

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

**ESTIMATIVA DE VIDA À FADIGA MULTIAXIAL PELO  
MODELO DE JIANG A PARTIR DE HISTÓRIAS DE  
TENSÃO PRODUZIDAS PELO MODELO DE CHABOCHE  
PARA PLASTICIDADE CÍCLICA**

ALLINE CHRISTINE DINIZ ZANETTE

ORIENTADOR: EDGAR NOBUO MAMIYA

Brasília, junho de 2017.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

**ESTIMATIVA DE VIDA À FADIGA MULTIAXIAL PELO  
MODELO DE JIANG A PARTIR DE HISTÓRIAS DE  
TENSÃO PRODUZIDAS PELO MODELO DE CHABOCHE  
PARA PLASTICIDADE CÍCLICA**

**ALLINE CHRISTINE DINIZ ZANETTE**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:

---

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, Doutor.  
(ENM-UnB / Orientador)

---

Prof. Fabio Comes de Castro, Doutor.  
(ENM-UnB / Examinador Interno)

---

Prof. Francisco Evangelista Júnior, PhD.  
(ENC-UnB / Examinador Externo)

## **Resumo**

Este trabalho apresenta um estudo e verificação do modelo de Jiang para estimativa de vida à fadiga no contexto de carregamentos multiaxiais para o aço 1045. Este modelo incorpora conceitos de plano crítico e energia, dispensando a utilização de métodos de contagem de ciclos para estimar a falha por fadiga. Foi utilizado o modelo de Chaboche para plasticidade cíclica para gerar histórias de tensão usadas nas simulações efetuadas. As trajetórias foram do tipo uniaxial totalmente reversa, torção pura, proporcional e elíptica não proporcional. Foram discutidos aspectos específicos do modelo de Jiang, bem como de seus parâmetros e dos resultados obtidos, tendo ele se mostrado satisfatório para produzir estimativas de vida à fadiga.

## **Abstract**

This work presents an analysis of the fatigue life estimation model proposed by Jiang as well as its verification under multiaxial loads for 1045 Steel. The Jiang model incorporates both critical plane and energy concepts, hence no cycle counting is needed to estimate fatigue life. The Chaboche cyclic plasticity model was adopted in order to generate the required loading history used in the simulations, whilst the loading paths herein used were: completely reversed uniaxial, pure torsional, proportional and non-proportional elliptical. A satisfactory verification was obtained, with results and analyses of the model and its parameters being later discussed

# Sumário

1.Introdução .....	1
1.1. Principais modelos de fadiga multiaxial .....	3
1.2. Objetivos e organização da dissertação .....	7
2.Modelo de Jiang para estimativa de vida à fadiga .....	9
2.1. Descrição do modelo .....	9
2.2. Parâmetros do modelo .....	13
2.2.1. Limite de resistência $\sigma_0$ .....	13
2.2.2. Parâmetros $\bar{\omega}$ , $a$ , $m$ e $D_0$ .....	14
3.Modelo constitutivo de plasticidade cíclica .....	15
3.1. Definições preliminares .....	15
3.2. Modelos constitutivos .....	16
4 Metodologia .....	19
4.1. Caracterização do comportamento elastoplástico cíclico do material .....	19
4.2. Identificação dos parâmetros do modelo de Jiang .....	20
4.2.1. Parâmetros $\varepsilon_0$ e $\sigma_0$ .....	20
4.2.2. Parâmetro $\bar{\omega}$ .....	20
4.2.3. Parâmetros $a$ , $m$ e $D_0$ .....	22
4.3. Estimativa de vida à fadiga .....	23
5.Resultados .....	26
5.1. Identificação dos parâmetros do material .....	28
5.1.1. Parâmetros $n'$ e $H'$ .....	28
5.1.2. Parâmetros $\varepsilon_0$ e $\sigma_0$ .....	29
5.1.3. Parâmetro $\bar{\omega}$ .....	30
5.1.4. Parâmetro $a$ , $m$ e $D_0$ .....	31
5.2. Validação do modelo .....	33
5.2.1. Carregamento axial .....	33
5.2.2. Carregamento torcional .....	36
5.2.3. Carregamento proporcional .....	37
5.2.4. Carregamento não-proporcional .....	39
6.Discussão .....	42
6.1. Carregamento axial .....	42
6.2. Carregamento torcional .....	43
6.3. Carregamento proporcional .....	44
6.4. Carregamento não-proporcional .....	44
7.Conclusão .....	46
8.Trabalhos Futuros .....	46
Referências bibliográficas .....	49

# Lista de figuras

Figura 1.1: Esquema do início da formação de trincas.....	2
Figura 2.1. Relacionamento entre a direção da trinca e o valor de $a$ para carregamentos uniaxial e torcional.....	12
Figura 4.1: Comportamento de descarregamento e recarregamento da curva tensão-deformação.....	21
Figura 4.2: Fluxograma do algoritmo para cálculo da vida à fadiga.....	25
Figura 5.1: Trajetórias de carregamento (a) axial, (b) torcional, (c) proporcional e (d) não-proporcional elíptico.....	27
Figura 5.2: Curva $\varepsilon_a \times N_f$ obtida para o $\varepsilon_0$ que produziu o menor erro.....	30
Figura 5.3: Curva $\Delta W_{T-C}^p \times \Delta \sigma \Delta \varepsilon^p$ obtida a partir das integrais do sistema de equações (4.8) e dos dados da Tabela 5.1.....	31
Figura 5.4: Dano por ciclo vs. vida estimada.....	33
Figura 5.5: Gráfico das vidas estimadas vs. vidas observadas para o caso axial.....	35
Figura 5.6: Gráfico das vidas estimadas vs. vidas observadas para o caso de torção pura.....	37
Figura 5.7: Gráfico das vidas estimadas vs. vidas observadas para o caso de carregamento proporcional.....	39
Figura 5.8: Gráfico das vidas estimadas vs. vidas observadas para o caso de carregamento cíclico não-proporcional.....	41
Figura 6.1: Gráfico esquemático comparando as amplitudes de tensão simuladas (Chaboche) e experimentais .....	45

# Lista de tabelas

Tabela 2.1. Relacionamento entre $\Delta Y_{max}$ e $\Delta W^p$ e plano crítico para tensão-compressão e torção.....	12
Tabela 5.1: Fontes de dados utilizados neste estudo.....	26
Tabela 5.2: Dados de testes uniaxiais totalmente reversos.....	28
Tabela 5.3: Dados de testes em torção pura .....	32
Tabela 5.4: Dados originais e resultados obtidos a partir de simulações para o caso axial.....	34
Tabela 5.5: Dados originais e resultados obtidos a partir de simulações para o caso de torção pura. ....	36
Tabela 5.6: Dados originais e resultados obtidos a partir de simulações para o caso proporcional .....	38
Tabela 5.7: Dados originais e resultados obtidos a partir de simulações para o caso elíptico não-proporcional.....	40
Tabela 6.1: Dados comparativos entre as amplitudes de tensão experimentais e as simuladas.....	45

## Lista de símbolos

$a$	Constante do material relacionada ao comportamento da trinca
$A$	Tensor de encruamento cinemático
$\dot{A}$	Taxa de evolução do tensor de encruamento cinemático
$c$	Constante do modelo constitutivo de Armstrong & Frederick
$D$	Dano à fadiga
$D_0$	Constante de dano à fadiga
$H$	Módulo de endurecimento cinemático
$H', n'$	Parâmetros da curva de Ramberg-Osgood
$E$	Módulo de elasticidade
$e$	Erro obtido na regressão realizada
$e^e$	Tensor deformação elástica desviadora
$FP_{BM}$	Parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Brown & Miller
$FP_{CCB}$	Parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Chu, Conle & Bonnen
$FP_E$	Parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Ellyin
$FP_{FS}$	Parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Fatemi & Socie
$FP_G$	Parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Garud
$FP_{GWP}$	Parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Glinka, Wang & Plumtree
$FP_L$	Parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Liu
$FP_{SWT}$	Parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Smith, Watson & Topper
$G, \lambda$	Constantes de Lamé
$I$	Tensor identidade
$k$	Constante que reflete a sensibilidade do material à tensão normal no modelo de Fatemi & Socie
$m$	Constante do modelo de Jiang
$n$	Expoente de endurecimento em deformação
$N_{f0}$	Número de ciclos para falha
$N_{f_{exp}}$	Número experimental de ciclos para falha
$N_{f_{t-c}}$	Número de ciclos para falha em tração-compressão totalmente reversa

$N_{f\ tor}$	Número de ciclos para falha em torção pura
$S$	Constante que reflete a sensibilidade do material à tensão normal no modelo de Brown & Miller
$\mathbf{S}$	Tensor tensão desviadora
$t$	Instante de tempo
$v$	Constante de fadiga
$Y$	Densidade de energia de deformação plástica
$\alpha$	Tensão cinemática
$\alpha_{i0}$	Elemento escalonado da matriz $\mathbf{A}$ na posição $i$
$\gamma_a$	Amplitude de deformação cisalhante
$\gamma^p$	Deformação plástica cisalhante
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
$\Delta D$	Dano à fadiga em um ciclo
$\Delta Y_{max}$	Densidade de energia de deformação plástica no plano crítico
$\Delta W^t$	Densidade de energia de deformação total
$\Delta W_{t-c}^p$	Densidade de energia de deformação plástica acumulada por ciclo em tração-compressão
$\Delta W_{tor}^p$	Densidade de energia de deformação plástica acumulada por ciclo em torção pura
$\Delta \gamma_{max}$	Maior faixa de deformação cisalhante
$\Delta \varepsilon_1$	Faixa de deformação principal
$\Delta \varepsilon_n$	Faixa de deformação normal no plano onde $\Delta \gamma_{max}$ ocorre
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor deformação
$\varepsilon_a$	Amplitude de deformação
$\varepsilon_a^p$	Amplitude de deformação plástica
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tensor deformação elástica
$\varepsilon_{max}$	Deformação máxima em um ciclo
$\varepsilon_{min}$	Deformação mínima em um ciclo
$\varepsilon_0$	Amplitude de deformação plástica abaixo da qual não ocorre falha por fadiga
$\varepsilon_0^p$	Deformação plástica inicial
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tensor deformação plástica
$\varepsilon^p$	Deformação plástica



$\dot{\varepsilon}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica
$\theta, \varphi$	Ângulos de Euler que definem a orientação do plano material
$\mu$	Fator ponderador no modelo de Garud
$\xi, \zeta$	Constantes do material que dependem de $a$
$\bar{\rho}$	Constante que descreve a severidade do tipo de carregamento no modelo de Ellyin
$\sigma$	Tensão normal em um plano material
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de Cauchy
$\sigma_a$	Amplitude de tensão
$\sigma_{a \text{ exp}}$	Amplitude de tensão observada experimentalmente
$\sigma_{a \text{ sim}}$	Amplitude de tensão simulada usando o modelo de Chaboche
$\sigma_f$	Tensão de ruptura
$\sigma_{max}$	Tensão máxima em um ciclo
$\sigma_{max,n}$	Tensão máxima no plano de deformação principal no modelo de Smith, Watson & Topper
$\sigma_{min}$	Tensão mínima em um ciclo
$\sigma_{mr}$	Tensão de memória, no modelo de Jiang
$\sigma_{n,max}$	Tensão normal no plano de cisalhamento máximo
$\sigma_0$	Limite de resistência à fadiga
$\sigma_y$	Tensão de escoamento
$\tau$	Tensão cisalhante em um plano material
$\tau_{a \text{ exp}}$	Amplitude de tensão cisalhante observada experimentalmente
$\tau_{a \text{ sim}}$	Amplitude de tensão cisalhante simulada usando o modelo de Chaboche
$\tau_{max0}$	Tensão cisalhante máxima em um ciclo

# Capítulo 1

## Introdução

A fadiga é uma falha que ocorre em estruturas sob tensões variáveis no tempo, onde é possível a ocorrência da falha do componente em nível de tensão bem inferior ao de uma carga estática. Neste caso, a tensão cíclica causa uma mudança gradual na habilidade do material resistir a tensões (Dowling, 2007).

O estudo do fenômeno de fadiga é de suma importância, já que grande parte de todas falhas metálicas são desta natureza, ocorrendo também em polímeros e compósitos. As falhas por fadiga podem ser estudadas como um problema local, progressivo e cumulativo (Castro & Meggiolaro, 2009).

Tipicamente, divide-se o estudo da fadiga em duas etapas: a iniciação (ou nucleação) e a propagação da trinca. A distinção entre as duas etapas não é uma tarefa fácil, ocorrendo divergências na literatura (Navarro et al. 2003; Fadag et al., 2008).

A iniciação da trinca depende de vários fatores, principalmente das amplitudes de tensões máximas e mínimas de serviço e, eventualmente, de suas deformações plásticas correspondentes (Castro & Meggiolaro, 2009). As trincas surgem pelo acúmulo de discordâncias que se agrupam nas chamadas bandas de deslizamento persistentes. Estas, por sua vez, são responsáveis pelas extrusões e intrusões superficiais onde as microtrincas são originadas. A Figura 1.1 ilustra o fenômeno descrito.

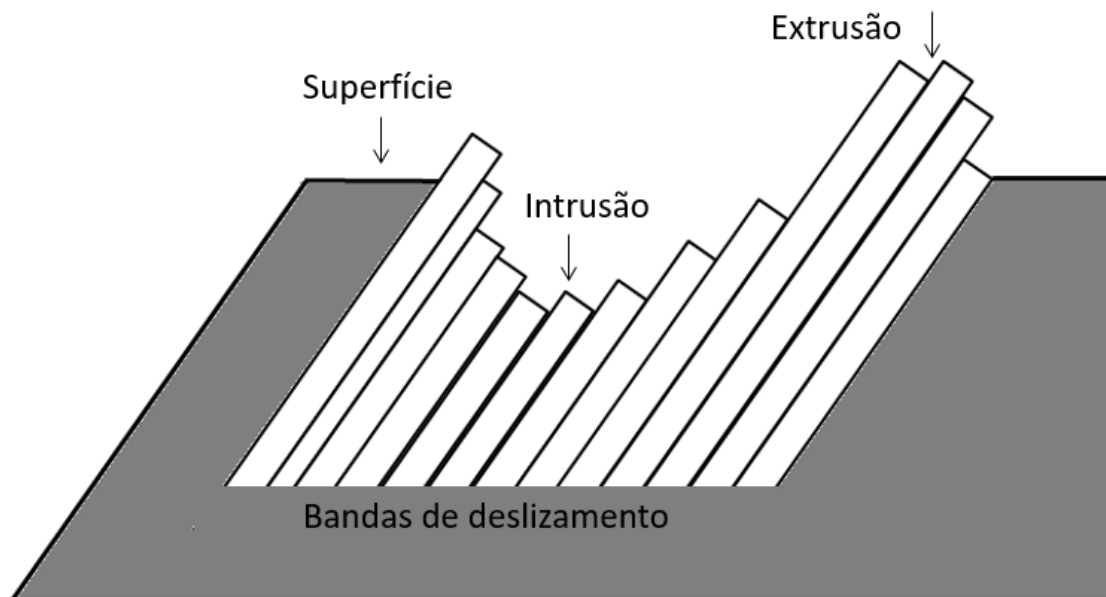


Figura 1.1: Esquema do início da formação de trincas

Fonte: Adaptado de Castro & Meggiolaro (2009)

Embora a propagação da trinca se dê de forma progressiva e estável (Castro & Meggiolaro, 2009), a fratura final pode ocorrer de forma brusca. Por se tratar de um fenômeno local, a falha pode ocorrer em um ponto específico de um componente mecânico, tornando a falha inesperada e catastrófica.

As falhas por fadiga iniciam-se no ponto mais solicitado da peça, comumente devido a um concentrador de tensão, como, por exemplo, um entalhe. Quanto menor for a amplitude das tensões cíclicas atuantes, um número maior de ciclos será necessário para a iniciação da trinca. Abaixo de uma determinada amplitude, pode-se considerar que ela sequer ocorrerá.

As cargas de serviço em dada peça podem induzir fletores, torçores, normais o cortantes que, de forma conjunta, produzam tensões bi ou tri-axiais variáveis nos pontos críticos da peça. Se ocorre iniciação ou propagação de trinca nessa situação, diz-se que a fadiga é multiaxial.

Até o início dos anos 70, a quantidade de pesquisas em fadiga multiaxial não era tão expressiva, sobretudo devido ao fato de haver dificuldades para a geração de dados experimentais. Com o passar do tempo, estudos foram efetuados nos âmbitos experimental e teórico, ocorrendo a criação e modificação de teorias. Em 1989, o Comitê de Projeto e Avaliação à Fadiga da SAE publicou os resultados de um programa coordenado de pesquisas em fadiga multiaxial, liderado pelo professor Dale Galliard

(SAE, 1989). Mesmo com o aumento progressivo das pesquisas em fadiga multiaxial, ainda não existe um consenso sobre qual é a melhor teoria desenvolvida até hoje (Bannantine et al., 1989).

## **1.1. Principais modelos de fadiga multiaxial**

As teorias em fadiga multiaxial podem ser classificadas em abordagens baseadas em tensão, em deformação e em energia. Uma compilação dos modelos mais importantes, até o início do presente século, pode ser encontrada em Socie & Marquis (2000).

Os modelos baseados em tensão são limitados ao regime de fadiga de alto ciclo, onde deformações plásticas macroscópicas podem ser desconsideradas. Essa abordagem é a mais usada, visto que ela é aplicável para a maior parte dos componentes que devem operar próximos ou abaixo do limite de resistência à fadiga (Socie & Marquis, 2000). Além disso, esses modelos apresentam algumas vantagens, tais quais, o fato de funcionarem bem para análise de vida infinita com amplitude de carregamento constante, a existência de grande quantidade de dados disponíveis para diversos materiais e a facilidade para fazer cálculos de projetos de componentes. Como pontos desfavoráveis, observa-se que os modelos permitem apenas o projeto de componentes sob vida infinita, não havendo também distinção entre os conceitos de nucleação e propagação de trincas. Como exemplos de modelos baseados em tensão, podem ser citados o de Findley (1959), o de McDiamird (1994) e o de Dang Van (1999).

Os modelos baseados em deformação abrangem tanto a fadiga de alto ciclo quanto a de baixo ciclo. Apesar disso, os modelos baseados em deformação estão geralmente associados a casos de fadiga de baixo ciclo onde deformações plásticas são mensuráveis (Socie & Marquis, 2000; Stephens et al., 2001). Como exemplos de modelos baseados em deformação, tem-se o de Smith, Watson & Topper (1970), Brown & Miller (1973) e Fatemi & Socie (1988). Geralmente, esses modelos trabalham com o conceito de plano crítico, se propondo a caracterizar a natureza física dos danos devido à fadiga. Esse conceito já era usado por Findley em seus trabalhos desde 1953 e visa melhorar a previsão de vida à fadiga em situações multiaxiais e de carregamento não-proporcional. A abordagem de plano crítico evoluiu a partir de observações experimentais da nucleação e propagação de trincas durante carregamentos. Os planos onde as trincas ocorrem são conhecidos como planos críticos. (Socie & Marquis, 2000; Stephens et al., 2001). Tem-

se então que os modelos de sucesso devem ser capazes de prever a vida à fadiga e os planos dominantes de falha (Socie & Marquis, 2000) . Como vantagem, esses modelos permitem não só estimar a vida à fadiga, mas também determinar a orientação da trinca nucleada ou plano de falha (Stephens et al., 2001).

De acordo com Brown & Miller (1973), algumas teorias de fadiga multiaxial estavam limitadas a casos de carregamento com forma de ondas simples, como a da função seno. Foi utilizado então em seu modelo o estado plano de tensão onde deformações cisalhantes máximas ocorrem, sendo proposto que as deformações cisalhantes cíclica e normal fossem consideradas na estimativa de vida à fadiga, como representado por:

$$FP_{BM} = \Delta\gamma_{max} + S\Delta\varepsilon_n \quad (1.1)$$

onde  $FP_{BM}$  é o parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Brown & Miller,  $\Delta\gamma_{max}$  é a maior faixa de deformação cisalhante,  $S$  é uma constante do material e  $\Delta\varepsilon_n$  é a faixa de deformação normal no plano onde  $\Delta\gamma_{max}$  ocorre.

O modelo de Fatemi & Socie (1988) foi construído como uma adaptação do modelo de Brown & Miller, para ser capaz de lidar com os efeitos do encruamento cíclico extra observado nos materiais em casos de carregamentos não-proporcionais fora de fase. Experimentos realizados mostraram que, além da deformação cisalhante máxima ( $\Delta\gamma_{max}$ ) a tensão normal no plano de cisalhamento máximo ( $\sigma_{n,max}$ ) também estava envolvida no processo de fadiga, da seguinte forma:

$$FP_{FS} = \Delta\gamma_{max} \left( 1 + k \frac{\sigma_{n,max}}{\sigma_y} \right) \quad (1.2)$$

onde  $FP_{FS}$  é o parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Fatemi & Socie,  $k$  reflete a sensibilidade do material à tensão normal e  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento.

O modelo desenvolvido por Smith, Watson & Topper (1970), se fez necessário para casos onde o material falha predominantemente por crescimento de trincas em planos de máxima tensão ou deformação normais, ou seja, trincas que abrem pelo modo I (Socie & Marquis, 2000; Meggiolaro et al., 2009). Ele foi generalizado para a fadiga multiaxial com base no conceito de plano crítico por Bannantine & Socie (1989). Como o parâmetro de dano à fadiga é uma função dependente da vida em ciclos tem-se que:

$$FP_{SWT} = \sigma_{max,n} \Delta \varepsilon_1 \quad (1.3)$$

onde  $FP_{SWT}$  é o parâmetro de dano à fadiga para o modelo de Smith, Watson & Topper – SWT -,  $\sigma_{max,n}$  é a tensão máxima no plano principal de deformação normal e  $\Delta \varepsilon_1$  é a faixa de deformação principal.

Considerando os três modelos apresentados até agora, o de Fatemi & Socie e o SWT são os mais aceitos na comunidade acadêmica, pois conseguem descrever os efeitos do encruamento não-proporcional.

Após ter sido estabelecida uma conexão entre energia dissipada no ciclo de histerese e comportamento à fadiga por Inglis (1927), muitos estudos foram realizados no âmbito dos modelos de energia. Foi constatado ainda que um parâmetro de dano baseado em energia pode unificar os danos causados por diferentes tipos de carregamento, como térmico, cíclico e fadiga (Fatemi & Yang, 1998; Petas et al., 2013), sendo incorporados os efeitos de tensões e deformações no parâmetro.

Diversas quantidades foram propostas para a fadiga multiaxial, tais quais, trabalho plástico por ciclo, densidade de energia de deformação total por ciclo, dentre outros. Como vantagem, tem-se que os modelos baseados em energia podem ser usados em carregamentos não-proporcionais. Como desvantagem, eles não são capazes de refletir a nucleação e crescimento de trincas observados em planos específicos (Stephens et al., 2001). Houve também a correlação entre a vida sob fadiga de alto e baixo ciclo com a energia de deformação plástica armazenada no material durante um ciclo de carregamento, dada pela área de um ciclo de histerese ou de parte dele. À medida que a faixa de deformação diminui, o intervalo do componente de deformação plástica tende para zero e a energia de deformação plástica correspondente também. Nesse caso, fica claro que a energia de deformação elástica controla a vida à fadiga (Kujawski, 1989).

Dentre os critérios de falha baseados na energia de deformação, pode-se listar o de Morrow (1965), Haldford (1966), Garud (1981) e Ellyin (1989) (apud Fatemi & Yang, 1998; McDowell & Ellis, 1993; Mitchell & Buck, 1994).

Morrow (1965) foi pioneiro em investigar as formas dos ciclos de histerese e como os ciclos de trabalhos plásticos estáveis atuavam na vida à fadiga. Garud (1981) sugeriu aplicar os resultados de Morrow na fadiga multiaxial. O modelo de Garud tem a vantagem

de necessitar somente de testes uniaxiais para gerar dados, pois nenhum parâmetro adicional do material precisa ser usado. O parâmetro de dano à fadiga é dado por:

$$FP_G = \Delta\varepsilon\Delta\sigma + \mu\Delta\gamma\Delta\tau \quad (1.4)$$

onde  $\mu$  é um fator ponderador.

Observa-se no modelo de Garud (1981) que a energia de deformação não permite a observação dos planos onde as trincas se iniciam e se propagam. Além disso, o modelo desenvolvido é difícil de aplicar para fadiga de alto ciclo, pois o trabalho plástico por ciclo é muito pequeno e requer que a energia em torção e em tensão sejam calculadas de forma diferente (Socie & Marquis, 2000).

No modelo de Ellyin (1989), que é baseado na densidade de energia de deformação total, a consideração da energia de deformação elástica positiva permite a introdução dos efeitos das tensões médias no modelo, o que evita problemas relacionados com o cálculo de deformações plásticas que sejam baixas (Socie & Marquis, 2000; You & Lee, 1996). Entretanto, o modelo de Ellyin não incorpora o efeito da trajetória de carregamento nem a interação entre componentes de tensão e deformação fora de fase, similarmente ao modelo de Garud (You & Lee, 1996). O parâmetro de dano à fadiga é dado por:

$$FP_E = \frac{\Delta W^t}{\bar{\rho}} \quad (1.5)$$

onde  $FP_E$  é o parâmetro de dano para o modelo de Ellyin,  $\Delta W^t$  é a densidade de energia de deformação total e  $\bar{\rho}$  descreve a severidade do tipo de carregamento.

Entre os critérios de falha baseados simultaneamente na energia de deformação e no conceito de plano crítico, pode-se destacar os modelos de Liu (1993), de Chu et al. (1993) e de Glinka et al. (1995). A ideia geral é que os parâmetros de dano são escritos em termos de tensões e deformações no plano da trinca.

O modelo de Liu (1993) é uma evolução do modelo SWT, sendo baseado na energia de deformação virtual (VSE). Ele incorpora fatores plásticos e elásticos para solucionar uma limitação supracitada do modelo de Garud, não estando restritos a casos de fadiga de baixo ciclo (Socie & Marquis, 2000). Para o caso de materiais que falham sob tensão tratativa, o parâmetro de dano à fadiga é dado por:

$$FP_L = (\Delta\sigma_n\Delta\varepsilon_n)_{max} + (\Delta\tau\Delta\gamma) \quad (1.6)$$

Para os que falham predominantemente por cisalhamento, o parâmetro de dano à fadiga é dado por:

$$FP_L = (\Delta\sigma_n\Delta\varepsilon_n) + (\Delta\tau\Delta\gamma)_{max} \quad (1.7)$$

onde  $(x)_{max}$  se refere ao plano de máximo trabalho, seja ele axial ou torcional.

No modelo de Chu, Conle & Bonnen (1993), são incluídos os efeitos da tensão média, havendo também uma tentativa de considerar simultaneamente a contribuição tensões e deformações tensoriais e cisalhantes. O modelo é dado por:

$$FP_{CCB} = (\tau_{max}\Delta\gamma) + (\sigma_{max}\Delta\varepsilon_n) \quad (1.8)$$

onde  $FP_{CCB}$  é o parâmetro de dano à fadiga de Chu, Conle & Bonnen.

Glinka, Wang & Plumtree (1995) sugeriram que o modelo de Chu não incorporava os efeitos da tensão média estática no caso de carregamentos não proporcionais, quando a amplitude de deformação normal é nula. Logo, sugeriram um modelo utilizando a soma das densidades de energia elástica e plástica no plano crítico, considerando efeitos das tensões médias tensoriais e cisalhantes (Glinka et al., 1995):

$$FP_{GWP} = (\Delta\tau\Delta\gamma)g(\tau_{max}, \sigma_{max}) \quad (1.9)$$

Um modelo mais recente que envolve conceitos de plano crítico e de energia foi estudado neste trabalho, a saber, o modelo de Jiang (2000). Suas características e equações serão apresentadas de forma mais detalhada no Capítulo 2.

## 1.2. Objetivos e organização da dissertação

O presente estudo tem como objetivo estudar e validar o modelo proposto por Jiang (2000) para estimativa de vida à fadiga no contexto de carregamentos multiaxiais. Este é uma evolução dos modelos apresentados anteriormente, incorporando conceitos de plano crítico e de energia.

Para as simulações, foram utilizadas histórias de carregamento geradas pelo modelo de Chaboche para plasticidade cíclica, quais sejam: uniaxial totalmente reversa, torção pura, proporcional e não-proporcional elíptica. As referidas simulações foram implementadas



em Python, para cada plano material. O material em estudo foi o aço 1045. Foram discutidos aspectos específicos do modelo e dos resultados obtidos.

O presente texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 é apresentado o modelo de Jiang para estimativa de vida à fadiga; no Capítulo 3 é discutido o modelo constitutivo de plasticidade cíclica utilizado para gerar as histórias de carregamento a serem estudadas; no Capítulo 4 é descrita a metodologia utilizada; no Capítulo 5 foram calculados os parâmetros do material e foram apresentados os resultados das simulações; no Capítulo 6 são discutidos os resultados obtidos e no Capítulo 7 são registradas as conclusões do trabalho.

## Capítulo 2

# Modelo de Jiang para estimativa de vida à fadiga

### 2.1. Descrição do modelo

O modelo de Jiang (2000) foi desenvolvido para solucionar lacunas inerentes aos critérios de fadiga já existentes. Dentre essas lacunas, destaca-se o fato de que muitos dos modelos mais aceitos pela comunidade acadêmica são baseados no conceito de ciclo de carregamento. Dessa forma, um método de contagem de ciclo é necessário, o que é evitado por Jiang. Além disso, sem um modelo a parte, os critérios de estimativa de vida à fadiga não conseguem levar em consideração os efeitos da sequência de carregamentos. Adicionalmente, alguns modelos não conseguem incorporar diferentes modos de iniciação de trincas.

O modelo é apresentado de forma incremental, incorporando conceitos de plano crítico, de energia e de acumulação de dano. Tem-se que:

$$dD = \langle \sigma_{mr} - \sigma_0 \rangle^m \left( 1 + \frac{\sigma}{\sigma_f} \right) dY \quad (2.1)$$

$$dY = a\sigma d\varepsilon^p + \frac{1-a}{2} \tau d\gamma^p \quad (2.2)$$

onde  $dD$  é o incremento do dano acumulado,  $\sigma$  é a tensão normal e  $\tau$  é a tensão cisalhante em um plano material, com os respectivos incrementos de deformações plásticas  $d\varepsilon^p$  e  $d\gamma^p$ . Os símbolos  $a$  e  $m$  são constantes do material. O símbolo  $\langle \ \rangle$  é o colchete de Macaulay, onde  $\langle x \rangle = 0,5(x + |x|)$  e  $\sigma_f$  é a tensão de ruptura do material. A quantidade  $\sigma_{mr}$  é o parâmetro de memória do material,  $Y$  é a densidade de energia de deformação plástica acumulada em um plano material e  $D$  é o dano à fadiga. O símbolo  $\sigma_0$  é o limite de resistência à fadiga do material. Reforça-se a observação que neste modelo não é necessário o conceito de ciclo. Destaca-se que ocorre falha do material quando o dano atinge um valor crítico, dado por  $D_0$ , que é uma constante representativa do acúmulo de dano.

No presente estudo, serão consideradas apenas histórias de carregamento periódicas. Neste contexto, o efeito de memória do modelo de Jiang não se manifesta e, para efeitos práticos,  $\sigma_{mr}$  equivale à tensão máxima de Mises, onde

$$\sigma_{mr} = \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} \quad (2.3)$$

Dessa forma,  $\sigma_{mr} = \max(\sigma_{eq})$ , Para o caso de tração-compressão totalmente reverso  $\sigma_{mr} = \sigma_{max} = \Delta\sigma_x/2$ , onde  $\sigma_{max}$  é a tensão máxima em um ciclo. Para torção pura,  $\sigma_{mr} = \sqrt{3}\tau_{max} = \sqrt{3}\Delta\tau_{xy}/2$ , onde  $\tau_{max}$  é o valor máximo da tensão cisalhante em um ciclo.

O termo  $\langle \sigma_{mr} - \sigma_0 \rangle^m$  é responsável pelo efeito da sequência de carregamento, visto que incorpora a tensão de memória. A superfície de memória é introduzida no modelo com um propósito similar ao usado em plasticidade, ou seja, para contabilizar a resposta de tensão-deformação transiente. O termo  $\left(1 + \frac{\sigma}{\sigma_f}\right)$  garante os efeitos da tensão média, representado pela tensão normal. Logo, pode-se concluir que a causa principal do dano é devida a  $Y$ .

Em situações envolvendo carregamentos cíclicos, o cálculo da vida à fadiga em número de ciclos pode ser expresso por:

$$\Delta DN_f = D_0 \quad (2.4)$$

onde  $\Delta D$  é o dano à fadiga em um ciclo e  $N_f$  é o número de ciclos até a falha.

Integrando as Equações (2.1) e (2.2) para um ciclo de carregamento, tem-se que:

$$\Delta D = \langle \sigma_{mr} - \sigma_0 \rangle^m \Delta Y \quad (2.5)$$

$$\Delta Y = \oint a \sigma d\varepsilon^p + \frac{1-a}{2} \tau d\gamma^p \quad (2.6)$$

Para casos de amplitude constante, o plano crítico é determinado por  $\Delta Y$ , visto que  $\langle \sigma_{mr} - \sigma_0 \rangle^m$  não depende da orientação do plano material.

No caso de tração-compressão totalmente reverso, a integral das equações fornece:

$$\Delta Y = \frac{(3 - 4a)\sin^2 2\theta + 8a\cos^2 \theta}{8} \Delta W_{t-c}^p \quad (2.7)$$

$$\Delta W_{t-c}^p = \oint \sigma_x d\varepsilon_x^p \quad (2.8)$$

onde  $\Delta W_{t-c}^p$  é a densidade de energia de deformação plástica acumulada por ciclo em tração-compressão,  $\sigma_x$  e  $d\varepsilon_x^p$  são a tensão axial e a deformação plástica respectivamente e  $\theta$  é o ângulo formado pela direção normal ao plano material e a direção da tensão axial.

No caso de torção pura, tem-se

$$\Delta Y = \frac{1 + (1 - 2a)\cos 4\theta}{4} \Delta W_{tor}^p \quad (2.9)$$

$$\Delta W_{tor}^p = \oint \tau_{xy} d\gamma_{xy}^p \quad (2.10)$$

onde  $\Delta W_{tor}^p$  é a densidade de energia de deformação plástica acumulada por ciclo em torção pura,  $\tau_{xy}$  e  $d\gamma_{xy}^p$  são a tensão cisalhante e a deformação cisalhante plástica respectivamente.

A relação entre o valor de  $\Delta Y$  no plano crítico,  $\Delta Y_{max}$ , e  $\Delta W^p$  é resumido na Tabela 2.1, bem como o plano crítico de acordo com a constante  $a$  e o carregamento considerado. O parâmetro  $a$  está relacionado com o plano crítico e, portanto, com a orientação da nucleação da trinca. Valores baixos de  $a$  estão associados a nucleação de trincas por cisalhamento e valores maiores estão associados à nucleação no modo I.

Tabela 2.1. Relacionamento entre  $\Delta Y_{max}$  e  $\Delta W^p$  e plano crítico para tensão-compressão e torção  
 Fonte: Jiang (2000)

A	Tração-compressão	Torção
$a \leq 0,375$	$\Delta Y_{max} = \frac{(4a - 3)^2}{24(1 - 2a)} \Delta W_{t-c}^p$ $\theta = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{2a}{3(1 - 2a)}$	$\Delta Y_{max} = \frac{1 - a}{2} \Delta W_{tor}^p$ $\theta = 0^\circ \text{ ou } 90^\circ$
$0,375 < a \leq 0,5$	$\Delta Y_{max} = a \Delta W_{t-c}^p$ $\theta = 0^\circ$	$\Delta Y_{max} = \frac{1 - a}{2} \Delta W_{tor}^p$ $\theta = 0^\circ \text{ ou } 90^\circ$
$a > 0,5$	$\Delta Y_{max} = a \Delta W_{t-c}^p$ $\theta = 0^\circ$	$\Delta Y_{max} = \frac{a}{2} \Delta W_{tor}^p$ $\theta = 45^\circ \text{ ou } -45^\circ$

A Figura 2.1 mostra a relação entre a escolha da constante  $a$  e o comportamento da trinca para os casos de tração-compressão e torção.

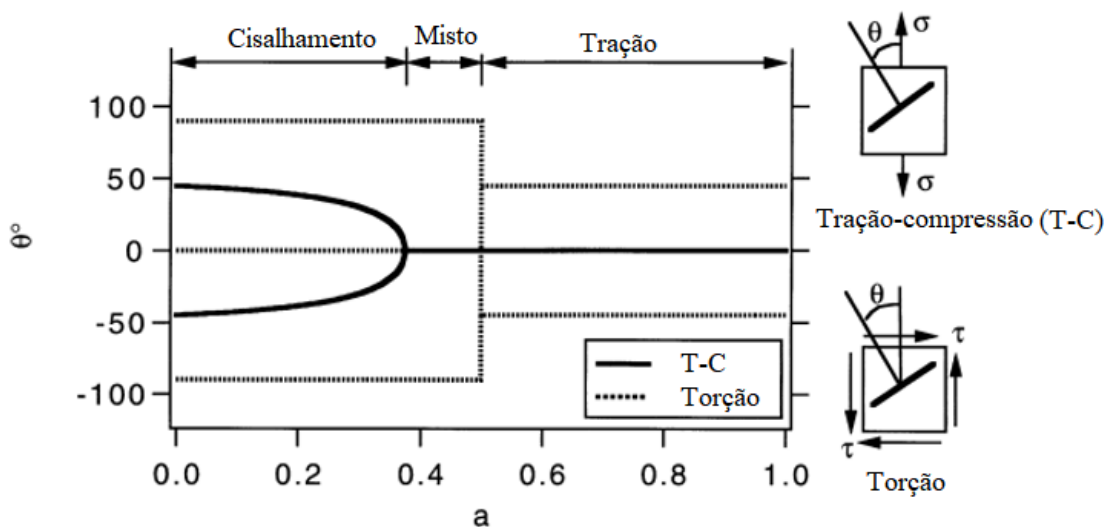


Figura 2.1. Relacionamento entre a direção da trinca e o valor de  $a$  para carregamentos uniaxial e torcional

Fonte: Adaptado de Jiang (2000)

Observa-se, a partir da Tabela 2.1 e Figura 2.1, que  $a \leq 0,375$  corresponde a trincas nucleadas por cisalhamento,  $a > 0,5$  corresponde a trincas por tração e  $0,375 < a \leq 0,5$  corresponde a modo misto de abertura de trinca. A determinação de  $a$  é facilitada pela observação experimental da trinca, bem como de seu direcionamento. Observa-se na parte

parabólica de tração-compressão que, até um valor de  $a$  próximo a 0,3, a trinca ocorre essencialmente devido ao cisalhamento, mas em seguida evolui para abertura em modo I. Em carregamentos combinados, a trinca se abre por esforços cisalhantes entre as curvas de tração-compressão e torção; quando  $a$  assume um valor entre 0,3, aproximadamente, e 0,5, a abertura é mista, evoluindo para modo I.

## 2.2. Parâmetros do modelo

O modelo em estudo depende de seis parâmetros do material, quais sejam:  $\sigma_f$ ,  $\sigma_0$ ,  $m$ ,  $a$  e  $D_0$ . A tensão de ruptura  $\sigma_f$  é uma propriedade estática do material, determinada por um experimento de tração monotônica. Logo, essa constante geralmente está disponível em literatura sobre o tema (Jiang, 2000). As outras constantes, como descrito nos itens a seguir, são determinadas por dados experimentais de testes simples em fadiga.

### 2.2.1. Limite de resistência $\sigma_0$

O limite de resistência  $\sigma_0$  pode ser determinado por testes de tração-compressão totalmente reversos. Jiang propõe um modelo para a curva deformação-vida baseado em três parâmetros:

$$\left(\frac{\Delta\varepsilon}{2} - \varepsilon_0\right)^v N_f = C \quad (2.11)$$

onde  $\frac{\Delta\varepsilon}{2}$  é a amplitude de deformação normal,  $N_f$  é o número de ciclos para falha e as demais constantes são relacionadas ao material, podendo ser obtidas a partir do melhor ajuste dos dados de deformação-vida. Dessa forma,  $\varepsilon_0$  é visto como o limite de resistência à fadiga em termos da amplitude de deformação, abaixo do qual o dano por fadiga é mínimo. O limite de resistência  $\sigma_0$  é a amplitude de tensão correspondente a  $\varepsilon_0$  na curva cíclica de tensão-deformação, dada por:

$$\varepsilon_{ai} = \frac{\sigma_{ai}}{E} + \left(\frac{\sigma_{ai}}{H'}\right)^{1/n'} \quad (2.12)$$

onde  $H'$  e  $n'$  são parâmetros da relação de Ramberg-Osgood.

### 2.2.2. Parâmetros $\bar{\omega}$ , $a$ , $m$ e $D_0$

De acordo com Jiang (2000), resultados experimentais mostram que existe uma relação linear entre  $\Delta W_p$  e o produto entre o intervalo de tensão e o intervalo de deformação plástica para condições de carregamento simples. Para o caso de tração-compressão, tem-se que:

$$\Delta W_{t-c}^p = \bar{\omega} \Delta \sigma_x \Delta \varepsilon_x^p \quad (2.13)$$

Para torção:

$$\Delta W_{tor}^p = \bar{\omega} \Delta \tau_{xy} \Delta \gamma_{xy}^p \quad (2.14)$$

onde  $\Delta \sigma_x$  e  $\Delta \varepsilon_x^p$  são a faixa de tensão e a faixa de deformação plástica, respectivamente, para tração-compressão. Para o caso torcional,  $\Delta \tau_{xy}$  e  $\Delta \gamma_{xy}^p$  representam, respectivamente, a faixa de tensão e a faixa de deformação plástica.  $\bar{\omega}$  é uma constante relacionada ao material. Dessa forma, a densidade de energia de deformação plástica por ciclo pode ser obtida por integração dos ciclos de histerese cíclicos de tensão-deformação. É interessante observar que a constante  $\bar{\omega}$  é a mesma nas Equações (2.13) e (2.14), referentes ao trabalho plástico acumulado por ciclo.

Para determinar os parâmetros  $a$ ,  $m$  e  $D_0$ , é necessário construir um gráfico de  $\Delta D$  vs.  $N_f$  a partir dos dados experimentais em tração-compressão e torção. Ajustando os valores de  $m$  e  $a$ , os dados de tensão-compressão e os de torção se sobrepõem e a Equação (3.4) pode ser usada para descrever a relação experimental. Utilizando-se ferramentas computacionais, é possível obter as constantes desejadas. Para o caso do aço 1045, Jiang encontrou  $m = 1,5$ ;  $a = 0,32$ ; e  $D_0 = 1,5 \times 10^7$ ,

# Capítulo 3

## Modelo constitutivo de plasticidade cíclica

Neste Capítulo são estabelecidas inicialmente algumas definições preliminares para a implementação do modelo constitutivo de plasticidade cíclica. Na seção subsequente são discutidos alguns modelos disponíveis na literatura para representação do comportamento elastoplástico cíclico.

### 3.1. Definições preliminares

No regime de pequenas deformações, o tensor deformação total  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pode ser decomposto de forma aditiva em um tensor deformação elástica,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ , e em um tensor deformação plástica,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.1)$$

Considerando-se isotropia no comportamento elástico do material, pode-se estabelecer uma relação entre o tensor tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  e o tensor deformação elástica, dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.2)$$

onde  $\lambda$  e  $G$  são as constantes de Lamé. Estas se relacionam com o módulo de elasticidade  $E$  e com o coeficiente de Poisson por meio das seguintes relações:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.3)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.4)$$

O comportamento elástico em termos do tensor tensão desviadora  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \quad (3.5)$$

e do tensor deformação elástica desviadora:

$$\mathbf{e}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} \quad (3.6)$$

é dado por:



$$\mathbf{S} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) = 2G\mathbf{e}^e \quad (3.7)$$

Nas teorias de comportamento elastoplástico, o estado de tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  está contido no interior ou no contorno do domínio elástico, caracterizado pelo seguinte tipo de desigualdade:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0 \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{A}$  é o tensor de encruamento cinemático. No caso do modelo de Mises para o domínio elástico, tem-se que:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{S} - \mathbf{A}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \quad (3.9)$$

onde  $\|x\| = \sqrt{\sum_i \sum_j x_{ij}x_{ij}}$  é a norma de Frobenius e  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento sob o carregamento trativo. Considerando-se a hipótese da normalidade, a taxa de evolução da deformação plástica é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \quad (3.10)$$

onde  $\dot{\gamma} \geq 0$  é o multiplicador plástico. Para o caso específico do modelo de Mises:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \mathbf{N} = \frac{\mathbf{S} - \mathbf{A}}{\|\mathbf{S} - \mathbf{A}\|} \quad (3.11)$$

Logo:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (3.12)$$

## 3.2. Modelos constitutivos

Prager (1949) definiu uma relação linear entre a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático ( $\dot{\mathbf{A}}$ ) e a taxa de evolução da deformação plástica:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{2}{3} H \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (3.13)$$

onde  $H$  é o módulo de endurecimento cinemático.

A principal desvantagem do modelo de Prager é sua linearidade. Essa característica impede uma boa reprodução do comportamento elastoplástico do material em carregamentos complexos, como descarregamentos e posteriores carregamentos reversos (Chaboche, 1986). Além disso, devido à linearidade da relação entre tensão e deformação

que é obtida, o modelo não consegue reproduzir de forma apropriada a parte não linear da curva de histerese experimental.

Para tentar corrigir esse problema, Armstrong & Frederick (1966) sugeriram uma mudança na lei de Prager, introduzindo nesta um termo não linear, como apresentado na Equação (3.14):

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{2}{3}H\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - c\dot{p}\mathbf{A} \quad (3.14)$$

onde  $c$  é uma constante do material e  $\dot{p}$  é dado por:

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}}\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| \quad (3.15)$$

O modelo de Armstrong & Frederick permitiu que os carregamentos cíclicos fossem melhor descritos, sendo generalizado por Chaboche (1986), que considerou o tensor tensão cinemática como:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \quad (3.16)$$

onde cada termo  $\mathbf{A}_i$  tem a forma da Equação (3.14).

Considerando-se um termo linear e dois não-lineares – visto que o aumento da quantidade de termos não-lineares não mostrou melhorias nos resultados obtidos posteriormente neste trabalho – a lei de encruamento de Chaboche pode ser escrita a partir das Equações (3.13) e (3.14) como:

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\gamma} \left[ \frac{2}{3}H_1N + \sum_{i=2}^n \left( \frac{2}{3}H_iN - \sqrt{\frac{2}{3}}c_i\mathbf{A}_i \right) \right] \quad (3.17)$$

A partir da integração da lei de encruamento cinemático é possível ser calculada a tensão  $\sigma$  em função da deformação plástica sob condições de carregamento do tipo tração-compressão:

$$\sigma = \alpha_{10} + H_1(\varepsilon^p - \varepsilon_0^p) + \sum_{i=2}^n \left[ \pm \frac{H_i}{c_i} + \left( \alpha_{i0} \mp \frac{H_i}{c_i} \right) e^{\mp c_i(\varepsilon^p - \varepsilon_0^p)} \right] \pm \sigma_y \quad (3.18)$$

onde  $\alpha$  é a tensão cinemática,  $\varepsilon_0^p$  é a deformação plástica inicial e  $\alpha_{i0}$  é o elemento escalonado da matriz  $\mathbf{A}$  na posição  $i$ .

Considerando-se uma história de carregamento cíclico estabilizado, onde a deformação plástica varie entre  $\varepsilon^{p-}$  e  $\varepsilon^{p+}$ , enquanto a tensão cinemática varia entre  $\alpha_-$  e  $\alpha_+$ , tem-se que:

$$\frac{\Delta\alpha}{2} = H_1 \frac{\Delta\varepsilon^p}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{H_i}{c_i} \operatorname{tgh}\left(c_i \frac{\Delta\varepsilon^p}{2}\right) \quad (3.19)$$

Considerando-se as relações entre amplitudes de tensão  $\sigma_a = \Delta\alpha/2$  e de deformação plástica  $\varepsilon_a^p = \Delta\varepsilon^p/2$ , pode-se reescrever a Equação (3.19) como:

$$\sigma_a = H_1 \varepsilon_a^p + \sum_{i=2}^n \frac{H_i}{c_i} \operatorname{tgh}(c_i \varepsilon_a^p) + \sigma_y \quad (3.20)$$

onde  $\varepsilon_a^p$  é a amplitude de deformação plástica. A Equação (3.20) é utilizada para cálculo dos parâmetros do modelo de Chaboche para plasticidade cíclica. Este modelo foi utilizado neste trabalho para a definição de trajetórias de carregamento com base em dados experimentais. Foram usados 3 termos, sendo 1 linear e 2 não-lineares.

# Capítulo 4

## Metodologia

O modelo de Jiang necessita, para o cálculo de  $dY$ , e portanto de  $dD$ , dos valores das tensões  $\sigma$  e  $\tau$ , bem como dos incrementos de deformação plástica  $d\varepsilon^p$  e  $d\gamma^p$ , como pode ser visto nas Equações (2.1) e (2.2). Tais quantidades devem ser obtidas a partir de observações experimentais ou, na maior parte dos casos, por meio de simulações numéricas.

Neste trabalho, o tensor tensão  $\sigma$  e os incrementos do tensor de deformação plástica  $d\varepsilon^p$  foram calculados empregando-se o modelo de Chaboche (1986) para plasticidade cíclica, descrito em detalhes no Capítulo 3. A partir das histórias de carregamento obtidas é possível estimar-se a vida à fadiga do material.

O presente Capítulo está dividido em três seções, destinadas a caracterizar o comportamento elastoplástico cíclico do material, identificar os parâmetros do modelo de Jiang e estimar a vida à fadiga.

### 4.1. Caracterização do comportamento elastoplástico cíclico do material

Os parâmetros  $H_i$  e  $c_i$ , com  $i = 1, 2, 3$  do modelo de encruamento de Chaboche, dado pela Equação (3.17), são obtidos a partir de uma representação linear para ajuste da curva dada pela Equação (3.20) a um conjunto de pares  $(\varepsilon_a^p, \sigma_a)$ .

No presente estudo, tais pares foram recuperados a partir da curva de Ramberg-Osgood para o material, na forma:

$$\varepsilon_a^p = \left(\frac{\sigma_a}{H'}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad (4.1)$$

Para o cálculo dos parâmetros de Ramberg-Osgood,  $H'$  e  $n'$ , que são necessários para encontrar outras constantes, deve ser realizada uma regressão linear do logaritmo da Equação (4.1), sendo considerados dados experimentais uniaxiais totalmente reversos disponíveis em literatura (Kurath et al., 1989; Hua & Socie, 1984). Como limite superior

para a regressão, foi utilizado  $\varepsilon_a^p = 0,025$  e como limite inferior,  $\varepsilon_a^p = 0,0005$ . Foram usados 100 pontos no ajuste da curva.

## 4.2. Identificação dos parâmetros do modelo de Jiang

Os parâmetros  $\varepsilon_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $a$ ,  $m$  e  $D_0$  são obtidos para proceder-se às simulações do modelo de Jiang. Os procedimentos para calcular as referidas constantes são descritos em suas respectivas subseções.

### 4.2.1. Parâmetros $\varepsilon_0$ e $\sigma_0$

Para determinação da constante  $\varepsilon_0$ , deve ser realizada uma regressão linear do logaritmo da Equação (2.11), com dados de entrada axiais. Dentre os diversos  $\varepsilon_0$  possíveis, é escolhido aquele que minimiza o erro em relação à regressão efetuada, dado por:

$$e|_{\varepsilon_0} = \sqrt{\sum_{i=1 \dots 7}^n (y_i - ax_i|_{\varepsilon_0} - b)^2} \quad (4.2)$$

Para a obtenção do valor associado  $\sigma_0$ , utiliza-se o método da bissecção aplicado à Equação (4.3).

$$\varepsilon_{ai} - \frac{\sigma_{ai}}{E} - \left(\frac{\sigma_{ai}}{H'}\right)^{1/n'} = 0 \quad (4.3)$$

### 4.2.2. Parâmetro $\bar{\omega}$

O valor de  $\bar{\omega}$  foi calculado para posteriores estimativas analíticas, logo, faz-se necessária a determinação numérica da energia de deformação plástica por ciclo ( $\Delta W_{T-C}^p$ ).

Considera-se que o descarregamento ocorre até um ponto mínimo dado por  $(\varepsilon_{min}, \sigma_{min})$  e que depois há um recarregamento, sendo a deformação desenvolvida em ciclos entre  $\varepsilon_{min}$  e  $\varepsilon_{max}$ . Durante cada ciclo posterior de amplitude constante, o ciclo de tensão-deformação entre  $\varepsilon_{min}$  e  $\varepsilon_{max}$  pode ser redesenhado, como mostrado na Figura 4.1.

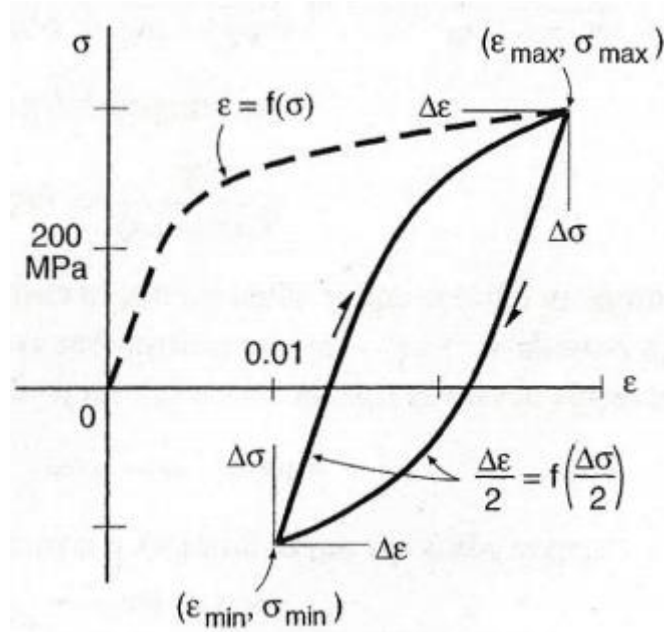


Figura 4.1: Comportamento de descarregamento e recarregamento da curva tensão-deformação  
Fonte: Dowling (2007)

Relativamente à origem dos eixos coordenados  $(\sigma, \epsilon)$ , os caminhos de tensão-deformação para as partes de descarregamento e recarregamento são dados, respectivamente por:

$$\epsilon = \epsilon_{max} - 2f \frac{(\sigma_{max} - \sigma)}{2} \quad (4.4)$$

$$\epsilon = \epsilon_{min} + 2f \frac{(\sigma - \sigma_{min})}{2} \quad (4.5)$$

Sabendo que  $\epsilon = f(\sigma)$  e que:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H}\right)^{1/n} \quad (4.6)$$

as Equações (4.4) e (4.5) podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_{max} - 2 \left[ \frac{\sigma_{max} - \sigma}{2E} + \left(\frac{\sigma_{max} - \sigma}{2H}\right)^{1/n} \right] \\ \epsilon_2 = \epsilon_{min} + 2 \left[ \frac{\sigma - \sigma_{min}}{2E} + \left(\frac{\sigma - \sigma_{min}}{2H}\right)^{1/n} \right] \end{cases} \quad (4.7)$$

Assumindo um comportamento do tipo Masing, pode-se substituir no sistema de Equações (4.7),  $n$  por  $n'$  e  $H$  por  $H'$ .

Calculando-se a área entre as curvas das Equações em (4.7), tem-se as seguintes integrais:

$$\int_{-\sigma_a}^{\sigma_a} f_1(\sigma) d\sigma = \left[ \varepsilon_{max_i} \sigma - \frac{\sigma_{max_i} \sigma}{E} + \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{2}{(2H')^{1/n'}} \frac{(\sigma - \sigma_{max_i})^{\frac{1}{n'}+1}}{\frac{1}{n'} + 1} \right]_{-\sigma_a}^{\sigma_a} \quad (4.8)$$

$$\int_{-\sigma_a}^{\sigma_a} f_2(\sigma) d\sigma = \left[ \varepsilon_{min_i} \sigma - \frac{\sigma_{min_i} \sigma}{E} + \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{2}{(2H')^{1/n'}} \frac{(\sigma - \sigma_{min_i})^{\frac{1}{n'}+1}}{\frac{1}{n'} + 1} \right]_{-\sigma_a}^{\sigma_a}$$

Aplicando os dados experimentais às integrais em (4.8), é possível obter  $\Delta W_{T-C}^p$ . É construído um gráfico dos dados de  $\Delta W_{T-C}^p$  contra  $\Delta \sigma \Delta \varepsilon_p$ . O valor do coeficiente angular dessa curva corresponde a  $\bar{\omega}$ .

### 4.2.3. Parâmetros $a$ , $m$ e $D_0$

Para calcular os parâmetros  $a$ ,  $m$  e  $D_0$ , é determinado o dano por ciclo,  $\Delta D$ , referente a ensaios axiais e torcionais. Para isso, são usadas as Equações (4.9) e (4.10), extraídas de Jiang, para o caso de tração-compressão e torção, respectivamente:

$$\Delta D = \left\langle \frac{\Delta \sigma}{2} - \sigma_0 \right\rangle^m \xi \bar{\omega} \Delta \sigma_x \Delta \varepsilon_x^p \quad (4.9)$$

E

$$\Delta D = \left\langle \sqrt{3} \frac{\Delta \tau}{2} - \sigma_0 \right\rangle^m \zeta \bar{\omega} \Delta \tau_{xy} \Delta \gamma_{xy}^p \quad (4.10)$$

Na Equação (4.9),  $\xi$  é dado por

$$\xi = \frac{(4a - 3)^2}{24(1 - 2a)} \quad (4.11)$$

ou

$$\xi = a \quad (4.12)$$

Na Equação (4.10),  $\zeta$  vale

$$\zeta = \frac{(1 - a)}{2} \quad (4.13)$$

ou

$$\zeta = \frac{a}{2} \quad (4.14)$$

As Equações de (4.11) a (4.14) estão em concordância com as expressões da Tabela 2.1.

Os danos foram estimados fazendo uma varredura completa dos possíveis valores de  $a$ ,  $m$  e  $D_0$ , quais sejam:

$$0 \leq a \leq 1, \quad da = 0,025$$

$$0,5 \leq m \leq 3, \quad dm = 0,1$$

$$0,5 \times 10^7 \leq D_0 \leq 2,5 \times 10^7, \quad dD_0 = 1 \times 10^6$$

A partir da Equação (2.4), foi estimada a vida à fadiga para cada composição de valores de  $a$ ,  $m$  e  $D_0$ . Para selecionar a combinação de parâmetros mais adequada, foi calculado o erro entre a vida à fadiga estimada e os valores experimentais, dado pela Equação (4.15).

$$Erro = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(N_{f_i} - N_{f_{exp\_i}})}{N_{f_{exp\_i}}} \right]^2 \quad (4.15)$$

onde  $N_{f_i}$  é a vida estimada e  $N_{f_{exp\_i}}$  é a vida experimental, ambos para cada ensaio considerado.

### 4.3. Estimativa de vida à fadiga

Foi considerado, no presente estudo, um conjunto de histórias de carregamento axiais, torcionais e multiaxiais (proporcionais e não-proporcionais) periódicos a deformações prescritas.

O comportamento elastoplástico cíclico foi simulado considerando-se o modelo de Chaboche, implementado em código Python. A equação de evolução da deformação plástica e do *backstress* foram integradas considerando-se a regra de Euler explícito.

Para cada história de carregamento, aplica-se um número de ciclos até a observação da estabilização das trajetórias de tensão correspondentes.

Com base na trajetória estabelecida de tensão, calcula-se o parâmetro  $\sigma_{mr}$  a partir da Equação (2.3).



Realiza-se então, nova simulação até a estabilização da trajetória de tensão. O dano à fadiga foi então calculado de acordo com o algoritmo:

→ Ao longo do ciclo estabilizado:

- Inicialize  $\Delta D = 0$
- Conhecidos os tensores deformação total  $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ , deformação plástica  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ , no pseudo-instante  $t_n$ , imponha o incremento  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  do tensor deformação total
- Calcule, empregando o modelo de Chaboche, o tensor tensão  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  e o tensor de deformação plástica  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$
- Calcule, para todos os planos materiais  $(\theta, \varphi)$ , os incrementos  $dY_{(\theta, \varphi)}$  e  $dD_{(\theta, \varphi)}$  de acordo com as Equações (2.1) e (2.2)
- Some, em cada plano material, o incremento  $dD$  ao dano acumulado no ciclo:

$$\Delta D_{(\theta, \varphi) n+1} = \Delta D_{(\theta, \varphi) n} + dD_{(\theta, \varphi)}$$

→ Selecione, entre os planos materiais, aquele associado ao maior valor de dano acumulado por ciclo,  $\Delta D = \max_{\theta, \varphi} \Delta D_{(\theta, \varphi)}$

→ Calcule a estimativa de vida:

$$N_f = \frac{D_0}{\Delta D}$$

Um fluxograma simplificado do algoritmo acima é apresentado na Figura 4.2.

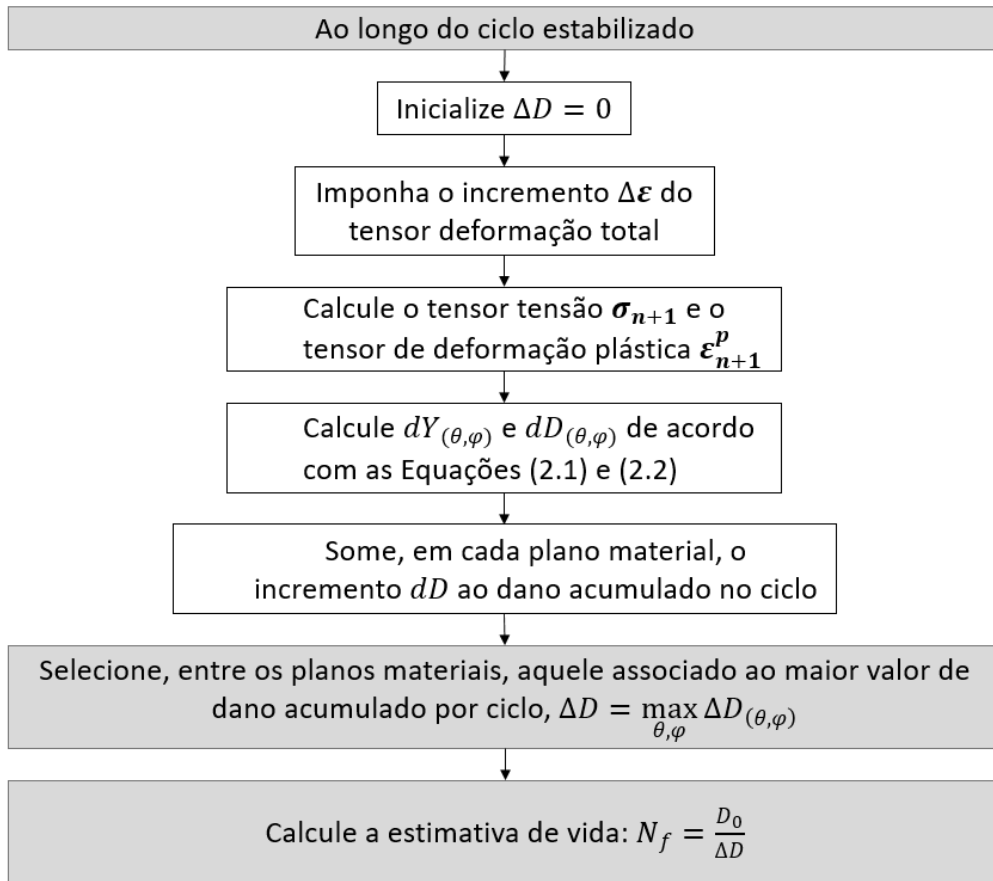


Figura 4.2: Fluxograma do algoritmo para cálculo da vida à fadiga.

# Capítulo 5

## Resultados

Neste Capítulo, são apresentados os resultados obtidos tanto na identificação de parâmetros do material quanto nas simulações efetuadas. Foi considerado neste estudo o aço 1045, cujos dados principais foram extraídos de literatura da área, conforme a Tabela 5.1. Neste caso, considerou-se  $E = 202GPa$  (Kurath et al., 1989) e  $\sigma_f = 950MPa$  (Jiang, 2000).

Tabela 5.1: Fontes de dados utilizados neste estudo.

<b>Dados</b>	<b>Fontes</b>
E	Kurath et al. (1989)
$\sigma_f$	Jiang (2000)
Testes uniaxiais totalmente reversos	Kurath et al. (1989); Hua & Socie (1984)
Testes em torção pura	Kurath et al. (1989); Hua & Socie (1984)
Testes proporcionais	Fatemi & Stephens (1989)
Testes não-proporcionais elípticos	Fatemi & Stephens (1989)

Para as simulações e consequente validação do modelo, foram consideradas quatro tipos de trajetórias de carregamento, a saber, uniaxial totalmente reversa, torção pura, proporcional e não-proporcional elíptica, conforme a Figura 5.1,

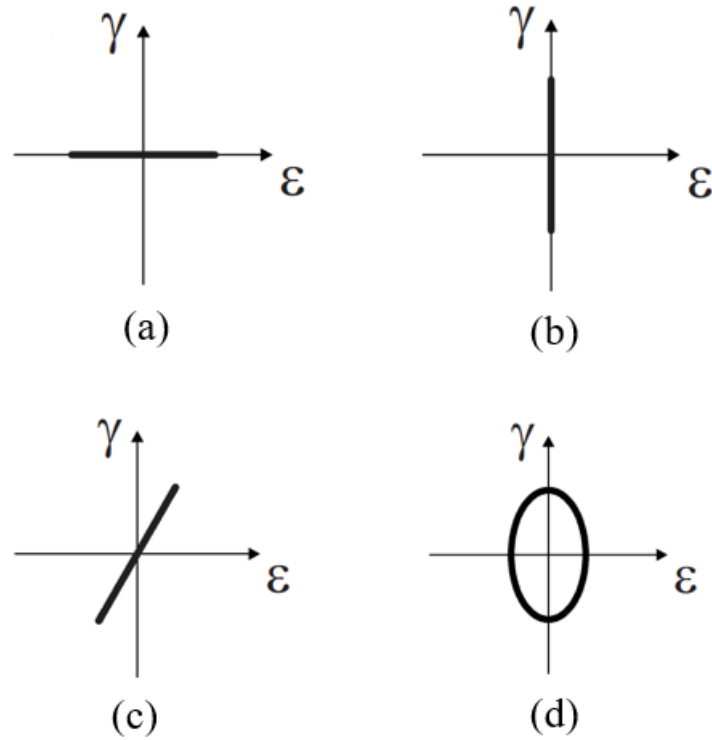


Figura 5.1: Trajetórias de carregamento (a) axial, (b) torcional, (c) proporcional e (d) não-proporcional elíptico.

As trajetórias de deformação proporcionais, correspondentes à Figura 5.1 (c), foram construídas seguindo o sistema de equações (5.1):

$$\begin{cases} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\Delta t} = \varepsilon_a \cos(t_{n+1}) \\ \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\Delta t} = \gamma_a \cos(t_{n+1}) \end{cases} \quad (5.1)$$

As trajetórias não-proporcionais referentes à Figura 5.1 (d) seguem o sistema linear (5.2), com uma curva senoidal:

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_a \text{sen}(t) \\ \gamma(t) = \gamma_a \text{sen}(t + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (5.2)$$

Derivando o sistema (5.2), tem-se que:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \varepsilon_a \cos(t) \\ \frac{d\gamma}{dt}(t) = \gamma_a \cos(t + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (5.3)$$

E efetuando a discretização do sistema (5.3):

$$\begin{cases} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\Delta t} = \varepsilon_a \cos(t_{n+1}) \\ \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\Delta t} = \gamma_a \cos(t_{n+1} + \pi/2) \end{cases} \quad (5.4)$$

onde  $t \in [0, 2\pi]$  em cada ciclo considerado.

Este Capítulo se divide em duas seções, quais sejam, a identificação dos parâmetros do material e a validação do modelo.

## 5.1. Identificação dos parâmetros do material

Nesta seção, foram apresentados os cálculos e valores tanto os parâmetros da curva de Ramberg-Osgood,  $n'$  e  $H'$ , quanto as demais constantes inerentes ao modelo de Jiang,  $\varepsilon_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $a$ ,  $m$  e  $D_0$ .

### 5.1.1. Parâmetros $n'$ e $H'$

A partir dos dados experimentais de ensaios proporcionais axiais alternados apresentados na Tabela 5.2, objetivou-se encontrar os valores de  $n'$  e  $H'$ .

Tabela 5.2: Dados de testes uniaxiais totalmente reversos.  
Fonte: Kurath, et al. (1989), Hua & Socie (1984)

$i$	$\varepsilon_a$	$\sigma_a$ (MPa)	$N_{f\ t-c}$ (ciclos)
1	0,0200	524	257
2	0,0150	499	385
3	0,0100	465	1461
4	0,0100	452	1527
5	0,0080	440	2046
6	0,0080	455	3044
7	0,0060	420	6825
8	0,0060	400	6670
9	0,0050	372	12920
10	0,0040	353	20200
11	0,0040	351	17990
12	0,0030	315	36940
13	0,0025	298	117150
14	0,0020	269	381450
15	0,0020	270	261600

Tabela 5.3: Dados de testes uniaxiais totalmente reversos (Continuação)

$i$	$\varepsilon_a$	$\sigma_a$ (MPa)	$N_{f\ t-c}$ (ciclos)
16	0,0015	241	2451000
17	0,0100	450	1137
18	0,0100	450	1107
19	0,0043	352	7839
20	0,0022	273	142541
21	0,0022	273	78271
22	0,0022	273	94525

A partir dos valores de  $\varepsilon_{ai}$  e  $\sigma_{ai}$  da Tabela 5.2, e executando-se o que foi descrito na seção 4.1 foi possível obter os valores de  $n'$  e  $H'$  pela Equação (4.1), dados por

$$n' = 0,214$$

$$H' = 1295\text{MPa}$$

### 5.1.2. Parâmetros $\varepsilon_0$ e $\sigma_0$

O primeiro passo é a determinação da constante  $\varepsilon_0$ , para depois estimar o valor associado de  $\sigma_0$ . Utilizando-se os dados da Tabela 5.2 e assumindo-se  $v = 2$ , dado por Jiang (2000), foram executados os passos descritos na seção 4.2.1.

Estimou-se então o erro quadrático da regressão para cada valor de  $\varepsilon_0$ , pela Equação (4.2), sendo selecionado o caso que produziu ao menor erro, correspondendo a  $\varepsilon_0 = 0,00123$ . A curva  $\varepsilon_a \times N_f$  para os dados considerados está representada na Figura 5.2.

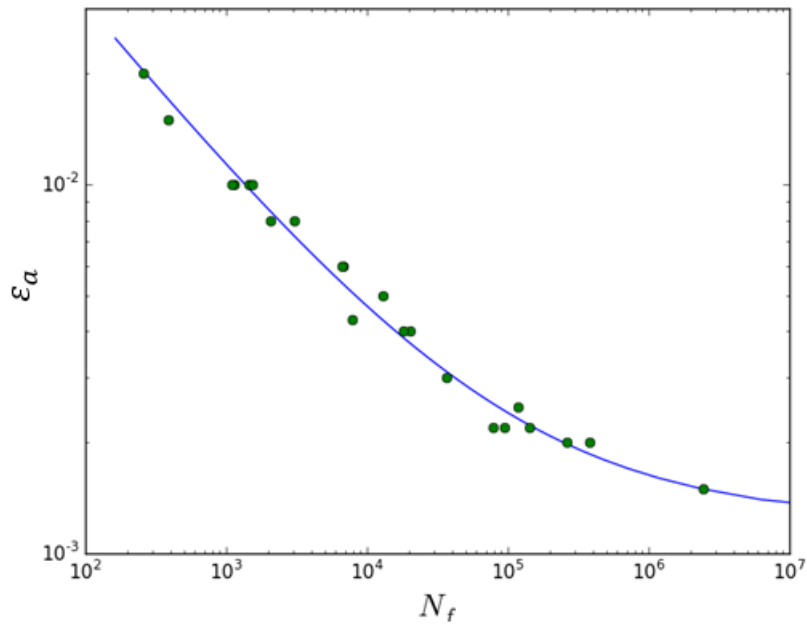


Figura 5.2: Curva  $\varepsilon_a \times N_f$  obtida para o  $\varepsilon_0$  que produziu o menor erro

Conforme descrito na metodologia, foi calculado o valor de  $\sigma_0$  correspondente a  $\varepsilon_0 = 0,00123$ , sendo obtido  $\sigma_0 = 208,2$ .

### 5.1.3. Parâmetro $\bar{\omega}$

Objetivando-se calcular  $\Delta W_{T-C}^p$ , foram aplicados nas equações (4.8) os valores das variáveis correspondentes que constam na Tabela 5.2. Os valores obtidos foram plotados contra  $\Delta\sigma\Delta\varepsilon_p$ , com mostrado na Figura 5.3.

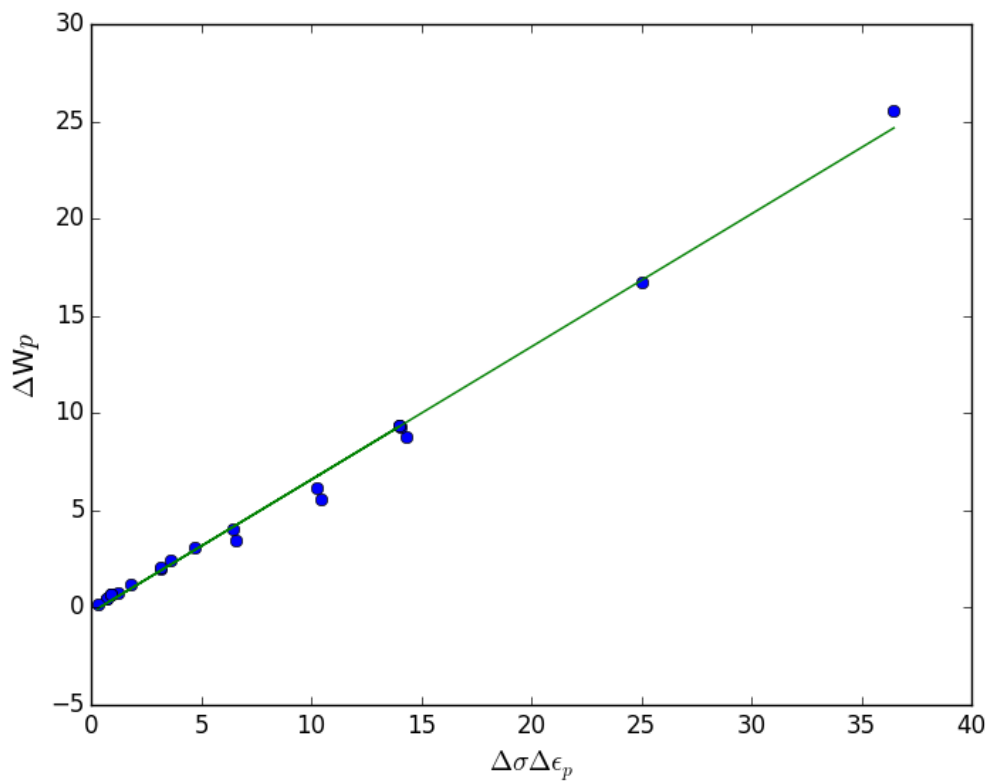


Figura 5.3: Curva  $\Delta W_{T-C}^p \times \Delta\sigma\Delta\epsilon^p$  obtida a partir das integrais do sistema de equações (4.8) e dos dados da Tabela 5.2

Assumindo-se o relacionamento expresso na Equação (2.13), tem-se que  $\bar{\omega}$  é o coeficiente angular da Figura 5.6, correspondendo a  $\bar{\omega} = 0,683$ .

#### 5.1.4. Parâmetro $a$ , $m$ e $D_0$

Para calcular os parâmetros  $a$ ,  $m$  e  $D_0$ , foi determinado o dano por ciclo referente aos ensaios axiais e torcionais considerados, que são apresentados na Tabela 5.2 e na Tabela 5.3.



Tabela 5.3: Dados de testes em torção pura  
 Fonte: Kurath et al. (1989), Hua & Socie (1984)

$i$	$\gamma_a$	$\tau_a$ (MPa)	$N_{f\ tor}$ (ciclos)
1	0,02500	272	470
2	0,02510	270	495
3	0,02500	259	541
4	0,01730	251	890
5	0,01730	248	889
6	0,01500	232	1269
7	0,01500	237	1379
8	0,01500	232	1467
9	0,00820	198	5505
10	0,00820	200	7130
11	0,00820	194	8360
12	0,00718	196	8710
13	0,00500	161	60750
14	0,00500	165	35020
15	0,00500	168	36120
16	0,00410	160	41840
17	0,00400	159	72950
18	0,00390	154	95250
19	0,00391	160	111400
20	0,00377	163	102100
21	0,00378	164	57370
22	0,00378	155	93050
23	0,0173	251	890
24	0,0173	251	889
25	0,0072	197	8710
26	0,00381	168	102083
27	0,00381	168	57369
28	0,00381	168	93052
29	0,0026	147	1010210

Para cada combinação de  $a$ ,  $m$  e  $D_0$ , foram estimados o dano e a vida à fadiga, de acordo com os procedimentos descritos na seção 4.2.3. Os parâmetros cuja combinação produziu o menor erro foram:

$$a = 0$$

$$m = 1,5$$

$$D_0 = 1,6 \times 10^7$$

Os valores correspondentes do dano por ciclo vs. a vida estimada para os parâmetros encontrados estão representados na Figura 5.4.

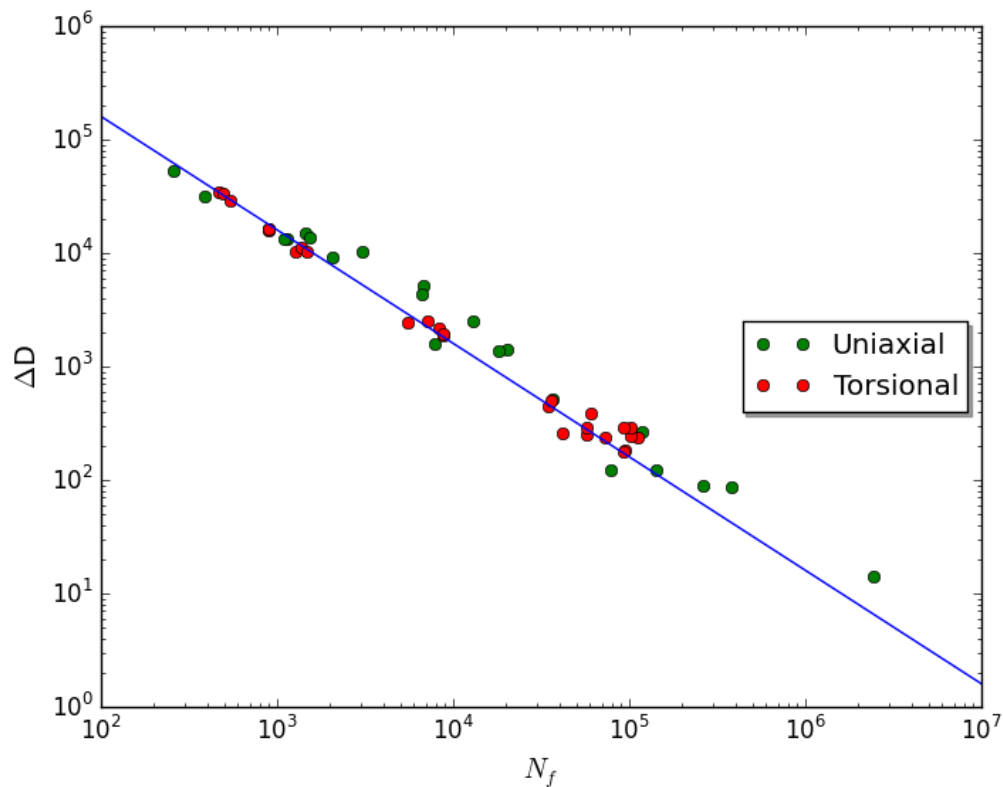


Figura 5.4: Dano por ciclo vs. vida estimada

## 5.2. Validação do modelo

A partir da identificação dos parâmetros do material, iniciou-se o processo de validação do modelo de Jiang, sendo comparados os resultados a partir de dados experimentais com os obtidos a partir de amplitudes de tensão simuladas. Esta seção está dividida em quatro tópicos, cada um deles referente a um tipo de história de carregamento utilizada nas simulações. Estas consideraram as seguintes situações: axial, torcional, proporcional e não proporcional.

### 5.2.1. Carregamento axial

Nas simulações utilizou-se carregamento uniaxial totalmente reverso, cuja trajetória está descrita na Figura 5.1 (a). Os dados de entrada para o código computacional são provenientes de Kurath et al. (1989) e de Hua & Socie (1984).

Foi identificada a tensão de memória para cada ensaio, considerada neste caso como a amplitude máxima da tensão simulada. Encontrou-se também o dano, a vida estimada do

material e o Fator para cada teste – razão entre a vida estimada e a vida experimental –, dados apresentados na Tabela 5.4. Em cada simulação, foram considerados 20 ciclos na análise; este critério foi adotado, pois a maioria dos casos apresentaram estabilização próxima a esse valor.

Tabela 5.4: Dados originais e resultados obtidos a partir de simulações para o caso axial.

$i$	$\epsilon_a$	$\sigma_{a\ exp}$ (MPa)	$N_{f\ exp}$ (Ciclos)	$\sigma_{a\ sim}$ (MPa)	$\Delta D$ ( $10^6\ \text{Nm/m}^3$ )	$N_f$ (Ciclos)	Fator
1	0,0200	524	257	542	59053	271	1,05
2	0,0150	499	385	506	34074	470	1,22
3	0,0100	465	1461	459	14840	1078	0,74
4	0,0100	452	1527	459	14840	1078	0,71
5	0,0100	450	1137	459	14840	1078	0,95
6	0,0100	450	1107	459	14840	1078	0,97
7	0,0080	440	2046	433	9062	1766	0,86
8	0,0080	455	3044	433	9062	1766	0,58
9	0,0060	420	6825	400	4574	3498	0,51
10	0,0060	400	6670	400	4574	3498	0,52
11	0,0050	372	12920	380	2871	5573	0,43
12	0,0043	352	7839	363	1892	8459	1,08
13	0,0040	353	20200	355	1533	10440	0,52
14	0,0040	351	17990	355	1533	10440	0,58
15	0,0030	315	36940	321	599	26714	0,72
16	0,0025	298	117150	302	296	54092	0,46
17	0,0022	273	142541	283	172	92777	0,65
18	0,0022	273	78271	283	172	92777	1,19
19	0,0022	273	94525	283	172	92777	0,98
20	0,0020	269	381450	271	108	148630	0,39
21	0,0020	270	261600	271	108	148630	0,57
22	0,0015	241	2451000	239	17	921413	0,38

Observa-se na Tabela 5.4 que os testes realizados com menores amplitudes de  $\epsilon$  apresentaram maior vida, como esperado. É possível constatar que os ensaios de número 11, 16, 20 e 22 se posicionam fora da faixa do fator dois.

Foi feita também uma comparação entre os resultados oriundos das simulações e os obtidos a partir de dados experimentais, como apresentado na Figura 5.5. A Abordagem 1 apresenta as seguintes características:  $a, m, D_0$  e  $\sigma_0$  foram determinados por ajuste, como discutido previamente neste trabalho;  $\sigma$  e  $\Delta\epsilon^p$  foram calculados com a utilização do modelo constitutivo de Chaboche e;  $dY$  e  $dD$  foram calculados e somados para o cálculo incremental do dano. A Abordagem 2 é caracterizada pelos seguintes fatores: os

valores de  $a, m, D_0$  e  $\sigma_0$  utilizados são provenientes do artigo de Jiang (2000); foram assumidos  $\sigma_a$  e  $\varepsilon_a$  experimentais, oriundos das fontes expostas na Tabela 5.1 e;  $\Delta\varepsilon^P, \Delta Y$  e  $\Delta D$  foram calculados com expressões analíticas advindas do artigo de Jiang (2000).

Constata-se que os desvios ocorrem majoritariamente para menores amplitudes de deformação. Entretanto, apesar deste fato, os valores encontrados têm uma tendência a estar a favor da segurança, ou seja, abaixo da faixa do fator dois.

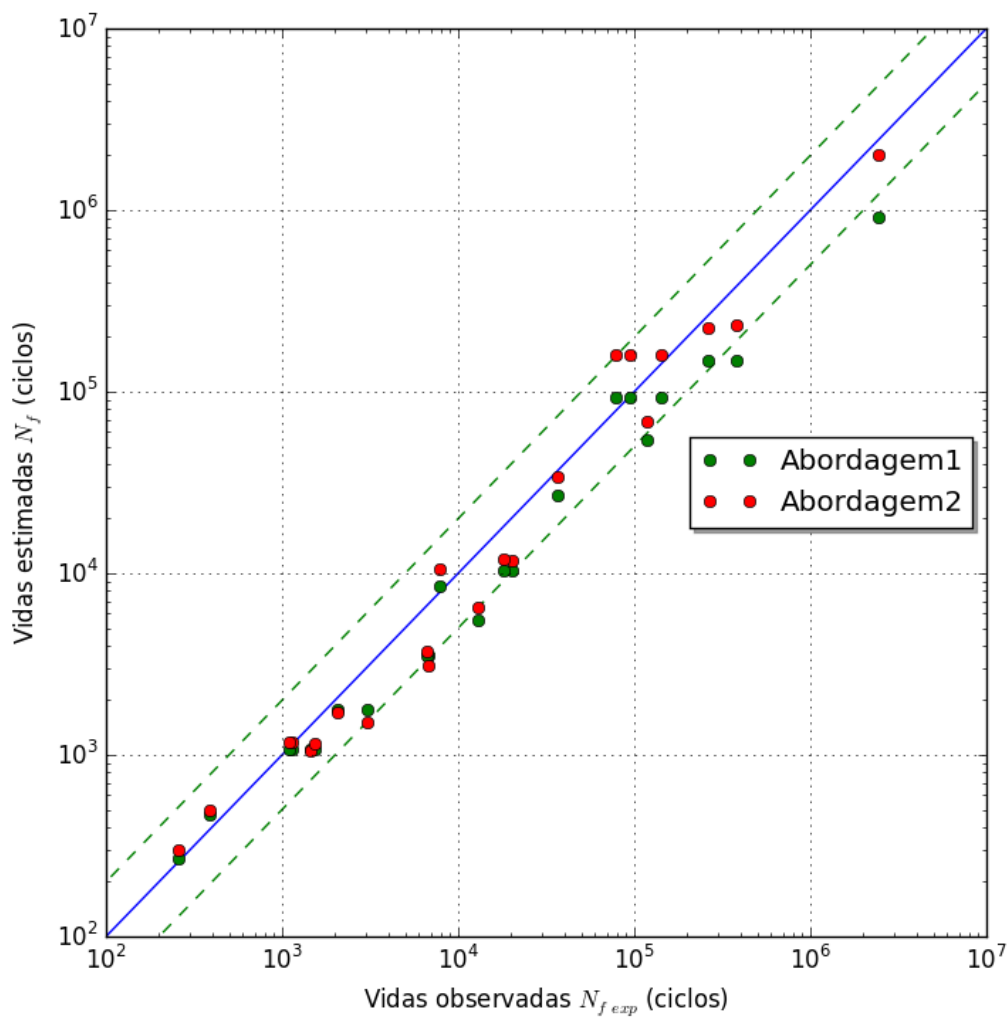


Figura 5.5: Gráfico das vidas estimadas vs. vidas observadas para o caso axial

## 5.2.2. Carregamento torcional

Procedeu-se a uma série de testes em torção pura, com dados de Kurath et al. (1989) e de Hua & Socie (1984). O tipo de trajetória considerada é representado na Figura 5.1 (b).

Para cada ensaio representado na Tabela 5.5, foi identificado o valor máximo da tensão cisalhante, para cálculo da tensão de memória, dada por  $\sqrt{3}\tau_{max}$ . Como nos testes anteriores, foram estimados as vidas, os danos e o fator dois para cada caso. Em cada simulação, foram considerados 20 ciclos na análise; este critério foi adotado, pois a maioria dos casos apresentou estabilização próxima a esse valor.

Tabela 5.5: Dados originais e resultados obtidos a partir de simulações para o caso de torção pura.

<i>i</i>	$\gamma_a$	$\tau_{a\ exp}$ (MPa)	$N_{f\ exp}$ (Ciclos)	$\tau_{a\ sim}$ (MPa)	$\Delta D$ ( $10^6\text{ Nm/m}^3$ )	$N_f$ (Ciclos)	<i>Fator</i>
1	0,02510	270	495	292	44985	356	0,72
2	0,02500	272	470	292	44606	359	0,76
3	0,02500	259	541	292	44606	359	0,66
4	0,01730	251	890	267	21136	757	0,85
5	0,01730	248	889	267	21136	757	0,85
6	0,01730	251	890	267	21136	757	0,85
7	0,01730	251	889	267	21136	757	0,85
8	0,01500	232	1269	257	15588	1026	0,81
9	0,01500	237	1379	257	15588	1026	0,74
10	0,01500	232	1467	257	15588	1026	0,70
11	0,00820	198	5505	219	3820	4188	0,76
12	0,00820	200	7130	219	3820	4188	0,59
13	0,00820	194	8360	219	3820	4188	0,50
14	0,00720	197	8710	211	2695	5937	0,68
15	0,00718	196	8710	211	2684	5960	0,68
16	0,00500	161	60750	187	904	17700	0,29
17	0,00500	165	35020	187	904	17700	0,51
18	0,00500	168	36120	187	904	17700	0,49
19	0,00410	160	41840	174	448	35742	0,85
20	0,00400	159	72950	172	407	39336	0,54
21	0,00391	160	111400	171	374	42820	0,38
22	0,00390	154	95250	170	369	43358	0,46
23	0,00381	168	102083	169	337	47501	0,47
24	0,00381	168	57369	169	337	47501	0,83
25	0,00381	168	93052	169	337	47501	0,51
26	0,00378	164	57370	168	325	49214	0,86
27	0,00378	155	93050	168	325	49214	0,53
28	0,00377	163	102100	168	323	49540	0,49
29	0,00260	147	1010210	146	55	292691	0,29

Observa-se na Tabela 5.5 que os testes realizados com menores amplitudes de  $\gamma_{xy}$  resultaram em maior vida, como esperado. Consta-se também que entre as simulações, seis ficaram fora da faixa do Fator dois, quais sejam os ensaios 18, 21, 22, 23, 28 e 29. A maior parte destes testes corresponde a menores amplitudes de deformação. Apesar disso, a Figura 5.6 mostra que estes testes tiveram resultados conservadores, a favor da segurança.

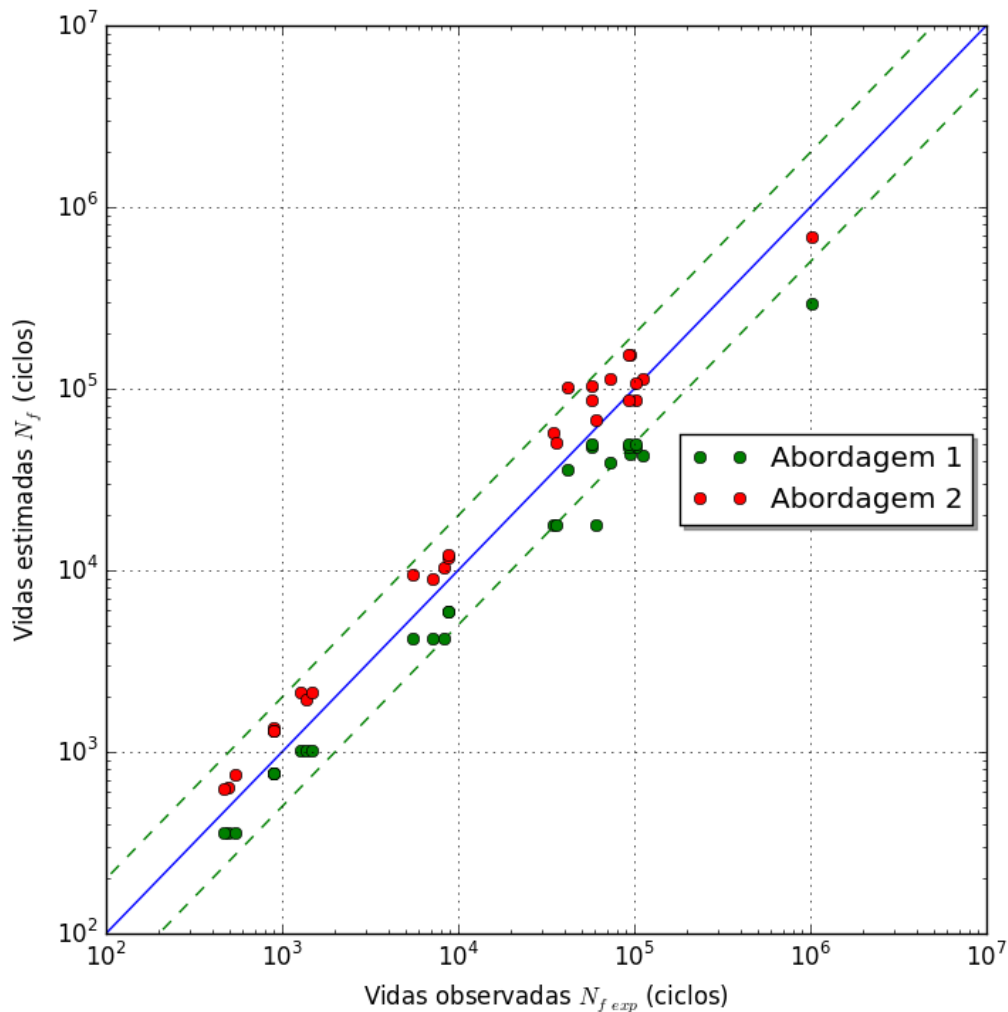


Figura 5.6: Gráfico das vidas estimadas vs. vidas observadas para o caso de torção pura

### 5.2.3. Carregamento proporcional

Foram efetuadas simulações para o caso de carregamento proporcional, cuja trajetória é representada na Figura 5.1 (c). Durante as simulações observou-se que não havia variação significativa da amplitude de tensão a partir de 50 ciclos, sendo este valor adotado em

todos os ensaios proporcionais. Foram utilizados dados experimentais de Fatemi & Stephens (1989), que são apresentados na Tabela 5.6, onde constam dados de estimativa de vida à fadiga e do Fator de cada teste.

Tabela 5.6: Dados originais e resultados obtidos a partir de simulações para o caso proporcional

<i>i</i>	$\epsilon_a$	$\gamma_a$	$\sigma_{a\ exp}$ (MPa)	$\tau_{a\ exp}$ (MPa)	$N_{f\ exp}$ (Ciclos)	$\sigma_{mr}$ (MPa)	$\Delta D$ ( $10^6$ Nm/m <sup>3</sup> )	$N_f$ (Ciclos)	<b>Fator</b>
1	0,00943	0,00515	430	84	1259	470	17251	972	0,74
2	0,00867	0,00945	383	138	1617	478	18749	853	0,53
3	0,00643	0,01403	289	202	1759	478	21615	740	0,42
4	0,00415	0,00222	340	60	11777	373	2170	7372	0,63
5	0,00374	0,00403	304	109	10377	374	2504	6390	0,62
6	0,00374	0,00405	308	113	11611	375	2519	6351	0,55
7	0,00264	0,00565	232	158	20031	371	2526	6335	0,32
8	0,00261	0,00563	234	159	16887	370	2473	6470	0,38
9	0,00214	0,00114	261	53	92000	291	219	72993	0,79
10	0,00211	0,00115	265	57	115462	290	205	77968	0,68
11	0,00191	0,00204	235	95	103000	293	253	63202	0,61
12	0,00190	0,00205	238	93	123544	294	254	62979	0,51
13	0,00145	0,00310	179	131	98779	300	347	46055	0,47
14	0,00145	0,00311	179	132	101000	300	352	45479	0,45
15	0,00144	0,00075	224	47	611780	247	26	609664	1,00
16	0,00141	0,00614	139	179	19769	362	2150	7443	0,38
17	0,00140	0,00150	212	85	595613	259	57	280911	0,47
18	0,00131	0,00139	202	79	393634	251	38	424838	1,08
19	0,00098	0,00210	147	116	545840	256	56	286750	0,53
20	0,00037	0,00406	45	165	66808	307	474	33783	0,51

Observa-se na Tabela 5.6 e na Figura 5.7 que a maioria dos ensaios está dentro da faixa do Fator dois, mas alguns ensaios foram mais conservadores, a saber, as simulações 3, 7, 8, 13, 14, 16 e 17.

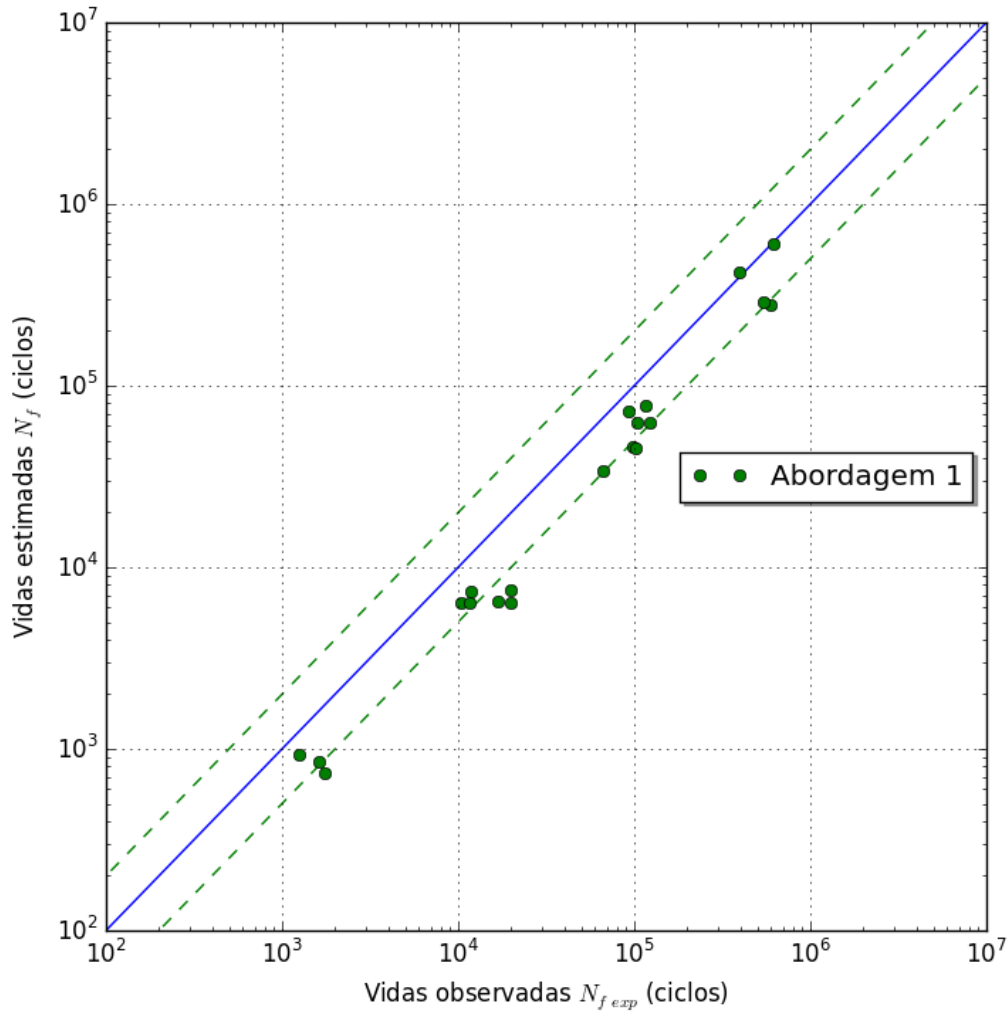


Figura 5.7: Gráfico das vidas estimadas vs. vidas observadas para o caso de carregamento proporcional

### 5.2.4. Carregamento não-proporcional

Foram realizadas simulações para o caso de trajetórias de deformação elípticas, não-proporcionais, representadas na Figura 5.1 (d). Os dados das simulações efetuadas encontram-se discriminados na Tabela 5.7 e foram retirados de Fatemi & Stephens (1989). Foram estimados ainda o dano, a vida à fadiga e o Fator de cada ensaio. Para cada teste, foram considerados 20 ciclos na análise; este critério foi adotado, pois a maioria dos casos apresentaram estabilização próximo a esse valor.



Tabela 5.7: Dados originais e resultados obtidos a partir de simulações para o caso elíptico não-proporcional

<i>i</i>	$\varepsilon_a$	$\gamma_a$	$\sigma_{a\ exp}$ (MPa)	$\tau_{a\ exp}$ (MPa)	$N_{f\ exp}$ (Ciclos)	$\sigma_{mr}$ (MPa)	$\Delta D$ ( $10^6$ Nm/m <sup>3</sup> )	$N_f$ (Ciclos)	<i>Fator</i>
1	0,00410	0,00213	364	149	5260	461	15378	1040	1,71
2	0,00371	0,00408	377	191	5119	468	17857	896	2,19
3	0,00264	0,00565	345	204	5262	467	20258	790	2,13
4	0,00212	0,00116	281	94	58525	366	2057	7778	1,77
5	0,00192	0,00205	289	148	49143	368	2343	6828	2,62
6	0,00192	0,00206	285	145	64652	368	2358	6786	1,99
7	0,00147	0,00307	250	167	34718	365	2365	6766	2,86
8	0,00146	0,00311	272	166	38925	364	2315	6911	2,50
9	0,00137	0,00149	232	107	1391710	286	199	80255	1,03
10	0,00100	0,00213	190	131	613554	285	188	84989	1,81

Observa-se na Tabela 5.7 que os resultados sob carregamento elíptico não-proporcional produziram estimativas de vida à fadiga maiores do que o que foi observado experimentalmente. O mesmo comportamento está representado na Figura 5.8.

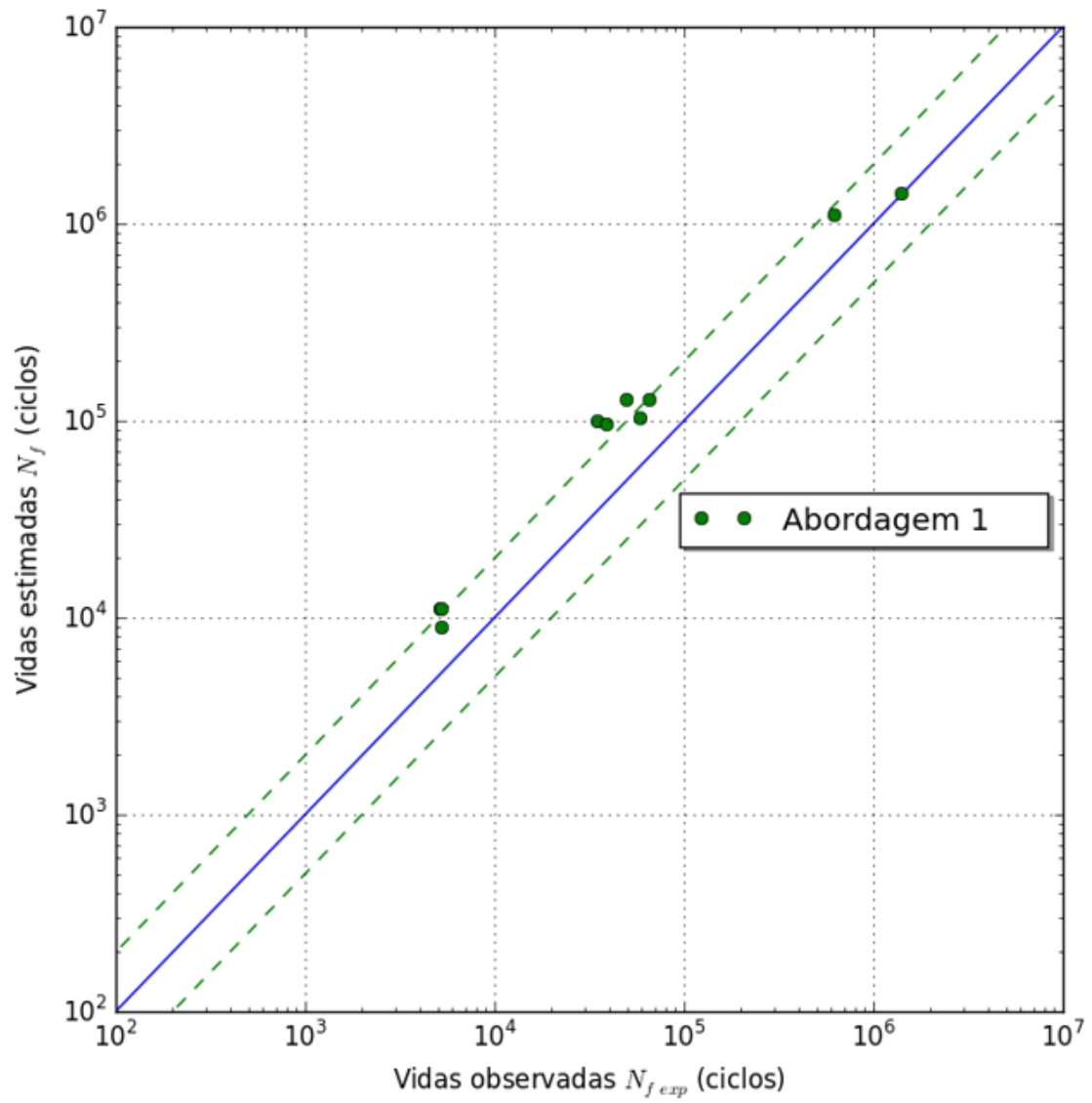


Figura 5.8: Gráfico das vidas estimadas vs. vidas observadas para o caso de carregamento cíclico não-proporcional.

# Capítulo 6

## Discussão

Este Capítulo apresenta uma discussão dos resultados descritos no Capítulo 5. O Capítulo 6 está dividido em quatro seções, uma para cada tipo de carregamento considerado previamente.

### 6.1. Carregamento axial

Constatou-se que os desvios das estimativas de vida ocorrem majoritariamente para menores amplitudes de deformação, conforme Tabela 5.3 e Figura 5.8. Optou-se pela realização de uma análise mais profunda dos cálculos executados na estimativa do dano.

Avaliou-se o pior resultado obtido no caso uniaxial totalmente reverso, que corresponde a  $\varepsilon_a = 0,0015$ ,  $\sigma_{exp} = 241MPa$  e  $\sigma_{sim} = 239MPa$ . Foram considerados resultados de histórias de carregamento geradas por Chaboche (com subsequente aplicação do código computacional) e os cálculos analítico previstos por Jiang. Para o ensaio considerado, tem-se que razão entre  $\Delta D_{Chaboche}$  e  $\Delta D_{Jiang}$  é 2,42.

O fator que mais influencia essa diferença é  $\langle \sigma_{mr} - \sigma_o \rangle^m$ . Para o caso de amplitudes de tensão calculadas por Chaboche, tem-se que  $\sigma_o = 208,1697MPa$ , logo, o valor do termo em questão é:

$$\langle 239 - 208,1697 \rangle^{1,5} = 171,19$$

Para o caso de amplitudes de tensão experimentais, utilizando-se  $\sigma_o = 220MPa$ , que foi o valor obtido por Jiang, o referido termo vale:

$$\langle 241 - 220 \rangle^{1,5} = 96$$

De fato, observa-se que a razão entre os dois valores obtidos corresponde a 1,78, que é o maior termo multiplicativo responsável pela diferença total constatada no cálculo do dano. Visto que  $\sigma_{mr}$  é muito próximo nos dois casos e que  $m$  tem o mesmo valor de 1,5, o parâmetro  $\sigma_o$  é o principal determinante das diferenças constatadas na Figura 5.8. Neste caso, para baixas amplitudes de deformação, pequenas variações no valor de  $\sigma_o$  tem

grande impacto na estimativa de dano. O termo  $\langle \sigma_{mr} - \sigma_o \rangle^m$  pode gerar inconsistências ainda maiores, visto que  $m$  varia entre 0,5 e 3, dependendo do material.

Adicionalmente, os valores de  $\xi$  que foram obtidos são próximos, tanto no caso de aplicação das amplitudes de tensão de Chaboche quanto no caso de amplitudes de tensão experimentais. No primeiro caso,  $\xi = 0,375$ , e na segunda situação,  $\xi = 0,3524$ . Constata-se uma diferença de 6% entre os valores obtidos, ratificando que o valor de  $a$  não apresenta tanta influência no cálculo de  $\Delta D$  e, conseqüentemente, na estimativa de vida à fadiga (Jiang, 2000).

## 6.2. Carregamento torcional

Constata-se na Figura 5.9 que, de uma forma geral, as simulações baseadas em amplitudes de tensão definidas por Chaboche foram mais conservadoras do que os resultados a partir de amplitudes de tensão experimentais. Na maioria dos casos, isso se deve ao fato de as amplitudes de tensão simuladas serem maiores que as amplitudes experimentais, como visto na Tabela 5.4.

Para as situações onde as amplitudes de tensão simuladas e experimental são próximas (em baixas amplitudes de deformação), foi realizado um estudo mais aprofundado do cálculo do dano, sendo utilizado o pior caso, que corresponde a  $\gamma_a = 0,0026$ ,  $\tau_{exp} = 147MPa$  e  $\tau_{sim} = 146MPa$ . Foram comparados os resultados obtidos com histórias de carregamento geradas por Chaboche e os cálculos com dados experimentais. Para o ensaio considerado, tem-se que razão entre  $\Delta D_{Chaboche}$  e  $\Delta D_{Jiang}$  é 2,5. O fator que mais influencia essa diferença é  $\langle \sigma_{mr} - \sigma_o \rangle^m$ . Para o caso de amplitudes de tensão calculadas por Chaboche, tem-se que  $\sigma_o = 208,1697MPa$ , logo, o valor do termo em questão é:

$$\langle 252,8794 - 208,1697 \rangle^{1,5} = 298,953$$

Para o caso de amplitudes de tensão experimentais, utilizando-se  $\sigma_o = 220MPa$ , que foi o valor obtido por Jiang, o referido termo vale:

$$\langle 254,6115 - 220 \rangle^{1,5} = 203,6115$$

De fato, observa-se que a razão entre os dois valores obtidos corresponde a 1,47, que é o maior termo multiplicativo responsável pela diferença total constatada no cálculo do dano. Visto que  $\sigma_{mr}$  é muito próximo nos dois casos e que  $m$  tem o mesmo valor de 1,5,

o parâmetro  $\sigma_o$  é o principal determinante das diferenças de  $\Delta D$  observados para casos de baixa amplitude de deformação. Nessa situação, pequenas variações no valor de  $\sigma_o$  tem grande impacto na estimativa de dano. O termo  $(\sigma_{mr} - \sigma_o)^m$  pode gerar inconsistências ainda maiores, visto que  $m$  varia entre 0,5 e 3, dependendo do material.

No caso torcional, observou-se ainda maior influência do parâmetro  $a$  no cálculo do dano e, conseqüentemente, na estimativa de vida à fadiga. Para dados simulados,  $\zeta = 0,5$ , e, para dados experimentais,  $\zeta = 0,34$ . Constata-se uma diferença de 47% entre os valores obtidos. Logo, para os casos de baixa amplitude de deformação, Os termos  $\zeta$  e  $\sigma_o$  são as principais causas da diferença observada entre os resultados da Tabela 5.4 e da Figura 5.9.

### **6.3. Carregamento proporcional**

Observa-se na Tabela 5.5 e na Figura 5.10 que as simulações que não se encontraram dentro da faixa do fator 2 foram conservativas. O algoritmo de Chaboche foi implementado empregando-se um esquema de Euler explícito, exigindo-se, no caso de carregamentos proporcionais, uma discretização bastante refinada em termos de tempo. Os resultados apresentados no Capítulo 6 consideraram a discretização em 4000 passos por ciclo.

### **6.4. Carregamento não-proporcional**

Observa-se na Tabela 5.6 e na Figura 5.11 que os resultados obtidos sob carregamento não-proporcional produziram estimativas de vida à fadiga maiores do que o observado experimentalmente.

Neste caso, devido ao tipo de carregamento, ocorre um encruamento cíclico adicional, resultante da interação entre os deslocamentos que ocorre quando da rotação dos eixos principais. Logo, o aumento da não-proporcionalidade leva a uma intensificação do processo de acúmulo do dano à fadiga e redução da vida do material (Skibicki et al., 2014). Entretanto, o encruamento não-proporcional citado não consegue ser representado pelo modelo de Chaboche, o que explica as divergências identificadas e os resultados não-conservadores (Tanaka, 1994).

De fato, observa-se que, em casos onde as vidas estimadas estão fora da faixa do fator 2, as tensões normal e cisalhante simuladas apresentam valores maiores que o obtido experimentalmente, conforme mostrado na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Dados comparativos entre as amplitudes de tensão experimentais e as simuladas

$i$	$\sigma_{a \text{ exp}}$ (Mpa)	$\tau_{a \text{ exp}}$ (MPa)	$\sigma_{a \text{ sim}}$ (MPa)	$\tau_{a \text{ sim}}$ (MPa)
1	364	149	346	138
2	377	191	328	167
3	345	204	292	186
4	281	94	273	112
5	289	148	261	133
6	285	145	261	133
7	250	167	237	152
8	272	166	236	153
9	232	107	228	118
10	190	131	207	132

Esse mesmo comportamento pode ser observado na Figura 6.1.

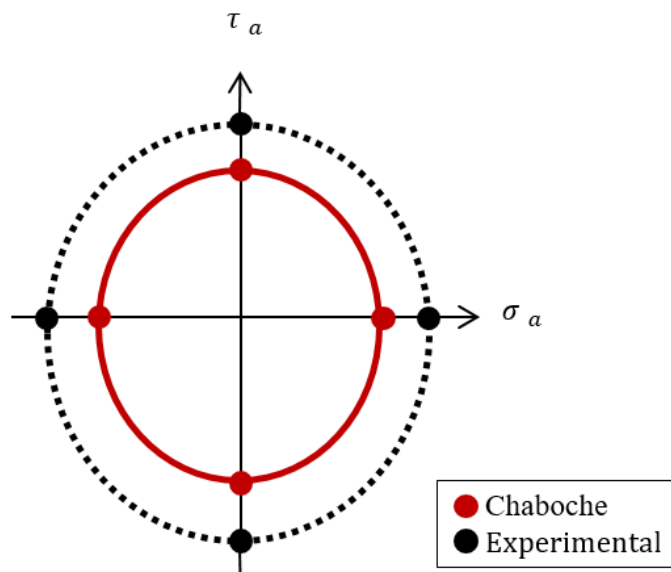


Figura 6.1: Gráfico esquemático comparando as amplitudes de tensão simuladas (Chaboche) e experimentais

Na Figura 6.1 fica claro que por apresentar menores amplitudes de tensão, o modelo de Chaboche produz maiores vidas do que o resultado experimental.

# Capítulo 7

## Conclusão

Este trabalho apresentou um estudo do modelo de estimativa de vida à fadiga sob carregamentos multiaxiais proposto por Jiang. Para sua validação, foram consideradas casos de trajetórias uniaxiais totalmente reversas, torção pura, proporcionais e elípticas não-proporcionais. Adicionalmente, os códigos computacionais elaborados neste trabalho permitem a aplicação do modelo não só em casos de amplitude constante, como também em carregamentos gerais.

Os resultados das simulações numéricas foram apresentados. Identificou-se que:

- para carregamentos axiais o modelo de Jiang apresentou resultados consistentes, exceto para baixas amplitudes de deformação, onde as estimativas foram conservadoras. Nestes casos, o principal fator determinante das diferenças observadas no cálculo do dano foi o parâmetro  $\sigma_o$ ;
- no caso torcional, de uma forma geral, as estimativas provenientes das amplitudes de tensões simuladas resultaram em vidas menores do que em casos de amplitude de tensão experimentais. Isso se deve essencialmente ao fato de as amplitudes de tensão simuladas serem maiores que as amplitudes experimentais. Nos casos específicos de baixas amplitudes de deformação, onde as amplitudes de tensão experimental e simulada são próximas, as principais diferenças nos resultados se devem aos parâmetros  $\sigma_o$  e  $a$ ;
- nos casos de carregamentos proporcionais, os resultados obtidos foram conservativos; e
- para trajetórias elípticas não-proporcionais foram observados resultados não-conservativos, devido à utilização do modelo constitutivo de Chaboche, que não conseguiu representar o encruamento não-proporcional que ocorre com o material.

Dessa forma, conclui-se que o modelo de Jiang é adequado para estimar a vida a fadiga do aço 1045 quando utilizado o modelo constitutivo de Chaboche para gerar as trajetórias de carregamento. No caso de carregamentos não-proporcionais, modelos de plasticidade

cíclica mais elaborados – capazes de descrever corretamente o encruamento não-proporcional – fazem-se necessários.



# Capítulo 8

## Trabalhos Futuros

Como proposta de trabalhos futuros, sugere-se a validação do modelo de Jiang para casos de carregamentos mais gerais, sendo explorada a interferência da tensão de memória nos resultados. Além disso, podem ser considerados outros modelos de plasticidade cíclica, como o proposto por Zhang & Jiang (2008).

## Referências bibliográficas

- Armstrong, P.J. & Frederick, C.O. (1966). A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, *G.E.G.B. Report RD/B/N 731*
- Bannantine, J.A., Comer, J.J. & Handrock, J.L. (1989). *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*. New Jersey: Prentice Hall
- Bannantine, J.A. & Socie, D.F. (1989, abril). A variable amplitude multiaxial fatigue life prediction method. *Proceedings of the Third International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue*, Stuttgart, FRG, Alemanha, 12.1-12.20
- Brown, M.W. & Miller, K.J. (1973). A theory for fatigue under multiaxial stress-strain conditions. *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, 187, 745-756
- Castro, J.T.P. & Meggiolaro, M.A. (2009). *Fadiga, Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço. Volume 1 – Iniciação de Trincas*. 494 p.
- Chaboche, J.L. (1986). Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 2, 149-188
- Chu, C. C., Conle, F.A. & Bonnen, J.F. (1993). Multiaxial stress-strain modeling and fatigue life prediction of SAE axle shafts. In: D.L. McDowell & R. Ellis (Ed.). *Advances in multiaxial fatigue*. Philadelphia: American Society for Testing and Materials. 37-54
- Dang Van, K. (1999). Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach. In: K. Dang Van & V. Papadopoulos (Ed.) *High Cycle Metal Fatigue: from Theory to Applications*. Wien: Springer
- Dowling, N.E. (2007). *Mechanical Behavior of Materials*. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.
- Ellyin, F. (1989). Cyclic strain energy density as a criterion for multiaxial fatigue failure. In: M.W. Brown & Miller, K.J. *Biaxial and multiaxial fatigue*. London: Mechanical Engineering Publications, 571-583
- Fadag, H.A., Mall, S. & Jain, V.K. (2008). A finite element analysis of fretting fatigue crack growth behavior in Ti-6Al-4V. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(6), 1384-1399

- Fatemi, A. & Socie, D.F. (1988). A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 11(3), 149-166
- Fatemi, A. & Stephens, R.I. (1989). Biaxial fatigue of 1045 steel under in-phase and 90 deg out-of-phase loading conditions. In: SAE. *Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments. AE-14*. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 120-137
- Fatemi, A. & Yang, L. (1998). Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials. *International Journal of Fatigue*, 20(1), 9-34
- Findley, W.N. (1953). Combined-stress fatigue strength of 76S-T61 aluminum alloy with superimposed mean stress and corrections for yielding. Washington: National Advisory Committee for Aeronautics
- Findley, W.N. (1959). A Theory for the Effect of Mean Stress on Fatigue of Metals Under Combined Torsion and Axial Load or Bending. *Journal of Engineering for Industry*, 301-306
- Garud, Y.S. (1981). A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 103, 118-126
- Glinka, G, Wang, G & Plumtree, A. (1995). Mean stress effects in multiaxial fatigue. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 18(7/8), 755-764
- Haldford, G.R. (1966). The energy required for fatigue. *Journal of Materials*, 1(1), 3-18
- Hua, C.T & Socie, D.F. (1984). Fatigue damage in 1045 steel under constant amplitude biaxial loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 7(3), 165-179
- Inglis, N.P. (1927). Hysteresis and fatigue of Wöhler rotating cantilever specimen, *The Metallurgist*, 23-27.
- Jiang, Y. (2000). A fatigue criterion for general multiaxial loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 23, 19-32
- Kujawski, D. (1989). Fatigue failure criterion based on strain energy density. *Mechanika Teoretyczna I Stozowana*, 1(27), 1-8

- Kurath, P., Downing, S.D. & Galliard, D. (1989). In: SAE (1989). *Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments. AE-14*. Warrendale: Society of Automotive Engineers. 12-31
- Liu, K.C. (1993). A method based on Virtual Strain-Energy parameters for multiaxial fatigue life prediction. In: D.L. McDowell & R. Ellis (Ed.). *Advances in multiaxial fatigue*. Philadelphia: American Society for Testing and Materials. 67-84
- McDiarmid, D.L. (1994). A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 17(12), 1475-1484
- McDowell, D. & Ellis, R. (1993). *Advances in multiaxial fatigue*. Ann Arbor: American Society for Testing and Materials
- Meggiolaro, M.A., Castro, J.T.P. & Miranda, A.C.O. (2009). Evaluation of multiaxial stress-strain models and fatigue life prediction methods under proportional loading. In H.S. da Costa Mattos & M. Alves (Ed.). *Mechanics of Solids in Brazil 2009*. Rio de Janeiro: Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 365-384
- Mitchell, M.R. & Buck, O. (1994). *Cyclic deformation, fracture, and nondestructive evaluation of advanced materials*. Baltimore: American Society for Testing and Materials
- Morrow, J. D. (1965). Cyclic plastic strain energy and fatigue of metals. In: *Internal Friction, Damping and Cyclic Plasticity*. ASTM STP 378. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 45-84
- Navarro, C., García, M. & Dominguez, J. (2003). A procedure for estimating the total life in fretting fatigue. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 26(5), 459-468
- Petas, M., Mroz, K. & Dolinski, K. (2013). Damage modeling in graded layer system. *Acta Mechanica et Automatica*, 7(2), 99-106
- Prager, W. (1949). Recent developments in the Mathematical Theory of Plasticity. *Journal of Applied Physics*, 20, 235-241
- SAE (1989). *Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments. AE-14*. Warrendale: Society of Automotive Engineers.

- Skibick, D., Sempruch, J. & Pejkowski, L. (2014). Model of non-proportional fatigue load in the form of block load spectrum. *Mat. –wiss. u. Werkstofftech*, 45(2), 68-78
- Smith, R.N., Watson, P. & Topper, T.H. (1970). A stress-strain parameter for the fatigue of metals. *Journal of Materials*, 5(4), 767-778
- Stephens, R.I., Fatemi, A., Stephens, R.R.& Fuchs, H. (2001). *Metal fatigue in engineering*. John Wiley & Sons
- Socie, D. & Marquis, G. (2000). *Multiaxial fatigue*. Society of Automotive Engineers
- Tanaka, E. (1994). A nonproportionality parameter and a cyclic viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects on isotropic hardening. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 13(2), 155-173
- You, B.R. & Lee, S.B. (1996). A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals. *International Journal of Fatigue*, 18(4), 235-244
- Zhang, J. & Jiang, Y. (2008). Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation of a pure polycrystalline copper. *International Journal of Plasticity*, 24, 1890-1915.