Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sistemas Elípticos Fracamente Acoplados Assintoticamente Lineares

por
Luís Henrique de Miranda

Brasília
2007

Resumo

No presente trabalho estudaremos o sistema elíptico fracamente acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ , em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \omega^2 v = \dfrac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ , em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

para $N \geq 3$ e constantes $0 < s < 1$ e $0 < \omega < 1$. Este é um sistema gradiente com

$$\nabla F(u,v) = (F_u, F_v) = \left(\frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}, \frac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \right),$$

onde

$$F(u,v) = \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1+s(u^2+v^2)).$$

Mostraremos que esse sistema possui solução radial não-trivial através de métodos variacionais. Na realidade, provaremos que a solução encontrada tem energia mínima entre todas as outras soluções possíveis.

Abstract

In this work we study the weakly coupled elliptic system

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ , em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \omega^2 v = \dfrac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ , em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

for $N \geq 3$ and constants $0 < s < 1$ e $0 < \omega < 1$. This is a gradient system such with

$$\nabla F(u,v) = (F_u, F_v) = \left(\frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}, \frac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \right),$$

where

$$F(u,v) = \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1+s(u^2+v^2)).$$

We will show that this system has a nontrivial radial solution via variational methods. In fact, we will prove that this solution is a ground-state.

Introdução

Nos últimos anos, ondas estácionárias que se propagam sem distorções em sua forma têm atraído grande atenção de físicos e matemáticos devido à sua aplicação, por exemplo, em sistemas de comunicações ópticos ultra-rápidos. Estudos recentes sobre o assunto procuram estabelecer critérios para a existência de soluções que têm energia mínima, ou então, descrever a interação de pares dessas ondas de sólitons (veja [1], [6], [16] e [19]). Em [19], Ostrovskaya e Kivshar mostraram que as amplitudes normalizadas de dois feixes de luz em certos meios são governadas pelo seguinte sistema de Schrödinger fracamente acoplado

$$\begin{cases} i\varphi_t + \varphi_{xx} + \varphi\, \dfrac{(|\varphi|^2 + |\psi|^2)}{1 + s(|\varphi|^2 + |\psi|^2)} = 0, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ i\psi_t + \psi_{xx} + \psi\, \dfrac{(|\varphi|^2 + |\psi|^2)}{1 + s(|\varphi|^2 + |\psi|^2)} = 0, \text{ em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1}$$

Este modelo representa as amplitudes de dois raios de luz linearmente polarizados, quando ocorre interação incoerente num meio de interferência fotorrefrativa. No que segue, s denota uma constante real positiva que representa um parâmetro de saturação associado à força de acoplamento mútuo entre as duas componentes. No estudo das trocas de dados ultra-rápidas as soluções mais importantes são as ondas estacionárias. Logo somos motivados a procurar por soluções do tipo ondas estacionárias de (1), isto é, soluções na forma

$$\varphi(x,t) = e^{it}u(x) \;\text{ e }\; \psi(x,t) = e^{i\omega^2 t}v(x).$$

Nesse caso, podemos mostrar que u e v satisfazem o sistema

$$\begin{cases} -u'' + u = u\,\dfrac{(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} & \text{em } \mathbb{R}, \\ -v'' + \omega^2 v = v\,\dfrac{(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Devido as possíveis aplicações de sólitons ópticos N-dimensionais, N um número natural, nos sistemas puramente ópticos de troca de dados ultra-rápidas, como sugere [19], decidimos estudar o sistema (2) em dimensões mais gerais. Dessa forma o primeiro objetivo do presente trabalho será encontrar soluções radiais não-triviais do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}\,, \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \omega^2 v = \dfrac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}\,, \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3}$$

Nosso segundo objetivo será mostrar que a solução obtida é um "ground-state", isto é, tem o nível de energia mínimo dentre todas as soluções possíveis. Trata-se de um fato muito importante pois as únicas candidatas para ondas estacionárias estáveis são os "ground-states", como afirmaram Ambrosetti e Colorado em [1].

Precisamos dedicar atenção especial ao tipo de solução não-trivial do sistema (3) que estamos lidando. De fato, $(u_0, 0)$ e $(0, v_0)$ satisfazem (3), onde u_0 e v_0 são respectivamente soluções radiais positivas dos problemas

$$-\Delta u + u = u\frac{u^2}{1+su^2} \text{ e } -\Delta v + \omega^2 v = v\frac{v^2}{1+sv^2} \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{4}$$

Por meio dos resultados obtidos por Stuart e Zhou (cf. [21]), é possível garantir a existência de tais u_0 e v_0. Contudo, o trabalho de Berestycki e Lions em [3] nos fornece soluções minimizantes para os problemas em (4). As soluções (u, v) interessantes do ponto de vista da física para o problema (3) são aquelas em que ambas u e v não são indenticamente nulas, chamadas de puramente vetoriais (cf. [15], [16]).

Ultimamente, o sistema (3) e suas variantes têm sido alvo de diversos trabalhos. Em [10], Furtado, Maia e Silva estudam um problema similar a (3), com a exigência de que a não-linearidade associada seja superlinear, isto é, tenha crescimento um pouco "maior"do que o linear no infinito. No entanto, em (3) a não-linearidade tem crescimento linear no infinito, o que nos impede de usar [10]. Em [16], Maia, Montefusco e Pellacci provaram a existência de uma solução (u, v) radial, com $u_0 > 0$ e $v_0 > 0$ para um caso semelhante a (3). Basta fazermos $s = 0$ para obtermos um dos sistemas estudados em [16]. O resultado mais próximo do que desejamos obter para (3) encontra-se em [5]. Nesse artigo, Brezis e Lieb provaram a existência de uma solução $(u, v) \neq (0, 0)$, via métodos minimizantes com vínculo, para um grande número de sistemas autônomos dentre os quais (3) está incluído. No entanto, a partir desses argumentos não é possível distingüi-la das soluções do problema escalar do sistema desacoplado, além do que não sabemos se a solução obtida é radial.

Encontrar soluções fracas de (3) é o mesmo que achar os pontos críticos do funcional I associado ao sistema definido no espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + \omega^2 v^2 - \frac{u^2+v^2}{s} + \frac{1}{s^2} ln(1 + s(u^2+v^2))\, dx. \tag{5}$$

Esse funcional é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e sua derivada de Gateaux é dada por

$$\begin{aligned} \nabla I(u,v) \cdot (\varphi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \psi + u\varphi + \omega^2 v \psi \\ &- \frac{u^2+v^2}{1 + s(u^2+v^2)}\big(u\varphi + v\psi\big)\, dx. \end{aligned}$$

As soluções fracas associadas a (3) serão obtidas via métodos variacionais. Usaremos uma variante do Teorema do Passo da Montanha devida inicialmente a Bartolo, Benci e Fortunato [2]. Nessa versão, a condição de compacidade exigida é conhecida como condição de Cerami (Ce). Na realidade, a definição de (Ce) que apresentaremos é mais moderna que originalmente introduzida em [2]. Pode-se provar que as duas versões são equivalentes. Optamos pela mais nova, pois essa tem uma apresentação simples e concisa.

Vamos procurar os pontos críticos do funcional I no subespaço das funções radiais $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Tal escolha é justificada pelo decrescimento uniforme no infinito dos elementos desse subespaço, garantido pela desigualdade de Strauss (cf.

[13] ou [22]). De certa forma, a ausência de coercividade dos potenciais associados ao problema (3) é compensada por esse comportamento dos elementos do subespaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ no infinito. Usando o Princípio da Criticalidade Simétrica, vamos mostrar que os pontos críticos do funcional I que encontramos no subespaço das funções radiais serão pontos críticos de I no espaço $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$. Todos esses resultados abstratos serão apresentados no primeiro capítulo.

Em seguida faremos uma abordagem do caso escalar seguindo o artigo de Stuart e Zhou. O método que apresentam é interessante pois a solução encontrada é uma espécie de extensão para $\mathbb{R}^N$ de uma função previamente definida em $\mathbb{R}$. A demonstração de existência de solução para o problema escalar poderia ter sido feita como um caso particular do sistema. Entretanto, optamos por fazer uma revisão do trabalho de Stuart e Zhou para ressaltarmos as diferenças entre os métodos e respeitarmos a ordem cronológica do estudo do problema, já que algumas idéiais utilizadas na demonstração da condição de Cerami em [21] nos inspiraram a criar um argumento semelhante para o sistema.

Os capítulos 3 e 4 serão de fato os mais importantes de nosso trabalho pois apresentam resultados originais de existência de solução de energia mínima para o problema (3). Estes fazem parte de um artigo em fase de preparação (cf. [15]). Primeiramente, no capítulo 3 vamos estabelecer a existência de solução $(u, v) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ fraca, radial e não trivial para (3) quando $0 < s < 1$, $0 < \omega < 1$ e $N \geq 3$. Pela natureza do problema, a Teoria de Regularização pode ser usada para mostrar que as soluções fracas que obtemos na realidade são soluções clássicas. No argumento de existência, vamos recorrer à hipótese de não quadraticidade (NQ) como foi definida por Costa e Magalhães em [7]. Nos lemas 3.2.1 e 3.2.2 mostraremos que o funcional I satisfaz a condição (Ce). O maior obstáculo encontrado nessa etapa é a falta de compacidade nas imersões $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, em que $2 < p < 2^*$. Para contornarmos essa dificuldade , restringiremos nosso estudo ao subespaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso adaptaremos os argumentos usados em [21] e [7] para mostrarmos que I satisfaz (Ce). Depois, no Teorema 3.0.7 vamos provar que I tem a geometria exigida pelo Teorema do Passo da Montanha. Nessa demonstração usaremos fortemente o crescimento "sublinear"no infinito de parte da não-linearidade associada a (3). De fato, vamos usar que dado

$\alpha > 0$ existe $R = R(\alpha) > 0$ tal que

$$\ln(1 + sr) \leq sr\alpha \ , \forall \, r > R.$$

Finalmente no capítulo 4 mostraremos que a solução radial não-trivial encontrada no capítulo 3 é na realidade de energia mínima se considerarmos todas as possíveis soluções de (3). Nos basearemos no artigo de Jeanjean e Tanaka [12] e nos resultados de simetria para soluções minimizantes devidos a Lopes (cf. [14] ou [23]).

Devemos ressaltar que apesar do método de Berestycki e Lions [3] ser consideravelmente diferente do apresentado nos capítulos 3 e 4, os resultados que são obtidos são semelhantes. Por outro lado, apesar de servir como inspiração para o presente trabalho , o método apresentado em [21] apresenta resultados diferentes dos nossos. A partir dos argumentos contidos em [21] nada sabemos, ao menos em princípio, sobre a energia da solução encontrada. Entretanto, em nosso caso como a solução encontrada é do tipo minimax, conhecemos o nível de energia desta.

É interessante observar que se $\omega = 1$ e $u_0 > 0$ é solução de (4), então definindo

$$u(x) := u_0(x)\cos(\theta) \text{ e } v(x) := u_0(x)\text{sen}(\theta),$$

em que θ é um ângulo qualquer em $\big(0, 2\pi\big)$, nós obtemos que

$$-\Delta u + u = \cos(\theta)\big(-\Delta u_0 + u_0\big) \text{ e } \frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} = \frac{u_0^3\cos(\theta)}{1+su_0^2}.$$

Logo,

$$-\Delta u + u = \frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)},$$

e o mesmo valendo para v. Assim obteríamos infinitas soluções não triviais (u, v) para o problema (3), onde

$$u = u_0(x)\cos(\theta) \text{ e } v = u_0(x)\text{sen}(\theta)),$$

e $\omega = 1$. É fácil ver que todas essas soluções têm o mesmo nível de energia de u_0.

Da mesma forma, é importante ressaltar que caso (u, v) seja solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \ , \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \omega^2 v = \dfrac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \ , \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

com u e v não sendo nulas quase sempre (q.s.) em $\mathbb{R}^N$, então multiplicando-se a primeira equação por v e a segunda por u e integrando-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + uv\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{uv(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \omega^2 uv\,dx,$$

e dessa forma

$$\left(1-\omega^2\right)\int_{\mathbb{R}^N} uv\,dx = 0.$$

Caso $\omega \neq 1$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} uv\,dx = 0,$$

ou seja, u é perpendicular a v no produto interno usual defindo em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Essa observação nos alerta para o fato de que não existe solução (u,v) com $u > 0$ e $v > 0$ para o problema (3).

No Apêndice A demonstraremos uma série de resultados técnicos que aparecem no decorrer do trabalho.

No Apêndice B enunciamos alguns teoremas importantes e não tão conhecidos, utilizados em nosso estudo.

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti A., Colorado E., *Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations*, preprint, 2006.

[2] Bartolo P., Benci V. e Fortunato D., *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlinear Anal. TMA **7**(1983), 981-1012.

[3] Berestycki H., Lion P.L., *Nonlinear scalar field equations I*, Arch. Rational Mech. Anal., **82** (1983), 313-345.

[4] Brezis H., *Analyse Fonctionnnelle: Théorie et Applications*, seg. ed.:Dunod(1999).

[5] Brezis H. e Lieb E.H., *Minimum action solutions of some vector field equations*, Commun. Math. Phys. **96**(1984), 97-113.

[6] Champneys A.R. e Yang J., *A scalar nonlocal bifurcation of solitary waves for coupled nonlinear Schrödinger systems*, Nonlinearity **15** (2002), 2165-2192.

[7] Costa D.G. e Magalhães C.A., *Variational Elliptic Problems Wich Are Nonquadratic at Infinity*, Nonlinear Anal. TMA, vol. 23, number **11**(1994), 1401-141.

[8] Costa D.G. e Magalhães C.A., *On a class of ellliptic systems in* $\mathbb{R}^N$, Electronic J. Diff. Eq. **7**(1994), 1-14.

[9] Evans L.C., *Partial Differential Equations*, AMS.

[10] Furtado M.F, Maia L.A e Silva E.A., *Solutions for a Resonant Elliptic System with Coupling in* $\mathbb{R}^N$, Commun. Partial Diff. Eq. **27**(2002),nº 7-8, 1515-1536.

[11] Gilbarg D. e Trudinger N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer(1983).

[12] Jeanjean L., Tanaka K., *A remark on least energy solutions in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. **131**(2003),2399-2408.

[13] Kavian O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques el Applications aus Problemes Elliptiques*, seg. ed.: Springer Verlag(1993).

[14] Lopes O., *Radial symmetry of minimizers for some translations and rotation invariant functionals*, J. Diff. Eq. **124**(1996), 378-388.

[15] Maia L.A., Miranda L.H., Montefusco E. e Pellaci B., *Ground states of saturable coupled nonlinear Schrödinger systems*, em preparação.

[16] Maia L.A., Montefusco E. e Pellaci B., *Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system*, Journal of Differential Equations, vol.229, issue 2, **15** (2006), 743-767.

[17] Manakov S.V., *On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **65**(1973), 505 (Engl. transl. Sov.Phys.-JETP **38**(1974), 248-253).

[18] Mcleod K., Serrin J., *Uniqueness of Positive Radial Solutions of* $\Delta u + f(u) = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$, Arch. Rational Mech. Anal. **99**(1987), number 2, 115-145.

[19] Ostrovskaya E.A. and Kivshar Yu.S., *Multi-hump optical solitons in a saturable medium*, J.Opt.B: Quantum Semiclass.Opt **1**(1999), 77-83.

[20] Palais R.S., *The Principle of Symmetric Criticality*, Comm. Math. Phys. **1**(1979),number 1, 19-30.

[21] Stuart C.A. e Zhou H.S., *Applying the mountain pass theorem to an asymptotically linear elliptic equation on* $\mathbb{R}^N$, Commun. Partial Diff. Equ. (1999), vol. 24, number **9** - **10**, 1731-1758.

[22] Strauss W.A., *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. **55** (1977), 149-162.

[23] Willem M., *Minimax Theorems*, Birkhäuser (1996).