Adriano Valladão Pires Ribeiro

Preferência por Flexibilidade e Consistência Dinâmica com Crenças Imprecisas

Brasília

2017

Adriano Valladão Pires Ribeiro

Preferência por Flexibilidade e Consistência Dinâmica com Crenças Imprecisas

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Economia, Universidade de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Departamento de Economia

Programa de Pós-Graduação

Orientador: José Guilherme de Lara Resende

Brasília

2017

Ribeiro, Adriano
Preferência por Flexibilidade e Consistência Dinâmica com Crenças Imprecisas. – Brasília, 2017-
33 páginas

Orientador: José Guilherme de Lara Resende

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília – UnB
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia
Programa de Pós-Graduação, 2017.

1. Consistência Dinâmica. 2. Preferência por Flexibilidade. 3. Preferência sobre Menus.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e irmã que, mesmo de longe, estão sempre me apoiando. Aos amigos de Belo Horizonte pelos momentos de lazer e descontração. Aos amigos de Brasília que muito me ajudaram a adaptar à cidade. Aos colegas da UnB pelas várias horas compartilhadas tanto de diversão quanto de estudos.

Agradeço também aos professores da UnB pelos ensinamentos e disposição para tirar dúvidas sobre qualquer problema. Em especial aos professores Gil Riella e José Guilherme por permitirem que este trabalho pudesse ser realizado.

Resumo

Este trabalho caracterizou consistência dinâmica para um agente avesso à incerteza com preferência sobre menus de loterias, espaço de estados subjetivo e várias crenças sobre esses estados. Para isso, uma adaptação da representação por utilidade min-max de Epstein, Marinacci e Seo (2007) teve que ser obtida primeiro. Constatou-se então que a versão subjetiva de consistência dinâmica nesse ambiente é equivalente a uma condição sobre a preferência ligada à ideia de preferência por flexibilidade e à atualização das crenças de um conjunto retangular seguindo a Regra de Bayes.

Palavras-chave: Consistência Dinâmica, Preferência por Flexibilidade, Preferência sobre Menus.

Abstract

This work characterized dynamic consistency for an agent averse to uncertainty with preference over menus of lotteries, subjective state space and multiple priors. To do so, an adaptation of the min-max utility representation of Epstein, Marinacci e Seo (2007) had to be obtained first. It was found that the subjective version of dynamic consistency in this framework is equivalent to a condition on preference linked to preference for flexibility and updating the priors of a rectangular set using Bayes' Rule.

Key-words: Dynamic Consistency, Preference for Flexibility, Preference over Menus.

Sumário

1 Introdução

Riella (2013) caracteriza a versão de Consistência Dinâmica no arcabouço de preferências completas sobre menus de loterias representada por um espaço de estados subjetivo e uma crença. Não obstante esse espaço de estados subjetivo ser não observável, é assumido que sinais objetivos (observáveis) afetam o comportamento do agente. Segundo o teorema principal em Riella (2013), a versão de Consistência Dinâmica nesse ambiente é equivalente a uma condição sobre as preferências ligada à ideia de preferência por flexibilidade de Kreps (1979) e à atualização da crença segundo a Regra de Bayes.

O caso de preferências incompletas com espaço de estados subjetivo foi analisado por de Moura e Riella (2013) e requereu uma alteração da condição sobre as preferências para acomodar o caso de incomparabilidade entre menus. O resultado obtido pelos autores é uma generalização em que o tomador de decisão, ao aprender sobre o evento em seu espaço de estados, novamente age de maneira consistente com a Regra de Bayes.

Este trabalho tem como objetivo expandir a literatura sobre Consistência Dinâmica no mundo de menus com espaço de estados subjetivo, analisando como esta se daria com um agente avesso à incerteza que possui várias crenças a respeito dos estados. Diferentemente dos dois casos anteriores, apenas a atualização das crenças após um sinal não é suficiente para garantir um comportamento consistente do agente. Como observado por Epstein e Schneider (2003), as crenças devem também satisfazer uma condição que eles denominam retangularidade.

Preferências sobre menus de loterias com representação por utilidade esperada positiva aditiva (PAEU), utilizada por Riella (2013) em sua análise, foram desenvolvidas por Dekel, Lipman e Rustichini (2001) (DLR) e Dekel et al. (2007). Por sua vez, Dekel, Lipman e Rustichini (2009) caracterizam quando tal representação possui finitos estados. A representação para preferências incompletas, usada por de Moura e Riella (2013), foi axiomatizada por Kochov (2007). Este trabalho é desenvolvido tendo como base a representação obtida por Epstein, Marinacci e Seo (2007) (EMS). Os autores estendem o modelo de DLR para captar a imprecisão de um agente quanto à suas crenças.

Na próxima seção descreveremos o arcabouço desse trabalho, além de discutir os resultados encontrados por Riella (2013) e de Moura e Riella (2013). A terceira parte abordará as primitivas do modelo e será apresentado o resultado principal. Na quarta seção concluiremos, enquanto as demonstrações dos teoremas foram relegadas ao apêndice.

2 Preferências Sobre Menus

Seguindo o arcabouço de DLR, X é um conjunto finito de alternativas e $\Delta(X)$ o conjunto de medidas de probabilidade sobre X. O conjunto $\Delta(X)$ é um subespaço métrico de $\mathbb{R}^X$ e denominamos seus elementos por p, q, r, etc.. Os elementos de $\Delta(X)$ são chamados de loterias. Seja $\mathcal{X}$ o espaço dos subconjuntos fechados e não vazios de $\Delta(X)$ e seus elementos são denotados por A, B, C, etc.. Os elementos de $\mathcal{X}$ são chamados menus. Represente os elementos de $\mathcal{X}$ contidos no interior relativo de $\Delta(X)$ por $int(\mathcal{X})$. Isto é, $int(\mathcal{X}) := \{A \in \mathcal{X} : \text{toda } p \in A \text{ tem suporte completo}\}$. Dada uma medida de probabilidade qualquer π, nós escrevemos $supp(\pi)$ para representar o suporte de π. Agora, considere duas relações binárias sobre $\mathcal{X}$, $\succsim$ e $\succsim^*$, e a seguinte definição:

Definição 1. Dizemos que uma relação $\succsim$ em $\mathcal{X}$ admite representação por utilidade esperada positiva aditiva incompleta (IPAEU) finita se existem um conjunto S finito, um conjunto M fechado e convexo de medidas de probabilidade sobre S e uma função $U : S\text{x}\Delta(X) \to \mathbb{R}$ tais que:

(i) Para quaisquer menus A e B,

$$A \succsim B \Leftrightarrow \sum_{s\in S} \pi(s) \max_{p\in A} U(s,p) \geq \sum_{s\in S} \pi(s) \max_{p\in B} U(s,p), \forall \pi \in M;$$

(ii) Para cada $s \in S$, existe função não constante $u_s \in \mathbb{R}^X$ tal que

$$U(s,p) = \sum_{x\in X} p(x)\, u_s(x),$$

para todo $p \in \Delta(X)$; e

(iii) $\cup_{\pi\in M} supp(\pi) = S$ e para quaisquer s e s' distintos em S, $U(s,.)$ e $U(s',.)$ não são transformações afins positivas uma da outra.

Essa representação pode ser interpretada como um agente que resolve um problema de dois estágios. No primeiro, o tomador de decisão escolhe um menu de opções, sabendo que no segundo deverá escolher uma opção deste menu. Este agente está incerto sobre o futuro, particularmente, sobre quais serão seus gostos quando uma escolha do menu deverá ser feita, visto que cada estado representa um gosto diferente. Além disso, não há uma descrição precisa da sua incerteza, uma vez que há várias crenças sobre seu espaço de estados. Dado seu conjunto de crenças, o tomador de decisão age de maneira parcimoniosa, considerando um menu melhor que outro apenas se sua utilidade esperada *ex ante* for maior para todas as crenças.

Na representação acima, o conjunto S é apenas um conjunto de índices e não é diretamente relevante. Seu principal aspecto está nas preferências *ex post* induzidas por

$\{U(s,.) : s \in S\}$ e com representação por utilidade esperada. Além disso, o conjunto de índices S não contém estado redundante, no sentido que cada estado está associado a uma preferência *ex post* diferente, nem estado trivial, no sentido de que cada estado tem probabilidade positiva para pelo menos uma crença. Assim como DLR, nos referiremos ao conjunto de preferências induzido por $\{U(s,.) : s \in S\}$ como espaço de estados subjetivo. Kochov (2007) mostra que o espaço de estados subjetivo em uma representação IPAEU finita é único, no sentido de duas representações da mesma preferência sempre possuírem o mesmo espaço de estados subjetivo. Portanto, assumimos, sem perda de generalidade, que o conjunto de índices S em qualquer representação IPAEU finita coincide com seu espaço de estados subjetivo. De agora em diante, o conjunto de estados S será entendido como o conjunto de preferências *ex post* que corresponde ao espaço de estados subjetivo de $\succsim$. Além disso, para qualquer espaço de estados subjetivo, escrevemos $\succcurlyeq_s$ para representar a preferência associada a $s \in S$.

Quando uma relação $\succsim$ completa admite representação IPAEU finita, o conjunto de medidas de probabilidade torna-se unitário. Neste caso, dizemos que $\succsim$ admite representação por utilidade esperada positiva aditiva (PAEU) finita.

2.1 Preferências Completas

Suponha que $\succsim$ e $\succsim^*$ tenham representação por utilidade esperada positiva aditiva finita e satisfaçam a seguinte condição:

Consistência em Flexibilidade. Para quaisquer menus $A \in \mathcal{X}$ e $B \in int(\mathcal{X})$, $A \succ^* B$ e $B \succsim A$ implicam que existe menu C tal que $A \cup B \cup C \sim^* A \cup C$ e $A \cup B \cup C \succ A \cup C$.

As relações $\succsim$ e $\succsim^*$ representam o mesmo tomador de decisão, respectivamente, antes e depois que um sinal objetivo é dado. Por essa condição, quando duas preferências satisfazem Consistência em Flexibilidade podemos concluir que se para dois menus $A \succ^* B$ e $B \succsim A$, então existe ao menos uma situação em que adicionar as opções de B em A não tem valor para $\succsim^*$, ainda que isso represente uma melhora estrita para $\succsim$. Em outras palavras, flexibilidade é mais valorizada antes do sinal do que após.

Podemos agora enunciar o resultado principal de Riella (2013):

Teorema 1 (Riella (2013))**.** Sejam $\succsim$ e $\succsim^*$ duas representações PAEU finitas. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Consistência em Flexibilidade;

(ii) Sejam S e S^* os espaços de estados subjetivo de $\succsim$ e $\succsim^*$, respectivamente, e seja $U : S \cup S^* \to \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $s \in S \cup S^*$, $U(s,.)$ é uma função de utilidade esperada que representa $\succcurlyeq_s$. Para quaisquer menus A e B tais que $\max_{p\in A} U(s,p) = \max_{p\in B} U(s,p)$, para todo $s \in S\backslash S^*$, $B \succsim A \Leftrightarrow B \succsim^* A$.

(iii) Para cada representação por utilidade esperada positiva e finita (S, μ, U) de $\succsim$, existe $T \subseteq S$ tal que (T, μ_T, U) representa $\succsim^*$, em que μ_T é a atualização Bayesiana de μ após a observação de T.

Por esse teorema, quando as preferências admitem representação PAEU finita, temos que Consistência em Flexibilidade é equivalente a uma versão subjetiva de Consistência Dinâmica, que, por sua vez, é equivalente à aplicação da regra de Bayes em μ após a observação de um evento T.

2.2 Preferências Incompletas

Uma nova versão de Consistência em Flexibilidade é necessária ao abandonarmos a suposição que $\succsim$ e $\succsim^*$ são completas:

Consistência em Flexibilidade II. Para qualquer menu $A \in \mathcal{X}$ e menu $B \in int(\mathcal{X})$, $A \succsim^* B$ e não $A \succsim B$ ou não $B \succsim^* A$ e $B \succsim A$ implica que existe menu C tal que $A \cup B \cup C \sim^* A \cup C$ e $A \cup B \cup C \succsim A \cup C$.

A generalização do teorema anterior para prefenrências IPAEU finitas foi obtida por de Moura e Riella (2013):

Teorema 2 (de Moura e Riella (2013))**.** Sejam $\succsim$ e $\succsim^*$ duas representações IPAEU finitas. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Consistência em Flexibilidade II;

(ii) Sejam S e S^* os espaços de estados subjetivo de $\succsim$ e $\succsim^*$, respectivamente, e seja $U : S \cup S^* \to \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $s \in S \cup S^*$, $U(s,.)$ é uma função de utilidade esperada que representa $\succcurlyeq_s$. Para quaisquer menus A e B tais que $\max_{p\in A} U(s,p) = \max_{p\in B} U(s,p)$, para todo $s \in S\backslash S^*$, $B \succsim A \Leftrightarrow B \succsim^* A$.

(iii) Para cada representação IPAEU finita (S, M, U) de $\succsim$, existe $T \subseteq S$ tal que (T, M_T, U) representa $\succsim^*$, em que M_T é o conjunto das atualizações Bayesianas de M aplicadas a cada $\pi \in M$ com $\pi(T) > 0$, após a observação de T.

Por esse resultado, quando duas relações admitem representação IPAEU finita, Consistência em Flexibilidade II é equivalente à versão subjetiva de Consistência Dinâmica e à atualização de todas as crenças, após a observação de um evento T, seguindo a Regra de Bayes.

3 Crenças Imprecisas

3.1 Representação com Crenças Imprecisas

Nesta seção apresentaremos uma axiomatização alternativa do modelo de EMS, que será necessária nas seções posteriores. Para tanto, defina o menu $\overline{B(p^*,\delta)} := \{p \in \Delta(X) : ||p^* - p|| \leq \delta\}$ para quaisquer $p^* \in \Delta(X)$ e $\delta > 0$, ou seja, o menu $\overline{B(p^*,\delta)}$ é uma bola fechada em $\Delta(X)$ de centro p^* e raio δ. Agora, suponha que $\succsim$ seja uma preordem completa sobre $\mathcal{X}$ e considere os seguintes postulados:

Continuidade. Para todo $A \in \mathcal{X}$, os conjuntos $\{B \in \mathcal{X} : B \succsim A\}$ e $\{B \in \mathcal{X} : A \succsim B\}$ são fechados em relação à topologia induzida pela métrica Hausdorff.

Monotonicidade. Para todos $A, B \in \mathcal{X}$, se $A \subseteq B$, então $B \succsim A$.

Indiferença à Randomização. Para todo $A \in \mathcal{X}$, $A \sim co(A)$, em que $co(A)$ é o fecho convexo de A.

Convexidade. Para todos $A, B \in \mathcal{X}$ tal que $A \succsim B$, então $\lambda A + (1-\lambda) B \succsim B$, $\forall \lambda \in [0,1]$.

Finitude. Para todo $A \in \mathcal{X}$, existe menu finito $A^f \subseteq A$, tal que, para todo $\lambda \in (0,1]$ e qualquer $B \in \mathcal{X}$, $\lambda A + (1-\lambda) B \sim \lambda A^f + (1-\lambda) B$.

C-Independência. Existe $p^* \in int(\Delta(X))$ tal que para todo $\delta \geq 0$ com $\overline{B(p^*,\delta)} \subseteq \Delta(X)$, para todo $\lambda \in (0,1)$ e para todos menus $A, B \in \mathcal{X}$, temos que

$$A \succsim B \Leftrightarrow \lambda A + (1-\lambda) \overline{B(p^*,\delta)} \succsim \lambda B + (1-\lambda) \overline{B(p^*,\delta)}.$$

Não Degeneração. Para todo $\delta > 0$, $\overline{B(p^*,\delta)} \succ \{p^*\}$.

Os axiomas acima, com exceção de C-Independência e Não Degeneração, são devidamente interpretados por EMS e usados na obtenção de uma representação para $\succsim$. Por questões técnicas, o axioma *Worst* de EMS foi abandonado, enquanto C-Independência e Não Degeneração foram modificados.

Pelo axioma de C-Independência existe uma loteria p^* que, ao ser misturada com quaisquer outros menus A e B em $\mathcal{X}$, não altera a ordenação destes menus. Isso significa que a loteria p^* se comporta como um menu certo de EMS, i.e., um menu que possui retorno constante e, portanto, vale o postulado tradicional de Independência. Esta propriedade, segundo C-Independência, é válida também para as bolas fechadas de centro p^* e raio

$\delta > 0$, desde que tais bolas estejam contidas em $\Delta(X)$. Não degeneração, por sua vez, evita indiferença total entre os menus.

Baseado em EMS, podemos agora obter uma representação do tipo min-max no espaço de menus de loterias a partir dos axiomas acima. Formalmente, temos:

Teorema 3. Uma relação binária $\succsim$ sobre $\mathcal{X}$ é uma preordem completa que satisfaz Continuidade, Monotonicidade, Indiferença à Randomização, Não Degeneração, Convexidade, Finitude e C-Independência se, e somente se, existem um conjunto finito S, um conjunto M fechado e convexo de medidas de probabilidade sobre S e uma função $U : S\text{x}\Delta(X) \to \mathbb{R}$ tais que:

(i) Para quaisquer menus A e B,

$$A \succsim B \Leftrightarrow \min_{\pi \in M} \sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in A} U(s,p) \geq \min_{\pi \in M} \sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in B} U(s,p);$$

(ii) Para cada $s \in S$, existe função não constante $u_s \in \mathbb{R}^X$ tal que

$$U(s,p) = \sum_{x \in X} p(x)\, u_s(x),$$

para todo $p \in \Delta(X)$;

(iii) Existem $p^* \in \Delta(X)$ e $\delta > 0$ tais que, para todo $s \in S$, $U(s,p^*) = 0$ e, sempre que $\overline{B\left(p^*, \hat{\delta}\right)} \subseteq \Delta(X)$, $U(s,p_s) = \frac{\hat{\delta}}{\delta}$, onde $p_s \in arg\max_{p \in \overline{B\left(p^*,\hat{\delta}\right)}} U(s,p)$; e

(iv) $\cup_{\pi \in M} supp(\pi) = S$ e para quaisquer s e s' distintos em S, $U(s,.)$ e $U(s',.)$ não são transformações afins positivas uma da outra.

Pela representação do Teorema 3, o agente novamente resolve um problema de dois estágios, ou seja, um menu é escolhido esperando que, em um segundo momento, uma opção desse menu deverá ser selecionada. O agente também não sabe quais serão suas preferências no segundo estágio, sendo estas identificadas pelo suporte de uma crença π, além de não ter uma descrição precisa de sua incerteza, possuindo várias crenças sobre quais serão suas preferências *ex post*. Por (iv), a união do suporte de todas as crenças forma seu espaço de estados subjetivo. Por fim, esse agente é avesso à incerteza, avaliando um menu *ex ante* de acordo com a crença que lhe rende a menor utilidade esperada e, mesmo não possuindo uma descrição completa das contingências futuras, consegue comparar quaisquer menus, em que um será melhor que outro caso sua utilidade esperada *ex ante* seja maior.

Até o restante desse trabalho, a normalização do item (iii) no Teorema 3 será feita para a loteria p^* do axioma C-Independência e o maior $\delta > 0$ tal que $\overline{B(p^*,\delta)} \subseteq \Delta(X)$, de forma que, para cada $s \in S$, $\max_{p \in \overline{B(p^*,\delta)}} U(s,p) = 1$. Assim, menus que são bolas fechadas de centro p^* em $\Delta(X)$ possuem a mesma utilidade esperada *ex post* em todos os estados.

Quando duas relações binárias possuem a representação do Teorema 3 e a propriedade (iii) vale para a mesma loteria p^* e mesmo $\delta > 0$, diremos que elas possuem representação min-max para uma mesma loteria base.

3.2 Consistência Dinâmica com Crenças Imprecisas

Suponha agora que $\succsim$ e $\succsim^*$ sejam relações binárias com representações min-max para uma mesma loteria p^*. O objetivo desta seção será caracterizar Consistência Dinâmica Subjetiva para tais relações. Para isto, considere o seguinte postulado:

Consistência em Flexibilidade III. Para quaisquer menus $A \in \mathcal{X}$ e $B \in int(\mathcal{X})$, se $A \succ^* B$, mas $B \succsim A$, então existe menu C tal que:

$$\lambda(A \cup B \cup C) + (1-\lambda) D \sim^* \lambda(A \cup C) + (1-\lambda) D, \forall \lambda \in (0,1] \text{ e } \forall D \in \mathcal{X}; \text{ e}$$

$$\lambda(A \cup B \cup C) + (1-\lambda) D \succ \lambda(A \cup C) + (1-\lambda) D, \exists \lambda \in (0,1] \text{ e } \exists D \in \mathcal{X}.$$

A interpretação dessa condição é semelhante à de Consistência em Flexibilidade e Consistência em Flexibilidade II. As relações $\succsim$ e $\succsim^*$ representam o mesmo tomador de decisão, respectivamente, antes e depois que um sinal objetivo é dado. Quando elas discordam da avaliação de dois menus da maneira descrita por Consistência em Flexibilidade III, haverá uma situação em que $\succsim$ valoriza mais a flexibilidade do que $\succsim^*$. Em outras palavras, se, para dois menus A e B, $A \succ^* B$, mas $B \succsim A$, então há pelo menos um caso em que adicionar opções de B em A não terá valor para $\succsim^*$, ainda que $\succsim$ veja essa operação como uma melhora estrita.

Quando as preferências tem representação do tipo min-max no ambiente de menus de loterias, Consistência Dinâmica Subjetiva pode não ser verificada quando as crenças são atualizadas seguindo a regra de Bayes apenas. Epstein e Schneider (2003), trabalhando no mundo de atos, notam que as crenças devem também satisfazer uma condição que eles denominam retangularidade. Segundo os autores, esta condição é uma forma de decomposição das medidas de probabilidade em termos de suas distribuições marginais e condicionais, em que, dado um conjunto de crenças M, combinar-se-á a marginal de cada medida de probabilidade $\pi \in M$ com as condicionais de todas as medidas de probabilidade desse conjunto. Portanto, para que um conjunto de crenças de uma representação min-max seja retangular deve-se completá-lo da maneira descrita acima. Formalmente, temos:

Retangularidade. Dizemos que um conjunto de crenças M satisfaz retangularidade com respeito a $T \subseteq S$ se para todas as medidas de probabilidade $\pi, \pi' \in M$, existe uma medida $\hat{\pi} \in M$ tal que $\hat{\pi}(s) = \pi'(s)$, para todo $s \in S \backslash T$, e $\hat{\pi}(s) = \frac{\pi'(T)}{\pi(T)} . \pi(s)$, para todo $s \in T$.

Podemos agora enunciar o teorema principal deste trabalho:

Teorema 4. Sejam $\succsim$ e $\succsim^*$ preordens completas que têm representações como no Teorema 3 para uma mesma loteria p^*. As seguintes afimações são equivalentes:

(i) $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Consistência em Flexibilidade III;

(ii) Sejam S e S^* os espaços de estados subjetivo de $\succsim$ e $\succsim^*$, respectivamente, e seja $U : S \cup S^* \to \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $s \in S \cup S^*$, $U(s, .)$ é uma função de utilidade esperada que representa $\succcurlyeq_s$. Para quaisquer menus A e B tais que $\max_{p \in A} U(s,p) = \max_{p \in B} U(s,p)$, para todo $s \in S \backslash S^*$, $B \succsim A \Leftrightarrow B \succsim^* A$.

(iii) Existem uma representação min-max (S, M, U) de $\succsim$ e $T \subseteq S$ tais que M satisfaz Retangularidade com respeito a T e (T, M_T, U) representa $\succsim^*$, sendo M_T o conjunto das atualizações Bayesianas de M aplicadas a cada $\pi \in M$ com $\pi(T) > 0$, após a observação de T.

O item (ii) do Teorema 4 pode ser interpretado como uma versão subjetiva de Consistência Dinâmica. A relação $\succsim^*$ representa a preferência do agente após a observação do evento S^*, assim, pelo item (ii), $\succsim$ e $\succsim^*$ devem concordar no ordenamento dos menus, quando estes dão a mesma utilidade fora do evento S^*. Por sua vez, o item (iii) diz que existem uma representação min-max (S, M, U) de $\succsim$ e um evento T tais que M é retangular com respeito a T e $\succsim^*$ pode ser representada, após a observação de T, pela atualização Bayesiana de cada crença em M. Por esse teorema, portanto, quando duas relações admitem representação do tipo min-max, Consistência em Flexibilidade III será equivalente à versão subjetiva de Consistência Dinâmica, enquanto esta será equivalente a atualizar todas as medidas de probabilidade de um conjunto retangular seguindo a Regra de Bayes após um evento T.

4 Conclusão

Este trabalho caracterizou a propriedade de Consistência Dinâmica no mundo de menus de loterias e espaço de estados subjetivo, em que o agente, nesse ambiente, possui preferência representada por uma utilidade do tipo min-max com diversas crenças, expandindo a literatura desenvolvida anteriormente por Riella (2013) e de Moura e Riella (2013). Para chegar a tal resultado, primeiro obteve-se uma representação para uma relação binária modificando alguns dos axiomas de Epstein, Marinacci e Seo (2007), de forma a conseguir menus certos que fossem todos bolas fechadas de mesmo centro. Em seguida, foi imposta uma condição sobre as preferências denominada Consistência em Flexibilidade III, para então chegar ao resultado principal. Por ele, conclui-se que Consistência em Flexibilidade III é equivalente à versão subjetiva de Consistência Dinâmica, que, por sua vez, é equivalente à atualização Bayesiana das crenças de um conjunto retangular.

APÊNDICE A – Representação de $\succsim$

Nesta parte obteremos uma representação do tipo min-max para preferências sobre menus de loterias, ou seja, demonstramos o Teorema 3.

Suponha que $\succsim \subseteq \mathcal{X}\text{x}\mathcal{X}$ seja uma preordem completa que satisfaz Continuidade, Monotonicidade, Indiferença à Randomização, Não Degeneração, Convexidade, Finitude e C-Independência. Defina a relação binária $\hat{\succsim}$ sobre $\mathcal{X}$ por:

$$A\hat{\succsim}B \Leftrightarrow \lambda A + (1-\lambda)\,C \succsim \lambda B + (1-\lambda)\,C, \text{ para todos } C \in \mathcal{X} \text{ e } \lambda \in (0,1]\,,$$

ou seja, consideramos o maior subconjunto de $\succsim$ que satisfaz o axioma tradicional de independência. Esta nova relação não é completa e satisfaz algumas propriedades derivadas das propriedades de $\succsim$.

Afirmação 1. $\hat{\succsim}$ é uma preordem que satisfaz:

(i) Monotonicidade: Para todos $A, B \in \mathcal{X}$, se $A \subseteq B$, então $B\hat{\succsim}A$;

(ii) Continuidade*: Se $\{A^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{B^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ são duas sequências convergentes tais que e $A^m\hat{\succsim}B^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, então $\lim A\hat{\succsim}\lim B$;

(iii) Não Degeneração: Para todo $\delta > 0$, $\overline{B(p^*, \delta)}\hat{\succ}\{p^*\}$;

(iv) Finitude*: Para todo menu $A \in \mathcal{X}$, existe menu finito $A^f \subseteq A$, tal que $A\hat{\sim}A^f$; e

(v) Independência: Para todos $A, B, C \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in [0,1]$,

$$A\hat{\succsim}B \Leftrightarrow \lambda A + (1-\lambda)\,C\hat{\succsim}\lambda B + (1-\lambda)\,C.$$

Segundo Kochov (2007), a relação binária $\hat{\succsim}$ admite representação por utilidade esperada positiva aditiva incompleta (IPAEU). A hipótese de Finiteness* é condição suficiente para que o conjunto S de estados da natureza seja finito. Assim, $\hat{\succsim}$ possui a representaąão da Definição 1 para um conjunto S finito, um conjunto fechado e convexo M de medidas de probabilidade sobre S e uma função $\hat{U} : \Delta(X) \text{ x } S \to \mathbb{R}$ que satisfazem as propriedades (i), (ii) e (iii) naquela definição.

Da representação de $\hat{\succsim}$, seja $\mathcal{U}$ o conjunto das funções de utilidade esperada sobre X. Cada $u \in \mathcal{U}$ representa uma preferência diferente sobre $\Delta(X)$ e cada preferência não trivial sobre $\Delta(X)$ pode ser representada por exatamente uma função $u \in \mathcal{U}$. Logo, podemos escrever u_s para representar a função $u \in \mathcal{U}$ que representa $\succcurlyeq_s$.

Considere a loteria p^* em que o axioma C-Independência é válido e o maior $\delta > 0$ tal que $\overline{B(p^*, \delta)} \subseteq \Delta(X)$. Trabalharemos com a seguinte normalização:

(1) Para cada $u_s \in \mathcal{U}$, defina

$$U(s,.) := \frac{\hat{U}(s,.) - \hat{U}(s,p^*)}{\max_{p \in \overline{B(p^*,\delta)}} \hat{U}(s,p) - \hat{U}(s,p^*)}; \text{ e}$$

(2) Para cada $\mu \in M$, defina

$$\hat{\pi}(s) := \mu(s) . \left(\max_{p \in \overline{B(p^*,\delta)}} U(s,p) - U(s,p^*) \right) \text{ e}$$

$$\pi(s) := \frac{\hat{\pi}(s)}{\sum_{s \in S} \hat{\pi}(s)},$$

pra todo $s \in S$.

Note que $U(s,.)$ está bem definida para todo $s \in S$. Como $\overline{B(p^*,\delta)}$ é uma bola, cada $\hat{U}(s,.)$ é maximizada por uma única loteria $p \in \overline{B(p^*,\delta)}$ e cada loteria em $\overline{B(p^*,\delta)}$ maximiza, no máximo, uma função em $\{\hat{U}(s,.) : s \in S\}$. Portanto, podemos reescrever a representação de $\hat{\succsim}$ como:

$$A \hat{\succsim} B \Leftrightarrow \sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in A} U(s,p) \geq \sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in B} U(s,p), \forall \pi \in M,$$

em que, para cada $s \in S$, $U(s,p^*) = 0$ e $\max_{p \in \overline{B(p^*,\delta)}} U(s,p) = 1$. Além disso, para quaisquer $\pi \in M$ e $\hat{\delta} \in [0,\delta]$, tem-se que $\sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in \overline{B(p^*,\hat{\delta})}} U(s,p) = \frac{\hat{\delta}}{\delta}$, isto é, conseguimos obter menus com utilidades constantes em todos os estados.

Para obtermos uma representação de $\succsim$ do tipo min-max precisaremos da seguinte afirmação.

Afirmação 2. Se $\overline{B(p^*,\delta)} \succsim A \succsim \overline{B(p^*,\hat{\delta})} \succsim \{p^*\}$, então $\lambda A + (1-\lambda) C \succsim \lambda \overline{B(p^*,\hat{\delta})} + (1-\lambda) C$, para todos $C \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in (0,1)$.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{X}$ tal que $\overline{B(p^*,\delta)} \succsim A \succsim \overline{B(p^*,\hat{\delta})} \succsim \{p^*\}$. Primeiro, por continuidade e completude de $\succsim$, note que para qualquer menu $A \in \mathcal{X}$ com $\overline{B(p^*,\delta)} \succsim A \succsim \{p^*\}$, existe $\delta_A \in [0,1]$ tal que $A \sim \overline{B(p^*,\delta_A)}$. Pela transitividade de $\succsim$, temos $\overline{B(p^*,\delta_A)} \succsim \overline{B(p^*,\hat{\delta})}$.

Se $C \sim A \sim \overline{B(p^*,\delta_A)}$, então, por C-Independência, $\lambda \overline{B(p^*,\delta_A)} + (1-\lambda) \overline{B(p^*,\delta_A)} \sim \lambda \overline{B(p^*,\delta_A)} + (1-\lambda) C$. Por Convexidade temos então $\lambda A + (1-\lambda) C \succsim A \sim \overline{B(p^*,\delta_A)} \sim \lambda \overline{B(p^*,\delta_A)} + (1-\lambda) C$. Além disso, de $\overline{B(p^*,\delta_A)} \succsim \overline{B(p^*,\hat{\delta})}$, temos que $\overline{B(p^*,\delta_A)} = \lambda \overline{B(p^*,\delta_A)} + (1-\lambda) \overline{B(p^*,\delta_A)} \succsim \lambda \overline{B(p^*,\hat{\delta})} + (1-\lambda) \overline{B(p^*,\delta_A)} \succsim \overline{B(p^*,\hat{\delta})}$. Assim, $C \succsim \overline{B(p^*,\delta_A)} \Leftrightarrow \lambda \overline{B(p^*,\hat{\delta})} + (1-\lambda) C \sim \lambda \overline{B(p^*,\hat{\delta})} + (1-\lambda) \overline{B(p^*,\delta_A)}$, o que implica $\lambda \overline{B(p^*,\delta_A)} + (1-\lambda) C \succsim \overline{B(p^*,\delta_A)} \succsim \lambda \overline{B(p^*,\hat{\delta})} + (1-\lambda) C$, ou seja, $\lambda A + (1-\lambda) C \succsim \lambda \overline{B(p^*,\hat{\delta})} + (1-\lambda) C$.

Se $C \succsim A \succsim \overline{B\left(p^*, \hat{\delta}\right)}$, então existe $\delta_C \in [0,1]$ tal que $\delta_C C + (1-\delta_C)\{p^*\} \sim A$. Da discussão acima, sabemos que, $\forall \alpha \in [0,1]$, vale $\alpha A + (1-\alpha)(\delta_C C + (1-\delta_C)\{p^*\}) \succsim \alpha \overline{B\left(p^*, \hat{\delta}\right)} + (1-\alpha)(\delta_C C + (1-\delta_C)\{p^*\})$. De C-Independência temos que $\lambda A + (1-\lambda) C \succsim \lambda \overline{B\left(p^*, \hat{\delta}\right)} + (1-\lambda) C$, para todo $\lambda \in [0,1]$, em que $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha + \delta_c - \alpha\delta_c}$. Análogo para $A \succsim C$. $\square$

Seja $V(A) := \min_{\pi \in M} \sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in A} U(s,p)$, para qualquer $A \in \mathcal{X}$. Pela Afirmação 2, pode-se concluir que se $\overline{B(p^*, \delta)} \succsim A \succsim \overline{B\left(p^*, \hat{\delta}\right)} \succsim \{p^*\}$, então $A \hat{\succsim} \overline{B\left(p^*, \hat{\delta}\right)}$. Além disso, seja $\delta_A \in [0, \delta]$ tal que $A \sim \overline{B(p^*, \delta_A)}$, temos então que $\sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in A} U(s,p) \geq \sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in \overline{B(p^*, \delta_A)}} U(s,p)$, $\forall \pi \in M$, i. e., $V(A) \geq \frac{\delta_A}{\delta}$. Se tal desigualdade fosse estrita, para qualquer $\hat{\delta} \in \left(\frac{\delta_A}{\delta}, V(A)\right)$, teríamos $A \succ \overline{B\left(p^*, \hat{\delta}\right)} \succ \overline{B(p^*, \delta_A)} \sim A$, uma contradição. Portanto,

$$\min_{\pi \in M} \sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in A} U(s,p) = \frac{\delta_A}{\delta}.$$

Considere agora menu $A \in \mathcal{X}$ tal que $A \succ \overline{B(p^*, \delta)}$. Existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $\overline{B(p^*, \delta)} \succsim \lambda A + (1-\lambda) \overline{B\left(p^*, \frac{\delta}{2}\right)} \succsim \{p^*\}$. Note que $V\left(\lambda A + (1-\lambda) \overline{B\left(p^*, \frac{\delta}{2}\right)}\right) = \lambda V(A) + (1-\lambda)\frac{1}{2}$. Como $V\left(\lambda A + (1-\lambda) \overline{B\left(p^*, \frac{\delta}{2}\right)}\right)$ está bem definido pela discussão do parágrafo anterior, obtemos um valor para

$$V(A) = \min_{\pi \in M} \sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in A} U(s,p).$$

O caso em que $\{p^*\} \succ A$, para $A \in \mathcal{X}$, é obtido por meio do mesmo raciocínio. Com isso, conseguimos obter uma representação do tipo min-max para $\succsim$ a partir dos axiomas de Continuidade, Monotonicidade, Indiferença à Randomização, Não Degeneração, Convexidade, Finitude e C-Independência. Por outro lado, argumentos da literatura garantem que a forma funcional implica tais axiomas e sua demonstração será omitida.

APÊNDICE B – Caracterização de Consistência Dinâmica

Será apresentada agora uma demonstração para o Teorema 4, o resultado principal desse trabalho.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sejam S e S^* os espaços de estados subjetivos de $\succsim$ e $\succsim^*$, respectivamente, e seja $U : S \cup S^* \to \mathbb{R}$ tal que para qualquer $s \in S \cup S^*$, $U(s,.)$ é uma função de utilidade esperada que representa $\succcurlyeq_s$. Fixe menus A e B tais que $\max_{p \in A} U(s,p) = \max_{p \in B} U(s,p)$, para todo $s \in S \backslash S^*$. Se para algum $C \in \mathcal{X}$ tivermos que

$$\lambda (A \cup B \cup C) + (1-\lambda) D \sim^* \lambda (A \cup C) + (1-\lambda) D, \ \forall D \in \mathcal{X} \text{ e } \forall \lambda \in [0,1],$$

então $\max_{p \in \lambda(A \cup B \cup C)+(1-\lambda)D} U(s,p) = \max_{p \in \lambda(A \cup C)+(1-\lambda)D} U(s,p)$, $\forall s \in S^*$. Como

$$\max_{p \in A} U(s,p) = \max_{p \in B} U(s,p),$$

para todo $s \in S \backslash S^*$, teremos que

$$\max_{p \in \lambda(A \cup B \cup C)+(1-\lambda)D} U(s,p) = \max_{p \in \lambda(A \cup C)+(1-\lambda)D} U(s,p), \forall s \in S \cup S^*.$$

Logo, não podemos ter $\lambda (A \cup B \cup C) + (1-\lambda) D \succ \lambda (A \cup C) + (1-\lambda) D$ para nenhum $\lambda \in [0,1]$ e $D \in \mathcal{X}$. Por Consistência em Flexibilidade III, $B \succsim A \Leftrightarrow B \succsim^* A$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sejam S e S^* os espaços de estados subjetivos de $\succsim$ e $\succsim^*$, respectivamente, e considere duas representações min-max em p^*, uma para $\succsim$ e outra para $\succsim^*$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que U está definida sobre $S \cup S^*$. Vamos precisar da seguinte afirmação:

Afirmação 3. Existe intervalo $[1-\epsilon, 1] \subseteq \mathbb{R}$ tal que para todo ato $f \in [1-\epsilon, 1]^{|S|}$ existe um menu $A_f \in \mathcal{X}$ com $\max_{p \in A_f} U(s,p) = f(s)$, para todo $s \in S$.

Demonstração. Considere o menu $\overline{B(p^*, \delta)} \subseteq \Delta(X)$ tal que $\max_{p \in \overline{B(p^*,\delta)}} U(s,p) = 1$, para todo $s \in S$. Como tal menu possui um único maximizador de $U(s,.)$ para cada $s \in S$, sejam $p_s := arg\max_{p \in \overline{B(p^*,\delta)}} U(s,p)$ e $\epsilon := \frac{\min_{s \in S}\{U(s,p_s) - U(s,p_{s'}) : s \neq s'\}}{2}$ e considere o intervalo $[1-\epsilon, 1]$. Fixe um vetor $f \in [1-\epsilon, 1]^{|S|}$ qualquer. Defina, para cada $s \in S$, a loteria $p_s' := f(s) p_s + (1 - f(s)) p^*$ e seja o menu $A_f := \{p_s' \in \Delta(X) : s \in S\}$. É fácil ver que $\max_{p \in A_f} U(s,p) = f(s)$, $\forall s \in S$. $\square$

Pela Afirmação 3, temos que, para $f, g \in [1-\epsilon, 1]^{|S|}$,

$$\begin{aligned} \min_{\pi \in M} \sum_{s \in S} \pi(s) f(s) \geq \min_{\pi \in M} \sum_{s \in S} \pi(s) g(s) \quad &\Leftrightarrow \quad \min_{\pi \in M} \sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in A_f} U(s,p) \geq \min_{\pi \in M} \sum_{s \in S} \pi(s) \max_{p \in A_g} U(s,p) \\ &\Leftrightarrow \quad A_f \succsim A_g. \end{aligned}$$

Note que a Afirmação 3 e o raciocínio acima também são válidos para $\succsim^*$. Logo, conseguimos derivar duas representações Gilboa-Schmeidler, uma em $[1-\epsilon, 1]^{|S|}$ e outra em $[1-\epsilon, 1]^{|S^*|}$, recpectivamente, para $\succsim$ e $\succsim^*$. Agora, assuma que, para quaisquer menus A e B com $\max\limits_{p \in A} U(s,p) = \max\limits_{p \in B} U(s,p)$ para todo $s \in S \backslash S^*$ vale $A \succsim B \Leftrightarrow A \succsim^* B$, ou seja, $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Consistência Dinâmica, respectivamente, em $[1-\epsilon, 1]^{|S|}$ e $[1-\epsilon, 1]^{|S^*|}$. Argumentos usuais da literatura garantem que $S^* \subseteq S$ e M^*, o conjunto de medidas de probabilidade sobre S^*, é a atualização Bayesiana de M, o conjunto de medidas de probabilidade sobre S, após a observação de S^*.

Defina o seguinte conjunto:

$$\begin{aligned} \hat{M} := \quad &\{\pi : \exists \hat{\pi} \in M \text{ com } \pi(s) = \hat{\pi}(s),\ \forall s \in S \backslash S^*, \text{ e } \pi|_{S^*} \text{ é a atualização Bayesiana de} \\ &\quad \text{alguma medida de probabilidade } \pi' \in M \text{ após a observação de } S^*\}. \end{aligned}$$

É fácil ver que $\hat{M}$ é fechado, convexo e retangular com respeito a S^*. Fixe $f \in [1-\epsilon, 1]^{|S|}$ qualquer e seja $\delta^f_{S^*} := V_{S^*}(f)$ o ato constante indiferente a f em S^*. Por Consistência Dinâmica, temos que $f \sim \delta^f_{S^*} S^* f$, onde $\delta^f_{S^*} S^* f$ representa o ato h tal que $h(s) = \delta^f_{S^*}(s)$, para todo $s \in S^*$, e $h(s) = f(s)$, para todo $s \in S \backslash S^*$. Note que

$$\min_{\pi \in \hat{M}} \sum_{s \in S} \pi(s) f(s) = \min_{\pi \in \hat{M}} \left[\sum_{s \in S^*} \pi(s) \delta^f_{S^*} + \sum_{s \in S \backslash S^*} \pi(s) f(s) \right] = V\left(\delta^f_{S^*} S^* f\right) = V(f).$$

A unicidade do conjunto das medidas de probabilidade da representação de $\succsim$ nos dá que $\hat{M} = M$, uma vez que ambos os conjuntos são fechados e convexos. Com isso, concluímos que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sejam (S, M, U) e (T, M_T, U) duas representações min-max para uma mesma loteria p^* para $\succsim$ e $\succsim^*$, respectivamente, em que M é retangular e M_T é o conjunto das atualizações Bayesianas de M após a observação de T. Suponha que $A \in \mathcal{X}$ e $B \in int(\mathcal{X})$ sejam tais que $A \succ^* B$, mas $B \succsim A$. Por retangularidade de M, isso só pode acontecer se existir $s^* \in S \backslash T$ tal que $\max_{p \in B} U(s^*, p) > \max_{p \in A} U(s^*, p)$. Isto implica que existe menu C tal que, para todo $s \in T$,

$$\max_{p \in A \cup B \cup C} U(s,p) = \max_{p \in A \cup C} U(s,p), \text{ mas} \tag{B.1}$$

$$\max_{p \in A \cup B \cup C} U(s^*,p) > \max_{p \in A \cup C} U(s^*,p). \tag{B.2}$$

Para cada $s \in T$, defina q_s da seguinte maneira: se $max_{p\in A} U(s,p) \geq \max_{p\in B} U(s,p)$, defina q_s como qualquer loteria em $arg \max_{p\in A} U(s,p)$. Se $\max_{p\in B} U(s,p) > \max_{p\in A} U(s,p)$ e existe $q \in arg \max_{p\in B} U(s,p)$ com $U(s^*,q) < \max_{p\in B} U(s^*,p)$, então defina $q_s := q$. Resta o caso em que $\max_{p\in B} U(s,p) > \max_{p\in A} U(s,p)$ e $U(s^*,q) = \max_{p\in B} U(s^*,p)$, para todo $q \in arg \max_{p\in B} U(s,p)$. Note que $U(s,.)$ e $-U(s^*,.)$ não podem ser cardinalmente equivalentes, pois, se este fosse o caso, teríamos necessariamente $\max_{p\in B} U(s^*,p) < \max_{p\in A} U(s^*,p)$. Portanto, existem loterias p e p' tais que $U(s,p) = U\left(s,p'\right)$, mas $U(s^*,p) < U\left(s^*,p'\right)$. Fixe $q \in arg \max_{p\in B} U(s,p)$ e seja $\xi := q + p - p'$. Note que, para todo $\lambda \in (0,1)$, $U(s, \lambda q + (1-\lambda)\xi) = U(s,q)$, mas $U(s^*, \lambda q + (1-\lambda)\xi) < U(s^*,q) = \max_{p\in B} U(s^*,p)$. Como $B \in int(\mathcal{X})$, tem-se $\lambda q + (1-\lambda)\xi \in \Delta(X)$ para λ suficientemente grande. Neste caso, defina $q_s := \lambda q + (1-\lambda)\xi$ para algum $\lambda \in (0,1)$ tal que $\lambda q + (1-\lambda)\xi \in \Delta(X)$. Agora, defina $C := \{q_s : s \in T\}$. É claro que (B.1) e (B.2) são válidos para C. Portanto, para quaisquer $D \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in (0,1)$, temos que $\lambda(A \cup B \cup C) + (1-\lambda) D \sim^* \lambda(A \cup C) + (1-\lambda) D$ e, para $D = A \cup C$, tem-se que $\lambda(A \cup B \cup C) + (1-\lambda) D \succ \lambda(A \cup C) + (1-\lambda) D$. Isto é, $\succsim$ e $\succsim^*$ satisfazem Consistência em Flexibilidade III. $\square$

Referências

de Moura, F. S.; RIELLA, G. Preference for flexibility and dynamic consistency with incomplete preferences. *Manuscript*, Universidade de Brasília, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 11, 15 e 21.

DEKEL, E.; LIPMAN, B.; RUSTICHINI, A. Representing preferences with a unique subjective state space. *Econometrica*, v. 69, n. 4, p. 891–934, 2001. Citado na página 11.

DEKEL, E.; LIPMAN, B.; RUSTICHINI, A. Temptation-driven preferences. *Review of Economic Studies*, v. 76, n. 3, p. 937–971, 2009. Citado na página 11.

DEKEL, E. et al. Representing preferences with a unique subjective state space: A corrigendum. *Econometrica*, v. 75, n. 2, p. 591–600, 2007. Citado na página 11.

EPSTEIN, L.; MARINACCI, M.; SEO, K. Coarse contingencies and ambiguity. *Theoretical Economics*, v. 2, n. 4, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 5, 7, 11 e 21.

EPSTEIN, L.; SCHNEIDER, M. Recursive multiple-priors. *Journal of Economic Theory*, v. 113, n. 1, p. 1–31, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 19.

KOCHOV, A. Subjective states without the completeness axiom. *Manuscript*, University of Rochester, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 11, 14 e 23.

KREPS, D. A representation theorem for "preference for flexibility". *Econometrica*, v. 47, n. 3, p. 565–77, 1979. Citado na página 11.

RIELLA, G. Preference for flexibility and dynamic consistency. *Journal of Economic Theory*, v. 148, n. 6, p. 2467–2482, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 11, 14 e 21.