

## Revista IBRACON de Estruturas e Materiais



All the contents of this journal, except where otherwise noted, is licensed under a Creative Commons Attribution License. Fonte:

[https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1983-41952012000500005&lng=en&tln g=en](https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1983-41952012000500005&lng=en&tln g=en). Acesso em: 17 set. 2020.

### REFERÊNCIA

SACRAMENTO, P. V. P. et al. Punção em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 5, n. 5, p. 659-691, out. 2012. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1983-41952012000500005>. Disponível em: [https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1983-41952012000500005&lng=en&tln g=en](https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1983-41952012000500005&lng=en&tln g=en). Acesso em: 17 set. 2020.

## Punching strength of reinforced concrete flat slabs without shear reinforcement

### *Punção em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento*



P. V. P. SACRAMENTO <sup>a</sup>

M. P. FERREIRA <sup>b</sup>  
mpina@ufpa.br

D. R. C. OLIVEIRA <sup>c</sup>  
denio@ufpa.br

G. S. S. A. MELO <sup>d</sup>  
melog@unb.br

#### Abstract

Punching strength is a critical point in the design of flat slabs and due to the lack of a theoretical method capable of explaining this phenomenon, empirical formulations presented by codes of practice are still the most used method to check the bearing capacity of slab-column connections. This paper discusses relevant aspects of the development of flat slabs, the factors that influence the punching resistance of slabs without shear reinforcement and makes comparisons between the experimental results organized in a database with 74 slabs carefully selected with theoretical results using the recommendations of ACI 318, EUROCODE 2 and NBR 6118 and also through the Critical Shear Crack Theory, presented by Muttoni (2008) and incorporated the new fib Model Code (2010).

**Keywords:** flat slab, punching shear, reinforced concrete, codes.

#### Resumo

O dimensionamento à punção é um ponto crítico no projeto de lajes lisas e devido à falta de um método teórico capaz de explicar este fenômeno a verificação da capacidade resistente de ligações laje-pilar é feita normalmente utilizando-se as recomendações de normas de projeto. Este artigo discute aspectos relevantes do surgimento do sistema de lajes lisas, dos fatores que influenciam na resistência à punção de lajes sem armadura de cisalhamento e faz comparações entre os resultados experimentais de um banco de dados com 74 lajes cuidadosamente selecionadas com resultados teóricos utilizando-se as recomendações das normas ACI 318, EUROCODE 2 e NBR 6118 e também através da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento, apresentada por Muttoni (2008) e incorporada à nova norma fib Model Code (2010).

**Palavras-chave:** lajes lisas, punção, concreto armado, normas.

<sup>a</sup> Mestrando em Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil.

<sup>b</sup> Professor, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, mpina@ufpa.br, Belém, Pará, Brasil.

<sup>c</sup> Professor, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, denio@ufpa.br, Belém, Pará, Brasil.

<sup>d</sup> Professor, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, melog@unb.br, Brasília, Distrito Federal, Brasil.

## 1. Introdução

Lajes lisas são aquelas que se apóiam diretamente nos pilares sem a presença de capitéis. Elas podem ser consideradas como uma boa opção para edifícios de concreto uma vez que permitem maior agilidade ao processo construtivo devido à simplificação das formas e armaduras do pavimento, reduzindo custos com mão-de-obra, e, principalmente, por atribuírem maior flexibilidade ao layout dos pavimentos. O dimensionamento da ligação laje-pilar é o ponto mais crítico do projeto de lajes lisas, pois nessa região ocorre concentração de tensões cisalhantes que podem conduzir à punção, modo de ruptura brusco que pode levar a estrutura à ruína através do colapso progressivo. A Figura 1a mostra uma ruptura por punção registrada em laboratório por Ferreira [1]. Uma forma de garantir a ductilidade local e evitar o colapso progressivo de estruturas com lajes lisas é através do uso de armaduras de pós-punção, conforme as apresentadas na Figura 1b, as quais devem ser dimensionadas de modo a suportarem a reação vertical no pilar, devendo-se ainda garantir no detalhamento que estas estejam suficientemente ancoradas além da possível região do cone de punção.

Desde os ensaios de Elstner e Hognestad [2] muitas pesquisas vêm sendo conduzidas buscando entender melhor o comportamento e a resistência à punção de lajes lisas. Muitos métodos teóricos foram propostos ao longo dos anos, mas nenhum deles até hoje foi completamente aceito pelo meio técnico-científico por não serem capazes de estimar com precisão a resistência à punção de ligações laje-pilar e ao mesmo tempo explicar o fenômeno com todas as suas variáveis. Assim, o dimensionamento à punção de lajes lisas é normalmente feito utilizando-se recomendações apresentadas por normas para projeto de estruturas de concreto, as quais são fundamentalmente empíricas.

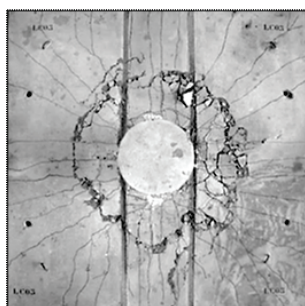
Recentemente Muttoni [3] apresentou uma aproximação teórica nova, denominada Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC), capaz não só de prever a capacidade resistente da ligação laje-pilar, mas também de estimar seu comportamento em serviço (rotação, deslocamentos e deformações). Tal teoria baseia-se na ideia de que a resistência à punção diminui com o

aumento da rotação da laje, e foi recentemente incorporada na primeira versão da nova norma fib Model Code [4,5], cuja primeira versão foi apresentada em 2010, e que vem substituir o antigo CEB-FIP MC90 [6]. Este artigo tem como objetivo avaliar este método comparando os resultados teóricos com resultados experimentais de 74 lajes lisas de concreto armado sem armaduras de cisalhamento cuidadosamente selecionadas (ver item 6 do artigo) para compor um banco de dados vasto, com espécimes com variação significativa de parâmetros como a altura útil, taxa de armadura de flexão e resistência do concreto. Estes resultados experimentais foram também comparados com os teoricamente obtidos por outras normas de projeto, como o ACI 318 [7], EUROCODE 2 [8] e a NBR 6118 [9].

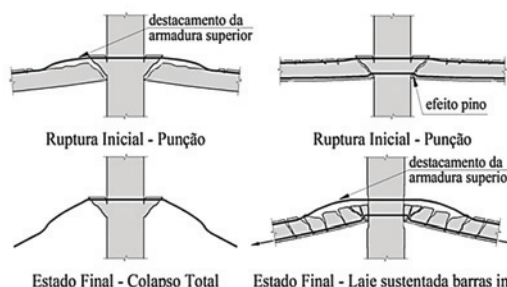
## 2. Desenvolvimento histórico do sistema de lajes lisas

Existe grande controversa a respeito de quem foi o inventor do sistema estrutural de lajes lisas. Gasparini [10] afirma que o crédito quanto ao desenvolvimento deste sistema deve ser dado ao engenheiro George M. Hill, que teria construído edifícios em lajes lisas em regiões distintas dos Estados Unidos da América entre 1899 e 1901. Ele ressalta, no entanto, que C. A. P. Turner, engenheiro e inventor americano, foi o responsável por demonstrar que este sistema de lajes era confiável, tendo utilizado o sistema pela primeira vez na construção de um edifício na cidade de Minneapolis, em 1906. As lajes de Turner, por ele denominadas de lajes “cogumelo”, caracterizavam-se pela presença de capitéis na ligação laje-pilar e pelo uso de uma gaiola composta de barras de 32 mm de diâmetro, responsáveis pelo combate ao cisalhamento. Já Furst e Marti [11] atribuem a invenção deste sistema ao engenheiro suíço Robert Maillart, mais famoso por seus trabalhos com pontes do que pelo desenvolvimento deste sistema estrutural. Segundo estes pesquisadores, Maillart teria concebido o sistema em 1900, mas só teria terminado seus ensaios em 1908, vindo a conseguir a patente do chamado sistema de pavimento sem vigas em 1909. Kierdorf [12] ressalta que ao mesmo tempo em que o sistema era desenvolvido de forma independente nos Estados Unidos

Figura 1 – Ruptura por punção em lajes lisas sem armaduras de cisalhamento (Ferreira (1))



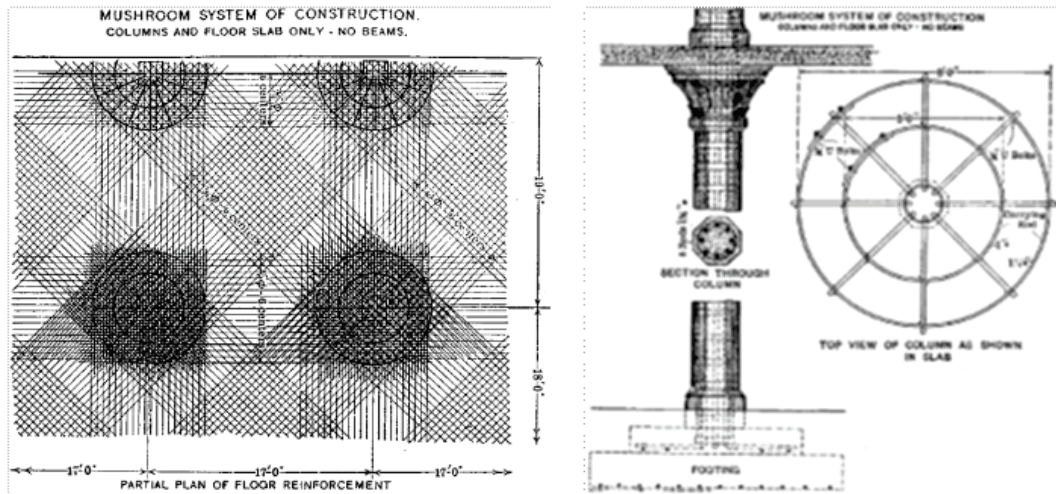
**A** Ruptura por punção



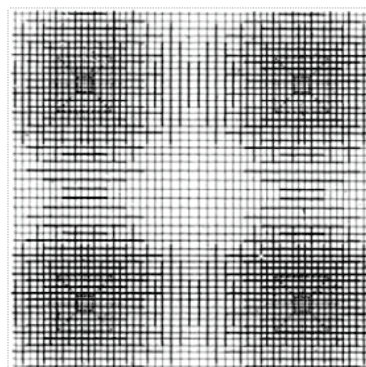
**B** Sem armadura contra colapso progressivo

**C** Com armadura contra colapso progressivo

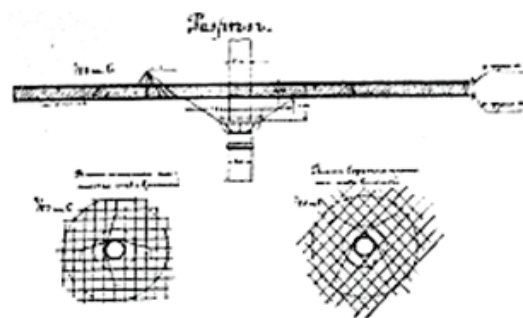
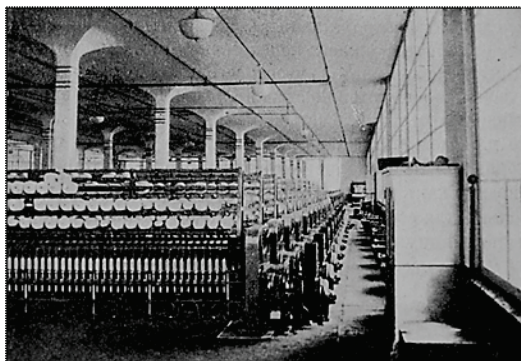
Figura 2 – Detalhes do desenvolvimento do sistema de lajes sem vigas



**A** sistema de lajes “cogumelo” de C. A. P. Turner (Gasparini (10))



**B** Testes executados por Maillart (Furst e Marti (11))



**C** Fábrica construída na Rússia em 1910 (Kierdorf (12))



e na Suíça, com a proibição do uso do concreto armado em 1905 na Rússia, o engenheiro Artur F. Loleit projetou e executou uma fábrica próxima a Moscow em 1907 em lajes lisas, tendo sido a primeira de diversas construções em lajes sem vigas feitas por ele na Rússia. O autor comenta ainda que se suas apresentações feitas no Encontro de Especialistas em Cimento (1912) e na Sociedade Russa para Pesquisa de Materiais (1913) tivessem sido documentadas e se não tivesse ocorrido a Primeira Guerra Mundial (1914-1918) o seu trabalho com lajes lisas teria sido conhecido por um público maior. Alguns detalhes sobre o desenvolvimento do sistema de lajes lisas podem ser vistos na Figura 2.

Muitos obstáculos tiveram de ser transpostos até que o sistema de lajes lisas pudesse ser utilizado de forma segura e econômica. Inicialmente havia forte discussão quanto aos métodos teóricos para a determinação dos esforços em um sistema sem vigas e este era utilizado de modo praticamente empírico, observando-se variações significativas da quantidade e disposição das armaduras entre os sistemas concorrentes. Furst e Marti [11] destacam que a primeira teoria bem fundamentada para o cálculo dos esforços em pavimentos sem vigas foi publicada apenas em 1921, com o trabalho de Westergaard e Slater, que através do método das diferenças finitas conseguiram tratar diferentes casos de carregamento, considerando a influência da rigidez dos pilares e dos capitéis. Também era necessário estabelecer normas que padronizassem o uso do sistema com lajes sem vigas que se tornava progressivamente mais popular, o que só foi possível em 1925, quando foi publicada a norma americana ACI para estruturas de concreto armado que apresentava recomendações para sistemas com lajes cogumelo. Estas primeiras recomendações normativas eram baseadas em ensaios experimentais pioneiros realizados nos EUA, sendo o primeiro o de Talbot [13], que realizou ensaios em sapatas na Universidade de Illinois, conforme mostrado na Figura 3.

No entanto as sapatas ensaiadas por Talbot [13] eram muito espessas se comparadas com as lajes cogumelo da época e, portanto, esses resultados não eram adequados do ponto de vista do estudo da punção. Tentando preencher esta e outras lacunas, Elstner e Hognestad [2] testaram 39 lajes em laboratório, com o objetivo único de estudar a punção através da análise de algumas importantes variáveis como: taxa de armadura de flexão; resistên-

cia do concreto; quantidade de armaduras de compressão; condições de apoio; tamanho dos pilares; quantidade e distribuição das armaduras de cisalhamento. Eles concluíram que praticamente todos esses fatores têm forte influência na resistência ao cisalhamento de lajes lisas de concreto, com exceção do aumento da taxa de armadura de compressão, que se mostrou pouco influente na resistência última das lajes por eles testadas.

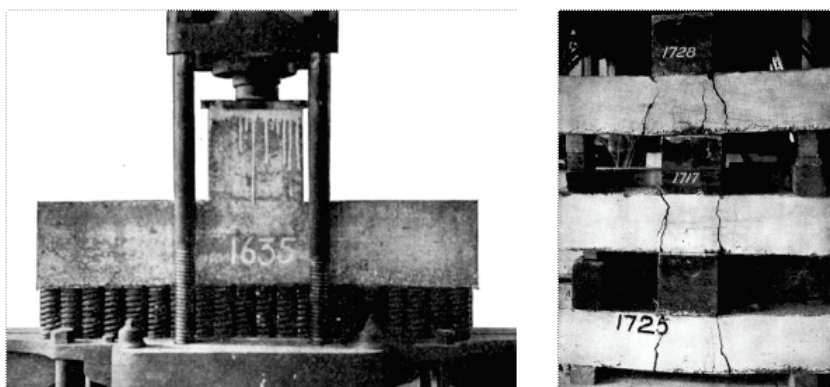
Posteriormente, foram publicados dois dos mais importantes trabalhos sobre punção. Kinnunen e Nylander [14] apresentaram um modelo mecânico que buscava explicar o mecanismo de ruptura por punção e prever a resistência de ligações laje-pilar. Este modelo baseava-se em observações experimentais obtidas após a realização de um vasto programa experimental. Fundamentava-se na formação das fissuras de flexão e de cisalhamento para dividir a laje em segmentos, e, admitindo que a região externa ao cone de punção apresentava rotações de corpo rígido em torno de um ponto afastado de uma distância  $x$  (altura da linha neutra da laje) tanto na vertical quanto na horizontal em relação às faces do pilar, relacionava a resistência última da ligação com a resistência à compressão de uma casca imaginária confinada entre o pilar e a fissura crítica de cisalhamento. Essa foi uma contribuição inédita relevante, sendo a primeira teoria racional apresentada, porém na época suas equações foram consideradas complexas e os resultados obtidos não justificaram seu uso em detrimento aos métodos empíricos existentes.

Um ano após esta publicação, Moe [15] publicou um relatório de uma larga série de ensaios analisando diversas variáveis, inclusive os casos de momentos desbalanceados em ligações laje-pilar, sendo seu trabalho ainda hoje a base para as recomendações da norma ACI 318 [7]. Depois disso muitos trabalhos foram realizados e muitas contribuições foram feitas para o melhor entendimento do fenômeno da punção e da influência dos parâmetros envolvidos na resistência última das lajes, conforme será apresentado a seguir.

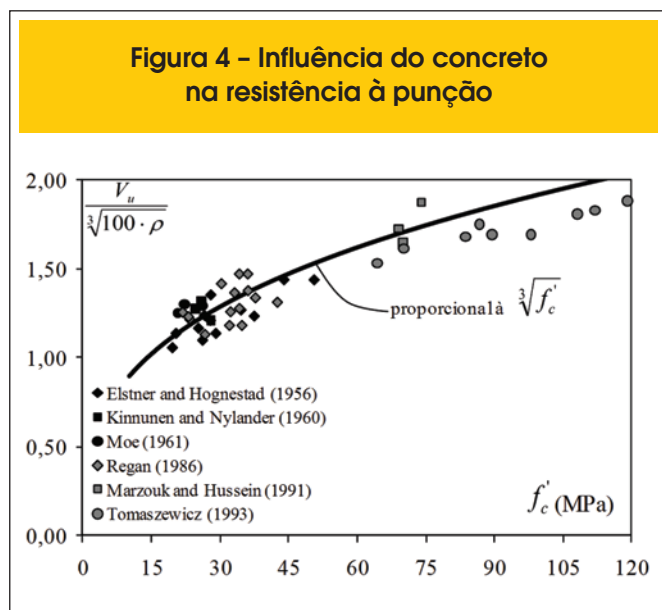
### 3. Fatores que influenciam na resistência à punção

Os resultados de inúmeros ensaios indicam que a resistência à

Figura 3 – Ensaios em sapatas, base para primeiras recomendações sobre punção (Talbot (13))



**Figura 4 – Influência do concreto na resistência à punção**



punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento é influenciada principalmente pela resistência à compressão do concreto ( $f'_c$ ), pela taxa de armadura de flexão tracionada ( $\rho$ ), pelo tamanho e a geometria do pilar e pelo *size effect* ( $\xi$ ), ou efeito de tamanho, numa tradução livre, que é a redução da tensão resistente ao cisalhamento da laje com o aumento da altura útil ( $d$ ). A influência de cada um destes parâmetros é discutida a seguir tendo como base os resultados de ensaios relevantes.

### 3.1 Resistência do concreto

A ruptura por cisalhamento de um elemento de concreto sem armadura de combate a tal esforço é governada, dentre outros fatores, pela resistência à tração do concreto. Como para fins de projeto de uma estrutura o estabelecimento da resistência à compressão é o passo inicial desse processo e as formulações normativas costumam relacionar a resistência à tração do concreto como uma função de sua resistência à compressão, é comum observar que as pesquisas experimentais correlacionam a resistência ao cisalhamento com a resistência à compressão do concreto. Graf [16] foi um dos primeiros a tentar avaliar a influência da resistência do concreto na resistência à punção, concluindo que não havia uma relação linear entre o aumento da capacidade resistente de uma ligação laje-pilar com o aumento da resistência do concreto. Moe [15] propôs que a resistência à punção poderia ser expressa com uma função proporcional à raiz quadrada da resistência à compressão do concreto, proposição até hoje utilizada pelo ACI. No entanto, os resultados de pesquisas mais recentes, como as de Hallgren [17], que analisou lajes com concretos de elevada resistência, indicam que relacionar à resistência à punção com uma função proporcional à raiz quadrada da resistência à compressão do concreto tende a superestimar a sua influência. Por este motivo o ACI limita o uso de sua expressão para concretos com resistência de até 69 MPa ou 10.000 psi.

Marzouk e Hussein [18] analisaram lajes com concreto de alta resistência variando a altura útil da laje e a taxa de armadura de flexão,

concluindo que a raiz cúbica da resistência do concreto representa melhor a tendência dos resultados experimentais, fato que também é defendido por outros pesquisadores como Hawkins et al. [19] e Regan [20]. A Figura 4 apresenta um gráfico que tem como objetivo avaliar a influência do concreto na resistência à punção, comparando-se a tendência obtida utilizando-se uma função proporcional à raiz cúbica da resistência à compressão do concreto (conforme proposto pelas equações do Eurocode 2) com resultados experimentais do banco de dados montado, observando-se uma boa correlação entre os resultados experimentais e a função avaliada.

### 3.2 Taxa de armadura de flexão

A taxa de armadura de flexão tracionada ( $\rho$ ) é definida como a razão entre a área de armadura de flexão tracionada ( $A_s$ ) pela área de concreto ( $A_c$ ), a qual é dada pelo produto da altura útil da laje ( $d$ ) por uma determinada largura a ser considerada. Em casos práticos é razoável estabelecer que apenas uma determinada quantidade de barras próximas da área do pilar irá efetivamente contribuir com a resistência à punção. Considerando os resultados de ensaios experimentais, Regan [20] recomenda que a largura efetiva a ser considerada na qual as barras de flexão irão contribuir para a resistência à punção deve ser tomada afastada  $3 \cdot d$  das faces do pilar.

A taxa de armadura de flexão tracionada influencia na resistência à punção, principalmente nos casos de lajes sem armadura de cisalhamento. Regan [21] explica que o aumento na taxa de armadura de flexão tem como efeito o aumento da zona comprimida, reduzindo a fissuração na ligação laje-pilar por flexão, o que é benéfico uma vez que facilita a formação de mecanismos para a transmissão de cisalhamento. Além disso, a espessura das fissuras de flexão é reduzida, o que facilita a transferência de forças através do engrenamento de agregados, podendo ainda aumentar o efeito de pino.

Kinnunen e Nylander [14], testando lajes com espessura total de 150 mm, ao variarem a taxa de armadura entre 0,8% a 2,1% ob-

**Figura 5 – Influência da taxa de armadura na resistência à punção**

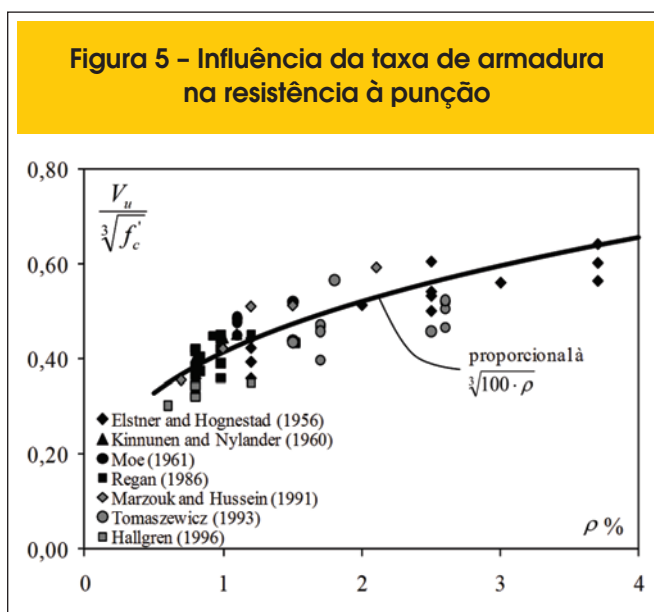
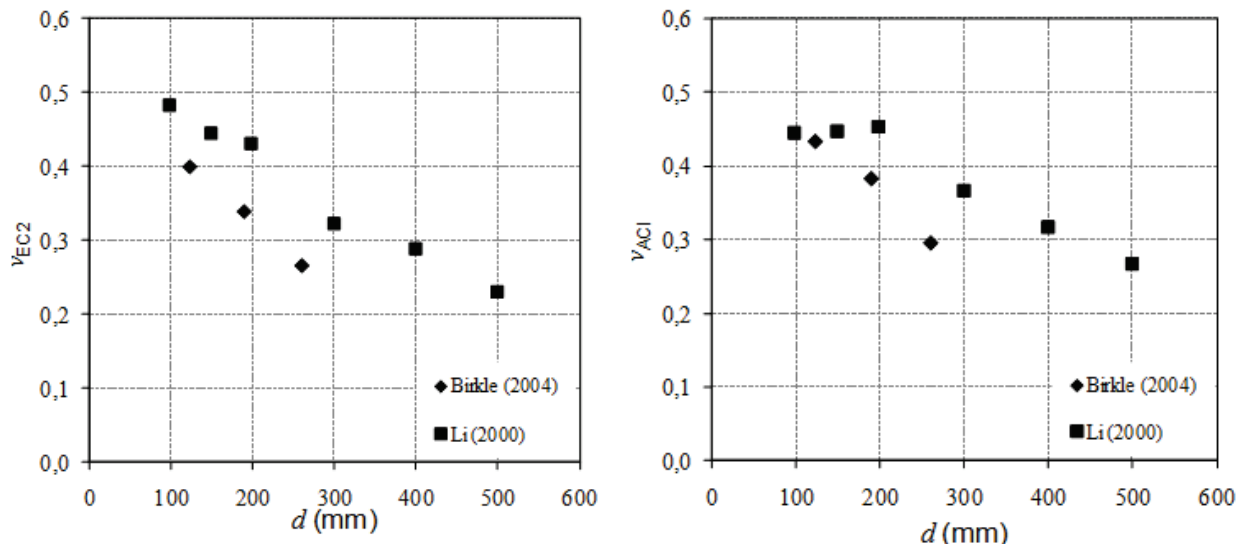


Figura 6 - Variação da resistência nominal ao cisalhamento em função da altura útil



servaram um acréscimo de resistência da ordem de 95%. Já Marzouk e Hussein [18], também ensaiando lajes com espessura total de 150 mm, observaram um acréscimo de 63% na resistência à punção quando mudaram a taxa de armadura de flexão de 0,6% para 2,4%. Long [22], utilizando os resultados de vários autores, concluiu que a resistência à punção era influenciada pela taxa de armadura de flexão elevada ao expoente um quarto. Já Regan e Bræstrup [23] e Sherif e Dilger [24] sugerem que a resistência à punção é proporcional à taxa de armadura de flexão elevada a um terço. A Figura 5 utiliza resultados experimentais do banco de dados para avaliar a contribuição da taxa de armadura de flexão das lajes na resistência à punção.

### 3.3 Geometria e dimensões do pilar

A geometria e as dimensões do pilar também afetam a resistência de uma laje, pois determinam a forma como as tensões se distribuem na ligação laje-pilar. Vanderbilt [25] ensaiou lajes apoiadas em pilares de seção circular e quadrada e monitorou a região da laje nas extremidades dos pilares, tendo sido um dos primeiros a verificar a concentração de tensões nos cantos dos pilares de seção quadrada. O autor concluiu que essa concentração de tensões poderia ser o motivo das lajes com pilares quadrados terem apresentado menor resistência que as lajes com pilares de seção circular, nas quais ele observou uma distribuição uniforme das tensões.

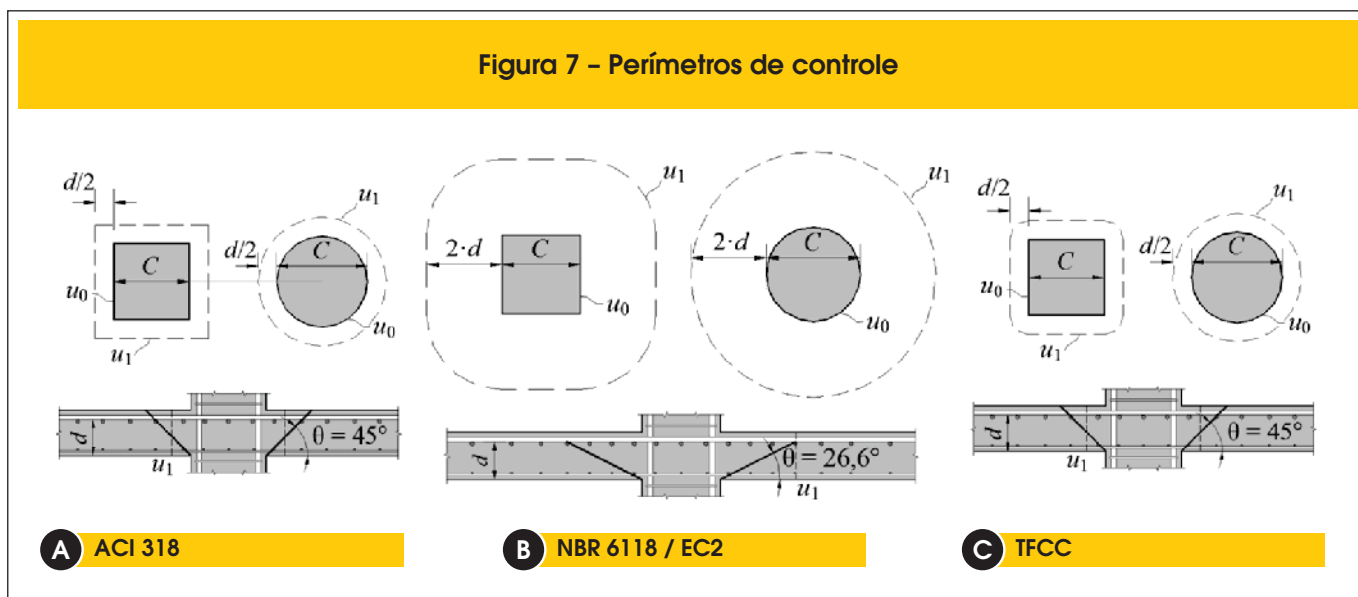
Em pilares retangulares, usualmente os mais empregados em edifícios, esse efeito pode ser ainda maior. Hawkins et al. [26] variou a razão entre o maior e o menor lado do pilar ( $c_{max}/c_{min}$ ) de 2,0 a 4,3 e concluiu que se ela for maior que dois, a tensão nominal de cisalhamento diminui com o aumento da razão entre os lados. A pesquisa realizada por Hawkins é a base das recomendações do ACI para a consideração do índice de retangularidade dos pilares ( $\mu$ ), que pode reduzir em mais da metade a tensão nominal de cisalhamento em torno dos pilares.

OLIVEIRA et al. [27], analisando uma laje ensaiada por Forsell e Holmberg apoiada em um pilar retangular de 300 x 25 mm ( $c_{max}/c_{min} = 12$ ) observou que a resistência à punção pode ser bem estimada usando-se as recomendações do CEB-FIP MC90 [6], a qual não leva em consideração a relação  $c_{max}/c_{min}$ . OLIVEIRA et al. [27] acreditam que isso pode ser explicado pelo fato de nesta laje a relação  $c_{max}/d$  ser da ordem de  $2,88 \cdot d$ , considerada por eles como pequena em relação aos casos usuais. Após conduzir um programa experimental com 16 lajes, OLIVEIRA et al. [27] concluíram que a relação  $c_{max}/d$  pode ser um parâmetro mais determinante na resistência de ligações laje-pilar retangular do que a relação  $c_{max}/c_{min}$  e propuseram um fator de correção  $\lambda$  para aperfeiçoar as recomendações de normas como o ACI 318 [7] e a CEB-FIP MC90 [6].

### 3.4 Size-effect (efeito de tamanho)

Para a realização de ensaios experimentais em elementos de concreto é comum adotar algum fator de escala para correlacionar os modelos experimentais com os elementos estruturais em escala natural, a fim de economizar recursos, materiais e também pelo fato de que ensaiar elementos em escala natural pode ser uma dificuldade para a grande maioria dos laboratórios de estruturas. Por esse motivo, muitos dos ensaios realizados em lajes buscando-se avaliar o comportamento à punção foram feitos em espécimes com dimensões reduzidas. Muttoni [3] explica que quando a formulação atual para a estimativa da resistência à punção do ACI foi originalmente desenvolvida, na década de 1960, apenas ensaios em lajes com espessura relativamente reduzida estavam disponíveis e que, portanto, a influência do *size effect* (efeito de tamanho) não era aparente. Mas como as expressões para punção também são normalmente empregadas para a verificação tanto de sapatas espessas como de fundações do tipo radier, ensaios em modelos experimentais mais espessos passaram a ser realizados e esse efeito tornou-se evidente.

Figura 7 – Perímetros de controle



Os primeiros a alertar que a resistência nominal ao cisalhamento poderia variar de modo não proporcional com a espessura das lajes foram Graf [28] e Richart [29]. Na época esses autores propuseram formulações para descrever esse efeito, porém elas não são mais utilizadas. Posteriormente, diversas expressões foram propostas. Regan e Bræstrup [23] e Broms [30] propõem que a redução da resistência nominal ao cisalhamento com o aumento da espessura do elemento (*size effect*) pode ser estimada por  $(1/d)^{1/3}$ . As normas CEB-FIP MC90 [6] e EUROCODE 2 [8] recomendam que o *size effect* deve ser estimado por  $1+(200/d)^{1/2}$ , porém, o Eurocode limita o resultado desta expressão em no máximo 2,0. O efeito desta limitação é reduzir o incremento das estimativas de resistência à punção de lajes lisas com altura útil inferior a 200 mm através da limitação do valor de  $\xi$ . Ressalta-se que não foi encontrada uma base experimental sólida para justificar essa limitação e, deste modo, uma série de ensaios buscando avaliar essa recomendação do Eurocode poderia ser interessante.

Alguns resultados experimentais que podem auxiliar a compreensão da variação da resistência nominal ao cisalhamento em função da altura útil da laje vêm de ensaios feitos por Li [31] e Birkle [32]. Li [31] variou a altura útil de suas lajes de 100 mm até 500 mm. Nas lajes com altura útil de 100 mm, 150 mm e 200 mm a taxa de armadura de flexão utilizada foi de 0,98%, 0,90% e 0,83%, respectivamente. Já nas lajes com altura útil de 300 mm, 400 mm e 500 mm foi utilizada uma taxa de armadura de flexão constante e igual a 0,76%. Birkle [32] estudou o efeito da espessura em lajes com armaduras de cisalhamento, mas serão considerados nas análises apresentadas na Figura 6 apenas os resultados das lajes sem armadura de cisalhamento, as quais tinham altura útil foi de 124 mm, 190 mm e 260 mm e taxa de armadura de flexão de 1,52%, 1,35% e 1,10%, respectivamente. Na Figura 6 apresenta-se a variação da resistência nominal ao cisalhamento normalizada em função da altura útil das lajes. É possível perceber que ao usar as equações do Eurocode, em ambas as pesquisas houve uma redução aproximadamente linear na resistência nominal ao cisalhamento, independente da altura útil da laje, não havendo indicativos que justifiquem a limitação no  $\xi$  citada anteriormente.

Porém, usando-se as equações do ACI, é possível perceber uma mudança de comportamento nas lajes de Li com altura útil superior a 200 mm.

## 4. Recomendações normativas

### 4.1 ACI 318

Segundo o ACI 318 [7] a verificação da resistência à punção em lajes lisas de concreto armado sem armaduras de cisalhamento deve ser feita através da verificação das tensões cisalhantes em um perímetro de controle afastado de uma distância igual a  $d/2$  das faces do pilar ou das extremidades da área carregada, conforme indica a Figura 7a. A resistência à punção de uma laje sem armaduras de cisalhamento é expressa pela Equação 1.

$$V_{R,c} = \min \left\{ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{2}{\beta_c}\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d \\ &\left(\frac{\alpha_s \cdot d}{u_1} + 2\right) \cdot \frac{1}{12} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d \\ &\frac{1}{3} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Onde:

- $\beta_c$  é a razão entre a maior e a menor dimensão do pilar;
- $\alpha_s$  é uma constante que assume valor igual a 40 para o caso de pilares internos, 30 para pilar de borda e 20 para pilar de canto;
- $u_1$  é o comprimento de um perímetro de controle afastado  $d/2$  da face do pilar;
- $f_c$  é a resistência à compressão do concreto em MPa ( $f_c \leq 69$  MPa);
- $d$  é a altura útil da laje.



### 4.2 NBR 6118

A NBR 6118 [9], baseando suas recomendações nas da norma CEB-FIPMC90[6], recomenda que a verificação da resistência à punção em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento deve ser feita em duas regiões. Deve-se avaliar a resistência à compressão da biela no perímetro de controle  $u_0$  em torno do pilar, através da Equação 2. Deve-se ainda verificar a resistência à tração diagonal no perímetro de controle  $u_1$ , segundo a Equação 3. A Figura 7b apresenta detalhes sobre os perímetros de controle desta norma.

$$V_{R,max} = 0,27 \cdot \alpha_{v1} \cdot f_c \cdot u_0 \cdot d \quad (2)$$

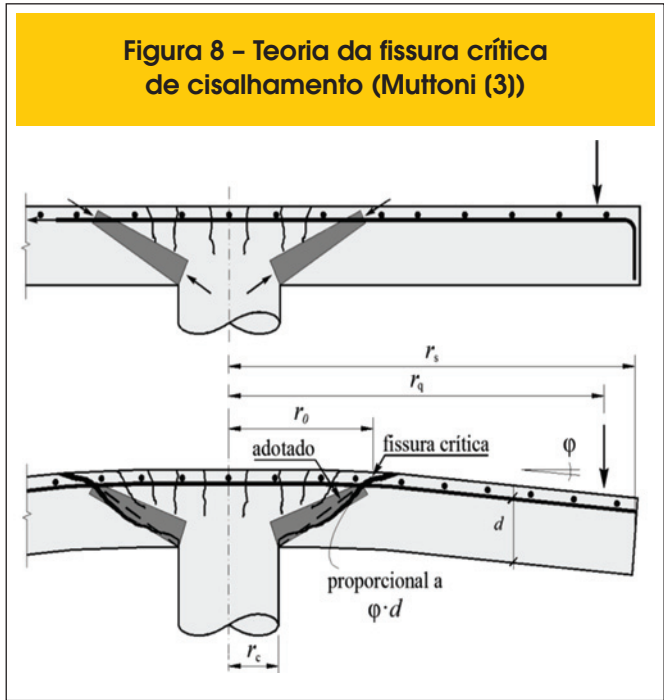
Onde:  
 $\alpha_{v1} = (1 - f_c/250)$   
 $u_0$  é o perímetro do pilar.

$$V_{R,c} = 0,18 \cdot (1 + \sqrt{200/d}) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_1 \cdot d \quad (3)$$

Onde:  
 $\rho$  é a taxa geométrica de armadura de flexão, expressa por  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$   
 $\rho_x$  e  $\rho_y$  são às taxas de armadura nas duas direções ortogonais;  
 $f_c$  é a resistência à compressão do concreto em MPa ( $f_c \leq 50$  MPa);

### 4.3 EUROCODE 2

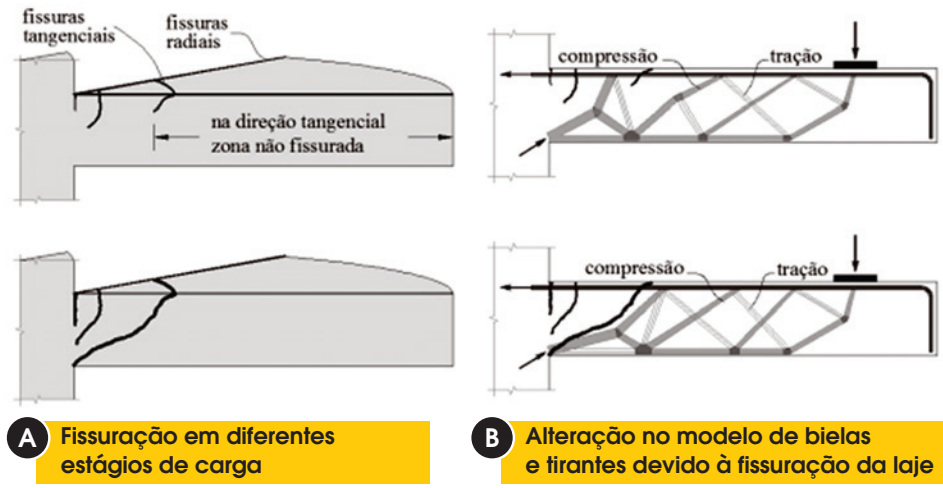
O EUROCODE 2 [8] também baseia suas recomendações para estimativa da resistência à punção nas recomendações da MC90,



e deste modo, suas recomendações são semelhantes as da NBR 6118. No entanto, esta norma limita o valor do *size effect* em  $\xi \leq 2,0$  e da taxa de armadura de flexão em  $\rho \leq 2\%$  buscando retirar algumas tendências de resultados contra a segurança. Assim, a resistência à punção é tomada como o menor valor fornecido pelas Equações 4 e 5. A Figura 7b mostra os perímetros de controle desta norma.

$$V_{R,max} = 0,3 \cdot f_c \cdot \left(1 - \frac{f_c}{250}\right) \cdot u_0 \cdot d \quad (4)$$

Figura 9 - Comportamento estrutural de ligações laje-pilar após a fissuração (Muttoni e Schwartz (33))



$$V_{R,c} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_1 \cdot d \quad (5)$$

Onde:

$d$  é a altura útil da laje;

$f_c$  é a resistência à compressão do concreto em MPa ( $f_c \leq 90$  MPa);

$\rho$  é a taxa de armadura de flexão tracionada média da laje obtido como  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02$ ;

$\rho_x$  e  $\rho_y$  são as taxas nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Devem ser consideradas as barras dentro de uma região afastada  $3 \cdot d$  das faces do pilar.

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0 ;$$

$u_1$  é o comprimento do perímetro de controle afastado  $2 \cdot d$  das faces do pilar.

### 5. Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC)

A teoria desenvolvida por Muttoni [3] baseia-se na ideia de que a resistência à punção diminui com o aumento da rotação da laje. Isso foi explicado por Muttoni e Schwartz [33] ao observarem que a resistência ao cisalhamento reduz a partir do surgimento de uma fissura crítica de cisalhamento que se propaga ao longo da espessura da laje, cortando a biela comprimida que transmite a força cortante para o pilar. Este mecanismo é apresentado na Figura 8, adaptada de Muttoni [3].

Os autores justificam essa idealização do comportamento da ligação através de algumas evidências experimentais. Afirmam que, conforme indicado em diversos ensaios experimentais sobre punção, a curvatura na direção radial concentra-se na região próxima aos apoios, de tal modo que fissuras de flexão concêntricas em forma de anel são observadas apenas nessa região. No restante da laje apenas fissuras radiais são observadas (ver Figura 9a). Uma vez que o esforço cortante não é transferido na direção tangencial, o estado de tensões não é afetado por tais fissuras. Na região das fissuras tangenciais, uma parte do esforço cortante pode ser resistido pelo engrenamento de agregados na superfície das fissuras e outra parte pode ser suportada pelo efeito pino das armaduras de flexão. À medida que a resistência à tração do concreto nas diagonais tracionadas é atingida as fissuras tangenciais (originalmente provocadas pela flexão da laje) começam a se propagar de modo inclinado em direção ao pilar.

Ainda segundo relatos de diversos autores, inclusive Ferreira [1], as deformações de compressão na direção radial, em uma região muito próxima das extremidades do pilar, após atingirem um determinado valor máximo em um dado estágio de carregamento, passam a decrescer. Pouco antes da ruptura por punção é possível observar inclusive deformações de tração. Tal fenômeno pode ser explicado pela formação de um modelo de bielas e tirantes do tipo cotovelo (ver Figura 9b) resultado do avanço da fissura crítica de cisalhamento, cortando a biela comprimida. A abertura dessa fissura reduz a resistência da biela comprimida e pode eventualmente levar a uma ruptura por punção. Ainda segundo Muttoni e Schwartz [33] a espessura desta fissura é proporcional ao produto  $\psi \cdot d$  (ver

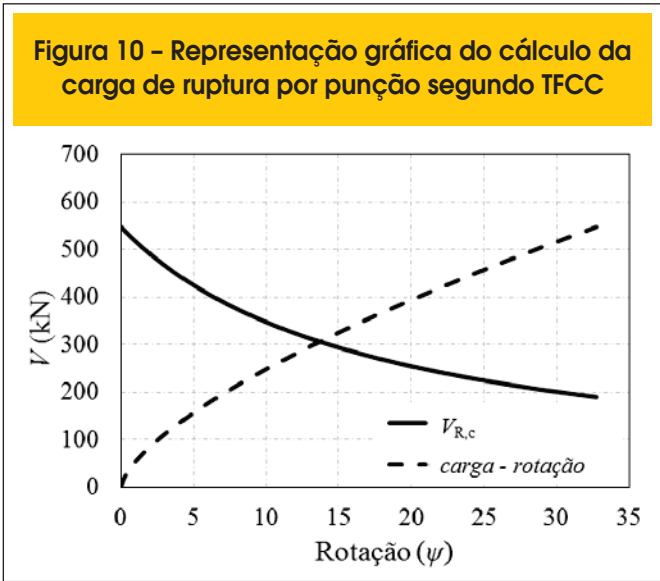


Figura 8). Já a transmissão de cisalhamento na fissura crítica está diretamente ligada à sua rugosidade, a qual por sua vez é função do tamanho máximo do agregado. Baseando-se nesses conceitos Muttoni [3] apresenta que a resistência ao cisalhamento propiciada pelo concreto pode ser estimada segundo a Equação 6.

$$V_{R,c} = \frac{3}{4} \cdot \frac{u_1 \cdot d \cdot \sqrt{f_c}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad (6)$$

Onde:

$u_1$  é o comprimento de um perímetro de controle à  $d/2$  da face do pilar (ver Figura 7c);

$f_c$  é a resistência à compressão do concreto;

$\psi$  é a rotação da laje;

$d_{g0}$  é o diâmetro de referência do agregado admitido como 16 mm;

$d_g$  é o diâmetro máximo do agregado usado no concreto da laje.

A rotação  $\psi$  da laje é expressa pela Equação 7.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \cdot \left( \frac{V_E}{V_{flex}} \right)^{3/2} \quad (7)$$

Onde:

$r_s$  é a distância entre o eixo do pilar e a linha de momentos nulos;

$r_q$  é a distância entre o eixo do pilar e a linha da carga;

$r_c$  é o raio do pilar circular ou o raio equivalente de um pilar retangular;

$f_{ys}$  é a tensão de escoamento da armadura de flexão tracionada;

$E_s$  é o módulo de elasticidade da armadura de flexão tracionada;

$V_E$  é a força aplicada;

$$V_{flex} = 2 \cdot \pi \cdot m_R \cdot \frac{r_s}{r_q - r_c}$$

$$m_R = \rho \cdot f_{ys} \cdot d^2 \cdot \left( 1 - \frac{\rho \cdot f_{ys}}{2 \cdot f_c} \right)$$

Tabela 1- Características das lajes presentes no banco de dados

Autor	Laje	$r_s$ (mm)	$r_q$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$\rho$	C (mm)	$f_c$ (MPa)	$f_{ys}$ (MPa)	$E_{s,f}$ (GPa)	$d_g$ (mm)	$P_u$ (kN)
Elstner e Hognestad (2)	A-1b	915	890	152	118	0,012	254 S	25,2	332	200	25	365
	A-1c	915	890	152	118	0,012	254 S	29,0	332	200	25	356
	A-1d	915	890	152	118	0,012	254 S	36,6	332	200	25	351
	A-1e	915	890	152	118	0,012	254 S	20,3	332	200	25	356
	A-2b	915	890	152	114	0,025	254 S	19,5	321	200	25	400
	A-2c	915	890	152	114	0,025	254 S	37,4	321	200	25	467
	A-7b	915	890	152	114	0,025	254 S	27,9	321	200	25	512
	A-3b	915	890	152	114	0,037	254 S	22,6	321	200	25	445
	A-3c	915	890	152	114	0,037	254 S	26,5	321	200	25	534
	A-3d	915	890	152	114	0,037	254 S	34,5	321	200	25	547
	A-4	915	890	152	118	0,012	356 S	26,1	332	200	25	400
	A-5	915	890	152	114	0,025	356 S	27,8	321	200	25	534
	B-9	915	890	152	114	0,020	254 S	43,9	341	200	38	505
	B-14	915	890	152	114	0,030	254 S	50,5	325	200	38	578
Kinunnem e Nylander (14)	IA15a/5	920	855	149	117	0,008	150 C	27,9	441	210	32	255
	IA15a/6	920	855	151	118	0,008	150 C	25,8	454	210	32	275
	IA30a/24	920	855	158	128	0,010	300 C	25,9	456	210	32	430
	IA30a/25	920	855	154	124	0,011	300 C	24,6	451	210	32	408
Moe (15)	S1-60	915	890	152	114	0,011	254 S	23,3	399	179	38	389
	S1-70	915	890	152	114	0,011	254 S	24,5	483	171	38	393
	S5-60	915	890	152	114	0,011	203 S	22,2	399	179	38	343
	S5-70	915	890	152	114	0,011	203 S	23,0	483	171	38	378
	H1	915	890	152	114	0,011	254 S	26,1	328	195	38	372
	M1A	915	890	152	114	0,015	305 S	20,8	481	195	38	433
Regan (20)	I/2	1,000	915	100	77	0,012	200 S	23,4	500	200	10	176
	I/4	1,000	915	100	77	0,009	200 S	32,3	500	200	10	194
	I/6	1,000	915	100	79	0,008	200 S	21,9	480	200	10	165
	I/7	1,000	915	100	79	0,008	200 S	30,4	480	200	10	186
	II/1	1,450	1,378	250	200	0,010	250 S	34,9	530	200	20	825
	II/2	1,000	900	160	128	0,010	160 S	33,3	485	200	20	390
	II/3	1,000	900	160	128	0,010	160 S	34,3	485	200	10	365
	II/4	500	450	80	64	0,010	80 S	33,3	480	200	20	117
	II/5	500	450	80	64	0,010	80 S	34,3	480	200	10	105
	II/6	500	450	80	64	0,010	80 S	36,2	480	200	5	105
	III/1	750	685	120	95	0,008	150 S	23,2	494	200	10	197
	III/3	750	685	120	95	0,008	150 S	37,8	494	200	10	214
	III/5	750	685	120	93	0,015	150 S	26,8	464	200	10	214
	III/6	750	685	120	93	0,015	150 S	42,6	464	200	10	248
	V/1	800	750	150	118	0,008	54 S	34,3	628	200	10	170
	V/2	800	750	150	118	0,008	170 S	32,2	628	200	10	280
V/3	800	750	150	118	0,008	110 S	32,4	628	200	10	265	
V/4	800	750	150	118	0,008	102 S	36,2	628	200	10	285	

Tabela 1 – Características das lajes presentes no banco de dados (cont.)

Autor	Laje	$r_s$ (mm)	$r_q$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$\rho$	C (mm)	$f_c$ (MPa)	$f_{ys}$ (MPa)	$E_{s,f}$ (GPa)	$d_g$ (mm)	$P_u$ (kN)	
Marzouk e Hussein (18)	HS2	850	750	120	95	0,007	150 S	70,0	490	200	20	249	
	HS3	850	750	120	95	0,012	150 S	69,0	490	200	20	356	
	HS4	850	750	120	90	0,021	150 S	66,0	490	200	20	418	
	HS7	850	750	120	95	0,009	150 S	74,0	490	200	20	356	
	HS8	850	750	150	120	0,010	150 S	69,0	490	200	20	436	
	HS9	850	750	150	120	0,015	150 S	74,0	490	200	20	543	
	HS10	850	750	150	120	0,021	150 S	80,0	490	200	20	645	
	HS11	850	750	90	70	0,007	150 S	70,0	490	200	20	196	
	HS12	850	750	90	70	0,012	150 S	75,0	490	200	20	258	
	HS13	850	750	90	70	0,016	150 S	68,0	490	200	20	267	
	HS14	850	750	120	95	0,012	220 S	72,0	490	200	20	498	
	HS15	850	750	120	95	0,012	300 S	71,0	490	200	20	560	
	NS1	850	750	120	95	0,012	150 S	42,0	490	200	20	320	
	Tomaszewicz (34)	65-1-1	1.500	1.250	320	275	0,015	200 S	64,3	500	200	16	2.050
		65-2-1	1.300	1.100	240	200	0,017	150 S	70,2	500	200	16	1.200
95-1-1		1.500	1.250	320	275	0,015	200 S	83,7	500	200	16	2.250	
95-1-3		1.500	1.250	320	275	0,025	200 S	89,9	500	200	16	2.400	
95-2-1		1.300	1.100	240	200	0,017	150 S	88,2	500	200	16	1.100	
95-2-1D		1.300	1.100	240	200	0,017	150 S	86,7	500	200	16	1.300	
95-2-3		1.300	1.100	240	200	0,026	150 S	89,5	500	200	16	1.450	
95-2-3D		1.300	1.100	240	200	0,026	150 S	80,3	500	200	16	1.250	
95-2-3D+		1.300	1.100	240	200	0,026	150 S	98,0	500	200	16	1.450	
95-3-1		750	550	120	88	0,018	100 S	85,1	500	200	16	330	
115-1-1		1.500	1.250	320	275	0,015	200 S	112,0	500	200	16	2.450	
115-2-1		1.300	1.100	240	200	0,017	150 S	119,0	500	200	16	1.400	
115-2-3	1.300	1.100	240	200	0,026	150 S	108,1	500	200	16	1.550		
Hallgren (17)	HSC 1	1.270	1.200	245	200	0,008	250 C	91,3	627	200	18	1.021	
	HSC 2	1.270	1.200	240	194	0,008	250 C	85,7	620	200	18	889	
	HSC 4	1.270	1.200	240	200	0,012	250 C	91,6	596	195	18	1.041	
	HSC 6	1.270	1.200	239	201	0,006	250 C	108,8	633	210	18	960	
	N/HSC 8	1.270	1.200	242	198	0,008	250 C	94,9	631	213	18	944	
	HSC 9	1.270	1.200	239	202	0,003	250 C	84,1	634	231	18	565	

Com  $V_E$ ,  $\psi$  e  $V_{Rc}$  é possível traçar um gráfico com duas curvas. A primeira delas é uma curva que expressa o comportamento carga-rotação da laje de forma teórica. A segunda curva expressa a redução da resistência da laje em função do aumento da rotação. O ponto de interseção destas duas curvas expressa a resistência última à punção de uma determinada ligação laje-pilar. A Figura 10 ilustra esse gráfico.

## 6. Avaliação dos métodos de cálculo

Buscando avaliar a precisão dos métodos teóricos apresentados nos itens anteriores, foi montado um banco de dados com os resultados de 74 lajes ensaiadas em laboratório por diferentes auto-

res. Os principais critérios para a formação deste banco de dados foram o nível de confiabilidade dos resultados, buscando-se selecionar trabalhos com grande aceitação dentro do meio científico, e a abrangência do banco de dados em relação aos parâmetros que influenciam na resistência à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento. Foram usadas as lajes de Elstner e Hognestad [2], Kinunnem e Nylander [14], Moe [15], Regan [20], Marzouk e Hussein [18], Tomaszewicz [34] e Hallgren [17]. A Tabela 1 mostra as características das lajes do banco de dados. Merece ser destacado que as lajes deste banco de dados atendem parcialmente aos limites das normas de projeto. Por exemplo, a NBR 6118 estabelece que a menor espessura para lajes lisas deve ser de 160 mm, o que não ocorre em todas as lajes.



Figura 11 - Comparação do banco de dados com os resultados do ACI 318 (7)

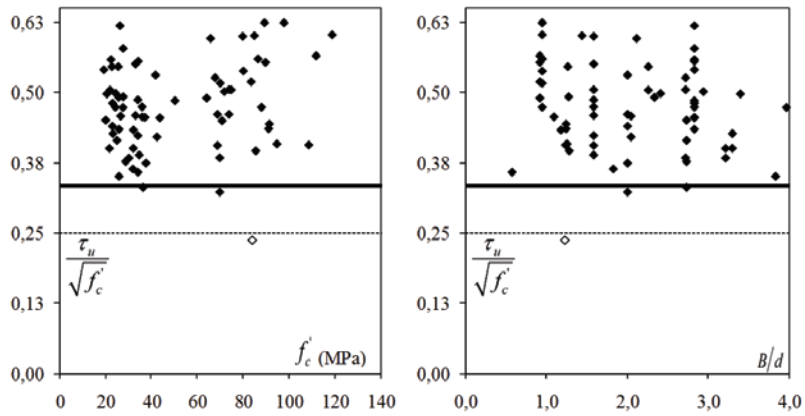


Figura 12 - Comparação do banco de dados com os resultados do NBR 6118 (9)

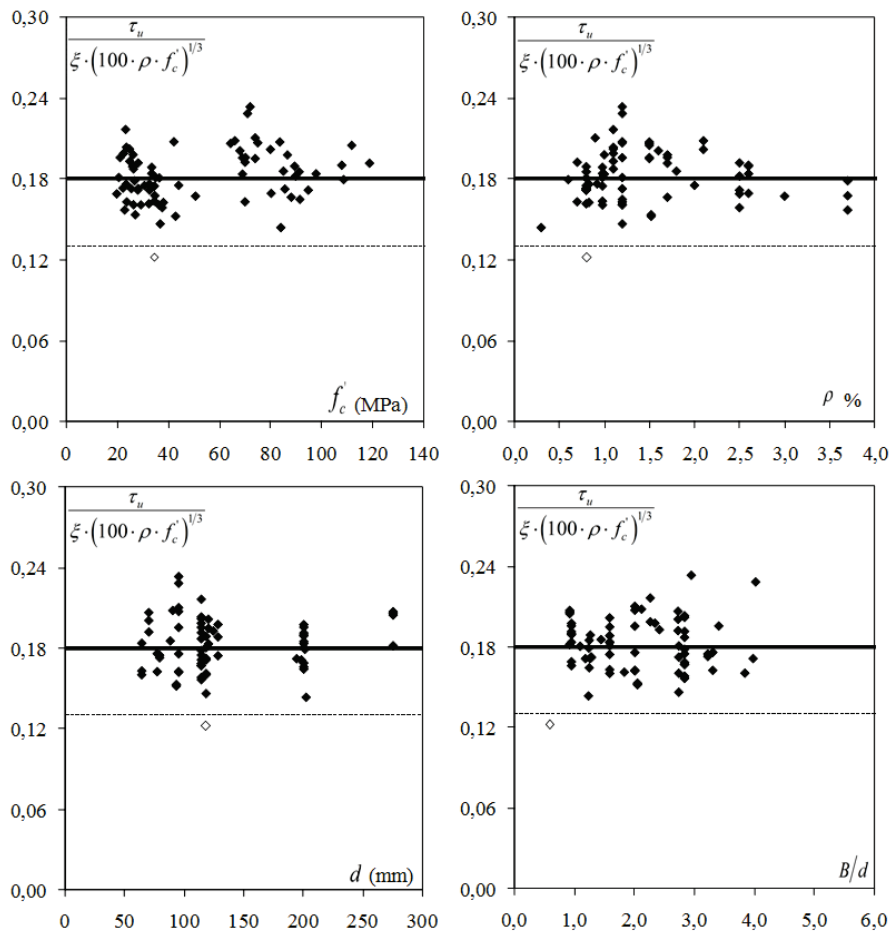
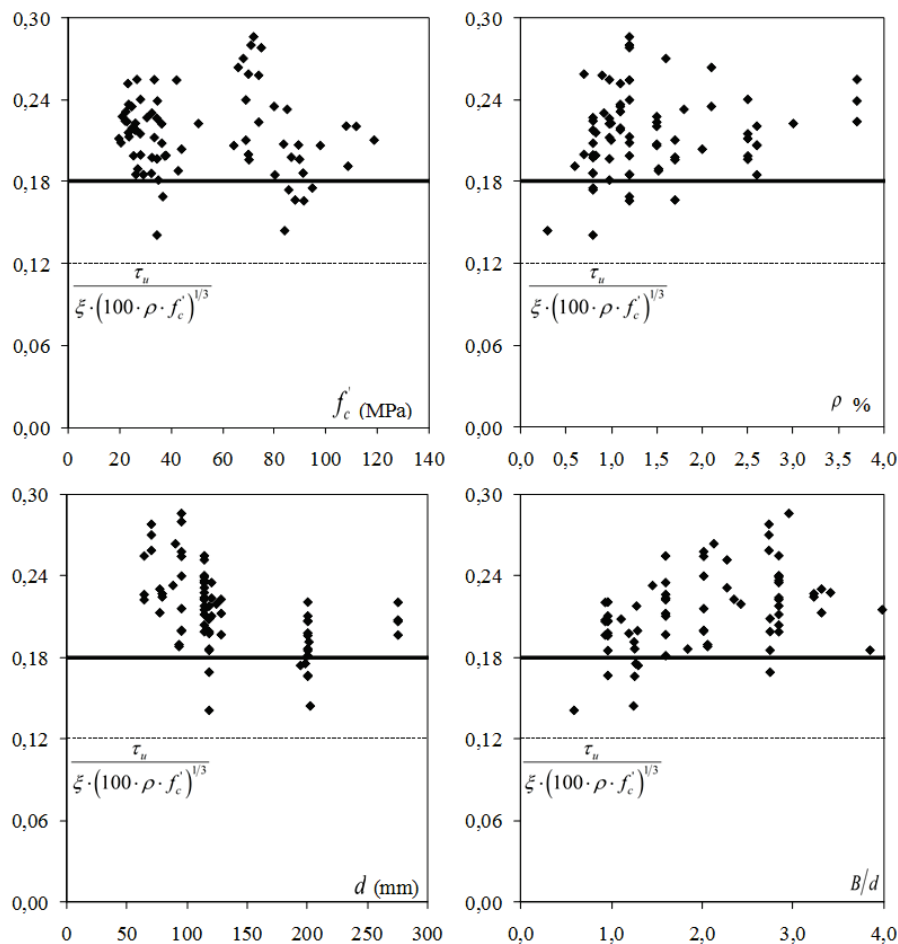


Figura 13 – Comparação do banco de dados com os resultados do EUROCODE 2 (8)



No entanto, considera-se que cientificamente é importante não se prender a estes limites, pois o interesse é entender o fenômeno como um todo e não apenas para as situações mais correntes de projeto.

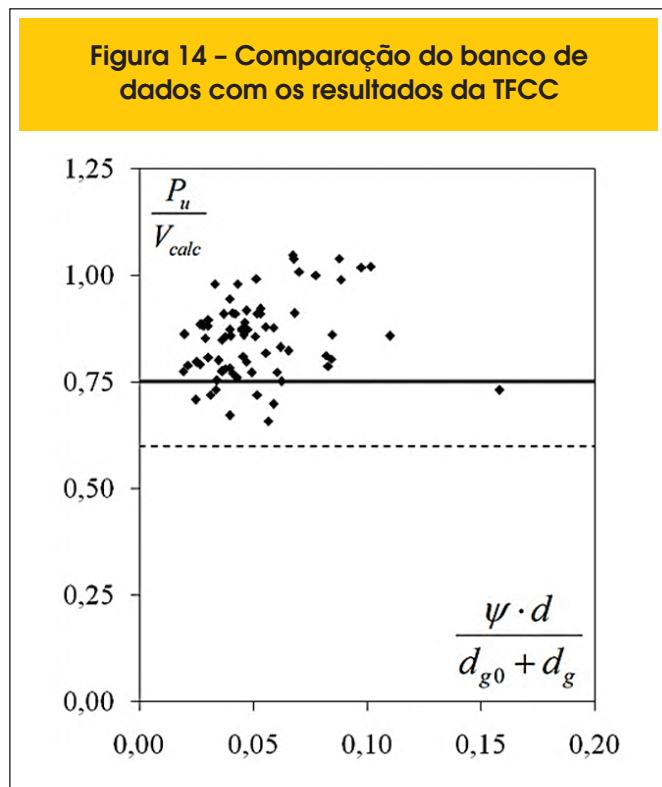
Alguns critérios foram estabelecidos para julgar os resultados obtidos com os métodos teóricos avaliados em comparação com os resultados experimentais. De uma forma geral, espera-se que estes métodos atendam a dois princípios básicos: segurança e precisão. Primordialmente, é desejável que, dentro de uma variação representativa das variáveis de projeto de lajes lisas ou de lajes com cargas aplicadas em áreas reduzidas, os métodos sejam capazes de fornecer resultados a favor da segurança, com um mínimo de resultados frágeis (contra a segurança). Neste sentido, estabeleceu-se que um máximo de 5% de resultados contra a segurança seria o ideal. No que se refere à precisão dos resultados obtidos, ela é avaliada em função da média da razão  $P_u/V_{calc}$ , sendo  $P_u$  a carga de ruptura experimental e  $V_{calc}$  a resistência teórica estimada por cada método. Para a média, foi estabelecido que: para valores entre  $1,0 < Média < 1,10$  o método apresenta nível de precisão elevado; para valores entre  $1,10 < Média < 1,30$  o método

apresenta nível de precisão satisfatório; e para valores Média  $> 1,30$  o método é conservador. O coeficiente de variação (COV) também foi utilizado para avaliar a precisão dos métodos, porém sem que tenham sido estabelecidas faixas ideais para os valores, sendo seus resultados utilizados apenas de forma qualitativa.

A Figura 11 apresenta uma comparação entre os resultados experimentais com os resultados teóricos obtidos com as recomendações do ACI 318 [7]. A linha cheia nas figuras representa o nível da resistência nominal e a linha tracejada representa o nível da resistência de projeto. Variando-se os parâmetros  $f_c'$  (resistência à compressão do concreto) e  $B/d$  (diâmetro equivalente do pilar  $u_0/\pi$  dividido pela altura útil  $d$  da laje) percebe-se que apenas 5% dos resultados estão contra segurança. Um desses resultados, representado pelo ponto sem preenchimento nos gráficos, está abaixo da resistência de projeto estimada pelo ACI, porém ele refere-se à laje HSC 9 de Hallgren [17], a qual apresentava pequena taxa de armadura (0,3%) e, apesar de não ser declarado pelo autor, possivelmente rompeu por flexão.

A Figura 12 e a Figura 13 apresentam comparações dos resultados experimentais com as recomendações da NBR 6118 e Eurocode 2,

**Figura 14 – Comparação do banco de dados com os resultados da TFCC**



respectivamente. É possível perceber que o Eurocode, que apresenta recomendações semelhantes à NB1, porém com limitações quanto ao valor do *size effect* ( $\xi \leq 2,0$ ) e da taxa de armadura de flexão ( $\rho \leq 2\%$ ) apresenta cerca de 11% de resultados contra a segurança, porém nenhum resultado abaixo da linha da resistência

de projeto. Já a NB1 apresenta resultados nominais muito próximos da média dos resultados experimentais e está longe de atender o limite de apenas 5% de resultados contra a segurança, porém, sem apresentar resultados abaixo da resistência de projeto. Já na Figura 14 são mostradas comparações com os resultados previstos segundo a TFCC, podendo-se notar que 11% dos resultados estão abaixo da resistência nominal, porém sem nenhum resultado abaixo da resistência de projeto. A Figura 15 apresenta gráficos com a tendência dos resultados das normas e da TFCC confrontados com os resultados experimentais das 74 lajes selecionadas. É possível perceber que a dispersão destes resultados, quando utilizadas as recomendações da NBR 6118, é muito pequena.

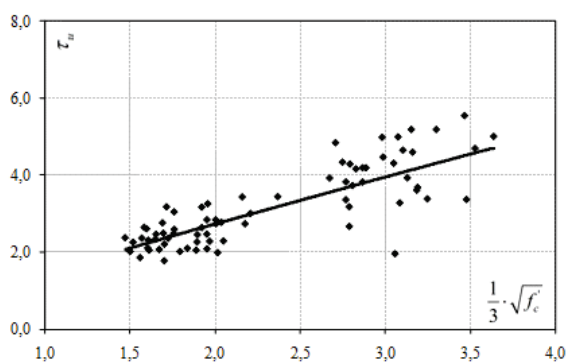
Na Tabela 2 são sintetizadas as comparações entre os resultados experimentais e os teóricos, avaliando-se através da média de  $P_u/V_{calc}$ , do coeficiente de variação e do percentual de resultados abaixo da resistência nominal, a precisão e o nível de segurança destes diferentes métodos de cálculo. É possível perceber que as recomendações do ACI são conservadoras e que o coeficiente de variação é elevado em relação aos demais métodos, uma vez que o único parâmetro utilizado para estimar a resistência ao cisalhamento é a resistência à compressão do concreto. Porém, esta norma apresenta apenas 5% de resultados inseguros, o que é adequado para uma norma de projetos. Tanto o Eurocode quanto a TFCC apresentaram média satisfatória, com a TFCC apresentando resultados ligeiramente mais precisos. Por correlacionar a resistência à punção com o comportamento à flexão, a TFCC mostrou-se mais sensível às variáveis, apresentando um menor coeficiente de variação.

Já os resultados da norma brasileira indicam que suas recomendações precisam ser revisadas. Ao mesmo tempo em que apresentou a menor média (1,01) e o menor coeficiente de variação (0,11), a norma brasileira apresentou cerca de 47% de resultados abaixo da resistência nominal, indicando que suas equações pre-

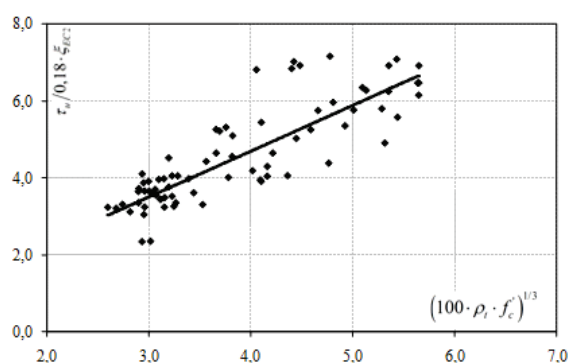
**Tabela 2 – Comparação entre os resultados experimentais e teóricos**

Autor	d (mm)	$\rho$ (%)	$f_c$ (MPa)	$P_u / V_{calc}$							
				ACI		EC2		NB1		CSCT	
				Méd.	COV	Méd.	COV	Méd.	COV	Méd.	COV
Elstner e Hognestad (2)	114-118	1,2-3,7	20-50	1,42	0,19	1,17	0,11	0,94	0,07	1,02	0,08
Kinnunen e Nylander (14)	117-128	0,8-1,1	25-28	1,52	0,05	1,19	0,05	1,05	0,06	1,06	0,04
Moe (15)	114	1,1-1,5	20-26	1,47	0,08	1,30	0,05	1,11	0,05	1,14	0,06
Regan (20)	64-200	0,8-1,5	22-43	1,28	0,11	1,14	0,12	0,93	0,09	1,16	0,11
Marzouk e Hussein (18)	70-120	0,7-2,1	42-80	1,41	0,16	1,39	0,11	1,12	0,09	1,27	0,09
Tomaszewicz (34)	88-275	1,5-2,6	64-119	1,48	0,08	1,11	0,08	1,06	0,07	1,16	0,06
Hallgren (17)	194-202	0,3-1,2	84-109	1,00	0,19	0,94	0,09	0,94	0,08	1,06	0,07
			<b>Média</b>	<b>1,37</b>		<b>1,19</b>		<b>1,01</b>		<b>1,14</b>	
			<b>COV</b>	<b>0,16</b>		<b>0,14</b>		<b>0,11</b>		<b>0,11</b>	
			<b>Min.</b>	<b>0,64</b>		<b>0,78</b>		<b>0,68</b>		<b>0,88</b>	
			<b>% R.I.</b>	<b>5,4</b>		<b>10,8</b>		<b>47,3</b>		<b>10,8</b>	

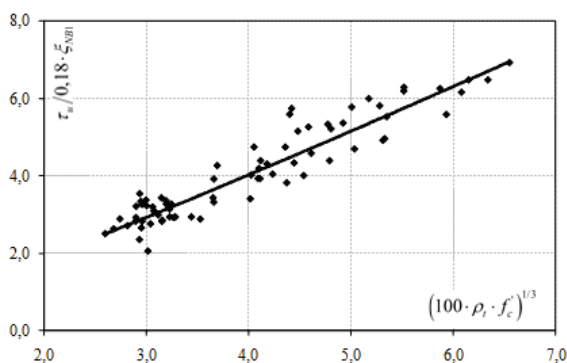
Figura 15 - Tendência dos resultados segundo diferentes teorias



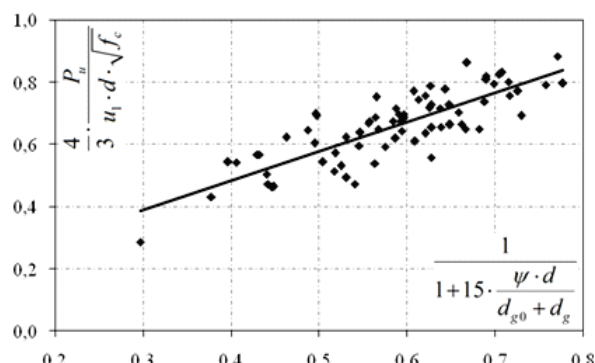
**A** ACI 318



**B** Eurocode 2



**C** NBR 6118



**D** TFCC

cisam de ajustes. Muitas poderiam ser as propostas, mas sem dúvidas a que requer menor nível de mudança e que poderia eliminar essa tendência de resultados inseguros seria alterar o coeficiente 0,18 para 0,16 na Equação 3. Esta pequena mudança aumentaria a média para 1,14, mesmo valor da TFCC, não mudaria o coeficiente de variação, e, principalmente, reduziria o percentual de resultados inseguros de 47,3% para 9,5%, deixando os resultados desta norma semelhantes aos da TFCC.

## 7. Conclusões

Vários aspectos do desenvolvimento do sistema de lajes lisas e dos parâmetros que influenciam na resistência à punção foram discutidos neste artigo. Foram apresentadas também as recomendações das normas ACI 318 [7], EUROCODE 2 [8] e da NBR 6118 [9], além da Teoria da Fissura Crítica e Cisalhamento, conforme apresentada por Muttoni [3] e que é a base das recomendações para a punção apresentadas na nova norma fib Model Code [4,5]. Para avaliar a precisão e segurança destes diferentes métodos teóricos, foi montado um banco de dados de resultados experimentais com 74 lajes lisas sem armadura de cisalhamento.

Observou-se que, de um modo geral, as recomendações do ACI estão a favor da segurança, porém são conservadoras, apresentando média subestimando em cerca de 37% a resistência das lajes analisadas. Esta norma também apresentou um coeficiente de variação elevado (0,16) para este que é o caso mais simples no dimensionamento de uma ligação laje-pilar. Já o EC2 apresentou resultados satisfatórios e a favor da segurança, sendo registrada média da relação  $P_u / V_{calc}$  de 1,19. Esta norma também apresentou um coeficiente de variação de 0,14, inferior ao da norma americana devido ao fato de considerar a influência de parâmetros como a taxa de armadura de flexão e o *size effect*, enquanto que a norma americana considera apenas a resistência à compressão do concreto.

A Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento vem sendo bastante discutida pelo meio científico e algumas críticas merecem destaque. A principal delas, conforme destacado por Ferreira [1], é que do ponto de vista científico, assumir como hipótese fundamental que o mecanismo de ruptura por punção ocorre apenas com a rotação de corpo rígido do segmento de laje externo ao cone de punção (delimitado pela fissura crítica) contraria evidências experimentais (na região de ruptura ocorre rotação e deslizamento) e pode condu-



zir a resultados inadequados, principalmente no caso de lajes com armadura de cisalhamento (estimando forças mais elevadas em camadas de armadura mais afastadas do pilar, o que na prática não é observado). Do ponto de vista técnico, é um método significativamente mais complexo para o uso corrente em escritórios de projeto e, conforme observado, apresenta resultados semelhantes aos do Eurocode. Destaca-se que neste artigo o método foi utilizado em sua versão mais precisa e que se tivesse sido utilizada a sua versão adotada na nova norma da fib, seus resultados seriam praticamente tão conservadores quanto os do ACI, (ver Ferreira [1]).

Já a norma brasileira apresentou resultados médios próximos aos experimentais (média de 1,01). Por não limitar parâmetros como a taxa de armadura de flexão e o *size effect*, como faz o Eurocode, esta norma apresentou coeficiente de variação igual a 0,11, inferior ao das demais normas. Porém, em 47% das lajes a resistência nominal estimada segunda as equações desta norma foi superior à observada experimentalmente, indicando a necessidade de revisar suas recomendações a fim de evitar esta tendência inadequada. Mostrou-se ainda que uma alteração simples na equação desta norma poderia alterar esta tendência de resultados inseguros, elevando a média para 1,14, igual a da TFCC, porém reduzindo o percentual de resultados inseguros para apenas 9,5%.

## 8. Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro em todas as etapas desta pesquisa.

## 9. Referências Bibliográficas

- [01] FERREIRA, M. P. (2010). Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Armaduras de Cisalhamento e Momentos Desbalanceados. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD – 007 A/10 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 275p.
- [02] ELSTNER, R. C., e HOGNESTAD, E., Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs. *Journal of the American Concrete Institute, Proceedings*, V. 53, No. 1, Jul. 1956, pp. 29-58.
- [03] MUTTONI, A., Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement, *ACI Structural Journal*, V. 105, No. 4, July-Aug. 2008, pp. 440-450.
- [04] fib Bulletin 55, Model Code 2010 – First complete draft, Volume 1, 318p., 2010.
- [05] fib Bulletin 56, Model Code 2010 – First complete draft, Volume 2, 312p., 2010.
- [06] Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code 1990. London, Thomas Telford, 1993.
- [07] ACI Committee 318, Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2008.
- [08] Eurocode 2, Design of Concrete Structures—Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings, CEN, EN 1992-1-1, Brussels, Belgium, 2004, 225 pp.
- [09] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro, 2007.
- [10] GASPARINNI D. A., Contributions of C. A. P. Turner to development of reinforced concrete flat slabs 1905–1999. *Journal of Structural Engineering*, 2002, 128, No. 10, 1243–1252.
- [11] FURST, A., MARTI, D., Robert Maillart's design approach for flat slabs. *Journal of Structural Engineering*, 1997, No. 123(8), 1102–1110.
- [12] KIERDORF, A., Early Mushroom Slab Construction in Switzerland, Russia and the U.S.A. - A Study in Parallel Technological Development, In: *Proceedings of the Second International Congress on Construction History*, vol II, pp 1793 – 1807. Cambridge Construction History Society, Cambridge University, 2006.
- [13] TALBOT, A. N., Reinforced Concrete Wall Footings and Column Footings. *Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana, Bulletin No. 67*, Mar. 1913, 114p.
- [14] KINNUNEN, S., NYLANDER, H., Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement. *Transactions of the Royal Institute of Technology*, No. 158, Stockholm, Sweden, 1960, 112 pp.
- [15] MOE, J., Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings Under Concentrated Loads. *Development Department Bulletin D47*, Portland Cement Association, Skokie, Illinois, Apr. 1961, 129p.
- [16] GRAF, O.. Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Eisenbetonplatten unter konzentrierter Last nahe einem Auflager. *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton*, Heft 73, Berlin, 1933, 16 pp.
- [17] HALLGREN, M., Punching Shear Capacity of Reinforced High Strength Concrete Slabs. PhD-Thesis, KTH Stockholm, TRITA-BKN. Bulletin No. 23, 1996, 150p.
- [18] MARZOUK, H.; HUSSEIN, A., Experimental Investigation on the Behavior of High-Strength Concrete Slabs. *ACI Structural Journal*, V. 88, No. 6, Nov.-Dec. 1991, pp. 701-713.
- [19] HAWKINS, N.M., CRISWELL, M.E., and ROLL, F., Shear Strength of Slabs Without Shear Reinforcement, *ACI Publication*, *Shear in Reinforced Concrete*, V. SP 42, No. 30, 1974, pp. 677-720.
- [20] REGAN, P. E., Symmetric Punching of Reinforced Concrete Slabs. *Magazine of Concrete Research*, V. 38, No. 136, Sep. 1986, pp 115-128.
- [21] REGAN, P. E., Behavior of reinforced concrete flat slabs. Report 89, Construction Industry Research and Information Association (CIRIA); London, Feb. 1981, p 89.
- [22] LONG, A. E., A Two-Phase Approach to the Prediction of Punching Strength of Slabs. *Journal of the American Concrete Institute, Proceedings*, V. 72, No. 2, Feb. 1975, pp. 37-45.
- [23] REGAN, P. E.; BRÆSTRUP, M. W., Punching Shear in Reinforced Concrete. *Comité Euro-International du Béton, Bulletin d'Information*, No. 168, Jan. 1985, 232 pp.

- [24] SHERIF, A. G.; DILGER, W. H., Punching Failure of a Full Scale High Strength Concrete Flat Slab. International Workshop on Punching Shear Capacity of RC Slabs – Proceedings, TRITA-BKN Bulletin 57, Stockholm, Sweden, 2000, pp 235-243.
- [25] VANDERBILT, M. D., Shear Strength of Continuous Plates. Journal of Structural Division, Proceedings, ASCE, V. 98, No. ST5, May 1972, pp. 961-973.
- [26] HAWKINS, N.M., FALLSEN, H.B., and HINOJOSA, R.C., Influence of Column Rectangularity on the Behavior of Flat Plate Structures, ACI Publication, Cracking, Deflection, and Ultimate Load of Concrete Slab Systems, V. SP-30, No. 6, 1971, pp. 127-146.
- [27] OLIVEIRA, D. R. C.; REGAN, P. E.; MELO, G. S. S., Punching Resistance of RC Slabs with Rectangular Columns. Magazine of Concrete Research, Vol. 56, No. 3, London, 2004, pp. 123-138.
- [28] GRAF, O., Versuche über die Widerstandsfähigkeit von allseitig aufliegenden dicken Eisenbetonplatten unter Einzellasten, Deutscher Ausschluß für Eisenbeton, Heft 88, Berlin, 1938, 22p.
- [29] RICHART, F. E., Reinforced Concrete Wall and Column Footings. ACI Journal, Proceedings, V. 45, No. 10, Oct. 1948, pp. 97-127.
- [30] BROMS, C. E., Shear Reinforcement for Deflection Ductility of Flat Plates, ACI Structural Journal, V. 87, No. 6, Nov.-Dec. 1990, pp. 696-705.
- [31] LI, K. K. L., Influence of Size on Punching Shear Strength of Concrete Slabs. M. Eng. Thesis, McGill University, Montreal, Québec, 2000, 78 pp.
- [32] BIRKLE, G., Punching of Flat Slabs: The Influence of Slab Thickness and Stud Layout. PhD Thesis. Department of Civil Engineering, University of Calgary, Calgary, Canada, 2004, 152 pp.
- [33] MUTTONI, A., and SCHWARTZ, J., Behavior of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement, IABSE Colloquium, V. 62, Zurich, Switzerland, 1991, pp. 703-708.
- [34] TOMASZEWICZ, A., High-Strength Concrete. SP2 – Plates and Shells. Report 2.3 Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs. Report No. STF70 A93082, SINTEF Structures and Concrete, Trondheim, 36pp.