, é necessário provar primeiramente que uma teoria de gravidade massiva permanece ghost free para uma métrica não plana e não dinâmica genérica $f_{\mu\nu}$, isso garantiria que flutuações de $f_{\mu\nu}$ não perturbam a consistência da métrica $g_{\mu\nu}$. Ainda segundo os autores, isso é demonstrado em [22].

A análise da dinâmica de uma partícula pode fornecer bastante informação sobre a estrutura do espaço no qual ela se movimenta. Assim, na Relatividade Geral, a interação gravitacional é estudada a partir das propriedades do espaço-tempo, as quais são descritas em termos da geometria Riemanniana. Portanto, a interação gravitacional está relacionada a geometria desse espaço, bem como a dinâmica de uma partícula depende, na Relatividade Geral, somente das propriedades locais do espaço-tempo, como por exemplo, a curvatura. No entanto, esse talvez não seja o caso mais geral e a dinâmica de uma partícula pode também depender da direção de propagação, como ocorre com a luz se propagando em meios anisotrópicos. Podemos então utilizar os fundamentos da geometria Finsler para descrever geometricamente a estrutura do espaço-tempo. A coordenada x^i estaria relacionada com a posição e a coordenada y^j pode ser relacionada à velocidade, assim, tem-se uma situação em que a dinâmica de uma partícula vai depender não somente das características do espaço, mas também da direção de propagação, tal como ocorre com a luz se propagando em meios anisotrópicos.

Nesse sentido, a tese de doutorado **The Finsler spacetime framework: backgrounds for physics beyond metric geometry** [9] fornece uma boa compressão do processo que envolve a descrição do espaço-tempo a partir da geometria Finsler. A estrutura do espaço-tempo é descrita normalmente por meio de uma função no tangent bundle que inclui uma métrica geométrica. Em contraste com essa formulação padrão, o autor apresenta uma estrutura para o espaço-tempo Finsler que, segundo ele, supera a diferenciabilidade e a existência de problemas em relação em relação aos objetos geométricos existentes em tentativas anteriores que usam a geometrias Finsler como extensão da geometria métrica Lorentziana. Ainda segundo o autor, o desenvolvimento de sua estrutura geométrica codifica a casualidade como uma conquista fundamental de seu trabalho. A partir da estrutura da geometria do espaço-tempo Finsler apresentada nesse trabalho, o auto é capaz de derivar a dinâmica para a geometria Finsler do espaço-tempo não-métrica a partir da ação de Einstein-Hilbert. É apresentado a dinâmica para uma descrição da gravidade por acoplamento de campos de matéria, no qual a combinação dinâmica de campos e geometria são consistentes com a Relatividade Geral. Também é apresentado uma maneira de definir observadores e suas medidas usando somente a geometria não-métrica do espaço-tempo. O autor ainda discute algumas consequência físicas fundamentadas em sua estrutura de espaço-tempo

Finsler, são elas: uma possível solução para a anomalia *fly-by*⁹ no Sistema Solar; a possível dependência da velocidade da luz no movimento relativo entre observadores e um raio de luz; a modificação da relação de dispersão; possível propagação de uma partícula mais rápida que a luz e propagação da luz em geodésicas Finsler nulas.

⁹Manobras assistidas pela gravidade em torno de planetas são normalmente utilizados para se obter um ganho na energia de naves interplanetárias. No entanto, tal manobra em torno da Terra, realizada pela sonda Galileo em 1990, exibiu uma pequena, mas ainda inexplicável diferença entre a previsão e a realidade, o aumento de energia da nave espacial foi maior do que o esperado. Na verdade, os resíduos pós-ajuste dos dados de rastreamento durante o sobrevoo mostraram uma descontinuidade estranha no momento da aproximação. Análise do fenômeno apresentou a uma mudança de velocidade instantânea da sonda, em perigeu, de $2,56\text{mm/s}$. Esse fenômeno tem se repetido em outras naves executando o mesmo movimento em torno da terra. Desde então, tal fenômeno tem sido chamado “flyby anomaly”, e agora é considerado como um grande problema não resolvido na mecânica orbital.

CAPÍTULO 4

REVISÃO DE MODELOS DE GRAVITAÇÃO EM GEOMETRIA DE FINSLER

Nosso estudo consiste dos fundamentos físicos e geométricos em teoria de gravitação fundamentada na geometria Finsler. Atualmente existem diversos trabalhos que visam uma possível teoria de gravitação que seja capaz de conciliar a Teoria Quântica e a Relatividade Geral, pois, a incompatibilidade entre essas duas teorias é um dos assuntos mais tratados na física moderna e é de comum acordo que nova teoria de gravitação, muitas vezes chamada de Gravitação Quântica, deve ser capaz de reproduzir a Relatividade Geral com pequenas correções, seja no limite de baixas energias e/ou no limite clássico [23]. Há também a possibilidade de que essas pequenas correções violem o Princípio de Equivalência, bem como, a quebrem a simetria de Lorentz. Violações da simetria de Lorentz constitui uma área de pesquisa muito ampla e sua história remota ao tempos de Dirac. A possível quebra da simetria de Lorentz tem sido aplicada a diversas áreas da física moderna, uma vez que essa simetria foi incorporada tanto na Relatividade Geral como na Teoria Quântica de Campos e, atualmente, muitas teorias de altas energias, gravitação e cosmologia enfrentam esse desafio.

4.1 Modelos de Gravitação

O que se busca nesse trabalho é uma proposta que leve em consideração uma análise geométrica diferente da que é feita na Relatividade Geral. Uma consideração que pode ser introduzida nessa análise é a possibilidade de que o espaço-tempo dependa da velocidade e conseqüentemente da direção de propagação, gerando assim uma anisotropia local. Assim,

uma análise da grande variedade de trabalhos que têm surgido nos mostra que é possível uma generalização da Teoria de Relatividade Geral em termos da geometria Finsler, uma vez que essa geometria pode incorporar essas anisotropias diretamente na métrica.

Um fato importante é que teorias de gravitação que visam uma reformulação da Relatividade Geral normalmente levam em consideração quase os mesmos princípios utilizados por Einstein–Hilbert, no caso desse trabalho, isso não é muito diferente. Mas, busca-se estender tais princípios para a geometria de Finsler. Um ponto que precisa ser lembrado aqui é que de acordo com a literatura atual, esse tipo de modelo gravitacional possui uma grande restrição experimental, o que torna sua elaboração mais difícil, embora muitos avanços já tenham sido adquiridos na parte matemática. Dentre esses avanços matemáticos encontramos muitos argumentos teóricos que afirmam que modelos de gravitação quântica podem resultar nas relações de dispersão não lineares, podendo depender da velocidade do corpo, não somente das características locais do espaço, sua geometria ou curvatura. Temos ainda que, de acordo com [24] as configurações anisotrópica quase-clássica Finsler provenientes de gravidade quântica não são obrigatoriamente restritas a alguns modelos cosmológicos inflacionários e podem ter contribuições importantes para a matéria e energia escura no universo. Portanto, torna-se importantes pesquisar estruturas Finsler que possam ser utilizadas na descrição tanto de modelos de gravitação como em modelos cosmológicos.

O que procuramos é uma extensão, ou seja, uma generalização para a gravitação. Para isso, vamos dividir a gravitação em duas partes: Fundamentos matemáticos e consequências físicas, ou seja, teoria física que resulta dessa matemática. O Fundamento matemático é a Geometria Riemanniana e que procuramos é uma extensão mínima para essa geometria, e a Geometria de Finsler parece ser esta extensão mínima porque só estamos removendo a restrição quadrática, portanto essa extensão, na geometria de Finsler, parece muito natural e muito mínima. Fisicamente nós entendemos que o gráviton não tem massa. Mas também, fisicamente sempre há algum espaço para erro experimental. Até hoje, entende-se que esta partícula não possui massa, mas ainda há espaço muito mínimo para que o gráviton possua alguma massa muito pequena. O que queremos dizer é que a extensão mais natural seria acrescentar a massa ao gráviton. Assim, nós temos duas possibilidades, uma do ponto de vista matemático e outra do ponto de vista físico, o problema é que parece não haver nenhuma relação entre elas.

A construção de um modelo teórico de gravitação fundamentado em geometria Finsler é algo não trivial, devido à própria estrutura dessa geometria, mas o desafio pode ser compensado pela capacidade que essa geometria possui de reproduzir a estrutura da geometria Riemanniana com apenas a restrição quadrática. No entanto, a elaboração de um modelo de espaço-tempo

formulado a partir de um funcional $F(x,y)$ em que a coordenada y provoque uma anisotropia local precisa de algumas considerações adicionais.

Uma gravitação localmente anisotrópica pode ser formulada a partir de três objetos geométricos fundamentais que vivem nos espaços TM e TTM (espaço tangente ao espaço TM). São eles: uma estrutura métrica, uma conexão linear e outra não-linear. Como se busca um modelo capaz de reproduzir os dados experimentais já confirmados para a Relatividade Geral, bem como a previsão de outros fenômenos não contemplados por esta. É necessário então que qualquer objeto geométrico fundamental na geometria Riemanniana ao ser generalizado para a geometria Finsler deve necessariamente reproduzir as soluções da gravitação de Einstein como casos particulares. Neste caso, vamos aqui apresentar apenas algumas possíveis extensões dos princípios existentes na teoria de Einstein para a geometria Finsler.

Na gravitação newtoniana, os dados experimentais sustentam a ideia de que a força gravitacional que atua sobre um corpo de prova é proporcional a sua massa inercial. Isso implica no fato de que todos os corpos sejam influenciados pela gravidade, independentemente de suas dimensões, mas ainda deve ser suficientemente pequeno de modo que sua própria massa não influencie em sua trajetória e assim todos os corpos “caem” da mesma forma quando estão sujeitos a campos gravitacionais iguais. Neste caso, o movimento de corpos em campos gravitacionais não depende de sua natureza, mas sim da curvatura do espaço-tempo, portanto as trajetórias descritas definem um conjunto de curvas especial. Como é entendido na Relatividade Geral, as trajetórias descritas por corpos em queda livre são simplesmente as geodésicas da métrica do espaço tempo. Isto implica na possibilidade de se escrever as propriedades do campo gravitacional para a estrutura do próprio espaço-tempo. Sendo assim, de acordo com [24], é possível associar essas propriedades com métricas tipo $g_{ij}(y)$, ou como no caso da Relatividade Geral, a métricas tipo $G_{ij}(x)$. Nesse caso, é perfeitamente possível uma generalização que seja fundamentada em uma métrica $g_{ij}(x,y)$ que seja derivada de um função $F^2 = \alpha + \beta$, com $\alpha = \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j}$ e $\beta = \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j}$. Considerando que todos os corpos em queda livre descrevem curvas geodésicas em suas trajetórias, em um espaço-tempo bimétrico as trajetórias seriam geodésicas modificadas. De certa forma, isso pode ser entendido como uma generalização do princípio de equivalência.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES DA GEOMETRIA DE FINSLER NA GRAVIDADE BIMÉTRICA

Neste capítulo apresentamos nossos cálculos desenvolvidos para a aplicação da Geometria Finler no caso da gravidade bimétrica. A métrica é escrita a partir de uma ação tal que

$$S = \int dS_\alpha + \int dS_\beta,$$

isto representa o acoplamento de uma partícula pontual para uma gravidade bimétrica. Geralmente quando se busca acoplar um partícula massiva faz-se a escolha entre um dos termos. No entanto, ná há rezões para se optar por um outro, a não ser, o estudo de um caso mais específico. Assim, nossa motivação em estudar essa geometria consiste deste entendimento. Neste capítulo, buscamos estabelecer uma métrica Finsler, mas inda é muito elementar para se pensar em um modelo de gravidade bimétrica.

Seja α_{ij} e β_{ij} duas métrica Riemannianas para a mesma variedade M . Então, podemos definir uma função $F_x(y) : \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j} + \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j}$. Nesse caso, temos que

$$F^2(y) = \alpha_{ij}(x)y^i y^j + \beta_{ij}(x)y^i y^j + 2\sqrt{\alpha_{ij}(x)\beta_{kl}(x)y^i y^j y^k y^l}, \quad (5.1)$$

ou ainda,

$$F^2(y) = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta, \quad (5.2)$$

onde, $\alpha := \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j}$, $\beta := \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j}$. Podemos então calcular $g_{ij}(y)$, pois

$$\begin{aligned}
g_{ij}(y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(y)}{\partial y^i \partial y^j} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Para facilitar nossos cálculos, derivamos termo a termo.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^2}{\partial y^a \partial y^b} &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\alpha_{ij}(x) y^i y^j)}{\partial y^a \partial y^b} \\
&= \frac{1}{2} \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial y^a} \left(\frac{\partial}{\partial y^b} y^i y^j \right) \\
&= \frac{1}{2} \alpha_{ij} (\delta_b^i \delta_a^j + \delta_a^i \delta_b^j) \\
&= \alpha_{ab} \quad \therefore \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^2}{\partial y^i \partial y^j} &= \alpha_{ij}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

O mesmo ocorre com β^2 , sendo assim,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta^2}{\partial y^i \partial y^j} = \beta_{ij}. \tag{5.5}$$

O cálculo do termo $2\alpha\beta$ é um pouco mais complicado.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 (2\alpha\beta)}{\partial y^a \partial y^b} &= \frac{\partial}{\partial y^a} \left(2 \frac{\partial}{\partial y^b} (\alpha\beta) \right) \\
&\equiv \frac{\partial}{\partial y^a} \left(\frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial (\alpha\beta)^2}{\partial y^b} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y^a} \left[\frac{1}{\alpha\beta} \left(\alpha^2 \frac{\partial \beta^2}{\partial y^b} + \beta^2 \frac{\partial \alpha^2}{\partial y^b} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y^a} \left[\frac{1}{\alpha\beta} (\alpha^2 \beta_{bl} y^l + \beta^2 \alpha_{bj} y^j) \right] \\
&= \frac{1}{\alpha\beta} \beta_{il} y^l \alpha_{jb} y^b + \frac{1}{\alpha\beta} \alpha_{ib} y^b \beta_{jl} y^l + \frac{\beta}{\alpha} \left(\alpha_{ij} - \alpha_{jb} y^b \frac{\alpha_{ia} y^a}{\alpha^2} \right) \\
&+ \frac{\alpha}{\beta} \left(\beta_{ij} - \beta_{jl} y^l \frac{\beta_{ik} y^k}{\beta^2} \right).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(2\alpha\beta)}{\partial y^i \partial y^j} &= \frac{1}{\alpha\beta} \beta_{ik} y^k \alpha_{jl} y^l + \frac{1}{\alpha\beta} \alpha_{il} y^l \beta_{jk} y^k + \frac{\beta}{\alpha} \left(\alpha_{ij} - \alpha_{ji} y^i \frac{\alpha_{ij} y^j}{\alpha^2} \right) \\ &+ \frac{\alpha}{\beta} \left(\beta_{ij} - \beta_{ji} y^j \frac{\beta_{ik} y^k}{\beta^2} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Concluimos então que

$$g_{ij}(y) = \alpha_{ij} + \beta_{ij} + \frac{\beta_{il} y^l \alpha_{jb} y^b}{2\alpha\beta} + \frac{\alpha_{ib} y^b \beta_{jl} y^l}{2\alpha\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \left(\alpha_{ij} - \frac{\alpha_{jb} y^b \alpha_{ia} y^a}{\alpha^2} \right) - \frac{\alpha}{\beta} \left(\beta_{ij} - \frac{\beta_{jl} y^l \beta_{ik} y^k}{\beta^2} \right). \quad (5.8)$$

Podemos ainda considerar as seguinte relações.

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &:= \frac{\alpha_{ij} y^j}{\alpha}; \\ \bar{\bar{y}}_i &:= \frac{\beta_{ij} y^j}{\beta}; \\ A_{(i} B_{j)} &:= \frac{1}{2} (A_i B_j + A_j B_i). \end{aligned}$$

Podemos reescrever a Eq. (5.8) como

$$g_{ij}(y) = \alpha_{ij} + \beta_{ij} + \left[\frac{\beta}{\alpha} (\alpha_{ij} - \bar{y}_i \bar{y}_j) + \frac{\alpha}{\beta} (\beta_{ij} - \bar{\bar{y}}_i \bar{\bar{y}}_j) + 2\bar{y}_{(i} \bar{\bar{y}}_{j)} \right]. \quad (5.9)$$

Precisamos garantir que $g_{ij}(y)$ seja positivo definido, ou seja, $g_{ij}(y) u^i u^j \geq 0 \forall u \neq 0$.

$$\begin{aligned} (\bar{y}_i u^i)(\bar{y}_j u^j) &= |\langle \bar{y}, u \rangle|^2 \\ &\leq \|\bar{y}\|_\alpha^2 \|u\|_\alpha^2 = \|u\|_\alpha^2. \text{ Sendo assim,} \\ (\alpha_{ij} - \bar{y}_i \bar{y}_j) u^i u^j &= \|u\|_\alpha^2 - |\langle \bar{y}, u \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

O mesmo ocorre para $(\beta_{ij} - \bar{\bar{y}}_i \bar{\bar{y}}_j)$. Para $|\bar{y}_{(i} \bar{\bar{y}}_{j)} u^i u^j|$, temos

$$\begin{aligned}
|\bar{y}_{(i}\bar{y}_{j)}u^i u^j| &= |\langle \bar{y}, u \rangle \langle \bar{y}, u \rangle| \\
&\leq \|u\|_\alpha \|u\|_\beta. \text{ Então, temos que} \\
\|u\|_\alpha^2 + 2\langle \bar{y}, u \rangle \langle \bar{y}, u \rangle + \|u\|_\beta^2 &\geq |\langle \bar{y}, u \rangle|^2 + 2\langle \bar{y}, u \rangle \langle \bar{y}, u \rangle + |\langle \bar{y}, u \rangle|^2 \\
&= (\langle \bar{y}, u \rangle + \langle \bar{y}, u \rangle)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Podemos então definir um funcional $\mathcal{L} = F^2$, de modo que $\mathcal{L} = \alpha_{ij}(x)y^i y^j + \beta_{ij}(x)y^i y^j + 2\sqrt{\alpha_{ij}(x)\beta_{lm}(x)y^i y^j y^l y^m}$. Podemos então substituir \mathcal{L} na Equação de Euler-Lagrange, tal que

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = 0.$$

Definimos então, por exemplo, um termo $\mathcal{L}_\alpha = \alpha_{ij}y^i y^j$ e calculamos sua derivada em relação a y^k e x^k o que nos leva aos seguintes resultados.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y^k}(\mathcal{L}_\alpha) &= \frac{\partial}{\partial y^k}(\alpha_{ij}y^i y^j) \\
\frac{\partial}{\partial y^k}(\alpha_{ij}y^i y^j) &= \alpha_{ij}y^j \frac{\partial}{\partial y^k} y^i + \alpha_{ij}y^i \frac{\partial}{\partial y^k} y^j \\
&= \alpha_{ij}y^j \delta_k^i + \alpha_{ij}y^i \delta_k^j \\
&= 2\alpha_{ik}y^i.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{L}_\alpha) &= \frac{\partial}{\partial x^k}(\alpha_{ij}y^i y^j) \\
&= y^i y^j \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x^k}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Podemos fazer o mesmo com cada um dos termos de \mathcal{L} e substituir os resultados obtidos na Equação de Euler-Lagrange. Podemos também utilizar a seguinte propriedade, $C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial y^k}$ e $C_{ijk} \cdot y^j = 0$, o que nos levaria a uma equação geodésica modificada. Portanto, compreendemos que a métrica g_{ij} proposta neste trabalho constitui um estudo relevante para uma possível teoria de gravitação bimétrica, em que

$$g_{ij}(\mathbf{y}) = \alpha_{ij} + \beta_{ij} + \left[\frac{\beta}{\alpha}(\alpha_{ij} - \bar{y}_i \bar{y}_j) + \frac{\beta}{\alpha}(\beta_{ij} - \bar{y}_j \bar{y}_i) + 2\bar{y}_{(i} \bar{y}_{j)} \right], \quad (5.12)$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &:= \frac{\alpha_{ij} y^j}{\alpha} \\ \bar{\bar{y}}_i &:= \frac{\beta_{ij} y^j}{\beta} \\ A_{(i} B_{j)} &:= \frac{1}{2} A_i B_j + \frac{1}{2} A_j B_i, \end{aligned}$$

neste caso, a massa é adicionada a partir dos termos α_{ij} e β_{ij} , já a conexão com a geometria de Finsler será fornecida pelos termos acoplados.

Entendemos que o termo de massa pode ser trabalhado de duas forma, diretamente ou podermos adicionar uma métrica nova. Podemos analisar este fato da seguinte forma: deixemos gravitação um pouco de lado e tomemos o campo escalar, a massa corresponde fisicamente a uma excitação nesse campo próximo do mínimo. Assim, massa pode ser entendida tão somente como um coeficiente na frente do termo quadrático. Mas, e o gráviton? O gráviton corresponde a uma excitação da geometria do espaço-tempo. Assim, precisamos acrescentar uma métrica sobre a qual irá ocorrer a excitação, pois a excitação da métrica corresponde à excitação da geometria. Sendo assim, podemos deixar de lado a massa e introduzir uma segunda métrica dinâmica e isso vai ser equivalente a ter uma massa para a primeira métrica. Porém a segunda métrica sempre será necessária porque precisamos definir massa com respeito a qual geometria. Isto é propriedade específica do gráviton, pois como já falamos, o gráviton é excitação da geometria. Originalmente essa métrica é auxiliar não-dinâmica, mas dinâmica significa apenas mais graus de liberdade para o gráviton. Podemos então usar duas métricas não dinâmicas e só depois utilizar alguma liberdade local e voltar ao caso real, ou seja, uma métrica dinâmica e outra não-dinâmica. É possível aqui perceber como isto é complicado, pois parece que só há dois graus de liberdade para gráviton, e aqui já teríamos cinco. Mas, ainda assim podemos dizer que essa massa é bem pequena. Porém, o quanto ela seria pequena ainda não é possível tratar nesse trabalho.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE PESQUISAS FUTURAS

As limitações da TRG têm sido muito discutidas e propostas para uma modificação da gravitação de Einstein constituem objeto de pesquisa de muitos centros acadêmicos. Hoje já se sabe que, no limite de altas energias, experimentos fundamentados nesse modelo de gravitação produzem resultados incompatíveis com teorias mais atuais como a Mecânica Quântica e a Teoria Quântica de Campos, e justamente devido a essa incompatibilidade com a Mecânica Quântica é que a necessidade de uma possível reformulação da TRG tem ganhando importância. Na literatura, essa modificação da TRG é chamada comumente de Gravitação Quântica e existem atualmente vários modelos distintos para essa possível teoria de gravitação, dentre as quais, existem modelos que utilizam duas métricas em que uma é utilizada para o acoplamento de um termo de massa em uma partícula pontual. Esse tipo de modelo é conhecido como gravitação massiva.

A abordagem apresentada nesse trabalho constitui do estudo dos elementos matemáticos e geométricos fundamentados em Geometria Finsler e que visam a elaboração futura de um modelo de gravitação bimétrica. Apresentou-se aqui como a geometria de Riemann constitui um caso especial da geometria de Finsler. Concluímos que é possível recuperar os elementos geométricos – métrica, curvatura, conexão – utilizados na definição de espaço-tempo e na dinâmica de uma partícula pontual na Relatividade Geral. Assim, entendemos a TRG como um caso particular de uma gravitação fundamentada em Geometria Finsler. Entendemos que modelos de gravitação bimétrica fundamentados nessa geometria podem ser desenvolvidos de forma natural, uma vez que a própria estrutura matemática que fundamenta a geometria Finler possui intrinsecamente

meios para tal desenvolvimento, isso pôde-se percebido a partir da construção da métrica g_{ij} apresentada no capítulo 5.

A perspectiva desse trabalho é construir futuramente um modelo de gravitação sobre a métrica Finsler dada na Eq. (5.12) acoplada a matéria de maneira não-mínima, isto é, para ambas as métricas Riemannianas. Esta é uma tarefa muito complexa técnica e conceitualmente. Para darmos um exemplo das dificuldades técnicas, podemos citar a o problema da inversão da métrica da na Eq. (5.12) – o primeiro passo necessário para uma futura construção da geometria. Mesmo esta tarefa aparentemente simples é não-trivial.

O plano esquemático das primeiras etapas da pesquisa adicional pode ser resumido da seguinte forma:

- i) O estudo das geodésicas;
- ii) A construção de uma conexão não-linear;
- iii) O estudo dos objetos geométricos: diferentes curvaturas, torções, etc;
- iv) A construção de uma teoria do campo escalar sobre o pano de fundo da bimétrica Finsler.

Após estes passos, nós planejamos passar ao estudo do problema mais fundamental, recuperar a gravidade massiva a partir da abordagem de gravitação finsleriana.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] L. D. Landau and E. M Lifshitz. *Course of Theoretical Physics: The Classical Theory of Fields*, volume Volume 2. Pergamon Press, Oxford, 1971.
- [2] Murray R. Spingel. *Análise Vetorial*. Coleção Schaum. Ao Livro Técnico S.A, Rio de janeiro, 1966.
- [3] Fred H. Croom. *Principles of topology*. Cengage Learning Asia, 1 edition, 2002.
- [4] Sadri Hassani. *Mathematical physics: a modern introduction to its foundations*. Springer, 1st edition, 1999.
- [5] Zhongmin Shen. *Lectuees on Finsler Geometry*. World Scientific, Singapore, 2001.
- [6] S. W. Hawking. *Uma Breve História do Tempo: do Big Bang aos buracos negros*. Rocco, Rio de Janeiro, 1988.
- [7] G. S. Asanov. *Finsler geometry, relativity and gauge theories*. Springer, Dordrecht, Netherlands, 1985.
- [8] David Dai-Wai Bao, Shiing-Shen Chern, and Zhongmin Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [9] Christian Pfeifer. *The Finsler spacetime framework: backgrounds for physics beyond metric geometry*. PhD thesis, Departamento de Física Universidade de Hamburgo, Hamburg, Alemanha, 2013.
- [10] Xiaohuan H. Mo. *An Introduction to Finsler Geometry*, volume vol. 1 of *Series in Mathematics*. World Scientific, Singapore, 2006.

- [11] Yashar Akrami, Tomi S Koivisto, and Adam R. Solomon. The nature of spacetime in bigravity: two metrics or none? *General Relativity and Gravitation*, 47(1):1–6, 2015.
- [12] Harold Jeffreys and Bertha S. JJeffreys. *Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1988.
- [13] Shiing-Shen Chern and Zhongmin Shen. *Riemann-Finsler geometry*. World Scientific, Singapore, 2005.
- [14] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Graduate Student Series in Physics. Taylor & Francis, 1990.
- [15] Herbert Busemann. The geometry of finsler spaces. *Bulletin of the A.M.S.* 56 (1950), 5 -16, 1950.
- [16] Claudia Rham. Massive Gravity. *Living Rev. Rel.*, 17:7, 2014.
- [17] Claudia de Rham, Gregory Gabadadze, and Andrew J. Tolley. Resummation of massive gravity. *Phys. Rev. Lett.* 106, (231101, arXiv:1011.1232v2 [hep-th]), Junho 2011.
- [18] S. F. Hassan and Rachel A. Rosen. Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity. *JHEP*, 02:126, 2012.
- [19] Kurt Hinterbichler. Theoretical Aspects of Massive Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 84:671–710, 2012.
- [20] S. F. Hassan and Rachel A. Rosen. Resolving the Ghost Problem in non-Linear Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 108:041101, 2012.
- [21] S. F. Hassan and Rachel A. Rosen. On Non-Linear Actions for Massive Gravity. *JHEP*, 07:009, 2011.
- [22] S. F. Hassan, Rachel A. Rosen, and Schmidt-May. Ghost-free Massive Gravity with a General Reference Metric. *JHEP*, 02:026, 2012.
- [23] Claus Lämmerzahl, Dennis Lorek, and Hansjorg Dittus. Confronting finsler space-time with experiment. *Gen. Rel. Grav.*, 41:1345–1353, 2009.
- [24] Sergiu I. Vacaru. Principles of Einstein-Finsler Gravity and Perspectives in Modern Cosmology. *Int. J. Mod. Phys.*, D21:1250072, 2012.