Conjuntos Excepcionais e Alguns Problemas de Mahler

Anna Carolina Martins Machado Lafetá

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

BRASÍLIA, DF

2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

ML162c

Martins Machado Lafetá, Anna Carolina
Conjuntos Excepcionais e Alguns Problemas de Mahler / Anna Carolina Martins Machado Lafetá; orientador Diego Marques Ferreira. -- Brasília, 2017.
55 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. Conjuntos excepcionais. 2. Funções transcendentes. 3. Liouville. 4. Problemas de Mahler. I. Marques Ferreira, Diego, orient. II. Título.

Conjuntos Excepcionais e Alguns Problemas de Mahler

Anna Carolina Martins Machado Lafetá

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Teoria dos Números.

Orientador: Prof. Dr. Diego Marques

BRASÍLIA, DF

2017

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Jesus e a Nossa Senhora, por serem meu amparo nos momentos de desespero e a melhor companhia nos momentos de alegria. Sem eles, eu não estaria aqui e nada disso seria possível.

Em segundo lugar, agradeço à minha família: à minha mãe, por sempre dar todo o apoio que preciso, por acreditar em mim e me incentivar; à minha irmã, por sempre torcer por mim e me dar a certeza de que vou conseguir o que quero; ao meu pai, pelo amor incondicional e por nunca duvidar do meu potencial; ao Claudino, por todo o apoio, por sempre querer o meu bem, e por se alegrar com as minhas vitórias; à minha prima Claudinha, por todos os conselhos e orações.

Agradeço também ao meu namorado, Yerko, por toda atenção e carinho, pela paciência e compreensão, e por toda ajuda que sempre me dá quando eu preciso.

Agradeço ao meu orientador e amigo, professor Diego Marques, que desde a graduação me incentivou. Agradeço pela paciência nas orientações, tanto no PIBIC, quanto no mestrado. Agradeço por toda ajuda que me deu agora, na busca pelo doutorado e por me ensinar que não posso servir a dois senhores ao mesmo tempo.

Agradeço ao professor Hemar Godinho, não só por aceitar participar da minha banca e pelas sugestões, mas também pelos ótimos ensinamentos que obtive nas disciplinas que ele ministrou.

Agradeço à professora Ana Paula Chaves, por se disponibilizar a participar da minha banca e pelas excelentes sugestões à minha dissertação.

Agradeço às minhas lindas amigas, Anna e Ana, presentes desse mestrado, pelos dias de estudo, de fofoca e de comida, e porque sei que sempre teremos uma a outra (nosso trio é top!!); agradeço a todos os meus amigos, mas em especial, agradeço ao Jojo, por todas as vezes que me explicou coisas quando eu estava desesperada sem entender nada (#josimarsalvação), e por todas as noites que passamos tomando Delirius!!! agradeço a Alessandra, pela paciência de me ouvir ensaiar essa dissertação inúmeras vezes; agradeço aos meus amigos Lelê e Gui, que estão comigo desde a graduação, companheiros de estudos e de jogos! Agradeço também a Elaine, por todas as vezes que apresentamos trabalhos juntas, e pela prestatividade que sempre demonstrou; agradeço ao Jean, por tantas vezes tirar minhas dúvidas, por rir das minhas piadas, e por não desistir de certos eventos, apesar do calor de matar... (agradeço a Elaine por isso também);

Agradeço a todos os amigos da Teoria dos Números, Dai, Gérsica, Bruno, Vinícius, Lucimeire, e a tantos outros que estavam comigo durante esse mestrado, em especial ao Alex e ao Timtim, que fizeram o curso de medida o mais engraçado que poderia ser e pela pressão exercida com a contagem regressiva nas vésperas da minha dissertação.

Agradeço também à minha galera: Bea, Leo e Dé! Meus animaizinhos preferidos, que me viram entrar na psicologia, sair da psicologia, entrar na matemática, e depois no mestrado. Acompanharam meus planos de vida e viram eles darem em coisas completamente diferentes. Dez anos não é pouca coisa não!!

Por fim, agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Seja f uma função inteira e transcendente. Denotamos por S_f o conjunto de todos os $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tais que $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$ (o conjunto excepcional de f). Nessa dissertação, mostraremos quais subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$ podem ser o conjunto excepcional de alguma função inteira e transcendente.

Além disso, trataremos de dois problemas de Mahler relacionados a propriedades de funções inteiras e transcendentes. Mostraremos que existem funções inteiras e transcendentes que levam um subconjunto dos números de Liouville nele mesmo e daremos uma resposta positiva ao Problema B de Mahler:

Problema B: Existe uma função inteira e transcendente $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ com coeficientes racionais tal que $f(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ e $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$?

Palavras chave: *Conjuntos excepcionais; funções transcendentes; Liouville; problemas de Mahler*

Abstract

Let f be an entire transcendental function. We denote by S_f the set of all $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ such that $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$ (excepcional set of f). Throughout this dissertation, we will show which subsets of $\overline{\mathbb{Q}}$ can be the excepcional set of some entire transcendental function.

Moreover, we will deal with two of Mahler's problems related to properties of entire transcendental functions. We will show that there are entire transcendental functions that map a subset of Liouville numbers in itself and we will give a positive answer for Mahler's Problem B:

Problem B: Is there an entire transcendental function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ with rational coefficients such that $f(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ e $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$?

Keywords: *Excepcional sets; transcendental functions; Liouville; Mahler's problems*

Sumário

Introdução

A teoria dos números transcendentes tem seu início marcado em 1844, quando Liouville [13] descobriu uma propriedade que todos os números algébricos devem satisfazer e assim, conseguiu apresentar exemplos de números que não satisfaziam tal propriedade, dando então os primeiros exemplos de números transcendentes. Tal resultado ficou conhecido como o *Teorema de Liouville.*

Teorema 1 (Liouville)**.** *Seja α um número algébrico real de grau $n > 1$, então existe uma constante $C(\alpha) := C > 0$ tal que $|\alpha - p/q| > Cq^{-n}$, para todo $p/q \in \mathbb{Q}$ e $q > 1$.*

Usando a propriedade por ele descoberta, Liouville, em 1851, foi capaz de provar a transcendência de uma classe de números, os quais hoje são conhecidos como *números de Liouville.* Um número real ξ é chamado de número de Liouville se existe uma sequência de racionais $(p_k/q_k)_{k\geq 1}$, com $q_k > 1$ tal que

$$0 < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < {q_k}^{-k}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

O conjunto dos números de Liouville é não enumerável e é denotado por $\mathbb{L}$. No entanto, quase todo número transcendente não é um número de Liouville, como é o caso dos números e e π, por exemplo.

A transcendência de e foi provada em 1873, por Hermite [7]. Em 1882, Lindemann [12] generalizou o métodos de Hermite, provando que e^{α} é transcendente para todo α algébrico diferente de 0, obtendo então, o seguinte teorema:

Teorema 2 (Hermite-Lindemann)**.** *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos distintos. Então $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ são linearmente independentes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.*

No entanto, a teoria dos números transcendentes não aborda somente assuntos relacionados com *números* transcendentes. Nessa área de pesquisa, estuda-se também o comportamento e propriedades de *funções transcendentes*, e é esse o foco que teremos nessa dissertação.

Muitos matemáticos apresentaram grande interesse no estudo de funções transcendentes, como é o caso de Weierstrass e Mahler, por exemplo. Eles estudaram o comportamento aritmético de funções transcendentes e deixaram alguns questionamentos para as gerações futuras. Nesse trabalho, apresentaremos algumas dessas perguntas e alguns resultados sobre elas.

Sabendo que a função exponencial, $f(x) = e^x$, é uma função transcendente, e conhecendo o Teorema de Hermite-Lindemann, um questionamento natural é:

Questão 1. *Uma função inteira e transcendente, em geral, leva números algébricos em transcendentes?*

Em 1886, Strauss tentou provar que uma função analítica e transcendente não pode assumir valores racionais em todos os pontos racionais de seu domínio. No entanto, no mesmo ano, Weierstrass deu a Strauss um contraexemplo, respondendo então negativativamente à Questão 1. Weierstrass definiu então o conjunto excepcional S_f de uma função f inteira e transcendente como como $S_f := \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$ e, partir de seus estudos, levantou ainda duas questões:

Questão 2. *Existe uma função f inteira e transcendente tal que $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$?*

Questão 3. *Para quais conjuntos $A \subseteq \mathbb{C}$, existe uma função f inteira e transcendente tal que $S_f = A$?*

Motivado por essas perguntas, Stäckel [29], em 1895, demonstrou que se Σ é um conjunto enumerável e $T \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto denso, então existe uma função inteira e transcendente tal que $f(\Sigma) \subseteq T$, respondendo à primeira questão de Weierstrass. Alguns anos depois, Stäckel [30] construiu ainda uma função inteira e transcendente tal que $f^{(s)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $s \geq 0$.

Em 2010, seguindo essa linha de pesquisa, Huang, Marques e Mereb [8], generalizaram os resultados de Stäckel e deram uma resposta à segunda questão de

Weierstrass, e esse será o assunto do Capítulo 2, deste trabalho. Daremos as provas dos seguintes teoremas:

Teorema 2.5. *Seja $A \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto enumerável e, para cada $s \geq 0$ e $\alpha \in A$, fixe um conjunto denso $E_{\alpha,s} \subseteq \mathbb{C}$. Então existe uma função inteira e transcendente f tal que $f^{(s)}(\alpha) \in E_{\alpha,s}$ para todo $\alpha \in A$ e $s \geq 0$.*

Teorema 2.6. *Se $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, então existe uma função inteira e transcendente f tal que $S_{f^{(s)}} = A$ para todo $s \geq 0$.*

Como mencionado anteriormente, o estudo de funções transcendentes também foi um grande tópico de pesquisa de Mahler. Assim como Weierstrass, ele deixou alguns problemas em abertos. Nos capítulos 3 e 4 dessa dissertação, nos dedicaremos a estudar dois desses problemas.

O primeiro deles refere-se ao comportamento de funções transcendentes no conjunto dos números de Liouville. Sabe-se, por exemplo, que se ξ é um número de Liouville, então sua imagem por qualquer função racional com coeficientes racionais é também um número de Liouville [16].

Mahler estava interessado em saber se existia alguma função inteira e transcendente tal que $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$. Em [20], Marques e Moreira, deram uma resposta parcial a essa pergunta. Eles demonstraram que existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes que mapeiam um certo subconjunto dos números de Liouville, denotado por $\mathbb{L}_{ultra}$, nele mesmo. Mais precisamente, os autores provaram que:

Teorema 3.2. *O conjunto $\Sigma_{\mathbb{L}_{ultra}}(\mathbb{C})$ é não enumerável.*

Aqui, a notação $\Sigma_A(B)$ significa o conjunto das funções transcendentes e analíticas $f : B \to B$ tais que $f(A) \subseteq A$. Denotando $\mathrm{den}(p/q)$ como o denominador do número racional p/q, os autores provaram que:

Teorema 3.3. *Existe uma quantidade não enumerável de funções $f \in \Sigma_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ com $\frac{1}{2} < f'(x) < \frac{3}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tais que*

$$den(f(p/q)) < q^{8q^2}, \tag{1}$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$ *com* $q > 1$.

Mahler se interessava ainda no comportamento aritmético de funções transcendentes no conjunto dos números algébricos, e como essas funções se comportariam quando fossem impostas certas condições sobre seus coeficientes na sua representação em série de Taylor. No capítulo 3 de um de seus livros, Mahler [15] deixa três problemas em aberto, os quais são denotados por problemas A, B e C.

O Problema B de Mahler pode ser enunciado da seguinte forma:

Problema B: Existe uma função inteira e transcendente $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ com coeficientes racionais tal que $f(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ e $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$?

O caso real do Problema B de Mahler foi resolvido por Marques [19] e, o caso complexo foi resolvido por Marques e Moreira [21].

No capítulo 4, estudaremos os casos real e complexo do Problema B de Mahler. Mais precisamente, daremos as provas dos seguintes teoremas:

Teorema 4.1 *Seja* A *um subconjunto denso e enumerável de* $\mathbb{R}$. *Então existe uma quantidade não enumerável de funções analíticas, bijetivas e hipertranscendentes* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com coeficientes racionais na sua série de MacLaurin e tal que* $f(A) = A$.

Teorema 4.3 *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes com coeficientes racionais tais que* $f(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ *e* $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, daremos alguns resultados necessários para o pleno entendimento dessa dissertação.

1.1 Definições e teoremas clássicos

Dizemos que um número complexo não nulo α é *algébrico* se existir um polinômio $p(z) \in \mathbb{Z}[z]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Um número que não é algébrico é dito *transcendente*. Além disso, dizemos que um número algébrico α tem grau m se o polinômio com coeficientes inteiros de menor grau do qual α é raiz tem grau m.

Alguns resultados clássicos em teoria dos números transcendentes nos dão boas ferramentas para provar a transcendência de certos números, o que, na maioria das vezes, não é uma tarefa fácil. Começamos por enunciar o Teorema de Hermite-Lindemann [12].

Teorema 1.1 (Hermite-Lindemann)**.** *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos distintos. Então $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ são linearmente independentes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Uma consequência muito importante desse teorema é o fato de que e^{α} é transcendente para todo α algébrico diferente de 0. Como outras consequências do teorema, obtemos que os números $e^{\sqrt{2}}$ e e^{i} são transcendentes, assim como $\log 2$ e π, já que $e^{\log 2} = 2$ e $e^{i\pi} = -1$ são algébricos.

No Congresso Internacional de Matemáticos de 1900, em Paris, Hilbert propôs uma lista com 23 problemas. O sétimo problema de Hilbert pergunta se o número α^β, com α e β algébricos, $\alpha \neq 0$ e β não racional é transcendente. Esse problema foi resolvido em 1934, por Gelfond [6] e Schneider [27], independentemente.

Teorema 1.2 (Gelfond-Scheneider). *Sejam α e β números algébricos, com $\alpha \neq 0$ ou 1, e β não racional. Então α^β é transcendente.*

Em particular, $2^{\sqrt{2}}, (-1)^{\sqrt{2}}$ e $e^\pi = i^{-2i}$ são transcendentes. Como a soma de números transcendentes pode ser algébrica ($e + (-e)$, por exemplo), podem surgir questionamentos sobre a natureza da soma de números transcendentes como no teorema de Hermite-Lindemann. Por exemplo, $e + e^{\sqrt{2}}$ é transcendente?

Além disso, um outro teorema muito importante para o estudo dos números algébricos e transcendentes, é devido a Alan Baker.

Teorema 1.3 (Baker). *Sejam $\beta_0, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos diferentes de 0. Então, $e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1} \ldots \alpha_n^{\beta_n}$ é transcendente.*

1.2 Base de transcendência

Seja $M|K$ um extensão transcendente, ou seja, a dimensão de M, quando visto como espaço vetorial sobre K, é infinita. Dizemos que um conjunto $\mathcal{B}$ é uma *base de transcendência* de $M|K$ se:

1. $\mathcal{B}$ é algebricamente independente sobre K;

2. M é uma extensão algébrica de $K(\mathcal{B})$.

É possível mostrar que quaisquer duas bases de transcendência de uma determinada extensão têm a mesma cardinalidade. Desse modo, definimos o *grau de transcendência* de uma extensão como a cardinalidade da base de transcendência de tal extensão. O grau de transcendência de uma extensão pode ser finito ou infinito. Considerando, por exemplo a extensão $\mathbb{Q}(\pi)$ de $\mathbb{Q}$, é fácil ver que o grau de transcendência dessa extensão é 1, afinal, $\{\pi\}$ é uma base de transcendência para essa extensão. Por outro lado, sabe-se que o grau de transcendência de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ é infinito.

Esse e outros resultados podem ser encontrados em [10, capítulo 8].

1.3 Funções transcendentes

Começamos essa seção, com a definição de função transcendente, que será o objeto principal do nosso estudo ao longo dessa dissertação.

Definição 1.4. *Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, é algébrica se existe um polinômio $P(x, y)$ não nulo com coeficientes complexos tal que $P(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in D$. Uma função que não é algébrica é dita transcendente.*

Claramente, todo polinômio é uma função algébrica. As funções trigonométricas, exponencial e suas inversas são exemplos de funções transcendentes.

Um resultado muito útil e bastante conhecido é o fato de que uma função f inteira é algébrica se, e somente se, é um polinômio (uma prova desse fato pode ser encontrada em [18]). Nessa dissertação, em geral, trabalharemos com funções inteiras, logo, pelo fato mencionado, para garantir a transcendência dessas funções, basta mostrar que f não é um polinômio.

Colocando algumas condições a mais sobre uma função f, podemos definir também funções *hipertranscendentes*.

Definição 1.5. *Dizemos que uma função f é hipertranscendente, se para todo $n \geq 0$, as funções $z, f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$. Uma função que não é hipertranscendente é chamada hipotranscendente.*

Essa definição é devida a Morduhai-Boltovoskoi [24], e essas funções geralmente aparecem como soluções de equações funcionais, como é o caso, por exemplo, da função zeta de Riemann [26]. Além disso, é fácil ver que toda função hipertranscendente é também transcendente. No entanto, a recíproca não é verdadeira. Um exemplo de função transcendente que não é hipertranscendete é a função exponencial. Afinal, temos que se $P(x_0, x_1, x_2) = x_1 - x_2$ e $f(z) = e^z$, então $P(z, f(z), f'(z)) = e^z - e^z = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

1.4 Alguns resultados de análise complexa

No estudo das funções transcendentes, é bastante importante um certo conhecimento de análise complexa, pois muitas das técnicas utilizadas na resolução de problemas em teoria dos números transcendentes têm base na análise complexa. Nessa seção, citaremos alguns resultados (sem suas demonstrações) que serão essenciais no decorrer dessa dissertação.

Iniciamos essa seção com algumas definições básicas, para depois seguir com os resultados necessários.

Definição 1.6. *Um subconjunto não vazio $D \subseteq \mathbb{C}$ é chamado um domínio se D é aberto e conexo por caminhos.*

Definição 1.7. *Seja U um aberto. Dizemos que uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa se $f'(z)$ existe para todo $z \in U$. Se $U = \mathbb{C}$, dizemos que a função f é inteira.*

Definição 1.8. *Chamamos de curva de Jordan curvas definidas por caminhos fechados e simples.*

Por fim, definiremos também o *Wronskiano* de n funções, pois esse será um conceito útil no último capítulo dessa dissertação. Se $f_1, \ldots, f_n$ são funções complexas $(n-1)$ diferenciáveis em um domínio D, então, o Wronskiano de $f_1, \ldots, f_n$ é dado por:

$$W(f_1, \ldots, f_n)(z) = \det \begin{pmatrix} f_1(z) & f_2(z) & \cdots & f_m(z) \\ f_1'(z) & f_2'(z) & \cdots & f_m'(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(z) & f_2^{(m-1)}(z) & \cdots & f_m^{(m-1)}(z) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Um resultado que relaciona o Wronskiano com a independência linear de n funções pode ser visto a seguir (uma prova desse resultado pode ser encontrada em [9, p. 21, Teorema 3.7]):

Teorema 1.9. *As funções $f_1, \ldots, f_n$ holomorfas em $D \subseteq \mathbb{C}$ são linearmente dependentes em D se, e somente se, $W(f_1, \ldots, f_n)(z) = 0$ para todo $z \in D$*

Uma função f pode ser definida como o limite de uma sequência de funções ou como o somatório infinito de funções. Desse modo, é importante saber como essa função, definida como um limite, se comportará. Informações sobre a sequência de funções que a define podem fornecer alguns dados sobre a função f. As demonstracões dos teoremas 1.10 e 1.11 abaixo podem ser encontradas em [25].

Teorema 1.10. *Uma sequência de funções holomorfas em U que converge nas partes compactas de U converge para uma função holomorfa.*

Teorema 1.11. *Se uma série de funções holomorfas em U, $\sum_{n\geq 0} f_n$, converge uniformemente nas partes compactas de U para f, então f também é holomorfa e, além disso, para todo $k \geq 1$, temos:*

$$\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)} = f^{(k)}.$$

Outro teorema de extrema importância, que será bastante utilizado no Capítulo 4 é o famoso Teorema de Rouché, que relaciona a quantidade de zeros de duas funções em um determinado conjunto com o comportamento delas na fronteira. Para uma prova do resultado abaixo, o leitor pode remeter-se a [28, capítulo 6].

Teorema 1.12 (Rouché)**.** *Sejam f e g duas funções holomorfas, ambas definidas no domínio $D \subseteq \mathbb{C}$. Seja $V \subset D$ uma região fechada e limitada cuja fronteira ∂V é uma curva de Jordan suave por partes, com $V \backslash \partial V$ um domínio. Se*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{para todo } z \in \partial V,$$

então f e g tem o mesmo número de zeros no interior de V, cada um deles contado tantas vezes quanto for sua multiplicidade.

Enunciamos ainda o princípio de identidade para funções inteiras (a demonstração pode ser encontrada em [11]), teorema que também terá fundamental importância no último capítulo dessa dissertação:

Teorema 1.13 (princípio de identidade para funções inteiras)**.** *Sejam f e g funções inteiras.*

1. *Se f é não constante, então o conjunto dos zeros de f é um conjunto discreto;*

2. *Se S é um conjunto não discreto em $\mathbb{C}$ e $f(z) = g(z)$ em S, temos que $f(z) = g(z)$ em $\mathbb{C}$.*

Finalizamos esse capítulo com a importante observação de que uma função inteira tendo inversa deve ser linear, e portanto, algébrica (esse resultado é uma consequência do Teorema de Casorati-Weierstrass).

Capítulo 2

Conjuntos Excepcionais de Funções Transcendentes

Neste capítulo, abordaremos a definição de conjunto excepcional de funções transcendentes, daremos alguns exemplos e apresentaremos dois teoremas que dão condições suficientes para que um determinado conjunto seja o conjunto excepcional de funções transcendentes.

Definição 2.1. *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira e transcendente. Denotamos por S_f o conjunto excepcional de f como sendo o conjunto $\{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$.*

Damos aqui alguns exemplos para clarificar a definição.

Exemplo 2.2. *Qualquer subconjunto finito $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ é um conjunto excepcional de uma função transcendente.*

Basta considerar a função $f_1(z) = e^{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)}$ e notar que se z é algébrico diferente de $\alpha_i, i = 1, \ldots, n$, então $(z - \alpha_1)\cdots(z - \alpha_n)$ também é um algébrico diferente de 0. Desse modo, bastar aplicar o Teorema de Hermite-Lindemann.

Exemplo 2.3. *Se $f_2(z) = e^z + e^{z+1}$ e $f_3(z) = e^{z\pi+1}$, então $S_{f_2} = S_{f_3} = \varnothing$*

Para a função $f_2(z)$, note primeiramente que, se $z = 0$, então $f_2(0) = 1 + e \notin \overline{\mathbb{Q}}$, se $z = -1$, então $f_2(-1) = \frac{1}{e} + 1 \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Assim sendo, suponha $z \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{-1, 0\}$. Como z e $z+1$ são distintos e diferentes de 0, pelo teorema de Hermite-Lindemann, $f_2(z)$ é transcendente. Logo, $S_{f_2} = \varnothing$.

Para $f_3(z) = e^{z\pi+1}$, *observe que, se* $\beta, z \in \overline{\mathbb{Q}}$, *então* $e^{z\pi+1} = \beta$ *implica* $e^{i(z\pi+1)} = \beta^i$. *Logo,* $\beta^i = e^{iz\pi+i} = e^i(-1)^z$ *implica* $e^i(-1)^z\beta^{-i} = 1$. *Mas, pelo teorema de Baker,* $e^i(-1)^z\beta^{-i}$ *deve ser transcendente. Concluimos então que* $S_{f_3} = \varnothing$.

Exemplo 2.4. *Alguns conjuntos infinitos bem conhecidos são conjuntos excepcionais; por exemplo, se* $f_4(z) = 2^z$ *e* $f_5(z) = e^{i\pi z}$, *então,* $S_{f_4} = S_{f_5} = \mathbb{Q}$.

De fato, o teorema de Gelfond-Schneider afirma que se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}\backslash\{0,1\}$ *e* $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}\backslash\mathbb{Q}$, *então* α^β *é transcendente. Observe que, se* $p, q \in \mathbb{Z}$, *com* $q \geq 1$, *então* $f_4(\frac{p}{q}) = 2^{\frac{p}{q}}$ *é raiz de* $x^q - 2^p$. *Logo* $2^{\frac{p}{q}}$ *é algébrico e* $f_4(\mathbb{Q}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$. *Por outro lado, se* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}\backslash\mathbb{Q}$, *então pelo Teorema de Gelfond-Schneider* $f_4(\alpha) = 2^\alpha$ *é transcendente e* $S_{f_4} = \mathbb{Q}$. *Analogamente,* $S_{f_5} = \mathbb{Q}$, *pois basta notar que* $e^{i\pi z} = (-1)^z$ *e aplicar o Teorema de Gelfond-Schneider.*

A definição de conjunto excepcional foi dada primeiramente por Weierstrass e surge motivada pelo Teorema 1.1, afinal, a função exponencial $f(z) = e^z$ é uma função inteira e transcendente que leva todos os números algébricos, com excessão do 0, em números transcendentes. Um questionamento natural é portanto:

Questão 4. *Funções inteiras e transcendentes, em geral, levam números algébricos em transcendentes?*

Se a resposta fosse afirmativa, isso nos daria uma ferramenta muito útil para encontrar números transcendentes, e o conjunto excepcional de determinada função seria justamente o conjunto das excessões a essa suposta regra. No entanto, em 1886, Weierstrass deu um exemplo de uma função inteira e transcendente que levava os racionais em racionais, e levantou ainda duas questões:

Questão 5. *Existe uma função* f *inteira e transcendente tal que* $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$?

Questão 6. *Para quais conjuntos* $A \subseteq \mathbb{C}$, *existe uma função* f *inteira e transcendente tal que* $S_f = A$?

Em 1895, Stäckel [29] demonstrou que se Σ é um conjunto enumerável e $T \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto denso, então existe uma função inteira e transcendente tal que

$f(\Sigma) \subseteq T$. Alguns anos depois, Stäckel [30] construiu ainda uma função inteira e transcendente tal que $f^{(s)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $s \geq 0$.

O teorema abaixo é o resultado principal desse capítulo, foi provado por J. Huang, D. Marques e M. Mereb [8] e generaliza os dois resultados de Stäckel:

Teorema 2.5. *Seja $A \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto enumerável e, para cada $s \geq 0$ e $\alpha \in A$, fixe um conjunto denso $E_{\alpha,s} \subseteq \mathbb{C}$. Então existe uma função inteira e transcendente tal que $f^{(s)}(\alpha) \in E_{\alpha,s}$ para todo $\alpha \in A$ e $s \geq 0$.*

Além disso, utilizando o Teorema 2.5, os autores conseguem dar uma resposta surpreendente à segunda questão de Weierstrass: eles demonstram que dado qualquer subconjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, existe uma função f inteira e transcendente tal que o conjunto excepcional de f e de todas as suas derivadas é o conjunto A.

Teorema 2.6. *Se $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, então existe uma função inteira e transcendente tal que $S_{f^{(s)}} = A$ para todo $s \geq 0$.*

Marques em [17] provou ainda esses dois resultados para funções hipertranscendentes. Nosso objetivo, na próxima seção, é reconstruir em detalhes as demonstrações do teoremas 2.5 e 2.6.

2.1 Lemas auxiliares

Para demonstrar os teoremas 2.5 e 2.6, precisaremos primeiro de alguns lemas.

Lema 2.7. *Seja $\{P_n(z)\}_{n\geq 0}$ uma sequência de polinômios complexos, onde $deg(P_n) = n$. Além disso, seja $\{C_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de constantes positivas tal que $|P_n(z)| \leq C_n \max\{|z|, 1\}^n$. Se uma sequência de números complexos $\{a_n\}_{n\geq 0}$ satisfaz $|a_n| \leq 1/(C_n n!)$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$ converge absolutamente e uniformemente em qualquer conjunto compacto. Em particular, essa série define uma função inteira.*

Demonstração. Quando $|a_n| \leq \frac{1}{C_n n!}$, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||P_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_n n!} C_n \max\{|z|, 1\}^n = \exp(\max\{|z|, 1\}), \tag{2.1}$$

Assim, pelo teste M de Weierstrass, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$ converge absolutamente e uniformemente em qualquer conjunto compacto. Assim sendo, pelo Teorema 1.11, essa série produz uma função inteira. □

Enumerando o conjunto A do Teorema 2.5, podemos escrever $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ e, para $n \geq 1$, defina m_n e j_n por $n = 1+2+\cdots+m_n+j_n$, onde $m_n \geq 0$ e $1 \leq j_n \leq m_{n+1}$.

Exemplo 2.8.

- *n = 11*

  11 = 1 + 2 + 3 + 4 + 1. Então, $m_n = 4$ *e* $j_n = 1$.

Depois, construa uma sequência de polinômios colocando $P_0(z) = 1$ e definindo recursivamente:

$$P_n(z) = (z - \alpha_{j_n})P_{n-1}(z).$$

Listamos aqui, os primeiros polinômios:

$$\begin{aligned}
P_0(z) &= 1\\
P_1(z) &= (z-\alpha_1)\\
P_2(z) &= (z-\alpha_1)^2\\
P_3(z) &= (z-\alpha_1)^2(z-\alpha_2)\\
P_4(z) &= (z-\alpha_1)^3(z-\alpha_2)\\
P_5(z) &= (z-\alpha_1)^3(z-\alpha_2)^2\\
P_6(z) &= (z-\alpha_1)^3(z-\alpha_2)^2(z-\alpha_3)\\
P_7(z) &= (z-\alpha_1)^4(z-\alpha_2)^2(z-\alpha_3)\\
P_8(z) &= (z-\alpha_1)^4(z-\alpha_2)^3(z-\alpha_3).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Para facilitar a visualização dessa construção, observe a seguinte figura:

Seja agora $i_n = m_n + 1 - j_n$. Para quaisquer $i \geq 0$ e $j \geq 1$ dados, existe um único n tal que $i_n = i$ e $j_n = j$, sendo tal $n = \frac{1}{2}(i+j)(i+j-1)+j$. De fato, basta

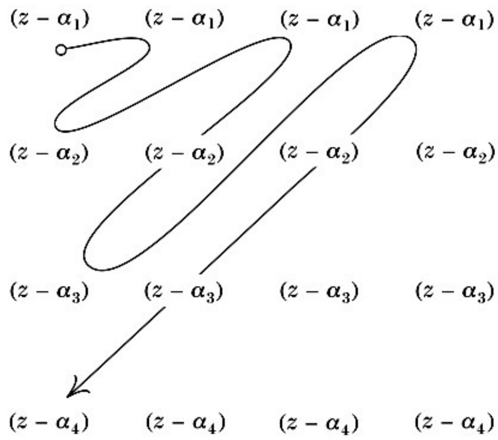

Figura 2.1: Construção dos Polinômios

notar que $n = 1 + 2 + \cdots + (i + j - 1) + j$. Pela definição de m_n, j_n e i_n, segue que $m_n = i + j - 1$, $j_n = j$ e $i_n = m_n + 1 - j_n = i$. Para verificar que tal n é único, basta observar que se existir um certo n_0 tal que $i_{n_0} = i$ e $j_{n_0} = j$, então teremos que $m_{n_0} = i + j - 1$ e $n_0 = 1 + \cdots + m_{n_0} + j = n$, isto é, n é único.

Listamos abaixo os primeiros valores de m_n, j_n e i_n:

n	m_n	j_n	i_n
1	0	1	0
2	1	1	1
3	1	2	0
4	2	1	2
5	2	2	1
6	2	3	0
7	3	1	3
8	3	2	2

Tabela 2.1: Alguns valores de m_n, j_n e i_n

Lema 2.9. *Para $n \geq 1$, temos que $P_{n-1}^{(i_n)}(\alpha_{j_n}) \neq 0$ e $P_l^{(i_n)}(\alpha_{j_n}) = 0$ quando $l \geq n$.*

Demonstração.

Parte I. Mostraremos que $P_{n-1}^{(i_n)}(\alpha_{j_n}) \neq 0$. De fato, da definição de $P_n(z)$, observe que:

$$\begin{aligned} P_l(z) &= (z-\alpha_{j_1})(z-\alpha_{j_2})\cdots(z-\alpha_{j_{l-1}})(z-\alpha_{j_l}) \\ &= \underbrace{(z-\alpha_1)}_{1}\underbrace{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}_{2}\underbrace{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)}_{3}\cdots(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{j_l}) \\ &= (z-\alpha_1)^{m_l}(z-\alpha_2)^{m_{l-1}}\cdots(z-\alpha_{m_l})(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{j_l}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

afinal, o último bloco na sequência antes de $(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{j_l})$ é o bloco $(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{m_l})$.

Claramente, temos que $j_n = 1$ ou $j_n = j_{n-1}+1$. Se $j_n = 1$, então $\alpha_{j_n} = \alpha_1$. Logo $\alpha_{j_n} = \alpha_1$ é raiz de

$$P_{n-1}(z) = (z-\alpha_1)^{m_{n-1}}\cdots(z-\alpha_{m_{n-1}})(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{j_{n-1}}), \tag{2.4}$$

com multiplicidade $m_{n-1}+1$.

Como estamos supondo que $j_n = 1$, segue que $m_n = m_{n-1}+1$, de onde obtemos que $i_n = m_n + 1 - j_n = m_{n-1}+1$.

Por outro lado, no caso em que $j_n = j_{n-1}+1$, temos que:

1. $j_n = j_k$, para algum $k < n-1$;

2. $j_n > j_k$ para todo $k \leq n-1$.

No primeiro caso, temos que $\alpha_{j_n} = \alpha_{j_k}$. Assim, α_{j_n} é raiz de

$$P_{n-1}(z) = (z-\alpha_1)^{m_{n-1}}\cdots(z-a_{j_k})^{m_{n-1}-j_k+1}\cdots(z-\alpha_{m_{n-1}})(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{j_{n-1}}),$$

com multiplicidade $m_{n-1}-j_k+1 = m_n - j_n + 1 = i_n$, pois nesse caso $m_n = m_{n-1}$. Por outro lado, se j_n é como no caso 2, então $j_n = m_n + 1$. Daí, α_{j_n} teria possível multiplicidade $i_n = m_n + 1 - j_n = 0$, logo não é raiz de $P_{n-1}(z)$.

Portanto, em todo caso, temos que α_{j_n} é um zero de $P_{n-1}(z)$ com multiplicidade i_n. Assim, $P_{n-1}^{(i_n)}(\alpha_{j_n}) \neq 0$, e a primeira parte do lema está provada.

Parte II: Vamos supor $l \geq n$, então mostraremos que α_{j_n} é um zero de $P_l(z)$ com multiplicidade pelo menos i_n+1. Logo, $P_l^{(i_n)}(\alpha_{j_n}) = 0$.

De fato, observe que, se $l \geq n$, então $m_l \geq m_n$. Estudemos inicialmente o caso em que $l = n$. Claramente, temos que $P_l(z) = P_n(z)$, com

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{m_n} \cdots (z - \alpha_{m_n})(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{j_n}).$$

Sendo assim, se $j_n > m_n$, segue que $j_n = m_n + 1$, o que implica que $i_n = 0$ e α_{j_n} tem multiplicidade 1. Logo $P_n^{(i_n)}(\alpha_{j_n}) = P_n^{(0)}(\alpha_{j_n}) = P_n(\alpha_{j_n}) = 0$.

No caso em que $l > n$, como a sequência dos m_n é não decrescente, temos que $m_n \leq m_l$ e $j_n \leq m_l$, pois sempre vale que $j_n < m_{n+1}$.

Segue então que

$$P_l(z) = (z - \alpha_1)^{m_l} \cdots (z - \alpha_{j_n})^{m_l - j_n + 1} \cdots (z - \alpha_{m_l})(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{j_l})$$

Logo, se $m_n = m_l$, então $j_n < j_l$ e α_{j_n} é raiz de $P_l(z)$ com multiplicidade $m_l - j_n + 2 = m_n - j_n + 2 = i_n + 1$.

Se, por outro lado, $m_n < m_l$, então j_n pode ser maior que j_l. Nesse caso, α_{j_n} teria multiplicidade $m_l - j_n + 1 > m_n - j_n + 1 = i_n$. Se $j_n \leq j_l$, então a multiplicidade de α_{j_n} é $m_l - j_n + 2 > i_n$. Assim, em todo caso, α_{j_n} tem multiplicidade pelo menos igual a $i_n + 1$. Logo, $P_l^{(i_n)}(\alpha_{j_n}) = 0$, e o resultado está provado. $\square$

Lema 2.10. *Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então $a_k = b_k$ para cada $k \geq 0$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que se $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então $\{a_k\}_{k \geq 0}$ é a sequência nula.

Observe, que $0 = g(\alpha_1) = a_0$. Suponha que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sejam todos iguais a 0. Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) &= a_0 P_0^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) + \cdots + a_{n-1} P_{n-1}^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) + \sum_{k=n}^{\infty} a_k P_k^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) \\ &= a_n P_n^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) + a_{n+1} P_{n+1}^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) + \ldots \end{aligned}$$

Pelo lema anterior, temos que $P_l^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) = 0$ quando $l \geq n + 1$. Assim, obtemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) = a_n P_n^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}})$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) = 0$ e, também pelo lema anterior, $P_n^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) \neq 0$, assim segue que $a_n = 0$.

Por indução, concluímos que $\{a_k\}_{k\geq 0}$ é identicamente nula. $\square$

2.2 Generalização do Teorema de Stäckel

Relembramos inicialmente o enunciado do Teorema 2.5:

Teorema 2.5. *Seja $A \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto enumerável e, para cada $s \geq 0$ e $\alpha \in A$, fixe um conjunto denso $E_{\alpha,s} \subseteq \mathbb{C}$. Então existe uma função inteira e transcendente f tal que $f^{(s)}(\alpha) \in E_{\alpha,s}$ para todo $\alpha \in A$ e $s \geq 0$.*

Demonstração. Vamos construir a função inteira e transcendente desejada fixando os coeficientes na série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z)$ recursivamente, onde a sequência $\{P_k\}_{k\geq 0}$ já foi definida.

Primeiramente, pelo Lema 2.7, a condição $|a_k| \leq \frac{1}{C_k k!}$ vai assegurar que $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z)$ define uma função inteira.

Agora, vamos fixar os coeficientes de maneira indutiva. Para $n \geq 1$, denote por $E_n = E_{\alpha_{j_n}, i_n}$ e sejam os números $\beta_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{(i_n)}(\alpha_{j_n})$. Vamos escolher os valores de cada a_k para que $\beta_n \in E_n = E_{\alpha_{j_n}, i_n}$ para todo $n \geq 1$.

Pelo Lema 2.9, sabemos que $P_l^{(i_n)}(\alpha_{j_n}) = 0$ quando $l \geq n$, então, β_n é, na verdade, a soma finita $\sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k^{(i_n)}(\alpha_{j_n})$. Note que, $\beta_1 = a_0 P_0(\alpha_1) = a_0$ e E_1 é denso. Podemos então fixar um valor de a_0 tal que $0 < |a_0| \leq \frac{1}{C_0}$ e $\beta_1 \in E_1$.

Agora, suponha que os valores de $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ estão fixados de modo que $0 < |a_k| \leq \frac{1}{C_k k!}$ e $\beta_k \in E_k$ para $0 \leq k \leq n$.

Pelo Lema 2.9, sabemos que $P_n^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) \neq 0$, então podemos escolher um valor apropriado de a_n tal que $0 < |a_n| \leq \frac{1}{C_n n!}$ e

$$\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) + a_n P_n^{(i_{n+1})}(\alpha_{j_{n+1}}) \in E_n.$$

Então agora, por indução, todos os a_k estão escolhidos tais que para todo $k \geq 0$ e $n \geq 1$, temos que $0 < |a_k| \leq \frac{1}{C_k k!}$ e $\beta_n \in E_n$. Deste modo, pelo Lema 2.7, a função $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z)$ é inteira e para qualquer $i \geq 0$ e $j \geq 1$, temos que

$f^{(i)}(\alpha_j) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{(i)}(\alpha_j) = \beta_n \in E_n = E_{\alpha_j,i}$, onde n é o único inteiro tal que $i = i_n$ e $j = j_n$.

Levando em consideração que todo polinômio pode ser escrito como uma combinação linear finita dos $\{P_k\}_{k\geq 1}$ e que todos os $\{a_k\}$ são diferentes de 0, segue, pelo Lema 2.10, que $f(z)$ não é um polinômio. De fato, se $f(z)$ é um polinômio de grau T, então como

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z) = \sum_{k=0}^{T} a_k P_k(z) + \sum_{k=T+1}^{\infty} a_k P_k(z) \\ &= \sum_{k=0}^{T} a_k P_k(z) + \sum_{l=0}^{\infty} a_{T+1+l} P_{T+1+l}(z), \end{aligned}$$

teríamos $\sum_{l=0}^{\infty} a_{T+1+l} P_{T+1+l}(z) = 0$ para todo z, pois o grau de $P_{T+1+l} > T$ para todo $l \geq 0$ e, pelo Lema 2.10, isso implica que $a_{T+1+l} = 0$ para todo $l \geq 0$, mas, por hipótese, $a_{T+1+l} \neq 0$ para todo $l \geq 0$. Logo, $f(z)$ não é um polinômio.

Agora, sabendo que uma função inteira é algébrica se, e somente se, é um polinômio, temos que $f(z)$ é a desejada função inteira e transcendente e a prova está completa. □

Terminamos essa seção com as seguintes observações:

- Em [23], Marques e Ramirez mostraram que todo conjunto $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ tal que S é fechado para conjugação complexa e $0 \in S$ é o conjunto excepcional de alguma função f inteira e transcendente com coeficientes racionais.
- Marques e Moreira, em [22], demonstram que todo conjunto $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ tal que S é fechado para conjugação complexa e $0 \in S$ é o conjunto excepcional de alguma função f analítica em $B(0,1)$ com coeficientes inteiros.

2.3 Subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$ que são conjuntos excepcionais

Teorema 2.6. *Se $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, então existe uma função inteira e transcendente f tal que $S_{f^{(s)}} = A$ para todo $s \geq 0$.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que A e $\overline{\mathbb{Q}}\backslash A$ são ambos infinitos. Então, podemos enumerar $\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ de forma que $A = \{\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n+1}, \ldots\}$.

Seja $E_{\alpha_{2n+2},s} = \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ e $E_{\alpha_{2n+1},s} = \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $n, s \geq 0$. Agora, pelo Teorema 2.5, existe uma função inteira e transcendente f com $f^{(s)}(\alpha_{2n+1}) \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $f^{(s)}(\alpha_{2n+2}) \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ para cada $n, s \geq 0$. Assim, fica claro que $S_{f^{(s)}} = A$.

Para o caso em que A é finito, suponha $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$. Tome $E_{\alpha_1,s} = E_{\alpha_2,s} = \cdots = E_{\alpha_m,s} = \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $s \geq 0$ e defina $E_{\alpha_k,s} = \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ para todo $k > m$, $s \geq 0$. Assim, $S_{f^{(s)}} = A$

Se, por outro lado, $\overline{\mathbb{Q}}\backslash A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ é finito, tome $E_{\alpha_1,s} = \ldots = E_{\alpha_m,s} = \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ para todo $s \geq 0$ e tome $E_{\alpha_k,s} = \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $k > m$ e $s \geq 0$, obtendo novamente que $S_{f^{(s)}} = A$. $\square$

Capítulo 3

Funções Transcendentes em Números de Liouville

Existem propriedades muito interessantes relacionando funções e números de Liouville. Sabe-se, por exemplo, que todo número real pode ser escrito como a soma e o produto (se o número real é diferente de 0) de dois números de Liouville [5]. Além disso, em seu livro, Maillet [16, Ch. III] demonstra algumas propriedades aritméticas interessantes dos números de Liouville, tais como o fato de que se f é uma função racional com coeficientes racionais e ξ é um número de Liouville, então $f(\xi)$ é também um número de Liouville.

Em 1886, Mahler [14] propôs algumas questões, e dentre elas, estava a seguinte:

Questão 7. *Existem funções inteiras e transcendentes $f(z)$ tal que se ξ é um número de Liouville, então $f(\xi)$ também o é?*

Mahler ressaltou que a dificuldade dessa questão estava no fato de que o conjunto dos números de Liouville é não enumerável.

Neste capítulo, investigaremos um problema relacionado à questão enunciada por Mahler. Mas, para isso, necessitaremos estabelecer algumas notações e definições.

Primeiramente, se $A \subseteq B$, denotemos por $\Sigma_A(B)$ o conjunto de todas as funções transcendentes e analíticas $f : B \to B$ tal que $f(A) \subseteq A$. Observe que a pergunta de Mahler pode ser reformulada para: $\sum_{\mathbb{L}}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$?

Além disso, definimos indutivamente $\exp^{[n]}(x) = \exp(\exp^{[n-1]}(x))$ e $\exp^{[0]}(x) = x$.

Definição 3.1. *Um número real ξ é chamado de número ultra-Liouville se, para todo inteiro positivo k, existirem infinitos números racionais p/q, com $q > 1$ tais que*

$$0 < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\exp^{[k]}(q)}.$$

O conjunto dos números ultra-Liouville será denotado por $\mathbb{L}_{ultra}$.

Com essa definição e notações em mente, mostraremos as provas do seguinte teorema, demonstrado originalmente por Marques e Moreira em [20]:

Teorema 3.2. *O conjunto $\Sigma_{\mathbb{L}_{ultra}}(\mathbb{C})$ é não enumerável.*

Para provar esse resultado, os autores demonstraram um resultado mais forte, sobre o comportamento de algumas funções em $\sum_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$. Para um número racional z, denotamos o denominador de z por $\operatorname{den}(z)$. Provaremos o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *Existe uma quantidade não enumerável de funções $f \in \Sigma_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ com $\frac{1}{2} < f'(x) < \frac{3}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tais que*

$$\operatorname{den}(f(p/q)) < q^{8q^2}, \tag{3.1}$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$ com $q > 1$. Em particular, $\operatorname{den}(f(p/q)) < e^{e^q} - 1$*, se $q \geq 7$.*

Inicialmente, mostraremos que o Teorema 3.3 implica o Teorema 3.2 e, em seguida, daremos a prova do Teorema 3.3.

3.1 Uma resposta parcial à pergunta de Mahler

Prova que o Teorema 3.3 implica o Teorema 3.2

Dado um número ultra-Liouville ξ e um inteiro positivo k, existe uma infinidade de números racionais p/q com $q \geq 7$ tais que

$$0 < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\exp^{[k+2]}(q)}. \tag{3.2}$$

Se f é uma função como no Teorema 3.3, então pelo Teorema do Valor Médio, obtemos que

$$\left|f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \frac{3}{2}\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{3}{2\exp^{[k+2]}(q)}. \tag{3.3}$$

Sabemos que $f(p/q) = a/b$, com $b < e^{e^q} - 1$. Então, vamos mostrar qu $\frac{3}{2}\exp^{[k]}(b) < \exp^{[k+2]}(q)$.

De fato, para $k = 1$, temos que $b + 1 < e^{e^q}$, o que implica que $e \cdot e^b < e^{e^{e^q}}$. Como $e > 3/2$, o resultado segue. Procederemos agora por indução.

Suponha que $\frac{3}{2}\exp^{[k-1]}(b) < \exp^{[k+1]}(q)$ para um certo k. Então, temos que

$$\exp\left(\frac{3}{2}\exp^{[k-1]}(b)\right) < \exp(\exp^{[k+1]}(q))$$

$$(e^{3/2})^{\exp^{[k-1]}(b)} < \exp^{[k+2]}(q),$$

de onde obtemos que

$$e^{\exp^{[k-1]}(b)/2} \cdot \exp^{[k]}(b) < \exp^{[k+2]}(q).$$

Como, $e^{\exp^{[k-1]}(b)/2} > 1/2$ e $e^{1/2} > 3/2$, o resultado segue.

Logo,

$$\left|f(\xi) - \frac{a}{b}\right| = \left|f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \frac{1}{\exp^{[k]}(b)}. \tag{3.4}$$

Isso implica que $f(\xi)$ é um número ultra-Liouville, como desejado. $\square$

Prova do Teorema 3.3

Começamos essa secão relembrando o enunciado do Teorema 3.3:

Teorema 3.3. *Existe uma quantidade não enumerável de funções $f \in \Sigma_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ com $\frac{1}{2} < f'(x) < \frac{3}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tais que*

$$den(f(p/q)) < q^{8q^2}, \tag{3.5}$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$ com $q > 1$.

Para dar início à demonstração serão necessários 3 fatos:

1. Para todos $y, b \in [-1, 1]$, distintos, temos que $|\operatorname{sen}(y - b)| > |y - b|/3$.

   Prova: De fato, a função $\operatorname{sen}(x)/x$ é decrescente para $x \in (0, \pi]$, e $\operatorname{sen}(2)/2 > 1/3$. $\square$

2. Para $x, y \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]$, com $\mathrm{den}(x)$, $\mathrm{den}(y) \leq n$, temos que

$$|\cos(2\pi x) - \cos(2\pi y)| \geq \frac{4}{n^3}.$$

Prova: De fato, primeiramente, assumimos $0 \leq x < y \leq \frac{1}{4}$, então temos dois casos:

⊛ Se $x = 0$, então $\cos(2\pi x) - \cos(2\pi y) = 1 - \cos(2\pi y) = 2\,\mathrm{sen}^2(\pi y)$. Como o seno é uma função côncava no intervalo $(0, \pi/4]$ e a reta que passa por 0 e $\mathrm{sen}(\pi/4)$ é dada por $s = 2\sqrt{2}y$, segue que $\mathrm{sen}(\pi y) \geq 2\sqrt{2}y \geq 2\sqrt{2}/n$. Logo $\mathrm{sen}^2(\pi y) \geq 8/n^2 \geq 16/n^3$, pois $\mathrm{den}(y) \geq 2$;

⊛ Se $0 < x < y$, então $x \geq 1/n$ e, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [x, y]$ tal que $|\cos(2\pi x) - \cos(2\pi y)| = |-2\pi\,\mathrm{sen}(2\pi c)| \cdot |2\pi x - 2\pi y|$. Agora, como a função $\mathrm{sen}(2\pi z)$ é crescente e positiva em $(0, 1/4]$, segue que $|\cos(2\pi x) - \cos(2\pi y)| \geq 2\pi\,\mathrm{sen}(2\pi x)(2\pi y - 2\pi x) = 4\pi^2\,\mathrm{sen}(2\pi x)(y - x)$. Observe que a reta $s(t) = (2/\pi)t$ está abaixo da função seno em $(0, \pi/2]$, afinal $s(0) = 0 = \mathrm{sen}(0)$ e $s(\pi/2) = 1 = \mathrm{sen}(\pi/2)$ e a função seno é côncava em $(0, \pi/2)$. Assim, para $x \in (0, 1/4)$, temos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(2\pi(x)) &\geq \frac{2x}{\pi} \\ \pi\,\mathrm{sen}(2\pi(x)) &\geq 2x \\ 4\pi^2\,\mathrm{sen}(2\pi(x)) &\geq 8\pi x \end{aligned}$$

Desse modo,

$$4\pi^2\,\mathrm{sen}(2\pi x)(y - x) \geq 8\pi x(y - x).$$

Observe agora que como $x > 1/n$ e $y - x \geq 1/n^2$, segue que

$$8\pi x(y - x) \geq 8\pi(y - x)/n \geq 8\pi/n^3 > 16/n^3 > 4/n^3.$$

⊛ Se $\frac{1}{4} < x, y < \frac{1}{2}$, substitua x, y por $\frac{1}{2} - x$ e $\frac{1}{2} - y$, e faça um argumento análogo. □

3. Para todo $\epsilon \in (0, 2]$, qualquer intervalo de comprimento maior que ϵ contém pelo menos dois números racionais com denominador menor ou igual $\lceil 2/\epsilon \rceil$, onde $\lceil x \rceil =$ o menor inteiro maior que x.

Prova: De fato, se $n = \lceil 2/\epsilon \rceil$, então (a, b) é um intervalo tal que $b - a > \epsilon \geq 2/n$, então para $k = \lfloor na \rfloor + 1$, temos que $na < k < na + 1$, logo

$$na < k < k + 1 \leq na + 2 < na + n(b - a) = nb,$$

o que implica que $a < k/n < (k + 1)/n < b$. $\square$

Agora, em posse desses três fatos, podemos dar início à demonstração do teorema.

Demonstração do Teorema 3.3: Considere agora, a seguinte enumeração de $\mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]$:

$$\{x_1, x_2, \ldots, \} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \right\},$$

onde consideramos apenas frações irredutíveis ordenadas da seguinte maneira: $x_1 = 0/1$; para cada $k \geq 1$, se $x_k = p/q$ com $2p < q - 2$, então $x_{k+1} = r/q$, onde r é menor natural que satisfaz $p < r \leq q/2$, com mdc(r, q)= 1. E se, $2p \geq q - 2$, então $x_{k+1} = 1/(q + 1)$. O conjunto $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1/2]$ tem a propriedade de que $\cos(2\pi x) \neq \cos(2\pi y)$ para todo $x \neq y \in A$ (afinal, a função cosseno é injetiva em $[0, \pi]$), e para cada $z \in \mathbb{Q}$ existe exatamente um $x \in A$ tal que $\cos(2\pi x) = \cos(2\pi z)$.

Note que $\mathrm{den}(x_n) \geq \sqrt{n}$, para todo $n \geq 1$: de fato, o número de inteiros positivos tais que o denominador de x_n é igual a k é, no máximo, k para todo $k \geq 1$. Então, o maior inteiro positivo tal que o denominador de x_n é no máximo k é no máximo $1+2+\ldots+k = k(k+1)/2 \leq k^2$. Ou seja, $\max\{n \in \mathbb{N}; \mathrm{den}(x_n) \leq \sqrt{k}\} \leq \frac{\sqrt{k}(\sqrt{k}+1)}{2} < k$. Logo, $\mathrm{den}(x_k) \geq \sqrt{k}$.

Defina $B_n = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ com $y_k := \cos(2\pi x_k)$ e defina f por

$$f(x) = x + g(\cos(2\pi x)), \tag{3.6}$$

onde $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(y)$ e $g_n(y) = \prod_{b \in B_n} \mathrm{sen}(y - b)$.

Note que $f(x + 1) = f(x) + 1$, então é suficiente considerar $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ para caracterizar f em $\mathbb{Q}$. Note também que, para provar que $f(x) \in \mathbb{Q}$ sempre que $x \in \mathbb{Q}$, basta mostrar que $f(x) \in \mathbb{Q}$ para $x \in A$. De fato, dado $z \in \mathbb{Q}$, tome $x \in A$ com $\cos(2\pi x) = \cos(2\pi z)$. Então, temos que $f(z) - z = g(\cos(2\pi z)) = g(\cos(2\pi x)) = f(x) - x$ e, logo, se $f(x) \in \mathbb{Q}$, então $f(z) = f(x) - z + x \in \mathbb{Q}$; em particular, se $z \in \mathbb{Z}$, então $f(z) = z$, pois $f(0) = 0$.

Agora, devemos escolher as constantes c_n indutivamente para que f satisfaça as condições do Teorema 3.3. Os primeiros requisitos são que $c_n = 0$ para $1 \leq n \leq 5$ e, para $n \geq 6$, $0 < |c_n| < 1/n^n$ para todo inteiro positivo n. Por outro lado, para todo y pertencendo à bola aberta $B(0, R)$, temos que

$$|g_n(y)| < \prod_{b \in B_n} e^{|y-b|} \leq e^{n(R+1)}, \tag{3.7}$$

onde usamos o fato de que $b \in [-1, 1]$ e que $|\operatorname{sen}(x)| \leq (|e^{ix}| + |e^{-ix}|)/2 \leq e^{|x|}$. Assim, como $|c_n| < 1/n^n$, obtemos que $|c_n g_n(y)| \leq (e^{R+1}/n)^n$, de onde temos que g (e então f) é uma função inteira, pois a série $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(y)$, que define g, converge uniformemente em qualquer uma dessas bolas. Além disso, se $x \in \mathbb{R}$, temos que $|g_n'(x)| \leq n$ (de fato, basta notar que g_n é um produto de n senos, logo sua derivada será uma soma de n termos, onde cada termo será um produto de senos e cossenos, i.e., cada termo assume no máximo o valor 1 e assim, a soma assume no máximo o valor n.), logo, $f'(x) = 1 + 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n'(\cos(2\pi x)) \in (1/2, 3/2)$, pois $\sum_{n=6}^{\infty} n^{1-n} < 1/(4\pi)$.

Suponha que $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ tenham sido escolhidos de forma que $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ tenham a propriedade desejada. Observe que

$$f(x_k) = x_k + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(y_k - y_i), \tag{3.8}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
f(x_k) &= x_k + c_1 \operatorname{sen}(y_k - y_1) + c_2 \operatorname{sen}(y_k - y_1) \operatorname{sen}(y_k - y_2) + \cdots \\
&+ c_{k-1} \operatorname{sen}(y_k - y_1) \operatorname{sen}(y_k - y_2) \operatorname{sen}(y_k - y_3) \cdots \operatorname{sen}(y_k - y_{k-1}) \\
&+ c_k \operatorname{sen}(y_k - y_1) \operatorname{sen}(y_k - y_2) \cdots \operatorname{sen}(y_k - y_{k-1}) \operatorname{sen}(y_k - y_k) + \cdots \\
&= x_k + c_1 \operatorname{sen}(y_k - y_1) + \cdots + c_{k-1} \operatorname{sen}(y_k - y_1) \cdots \operatorname{sen}(y_k - y_{k-1}).
\end{aligned}$$

Logo, a escolha de $c_1, \ldots, c_{n-1}$ determina os valores de $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ independentemente dos valores de c_k, para $k \geq n$. Em particular, como $c_k = 0$ para $1 \leq k \leq 5$, temos que $f(x_n) = x_n$ para $1 \leq n \leq 6$. Agora, vamos escolher c_n para que $f(x_{n+1})$ satisfaças os requesitos.

Sejam $t \leq n$ inteiros positivos com $n \geq 5$. Então $\operatorname{den}(x_{n+1}), \operatorname{den}(x_t) \leq n$ (de fato, $\operatorname{den}(x_6) = 5$ e $\operatorname{den}(x_{n+1}) -$ $\operatorname{den}(x_n) \leq 1$, para todo $n \geq 1$). Como $\cos(2\pi x_{n+1}) \neq$

$\cos(2\pi x_t)$, pelo Fato 2, temos que $|y_{n+1} - y_t| \geq 4/n^3$. Assim sendo, pelo Fato 1, segue que

$$|\operatorname{sen}(y_{n+1} - y_t)| > \frac{|y_{n_1} - y_t|}{3} > \frac{4}{3n^3} > \frac{1}{n^3}, \tag{3.9}$$

resultando que $|g_n(y_{n+1})| > n^{-3n}$. Logo, $c_n g_n(y_{n+1})$ percorre um intervalo de comprimento maior que $2/n^{4n}$. Assim, pelo Fato 3, podemos escolher c_n, de pelo menos duas maneiras, tal que $g(y_{n+1})$ seja um número racional com denominador no máximo n^{4n}.

Dado $z \in \mathbb{Q}$, seja $q = \operatorname{den}(z)$. Se $q = 1$, então $z \in \mathbb{Z}$, logo $f(z) = z$, e assim $1 \leq q^{8q^2}$. De outra forma, $q > 1$ e existe um um inteiro positivo k com $\cos(2\pi x_k) = \cos(2\pi z)$, então x_k e z tem o mesmo denominador; de fato, nesse caso, temos que $x_k - z \in \mathbb{Z}$ ou $x_k + z \in \mathbb{Z}$. Desse modo,

$$\operatorname{den}(f(z) - z) = \operatorname{den}(g(\cos(2\pi z))) = \operatorname{den}(g(\cos(2\pi x_k))) = \operatorname{den}(g(y_k)). \tag{3.10}$$

Agora, temos que

$$\operatorname{den}(g(y_k)) \leq (k-1)^{4(k-1)} < k^{4(k-1)}. \tag{3.11}$$

Desse modo, como $q = \operatorname{den}(z) = \operatorname{den}(x_k) \geq \sqrt{k}$, obtemos que

$$\operatorname{den}(f(z) - z) < k^{4(k-1)} \leq (q^2)^{4(q^2-1)} = q^{8(q^2-1)}. \tag{3.12}$$

Logo,

$$\operatorname{den}(f(z)) \leq \operatorname{den}(z)\operatorname{den}(f(z) - z) = q \cdot \operatorname{den}(f(z) - z) \leq q \cdot q^{8(q^2-1)} \leq q^{8q^2}, \tag{3.13}$$

como queríamos.

A prova de que podemos escolher f transcendente segue do fato de que temos, pelo menos, duas escolhas para cada c_k, $k > 5$. Ou seja, a quantidade de funções f que podemos obter é a mesma quantidade de elementos em $\{0,1\}^\infty = \{(a_1, a_2, \ldots); a_k \in \{0,1\}\ \forall\ k \in \mathbb{N}\}$, que é um conjunto não enumerável, e as funções inteiras algébricas que levam $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ são polinômios pertencendo a $\mathbb{Q}[z]$, que é um conjunto enumerável.

De fato, podemos provar que todas as funções construídas são transcendentes, com excessão de quando $c_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$: se alguma função f não fosse transcendente, então f seria um polinômio, pois é inteira. No entanto, a propriedade de que $f(x+1) = f(x) + 1$ implicaria que $f(x) = x + c$, para algum $c > 0$. Logo, $g(\cos(2\pi x))$ é constante, mas isso nos leva a uma contradição já que $g(y_1) = 0$ e $g(y_{k+1}) = c_k \prod_{b \in B_k} \operatorname{sen}(y_{k+1} - b) \neq 0$, onde k é o menor natural tal que $c_k \neq 0$.

$\square$

Capítulo 4

O Problema B de Mahler

Em seu livro [15], Mahler provou que *existe uma função* $f = -z + \sum_{h=2}^{\infty} a_h z^h$, *definida por uma série, com coeficientes* a_h *racionais, que converge em uma vizinhança da origem e tem a propriedade de que a função* $f(z)$, *sua função inversa, e todas as suas derivadas levam algébricos em algébricos nessa vizinhança.*

Logo após enunciar esse teorema, Mahler sugere a seguinte questão, conhecida na literatura como Problema B de Mahler.

Problema B: *Existe uma função inteira e transcendente* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *com coeficientes racionais tais que* $f(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ *e* $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$*?*

Esse capítulo será dividido em duas seções. Na primeira seção, daremos uma resposta positiva ao Problema B se f for uma função analítica real, substituindo no entanto $\overline{\mathbb{Q}}$ por qualquer conjunto enumerável e denso em $\mathbb{R}$. Além disso, obteremos funções hipertranscendentes ao invés de transcendentes.

Na segunda seção, responderemos também positivamente ao Problema B de Mahler, mas agora, no caso complexo.

4.1 O caso real

Nesta seção, motivados pelo questionamento de Mahler, daremos a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Seja A um subconjunto denso e enumerável de $\mathbb{R}$. Então existe uma quantidade não enumerável de funções analíticas, bijetivas e hipertranscendentes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com coeficientes racionais na sua série de MacLaurin e tal que $f(A) = A$.*

Esse resultado foi provado por Marques em [19] e, como vemos, é a reposta à pergunta de Mahler considerando-se a função f como uma função de variável real.

Para demonstrar o Teorema 4.1, começamos inicialmente enumerando o conjunto $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots\}$. Como a base de transcendência da extensão $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ é não enumerável, podemos escolher números reais $T, \xi, \gamma_0, \gamma_1, \dots$ tais que o conjunto $\{T, \xi, \gamma_0, \gamma_1, \dots\}$ seja algebricamente independente sobre $\mathbb{Q}(A)$, com $T > 4\pi$. Além disso, necessitaremos do seguinte lema:

Lema 4.2. *Sejam $\{c_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que $0 < |c_n| < 1/n^n$, $\{B_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de conjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $B_n \subset [-1, 1]$ e $\#B_n = n$. Defina então uma sequência de funções inteiras $\{g_n(z)\}_{n\geq 1}$ como $g_n(z) = \prod_{b\in B_n} \operatorname{sen}(z - b)$. Então $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(z)$ é uma função inteira. Além disso, se escolhermos uma constante positiva $T > 4\pi$, então:*

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n \left(\cos\left(\frac{2\pi z}{T}\right)\right) \ e \\ f_N(z) & = & z + \sum_{n=1}^{N} c_n g_n \left(\cos\left(\frac{2\pi z}{T}\right)\right), \ N \in \mathbb{N} \end{array} \tag{4.1}$$

também são funções inteiras e as restrições de f e f_N aos reais são bijeções crescentes de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Obtemos ainda que $f(z + T) = f(z) + T$ e, para todo $N \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, vale que $f_N(z + T) = f_N(z) + T$;

Demonstração do Lema 4.2

Provaremos inicialmente que g, e portanto f, é uma função inteira (note que isso implica que f é analítica em $\mathbb{R}$). Para isso, defina $h(z) = g(\cos(\frac{2\pi z}{T}))$.

Para todo z na bola aberta $B(0, R)$, temos que

$$|g_n(z)| = \left|\prod_{b\in B_n} \operatorname{sen}(z - b)\right| \leq \prod_{b\in B_n} e^{|z-b|} \leq e^{n(R+1)}, \tag{4.2}$$

onde a desigualdade segue do fato de que $|\operatorname{sen}(x)| \leq \dfrac{|e^{ix}| + |e^{-ix}|}{2} \leq e^{|x|}$.

Como $|c_n| \leq 1/n^n$, temos que $|c_n g_n(z)| \leq ((e^{R+1})/n)^n$. Logo, pelo teste M de Weierstrass, g é uma função inteira. Portanto h também é uma função inteira.

Considere agora a restrição de f a $\mathbb{R}$. Então:

$$f'(x) = 1 - \frac{2\pi}{T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n' \left(\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\right). \tag{4.3}$$

Observe agora que $|g_n'(z)| \leq n$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Usando esse fato em (4.3), e lembrando que $T > 4\pi$, obtemos que

$$f'(x) \geq 1 - \frac{2\pi}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} n \geq 1 - \frac{1}{2} \cdot 1,63 > 0. \tag{4.4}$$

Desse modo, f é uma função crescente e como

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$,

segue que f é também uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Com a mesma idéia, mostra-se que f_N é uma bijeção crescente de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. E, claramente, $f(z+T) = f(z) + T$ e $f_N(z+T) = f_N(z) + T$ para todo $N \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, afinal $\cos(\frac{2\pi(z+T)}{T}) = \cos(\frac{2\pi z}{T} + 2\pi) = \cos(\frac{2\pi z}{T})$. Isso conclui a demonstração do lema. $\square$

Demonstração do Teorema 4.1

Teorema 4.1 *Seja A um subconjunto denso e enumerável de $\mathbb{R}$. Então existe uma quantidade não enumerável de funções analíticas, bijetivas e hipertranscendentes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com coeficientes racionais na sua série de MacLaurin e tal que $f(A) = A$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos começar a construção recursiva dos c_n e B_n para que a função f definida no lema anterior tenha as propriedades desejadas. Para isso, defina a função $f_0(z) = z$.

Para cada $n \geq 1$, definiremos um conjunto B_n e uma função associada $f_n(z) = f_{n-1}(z) + c_n g_n(\cos(2\pi z/T))$, onde as funções g_n já foram definidas no lema anterior.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha_1 = 0$ (pode-se lidar com o caso em que $0 \notin A$ da mesma maneira). Defina $B_1 = \{1\}$.

É fácil ver que $f_0(0) = f_0^{-1}(0) = 0 \in A$. Além disso, também é verdade que $f_1(0) = 0 = f_1^{-1}(0)$. De fato, $f_1(0) = f_0(0) + c_1 g_1(\cos(0)) = 0$ e a função f_1 é injetiva.

Note que $f_1(\xi) = \xi + c_1 g_1(\cos(2\pi\xi/T))$ e afirmamos que $g_1(\cos(2\pi\xi/T)) \neq 0$. Caso contrário, teríamos que $\operatorname{sen}(\cos(2\pi\xi/T) - 1) = 0$, o que implicaria que $\cos(2\pi\xi/T) - 1 = k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí, $|k|\pi \leq 2$, de onde obtemos $k = 0$. No entanto, se $k = 0$, teríamos que $\cos(2\pi\xi/T) = 1$, mas isso implicaria que $\xi = mT$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, o que contradiz nossa escolha de ξ e T (pois são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}(A)$).

Como $\gamma_0\mathbb{Q}^*$ é denso, existe uma quantidade enumerável de escolhas de $c_1 \in (-1, 1)\backslash\{0\}$ tais que $f_1(\xi) \in \gamma_0\mathbb{Q}^*$.

Defina agora $B_2 = B_1 \cup \{\cos(2\pi\xi/T)\}$.

Temos que $f_2(0) = 0 = f_2^{-1}(0)$, afinal f_2 é injetiva. Afirmamos agora que $g_2(\operatorname{sen}(2\pi\alpha_2/T)) \neq 0$. De fato, se $g_2(\operatorname{sen}(2\pi\alpha_2/T)) = 0$, teríamos que

$$\operatorname{sen}(\cos(2\pi\alpha_2/T) - 1)\operatorname{sen}(\cos(2\pi\alpha_2/T) - \cos(2\pi\xi/T)) = 0,$$

o que implica que

1. $\cos(2\pi\alpha_2/T) - 1 = k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Mas a única possibilidade é $k = 0$, logo, teríamos que $\cos(2\pi\alpha_2/T) = 1$, o que implica que $2\pi\alpha_2/T = 2m\pi$ para algum $m \in Z$ e , logo $\alpha_2 = mT$, com $m \neq 0$, pois $0 = \alpha_1$; ou

2. $\cos(2\pi\alpha_2/T) - \cos(2\pi\xi/T) = k\pi$, para algum $k \in Z$. Mas novamente, a única possibilidade é $k = 0$. Então, teríamos que $\cos(2\pi\alpha_2/T) = \cos(2\pi\xi/T)$, mas isso implica que $2\pi\xi/T = \pm 2\pi\alpha_2/T + 2m\pi$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Assim, teríamos $\xi = \pm\alpha_2 + mT$.

Assim, teríamos $\alpha_2 = \beta + mT$, com $\beta \in \{0, \pm\xi\}$. Entretanto, por causa das escolhas de ξ e T, nenhum desses casos é possível. Desse modo, podemos escolher de uma quantidade enumerável de maneiras $c_2 \in (-1/2^2, 1/2^2)\backslash\{0\}$ tal que $f_2(\alpha_2) \in A\backslash\{\alpha_2\}$.

Definindo $B_3 = B_2 \cup \{\cos 2\pi\alpha_2/T)\}$ e usando que o conjunto A é denso, podemos escolher c_3 no intervalo $(-1/3^3, 1/3^3)$ tal que $f_3^{-1}(\alpha_2) \in A$. Além disso, observe que $f_3(0) = f_3^{-1}(0) = 0$, $f_3(\xi) = f_1(\xi) \in \gamma_0\mathbb{Q}^*$ e $f_3(\alpha_2) \in A$, afinal $f_3(\alpha_2) = f_2(\alpha_2) + c_3 g_3(\cos(2\pi\alpha_2/T)) = f_2(\alpha_2)$.

Afirmamos que $\cos(2\pi f_2^{-1}(\alpha_2)/T) \notin B_3$. Caso contrário, teríamos que $g_3(\cos(2\pi f_2^{-1}(\alpha_2)/T)) = 0$ e pelo mesmo argumento anterior, teríamos $f_2^{-1}(\alpha_2) = \beta + mT$, onde $\beta \in \{0, \pm\alpha_2, \pm\xi\}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Então $\alpha_2 = f_2(\beta + mT) = f_2(\beta) + mT$, o que não pode acontecer, já que $f_2(\beta) \in A \cup \gamma_0\mathbb{Q}^*$.

Defina agora $\epsilon = \min\{|\cos(2\pi f_2^{-1}(\alpha_2)/T) - b| : b \in B_3\}$ e seja $\mathcal{I}_2$ o intervalo com centro em $\cos(2\pi f_2^{-1}(\alpha_2)/T)$ e raio $\epsilon/2$. Como A é denso, existe uma sequência $\{k_n\}_n$ de inteiros positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \alpha_{k_n} = f_2^{-1}(\alpha_2)$ e $\cos(2\pi\alpha_{k_n}/T) \in \mathcal{I}_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E como f_2 é contínua, temos que $\lim_{n\to\infty} f_2(\alpha_{k_n}) = \alpha_2$.

Além disso, $\{\beta + kT/2 : \beta \in \{0, \alpha_2, \xi\}, k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto discreto. Logo, podemos escolher (de uma quantidade enumerável de maneiras) $l \in (k_n)_n$ tal que α_l não pertença ao conjunto anterior e satisfaça:

$$|f_2(\alpha_l) - \alpha_2| < \frac{\epsilon^3}{3^3 \cdot 6^3} \tag{4.5}$$

Pela escolha de α_l, temos que $\cos(2\pi\alpha_l/T) \neq b$ para todo $b \in B_3$ (pois caso contrário, teríamos que $|\cos(2\pi\alpha_l/T) - \cos(2\pi f_2^{-1}(\alpha_2)/T)| \geq \epsilon$). Assim, $0 < |\cos(2\pi\alpha_l/T) - b| \leq 2$. Agora, usamos que $|\operatorname{sen}(x)| > |x|/3$ para todo $x \in [-2, 2]\backslash\{0\}$ para obter

$$|\operatorname{sen}(\cos(2\pi\alpha_l/T) - b)| > \frac{|\cos(2\pi\alpha_l/T) - b|}{3} > \frac{\epsilon}{6}, \tag{4.6}$$

onde usamos que $\cos(2\pi\alpha_l/T) \in \mathcal{I}_2$. Logo,

$$|g_3(\operatorname{sen}(2\pi\alpha_l/T))| > \frac{\epsilon^3}{6^3}, \tag{4.7}$$

afinal lembramos que $g_3(\cos(2\pi\alpha_l/T)) = \prod_{b\in B_3} \operatorname{sen}(\cos(2\pi\alpha_l/T) - b)$.

Concluímos então que escolhendo $c_3 := (\alpha_2 - f_2(\alpha_l))/g_3(\cos(2\pi\alpha_l/T))$, obtemos que $f_3(\alpha_l) = \alpha_2$, de modo que $f_3^{-1}(\alpha_2) \in A$. Afinal,

$$f_3(\alpha_l) = f_2(\alpha_l) + \frac{(\alpha_2 - f_2(\alpha_l))}{g_3(\cos(2\pi\alpha_l/T))} g_3(\cos(2\pi\alpha_l/T)) = \alpha_2.$$

Além disso, combinando as expressões (4.5) e (4.7), obtemos que $|c_3| < 1/3^3$. Definamos agora:

- $B_4 = B_3 \cup \{\cos(2\pi f_3^{-1}(\alpha_2)/T)\}$;

- $B_5 = B_4 \cup \{1\}$ (multiconjunto).

Observe que

$$g_4(z) = \text{sen}(z) \cdot \prod_{b \in B_4 \setminus \{1\}} \text{sen}(z - b), \tag{4.8}$$

logo $g_4'(0) \neq 0$. Analisemos agora a segunda derivada da função

$$f_4(z) = f_3(z) + c_4 g_4(\cos(2\pi z/T))$$

aplicada em $z = 0$, onde a constante $c_4 \in (-1/4^4, 1/4^4)$ ainda será escolhida. Temos que a primeira derivada da função f_4 é dada por:

$$f_4'(z) = f_3'(z) - c_4 g_4'(\cos(2\pi z/T)) \,\text{sen}(2\pi z/T) \frac{2\pi}{T}, \tag{4.9}$$

assim, é possível observar que

$$f_4''(z) = f_3''(z) + c_4(2\pi/T)^2\{g_4''(\cos(2\pi z/T)) \,\text{sen}^2(2\pi z/T) - g_4'(\cos(2\pi z/T)) \cos(2\pi z/T)\}$$

Desse modo,

$$f_4''(0) = \theta - (2\pi/T)^2 c_4 g_4'(1), \tag{4.10}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$, com $g_1'(1) \neq 0$. Logo, existem infinitas possibilidades para c_4 de modo que c_4 esteja em $(-1/4^4, 1/4^4) \setminus \{0\}$ tal que $f_4''(0) \in \mathbb{Q}^*$.

Nosso próximo passo, é definir $m_5 = \min\{j \geq 3 : \cos(2\pi\alpha_j/T) \notin B_5\}$. Observe que se $\cos(2\pi\alpha_j/T) \in B_5$, então $f_5(\alpha_j) = f_4(\alpha_j) \in A$.

Note que

$$f_5(\alpha_{m_5}) = f_4(\alpha_{m_5}) + c_5 g_5(\cos(2\pi\alpha_{m_5}/T)). \tag{4.11}$$

Novamente, temos que $g_5(\cos(2\pi\alpha_{m_5}/T)) \neq 0$. Caso contrário, teríamos que $\cos(2\pi\alpha_{m_5}/T) \in B_5$, contradizendo a escolha de m_5. Logo, temos uma quantidade enumerável de escolhas de $c_5 \in (-1/5^5, 1/5^5) \setminus \{0\}$ tal que $f_5(\alpha_{m_5}) \in A$.

Defina agora $B_6 = B_5 \cup \{\cos(2\pi\alpha_{m_5}/T)\}$.

Seja $m_6 = \min\{j \geq 3 : \cos(2\pi f_5^{-1}(\alpha_j)/T) \notin B_6\}$ (se $\cos(2\pi f_5^{-1}(\alpha_j)) \in B_6$, então $f_6^{-1}(\alpha_j) = f_5^{-1}(\alpha_j) \in A$). Agora escolheremos c_6 de modo que $c_6 \in (-1/6^6, 1/6^6) \setminus \{0\}$

e $f_6^{-1}(\alpha_j) \in A$. Como nos casos anteriores, podemos assegurar a existência de infinitos $a_l \notin \{\beta + kT : \beta \in A_6, k \in \mathbb{Z}\}$, onde A_6 é definido pela relação $B_6 = \cos(\pm 2\pi A_6/T)$ (i.e., $A_6 = \{0, \pm\xi, \pm\alpha_2, \pm f_3^{-1}(\alpha_2), \pm\alpha_{m_5}\}$), tais que

$$|f_5(\alpha_l) - \alpha_{m_6}| < \frac{\epsilon^6}{6^{12}}, \tag{4.12}$$

onde $\epsilon = \min\{|\cos(2\pi f_5^{-1}(\alpha_{m_6})/T) - b| : b \in B_6\}$ (afinal, $f_5(A)$ é um conjunto denso). Agora, sabendo que

$$|\operatorname{sen}(\cos(2\pi\alpha_l/T) - b)| > \frac{|\cos(2\pi\alpha_l/T) - b|}{3} \geq \frac{\epsilon}{6}, \tag{4.13}$$

obtemos que

$$|g_6(\cos(2\pi\alpha_l/T))| > \frac{\epsilon^6}{6^6}. \tag{4.14}$$

Portanto, se escolhermos $c_6 = (\alpha_m - f_5(\alpha_l))/g_6(\cos(2\pi\alpha_l/T))$, obtemos que $f_6(\alpha_{\widehat{m}}) \in A$ (basta aplicar $f_6(z)$ em α_l) e $0 < |c_6| < 1/6^6$ (basta usar as expressões (4.12) e (4.14)).

Defina agora os conjuntos

- $B_7 = B_6 \cup \{\cos(2\pi f_6^{-1}(\alpha_{m_6})/T)\}$;
- $B_8 = B_7 \cup \{\cos(2\pi\xi/T)\}$ (multiconjunto).

Temos que

$$g_7(z) = \operatorname{sen}(z - \cos(2\pi\xi/T)) \cdot \prod_{\substack{b \in B_7 \\ b \neq \cos(2\pi\xi/T)}} \operatorname{sen}(z - b), \tag{4.15}$$

logo $g_7'(\cos(2\pi\xi/T)) \neq 0$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} f_7(z) &= f_6(z) + c_7 g_7(\cos(2\pi z/T)) \\ f_7'(\xi) &= f_6'(\xi) - c_7(2\pi/T)\operatorname{sen}(2\pi\xi/T) g_7'(\cos(2\pi\xi/T)). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Logo, podemos escolher $c_7 \in (-1/7^7, 1/7^7)\backslash\{0\}$ (de uma quantidade enumerável de maneiras) tal que $f_7'(\xi) \in \gamma_1\mathbb{Q}^*$.

Suponha que $n \geq 9$ e que $c_1, \ldots c_{n-2}$ e $B_1, \ldots, B_{n-1}$ foram escolhidos satisfazendo os requisitos necessários. Agora, queremos definir B_n e escolher os c_{n-1}. Observe ainda que, por construção, os conjuntos A_j, definidos pela relação $B_j = \cos(2\pi(A_j \cup \{\xi\})/T)$ são tais que $A_j \cup f_{n-2}(A_j) \subseteq A$.

Vamos dividir nosso próximo passo em três casos, cada um dependendo da classe de n módulo 3.

Caso 1: $n \equiv 0 \pmod 3$.

Nesse caso, considere $m_{n-1} = \min\{j \geq (n/3)+1 : \cos(2\pi\alpha_j/T) \notin B_{n-1}\}$ (se $\cos(2\pi\alpha_j/T) \in B_{n-1}$, então $f_{n-2}(\alpha_j) \in A$).

Defina $B_n = B_{n-1} \cup \{\cos(2\pi\alpha_{m_{n-1}}/T)\}$.

Note que

$$f_{n-1}(\alpha_{m_{n-1}}) = f_{n-2}(\alpha_{m_{n-1}}) + c_{n-1}g_{n-1}(\cos(2\pi\alpha_{m_{n-1}}/T)). \tag{4.17}$$

Novamente, temos que $g_{n-1}(\cos(2\pi\alpha_{m_{n-1}}/T)) \neq 0$. Caso contrário, como antes, teríamos $\cos(2\pi\alpha_{m_{n-1}}/T) = \cos(2\pi\beta/T) \in B_{n-1}$ contradizendo a escolha de m_{n-1}. Portanto, $g_{n-1}(\cos(2\pi\alpha_{m_{n-1}}/T)) \neq 0$ e temos uma quantidade enumerável de escolhas de $c_{n-1} \in (-1/(n-1)^{n-1}, 1/(n-1)^{n-1}) \backslash \{0\}$ tal que $f_{n-1}(\alpha_{m_{n-1}}) \in A$.

Caso 2: $n \equiv 1 \pmod 3$.

Nesse caso, considere $m_{n-1} = \min\{j \leq (n+2)/3 : \cos(2\pi f_{n-2}^{-1}(\alpha_j)/T) \notin B_{n-1}\}$ (se $\cos(2\pi f_{n-2}^{-1}(\alpha_j)/T)$, então $f_{n-2}^{-1}(\alpha_j) \in A$). Agora, c_{n-1} será escolhido de modo que $c_{n-1} \in (-1/(n-1)^{n-1}, 1/(n-1)^{n-1})$ e $f_{n-1}^{-1}(\alpha_{m_{n-1}}) \in A$. A prova procede seguindo o mesmo raciocínio de quando mostramos que $f_3^{-1}(\alpha_2) \in A$. Mas vamos mostrar aqui os passos principais.

Primeiro, asseguramos a existência de uma quantidade enumerável de $\alpha_l \notin \{\beta + kT : \beta \in A_{n-1}, k \in \mathbb{Z}\}$ com

$$|f_{n-2}(\alpha_l) - \alpha_{m_{n-1}}| < \frac{\epsilon^{n-1}}{(n-1)^{n-1} \cdot 6^{n-1}}, \tag{4.18}$$

onde $\epsilon = \min\{|\cos(2\pi f_{n-2}^{-1}(\alpha_2)/T) - b| : b \in B_{n-1}\}$.

Em seguida, utilizando que

$$|\operatorname{sen}(\cos(2\pi\alpha_l)/T) - b| > \frac{|\cos(2\pi\alpha_l/T) - b|}{3} \geq \frac{\epsilon}{6}, \tag{4.19}$$

obtemos

$$|g_{n-1}(\cos(2\pi\alpha_l/T))| > \frac{\epsilon^{n-1}}{6^{n-1}}. \tag{4.20}$$

Portanto, escolhendo $c_{n-1} := (\alpha_{m_{n-1}} - f_{n-2}(\alpha_l))/g_{n-1}(\cos(2\pi\alpha_l/T))$, temos que $f_{n-1}^{-1}(\alpha_{m_{n-1}}) \in A$ e $0 < |c_{n-1}| < 1/(n-1)^{n-1}$. Agora, definimos $B_n = B_{n-1} \cup \{\cos(2\pi f_{n-1}^{-1}(\alpha_{m_{n-1}})/T)\}$.

Caso 3: $n \equiv 2 \pmod 3$. Vamos considerar aqui dois subcasos:

- Caso $n \equiv 2 \pmod 6$:

Nesse caso, $B_n = B_{n-1} \cup \{\cos(2\pi\xi/T)\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ (multiconjunto), onde $\beta_j = \cos(2\pi\xi/T)$, quando $j \equiv 2 \pmod 6$. Logo, se $\nu = (n-2)/6$,

$$g_{n-1}(y) = \operatorname{sen}^\nu(y - \cos(2\pi\xi/T)) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i\not\equiv 2 \pmod 6}}^{n} \operatorname{sen}(y - \beta_i) \tag{4.21}$$

e

$$g_n(y) = \operatorname{sen}^\nu(y - \cos(2\pi\xi/T)) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i\not\equiv 2 \pmod 6}}^{n} \operatorname{sen}(y - \beta_i). \tag{4.22}$$

Portanto, $g_j^{(\nu)}(\cos(2\pi\xi/T)) = 0$, se $j \geq n$ e $g_{n-1}^{(\nu)}(\cos(2\pi\xi/T)) \neq 0$.

Por outro lado, observando que $f_{n-1}(z) = f_{n-1}(z) + c_{n-1}g_{n-1}(\cos(2\pi z/T))$, obtemos que

$$f_{n-1}^{(\nu)}(\xi) = \theta + c_{n-1}(2\pi/T)^\nu \operatorname{sen}^\nu(2\pi\xi/T) g_{n-1}^{(\nu)}(\cos(2\pi\xi/T)), \tag{4.23}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$. Assim, podemos escolher de um jeito enumerável de maneiras $c_{n-1} \in (-1/(n-1)^{n-1}, 1/(n-1)^{n-1}) \backslash \{0\}$ tal que $f_{n-1}^{((n-2)/6)}(\xi) \in \gamma_{(n-2)/6}\mathbb{Q}^*$.

- Caso $n \equiv 5 \pmod 6$:

Nesse caso, $B_n = B_{n-1} \cup \{1\}$ (multiconjunto), onde $\beta_j = 1$ quando $j \equiv 5 \pmod 6$. Logo, se $\nu = (n-2)/6$,

$$g_{n-1}(y) = \operatorname{sen}^\nu(y - 1) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i\not\equiv 5 \pmod 6}}^{n} \operatorname{sen}(y - \beta_i) \tag{4.24}$$

e

$$g_n(y) = \operatorname{sen}^\nu(y - 1) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i\not\equiv 5 \pmod 6}}^{n} \operatorname{sen}(y - \beta_i). \tag{4.25}$$

Portanto, $g_j^{(\nu)}(1) = 0$, se $j \geq n$ e $g_{n-1}^{(\nu)}(1) \neq 0$ e analogamente ao subcaso anterior, obtemos:

$$f_{n-1}^{2\nu}(1) = \theta + a(2\pi/T)^{2\nu} c_{n-1} g_{n-1}^{(\nu)}(1), \tag{4.26}$$

onde $a, \theta \in \mathbb{R}$. Logo, podemos escolher (de uma quantidade enumerável de maneiras) $c_{n-1} \in (-1/(n-1)^{n-1}, 1/(n-1)^{n-1}) \backslash \{0\}$ tal que $f_{n-1}^{((n+1)/3)}(0) \in \mathbb{Q}^*$. Desse modo, essa construção garante que $f(A) \subseteq A, f^{-1}(A) \subseteq A, f^{(s)(\xi)} \in \gamma_s \mathbb{Q}^*$ e $f^{(2s)}(0) \in \mathbb{Q}^*$ para todo $s \geq 0$. Observe que $f'(0) = 1$ e $f^{(2s+1)}(0) = 0$ para todo $s \geq 1$. Logo, os coeficientes na série de Maclaurin de f são todos racionais. Além disso, note que construímos uma quantidade não enumerável de funções, afinal, para cada c_n diferente que escolhêssemos, teríamos uma f diferente.

Resta mostrar que f é uma função hipertranscendente. Suponha o contrário, ou seja, que para algum $n \geq 0$ existe um polinômio $P(X_0, \ldots, X_n) \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$, tal que

$$P(x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{4.27}$$

Assim, se

$$P(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{m} a_{i_0, \ldots, i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n},$$

onde m é o número de coeficientes não nulos no somatório acima.

Assim, como as funções $x^{i_0}[f(x)]^{i_1} \cdots [f^{(n-1)}(x)]^{i_n}$, $0 \leq i \leq m$, com $i_0 + \cdots + i_n \neq 0$, são linearmente dependentes, segue pelo Teorema 1.9, que o Wronskiano dessas funções é 0. No entanto, o Wronskiano dessas funções é um polinômio Q com coeficientes inteiros. Assim, existe $Q \in \mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_n]$ tal que $Q(x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entretanto, escolhendo $x = \xi$, temos que $Q(\xi, f(\xi), \ldots, f^{(n)}(\xi)) = 0$, o que é uma contradição, dado que $f^{(s)}(\xi) \in \gamma_s \mathbb{Q}^*$ e $\xi, \gamma_0, \ldots, \gamma_n$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}(A)$.

Assim, a prova está completa. $\square$

4.2 O caso complexo

Aqui, daremos a prova do teorema devido a Marques e Moreira [21], que responde completamente ao Problema B de Mahler. Nessa demonstração, faremos uso do Teorema de Rouché para construir uma quantidade não enumerável de funções com as propriedades desejadas. O teorema para o qual daremos a demonstração é o que segue:

Teorema 4.3. *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentes* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *com coeficientes racionais tal que* $f(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ *e* $f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$*.*

Demonstração. Para simplificar nossa prova, definimos $\mathbb{A} = \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$, usamos a notação $[a, b] = \{a, a+1, \cdots, b\}$ para inteiros $a < b$, e consideramos uma enumeração de $\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ tal que:

- $\alpha_1 = 0$;
- $\alpha_{3n-1}, \alpha_{3n} \notin \mathbb{R}$ e $\alpha_{3n-1} = \overline{\alpha_{3n}}$ para todo $n \geq 1$;
- $\alpha_{3n+1} \in \mathbb{R}$;
- $|\alpha_{3n+i}| < n$ para todo $i \in \{-1, 0, 1\}$.

Construiremos as funções desejadas indutivamente. Para isso, defina $f_1(z) = z$ e observe que $f_1(\alpha_1) = 0 = f_1^{-1}(\alpha_1)$. Queremos construir uma sequência de funções analíticas $f_2(z), f_3(z), f_4(z) \ldots$ recursivamente da forma:

$$f_m(z) = f_{m-1}(z) + \epsilon_m z^m P_m(z),$$

onde

(a) $f_{m-1}, P_m \in \mathbb{A}[z]$ e então $f_m(z) = \sum_{i=1}^{t_m} a_i z^i$ com $t_m > m$;

(b) $P_{m-1}(z) | P_m(z)$ e $P_m(0) \neq 0$;

(c) $\epsilon_m \in \mathbb{A}$;

(d) $0 < |\epsilon_m| < \dfrac{1}{L(P_m)m^{m+\deg P_m}}$, onde $L(P)$ denota o comprimento de P (a soma dos valores absolutos dos coeficientes de P);

(e) $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Q}$.

A função desejada terá a forma $f(z) = z + \sum_{n\geq 2} \epsilon_n z^n P_n(z)$. Observe agora que, como $P(z) \leq L(P) \max\{1, |z|\}^{\deg P}$, temos, para todo $z \in B(0, R)$:

$$
\begin{aligned}
|\epsilon_n z^n P_n(z)| &< \tfrac{1}{L(P_n)n^{n+\deg P_n}} L(P_n) \max\{1, R\}^{\deg P_n} |z|^n \\
&< \frac{\max\{1, R\}^{\deg P_n} \max\{1, R\}^n}{n^{n+\deg P_n}} \qquad (4.28) \\
&= \Big(\frac{\max\{1, R\}}{n}\Big)^{n+\deg P_n}
\end{aligned}
$$

Então

$$\sum_{n\geq 2} \epsilon_n z^n P_n(z) < \sum_{n\geq 2} \Big(\frac{\max\{1, R\}}{n}\Big)^{n+\deg P_n} < \infty.$$

Assim, pelo teste M de Weierstrass, $\sum_{n\geq 2} \epsilon_n z^n P_n(z)$ converge uniformemente em $B(0, R)$ e, pelo Teorema 1.10, essa série define uma função inteira. Logo, $f(z) = z + \sum_{n\geq 2} \epsilon_n z^n P_n(z)$ é uma função inteira.

Suponha então que tenhamos f_n satisfazendo as condições de (a) a (e). Vamos construir f_{n+1} com as propriedades desejadas. Primeiramente, como $f_n^{-1}(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n+1}\})$ é finito, podemos escolher $n + 1 < r_{n+1} < n + 2$ tal que $f_n^{-1}(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n+1}\}) \cap \partial B(0, r_{n+1}) = \varnothing$. Além disso, se $\{0, y_{n,1}, \ldots, y_{n,s_n}\} = f_n^{-1}(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n+1}\}) \cap B(0, r_{n+1})$, definimos:

$$f_{n+1}(z) = f_n(z) + \epsilon_{n+1} z^{n+1} P_{n+1}(z), \qquad (4.29)$$

onde

$$P_{n+1}(z) = P_n(z)(z - \alpha_{3n-1})(z - \alpha_{3n})(z - \alpha_{3n+1}) \prod_{i=1}^{s_n} (z - y_{n,i})^{\deg f_n + 1}, \qquad (4.30)$$

com $P_1(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Note que, como $f_n(z) \in \mathbb{A}[z]$, temos que se $y_i \notin \mathbb{R}$, então $\bar{y}_{n,i} = y_{n,j}$ para algum $j \in [1, s_n]$, afinal $y_{n,i}$ é raiz de $f_n(z) - \alpha_k$ para algum $k \in [1, 3n + 1]$ e portanto, seu conjugado é raiz de $f_n(z) - \bar{\alpha}_k$, e como dois números conjugados têm a mesma norma, segue que $\bar{y}_{n,i} \in f_n^{-1}(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n+1}\}) \cap B(0, r_{n+1})$, ou seja, $\bar{y}_{n,i} = y_{n,j}$ para algum $j \in [1, s_n]$. Desse modo, $P_{n+1} \in \mathbb{A}[z]$ e $P_{n+1}(0) \neq 0$.

Observe agora que, para $i \in [1, 3n+1]$, temos que $\min\limits_{|z|=r_{n+1}} |f_n(z) - \alpha_i| > 0$, pois $f_n^{-1}(\alpha_i) \cap \partial B(0, r_{n+1}) = \varnothing$. Assim, podemos escolher ϵ_{n+1} satisfazendo

$$|\epsilon_{n+1}| < \frac{\min\limits_{\substack{|z|=r_{n+1} \\ i \in [1,3n+1]}} |f_n(z) - \alpha_i|}{\max\limits_{|z|=r_{n+1}} |z^{n+1} P_{n+1}(z)|}. \tag{4.31}$$

Em particular, para $z \in \partial B(0, r_{n+1})$,

$$\begin{aligned} |f_n(z) - \alpha_i| &\geq \min_{|z|=r_{n+1}} |f_n(z) - \alpha_i| \\ &> |\epsilon_{n+1}| \max_{|z|=r_{n+1}} |z^{n+1} P_{n+1}(z)| \\ &\geq |\epsilon_{n+1} z^{n+1} P_{n+1}(z)|. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Agora, usamos o Teorema de Rouché (Teorema 1.12) para assegurar que as funções $f_n(z) - \alpha_i$ e $f_{n+1}(z) - \alpha_i = f_n(z) - \alpha_i + \epsilon_{n+1} z^{n+1} P_{n+1}(z)$ têm o mesmo número de zeros (contando a multiplicidade) em $B(0, r_{n+1})$. Note que $z = 0$ é um zero de f_n e f_{n+1} com multiplicidade 1.

Suponha agora que $y_{n,j}, j \in [1, s_n]$, é um zero de $f_n(z) - \alpha_i$ de multiplicidade $m \geq 1$. Como

$$f_{n+1}(z) - \alpha_i = f_n(z) - \alpha_i + \epsilon_{n+1} z^{n+1} P_{n+1}(z),$$

e o polinômio P_{n+1} é definido pela expressão (4.30), obtemos que $y_{n,j}$ deve ser uma raiz de $f_{n+1} - \alpha_i$ com multiplicidade pelo menos m. Como $m \leq \deg f_n$, então $y_{n,j}$ é um zero de $f_{n+1} - \alpha_i$ de multiplicidade exatamente m (pois $y_{n,j}$ é um zero de P_{n+1} com multiplicidade maior ou igual $\deg f_n + 1$), ou seja, os conjuntos $f_n^{-1}(\{\alpha_i\}) \cap B(0, r_{n+1})$ e $f_{n+1}^{-1}(\{\alpha_i\}) \cap B(0, r_{n+1})$ têm a mesma cardinalidade. Agora, acabamos de ver que se $y_{n,j}$ é zero de $f_n(z) - \alpha_i$, então é também de $f_{n+1} - \alpha_i$. Assim, segue que

$$f_n^{-1}(\{\alpha_j\}) \cap B(0, r_{n+1}) = f_{n+1}^{-1}(\{\alpha_j\}) \cap B(0, r_{n+1}) \tag{4.33}$$

Esse argumento assegura que em nossa construção nenhuma nova pré-imagem do conjunto $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n+1}\}$ por f_{n+1} em $B(0, r_{n+1})$ aparecerá além daquelas por

f_n. Note ainda que, como escolheremos $\epsilon_{n+1} \in \mathbb{A}$ satisfazendo (4.2), teremos que para todo n, $f_{n+1}(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n+1}\})$ e $f_{n+1}^{-1}(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n+1}\})$ serão subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$, afinal $\overline{\mathbb{Q}}$ é algebricamente fechado.

Vamos mostrar agora que é possível escolher um ϵ_{n+1} satisfazendo (4.2) e tal que o coeficiente a_{n+1} de z^{n+1} em f_{n+1} é um número racional (observe que, por construção, os primeiros n coeficientes de f_{n+1} permanecem inalterados).

De fato, seja c_{n+1} o coeficiente de z^{n+1} em $f_n(z)$. Temos que

$$a_{n+1} = c_{n+1} + \epsilon_{n+1} P_{n+1}(0) \tag{4.34}$$

Logo, pode-se escolher um número racional p/q tal que

$$\begin{aligned} 0 &< \left| c_{n+1} - \frac{p}{q} \right| \\ &< \min \left\{ \frac{|P_{n+1}(0)|}{L(P_{n+1})(n+1)^{n+1+\deg P_{n+1}}}, P_{n+1}(0) \frac{\min\limits_{|z|=r_{n+1}} |f_n(z) - \alpha_i|}{\max\limits_{|z|=r_{n+1}} |z^{n+1} P_{n+1}(z)|} \right\}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

para todo $i \in [1, 3n+1]$. Sendo assim, definindo $\epsilon_{n+1} = (p/q - c_{n+1})/P_{n+1}(0)$, obtemos que:

- $a_{n+1} = p/q$;
- ϵ_{n+1} satisfaz (4.31) e $0 < |\epsilon_{n+1}| < \frac{1}{L(P_{n+1})(n+1)^{n+1+\deg P_{n+1}}}$.

Então, por construção, a função $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} \epsilon_n z^n P_n(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ é inteira e $f(\overline{\mathbb{Q}}) \cup f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ e $a_n \in \mathbb{Q}$, como queríamos. Para ver esse fato, provaremos as seguintes afirmações:

Afirmação 4.4. *Se $j \leq 3n+1$, então $f_{n+1}(\alpha_j) = f_n(\alpha_j)$. Em particular, $f_n(\alpha_j) = f_j(\alpha_j)$ para todo $n \geq j$ e $f(\alpha_j) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha_j) = f_j(\alpha_j) \in \overline{\mathbb{Q}}$.*

Demonstração. Observe que $f_{n+1}(\alpha_j) = f_n(\alpha_j) + \epsilon_{n+1} \alpha_j^{n+1} P_{n+1}(\alpha_j)$. No entanto, por definição, temos que $P_n \mid P_{n+1}$. Agora, podemos escrever $j = 3t + q$, onde $t \leq n$ e $q \in \{-1, 0, 1\}$. Deste modo, α_j é um zero de P_{t+1}, afinal

$$P_{t+1}(z) = P_t(z)(z - \alpha_{3t-1})(z - \alpha_{3t})(z - \alpha_{3t+1}) \prod_{i=1}^{s} (z - y_i)^{\deg f_t}.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} f_n(z) &= f_{n-1}(z) + \epsilon_n z^n P_n(z) \\ &= f_{n-2}(z) + \epsilon_{n-1} z^{n-1} P_{n-1}(z) + \epsilon_n z^n P_n(z) \\ &\vdots \\ &= f_j(z) + \epsilon_{j+1} z^{j+1} P_{j+1}(z) + \cdots + \epsilon_n z^n P_n(z). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Aqui, novamente, basta notar que sendo $j = 3t + q$, onde $t < j$ e $q \in \{-1, 0, 1\}$, temos que α_j é um zero de P_{t+1} e, obviamente, $t + 1 < j + 1$. Assim $P_{t+1}|P_{j+1}$, garantindo que α_j é também um zero de $P_{j+1}, P_{j+2}, \ldots, P_n$, de onde segue que $f_n(\alpha_j) = f_j(\alpha_j)$ para todo $j \leq n$.

Por fim, observe que

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=2}^{n} \epsilon_n z^n P_n(z) \\ &= z + \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=2}^{n} \{f_i(z) - f_{i-1}(z)\} = z + \lim_{n\to\infty}\{f_n(z) - f_1(z)\} \\ &= f_1(z) + \lim_{n\to\infty}\{f_n(z) - f_1(z)\} = \lim_{n\to\infty} f_n(z). \end{aligned} \tag{4.37}$$

□

Observe agora que se $j \leq 3n + 1$ e $i \leq n$, então $f_{n+1}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_i) = f_n^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_i)$. De fato, basta notar que $B(0, r_i)$ é um subconjunto de $B(0, r_{n+1})$ (pois $i \leq n$) e que $f_n^{-1}(\{\alpha_j\}) \cap B(0, r_{n+1})$ e $f_{n+1}^{-1}(\{\alpha_j\}) \cap B(0, r_{n+1})$ são iguais.

Afirmação 4.5. *Se $k = \max\{i, j\}$, temos que $f_n^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_i) = f_k^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_i)$ para todo $n \geq k$*

Demonstração. Basta utilizarmos a observação acima e a expressão (4.33). De fato, sejam $i \leq n$ e $j \leq 3n + 1$. Se $k = \max\{i, j\}$, então, claramente $n \geq k$ e $j \leq 3k + 1$. Assim, pela expressão (4.33), obtemos:

$$\begin{aligned} f_k^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_{k+1}) &= f_{k+1}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_{k+1}) \\ f_{k+1}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_{k+2}) &= f_{k+2}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_{k+2}) \\ f_{k+2}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_{k+3}) &= f_{k+3}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_{k+3}) \\ &\vdots \\ f_{n-1}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_n) &= f_n^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_n). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Desse modo, utilizando agora a observação, obtemos:

$$\begin{aligned}
f_{n-1}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i) &= f_n^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i). \\
f_{n-2}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i) &= f_{n-1}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i). \\
&\vdots \\
f_{k+1}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i) &= f_{k+2}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i) \\
f_k^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i) &= f_{k+1}^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Logo, temos que $f_n^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i) = f_k^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i)$ e a afirmação está provada.

$\square$

A Afirmação 4.5 implica que $f^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i) \supseteq f_k^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i)$, no entanto, como f é uma função não constante, obtemos que vale a igualdade $f^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i) = f_k^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$.

De fato, se houvesse um elemento $w \in (f^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i)) \backslash (f_k^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i))$, então esse elemento estaria há uma distância positiva do conjunto finito $f_k^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i)$. Seja $\delta = \text{dist}(w, f_k^{-1}(\alpha_j) \cap B(0,r_i)) > 0$ tal distância. Defina o conjunto $S = \cup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(\alpha_j)$ e denote $f := f_\infty$.

Claramente, se $n < \infty$, então $f_n^{-1}(\alpha_j) < \infty$, afinal, f_n é um polinômio. Observe ainda que, pelo princípio de identidade para funções inteiras, obtemos que $f^{-1}(\alpha_j)$ é enumerável, caso contrário, f seria constante. Assim, obtemos que o conjunto S é enumerável.

Desse modo, existe $\widehat{\delta} < \delta$ tal que $\widehat{B} := B(w, \widehat{\delta}) \subseteq B(0,r_i)$ e $S \cap \partial \widehat{B} = \varnothing$.

Agora, como $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, temos que podemos escrever $f(z) = f_n(z) + R_n(z)$, onde $|R_n(z)| \to 0$ quando $n \to \infty$. Observe ainda que $\min\limits_{z \in \partial \widehat{B}} |f_n(z) - \alpha_j| > 0$, e afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \min\limits_{z\in\partial\widehat{B}} |f_n(z) - \alpha_j| > 0$.

De fato, suponha o contrário. Como f_n é uma função contínua para todo $n = 1, 2, \ldots$ e $\partial\widehat{B}$ é um conjunto compacto, temos que ela assume o mínimo em $\partial\widehat{B}$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, existiria $w_n \in \partial\widehat{B}$ tal que $\min\limits_{z\in\partial\widehat{B}} |f_n(z) - \alpha_j| = |f_n(w_n) - \alpha_j|$.

Logo, pela hipótese de contradição, temos que

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(w_n) - \alpha_j| = 0 \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(w_n) = \alpha_j. \tag{4.40}$$

No entanto, $w_n \in \partial\widehat{B}$, logo, pelo Teorema de Bolzano Weierstrass, $\{w_n\}$ possui subsequência convergente $\{w_{n_k}\}$. Seja $a \in \partial\widehat{B}$ o limite dessa subsequência.

Então,

$$\alpha_j = \lim_{n_k \to \infty} f(w_{n_k}) = f(a) \Rightarrow a \in f^{-1}(\alpha_j) \cap \partial\widehat{B}. \tag{4.41}$$

O que contradiz a escolha de $\widehat{B}$. Logo, a afirmação é verdadeira.

Desse modo, existe $\epsilon > 0$ tal que $\min_{z \in \partial\widehat{B}} |f_n(z) - \alpha_j| \geq \epsilon$ para todo n suficientemente grande.

Agora, para $z \in \partial\widehat{B}$ e n suficientemente grande, como $|R_n(z)| \to 0$, segue que

$$|R_n(z)| \leq \max_{z \in \partial\widehat{B}} |f_n(z) - \alpha_j| < \epsilon \leq \min_{z \in \partial\widehat{B}} |f_n(z) - \alpha_j| \leq |f_n(z) - \alpha_j|. \tag{4.42}$$

Assim, $|(f(z) - \alpha_j) - (f_n(z) - \alpha_j)| = |R_n(z)| \leq |f_n(z) - \alpha_j|$ em $\partial\widehat{B}$, assim, pelo Teorema de Rouché (Teorema 1.12), o número de zeros (contando a multiplicidade) de $f(z) - \alpha_j$ e $f_n(z) - \alpha_j$ é o mesmo em $\widehat{B}$.

No entanto, temos que $f_n(z) - \alpha_j$ não tem zeros em $\widehat{B}$, mas $w \in \widehat{B}$ e $f(w) = \alpha_j$. Logo, temos uma contradição. E essa contradição surge da suposição de que os conjuntos $f_k^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_i)$ e $f^{-1}(\alpha_j) \cap B(0, r_i)$ não eram iguais.

Então, resta mostrar que a função f pode ser escolhida de modo a ser transcendente. Mas essa escolha é possível, pois existe uma quantidade não enumerável de escolhas para f, afinal em cada passo, existem infinitas possibilidades de escolhas para ϵ_{n+1} e para a_{n+1}. Como as funções do teorema têm coeficientes racionais, segue que existe apenas uma quantidade enumerável dessas funções. Assim, podemos construir f de modo que essa função seja transcendente, e com isso, concluímos a prova do teorema. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge Math. Lib, 1996

[2] Y. Bugeaud, Approximation by Algebraic Numbers, *Cambridge Tracts in Math.*, **160** (2004)

[3] A. P. Chaves e D. Marques, An Explicit Family of U_m Numbers, *Elem. Math.*, **69** (2014), 18–22.

[4] P. Erdös, U. Dudley, Some Remarks and Problems in Number Theory Related to the Work of Euler, *Math. Mag.*, **56** (1983) 292–298.

[5] P. Erdös, Representation of Real Numbers as Sum and Products of Liouville Numbers, *Michigan Math. J.*, **9** (1962), 59–60

[6] A. O. Gelfond, Sur le septième problème de Hilbert, *Investia Akad. Nauk.* **7** (1934), 623–630.

[7] C. Hermite, Sur la Fonction Exponentielle, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **77** (1873) 18–24.

[8] J. Huang, D. Marques, M. Mereb, Algebraic Values of Transcendental Functions at Algebraic Points, *Bull. Austral. Math. Soc.* **82** (2010), 322–327.

[9] I. Kaplanski, *An Introduction to Differential Algebra*, 2nd edition, Hermann, Paris, 1976.

[10] S. Lang, *Algebra*, Addison Weley. (2002)

[11] S. Lang, *Complex analysis.* Vol. 103. Springer Science & Business Media. (2013)

[12] F. Lindemann, Über die Zahl π, *Math. Ann.* **20** (1882) 213–225.

[13] J. Liouville,Sur des Classes Très-étendue de Quantités dont la Valeur n'est ni Algébrique, ni Même Réductibles à des Irrationnelles Algébriques, *J. Math. Pures Appl.* **16** (1851) 133–142.

[14] K. Mahler, Some Suggestions for Further Research, *Bull. Austral. Math. Soc.* **29** (1984), 101–108

[15] K. Mahler, *Lectures on Transcendental Numbers*, Lectures notes in mathematics, Vol. **546**. Springer-Verlag, Berlin- New York, 1976.

[16] E. Maillet, *Introduction à la Théorie des Nombres Transcendants et des Propriétés Arithmétiques des Fonctions*, Gauthier-Villars, 1906.

[17] D. Marques, On the Arithmetic Nature of Hypertranscendental Functions at Complex Points, *Expo. Math.* **29** (2011) 361–370.

[18] D. Marques, *O Problema de Lang e uma Generalização dos Teoremas de Stäckel*, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasil, 2009.

[19] D. Marques, The Solution of a Version of a Mahler's Question, *Int. J. Number Theory* **163** (2016) 510–519.

[20] D. Marques, C. G., Moreira, On a Variant of a Question Proposed by K. Mahler Concerning Liouville Numbers, *Bull. Austral. Math. Soc.* **91**, 29–33.

[21] D. Marques, C. G, Moreira, A Positive Answer for a Question Proposed by K. Mahler, *Math. Ann.* (a aparecer)

[22] D. Marques, C. G. Moreira, On exceptional sets of transcendental functions with integer coefficients: solution of a Mahler's problem. preprint

[23] D. Marques, J. Ramirez, On Exceptional Sets: The Solutions of a Problem Proposed by K. Mahler. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **94**, (2016) 15–19

[24] D.D Mordukhai-Boltovskoi, On Hypertranscendental Functions and Hypertranscendental Numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **64** (1949) 21–24.

[25] A. L, Neto, *Funções de uma variável complexa*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.

[26] A. Ostrowski, Uber Dirichletsche, Reihen und Algebraische Differentialgleichungen, *Math. Z.* **8** (1920), 241–298.

[27] T. Schneider, Transzendenzuntersuchungen periodischer funktionen: I transzendenz von potenzen; II transzendenzeigenschaften elliptischer funktionen, *J. Reine Angew. Math.* **172** (1934), 65–74.

[28] M. G, Soares. *Cálculo em uma variável complexa*, IMPA. (2006)

[29] P. Stäckel, Ueber Arithmetische Eingenschaften Analytischer Functionem, *Math. Ann.* **46** (1895), no. 4, 513–520.

[30] P. Stäckel, Arithmetische Eingenschaften Analytischer Functionem, *Acta Math.* **25** (1902) 371–383.

[31] K. Weierstrass, Zu Lindemann's abhandlung 'Über die Ludolph'sche zahl', *Werke* II (1885), 341–362.