UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA EXPRESSÃO REGULARIZADA PARA O MOMENTO-ENERGIA GRAVITACIONAL NO CONTEXTO DO EQUIVALENTE TELEPARALELO DA RELATIVIDADE GERAL

MARCUS VINÍCIUS OLIVEIRA VEIGA

2007

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA EXPRESSÃO REGULARIZADA PARA O MOMENTO-ENERGIA GRAVITACIONAL NO CONTEXTO DO EQUIVALENTE TELEPARALELO DA RELATIVIDADE GERAL

MARCUS VINÍCIUS OLIVEIRA VEIGA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. JOSÉ WADIH MALUF

Brasília, 22 de abril de 2007

Deus é o existirmos e isto não ser tudo.

Fernando Pessoa

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe, mulher da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a meu orientador Maluf, pela cordialidade, paciência e atenção sempre presentes ao longo de sua orientação. Agradeço também ao professor Pedroza pelo apoio ao longo de toda a minha graduação. Se adquiri alguma qualidade enquanto estudante de Física ao longo dos últimos anos (o que é questionável), os grandes responsáveis são os dois.

Agradeço à minha família por estar sempre do meu lado apesar da distância física; em especial à minha mãe Maria Divina, meus irmãos Pedro e Amanda e meu pai José Osvaldo.

Ciente do risco de talvez esquecer alguma pessoa importante, tentarei citar nominalmente meus amigos, tão importantes e que são minha segunda família: Dani, Gustavo, Aureliano, Heloísa, Aurelízio, Adoniel, Maíra, Álvaro, Cebola, Bruna, Wiliam, Stella, Pedro, Marina, Mineiro, Sérgio, Marianne, Ednardo, Hélder, Nanderson, Marcelo, Alessandra, Naila, Padre, Miriam, Nelson, Landoaldo, Ana Catarina, Maria de Jesus, Gandúlfio, Creomar, Ricardo, Jorge, Rodrigo, Peter, Sabrina, Alfredo, Lidiany, Guilherme, Pedro Henrique, Pablo, Andréa, Marisa, Xandão, Lázaro, Kamilla, Bruno, Denise, Sheila, André, Antoniony, Vicente, Julhiermes, Ângela, Lucas, Lucilene, Alexandre, Valdo, Juliana, Luzia, Orlando, Eliezé, Teresa. Alguns alunos da Física, a maioria não, mas todos muito importantes em algum momento da minha vida.

Por último e mais importante agradeço a Deus.

Resumo

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral, TEGR, mostra-se como uma alternativa à formulação métrica da Relatividade Geral, principalmente por permitir, a partir de seu formalismo Hamiltoniano, uma definição consistente para o momento-energia gravitacional, o que não é possível na Relatividade Geral usual. É discutida a proibição ou não da localizabilidade da energia gravitacional pelo princípio da equivalência. A expressão obtida para o momento-energia gravitacional é estendida para um conjunto arbitrário de campos de tetrada, que não necessariamente obedecem condições de contorno assintóticas. A expressão é aplicada aos casos das métricas de Kerr e de Bondi. No primeiro caso é calculada a energia contida no horizonte de eventos externo do buraco negro e a energia total, enquanto que para a métrica de Bondi é calculada a energia total do sistema.

Abstract

The Teleparallel Equivalent of General Relativity, TEGR, is an alternative to the metric formulation of General Relativity, mainly by allowing, in the Hamiltonian formalism, a consistent definition for the gravitational energy-momentum, which is not possible in the usual formulation of General Relativity. It is discussed the existence or not of the localizability of the gravitational energy in view of the equivalence principle. The expression previously obtained for the gravitational energy-momentum is extended to an arbitrary set of tetrad-fields, which not necessarily presents asymptotic boundary conditions. The expression is addressed in the context of the Kerr and Bondi metrics. In the first case it is calculated the energy contained in the external horizon of the black hole and the total energy, and for the Bondi metric it is calculated the total energy of the space-time.

Sumário

Introdução

Na formulação de Einstein da Relatividade Geral, a gravitação é um tipo de força que se apresenta de modo diferente de outros campos da natureza, pois ela é descrita pela mesma quantidade que representa o espaço-tempo físico onde a força atua, que é o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Isso torna o campo gravitacional bastante peculiar, apresentando diversas características sem analogia com outros campos. Nesse contexto a peculiaridade acima descrita é utilizada inclusive como argumento para se afirmar que não é possível definir uma densidade local de energia gravitacional, baseando-se no chamado princípio da equivalência infinitesimal, uma extensão do princípio da equivalência formulado originalmente por Einstein, mas para escalas pequenas. Vale enfatizar que Einstein não endossou tal extensão, sempre enunciando o princípio para campos homogêneos e referenciais uniformemente acelerados em regiões *finitas* do espaço-tempo. Além disso na obtenção das equações de Einstein para a Relatividade Geral é utilizado o princípio da covariância generalizada, sendo irrelevante o chamado princípio da equivalência infinitesimal.

De qualquer modo não é realmente possível se escrever uma expressão única para a energia gravitacional na formulação de Einstein da Relatividade, mas apenas pseudo-tensores, que dependem do sistema de coordenadas. Na formulação canônica de Arnowitt, Deser e Misner[1], obtém-se a energia gravitacional total (conhecida como energia de ADM), relacionada ao termo de superfície do Hamiltoniano, que é válida apenas para espaços assintoticamente planos. Outro método existente é o cálculo da energia "quase-local" de Brown e York [2], onde utilizando o princípio da ação mínima, se define um vetor energia-momento total, associado à fronteira de determinadas regiões de um espaço, desde que seja satisfeita uma determinada condição dentro do contexto da integral de ação de Hilbert-Einstein.

O Equivalente Teleparalelo à Relatividade Geral (ou TEGR) se mostra como uma descrição geométrica alternativa à formulação métrica da gravitação, na qual é possível se obter uma expressão covariante inequívoca para a densidade de energia gravitacional total, a partir de seu formalismo Hamiltoniano [3, 4, 5]. O TEGR usa como quantidades de campo, em vez do tensor métrico, as tetradas $e^a{}_\mu$ que se relacionam com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e podem ser descrita sobre uma variedade de Weitzenböck [6], que possui torção não-nula e curvatura nula. Nessa teoria, os efeitos gravitacionais são incorporados à torção não-nula da variedade, em analogia à curvatura não-nula na formulação de Einstein sobre uma variedade riemanniana. Partindo-se das equações de campo obtidas utilizando-se o TEGR, recupera-se as equações de Einstein com algumas manipulações, mostrando assim a equivalência existente entre as teorias, apesar da abordagem geométrica diferente da utilizada na Relatividade Geral usual.

Nessa nova abordagem, uma expressão para o momento-energia gravitacional surge das equações de vínculo da formulação Hamiltoniana da teoria. Aplicando essa expressão para campos de tetrada que satisfazem condições de contorno assintóticas (para os quais temos torção nula, ou como veremos $T^a{}_{\mu\nu} = 0$) encontramos a energia do espaço-tempo plano como sendo nula (o que determina o espaço-tempo de referência). Entretanto para um campo de tetradas arbitrário, no limite em que $r \to \infty$, não temos necessariamente a condição assintótica usual $e^a{}_\mu \cong \delta^a_\mu + \frac{1}{2}h^a{}_\mu(1/r)$ satisfeita (onde $h^a{}_\mu$ é uma perturbação do tensor métrico), e além disso não necessariamente temos torção (e conseqüentemente energia) nulas para o espaço-tempo plano.

A expressão para o momento-energia no contexto do TEGR é aqui estendida para campos de tetrada arbitrários, ou equivalentemente, que não fornecem energia gravitacional nula para o espaço-tempo plano, através da inclusão de um termo de subtração que leve em conta o espaço de referência. A expressão obtida será então aplicada a dois sistemas largamente estudados na literatura, o buraco negro de Kerr e o espaço-tempo de Bondi.

No capítulo 2 será discutido brevemente o formalismo padrão da Relatividade Geral, os princípios da geometria riemanniana e serão obtidas as equações de Einstein a partir do princípio da ação mínima.

No capítulo 3 é apresentado o formalismo do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral, primeiramente em sua formulação Lagrangeana e em seguida é apenas comentado o formalismo Hamiltoniano. A seguir é discutida a questão da localizabilidade da energia gravitacional tendo em vista o princípio da equivalência de Einstein, e então é obtida a expressão geral regularizada para o momento-energia utilizando-se as equações do TEGR.

No capítulo 4 a expressão obtida é aplicada ao caso da métrica de Kerr, que descreve um buraco negro girante que possui momento angular específico $a = J/m$. Há uma breve discussão sobre a construção de campos de tetrada, no caso geral e em seguida para o caso particular estudado. É calculada a energia total do sistema, e a energia contida no horizonte de eventos externo, e em seguida os resultados obtidos são comparados com a literatura.

No capítulo 5 a mesma expressão é aplicada à metrica de Bondi, que descreve um sistema que emite ondas gravitacionais, isolado e imerso em um espaço-tempo assintoticamente plano. São discutidas brevemente as características da métrica, e em seguida obtida a energia total, ou energia de Bondi, para a configuração.

Notação: os índices gregos α, β, μ, ... representam índices de coordenadas do espaço-tempo físico e assumem os valores 0, 1, 2 e 3; já os índices latinos do início do alfabeto (a, b, c, ...) são índices do grupo de Lorentz global SO(3,1), valendo assim (0), (1), (2) e (3). Índices latinos do meio do alfabeto (i, j, k, ...) referem-se a hipersuperfícies do tipo espaço, assumindo o valores 1, 2 e 3. A menos que se mencione o contrário, temos $c = 1$ e $G = 1$, e é adotada a convenção de Einstein.

Capítulo 1

Teoria da Relatividade Geral

1.1 Teoria da Relatividade Especial

Einstein formulou a Teoria da Relatividade Especial em 1905 baseando-se em dois postulados: o primeiro é que as leis da Física são as mesmas para todos os referenciais inerciais, e o segundo que a velocidade da luz é a mesma para todos observadores inerciais. Para que os dois postulados possam valer, as noções de tempo e espaço precisam ser alteradas em relação ao que o senso comum ou mesmo o que a Física anterior à Relatividade diz. Agora tempo e espaço precisam estar intimamente relacionados entre si, formando uma única estrutura conhecida como espaço-tempo. O espaço-tempo em que a Teoria da Relatividade Especial é desenvolvida é o espaço-tempo de Minkowski, no qual a distância ou o intervalo entre dois eventos é definido pela seguinte relação:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{1.1}$$

Analisando (1.1) vemos que o espaço-tempo de Minkowski possui métrica pseudo-euclideana,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{1.2}$$

com

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{1.3}$$

Admitindo que para todos observadores inerciais o intervalo ds^2 deve ser o mesmo, encontram-se as transformações de Lorentz [7], que relacionam as coordenadas de dois referenciais inerciais quaisquer (aqui, como exemplo, considerando-se um movimento paralelo ao eixo x entre os dois referenciais, ou um *boost* na direção x),

$$x = \frac{x^{'} + vt^{'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y^{'}; \quad z = z^{'}; \quad t = \frac{t^{'} + \frac{vx^{'}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.4}$$

Na tentativa de incluir os efeitos gravitacionais em sua teoria, Einstein formulou o princípio da equivalência, que assume a equivalência entre um referencial inercial na presença de um campo gravitacional homogêneo e outro referencial, não-inercial, mas com aceleração constante e igual à do referido campo. O princípio da equivalência será discutido com mais detalhes adiante (na discussão relativa à localizabilidade da energia gravitacional). Entretanto há ainda a limitação de se lidar apenas com campos homogêneos, limitação essa contornada assumindo-se que o espaço-tempo da teoria possui geometria riemanianna.

Na formulação de uma teoria da gravitação que incorpore o princípio da equivalência, não deve existir distinção entre os referenciais (em outras palavras, não há referenciais privilegiados), e assim as leis da Física devem ser as mesmas para quaisquer transformações de coordenadas, o que é conhecido como princípio da covariância generalizada. Isso leva naturalmente à substituição da métrica de Minkowski por uma métrica $g_{\mu\nu}$ mais geral.

1.2 Geometria Riemanianna

Seja a transformação de coordenadas:

$$x^{\mu} = f^{\mu}(x'^{\nu}) \tag{1.5}$$

Os quadrivetores ($\mu = 0, 1, 2, 3$) covariante e contravariante A_{μ} e B^{ν} são respectivamente definidos por suas leis de transformação de coordenadas,

$$A_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A'_{\nu} \tag{1.6}$$

e

$$A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} A'^{\nu}, \tag{1.7}$$

onde os índices com ou sem linha se referem aos vetores nos diferentes sistemas de coordenadas.

Para um tensor arbitrário $T^{\mu\nu\cdots}{}_{\alpha\beta\cdots}$ temos

$$T^{\mu\nu\cdots}{}_{\alpha\beta\cdots} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} \cdots \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\beta}} \cdots T^{\lambda'\rho'\cdots}{}_{\gamma'\delta'\cdots}. \tag{1.8}$$

Sobre uma variedade riemanianna qualquer substituiremos a derivada ordinária pela derivada covariante, que possui caráter tensorial. A derivada $\partial_{\mu} V^{\nu}$ não se transforma como um vetor, pois envolve a subtração do vetor em dois pontos distintos,

$$V^{\alpha}(x + \delta x) = V^{\alpha}(x) + \delta V^{\alpha}(x + \delta x) = V^{\alpha}(x) + (\partial_{\mu} V^{\alpha}(x))\delta x^{\mu} \tag{1.9}$$

$$\delta V^{\alpha}(x) = V^{\alpha}(x + dx) - V^{\alpha}(x). \tag{1.10}$$

Assim necessitamos das definições de transporte paralelo e conexão afim,

$$V^{\alpha}_{transp.}(x+\delta x) = V^{\alpha}(x) + \overline{\delta}V^{\alpha}(x), \tag{1.11}$$

onde $V^{\alpha}_{transp.}(x+\delta x)$ é o vetor $V^{\alpha}(x)$ transportado; em $x^{\beta}+\delta x^{\beta}$ temos

$$V^{\alpha}(x+\delta x) - V^{\alpha}_{transp.}(x+\delta x) = vetor = \nabla V^{\alpha}, \tag{1.12}$$

$$\Rightarrow \nabla V^{\alpha} = V^{\alpha}(x) + \delta V^{\alpha}(x) - (V^{\alpha}(x) + \overline{\delta}V^{\alpha}(x)) = \delta V^{\alpha}(x) - \overline{\delta}V^{\alpha}(x). \tag{1.13}$$

É natural assumir que $\overline{\delta}V^{\alpha}(x)$ anule quando V^{α} ou δx sejam nulos; a função mais simples que satisfaz tal hipótese, e linear em $V^{\alpha}(x)$ e δx é

$$\delta V^{\alpha}(x) = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V^{\mu}(x)\delta x^{\nu}, \tag{1.14}$$

onde o sinal menos é introduzido por convenção. $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ é a conexão afim, que se transforma como

$$\Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\lambda}_{\rho\delta} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}. \tag{1.15}$$

Pode-se assim definir a derivada covariante sobre uma variedade,

$$\nabla_{\mu}V^{\alpha} = \partial_{\mu}V^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}V^{\nu}, \tag{1.16}$$

$$\nabla_{\mu}V_{\nu} = \partial_{\mu}V_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}V^{\lambda}. \tag{1.17}$$

Em geral, a derivada covariante não é comutativa; utilizando a definição da mesma para um vetor arbitrário V^{α} temos

$$(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})V^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}V^{\beta} + (\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu})\nabla_{\lambda}V^{\alpha}. \tag{1.18}$$

Assumindo aqui que não há torção, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, e o segundo termo do lado direito da equação acima se anula; $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ é o tensor de Riemann, ou *tensor de curvatura*,

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}. \tag{1.19}$$

A partir do tensor de Riemann obtemos o tensor de Ricci,

$$R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta}, \tag{1.20}$$

e a partir deste obtemos o escalar de curvatura R,

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \tag{1.21}$$

1.3 Equações da Gravitação a Partir da Formulação de Hilbert-Einstein

As equações de Einstein buscam explicar a relação entre a geometria do espaço-tempo e a matéria, imersa nesse mesmo espaço-tempo. Há aqui a diferença básica entre a Relatividade Geral e o Eletromagnetismo que é o fato de que o campo eletromagnético não transporta cargas (fontes), o que torna suas equações lineares, enquanto o campo gravitacional age como fonte sobre si mesmo, e assim as equações são não-lineares.

Pode-se deduzir as equações de Einstein de um princípio variacional, partindo-se da seguinte ação:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} L_g, \tag{1.22}$$

em que L_g deve ser um invariante construído a partir de $g_{\mu\nu}$ e de suas derivadas de até 2ª ordem. Restringindo as equações de campo a equações diferenciais de segunda ordem, o invariante (no caso escalar) mais simples que pode ser construído é $L_g = R$. Incluindo os campos de matérias nas equações temos

$$A = \int d^4x [\mathcal{L}_g - k\mathcal{L}_m], \tag{1.23}$$

onde $\mathcal{L}_g = \sqrt{-g} L_g$ refere-se à parte gravitacional, e $\mathcal{L}_m = \sqrt{-g} L_m$ contém todos os campos de matéria em interação com o campo gravitacional; e $k = 8\pi G/c^4$.

Efetuando a variação no primeiro termo do lado direito temos

$$\delta \int_\Omega d^4x\sqrt{-g}R = \int_\Omega d^4x[(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})]$$
$$= \int_\Omega d^4x[(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})]. \tag{1.24}$$

Efetuando a variação sobre a densidade $\sqrt{-g}$ [7],

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}), \tag{1.25}$$

e escrevendo $R_{\mu\nu}$ após alguns cálculos simples obtemos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\delta(\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\alpha\nu} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\beta\lambda} - \Gamma^\beta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\nu}) \\ &= \nabla_\alpha(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Rearranjando os termos encontramos

$$k\delta I = k\delta \int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R\right)\delta g^{\mu\nu} + k\int d^4x\partial_\alpha(\sqrt{-g}V^\alpha), \tag{1.27}$$

onde

$$V^\alpha = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}\delta\Gamma^\mu_{\mu\nu}. \tag{1.28}$$

Antes de analisar as integrais acima, enfatizamos que os casos que nos interessam aqui são aqueles de sistemas assintoticamente planos, para os quais temos as seguintes condições assintóticas ($r \to \infty$):

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(1/r), \tag{1.29}$$

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} \propto g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \propto O(1/r^2). \tag{1.30}$$

Observando a forma de V^α vemos que a última integral possui a forma

$$\int d^4x\partial_\alpha(\sqrt{-g}V^\alpha) \propto \int dt \int r^2\sin\theta d\theta d\phi O(1/r^2) \neq 0. \tag{1.31}$$

Desse modo, é necessário acrescentarmos um termo à densidade de lagrangeana, a fim de anular a integral que envolve V^α, acrescentando o termo

$$-\partial_\alpha\left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\mu\nu}\right)\right], \tag{1.32}$$

e assim temos, para a última integral de (1.27),

$$\int d^4x\partial_\alpha(\sqrt{-g}V^\alpha) - \int d^4x\delta\partial_\alpha\left[\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\mu\nu})\right]$$

$$= -\int d^4x\partial_\alpha\left[\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \delta(\sqrt{-g}g^{\alpha\nu})\Gamma^\mu_{\mu\nu}\right], \tag{1.33}$$

entretanto $\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \propto O(1/r^3)$, e desse modo a integral se anula para $r \to \infty$, e no lado direito da equação (1.27) resta apenas a primeira das integrais.

Variando o termo da integral de ação referente à lagrangeana dos campos de matéria, δA_m, temos

$$\delta A_m = -\int d^4x\delta(\sqrt{-g}L_m) = -\int \frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}d^4x; \tag{1.34}$$

seja

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{1.35}$$

temos que $\delta A_m = -\int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x$, e assim variando a nova integral de ação total,

$$A = \int d^4x\,\sqrt{-g}(kR - L_m) - k\int \partial_\alpha\left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\mu\nu}\right)\right], \tag{1.36}$$

e utilizando o princípio de ação mínima chegamos às equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R = \frac{1}{k}T_{\mu\nu}. \tag{1.37}$$

1.4 Pseudo-tensores de Momento-energia

Várias expressões para a energia gravitacional foram obtidas no contexto da Relatividade Geral em sua formulação métrica. Entretanto nenhuma delas é covariante, e a impossibilidade de se escrever uma expressão que seja covariante será comentada adiante. As expressões obtidas são todas de certo modo equivalentes, e permitem em geral que se calcule a energia total de um sistema assintoticamente plano, pois para essa condição as expressões se tornam independentes do sistema de coordenadas.

Uma das primeiras tentativas nesse sentido foi o pseudo-tensor de Einstein [8],

$$\tau^{\nu}{}_{\mu} = \frac{1}{2k}\partial_{\lambda}\left\{\frac{g_{\mu\gamma}}{\sqrt{-g}}\partial_{\sigma}\left[-g\left(g^{\lambda\sigma}g^{\nu\gamma} - g^{\nu\sigma}g^{\lambda\gamma}\right)\right]\right\}. \tag{1.38}$$

Temos ainda o pseudo-tensor de Weinberg[9], construído basicamente admitindo-se que dele só se poderá definir a energia total do sistema

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2k}\left(\partial_{\lambda}\partial^{\mu}h^{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}\partial^{\lambda}h^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\partial^{\nu}h + \partial_{\lambda}\partial^{\nu}h^{\lambda\mu} - \eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\kappa}h^{\lambda\kappa} + \eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}h\right), \tag{1.39}$$

onde $h_{\mu\nu}$ representa a expansão em primeira ordem de $g_{\mu\nu}$,

$$g_{\mu\nu} \cong \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(1/r). \tag{1.40}$$

Outro exemplo é o pseudo-tensor de Landau-Lifshitz[7], que considera um sistema de coordenadas em que se tenha, pontualmente, $\partial_{\nu}g_{\mu\lambda} = 0$, obtendo

$$\tau^{\mu\nu} = \frac{1}{2k}\frac{1}{g}\partial_{\lambda}\partial_{\rho}\left[g\left(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}\right)\right]. \tag{1.41}$$

Partindo-se das expressões relacionadas acima, encontramos a mesma expressão de ADM para a energia total de um sistema assintoticamente plano,

$$I = \frac{1}{2k}\int_{S\to\infty} dS_i(\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}). \tag{1.42}$$

Vemos aqui que a energia está relacionada com o termo proporcional a $1/r$ de $g_{\mu\nu}$, o que também se espera para o cálculo de E quando a integração for realizada em um volume V qualquer. O elemento diferencial de superfície carrega um termo proporcional a r^2, enquanto que a derivada de $h_{\mu\nu}$ gera um termo do tipo $O(1/r^2)$. Assim, a expressão para o momento-energia gravitacional deveria ser construída a partir de uma expressão covariante envolvendo a derivada primeira de $g_{\mu\nu}$, o que não é possível devido à equação $\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$. Como veremos, no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral podemos construir uma densidade escalar com a forma $\partial_\mu(eT^\mu)$, o que possibilita que se escreva uma expressão para o momento-energia gravitacional, o que não é possível no contexto da Teoria da Relatividade Geral de Einstein.

Capítulo 2

Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

2.1 Campos de Tetradas

Os campos de tetradas $e^a{}_\mu$, quantidade básica do TEGR, possuem um índice do grupo de Lorentz, o índice a, e o índice do espaço tempo μ; esse caráter permite que a tetrada converta índices do espaço-tempo em índices locais, e que inversamente também leve quantidades locais em quantidades do espaço-tempo. Como exemplo seja o vetor arbitrário $V^a(x)$,

$$V^a = e^a{}_\mu V^\mu. \tag{2.1}$$

Uma propriedade importante das tetradas é que elas definem uma base de um sistema de coordenadas local para cada ponto do espaço-tempo.

Os índices local e do espaço-tempo da tetrada são abaixados e levantados respectivamente pela métrica de Minkowski e pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$,

$$e^a{}_\mu = \eta^{ab} e_{b\mu}, \tag{2.2}$$

ou

$$e_{a\mu} = \eta_{ab} e^b{}_\mu \tag{2.3}$$

e

$$e^a{}_\mu = g_{\mu\nu} e^{a\nu}$$
$$e_a{}^\mu = g^{\mu\nu} e_{a\nu}. \tag{2.4}$$

A partir da tetrada $e^a{}_\mu$ e da tetrada inversa $e_a{}^\mu$ obtemos a métrica de Minkowski para o espaço-tempo plano,

$$e^a{}_\mu e^{b\mu} = \eta^{ab}, \tag{2.5}$$

e dessa equação obtemos a relação de ortonormalidade,

$$e^a{}_\mu e_b{}^\mu = \delta^a_b, \tag{2.6}$$

e dessa última obtemos, multiplicando por $e_a{}^\nu$,

$$e^a{}_\mu e_a{}^\nu = \delta^\nu_\mu, \tag{2.7}$$

de onde segue

$$e^a{}_\mu e_{a\nu} = g_{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Nesse contexto, trabalhamos em um espaço-tempo com curvatura nula e torção não nula; a conexão é construída a partir das tetradas e da condição do paralelismo à distância, ou *teleparalelismo*[10] $\nabla_\nu e^a{}_\mu = 0$, que caso construída sem a conexão de spin (como veremos adiante) leva ao paralelismo absoluto,

$$\partial_\nu e^a{}_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e^a{}_\lambda = 0, \tag{2.9}$$

de onde obtemos a conexão em função da tetrada,

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = e_a{}^\lambda \partial_\nu e^a{}_\mu. \tag{2.10}$$

Se com essa conexão obtida construirmos os tensores de curvatura e torção veremos que o primeiro é nulo (relacionado com o paralelismo absoluto das tetradas) e o segundo é não-nulo, sendo que este gera os efeitos gravitacionais, no conhecido espaço-tempo de Weitzenböck.

2.2 Formalismo Lagrangeano do Equivalente Teleparalelo à Relatividade Geral

A formulação Lagrangeana do TEGR pode ser desenvolvida tanto utilizando-se uma simetria SO(3,1) local [11, 12, 13] quanto uma simetria SO(3,1) global [5, 14, 15, 16, 17], sendo essas construções equivalentes quanto às equações obtidas (apesar de o desenvolvimento com a simetria *global* ser mais simples). A formulação que utiliza a simetria local é obtida atráves da imposição da covariância da equação de Dirac no espaço-tempo, através da construção da conexão afim de spin $\omega_{\mu ab}$ e da derivada covariante local dos campos de spin e tensoriais. No desenvolvimento que utiliza o formalismo Hamiltoniano[3, 18] (nas referências citadas, por meio da condição de gauge temporal de Schwinger) conclui-se que de modo a obter um conjunto de vínculos de primeira classe é necessário que a simetria utilizada seja *global*. Aqui discutiremos os dois casos, iniciando pela utilização da simetria local. Seja um bi-espinor de Dirac $\psi(x)$, em um espaço tempo curvo em que se pode definir a conexão afim de spin $\omega_{\mu ab}$; com isso podemos definir também a derivada covariante local do campo[19],

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \frac{i}{4}\omega_{\mu ab}S^{ab}\psi, \tag{2.11}$$

onde $S^{ab} = \frac{i}{2}\left[\gamma^a, \gamma^b\right]$ é uma representação de spin 1/2 do grupo SO(3,1) e $\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$ é a conexão afim de spin, ou conexão afim local.

Inicialmente obtemos o paralelismo na teoria com simetria SO(3,1) local através de $\nabla_\nu e^a{}_\mu = 0$,

$$\nabla_\nu e^a{}_\mu = \partial_\nu e^a{}_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}e^a{}_\lambda + \omega_\nu{}^a{}_b e^b{}_\mu = 0, \tag{2.12}$$

em que $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ é a conexão afim, que com essa última equação pode ser escrita em termos da conexão de spin e da derivada da tetrada,

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = e^a{}_\mu e^{b\lambda}\omega_{\nu ab} + e^{a\lambda}\partial_\nu e_{a\mu}, \tag{2.13}$$

a qual pode ser substituída tanto na expressão do tensor de curvatura quanto na torção, onde obteremos $R^a{}_{b\mu\nu}(\omega)$ e $T^a{}_{\mu\nu}(\omega)$. Com a definição da torção $T^a{}_{\mu\nu}$, usando a relação $e_{a\lambda}T^a{}_{\mu\nu} = T_{\lambda\mu\nu}$ e com algumas manipulações algébricas e permutas entre os índices, obtemos a seguinte identidade para a conexão de spin:

$$\omega_{\mu ab} = {}^\circ\omega_{\mu \mathrm{ab}} + K_{\mu ab}, \tag{2.14}$$

sendo $K_{\mu ab}$ o tensor de contorção,

$$K_{\mu ab} = \frac{1}{2} e_a{}^\lambda e_b{}^\nu \left(T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\nu\lambda}\right), \tag{2.15}$$

e ${}^\circ\omega_{\mu \mathrm{ab}}$ é a conexão de Levi-Civita, que possui *torção associada nula*:

$$^\circ\omega_{\mu \mathrm{ab}} = \frac{1}{2} e^c{}_\mu \left(\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{cab}\right) \tag{2.16}$$

e

$$\Omega_{abc} = e_{a\mu}(e_b{}^\mu \partial_\mu e_c{}^\nu - e_c{}^\mu \partial_\mu e_b{}^\nu). \tag{2.17}$$

Aqui partiremos do seguinte lagrangeano:

$$L = eR(e,\omega) - 2\partial_\mu \left(e e^{a\mu} e^{b\nu} \omega_{\nu ab}\right) \tag{2.18}$$

em que o segundo termo, de divergência total, é adicionado pelo mesmo motivo do que foi desenvolvido na discussão sobre o formalismo de Hilbert-Einstein, ou seja, para considerarmos o fato de estarmos lidando com espaços assintoticamente planos.

Utilizando-se a conexão de spin acima obtida, em termos da conexão de Levi-Civita e da contorção, e substituindo no lagrangeano acima obtemos[3]

$$\begin{aligned} eR(e,\omega) - 2\partial_\mu \left(e e^{a\mu} e^{b\nu} \omega_{\nu ab}\right) &= eR(e) - 2\partial_\mu \left(e e^{a\mu} e^{b\nu} \omega_{\nu \mathrm{ab}}\right) \\ &+ e\left(\frac{1}{4} T^{\alpha\mu\nu} T_{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\alpha\mu\nu} T_{\mu\alpha\nu} - T^\mu T_\mu\right); \end{aligned} \tag{2.19}$$

e definindo Σ^{abc},

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac} T^b - \eta^{ab} T^c), \tag{2.20}$$

e observando que

$$\Sigma^{abc}T_{abc} = \frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^{a}T_{a}, \tag{2.21}$$

obtemos, na equação (2.19),

$$eR(e,\omega) = eR(e) + e\Sigma^{\alpha\mu\nu}T_{\alpha\mu\nu} - 2\partial_{\mu}(eT^{\mu}), \tag{2.22}$$

onde também utilizamos a identidade $\partial_{\mu}(ee^{a\mu}e^{b\nu}\omega_{\nu ab}) = \partial_{\mu}(ee^{a\mu}e^{b\nu}\,{}^{\circ}\omega_{\nu \mathrm{ab}}) - \partial_{\mu}(eT^{\mu})$.

Analisando (2.22) vemos que a condição de curvatura nula, $R(e,\omega) = 0$, resulta na equivalência entre o escalar de curvatura $eR(e)$ e uma combinação quadrática do tensor de torção[3], sendo que o termo de divergência total é descartado (sob integração) mais uma vez por estarmos tratando de espaços assintoticamente planos. Acrescentando os campos de matéria ao lagrangeano obtemos

$$L^{'} = L - L_{m} = -ke\Sigma^{abc}T_{abc} + e\lambda^{ab\mu\nu}R_{ab\mu\nu}(\omega) - L_{m}, \tag{2.23}$$

onde os multiplicadores de Lagrange $\lambda^{ab\mu\nu}$ garantem a condição de curvatura nula. Variando-se o lagrangeano com relação a $e^{a}{}_{\mu}$, $\omega_{\mu ab}$ e $\lambda^{ab\mu\nu}$ obtemos as equações de campo, que são respectivamente:

$$e^{a}{}_{\lambda}e_{b\mu}D_{\nu}(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e\left(\Sigma^{b\nu a}T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e^{a}{}_{\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}\right) = 0, \tag{2.24}$$

$$\Sigma^{a\mu b} - \Sigma^{b\mu a} + \frac{1}{e}D_{\nu}(e\lambda^{ab\mu\nu}) = 0, \tag{2.25}$$

e

$$R_{ab\mu\nu}(\omega) = 0, \tag{2.26}$$

onde

$$D_{\nu}(e\Sigma^{b\lambda\nu}) = \partial_{\nu}(e\Sigma^{b\lambda\nu}) + e\omega_{\nu}{}^{b}{}_{c}\Sigma^{c\lambda\nu}, \tag{2.27}$$

$$D_{\nu}(e\lambda^{ab\mu\nu}) = \partial_{\nu}(e\lambda^{ab\mu\nu}) + e(\omega_{\nu}{}^{b}{}_{c}\lambda^{ac\mu\nu} + \omega_{\nu}{}^{a}{}_{c}\Sigma^{cb\mu\nu}). \tag{2.28}$$

Tanto a densidade de lagrangeano quanto as equações de campo acima obtidas são invariantes por transformações de Lorentz locais e por transformações gerais de coordenadas. Como conseqüência da terceira das equações de campo obtidas, a primeira delas é equivalente às equações de Einstein no vácuo, o que pode ser provado utilizando-se a expressão (2.14) para a conexão de spin,

$$\frac{\delta L'}{\delta e^{a\mu}} = \frac{e}{2}\, R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2} e_{a\mu} R(e) - \frac{1}{4k} e T_{a\mu} = 0, \tag{2.29}$$

de onde obtemos

$$R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2} e_{a\mu} R(e) = \frac{1}{2k} T_{a\mu}. \tag{2.30}$$

Multiplicando por $e^a{}_\nu$ e lembrando que $e^a{}_\mu e_{a\nu} = g_{\mu\nu}$,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2k} T_{\mu\nu}, \tag{2.31}$$

que são exatamente as equações de Einstein.

Antes de encerrarmos essa seção devemos enfatizar mais uma vez que a teoria pode ser formulada de forma a possuir invariância sob o grupo SO(3,1) global. A simetria global é obtida anulando-se a conexão de spin $\omega_{\mu ab}$ (equação (2.9)),

$$L(e) = -ke\Sigma^{abc} T_{abc} - L_m, \tag{2.32}$$

$$\frac{\delta L}{\delta e^{a\mu}} = e_{a\lambda} e_{b\mu} \partial_\nu (e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e\left(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4} e_{a\mu} T_{bcd} \Sigma^{bcd}\right) - \frac{1}{4k} e T_{a\mu}, \tag{2.33}$$

$$\frac{e}{2}\, R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2} e_{a\mu} R(e) - \frac{1}{4k} e T_{a\mu} = 0, \tag{2.34}$$

o que mostra a equivalência entre as equações obtidas utilizando-se tanto a simetria SO(3,1) global quanto a local.

Cabe também a observação que manipulando-se a equação de campo (2.24) é possível obter-se uma equação de continuidade para o vetor energia-momento gravitacional, bem como calcular-se a perda de energia gravitacional de um sistema diversas configurações de campo [20, 21].

2.3 Formalismo Hamiltoniano do Equivalente Teleparalelo à Relatividade Geral

A formulação hamiltoniana[18, 22], cuja discussão aqui será bastante resumida, é obtida a partir da diferenciação em primeira ordem da densidade de lagrangeano obtida acima. Sabemos que o hamiltoniano pode ser obtido da seguinte relação:

$$L = \Pi^{ak}\dot{e}_{ak} - H, \tag{2.35}$$

com Π^{ak} sendo o momento canonicamente conjugado a e_{ak}. Utilizando-se o lagrangeano (2.23), fazendo $L_m = 0$ e utilizando-se também a expressão para Σ^{abc} obtém-se

$$\Pi^{ak} = \frac{\delta L}{\delta \dot{e}_{ak}} = -4ke\Sigma^{a0k}. \tag{2.36}$$

Agora o lagrangeano precisa ser escrito em termos de Π^{ak} e e_{ak}, sendo os passos intermediários omitidos; a forma final para o momento é

$$\begin{aligned}
\Pi^{ak} &= keg^{00}(-g^{kj}T^{a}{}_{0j} - e^{aj}T^{k}{}_{0j}) \\
&+ g^{0k}(g^{0j}T^{a}{}_{0j} + T^{0}{}_{0j}) + e^{a0}(g^{0j}T^{k}{}_{0j} + g^{kj}T^{0}{}_{0j}) \\
&- 2(e^{a0}g^{0k}T^{j}{}_{0j} + e^{aj}g^{0j}T^{0}{}_{0j}) - g^{0i}g^{kj}T^{a}{}_{ij} \\
&+ e^{ai}(g^{0j}T^{k}{}_{ij} - g^{kj}T^{0}{}_{ij}) - 2(g^{0i}e^{ak} - g^{ik}e^{a0})T^{i}{}_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

A densidade hamiltoniana obtida é

$$H = e_{a0}C^{a} + \alpha_{ik}\Lambda^{ik} + \beta_{k}\Lambda^{k} + \partial_{k}\left(e_{a0}\Pi^{ak}\right), \tag{2.39}$$

onde C^a, Λ^{ik} e Λ^k são vínculos de primeira classe, e α_{ik} e β_k são multiplicadores de Lagrange.

A forma integral da equação do vínculo hamiltoniano $C(x) = 0$ pode ser interpretada como uma equação de energia:

$$\int d^3x \partial_j (2keT^j) = \int dx^3 \left[ke\Sigma^{kij} T_{kij} + \frac{1}{4ke} \left(\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right) \right]. \tag{2.40}$$

A equação anterior é interpretada como uma equação de energia, pois o termo integral do lado esquerdo da equação, integrado sobre todo o espaço tridimensional nos fornece a própria energia de ADM:

$$\frac{1}{8\pi G} \int d^3x \partial_j (eT^j) = \frac{1}{16\pi G} \int_S dS_k (\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}) \equiv E_{ADM}. \tag{2.41}$$

A partir da densidade hamiltoniana acima também podemos escrever:

$$\int_{V\to\infty} d^3x (-\partial_k \Pi^{(0)k}) = k \int_{S\to\infty} dS_i \left(\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj} \right) \equiv E_{ADM}. \tag{2.42}$$

Como $-\partial_k \Pi^{(0)k}$ é uma densidade de energia, em princípio podemos integrá-la em um volume V qualquer do espaço, obtendo a definição de energia gravitacional para uma região finita do espaço, e em conseqüência a definição para o *momento-energia* gravitacional[14, 20, 21],

$$P^a = -\int_V d^3x \partial_k \Pi^{ak}. \tag{2.43}$$

A expressão aqui obtida também se transforma como um vetor sob transformações do grupo SO(3,1) global, se anula para o espaço-tempo de Minkowski (considerando-se o espaço-tempo de referência, como veremos adiante) e fornece os valores corretos para as energias de ADM e de Bondi[22].

2.4 Princípio da Equivalência e a localizabilidade da energia gravitacional

Na eletrodinâmica clássica encontramos uma definição clara de energia, considerando, em uma região do espaço tridimensional, a existência de linhas de campo dos campos elétrico e magnético nessa região. A energia para esse caso é dada pela integração nessa região da soma dos quadrados desses campos; a força de Lorentz que uma partícula carregada sofre nessa região representa a existência de uma densidade de energia eletromagnética.

Para o campo gravitacional, não é possível utilizar-se de tal "artifício", não sendo possível relacionar energia gravitacional com densidade de linhas de campo. Uma idéia bastante difundida, e no nosso ponto de vista equivocada, é a utilização do princípio da equivalência para justificar que não é possível definir a densidade de energia para o campo gravitacional[23].

Para justificar essa idéia, normalmente utiliza-se o chamado "princípio da equivalência infinitesimal", cuja formulação mais conhecida é atribuída a Pauli[24]:

> Para toda região infinitesimalmente pequena do universo (i.e., uma região do universo tão pequena que as variações espaciais - e temporais - da gravitação possam ser desprezadas nela) sempre existe um sistema de coordenadas no qual a gravitação não possui influência nem no movimento das partículas ou em qualquer outro processo físico.

Esse princípio é ainda reforçado pela possibilidade de se encontrar, em uma região suficientemente pequena do espaço-tempo (na realidade em um ponto), um sistema de coordenadas em que os símbolos de Christoffel são nulos, e dessa forma conclui-se, erradamente, que essa região seria livre de campos gravitacionais.

Valendo-se dessa formulação do princípio e do fato de a Relatividade Especial (assumido como o caso livre de campo gravitacional) valer para regiões infinitesimais, o espaço-tempo da Relatividade Geral poderia ser obtido como a "soma" dessas pequenas regiões, nas quais vale a Relatividade Especial. Entretanto Einstein sempre enfatizou, após uma tentativa frustrada (devido a várias dificuldades existentes[25]) de aplicar o princípio para regiões infinitesimais, que o mesmo não poderia ser aplicado para esse caso. A aplicação para regiões infinitesimais não permite diferenciar a geodésica de outras linhas-mundo para uma dada partícula, o que assim não permite obter-se uma medida do efeito da gravitação sobre a mesma.

Analisando inicialmente a formulação do princípio *infinitesimal*, temos o trabalho de John Norton [25], que diz que o princípio surgiu como uma tentativa de generalizar o mesmo para campos gravitacionais arbitrários; entretanto, está na base da formulação original feita por Einstein a hipótese de um campo gravitacional homogêneo, e o movimento uniformemente acelerado dos referenciais. Já o argumento do desaparecimento dos símbolos de Christoffel também é falho, pois segundo Synge[26], como o tensor de curvatura de Riemann é invariante por transformações de coordenadas, ele não pode ser feito nulo em toda e qualquer região do espaço. Além disso, o que é possível anular-se são as *derivadas primeiras* do tensor métrico, o que não pode ser tomado como um princípio físico, mas apenas uma característica de geometria diferencial. Um exemplo que mostra que os efeitos do campo gravitacional não podem ser anulados numa região suficientemente pequena do espaço são as "forças de maré"[27] ou *tidal forces*, relacionadas diretamente ao tensor de Riemann. Portanto, a afirmação de que essa região infinitesimal do espaço-tempo seria livre de campos gravitacionais é questionável, já que concordamos que a existência de uma força gravitacional seria causada por um campo gravitacional, não sendo razoável admitir que possa haver uma força sem um campo associado nessa região. Além disso deve ser salientado que o princípio da equivalência na formulação de Einstein é feito sobre o espaço-tempo de Minkowski; a transformação das quantidades físicas de K para $K^{'}$ é uma mudança de referenciais, e não uma transformação de coordenadas.

A versão de Einstein do princípio da equivalência[25] consiste em considerar um sistema de referência K ("sistema Galileano"), e um outro referencial $K^{'}$, o qual está uniformemente acelerado em relação a K. Einstein conclui que assumindo-se a existência de um campo gravitacional homogêneo em K', é possível considerar que o último está em repouso.

O princípio da equivalência segue da igualdade entre as massas inercial e gravitacional, e estabelece a equivalência, pela adição de um campo gravitacional apropriado, entre um referencial não-inercial e outro inercial. Devemos destacar que por uma transformação de coordenadas não é possível reduzir-se o campo de tetradas ou o tensor de torção em um ponto do espaço-tempo aos seus equivalentes para o espaço-tempo plano. Argumentos baseados no *princípio infinitesimal da equivalência* não são conclusivos e não podem ser usados para se excluir a possibilidade de definição da densidade de energia gravitacional (ou equivalentemente, concluir que a impossibilidade é intrínseca à gravitação, independentemente da abordagem matemática utilizada).

2.5 Expressão Regularizada Para a Densidade de Momento-Energia Gravitacional

Conforme já enfatizado, o momento-energia gravitacional P^a obtido no contexto do TEGR apresenta diversas características esperadas para uma definição consistente da mesma. Para espaços assintoticamente planos, $P^{(0)}$ é a energia de ADM, o que está de acordo com a literatura. É conhecido, para teorias da gravitação que trabalham com tetradas, que no limite $r \to \infty$,

$$e_{a\mu} \cong \eta_{a\mu} + \frac{1}{2} h_{a\mu}(1/r), \tag{2.44}$$

e que a condição $\partial_\mu e^a{}_\nu = O(1/r^2)$ é válida, no limite assintótico em que $r \to \infty$. No limite assintótico, $\eta_{a\mu}$ coincide com o tensor métrico de Minkowski, η_{ab}. Para campos que satisfazem $g_{ab} = \eta_{ab}$, temos a importante conseqüência que $e^a{}_\mu(t, x, y, z) = \delta^a_\mu$ e portanto $T^a{}_{\mu\nu} = 0$. Assim podemos estabelecer um espaço-tempo de referência, escolhendo um campo de tetradas tal que $T^a{}_{\mu\nu} = 0$ *para qualquer sistema de coordenadas*. Entretanto, para um campo arbitrário de tetradas com o qual se obtém o tensor métrico do espaço-tempo plano, não necessariamente temos $T^a{}_{\mu\nu} = 0$, o que é utilizado como argumento para afirmar que a expressão para o momento-energia aqui utilizado é restrita a uma classe de observadores caracterizados por um campo de tetradas (para o espaço-tempo plano) em que $T^a{}_{\mu\nu} = 0$.

O momento-energia em teorias clássicas depende do referencial, característica também esperada na gravitação[20, 21, 28]. A energia total de um corpo relativístico, por exemplo, depende do referencial. Afirmamos que um conjunto de campo de tetradas é adaptado a observadores ideais presentes em um espaço-tempo determinado por $g_{\mu\nu}$. A infinidade de possíveis observadores é relacionada com a infinidade de campos de tetradas $e^a{}_\mu$ que podem ser obtidas através de transformações SO(3,1) locais de Lorentz consistentes com $g_{\mu\nu}$.

Seja $x^\mu(s)$ a linha-mundo C de um observador, e assim $u^\mu = dx^\mu/ds$ é a sua velocidade ao longo de C. A velocidade do observador é identificada como a componente $a = (0)$ de $e_a{}^\mu$, e sua aceleração como sua respectiva derivada absoluta ao longo de C[29],

$$u^\mu(s) = e_{(0)}{}^\mu, \tag{2.45}$$

e

$$a^\mu = \frac{Du^\mu}{ds} = \frac{De_{(0)}{}^\mu}{ds} = u^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}{}^\mu. \tag{2.46}$$

onde a derivada covariante acima é construída através dos símbolos de Christoffel.

Vemos assim que $e_a{}^\mu$ determina a velocidade e a aceleração do observador ao longo da linha-mundo C. Em outras palavras, os seis graus de liberdade adicionais das tetradas, com respeito ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$, fixam o sistema de referência adaptado ao observador. Se $e^a{}_\mu \to \delta^a_\mu$ no limite $r \to \infty$, então $e^a{}_\mu$ está adaptado a observadores estacionários no infinito espacial, e desse modo $P^{(0)}$ é a própria energia de ADM.

Na discussão sobre o formalismo Hamiltoniano foi mostrada a expressão para P^a, e o momento canonicamente conjugado às componentes das tetradas e_{aj}, $\Pi^{aj} = -4ke\Sigma^{a0j}$. Integrando sobre uma superfície espacial tridimensional obtemos o momento-energia gravitacional nessa região V[14, 21],

$$P^a = -\int_V d^3x \partial_k \Pi^{ak}, \tag{2.47}$$

que pode ser reescrita como uma integral de superfície,

$$P^a = -\oint_{S\to\infty} dS_k \Pi^{ak}, \tag{2.48}$$

sendo as quantidades de campo calculadas sobre a superfície S, ou seja, com $r \to \infty$.

Nas duas expressões acima, está assumido implicitamente que o espaço-tempo de referência é tal que as tetradas para o espaço-tempo plano fornecem $T^a{}_{\mu\nu} = 0$; agora devemos considerar que essa condição não é necessariamente satisfeita, ou seja, as tetradas escolhidas podem gerar $T^a{}_{\mu\nu} \neq 0$. A generalização é obtida subtraindo-se um termo às expressões obtidas, que levem em conta essa energia para o espaço-tempo plano, assim como no formalismo de Brown-York[2].

Seja $T^a{}_{\mu\nu}(E) = \partial_\mu E^a{}_\nu - \partial_\nu E^a{}_\mu$ o tensor de torção obtido com as tetradas planas $E^a{}_\mu$, e $\Pi^{aj}(E)$ seus respectivos momentos conjugados; com isso a expressão regularizada para o momento-energia gravitacional P^a é[30]

$$P^a = -\int_V d^3x \partial_k \left[\Pi^{ak}(e) - \Pi^{ak}(E)\right]. \tag{2.49}$$

Dessa forma, garante-se que para o espaço-tempo plano, ou seja $e^a{}_\mu = E^a{}_\mu$ temos o momento-energia igual a zero. O espaço-tempo de referência, descrito por $E^a{}_\mu$, é obtido anulando-se todos os parâmetros físicos de $e^a{}_\mu$ (massa, momento angular e etc.). A expressão (2.46) fica, neste caso (para uma superfície S qualquer),

$$P^a = -\oint_{S\to\infty} dS_k [\Pi^{ak}(e) - \Pi^{ak}(E)]. \tag{2.50}$$

Seja $e^a{}_\mu$ um conjunto de tetradas para qual tenhamos, para o espaço-tempo plano, $T^a{}_{\mu\nu} = 0$, e que satisfaça a equação (2.42),

$$e_{a\mu} \cong \eta_{a\mu} + \frac{1}{2} h_{a\mu}(1/r).$$

A partir dessa tetrada pode-se construir outro conjunto, através de transformações locais de Lorentz

$$\tilde{e}^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x) e^b{}_\mu. \tag{2.51}$$

Analisando-se a equação (2.42) vemos que, no limite de $r \to \infty$ temos

$$\tilde{e}^a{}_\mu \cong \Lambda^a{}_b(\delta^b_\mu + (1/2)h^b{}_\mu). \tag{2.52}$$

Identificando $E^a{}_\mu \equiv \delta^a_\mu, \Lambda^a{}_b\delta^b_\mu \equiv \tilde{E}^a_\mu$ e $\Lambda^a{}_b h^b{}_\mu \equiv \tilde{h}^a{}_\mu$, temos

$$\tilde{e}^a{}_\mu - \tilde{E}^a{}_\mu \cong \frac{1}{2}\tilde{h}^a{}_\mu. \tag{2.53}$$

Novamente analisando-se a equação (2.42) vemos que para o conjunto de tetradas $e^a{}_\mu$ o tensor de torção é

$$T^a{}_{\mu\nu} \cong \frac{1}{2}(\partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu), \tag{2.54}$$

e com a penúltima equação portanto temos

$$\tilde{T}^a{}_{\mu\nu}(e) - \tilde{T}^a{}_{\mu\nu}(E) \cong \frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{h}^a{}_\nu - \partial_\nu \tilde{h}^a{}_\mu). \tag{2.55}$$

Na expressão (2.47) que nos dá o momento-energia P^a entra agora a diferença entre os momentos canonicamente conjugados, $\left[\Pi^{ak}(e) - \Pi^{ak}(E)\right]$; essa diferença é proporcional à diferença entre $T^a_{\mu\nu}(e)$ e $T^a_{\mu\nu}(E)$, conforme abaixo[30]:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^{ak}(e) - \tilde{\Pi}^{ak}(E) &= -4k[\tilde{e}\tilde{e}^a{}_\mu\tilde{\Sigma}^{\mu 0k}(e) - \tilde{E}\tilde{E}^a{}_\mu\tilde{\Sigma}^{\mu 0k}(E)] \\
&\cong -4kE\tilde{E}^a{}_\mu[\tilde{\Sigma}^{\mu 0k}(e) - \tilde{\Sigma}^{\mu 0k}(E)] \\
&= -4kE\left(\Lambda^a{}_b\delta^b_\mu\right)[\tilde{\Sigma}^{\mu 0k}(e) - \tilde{\Sigma}^{\mu 0k}(E)].
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Aqui fizemos $e = det(e^a{}_\mu) \cong det(E^a{}_\mu) \equiv E$ no limite $r \to \infty$. O tensor $\tilde{\Sigma}^{\mu 0k}(e) - \tilde{\Sigma}^{\mu 0k}(E)$ é escrito em termos de quantidades como:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{\lambda\mu\nu}(e) - \tilde{T}_{\lambda\mu\nu}(E) &= \tilde{e}_{a\lambda}\tilde{T}^a{}_{\mu\nu}(e) - \tilde{E}_{a\lambda}\tilde{T}^a{}_{\mu\nu}(E) \\
&\cong \tilde{E}_{a\lambda}\frac{1}{2}(\partial_\mu\tilde{h}^a{}_\nu - \partial_\nu\tilde{h}^a{}_\mu) \\
&= (\Lambda_{ac}\delta^c_\lambda)\frac{1}{2}[\partial_\mu(\Lambda^a{}_b h^b{}_\mu) - \partial_\nu(\Lambda^a{}_b h^b{}_\nu)].
\end{aligned} \tag{2.57}$$

No limite $r \to \infty$ os elementos $\Lambda^a{}_b$ do grupo SO(3,1) são assumidos da ordem de $O(r^0)$; como temos $\Lambda_{ac}\Lambda^a{}_b = \eta_{bc}$, a equação acima fica

$$\tilde{T}_{\lambda\mu\nu}(e) - \tilde{T}_{\lambda\mu\nu}(E) \cong \frac{1}{2}(\partial_\mu h_{\lambda\nu} - \partial_\nu h_{\lambda\mu}), \tag{2.58}$$

e concluindo temos

$$\tilde{\Sigma}^{\mu 0k}(e) - \tilde{\Sigma}^{\mu 0k}(E) \cong \Sigma^{\mu 0k}(e) - \Sigma^{\mu 0k}(E), \tag{2.59}$$

no limite $r \to \infty$.

Como os coeficientes $\Lambda^a{}_b$ que levam $e^a{}_\mu$ em $E^a{}_\mu$ são arbitrários, concluímos que todas as tetradas que geram o tensor métrico fornecem o mesmo momento-energia gravitacional, a menos de uma transformação SO(3,1) global.

Antes de encerrar essa seção é interessante enfatizarmos que, na literatura, é comum considerar a teoria aqui descrita como um caso da relatividade geral de Einstein, obtida através de uma transformação de gauge translacional. Para tal, argumenta-se que o lagrangeano da teoria é invariante por transformações do tipo SO(3,1)locais, a menos de uma divergência total. O termo de divergência é descartado, e dessa forma conclui-se que a teoria possui simetria local. Entretanto tal procedimento é errôneo, pois sob integração no infinito espacial não se pode garantir o anulamento do termo de divergência[31], especialmente nos casos em que esses elementos possuem o comportamento assintótico de *const.* $+ O(1/r)$[22]. Portanto, a ação aqui utilizada não é *invariante* sob tais transformações, apesar de garantida a invariância global conforme discutido acima.

Capítulo 3

Buraco Negro de Kerr

3.1 Propriedades da Solução de Kerr

A solução de Kerr descreve buracos negros em rotação, e é um sistema largamente conhecido e trabalhado na literatura. Kerr obteve originalmente a métrica trabalhando com coordenadas do tipo cartesianas $(\bar{t}, x, y, z)$[32],

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2mr^3}{r^4 + a^2 z^2}\left(d\bar{t} + \frac{r}{a^2 + r^2}(xdx + ydy) + \frac{a}{a^2 + r^2}(ydx - xdy) + \frac{z}{r}dz\right)^2, \tag{3.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{t} &= v - r, \\ x &= r\sin\theta\cos\phi + a\sin\theta\sin\phi, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi - a\sin\theta\cos\phi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Já quando escrita em termos de coordenadas “esféricas”(a coordenada r coincide com a coordenada radial usualmente conhecida apenas para grandes distâncias), na forma de Boyer-Lindquist, a métrica assume a seguinte forma:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta d\phi)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)d\phi - adt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \tag{3.3}$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 + a^2 - 2mr, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

A última forma é mais útil ou clara para que sejam obtidas as propriedades da solução de Kerr. Inicialmente vemos que ela depende de dois parâmetros, m e a, sendo que quando fazemos $a = 0$ recuperamos a solução de Schwarzschild (nas coordenadas apropriadas) com m sendo o mesmo parâmetro desta última, e assim m é também chamada de *massa geométrica*, ou a própria massa do buraco negro. Os coeficientes da métrica são independentes tanto de t quanto de ϕ, sendo assim trata-se de uma solução estacionária e axialmente simétrica (a solução é invariante sob rotações em torno do eixo z). Já o parâmetro a está relacionado com a velocidade angular do buraco negro, ou seja, sendo J o momento angular na direção z, então $a = J/m$ é o momento angular por unidade de massa do sistema. Além disso pode-se concluir também, analisando-se a solução de Kerr, que no infinito espacial temos $g_{ab} \to \eta_{ab}$, ou seja, é uma solução assintoticamente plana. Resumindo, a métrica de Kerr descreve um buraco negro estacionário, axialmente simétrico e assintoticamente plano, que gira com um momento angular específico a.

É importante definir algumas regiões que envolvem esse buraco negro, investigando o comportamento da métrica. Vemos que a componente g_{00} pode ser nula, o que define duas distâncias,

$$r^*_{\pm} = m \pm (m^2 - a^2\cos^2\theta)^{1/2}. \tag{3.5}$$

Já observando g_{11} vemos que existe uma singularidade, que define dois horizontes de eventos, que surgem quando

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0, \tag{3.6}$$

ou seja,

$$r_{\pm} = m \pm (r^2 - a^2)^{1/2}. \tag{3.7}$$

Resumindo vemos que a componente g_{00} é nula nos dois pontos $r^*_{\pm}$, positiva na região $r^*_- < r < r^*_+$ e negativa no resto do espaço; enquanto g_{11} é negativa na região $r_- < r < r_+$, tende ao infinito em $r = r_+$ e $r = r_-$ e positiva no resto do espaço. A região $r_+ < r < r^*_+$ é denominada ergosfera, sendo bastante importante no conhecido *processo de extração de energia de Penrose.*

3.2 Construção dos campos de tetradas

Antes de apresentarmos o campo de tetradas utilizado, discutiremos brevemente a construção dos campos como referenciais. Inicialmente, seja o espaço-tempo de Minkowski, que possui coordenadas x^μ; ao mesmo tempo esse espaço-tempo é preenchido com coordenadas q^a (esse último sistema de coordenadas determina um referencial global). Se esses dois sistemas de coordenadas descrevem o espaço-tempo de Minkowski, a matriz de transformação que relaciona esses sistemas define o campo de tetradas para o espaço-tempo plano,

$$e^a{}_\mu = \frac{\partial q^a}{\partial x^\mu}, \tag{3.8}$$

assim, a transformação $dq^a = e^a{}_\mu(x)dx^\mu$ sendo integrada em todo o espaço, temos a chamada *transformação holonômica* entre q^a e x^μ. Seja $E^a{}_\mu$ o conjunto de tetradas obtido para o espaço plano; a condição[14]

$$E_{(i)j}(t, x, y, z) = E_{(j)i}(t, x, y, z), \tag{3.9}$$

ou seja, a simetria no setor espacial $E_{(i)j}$, garante que q^a não está em rotação em relação a x^μ. Por sua vez, um boost entre q^a e x^μ leva a $E^{(0)}{}_k \neq 0$; em coordenadas cartesianas temos

$$E^a{}_\mu(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c^2}\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

onde γ é o fator de Lorentz,$\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Assim para que q^a e x^μ não sejam simplesmente relacionados por um boost, devemos ter a seguinte condição (equivalente a $E^{(0)}{}_k = 0$):

$$E_{(i)}{}^0 = 0, \tag{3.11}$$

que é conhecida como condição de gauge temporal de Schwinger, ou em outras palavras garante que há uma única escala de tempo para os dois sistemas de coordenadas. Ambas as condições acima descritas fixam seis graus de liberdade para as tetradas, que conforme já mencionado fixam o sistema de referência adaptado a um observador.

3.3 Aplicação para a métrica de Kerr

Iniciamos a discussão da métrica de Kerr reescrevendo-a,

$$ds^2 = -\frac{\psi^2}{\rho^2}dt^2 - \frac{2\chi\sin^2\theta}{\rho^2}d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2\sin^2\theta}{\rho^2}d\phi^2, \tag{3.12}$$

onde

$$\chi = 2amr, \tag{3.13}$$

$$\Sigma^2 = (r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta, \tag{3.14}$$

$$\psi^2 = \Delta - a^2\sin^2\theta. \tag{3.15}$$

Impondo as condições de simetria no setor espacial e de gauge temporal, um possível conjunto de tetradas construído para o sistema é[14]:

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho}\sqrt{\psi^2 + \frac{\chi^2}{\Sigma^2}\sin^2\theta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\chi}{\Sigma\rho}\sin\theta\,\sin\phi & \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\sin\theta\,\cos\phi & \rho\,\cos\theta\,\cos\phi & -\frac{\Sigma}{\rho}\sin\theta\,\sin\phi \\ -\frac{\chi}{\Sigma\rho}\sin\theta\,\cos\phi & \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\sin\theta\,\sin\phi & \rho\,\cos\theta\,\sin\phi & \frac{\Sigma}{\rho}\sin\theta\,\cos\phi \\ 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\cos\theta & -\rho\,\sin\theta & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.16}$$

Uma característica importante da tetrada acima é que ela possui o comportamento assintótico discutido na seção 2.5; assim podemos concluir, de acordo com a própria discussão daquela seção, que (3.16) acima está adaptada a observadores estacionários localizados no infinito. Assim a tetrada acima pode ser utilizada para obter-se o momento e a energia para o buraco negro de Kerr[14]. Mas existem infinitas tetradas possíveis capazes de gerar o mesmo elemento de linha para uma dada configuração de campo gravitacional; no caso aqui tratado, é possível escrever um outro conjunto de tetradas que possui uma forma muito mais simples, que possui a forma genérica[30]

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ B & 0 & 0 & C \end{pmatrix} , \tag{3.17}$$

e que também obedece ao gauge temporal de Schwinger. A tetrada também representa observadores estáticos no infinito; para $r \to \infty$ temos:

$$\begin{aligned} e_{(1)\mu} &= (0,1,0,0) \cong \hat{e}_{(r)}, \\ e_{(2)\mu} &= (0,0,r,0) \cong \hat{e}_{(\theta)}, \\ e_{(3)\mu} &= (0,0,0,r\sin\theta) \cong \hat{e}_{(\phi)}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

que formam uma base (sendo $\hat{e}_{(r)}$, $\hat{e}_{(\theta)}$ e $\hat{e}_{(\phi)}$ os vetores unitários) para a classe de observadores adaptados no infinito espacial.

Utilizando a relação $e^a{}_\mu e_{a\nu} = g_{\mu\nu}$ é possível obter as expressões de A, B e C,

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{\chi^2 \sin^2\theta + \psi^2\Sigma^2}{\rho^2\Sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
B &= -\frac{\chi \sin\theta}{\rho\Sigma}, \\
C &= \frac{\Sigma \sin\theta}{\rho}.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

De posse disso, agora podemos calcular a energia propriamente dita. Para isso temos que calcular as componentes do tensor de torção $T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu$, utilizando para isso a tetrada (3.17) acima. Observando a expressão para o momento-energia gravitacional dada em (2.46), para $a = (0)$, e com a expressão para o momento canonicamente conjugado (2.35), vemos que precisaremos de uma componente específica do tensor $\Sigma^{a\mu\nu}$, no caso $\Sigma^{(0)01}$; de acordo com as características particulares da métrica e da tetrada, essa componente é escrita como

$$\Sigma^{(0)01} = e^{(0)}{}_0 \Sigma^{001} = \frac{1}{2} e^{(0)}{}_0 (T^{001} - g^{00} T^1). \tag{3.20}$$

Relacionaremos aqui as componentes não-nulas do tensor $T^{\lambda\mu\nu}$:

$$T^{001} = \frac{\rho\Delta\Sigma^3}{(\chi^2 \sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)^{3/2}} \partial_1 A,$$

$$T^{002} = \frac{\rho\Sigma^3}{(\chi^2 \sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)^{3/2}} \partial_2 A,$$

$$T^{013} = \frac{-\rho\Sigma\chi\Delta}{(\chi^2 \sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)^{3/2}} \partial_1 A,$$

$$T^{023} = \frac{-\rho\Sigma\chi}{(\chi^2 \sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)^{3/2}} \partial_2 A,$$

$$T^{112} = \frac{-\Delta^{3/2}}{\rho^5}\partial_2\left(\frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\right),$$

$$T^{212} = \frac{\Delta}{\rho^5}\partial_1\rho,$$

$$T^{301} = \frac{\chi\rho\Sigma\Delta}{(\chi^2\sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)^{3/2}}\partial_1 A + \frac{\rho\Delta(\Sigma^2\partial_1 B + \chi\partial_1 C)}{\Sigma\sin\theta(\chi^2\sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)},$$

$$T^{302} = \frac{\chi\rho\Sigma}{(\chi^2\sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)^{3/2}}\partial_2 A + \frac{\rho(\Sigma^2\partial_2 B + \chi\partial_2 C)}{\Sigma\sin\theta(\chi^2\sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)},$$

$$T^{313} = \frac{-\rho\chi^2\Delta\partial_1 A}{\Sigma(\chi^2\sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)^{3/2}} + \frac{\rho\Delta(\psi^2\partial_1 C - \chi\sin^2\theta\partial_1 B)}{\Sigma\sin^3\theta(\chi^2\sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)},$$

$$T^{323} = \frac{-\rho\chi^2\partial_2 A}{\Sigma(\chi^2\sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)^{3/2}} + \frac{\rho(\psi^2\partial_2 C - \chi\sin^2\theta\partial_2 B)}{\Sigma\sin^3\theta(\chi^2\sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)}.$$

Precisamos também de T^1, que é obtido de $T^1 = T^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{1}$, e após calculamos $T^{001} - g^{00}T^1$, cujo valor é

$$T^{001} - g^{00}T^1 = \frac{-\Sigma^2\Delta\partial_1\rho}{\rho(\chi^2\sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)} - \frac{\rho\Sigma\Delta\partial_1 C}{\sin\theta\rho(\chi^2\sin^2\theta + \Sigma^2\psi^2)}. \tag{3.21}$$

Após isso, e com algumas simplificações aqui omitidas, obtemos

$$\Pi^{(0)1}(e) = -4ke\Sigma^{(0)01} = \frac{1}{8\pi}\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho}(\partial_1\Sigma)\sin\theta. \tag{3.22}$$

Já o cálculo de $\Pi^{(0)1}(E)$ pode ser feito anulando-se os parâmetros físicos (no caso, m e a) na tetrada, o que nos dá

$$E^a{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\sin\theta \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

ou apenas fazendo $m = a = 0$ na expressão obtida para $\Pi^{(0)1}(e)$, e assim,

$$\Pi^{(0)1}(E) = \frac{1}{4\pi} r \sin\theta. \tag{3.24}$$

Agora substituímos na expressão para o momento-energia (2.47), para uma superfície de raio r constante[30],

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= -\oint_S dS_k \, [\Pi^{(0)k}(e) - \Pi^{(0)k}(E)] \\ &= \int_S d\theta d\phi \, \frac{1}{4\pi} \sin\theta \Big(-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho} (\partial_r \Sigma) + r \Big) \, . \end{aligned} \tag{3.25}$$

De posse dessa expressão, dois limites são interessantes de ser calculados, no caso a energia total (ou seja, fazendo-se $r \to \infty$) e a energia contida no horizonte de eventos externo $r = r^+$.

Inicialmente fazendo $r \to \infty$, temos

$$P^{(0)} \cong \int_{r\to\infty} d\theta d\phi \, \frac{1}{4\pi} \sin\theta \Big(-r(1 - \frac{m}{r}) + r \Big) = m \, , \tag{3.26}$$

que é o resultado obtido na literatura.

Quanto ao caso da integração sobre $r = r^+$, observando a expressão (3.20) vemos que o fator Δ aparece nos dois termos do numerador; entretanto a região $r = r^+$ é definida justamente por $\Delta = 0$, e portanto temos $\Pi^{(0)1}(e) = 0$, restando apenas o termo $\Pi^{(0)1}(E)$,

$$\begin{aligned} P^a = -\oint_{S\to\infty} dS_k [\Pi^{ak}(e) - \Pi^{ak}(E)] &= \oint_{S\to\infty} dS_k \Pi^{ak}(E) \\ &= \int_{r=r^+} d\theta d\phi \frac{1}{4\pi} r \sin\theta \, = r^+ \\ &= m + \sqrt{m^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Assim, este resultado representa metade do valor esperado para a massa irredutível do buraco negro de Kerr, e portanto a classe de observadores aos quais (3.17) está adaptado não é adequada para a análise da massa irredutível. Com a tetrada (3.16), adaptada a observadores no infinito, obtém-se um valor apropriado para a energia contida no horizonte de eventos[33]. Enfatizamos que a expressão (2.48) é útil para se obter *valores totais* do momento-energia gravitacional, a partir de *qualquer* configuração de campos de tetradas para o sistema.

Capítulo 4

Métrica de Bondi

4.1 Propriedades da métrica de Bondi

A métrica de Bondi[34] foi obtida inicialmente como motivação no estudo de ondas gravitacionais, sendo que ela descreve a radiação gravitacional de um sistema sem rotação, isolado, com simetria axial e em um espaço assintoticamente plano. Nesse caso é importante o comportamento do campo a grandes distâncias, e assim deve escolhido um sistema de coordenadas que permita expansões para tais distâncias, e que além disso evitem termos do tipo $\log r$, pois estes não permitem expansões em potências negativas de r. Em sua análise, Bondi *et al.* assumiram que o espaço-tempo quadridimensional possui simetria axial (e assim $\partial g_{\mu\nu}/\partial\phi = 0$) e simetria por reflexão; de acordo com [35], a hipótese de tais simetrias não gera perda essencial de generalidade no desenvolvimento. Suponha que uma fonte de luz esteja em um ponto O, sobre o eixo de simetria, e que em volta de O se possa colocar uma pequena esfera, sobre a qual se possa definir o ângulo azimutal ϕ, o ângulo θ e uma coordenada temporal u. Uma geodésica nula é definida como u, θ e ϕ constantes, e apenas a coordenada r varia ao longo desse raio de luz; desse modo a métrica deve ser construída com $g_{11} = 0$. Com outro argumento, Bondi mostra que também deve-se ter $g_{12} = 0$. Já os elementos g_{22} e g_{33} são relacionados por[34]

$$r^4 \sin^2\theta = g_{22} g_{33}, \tag{4.1}$$

o que garante que o elemento de superfície para $u = cte.$ e $r = cte.$ vale de fato $r^2 \sin\theta d\theta d\phi$. Além disso as seguintes condições são obtidas na análise de Bondi:

$$\Gamma^0_{11} = \Gamma^2_{11} = g_{03} = g_{01} = g_{02} = 0. \tag{4.2}$$

Com as considerações acima, o elemento de linha da métrica de Bondi é escrito como

$$ds^2 = -\left(\frac{V}{r}e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma}\right) du^2 - 2e^{2\beta} du dr - 2U r^2 e^{2\gamma} du d\theta + r^2(e^{2\gamma} d\theta^2 + e^{-2\gamma}\sin^2\theta d\phi^2); \tag{4.3}$$

a métrica portanto possui a forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{V}{r}e^{2\beta} + U^2 r^2 e^{2\gamma} & -e^{2\beta} & -U r^2 e^{2\gamma} & 0 \\ -e^{2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ -U r^2 e^{2\gamma} & 0 & r^2 e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 e^{-2\gamma}\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

A métrica inversa, que será utilizada posteriormente, é escrita como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2\beta} & 0 & 0 \\ -e^{-2\beta} & \frac{V}{r}e^{-2\beta} & -U e^{-2\beta} & 0 \\ 0 & -U e^{-2\beta} & \frac{e^{-2\gamma}}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{2\gamma}}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

As equações de Einstein obtidas são:

$$\left[\partial_1\beta - \frac{1}{2}r(\partial_1\gamma)^2\right] r^{-1} = 0, \tag{4.6}$$

$$\partial_1[r^4 e^{2(\gamma-\beta)}\partial_1 U] - 2r^2[\partial_1\partial_2\beta - \partial_1\partial_2\gamma + 2\partial_1\gamma\partial_2\gamma - 2\partial_2 r^{-1} - 2\partial_1\gamma\cot\theta] = 0, \tag{4.7}$$

$$2\partial_1 V + \frac{1}{2}r^4 e^{2(\gamma-\beta)}(\partial_1 U)^2 - r^2\partial_1\partial_2 U - 4r\partial_2 U - r^2\partial_1 U \cot\theta$$
$$+2e^{2(\beta-\gamma)}[-1 - (3\partial_2\gamma - 2\partial_2\beta)\cot\theta - \partial_2\partial_1\gamma + 2\partial_2\gamma(\partial_2\gamma_{\partial 2}\beta)] = 0, \qquad (4.8)$$

$$2r\partial_0\partial_1(r\gamma) + (1 - r\partial_1\gamma)\partial_1 V - (r\partial_1\partial_1\gamma + \partial_1\gamma)V - r(1 - r\partial_1\gamma)\partial_2 U$$
$$-r^2(\cot\theta - \partial_2\gamma)\partial_1 U + r(2r\partial_1\partial_2\gamma + 2\partial_2\gamma + r\partial_1\gamma\cot\theta)U$$
$$+e^{2(\beta-\gamma)}[-1 - (3\partial_2\gamma - 2\partial_2\beta)\cot\theta - \partial_2\partial_2\gamma + 2\partial_2\gamma(\partial_2\gamma - \partial_2\beta)] = 0. \qquad (4.9)$$

Uma primeira observação que pode ser feita é que apenas a quarta das equações envolve a diferenciação com relação ao tempo retardado $u = t - r$; sem entrar nos detalhes das funções de integração, se tivermos γ para um dado valor de u, a primeira das equações permite que se obtenha β, e com isso a segunda determina U e com isso a terceira delas determina V. Da quarta delas pode-se obter a derivada temporal de γ, e portanto o mesmo γ pode ser obtido no no próximo instante u, e reinicia-se o processo. As constantes de integração são eliminadas analisando-se o sistema de coordenadas e as condições do problema. Assim, pode-se concluir que, a partir da estrutura das equações de Einstein para o sistema, conhecendo-se a situação do mesmo para um dado instante de tempo u, ela é conhecida para os instantes posteriores, e caso aconteça algo de diferente com esse sistema, essa informação deve estar contida na derivada temporal de γ, ou a chamada *função news*[34], que será trabalhada aqui como $\partial c/\partial u$.

Será útil conhecer o comportamento assintótico das funções envolvidas na métrica:

$$\beta = -\frac{c^2}{4r^2} + \cdots,$$

$$\gamma = \frac{c}{r} + \cdots,$$

$$\frac{V}{r} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial d}{\partial \theta} + d\cos\theta - \left(\frac{\partial c}{\partial \theta}\right)^2 - 4c\left(\frac{\partial c}{\partial \theta}\right)\cot\theta - \frac{1}{2}c^2(1+8\cot^2\theta)\right] + \cdots,$$

$$U = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial c}{\partial \theta} + 2c\cot\theta\right) + \frac{1}{r^3}\left(2d + 3c\frac{\partial c}{\partial \theta}\cot\theta + 4c^2\cot\theta\right) + \cdots, \tag{4.10}$$

sendo $M(u,\theta)$ o aspecto de massa, e $d(u,\theta)$ o aspecto de dipolo do sistema.

Para o cálculo da energia total e da perda de energia total no espaço-tempo de Bondi podemos utilizar uma expressão simples para os campos de tetradas, e aplicar a expressão regularizada (2.47) para $P^{(0)}$. A tetrada utilizada aqui é

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} \left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^\beta & \left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2} e^\beta & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2} e^\beta & 0 & 0 \\ -Ure^\gamma & 0 & re^\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\sin\theta e^{-\gamma} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

sendo os parâmetros V, U, γ e β funções de u, r e θ.

4.2 Resultados

As componentes não-nulas do tensor de torção $T^a{}_{\mu\nu}$, para o campo de tetradas definido anteriormente, são

$$T_{001} = \left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^\beta \left\{\partial_0\left[-\left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2} e^\beta\right] - \partial_1\left[-\left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^\beta\right]\right\} - Ure^\gamma\left\{\partial_1[Ure^\gamma]\right\},$$

$$T_{002} = \left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^\beta \partial_2\left[\left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^\beta\right] - Ure^\gamma\left[\partial_0(re^\gamma) + \partial_2(Ure^\gamma)\right],$$

$$T_{003} = \left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^\beta \partial_3\left[\left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^\beta\right] - Ure^\gamma\partial_3(Ure^\gamma),$$

$$T_{012} = \left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^{\beta}\partial_2 \left[\left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2} e^{\beta}\right] - Ure^{\gamma}\partial_1(re^{\gamma}),$$

$$T_{013} = \left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^{\beta}\partial_3 \left[\left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2} e^{\beta}\right],$$

$$T_{023} = Ure^{\gamma}\partial_3(re^{\gamma}),$$

$$T_{101} = \left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2} e^{\beta}\partial_1 \left[\left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^{\beta}\right],$$

$$T_{102} = \left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2} e^{\beta}\partial_2 \left[\left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^{\beta}\right],$$

$$T_{103} = \left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2} e^{\beta}\partial_3 \left[\left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} e^{\beta}\right],$$

$$T_{201} = re^{\gamma}\partial_1(Ure^{\gamma}),$$

$$T_{202} = re^{\gamma}[\partial_0(re^{\gamma}) + \partial_2(Ure^{\gamma})],$$

$$T_{203} = re^{\gamma}\partial_3(Ure^{\gamma}),$$

$$T_{212} = re^{\gamma}\partial_1(re^{\gamma}),$$

$$T_{223} = -re^{\gamma}\partial_3(re^{\gamma}),$$

$$T_{303} = r\sin\theta e^{-\gamma}\partial_0(r\sin\theta e^{-\gamma}),$$

$$T_{313} = r\sin\theta e^{-\gamma}\partial_1(r\sin\theta e^{-\gamma}),$$

$$T_{323} = r\sin\theta e^{-\gamma}\partial_2(r\sin\theta e^{-\gamma}).$$

O procedimento é análogo ao feito para para a métrica de Kerr; necessitamos calcular $\Sigma^{(0)01}$, que em termos da métrica e das torções, tem como componentes não-nulas:

$$\Sigma^{(0)01} = \frac{e^{(0)}{}_0}{2}(T^{001} + g^{01}T^0) + \frac{e^{(0)}{}_1}{2}(T^{101} + g^{11}T^0 - g^{01}T^1), \tag{4.12}$$

$$T^{001} = g^{01}g^{01}g^{01}T_{110} + g^{01}g^{01}g^{12}T_{112}, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} T^{101} &= g^{01}g^{01}g^{01}T_{010} + g^{01}g^{01}g^{12}T_{012} + g^{01}g^{01}g^{11}T_{110} + g^{01}g^{11}g^{12}T_{112} \\ &+ g^{01}g^{01}g^{12}T_{210} + g^{01}g^{12}g^{12}T_{212}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} T^{0} &= g^{01}g^{01}T_{101} + g^{01}g^{01}T_{011} + g^{01}g^{11}T_{111} + g^{01}g^{12}T_{211} \\ &+ g^{01}g^{12}T_{121} + g^{01}g^{22}T_{221} + g^{01}g^{33}T_{331}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
T^1 &= g^{01}g^{11}T_{101} + g^{01}g^{12}T_{102} + g^{01}g^{01}T_{010} + g^{01}g^{12}T_{012} + g^{01}g^{11}T_{110} \\
&+ g^{11}g^{12}T_{112} + g^{01}g^{12}T_{210} + g^{12}g^{12}T_{212} + g^{01}g^{12}T_{120} + g^{11}g^{12}T_{112} \\
&+ g^{01}g^{22}T_{220} + g^{11}g^{22}T_{221} + g^{01}g^{33}T_{330} + g^{11}g^{33}T_{331} + g^{12}g^{33}T_{332}. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Assim temos, após as simplificações possíveis,

$$\Sigma^{(0)01} = \frac{e^{(0)}{}_0}{2}(g^{01}g^{01}g^{22}T_{221} + g^{01}g^{01}g^{33}T_{331}) - \frac{e^{(0)}{}_1}{2}(g^{01}g^{01}g^{22}T_{220} + g^{01}g^{01}g^{33}T_{330} + g^{01}g^{12}g^{33}T_{332}). \quad (4.17)$$

E assim, substituindo a forma explícita da métrica e das componentes da torção encontramos

$$\Sigma^{(0)01} = \left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2} \frac{e^{-3\beta}}{2} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial(U\sin\theta)}{\partial\theta} - \left(\frac{V}{r}\right)^{1/2} \frac{e^{-3\beta}}{r}. \quad (4.18)$$

Relembrando a expressão para a energia gravitacional:

$$\begin{aligned}
P^{(0)} &= E = -\int_{V\to\infty} d^3x\partial_j\Pi^{(0)j} \\
&= -\oint_{S\to\infty} dS_k[\Pi^{(0)k}(e) - \Pi^{(0)k}(E)] \\
&= \int_{r\to\infty} d\theta d\phi 4ke \left[\Sigma^{(0)01}(e) - \Sigma^{(0)01}(E)\right]
\end{aligned}$$

(4.19)

Vamos analisar as integrais que surgem de $\Sigma^{(0)01}(e)$ e $\Sigma^{(0)01}(E)$ separadamente. Para cada um dos termos temos duas integrais, de acordo com (4.18). Para $\Sigma^{(0)01}(e)$, a primeira delas é, com $k = 1/16\pi$ e $e = \sqrt{-g} = e^{2\beta}r^2\sin\theta$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty} \frac{1}{8\pi}\int d\theta d\phi e^{2\beta}r^2\sin\theta \left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2} e^{-3\beta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(U\sin\theta)}{\partial\theta} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{4}\int_0^\pi d\theta r^2 e^{-\beta}\left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2}\frac{\partial(U\sin\theta)}{\partial\theta} \quad (4.20)
\end{aligned}$$

entretanto temos que, com os limites assintóticos apropriados,

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^\pi d\theta r^2 e^{-\beta}\left(\frac{V}{r}\right)^{-1/2}\frac{\partial(U\sin\theta)}{\partial\theta} = \lim_{r\to\infty}\int_0^\pi d\theta r^2\frac{\partial(U\sin\theta)}{\partial\theta}, \quad (4.21)$$

mas como a função $U(\theta)\sin\theta$ se anula em $\theta = 0, \pi$ [34]a integral acima se anula. Do mesmo modo o termo análogo referente à integração de $\Sigma^{(0)01}(E)$ não contribui para o resultado final.

Com relação à integração do segundo termo de $\Sigma^{(0)01}(e)$, convém inicialmente analisarmos seu comportamento assintótico,

$$\lim_{r\to\infty}\left[-\left(\frac{V}{r}\right)^{1/2}\frac{e^{-3\beta}}{r}\right] \cong -\left(1-\frac{M}{r}\right)\frac{1}{r} \cong -\frac{1}{r}+\frac{M}{r^2}, \tag{4.22}$$

e para o termo análogo em $\Sigma^{(0)01}(E)$ basta zerarmos o parâmetro M, obtendo nesse caso $-1/r$, que irá se cancelar com o termo igual em (4.22); reunindo todas essas considerações obtemos, na integração de $P^{(0)}$,

$$E = \frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\int_0^\pi d\theta e^{2\beta}r^2\sin\theta\frac{M}{r^2}, \tag{4.23}$$

onde novamente usando os limites assintóticos, temos como resultado final

$$E = \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\sin\theta M(u,\theta), \tag{4.24}$$

sendo essa a expressão exata para a energia de Bondi, em um dado instante u[34].

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho discutimos inicialmente a Relatividade Geral em termos gerais, apresentando as equações de Einstein e as dificuldades inerentes para se definir uma densidade de momento-energia gravitacional consistente com a teoria.

Em seguida discutimos o princípio da equivalência, e como este poderia afetar essa definição de momento-energia, se seria uma impossibilidade intrínseca à gravitação ou apenas uma dificuldade da formulação métrica da Relatividade. A conclusão é que o princípio da equivalência, em sua forma original ou em sua versão "infinitesimal"(o que concluímos ser uma extensão equivocada do princípio), não pode ser usado como argumento para excluir a possibilidade de se definir uma expressão para o momento-energia gravitacional.

Apresentamos o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral, que possui uma formulação geométrica diferente, e com a qual é possível se obter uma densidade de energia local, através de seu formalismo Hamiltoniano. Analisando o formalismo Lagrangeano e suas equações, vemos que a partir dele é possível se obter as equações de Einstein, mostrando a equivalência entre as teorias.

A expressão para o momento-energia do TEGR foi aqui estendida para o caso de um conjunto arbitrário de campos de tetradas que geram o tensor métrico, e para os quais não necessariamente temos condições de contorno assintóticas, e que desse modo não fornecem para o espaço-tempo plano energia gravitacional nula.

Essa extensão é possível através da inclusão de um termo de subtração do espaço-tempo de referência adequado, onde o campo de tetradas para esse espaço-tempo de referência é obtido anulando-se os parâmetros físicos do tensor métrico.

Em seguida estudamos a métrica de Kerr, que descreve um buraco negro em rotação. Foi construído um conjunto de campos de tetrada adequado, e com ele calculada a energia total do sistema e a energia contida no horizonte de eventos externo. A energia total obtida coincide com o resultado da literatura. Entretanto o resultado para a integração no horizonte de eventos difere da massa irredutível do buraco negro. Isso é explicado pelo fato de o referencial determinado pela tetrada utilizada não estar adaptado a observadores no infinito espacial.

Foi estudado também o espaço-tempo de Bondi, que descreve um sistema axialmente simétrico, isolado e assintoticamente plano que emite ondas gravitacionais. Foi apresentada a métrica, e construído um conjunto de campos de tetradas compatível. Com este encontramos o valor conhecido para a energia de Bondi, integrando a expressão da energia gravitacional em todo o espaço-tempo.

Assim os resultados obtidos aqui e em outros trabalhos permitem concluir que o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral proporciona uma análise adequada do momento-energia gravitacional e que a expressão regularizada obtida para o mesmo permite sua extensão para campos de tetrada arbitrários. Os resultados devem assim estimular pesquisas para outros sistemas físicos e em outros campos de estudo como a Cosmologia por exemplo.

Referências Bibliográficas

[1] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, *in Gravitation: An Introduction to Current Research*, edited by L. Witten (Wiley, New York, 1962).

[2] J. D. Brown and J. W. York, Jr., *Quasi-local energy in general relativity*, Proceedings of the Joint Summer Research Conference on Mathematical Aspects of Classical Field Theory, edited by M. J. Gotay, J. E. Marsden and V. Moncrief (American Mathematical Society, 1991); Phys. Rev. D **47**, 1407 (1993).

[3] J. W. Maluf, J. Math. Phys. **35** (1), 335-343 (1994).

[4] J. W. Maluf, J. Math. Phys. **36** (8), 4242-4247 (1995).

[5] J. W. Maluf and J. F. da Rocha Neto, Phys. Rev. D **64**, 084014 (2001).

[6] R. Weitzenböck, *Invarianten Theorie* (Nordhoff, Groningen, 1923).

[7] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1994).

[8] A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin **47**, 778(1915); Addendum-ibid. **47**, 799 (1915).

[9] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

[10] J. A. Schouten, *Ricci Calculus*, 2nd ed. (Springer-Verlag, London, 1954), p. 142.

[11] F. W. Hehl, in *Proceedings of the 6th School of Cosmology and Gravitation on Spin, torsion, Rotation an Supergravity*, Erice, 1979, edited by G. Bergmann and V. de Sabbata (Plenum, New York, 1980); F. W. Hehl, J. D. MacCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, Phys. Rep. **258**, 1 (1995).

[12] Y. N. Obukov and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **67**, 044016 (2003).

[13] M. Blagojevic and M. Vasilic, Phys. Rev. D **64**, 044010 (2001).

[14] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, T. M. L. Toríbio and K. H. Castello-Branco, Phys. Rev. D **65**, 124001 (2002).

[15] C. Møller, Conservatin Laws in the Tetrad Theory of Gravitation. *Proceedings of the conference on Theory of Gravitation*, Warszawa and Jablona 1962 (PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa and Gauthier-Villars, Paris, 1964).

[16] J. M. Nester, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 1755 (1989).

[17] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **56**, 4689 (1997).

[18] J. W. Maluf. and J. F. da Rocha-Neto, Phys. Rev. D **64**, 084014 (2001).

[19] J. Schwinger, Phys. Rev. **130**, 800 (1963).

[20] J. W. Maluf and F. F. Faria, Annalen Phys. **13**, 604 (2004).

[21] J. W. Maluf, F. F. Faria and K. H. Castello-Branco, Class. Quantum Grav. **20**, 4683 (2003).

[22] J. W. Maluf and J. F. da Rocha-Neto, Gen. Rel. Grav. **31**, 173 (1999).

[23] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (San Francisco, Freeman, 1973).

[24] W. Pauli, *Theory of Relativity* (Pergamon Press, Oxford, 1958) p.145.

[25] J. Norton, Stud. Hist. Phill. Sci. **16** (3), 203(1985).

[26] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1960).

[27] H. C. Ohanian, Am. J. Phys. **45** (10), 903 (1977).

[28] J. W. Maluf, Gravitation and Cosmology **11**, 284 (2005).

[29] F. H. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, *Two Lectures on Fermions and Gravity*, in *Geometry and Theoretical Physics*, edited by J. Debrus and A. C. Hirshfeld (Springer, Berlin Heidelberg, 1991).

[30] J. W. Maluf, M. V. O. Veiga and J. F. da Rocha-Neto, DOI 10.1007/s10714-006-0339-5, Gen. Relativ. Gravit., [gr-qc/0507122].

[31] Y. M. Cho, Phys. Rev. D **14**, 2521 (1976).

[32] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press, New York, 1992).

[33] J. W. Maluf, E. F. Martins and A. Kneip, J. Math. Phys. **37**, 6302 (1996).

[34] H. Bondi, M. G. J. van der Burg and A. W. K. Metzner, Proc. R. Soc. London A **269**, 21 (1962).

[35] R. K. Sachs, Proc. R. Soc. London A **270**, 103 (1962).