Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Tese De Doutorado Em Matemática

Subgrupos normais em grupos limites e aproximações homológicas para um grupo profinito

por

Jhoel Estebany Sandoval Gutierrez

Orientador: Prof. Dr. Pavel Zalesski

Brasília-DF
2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Subgrupos normais em grupos limites e aproximações homológicas para um grupo profinito

por

Jhoel Estebany Sandoval Gutierrez*

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 2017.

Comissão examinadora:

____

Prof.Dr. Pavel Zalesski - UNB (Orientador)

____

Profª.Drª. Dessislava Hristova Kochloukova - Unicamp

____

Profª.Drª. Aline Gomes da Silva - UNB

____

Prof.Dr. Ilir Snopche-Ufrj

* O autor foi bolsista CNPq durante a elaboração deste.

Agradecimentos

De uma forma muito especial a Deus que tem sido um ótimo pai e por me dar grandes oportunidades. Se eu cheguei até aqui foi pela sua ajuda.

A minha mãe, Hilda Gutierrez Rojas, e a meu pai, Elmer Sandoval Pelaez, pela educação, pelo forte incentivo e por todos os conselhos. À minha família, pela ajuda durante a graduação e o mestrado.

A meu orientador Pavel Zalesski, por sua enorme paciência em responder minhas inumeráveis perguntas, pela dedicação a este trabalho e pela experiência que pude adquirir com seus ensinamentos.

Ao Professor Thomas Weigel pela compreensão e ajuda nos resultados obtidos nesta tese.

A minha grande amiga Vanderlene Silva pelos cuidados que me deu.

Ao Leonardo Melo pela ajuda em situações externas ao Doutorado.

A Emerson Melo, Cleilton Aparecido, Alex Carrazedo pelas discussões e sugestões no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo financiamento.

Resumo

Motivados pelo estudo dos grupos pro-p limite, D.H. Kochloukova e P.A. Zalesski formularam em [25] uma pergunta concernente ao mínimo número de geradores $d(N)$ de um grupo normal N de índice primo p em um grupo limite não abeliano G, sendo mais exatos, perguntaram se é verdade que $d(N) > d(G)$. Neste trabalho mostramos que a pergunta análoga ao posto racional tem uma resposta afirmativa, sendo mais exatos, mostramos que o posto racional de N é maior que o posto racional de G. De este resultado conclui-se que a questão original de D.H. Kochloukova e P.A. Zalesski tem uma resposta afirmativa se a abelianização G^{ab} de G é livre de torsão e $d(G) = d(G^{\mathrm{ab}})$ ou se G é um tipo especial de um grupo com uma relação. Além disso, damos uma resposta afirmativa ao análogo do Teorema 1 em [4] para o caso do completamento profinito de um grupo limite não abeliano.

Palavras-chave: grupo limite, grupos pro-p limite, completamento profinito.

Abstract

Motivated by their study of pro-p limit groups, D.H. Kochloukova and P.A. Zalesski formulated in [25] a question concerning the minimum number of generators $d(N)$ of a normal subgroup N of prime index p in a non-abelian limit group G, being more exact, asked if it is true that $d(N) > d(G)$. In this work we show that the analogous question for the rational rank has an affirmative answer, being more exact, we show that the rational rank of N is greater than the rational rank of G. From this result one may conclude that the original question of D.H. Kochloukova and P.A. Zalesski has an affirmative answer if the abelianization G^{ab} of G is torsion free and $d(G) = d(G^{\mathrm{ab}})$, or if G is a special kind of one-relator group. In addition, we give an affirmative answer to the analogue of Theorem 1 in [4] for the case of the profinite complement of a non-abelian limit group.

Keywords: limit groups, pro-p limit groups, profinite complement.

Sumário

Introdução

Nos recentes anos grupos limites (ou ω-*grupos residualmente livres*) tem recebido muita atenção (ver [40], [3], [8], [11] [17], [18], [22], [28]). Um dos primeiros autores que estudo esta classe de grupos foi B. Baumslag com o tradicional nome de *grupos totalmente residualmente livres* (ver [2]).

Um grupo G finitamente gerado é um grupo limite se para cada subconjunto finito T de G existe um homomorfismo de G a um grupo livre F o qual é injetivo sobre T. Há vinte anos, O.G. Kharlampovich e A.M. Myasnikov provaram vários Teoremas de estrutura para esta classe de grupos, que são as principais ferramentas para trabalhar com esta classe (ver [19], [20]). Logo depois, Z. Sela publicou seu inovador trabalho em grupos limite (veja [34], [35] e as referências neles contidas) e também introduziu o nome de *grupo limite*. Mais recentemente, O.G. Kharlampovich e A.M. Myasnikov estabeleceram muitas propriedades de grupos limite em [21]. Exemplos de grupos limite incluem todos os grupos livres finitamente gerados, todos os grupos abelianos livres finitamente gerados e todos os grupos fundamentais de superfícies orientadas fechadas. Além disso, a classe de grupos limite está fechada em relação a subgrupos finitamente gerados e produtos livres. Esse fato pode ser usado para construir muitos exemplos. Exemplos mais sofisticados podem ser encontrados em alguns dos artigos citados acima.

Recentemente, D.H. Kochloukova e P.A. Zalesski introduziram e estudaram em [25] uma classe de grupos pro-p os quais podem ser considerados como o análogo da classe de grupos limite e chamaram esta classe de *grupos pro-p limite*. O estudo sobre esta classe de grupos foi continuado nos trabalhos de D.H. Kochloukova, P.A. Zalesski e I. Snopche (ver [26] e [40]). Motivados por um do seus resultados principais sobre grupos pro-p limite (ver Teorema 3.3 em [26]), D.H. Kochloukova e P.A. Zalesski propuseram a seguinte pergunta.

Pergunta A. *Seja G um grupo limite não abeliano e U um subgrupo normal de G de índice primo p. Será que isso implica que $d(U) > d(G)$?*

Aqui $d(G)$ denota o mínimo número de geradores de um grupo finitamente gerado. Para um grupo pro-p $\tilde{G}$ o número mínimo (topológico) de geradores $d(\tilde{G})$ esta relacionado com o grupo de cohomologia $H^1(\tilde{G}, \mathbb{F}_p)$, onde $\mathbb{F}_p$ denota o corpo finito com p elementos, i.e., $d(\tilde{G}) = \dim_{\mathbb{F}_p}(H^1(\tilde{G}, \mathbb{F}_p))$ (ver [36, §I.4.2, Cor. de Prop. 25]). Para um grupo abstrato G tal relação não é valida. Além disso, existem dois invariantes homológicos de um grupo finitamente gerado abstrato G os quais podem ser vistos como aproximações homológicas de $d(G)$: O *posto racional* de G dado por

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \dim_{\mathbb{Q}}(G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(G, \mathbb{Q})), \tag{1}$$

onde $G^{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$ denota a *abelianização* de G, e

$$d(G^{\mathrm{ab}}) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(G^{\mathrm{ab}}) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(H_1(G, \mathbb{Z})). \tag{2}$$

Em particular, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) \leq d(G^{\mathrm{ab}}) \leq d(G)$.

Analogamente, para um grupo pro-p finitamente gerado G definimos o *posto p-racional* de G dado por

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p, \tag{3}$$

onde $G^{\mathrm{ab}} = G/\overline{[G, G]}$ denota a *abelianização* de G, e em particular, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) \leq d(G^{\mathrm{ab}}) = d(G)$.

Observemos agora que, a maioria dos métodos tradicionalmente utilizados para demonstrar resultados sobre grupos discretos não podem ser utilizados nos casos profinito e pro-p. De fato, um elemento de um grupo profinito não pode ser expresso como uma palavra finita nos geradores, isto elimina a possibilidade de utilizar as técnicas combinatórias no sentido original. Além disso, quando existem versões profinitas ou pro-p dos métodos tradicionais eles não possuem força total.

É conhecido o seguinte resultado sobre grupos limites

Teorema (Teorema 1 em [4]). Seja G um grupo limite não abeliano e H um subgrupo normal de G finitamente gerado, então H tem índice finito em G.

Desta forma, motivados pelo Teorema anterior surge a seguinte pergunta.

Pergunta B. *Seja $\widehat{G}$ o completamento profinito de um grupo limite não abeliano e H um subgrupo normal de $\widehat{G}$ finitamente gerado. Será que isso implica que H tem índice finito em G?*

Com o propósito de responder a *Perguntas A e B*, nós distribuímos a tese da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentaremos e revisaremos fundamentos da teoria de Bass-Serre sobre grupos abstratos, além disso apresentaremos métodos homológicas e cohomologícos, (por exemplo sequências de Mayer-Vietoris) que serão usados no transcorrer da tese. Similarmente no Capítulo 2, serão apresentados a Teoria de Bass-Serre sobre grupos profinitos e pro-p, assim como métodos homológicos e cohomologícos (por exemplo, característica de Euler de um grupo profinito, deficiência de um grupo profinito e sequências de Mayer-Vietoris) que serão de muita utilidade na tese.

No Capítulo 3, apresentaremos os grupos limites e ressaltaremos os Teoremas e Propriedades sobre esta classe de grupos que serão usadas nesta tese. Além disso, serão apresentados os grupos pro-$\mathcal{C}$ limite, onde $\mathcal{C}$ é uma classe de grupos, cuja definição foi introduzida em 2011 por T. Zapata na sua tese de Doutorado (ver [49]). Nesta tese serão usados os resultados quando $\mathcal{C}$ é classe de grupos finitos e p-finitos, ou seja, resultados sobre grupos pro-p limite e profinito limite.

No Capítulo 4, abordaremos a *Pergunta A*. Em [5], M. Bridson e D. Kochloukova calcularam, para um grupo limite G, o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} \dim_{\mathbb{Q}} H_1(U_n, \mathbb{Q})/[G : U_n] = -\chi(G) \geq 0,$$

onde $\{U_n\}_{n\geq 0}$ é uma cadeia exaustiva de subgrupos normais de índice finito em G, o qual mostra um crescimento assintótico de $H_1(U_n, \mathbb{Q})$. É assim que obtemos o seguinte Teorema, o qual mostra um crescimento absoluto.

Teorema A. Seja G um grupo limite não abeliano e U um subgrupo normal de G de índice primo p. Então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$.

Do Teorema A concluímos a seguinte resposta parcial à *Pergunta A*.

Corolário B. Seja G um grupo limite não abeliano tal que G^{ab} é um grupo livre de torsão e $d(G) = d(G^{\mathrm{ab}})$. Se U é um subgrupo normal de G de índice primo p, então $d(U) > d(G)$.

Existem grupos limite G para quais $d(G^{\mathrm{ab}}) \neq d(G)$ (ver Remark 4.3.13), e G^{ab} não sendo livre de torsão (ver Remark 3.1.1). Então o Corolário B dá só uma resposta parcial à *Pergunta A*.

Já que cada subgrupo aberto de um grupo pro-p é subnormal, a resposta afirmativa ao análogo da *Pergunta A* para grupos pro-p limites teria muitas consequências importantes.

Obviamente, subgrupos de índice finito num grupo limite discreto não necessariamente é subnormal. Portanto não podemos esperar que uma solução positiva da *Pergunta A* tenha um impacto similar ao do caso pro-p. No entanto o Teorema *A* tem também a seguinte consequência.

Corolário C. Seja G um grupo limite não abeliano, e N um subgrupo normal de G tal que G/N é infinito e nilpotente. Então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(N) = \infty$. Em particular, se $\alpha\colon G \to \mathbb{Z}$, é um homomorfismo não trivial então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\ker(\alpha)) = \infty$.

Modificando a demonstração do Teorema *A* obtemos uma outra resposta afirmativa à *Pergunta A* para grupos limite de uma relação.

Dizemos que G é um grupo **de um relator ciclicamente pinchado** , se $G \cong G_1 \star_C G_2$ com G_1 e G_2 grupos livres, C um subgrupo cíclico infinito gerado por uma palavra ciclicamente reduzida $w \in G_1$ e C um subgrupo cíclico maximal em G_1 ou G_2 (Vide [12]). Dizemos que G é um grupo **de um relator conjugado pinchado um relator**, se $G \cong \mathrm{HNN}_{\phi}(G_1, C, t)$-extensão com G_1 um grupo livre, C um subgrupo cíclico gerado por uma palavra ciclicamente reduzida $w \in G_1$ e C ou $\phi(C)$ um subgrupo cíclico maximal em G_1 (Vide [12]).

Teorema D. Seja G um grupo limite não abeliano de um relator ciclicamente pinchado ou conjugado pinchado, e U um subgrupo normal de G de índice primo p. Então $d(U) > d(G)$.

Ao finalizar este Capítulo deixamos claro que a *Pergunta A* até agora só foi respondida parcialmente e os resultados de este capítulo foram publicados em [43].

Finalmente no capítulo 5, abordaremos a *Pergunta B*. Assim, usando os trabalhos de M. Shusterman (ver [38] e [39]) temos que a resposta à *Pergunta B* é afirmativa, demonstrando primeiro o seguinte Proposição.

Proposição E. Seja G um grupo profinito livre de torsão e N um subgrupo fechado normal de G. Dado p um número primo e supor que existe $\{V_i\}_{i\geq 1}$ uma sequência de subgrupos normais abertos de G tal que $V_{i+1} \leq V_i$ para todo $i \geq 1$ e $\bigcap_{i\geq 1} V_i = 1$, tal que satisfaz as seguintes condições

i) Existe $k_1 > 0$, tal que $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(V_i N, \mathbb{F}_p) \leq k_1 [G : NV_i]$, para todo $i \geq 1$.

ii) Existe $k_2 > 0$, tal que $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(N \cap V_i, \mathbb{F}_p) \leq k_2 [N : N \cap V_i]$, para todo $i \geq 1$.

Se $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(V_i, \mathbb{F}_p)}{[G : V_i]}$ existe e é positivo, então $|G : N| < \infty$.

E assim, usando a Proposição E obtemos a resposta afirmativa à *Pergunta B* no seguinte Teorema.

Teorema F. Seja $\widehat{G}$ o completamento profinito de um grupo limite não abeliano G de altura $n \geq 0$, e considere N um subgrupo fechado normal finitamente gerado em $\widehat{G}$. Então $[\widehat{G} : N] < \infty$.

Por último neste capítulo, usaremos a ideia da prova do Teorema A para demonstrar o seu análogo, para o caso pro-p limite e seu posto p-racional.

Teorema G. Seja G um grupo pro-p limite não abeliano, e seja U um subgrupo normal aberto de G de índice primo p. Então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$.

Capítulo 1

Preliminares sobre Grupos abstratos

1.1 Teoria de Bass-Serre

1.1.1 Construções livres

Definição 1.1.1 (Posto gradiente de um grupo abstrato)**.** Seja G um grupo finitamente gerado, define-se o **posto gradiente** $\mathrm{RG}(G)$ de G da seguinte forma

$$\mathrm{RG}(G) = \inf_{|G:U|} \frac{d(U) - 1}{[G : U]}$$

Teorema 1.1.2 (Teorema de Nielsen-Schreier, Teorema 5 em [37])**.** *Cada subgrupo de um grupo livre é livre. Além disso, se F é um grupo livre de posto $d(G) = n$ e U um subgrupo de índice finito m em F, então, o posto $d(U)$ de U é finito e $d(U) = (d(G) - 1)m + 1$*

Teorema 1.1.3 (Teorema 6.3 em [7])**.**

1) Seja $G = G_1 *_A G_2$ um produto livre com subgrupo amalgamado A,temos que G é finitamente gerado se, e somente se, G_1 e G_2 são finitamente gerados.

2) Além disso, seja $G = HNN(G_1, A, t)$ uma HNN-extensão com subgrupo associado A, temos que G é finitamente gerado se, e somente se, G_1 é finitamente gerados.

1.1.2 Grafo de Grupos

Consideramos sendo X um grafo finito conexo diferente de um único vértice. Denotaremos $d_0(e)$ e $d_1(e)$ o vértice inicial e final da aresta $e \in E(X)$. Um **grafo de grupos** (Δ, X) consiste de uma coleção de grupos $\{G(m) \,|\, m \in X\}$ e uma coleção de homomorfismos $\{\partial_{j,e} : G(e) \to G(d_j(e)) \,|\, e \in E(X),\ j \in \{0, 1\}\}$. Dizemos que $G(v)$, $v \in V(X)$ (resp. $G(e)$, $e \in E(X)$) são os grupos de vértices (resp. grupos de arestas).

Seja T uma subárvore maximal de X. Uma T**-especialização** (β, β_1) de (Δ, X) para um grupo K consiste de duas aplicações $\beta : \bigcup_{m \in X} G(m) \to K$ e $\beta_1 : X \to K$ satisfazendo:

(1) $\beta_{|G(m)} : G(m) \to K$ é um homomorfismo, $\forall m \in V(X)$;

(2) $\beta_1(m) = 1$, $\forall m \in T$;

(3) $\beta_1(e)^{-1}\beta_{|G(d_0(e))}(\partial_{0,e}(g))\beta_1(e) = \beta_{|\mathcal{G}(d_1(e))}(\partial_{1,e}(g)), \forall e \in E(T), \forall g \in G(e)$.

O **grupo fundamental** de um grafo de grupos (Δ, X) com respeito a uma subárvore maximal T, consiste de um grupo $G = \pi_1(\Delta, X, T)$ e uma T-especialização $(\nu, \nu_1) : (\Delta, X) \to G$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para cada T-especialização $(\beta, \beta_1) : (\Delta, X) \to K$ existe um único homomorfismo $\omega : G \to K$ tal que $\omega\nu = \beta$ e $\omega\nu_1 = \beta_1$.

$$\begin{tikzcd}
G = \pi_1(\Delta, X, T) \arrow[dr, "\exists!\omega"] & \\
(\Delta, X) \arrow[u, "(\nu,\nu_1)"] \arrow[r, "(\beta,\beta_1)"'] & K
\end{tikzcd}$$

Verifica-se que o grupo dado pela apresentação

$$G = \langle L, Y \,|\, U, V, W\rangle,$$

onde $L = \{\text{ger}\, G(v) |\, v \in V(X)\}$, $Y = \{t_e| e \in E(X)\}$, $U = \{\text{rel}G(v) \,|\, v \in V(X)\}$, $V = \{t_e^{-1}\partial_{0,e}(g)t_e\partial_{1,e}(g)^{-1} \,|\, g \in G(e),\, e \in E(X)\}$, e $W = \{t_e \,|\, e \in E(T)\}$, satisfaz a propriedade universal (Cf. [10], Sec. I.4).

A seguir, vamos também supor que cada uma das aplicações $\partial_{j,e}$ bem como cada uma das aplicações canônicas $G(m) \to \pi_1(\Delta, X, T)$ sejam injetivas. Com efeito, sempre podemos substituir os grupos em (Δ, X) por suas imagens canônicas em $\pi_1(\Delta, X, T)$; esta operação não altera o grupo $\pi_1(\Delta, X, T)$ e ficamos assim na situação desejada.

Para a T-especialização $(\nu, \nu_1) : (\Delta, X) \to \pi_1(\Delta, X, T)$ definimos o **grafo universal do grupo fundamental de grafos de grupos** $S = S(\Delta, X, T)$ do seguinte modo:

$E(S) = \dot{\bigcup}_{e \in E(X)} G/\nu(G(e))$, $V(S) = \dot{\bigcup}_{v \in V(X)} G/\nu(G(v))$, $d_0(g\nu(G(m))) = g\nu(G(d_0(m))) = g\nu_1(m)\nu(G(d_1(m)))$, com $m \in E(X)$.

O grupo $G = \pi_1(\Delta, X, T)$ age naturalmente sobre $S = S(\Delta, X, T)$ por $g_1(g_2\nu(G(m))) = (g_1g_2)\nu(G(m))$, e de modo que $G\backslash S = X$; se $Gs = m \in X$, então o estabilizador de um elemento s de S é conjugado a $\nu(G(m))$; e, o grafo $S = S(\Delta, X, T)$ é uma *árvore* (Cf. [10], Sec. I.4).

Para conveniência do leitor, explicitamos a construção da árvore universal sobre a qual um dado produto livre amalgamado $G = A *_C B$ age. Os vértices de S são todas as classes laterais de G/A e G/B, e as arestas de S são todas as classes laterais de G/C; cada aresta gC conecta o vértice inicial gA ao vértice final gB.

$$gA\bullet \xrightarrow{\;gC\;} \bullet gB$$

Teorema 1.1.4 (Teorema 7 em [37]). *Seja $G = G_1 *_A G_2$ um produto amalgamado de dois grupos. Então, existe uma árvore S (é única, salvo isomorfismos) sobre a qual G age, e neste caso*

$$S = \; G_1\bullet \xrightarrow{\;A\;} \bullet G_2$$

Proposição 1.1.5. *(Proposição 22 em [37]) Seja Δ uma grafo de grupos sobre X, T uma árvore maximal de X. Então $\pi_1(\Delta, X, T)$ não depende da escolha de T.*

Podemos então denotar $\pi_1(\Delta, X, T)$ por $\pi_1(\Delta)$, o qual denominamos **grupo fundamental de Δ**.

1.1.3 Aplicações dos Teoremas Estruturais

Teorema 1.1.6 (Teorema 27 em [9]). *Seja Δ um grafo de grupos sobre X e H um subgrupo de $\pi_1(\Delta)$. Então, $H = \pi_1(\Omega)$, em que os grupos de vértices de Ω são $H \cap gG_vg^{-1}$, $\forall v \in V(X)$, onde g percorre um subconjunto dos representantes das classes bilaterais de H e G_v, da forma HkG_v, $k \in \pi_1(\Delta)$, e os grupos das arestas de Ω são $H \cap gG_eg^{-1}$, $\forall e \in E(X)$, onde g percorre um subconjunto dos representantes das classes bilaterais de H e G_e, da forma HkG_e, $k \in \pi_1(\Delta)$.*

Corolário 1.1.7 (Corolário 1 em [9]). *Seja H um subgrupo de um grupo fundamental de um grafo de grupos tal que H intercepta cada conjugado de um grupo de vértices no grupo trivial. Então, H é livre.*

Corolário 1.1.8 (Corolário 2 em [9]). *Seja Δ um grafo de grupos. Suponha que existam um grupo H e um homomorfismo $\varphi : \pi_1(\Delta) \to H$ tal que φ é injetora em cada grupo dos vértices. Então, $\ker\varphi$ é livre.*

1.2 Homologia e Cohomologia de grupos abstratos

Vamos fixar que R denotara um anel associativo com unidade 1. As categorias consideradas nesta seção serão as de grupos abelianos $\mathcal{A}b$, de R-módulos à direita $\mathcal{M}_R$ e de R-módulos à esquerda ${}_R\mathcal{M}$, logo pré-aditivas (isto é, onde os morfismos formam um grupo abeliano). E os functores que vamos considerar serão todos aditivos. Recordaremos algumas propriedades básicas sobre álgebra homológica de grupos abstratos. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [33] e [6].
Uma **sequência** (finita ou infinita) de homomorfismos

$$\ldots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \ldots$$

é exata se cada par adjacente de homomorfismos é exato, isto é, $Ker(f_n) = Im(f_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ é dita uma **sequência exata curta** de R-módulos se f é monomorfismo, g é epimorfismo e $Im(f) = Ker(g)$.

Definição 1.2.1. Um functor covariante F é dito **exato à esquerda** se a exatidão de $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ implica na exatidão de $0 \to FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC$. Analogamente, define-se **functor** covariante **exato à direita** e dualmente functor contravariante exato à esquerda ou direita. Um **functor** é **exato** se é exato à direita e à esquerda.

Vamos sintetizar algumas propriedades dos (bi) functores $Hom_R(,)$ e $\otimes_R$:

Proposição 1.2.2. *Sejam A um R-módulo à direita e B um R-módulo à esquerda. Então:*

(a) $Hom_R(\, ,\,)$ é um functor contravariante na primeira variável e covariante na segunda variável; Exato à esquerda em ambas variáveis e comuta com produto direito na segunda variável.

(b) $Hom_R(\bigoplus_{j\in J} A_j, B) \cong \prod_{j\in J} Hom_R(A_j, B)$ com $\varphi \longmapsto (\varphi\lambda_j)$, onde $\lambda_j : A_j \to \prod_{j\in J} A_j$ é a j-ésima injeção.

(c) $Hom_R(R, B) \cong B$ *com* $f \longmapsto f(1)$.

(d) $\otimes_R : \mathcal{M}_R \times {}_R\mathcal{M} \to \mathcal{A}b$ *é um functor covariante, exato à direita e comuta com soma direita em ambas variáveis.*

(e) $R \otimes_R B \cong B$ *com* $r \otimes b \longmapsto rb$. *Analogamente,* $A \otimes_R R \cong A$.

Agora falaremos um pouco sobre **módulos livres**, **projetivos** e **injetivos** e também sobre **resoluções livres, projetivas e injetivas** que serão fundamentais para o estudo de **homologia** e **cohomologia** de grupos abstratos.

Definição 1.2.3. Um R-módulo à esquerda F é **livre** se é soma direita de cópias de R, isto é, $F \simeq \oplus_{i \in R} Ra_i$, com $Ra_i \simeq R$ e $\{a_i | i \in I\}$ é dito base de F.

Equivalentemente, um módulo Fé livre com base X, se dado qualquer módulo B e qualquer função $f : X \to B$, existe um único homomorfismo $\varphi : F \to B$ que estende f.

Definição 1.2.4. Uma **resolução livre** de um R-módulo M é uma sequência exata longa

$$\ldots F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \ldots \xrightarrow{F}_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

onde cada F_i é R-módulo livre e d_i é R-homomorfismo

Como para qualquer conjunto X, existe um módulo livre com base X e todo módulo M é quociente de um módulo livre, decorre que todo módulo M possui uma resolução livre.

Definição 1.2.5. Um R-módulo P é **projetivo** se dados $\beta : B \to C$ epimorfismo de R-módulos e um R-homomorfismo $\alpha : P \to C$, sempre existe γ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Agora uma caracterização dos módulos projetivos:

Teorema 1.2.6. *As afirmações seguintes sobre um módulo P são equivalentes:*

(i) P *é projetivo.*

(ii) O functor $Hom(P, \ )$ *é exato.*

iii) P *é somando um módulo livre.*

iv) Toda sequência exata curta $0 \to A \to B \to P \to 0$ *cinde.*

Decorre que soma direita de módulos é projetivo se e só se cada somando é projetivo. No entanto, se o produto direto de módulos projetivos é infinito, então ele pode não ser projetivo: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ldots$ não é projetivo (Teorema de Baer).

Definição 1.2.7. Uma **resolução projetiva** de um R- módulo M é uma sequência exata longa

$$\ldots P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \ldots \xrightarrow{P}_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

onde cada P_i é R-módulo projetivo e d_i é $R-$ homomorfismo.

A noção de módulo injetivo é dual à de módulo projetivo.

Definição 1.2.8. Um módulo E é **injetivo** se para todo módulo B e todo submódulo $A \subset B$, cada R-homomorfismo $f : A \to E$ pode ser estendido a um R-homomorfismo $g : B \to E$, isto é, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Dualmente ao caso projetivo, temos uma caracterização para módulos injetivos.

Teorema 1.2.9. *As seguintes afirmações sobre um módulo E são equivalentes:*

(i) *E é injetivo.*

(ii) *O functor $Hom(\ ,E)$ é exato.*

(iii) *Toda sequência exata curta $0 \to E \to B \to C \to 0$ cinde.*

(iv) ***Critério de Baer*** *Todo homomorfismo $f : I \to E$, onde I é ideal à esquerda de R pode ser estendido a R.*

Vale ressaltar que o produto direto de módulos injetivos é injetivo se e só se cada módulo é injetivo. Já a soma direta de módulos injetivos pode não ser injetivo.

Definição 1.2.10. Seja $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$. Dizemos que A é **plano** se $A \otimes_R \ $ é functor exato. Da mesma forma, B é **plano** se $\ \otimes_R B$ é functor exato.

Teorema 1.2.11. *Se R é um domínio, então seu corpo de frações é um R-módulo plano. Em particular $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo plano, ou seja $\ \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é um functor exato.*

Definição 1.2.12. Uma **resolução injetiva** de um R-módulo M é uma sequência exata longa

$$0 \to M \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

onde cada E^n é injetivo.

Segue do fato que todo R-módulo M pode ser mergulhado num R-módulo injetivo que todo R-módulo M tem uma resolução injetiva.

Definição 1.2.13. Um **complexo** (ou cadeia de complexo) $\mathcal{A}$ é uma sequência de módulos e homomorfismos (diferenciais)

$$\mathcal{A} : \ldots \to A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \to \cdots$$

com $d_n d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Se $\mathcal{A}$ é um complexo com diferencias d_n, sua n-ésima homologia é o grupo abeliano $H_n(\mathcal{A}) = Ker(d_n)/Im(d_{n+1})$. Vale ressaltar que H_n é um functor.

Considere o complexo $\mathcal{P} : \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$. O complexo obtido apagando M é $\mathcal{P}_m : \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$ e é dito **complexo apagado** de $\mathcal{P}$. Analogamente, definimos o complexo apagado ε_N obtido do complexo $\varepsilon : 0 \to N \to E^0 \to E^1 \to \cdots$, apagando N.

Vamos descrever os **functores derivados** à esquerda $L_n T$ para um dado functor aditivo T.

Definição 1.2.14. Sejam T um functor aditivo, A e um R-módulo e $\mathcal{P}$ uma resolução projetiva de A. O n-ésimo **functor derivado à esquerda** de T é definido por

$$(L_nT)A_n = H_n(T\mathcal{P}_A) = \frac{Ker(Td_n)}{Im(Td_{n+1})}$$

Vale ressaltar que $(L_nT)A$ não depende da escolha da resolução projetiva $\mathcal{P}$ de A, vide [33], Teorema 6.11, pág. 182.

Exemplo 1.2.15. *Se $T = -\otimes_R B$ com $B \in {}_R\mathcal{M}$, então definimos $L_nT = Tor_n^R(\ ,B)$. E se $T = A \otimes_R -$ com $A \in \mathcal{M}_R$, definimos $L_nT = tor_n^R(A,\ )$. Em particular, $Tor_n^R(A,B) = H_n(\mathcal{P}_{\mathcal{A}} \otimes_R B)$ e $tor_n^B(A,B) = H_n(A \otimes_R \mathcal{Q}_B)$, onde $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são resoluções projetivas de A e B, respectivamente. Ressaltamos que $H_n(\mathcal{P}_A \otimes_R B) \cong H_n(A \otimes_R \mathcal{Q}_B)$ e portanto denotaremos por Tor ambos functores.*

Ressaltamos também que se R^{op} é o anel oposto de R, então para todo $n \geq 0$ e quaisquer R-módulos A e B, tem-se $Tor_n^R(A,B) \cong Tor_n^{R^{op}}(B,A)$. Por isso, iremos supor todos os resultados validos na outra variável.

De modo similar, podemos definir os **funtores derivados à direita** de um dado functor covariante aditivo T por

$$(R^nT)A = H^n(T\mathcal{E}_A) = \frac{Ker(Td^n)}{Im(Td^{n-1})}$$

onde $\mathcal{E}$ é uma resolução injetiva de A escolhida. E tal definição é independente da resolução.

Exemplo 1.2.16. *Seja $T = Hom_R(C,-)$, para algum R-módulo C, então definimos $R^nT = Ext_R^n(C,-)$. Em particular, $Ext_R^n(C,A) = H^n(Hom_R(C,\mathcal{E}_A))$ onde $\mathcal{E}$ é uma resolução injetiva escolhida do R-módulo A.*

Se T é contravariante, então seus funtores derivados à direita são $(R^nT)C = H^n(T\mathcal{P}_C) = Ker(Td_{n+1})/Im(Td_n)$ onde $\mathcal{P}$ é uma resolução projetiva escolhida do R-módulo C.

Functores derivados de um functor contravariante são chamados de **funtores cohomologícos**.

Exemplo 1.2.17. *Se $T = Hom_R(-,A)$, para algum R-módulo A, então definimos $R^nT = ext_R^n(-,A)$. Em particular, $ext_R^n(C,A) = H^n(Hom_R(\mathcal{P}_C,A))$, onde $\mathcal{P}$ é uma resolução projetiva de C escolhida. Ressaltamos que $H^n(Hom_R(\mathcal{P}_C,A)) \cong H^n(Hom_R(C,\mathcal{E}_A))$, onde $\mathcal{P}$ e $\mathcal{E}$ são resoluções projetiva e injetiva de C e A, respectivamente. Denotaremos por Ext ambos funtores.*

Descrevemos um pouco sobre homologia e cohomologia de grupos abstratos. Aqui G será um grupo abstrato, A um $\mathbb{Z}[G]$-módulo à esquerda, onde $\mathbb{Z}[G]$ é o anel de grupo de G sobre $\mathbb{Z}$. E ainda $\mathbb{Z}$ será considerado como um $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial, isto é, G age trivialmente sobre $\mathbb{Z}$.

Para cada $n \geq 0$, definamos o n- ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em A por

$$H_n(G,A) = Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$$

e o n-ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes de A por

$$H^n(G,A) = Ext_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z},A).$$

Segue da definição que $H_n(G,-)$ e $H^n(G,-)$ são funtores covariantes aditivos indo de ${}_{\mathbb{Z}[G]}\mathcal{M}$ para $\mathcal{A}b$.

A seguir coletamos alguns resultados básicos sobre **homologia** e **cohomologia** de grupos.

Observação 1.2.18. *(a)* $H_0(G,A) = Tor_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong A/IA$, *onde* I *é o ideal aumentado de* $\mathbb{Z}[G]$.

(b) $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong G/[G,G] = G^{\text{ab}}$, *onde* $[G,G]$ *denota o subgrupo comutador de* G.

(c) Seja G *um grupo. Então, sendo* $\mathbb{Q}$ *um* G*-módulo trivial, temos* $H_1(G,\mathbb{Q}) \cong G/[G,G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = G^{\text{ab}}/Tor(G)$.

(d) $H_n(G, \bigoplus_i A_i) \cong \bigoplus_i H_n(G,A_i)$.

(e) $H^0(G,A) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) \cong A^G = \{a \in A | ga = a, \forall g \in G\}$ *o submódulo de pontos fixos* A *pela ação de* G.

(f) $H^1(G,A) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(G,A)$ *se* A *é um* $\mathbb{Z}[G]$*-módulo trivial.*

(g) $H^n(G, \prod_i A_i) \cong \prod_i H^n(G,A_i)$.

a seguir apresentaremos algumas sequências exatas longas que serão muito usadas no Capítulo 4.

Teorema 1.2.19 (Sequência de Mayer-Vietoris, Proposição 13 Pág. 127 em [37])**.** *Seja* G *um grupo agindo sobre uma árvore* T*, onde* $\{G_e\}_{e\in E(T)}$ *são os grupos de arestas e* $\{G_v\}_{v\in V(T)}$ *são os grupos de vértices. Então para cada* G*-módulo* M *temos a sequência longa exata*

$$\cdots \to \bigoplus_{e\in E(T)/G} H_j(G_e,M) \to \bigoplus_{v\in V(T)/G} H_j(G_v,M) \to H_j(G,M) \to \bigoplus_{e\in E(T)/G} H_{j-1}(G_e,M) \to \cdots$$

Mostramos como as sequências de Mayer-Vietoris são expressas para um produto amalgamado e HNN-extensão.

Teorema 1.2.20 (Exemplo 9, amalgamations pág 178,[6])**.**

i) Considere o produto amalgamado $G = G_1 *_C G_2$ *dado pela apresentação*

$$\langle X_1, X_2 \,|\, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2,\ c = \phi(c),\ c \in C\rangle,$$

onde $\phi : G_2 \to G$ *é um homomorfismo injetor,* $G_i = \langle X_i \,|\, \mathcal{R}_i\rangle$*, para* $i = \{1,2\}$*. Então existe uma sequência exata longa da seguinte forma:*

$$\cdots \to H_1(C,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} H_1(G_1,\mathbb{Q}) \oplus H_1(G_2,\mathbb{Q}) \to H_1(G,\mathbb{Q}) \to H_0(C,\mathbb{Q}) \to \cdots$$

ou equivalentemente, usando a observação 1.2.18 item (c), temos

$$\cdots \to C^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha} (G_1^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus (G_2^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} G^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \cdots,$$

onde $\alpha(cC' \otimes q) = (cG_1' \otimes q,\ c\phi(c)^{-1}G_2' \otimes q)$, $c \in C$ *e* $q \in \mathbb{Q}$.

ii) Considere a HNN-extensão $G = HNN(G_1, C, t)$ dado pela apresentação

$$\langle X_1, t \,|\, \mathcal{R}_1,\; c = t\phi(c)t^{-1},\; c \in C\rangle,$$

onde $\phi : G_1 \to G$ é um homomorfismo injetor, $G_1 = \langle X_1 \,|\, \mathcal{R}_1\rangle$. Então existe uma sequência exata longa da seguinte forma:

$$\cdots \to H_1(C, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} H_1(G_1, \mathbb{Q}) \to H_1(G, \mathbb{Q}) \to H_0(C, \mathbb{Q}) \to \cdots$$

ou equivalentemente, usando a observação 1.2.18 item (c), temos

$$\cdots \to C^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\ \alpha\ } G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\ \beta\ } G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \cdots,$$

onde $\alpha(cC' \otimes q) = (c\phi(c)^{-1}G_1' \otimes q)$, $c \in C$ e $q \in \mathbb{Q}$.

O homomorfismo usado no Capítulo 4, será o homomorfismo transfer o qual será definido seguinte corolário,

Corolário 1.2.21 (Homomorfismo Transfer, Exercício 2 Pág. 83, [6])**.** *Seja G um grupo e H um subgrupo de índice finito de G. Então, existe um homomorfismo (transfer) $\psi : G/[G,G] \longrightarrow H/[H,H]$ dado por $gG' \longmapsto \prod_{t \in T} tg\overline{tg}^{-1}H'$ onde T é um conjunto de representantes das classes Hg, i.e. um transversal à direita de H em G, e $\overline{x}$ é o representante de Hx.*

Dizemos que a **dimensão projetiva** de um R-módulo M é menor ou igual n, $(projdim_R M) \leq n$, se M admite uma resolução projetiva: $\mathcal{P} : 0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$.

Definição 1.2.22. Definimos a **dimensão cohomológica** $cd(G)$ de um grupo como sendo $projdim_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$ é considerado como $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial. Em particular

$$cd(G) = \sup\{n \,|\, H^n(G, A) \neq 0 \text{ para algum } \mathbb{Z}[G]\text{-módulo } A\}$$

Definição 1.2.23. Uma resolução ou resolução parcial $\mathcal{P}$ é de **tipo finito** se cada P_i é *f.g.* Um R-módulo M é de tipo FP_n, $n \geq 0$, se existe uma resolução parcial projetiva

$$P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

de tipo finito. Dizemos que um R-módulo M é de tipo FP_∞ se M é de tipo FP_n para todo $n \geq 0$. E um grupo G é de tipo FP_n, $0 \leq n \leq \infty$, se $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_n como um $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial.

Definição 1.2.24. Uma resolução é dita **finita** se é de tipo finito e tem comprimento finito. Um grupo é de **tipo** FP se $\mathbb{Z}$ admite uma resolução projetiva finita sobre $\mathbb{Z}[G]$.

É possível mostrar que G é de tipo FP se, e somente se, $cd(G) < \infty$ e G é de tipo FP_∞, vide [6], Prop. 6.1, pág. 199. Nesta tese será usada a característica de Euler de um grupo G.

Definição 1.2.25 ([6], pág. 247)**.** Seja G um grupo abstrato de tipo FP. A **característica de Euler** de G é

$$\chi(G) = \sum_{0 \leq i \leq cd(G)} (-1)^i posto_{\mathbb{Z}}(H_i(G, \mathbb{Z}))$$

onde para qualquer grupo abeliano f.g. B, o posto de B é definido por $posto_{\mathbb{Z}}(B) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B)$.

Coletamos a seguir alguns fatos sobre $\chi(G)$ onde o grupo G é de tipo FP. Para mais detalhes $(a)-(c)$, vide [6] página 248.

Lema 1.2.26. *i)* $\chi(G) = \sum_{0\leq i\leq cd(G)} (-1)^i posto_{\mathbb{Z}}(H^i(G,\mathbb{Z}))$;

ii) $\chi(G) = \sum_{0\leq i\leq cd(G)} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}(H_i(G,\mathbb{F}_p))$;

iii) $\chi(G) = \sum_{0\leq i\leq cd(G)} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}(H^i(G,\mathbb{F}_p))$.

Usando o Lema 1.2.26 item ii) e a sequência de Mayer-Vietoris dada no Teorema 1.2.19 obtemos o seguinte corolário

Corolário 1.2.27. *Seja G um grupo abstrato de tipo FP.*

i) Se $G = G_1 *_C G_2$, um produto amalgamado com $C \neq 1$, então $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2) - \chi(C)$

ii) Se $G = HNN(G_1, C, t)$, uma HNN-extensão com $C \neq 1$, então $\chi(G) = \chi(G) - \chi(C)$

Capítulo 2

Preliminares sobre Grupos Profinitos e Grupos Pro-p

As principais referências para este capítulo serão [45] e [32].

2.1 Grupos profinitos (pro-p) e Anéis profinitos

As definições de grupos e anéis profinitos são baseadas no conceito de limite inverso. Vamos então relembrar brevemente este conceito e algumas de suas propriedades.

Um conjunto dirigido é um conjunto não vazio parcialmente ordenado $(I, \preceq)$ com a propriedade que para quaisquer $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i, j \preceq k$. Um sistema inverso de espaços (grupos, anéis) topológicos sobre I é uma família de espaços (grupos, anéis) topológicos $\{X_i \,|\, i \in I\}$, e uma família de aplicações contínuas (homomorfismos contínuos) $\pi_{ij} : X_i \to X_j$ definidas quando $i \succeq j$, satisfazendo as condições naturais de compatibilidade $\pi_{ii} = Id_{X_i}$ e $\pi_{ij}\pi_{jk} = \pi_{ik}$, sempre que $i \succeq j \succeq k$.

Seja Y um espaço (grupo, anel) topológico, $\{X_i, \pi_{ij}, I\}$ um sistema inverso sobre um conjunto dirigido I e $\psi_i : Y \to X_i$, para cada $i \in I$, aplicações contínuas (homomorfismos contínuos). As aplicações ψ_i são compatíveis se $\pi_{ij}\psi_i = \psi_j$ quando $i \succeq j$. Um espaço (grupo, anel) topológico X junto com aplicações contínuas (homomorfismos contínuos) compatíveis $\varphi_i : Y \to X_i$, $i \in I$, é um limite inverso do sistema inverso $\{X_i, \pi_{ij}, I\}$ se a seguinte propriedade universal é satisfeita:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi_i"'] & Y \arrow[l, dashed, "\exists!\psi"'] \arrow[dl, "\psi_i"] \\ X_i & \end{tikzcd}$$

Se Y é um espaço (grupo anel) topológico e $\psi_i : Y \to X_i$, $i \in I$ é um conjunto de aplicações contínuas (homomorfismos contínuos) compatíveis, então existe uma única aplicação contínua (um único homomorfismo contínuo) $\psi : Y \to X$ tal que $\varphi\psi = \psi_i$, para todo $i \in I$.

O limite inverso X de um sistema inverso $\{X_i, \pi_{ij}, I\}$ existe e é único a menos de isomorfismo, podendo ser construído como o subespaço (subgrupo, subanel) do produto direto $\prod_{i\in I} X_i$, munido da topologia produto, formado pelos elementos $(x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$ tais que $\pi_{ij} x_i = x_j$ para todo $i \succeq j$, onde as aplicações (homomorfismos) $\varphi_i : X \to X_i$ são as restrições das projeções $\prod_{i \in I} X_i \to X_i$, para cada $I \in I$. Então X é denotado por $\varprojlim_{i \in I} X_i$ e as aplicações φ_i são omitidas. Temos que $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$ é um subgrupo (subgrupo, subanel) fechado de $\prod_{i \in I} X_i$. Se cada X_i é compacto e Hausdorff, então $\prod_{i \in I} X_i$ também é compacto (pelo Teorema e Tychonoff) e Hausdorff. Assim, o mesmo é valido para X.

Definição 2.1.1. Um grupo G é um grupo **profinito (pro-p)** se é um limite inverso $\varprojlim_{I \in I} G_i$ de grupos finitos (p-grupos finitos), onde cada G_i tem a topologia discreta.

Os grupos profinitos são caracterizados de várias maneiras, como podemos ver abaixo.

Teorema 2.1.2 (Teorema 2.1.3 em [32])**.** *Seja G um grupo topológico. Então são equivalentes:*

(i) G é profinito (pro-p);

(ii) G é compacto, Hausdorff e a identidade 1 de G admite um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas tais que $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = 1$ e cada U é um subgrupo normal aberto de G com G/U é finito (p-grupo finito);

(iii) A identidade 1 de G admite um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas tais que cada $U \in \mathcal{U}$ é um subgrupo normal aberto de G e G/U com finito (p-grupo finito) e $G = \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} G/U$.

Observe que um grupo discreto é profinito (pro-p) se, e somente se, é um grupo finito (p-grupo finito). Todo subgrupo aberto de um grupo profinito (pro-p) G é fechado. Além disso, um subgrupo fechado de um grupo profinito (pro-p) G é aberto se, e somente se, tem índice finito (potência de p). Se H é um subgrupo fechado de G, então H é um subgrupo profinito (pro-p) com a topologia induzida. Se N é um subgrupo normal fechado de G, então G/N é um grupo profinito (pro-p) com a topologia quociente e o epimorfismo natural $G \to G/N$ é uma aplicação aberta e fechada.

Definição 2.1.3 (Homomorfismo Transfer)**.** [Cf. [42] pag 3] Seja G um grupo pro-p e H um subgrupo fechado de índice finito de G. Então, existe um **homomorfismo (transfer)** $\psi : G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow H^{\mathrm{ab}}$ dado por $g\overline{G'} \longmapsto \prod_{t \in T} tg\widehat{tg}^{-1}\overline{H'}$ onde T é um conjunto de representantes das classes Hg e $\widehat{x}$ é o representante de Hx.

2.1.1 Completamentos

Exemplos naturais e importante de grupos profinitos provém de completamentos de grupos abstrato. Seja $\mathcal{C}$ uma família não vazia de grupos profinitos com a propriedade que, para todo $U_1, U_2 \in \mathcal{C}$, existe um grupo $V \in \mathcal{C}$ tal que $V \leq U_1 \cap U_2$ (por exemplo, se $\mathcal{C}$ é fechada para subgrupos, quocientes e produtos diretos finitos). Seja G um grupo abstrato e considere

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(G) = \{N \triangleleft_f G \,|\, G/N \in \mathcal{C}\}$$

a coleção de todos os subgrupos normais de índice finito N em G tais que $G/N \in \mathcal{C}$ ordenado pela inclusão inversa: $M \preceq N$ se, e somente se, $N \leq M$. Note que $\mathcal{N}$ é não vazio, já que $G \in \mathcal{N}$. Se $M, N \in \mathcal{N}$ e $N \succeq M$, seja $\varphi_{NM} : G/N \to G/M$ o epimorfismo natural. Então $G/N, \varphi_{NM}$ é um sistema inverso de grupos em $\mathcal{C}$ e

$$G_{\widehat{\mathcal{C}}} = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$$

é chamado o **completamento pro-$\mathcal{C}$** de G. Assim, $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ é um grupo profinito e por ser o limite de grupos finitos em $\mathcal{C}$ é chamado de grupo pro-$\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ é a família de todos os grupos finitos, então $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ é chamado de completamento profinito de G e denotado por $\widehat{G}$. Se p é um primo e $\mathcal{C}$ é a classe de todos os p-grupos finitos, então $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ é chamado de completamento pro-p de G e é normalmente denotado por $G_{\widehat{p}}$.

Exemplo 2.1.4. *(a) O completamento pro-p de $\mathbb{Z}$ é denotado por $\mathbb{Z}_p$ e*

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{(x_n) |\, x_n \in \mathbb{Z}, x_n \equiv x_m (mod\, p^m),\ se\, m \leq n\}$$

é chamado de anel de inteiros p-ádicos.

(b) o completamento profinito de $\mathbb{Z}$ é denotado por $\widehat{\mathbb{Z}}$ e $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p\ é\ primo} \mathbb{Z}_p$

(c) o completamento profinito (pro-p) de $\mathbb{Z}^m = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$, com $m \in \mathbb{N}$, é $\widehat{\mathbb{Z}}^m$ ($\widehat{\mathbb{Z}_p}^m$).

O completamento *pro-$\mathcal{C}$* é também caraterizado como segue [Teorema 3.2.1 em [32]]. A aplicação $j : G \to G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ definida por $g \mapsto {}_{N \in \mathcal{N}} Ng$ é um homomorfismo contínuo, onde G é munido da topologia pro-$\mathcal{C}$, ou seja, a topologia determinada por $\mathcal{N}$. Além disso, $j(G)$ é um subconjunto denso em $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ e a seguinte propriedade universal é satisfeita: se H é um grupo pro-$\mathcal{C}$ e $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo contínuo, existe um homomorfismo contínuo $\underline{\varphi} : G_{\widehat{\mathcal{C}}} \to H$ tal que $\underline{\varphi} j = \varphi$. O núcleo de j é $\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$. Então, se $\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = 1$, temos que j é injetiva e podemos considerar G como um subconjunto denso de $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ (o que justifica a palavra "completamento "). Neste caso, dizemos que G é residualmente $\mathcal{C}$.

Outra propriedade importante é o fato de o completamento pro-$\mathcal{C}$ ser um functor da categoria de grupos discretos na categoria de grupos profinitos (Teorema 3.2.3 em [32]). Assim, se $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos discretos e $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ e $H_{\widehat{\mathcal{C}}}$ são os completamentos $pro - \mathcal{C}$ de G e H, então existe um correspondente homomorfismo contínuo $\varphi_{\widehat{\mathcal{C}}} : G_{\widehat{\mathcal{C}}} \to H_{\widehat{\mathcal{C}}}$. O functor completamento preserva epimorfismos, mas em geral não preserva monomorfismos. O seguinte lema dá uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra.

Lema 2.1.5 (Lema 3.2.6 em [32]). *Seja $\mathcal{C}$ uma família de grupos finitos fechada para subgrupos, quocientes e produtos diretos finitos. Suponha que $K \leq G$ e seja $i : K \to G$ a aplicação inclusão. Então $i_{\widehat{\mathcal{C}}} : K_{\widehat{\mathcal{C}}} \to G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ é injetiva se, e somente se, a topologia pro-$\mathcal{C}$ de G induz em K uma topologia pro-$\mathcal{C}$, ou seja para cada $M \in \mathcal{N}_C(K)$, existe $N \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(G)$ tal que $K \cap N \leq M$.*

Definição 2.1.6. Um anel R é um **anel profinito** se é limite inverso de anéis finitos (todos os anéis são assumidos com identidade e todos os homomorfismos de anéis levam identidades em identidades).

Os anéis profinitos possuem caracterizações análogas às de grupos profinitos em termos de seus ideais abertos.

Teorema 2.1.7 (Teorema 5.1.2 em [32]). *Seja R um anel topológico. São equivalentes:*

(i) R é profinito;

(ii) R é compacto e Hausdorff;

(iii) R é compacto e o elemento 0 de R tem um sistema fundamental de vizinhanças formando pelas ideias abertos;

(iv) O elemento 0 de R admite um sistema fundamental $\{T_i \mid i \in I\}$ de vizinhanças abertas tais que cada T_i é um ideal aberto de R e $R = \varprojlim_{i\in I} R/T_i$;

2.1.2 Grupos Profinitos (pro-p) finitamente gerados

Seja G um grupo profinito (pro-p) e X um subconjunto de G. Dizemos que G é topologicamente gerado por X se o grupo abstrato $\langle X\rangle$ gerado por X é denso em G. Neste caso, escrevemos $G = \overline{\langle X\rangle}$ e dizemos que X é um conjunto de **geradores topológicos** de G. Ao comprimento do conjunto minimal X que gera topologicamente o grupo G é denotado por $\mathbf{d(G)}$. Se existe um conjunto finito X de geradores topológicos de G, dizemos que G é **topologicamente finitamente gerado**. Se $\{G_i, \pi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso sobrejetivo (i.e., tal que cada π_{ij} é um epimorfismo contínuo) de grupos profinitos (pro-p) e $G = \varprojlim G_i$, temos que G é topologicamente gerado por um conjunto X se, e somente se, as imagens de X pelas projeções geram G_i para cada $i \in I$ [[32], 2.4.1].

Teorema 2.1.8 ([32], Teorema 4.3.4). *Seja p um primo fixado.*

(i) Se G é um grupo pro-p abeliano sem torsão topologicamente finitamente gerado, então G é um grupo pro-p abeliano livre de posto finito, isto é, $G \cong \oplus_d \mathbb{Z}_p$, onde d é um número natural.

(ii) Se G é um grupo pro-p abeliano topologicamente finitamente gerado, então o subgrupo de torsão $Tor(G)$ de G é finito e $G \cong F \oplus Tor(G)$, onde F é um grupo pro-p abeliano livre de posto finito

Proposição 2.1.9 ([32], Proposição 4.3.6). *Seja G um grupo profinito abeliano finitamente gerado com $d(G) = d$. Seja H um subgrupo fechado de G. Então, H é também finitamente gerado e $d(H) \leq d$*

Lema 2.1.10. *Seja G um grupo profinito finitamente gerado, seja $K \triangleleft_c G$ um subgrupo normal e $H \leq_c G$ um subgrupo finitamente gerado contendo K. Então $d(G) \leq d(H) + d(G/K)$.*

Demonstração. Seja $G/K = \langle g_1K \dots g_nK\rangle$, logo

$$G = \langle g_1, \dots, g_n, K\rangle = \langle g_1, \dots, g_n, H\rangle.$$

Assim $d(G) \leq d(H) + d(G/K)$. ∎

Corolário 2.1.11 (Corolário 3.6.3 [32]). *Seja G um grupo profinito finitamente gerado e seja U um subgrupo aberto de G. Então U é finitamente gerado e $d(U) \leq 1 + |G : U|(d(G) - 1)$.*

Definição 2.1.12. Seja G um grupo profinito finitamente gerado, define-se o **posto gradiente** de G da seguinte forma

$$RG(G) = \inf_{U \lhd_o G} \frac{d(U) - 1}{[G : U]}$$

2.2 Módulos profinitos e Discretos

No decorrer desta seção R denota um anel profinito

Definição 2.2.1. Um R- **módulo profinito** à direita é um grupo profinito abeliano M com uma aplicação contínua $M \times R \to M$ que satisfaz as propriedades usuais de um R-módulo abstrato.

Todo R-módulo profinito M tem uma base de vizinhanças abertas de 0 formada pelos subgrupos abertos de M que são invariantes sobre a ação de R, ou seja, formada pelos $R-$submódulos abertos. Na categoria de R-módulos profinitos todos os morfismos $f : M \to N$ entre $R-$módulos profinitos são homomorfismos contínuos com imagens fechadas, os quais vamos nos referir apenas como homomorfismos.

Seja X um subconjunto de um R-módulo profinito M. O R-submódulo fechado N topologicamente gerado por X é o fecho do R-submódulo abstrato gerado por X, ou seja, a interseção de todos os R-submódulos fechados de M que contém X. Se X é um conjunto finito, dizemos que N é (topologicamente) finitamente gerado. Neste caso, o seguinte Lema diz que as definições de módulos profinitos topologicamente e abstratamente finitamente gerado coincidem.

Lema 2.2.2 (Lema 7.2.2 em [45]). *Seja R um anel profinito, M um R-módulo profinito e $\{a_1, \ldots a_n\}$ um subconjunto finito de M. Então $M_1 = \{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \mid u_i \in R\}$ é um submódulo fechado.*

Estamos particularmente interessados em dois tipos de R-módulos: os que são compactos, Hausdorff e totalmente desconexos e os que são discretos. Nos referimos ao primeiro tipo como **módulos profinitos** e ao segundo como **módulos discretos**. Os R-módulos profinitos junto com seus morfismos formam uma categoria que denotaremos por $PMod(R)$. A categoria dos R-módulos discretos e seus morfismos será denotada por $DMod(R)$. A subcategoria de $DMod(R)$ formado por todos os módulos discretos de torsão é denotado por $DTMod(R)$.

2.2.1 G-módulos

Seja G um grupo profinito. Um G-**módulo** a esquerda o simplesmente um G-módulo é um grupo abeliano topológico M sobre o qual G opera de modo contínuo. Especificamente, um G-módulo é um grupo abeliano topológico M junto com uma aplicação contínua $G \times M \to M$ denotada por $(g, a) \longmapsto ga$ satisfazendo a seguinte condições:

(i) $(gh)a = g(ha)$,

(ii) $g(a + b) = ga + gb$,

(iii) $1a = a$,

para $a, b \in M$ e $g, h \in G$, onde 1 é a identidade de G.

Se a topologia de M é discreta, então M é chamada de G-módulo discreto; e se a topologia de M é profinita, dizemos que M é um G-módulo profinito. G-módulos à direita são definidos de modo análogo.

Exemplo 2.2.3. *Seja G um grupo profinito e M qualquer grupo abeliano discreto. Definas uma ação de G sobre M dada por $ga = a$, para todo $a \in M$ e $g \in G$. Então M é um G-módulo discreto. Esta ação é chamada a ação trivial sobre M, e nós referimos a M com esta ação como G-módulo trivial.*

Sejam M e N G-módulos. Um G-morfismo $\varphi : A \to B$ é G-homomorfismo contínuo, i.e, um homomorfismo continuo de grupos abelianos para qual se satisfaz

$$\varphi(ga) = g\varphi(a) \text{ para todo } g \in G, a \in M$$

A classe de G-módulos e G-morfismos constituem uma categoria abeliana qual é denotada por $\mathbf{Mod}(G)$. Os G-módulos profinitos formam uma subcategoria de $\mathbf{Mod}(G)$, denotada por $\mathbf{PMod}(G)$, além disso os G-módulos discretos formam uma subcategoria abeliana denotada por $\mathbf{DMod}(G)$. Os G-módulos discretos de torsão formam uma subcategoria de $\mathbf{DMod}(G)$.

2.2.2 A álgebra de grupo completa

Seja $\mathfrak{R}$ um anel comutativo. Uma **$\mathfrak{R}$-álgebra** é um anel R com um homomorfismo de anéis de $\mathfrak{R}$ no centro de R. Escrevemos $r\lambda$ para o produto da imagem de $r \in \mathfrak{R}$ e $\lambda \in R$. Uma aplicação $\theta : R \to E$, onde E é uma $\mathfrak{R}$-álgebra, é um homomorfismo de anéis e satisfaz $\theta(r\lambda) = r\theta(\lambda)$, para todo $r \in \mathcal{R}$ e $\lambda \in R$. Qualquer anel contendo $\mathfrak{R}$ no seu centro pode ser considerado como $\mathfrak{R}$-álgebra.

Seja G um grupo abstrato. Denotamos por $\mathfrak{R}G$ a álgebra de grupo de G sobre $\mathfrak{R}$, ou seja, $\mathfrak{R}G$ é o conjunto formado por todas as somas formais $\sum_{g \in G} r_g g$, tais que $r_g \in \mathfrak{R}$ e $r_g \neq 0$ somente para um número finito de elementos $g \in G$, com soma e produto usuais. Identificamos $\mathfrak{R}$ e G com suas imagens naturais em $\mathfrak{R}G$. A álgebra de grupo é caracterizada pela seguinte propriedade universal: cada homomorfismo de grupos de G a unidades E^* de uma $\mathfrak{R}$-álgebra E estende-se unicamente a um homomorfismo de $\mathfrak{R}$-álgebra de $\mathfrak{R}G$ em E.

Suponha agora que $\mathfrak{R}$ é um anel profinito comutativo. Uma $\mathfrak{R}$-álgebra profinita é um anel profinito R com um homomorfismo contínuo de $\mathfrak{R}$ no centro de R. Note que o centro de R é um subanel fechado de R, já que é a interseção de núcleos de homomorfismos (de grupos profinitos via $+$) da forma $\varphi_\lambda : x \mapsto x\lambda - \lambda x$, para cada $\lambda \in R$.

Definição 2.2.4. Seja G um grupo profinito. **A álgebra de grupo completa** $[[\mathfrak{R}G]]$ **de** G **sobre** $\mathfrak{R}$ é uma $\mathfrak{R}$- álgebra profinita que contém G no seu grupo de unidades e que satisfaz a seguinte propriedade universal: cada homomorfismo contínuo de G no grupo de unidades E^* de uma $\mathfrak{R}$-álgebra profinita E estende-se a um único homomorfismo contínuo de $\mathfrak{R}$-álgebras de $[[\mathfrak{R}G]]$ em E.

Note que E^* é um grupo profinito com a topologia subespaço em E [Cf. Teorema 7.1.1 em [45]]. A álgebra de grupo completa poder também ser construída como o limite inverso

$$[[\mathfrak{R}G]] = \varprojlim_{N\in\mathcal{U}} \mathfrak{R}(G/N),$$

onde $\mathcal{U}$ é a família de todos os subgrupos normais abertos N de G. Temos que G mergulha em $[[\mathfrak{R}G]]$ via a aplicação $g \mapsto \prod_{N\in\mathcal{U}} Ng$ que estende-se a um mergulho de $\mathfrak{R}G$ em $[[\mathfrak{R}G]]$ como uma subálgebra densa de $[[\mathfrak{R}G]]$ (Cf. Teorema 7.1.2 em [45]).

A álgebra de grupo $\mathfrak{R}G$ de um grupo G abstrato sobre um anel comutativo $\mathfrak{R}$ é um $\mathfrak{R}$-módulo abstrato livre no conjunto G. A correspondente propriedade não vale para a álgebra de grupo completa $[[\mathfrak{R}G]]$ de um grupo profinito G sobre um anel profinito comutativo $\mathfrak{R}$. Isso porque a inclusão de G em $[[\mathfrak{R}G]]$ é 0-convergente somente se G é finito. Esse problema pode ser contornado definindo-se um novo tipo de módulo livre.

Proposição 2.2.5 ([32], Proposição 5.3.6). *a) A categoria $PMod(G)$ coincide com a categoria $PMod([[\widehat{\mathbb{Z}}G]])$.*

b) A categoria $DMod([[\widehat{\mathbb{Z}}G]])$ coincide com a subcategoria de $DMod(G)$ consistindo dos G-módulos discretos de torsão.

2.2.3 Produtos tensoriais completo

No que segue, R denota um anel profinito comutativo, R uma $\mathcal{R}$-álgebra profinita, M um R-módulo profinito à direita e N um R-módulo profinito à esquerda. Um R-bihomomorfismo $f : M \times N \to L$, onde L é um $\mathfrak{R}$-módulo profinito, é um homomorfismo contínuo de grupos profinitos abelianos tal que $f(m\lambda, n) = f(m, \lambda n)$, para cada $m \in M$, $n \in N$ e $\lambda \in R$. O **produto tensorial completo** de M e N sobre R é um $\mathfrak{R}$-módulo, denotado por $M\widehat{\otimes}_R N$, junto com um Λ-bihomomorfismo $\widehat{t} : M \times N \to M\widehat{\otimes}_R N$ definida pela seguinte propriedade universal: dado um R-bihomomorfismo f de $M \times N$ em um $\mathfrak{R}$-módulo profinito L, existe um único homomorfismo de $\mathfrak{R}$-módulos profinitos $\overline{f} : M\widehat{\otimes}_R N \to L$ tal que $\overline{f}\widehat{t} = f$ (ou seja, f se fatora através de $\widehat{t}$).

O produto tensorial completo existe e é único (a menos de isomorfismo), podendo ser construído como o completamento

$$M\widehat{\otimes}_R N = \varprojlim M/U \otimes_R N/V$$

do produto tensorial abstrato $M/U \otimes_R N/V$, onde U e V são R-submódulos abertos de M e N, respectivamente.

Propriedades sobre produtos tensoriais completos podem ser vistos em [45] Teorema 5.5.3, como por exemplo

(i) $M\widehat{\otimes}_R-$ é um functor exato à direita e comuta com somas direitas finitas de R-módulos profinitos à esquerda.

(ii) $M\widehat{\otimes}_R R \simeq M$ como R-módulos profinitos e isomorfismo natural;

(iii) Se M é projetivo então o functor $M\widehat{\otimes}_R-$ é exato.

(iv) Além disso, se M é um R-módulo profinito finitamente gerado, então $M\widehat{\otimes}_R N \simeq M\otimes_R N$.

(v) Existe um isomorfismo natural de R-módulos profinitos:

$$A\widehat{\otimes}_R(B_1 \oplus B_2) \cong (A\widehat{\otimes}_R B_1) \oplus (A\widehat{\otimes}_R B_2)$$

(iv) O produto tensorial completo comuta com o limite inverso, ou seja $(\varprojlim_{i\in I} M_i)\widehat{\otimes}N \cong \varprojlim_{i\in I}(M_i\widehat{\otimes}N)$.

Propriedades análogas valem para o functor $-\widehat{\otimes}_R N$.

2.3 Homologia e co-homologia de grupos profinitos

Seja R uma $\mathfrak{R}$-álgebra profinita, onde $\mathfrak{R}$ é um anel profinito comutativo. Considere o functor $Hom_R(-,-)$ indo da categoria $PMod(R) \times DMod(R)$ na categoria $DMod(\mathfrak{R})$; este é um functor covariante na segunda variável e contravariante na primeira. Lembre que agora $Hom_R(M,N)$ denota os homomorfismos de R-módulos contínuos.

Fixamos $A \in PMod(R)$. Denotamos por $Ext^n_R(A,-)$ ao n-ésimo funtor derivado à direita do funtor $Hom_R(A,-) : DMod(R) \to DMod(\mathfrak{R})$..

Como no caso abstrato se $B \in DMod(R)$, então $Ext^n_R(A,B)$ pode ser calculado obtendo o n-ésimo functor derivado à direita de $Hom_R(-,B) : PMod(R) \to DMod(\mathfrak{R})$ e logo aplica-lo a A.

A seguinte proposição caracteriza o functor $Ext^n_R(\ ,\ )$, estas propriedades são análogas ao caso abstrato.

Proposição 2.3.1 ([32], proposição 6.1.7). *Seja $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo e R uma $\mathfrak{R}$-álgebra profinita. Fixe $A \in PMod(R)$ e $B \in DMod(R)$. Então:*

1. *Para qualquer R-módulo discreto injetivo Q e para $n \geq 1$, $Ext^n_R(A,Q) = 0$. Além disso, $Ext^0_R(A,-) = Hom_R(A,-)$.*

2. *Para qualquer R-módulo profinito projetivo P e para $n \geq 1$, $Ext^n_R(P,B) = 0$. Além disso, $Ext^0_R(-,B) = Hom_R(-,B)$.*

3. *Os functores $Ext^n_R(A,-)$ e $Ext^n_R(-,B)$ comutam com somas diretas finitas.*

Como consequência desta proposição temos que os functores $Ext^n_R(A,\ )$ e $Ext^n_R(\ ,B)$ comutam com limites, mas especificamente temos:

Corolário 2.3.2 ([32], Corolário 6.1.8). *Sob as hipóteses da proposição anterior, temos*

1. $Ext^n_R(A, \varinjlim_{i\in I} B_i) = \varinjlim_{i\in I} Ext^n_R(A,B_i)$, *onde $\{B_i, \varphi_{ij}\}$ é um sistema direito de R-módulos discreto.*

2. $Ext^n_R(\varprojlim_{i\in I} A_i, B) = \varinjlim_{i\in I} Ext^n_R(A_i,B)$, *onde $\{A_i, \varphi_{ij}\}$ é um sistema inverso de R-módulos profinitos.*

Agora considere o functor $\widehat{\otimes}_R : PMod(R^{op}) \times PMod(R) \to PMod(\mathfrak{R})$, onde $\mathfrak{R}$ é um anel profinito comutativo e R é uma $\mathcal{R}$-álgebra. Seja A um R-módulo à direita profinito. Então $A\widehat{\otimes}_R-\ : PMod(R) \to PMod(\mathfrak{R})$ é um funtor covariante exato à direita. Definimos o functor $Tor^R_n(A,\ )$ como o n-ésimo funtor derivado de $A\widehat{\otimes}_R-$. Seja B um R-módulo à esquerda, $Tor_n^B(A,B)$ pode também ser calculado tomando o n-ésimo functor derivado de $-\widehat{\otimes}_R B$ e aplicando este em A.

Usando esta notação, temos a seguinte caracterização dos funtores $Tor_n^R(\,,\,)$, análogas ao caso abstrato.

Proposição 2.3.3 ([32], Proposição 6.1.9). *Seja $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo e R uma $\mathfrak{R}$-álgebra profinita. Fixe $A \in PMod(R^{op})$ e $B \in PMod(R)$. Então*

1. *Para qualquer R-módulo à direita profinito projetivo P e para $n \geq 1$, $Tor_n^B(P,B) = 0$. Além disso, $Tor_0^B(-,B) = \widehat{\otimes}_R B$.*

2 *Para qualquer R-módulo à esquerda profinito projetivo P e para $n \geq 1$, $Tor_n^R(A,P) = 0$. Além disso, $Tor_0^R(A,-) = A\widehat{\otimes}_R -$.*

3 *Os functores $Tor_n^R(A,-)$ e $Tor_n^R(-,B)$ comutam com somas diretas finitas.*

Os functores $Tor_n^R(A,-)$ e $Tor_n^R(-,B)$ comutam com limites inversos, diferentemente do caso abstrato onde os functores $Tor_n^R(A,-)$ e $Tor_n^R(-,B)$ comutam com limite direto.

Corolário 2.3.4 ([32], Corolário 6.1.10). *Sobre as hipóteses da proposição anterior, temos*

1. *$Tor_n^R(A, \varprojlim_{i\in I} B_i) = \varprojlim_{i\in I} Tor_n^R(A,B_i)$, onde $\{B_i, \varphi_{ij}\}$ é um sistema inverso de R-módulos à esquerda profinitos.*

2. *$Tor_n^R(\varprojlim_{i\in I} A_i, B) = \varprojlim_{i\in I} Tor_n^R(A_i,B)$, onde $\{A_i, \varphi_{ij}\}$ é um sistema inverso de R-módulos à direita profinitos.*

2.3.1 Cohomologia de Grupos Profinitos com Coeficientes em DMod([[$\mathfrak{R}G$]])

A cohomologia de grupos profinitos com coeficientes em módulos discretos foi introduzida pelo matemático americano John Torrence Tate Jr. como uma ferramenta no estudo dos grupos de Galois.

Seja G um grupo profinito e $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo.

Considere G agindo trivialmente em $\mathfrak{R}$, $gr = r$ para todo $g \in G$ e $r \in \mathfrak{R}$, então $\mathfrak{R}$ torna-se um $[[\mathfrak{R}G]]$-módulo. Dado um $[[\mathfrak{R}G]]$-módulo discreto A, definimos o **n-ésimo grupo de cohomologia** $H^n(G,A)$ de G com coeficientes em A por

$$H^n(G,A) = Ext^n_{[[\mathfrak{R}G]]}(\mathfrak{R}, A),\ n \in \mathbb{N}$$

.

Analogamente ao caso abstrato temos

Lema 2.3.5 ([32], Lema 6.2.1). *Seja G um grupo profinito. Existe um isomorfismo de $\mathfrak{R}-$módulos*

$$H^0(G,A) = Hom_{[[\mathfrak{R}G]]}(\mathfrak{R}, A) \cong A^G$$

onde $A^G = \{a | a \in A,\ ga = a, \forall g \in G\}$ é o submódulo dos pontos fixos de A via ação de G, para qualquer $A \in DMod([[\mathfrak{R}]]G)$.

Proposição 2.3.6 ([32], Proposição 6.2.2). *Seja G um grupo profinito então para cada sequência exata curta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ em $DMod([\mathfrak{R}G])$, existe sequência exata longa*

$$0 \to H^0(G, A') \to H^0(G, A) \to H^0(G, A'') \xrightarrow{\delta}$$
$$\to H^1(G, A') \to H^1(G, A) \to \dots$$

com homomorfismo de conexão $\delta : H^n(G, A'') \to H^{n+1}(G, A')$.

2.3.2 Homologia de Grupos Profinitos com Coeficientes em PMod([[$\mathcal{R}$G]])

Seja G um grupo profinito, $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo e seja A um $[[\mathfrak{R}G]]$-módulo à direita profinito. Definimos o **n-esimo grupo de homologia** $H_n(G, A)$ de G com coeficientes em A por

$$H_n(G, A) = Tor_n^{[[\mathfrak{R}G]]}(A, \mathfrak{R}),\ n \in \mathbb{N}.$$

Como $Tor_n^{[[\mathfrak{R}G]]}(A, \mathfrak{R})$ é o n-ésimo funtor derivado à esquerda de $\widehat{\otimes}_{[[\mathfrak{R}G]]}\mathfrak{R}$, então

$$H_0(G, A) = Tor_0^{[[\mathfrak{R}G]]}(A, \mathfrak{R}) = A\widehat{\otimes}_{[[\mathfrak{R}G]]}\mathfrak{R}$$

Definição 2.3.7. Definimos o **ideal de aumentação** $((I))$ do anel de grupo completo $[[\mathcal{R}G]]$ como sendo o núcleo do homomorfismo de anéis contínuo $\varepsilon : [[\mathcal{R}G]] \to [[\mathcal{R}]]$, o homomorfismo aumento, dado por $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Proposição 2.3.8 ([32], Proposição 6.3.4). *Existe um isomorfismo natural $H_0(G, A) \simeq A/A((I)) = A/\overline{\langle ag - a | a \in A, g \in G\rangle}$.*

Existe uma dualidade entre os módulos profinitos e os módulos discretos, esta dualidade é explicada na seguinte proposição.

Proposição 2.3.9 ([32], pág. 171). *Seja G um grupo profinito e B um $[[\hat{\mathbb{Z}}G]]$-módulo profinito à direita. Então $H_n(G, B)$ e $H^n(G, B^*)$ são dual Pontryagin, onde B^* é o dual Portryagin de B.*

Proposição 2.3.10 ([45], Teorema 6.4.1 Pág. 105).

a) Se $M \in PMod(G)$, então M^* é um G-módulo discreto de torsão.

b) Seja M um G-módulo discreto de torsão, então $M^* \in PMod(G)$

Proposição 2.3.11 ([32], Proposição 6.2.2). *Seja G um grupo profinito então para cada sequência exata curta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ em $DMod([\mathfrak{R}^{op}G])$, existe sequência exata longa*

$$\cdots \to H_1(G, A) \to H_1(G, A'') \xrightarrow{\delta} H_0(G, A') \to H_0(G, A) \to H_0(G, A'') \to 0$$

com homomorfismo de conexão $\delta : H_{n+1}(G, A'') \to H_n(G, A')$.

Exemplo 2.3.12 (Proposição 6.18 em [6]). *Considere a sequência exata curta*

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{p^*} \mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p \to 0,$$

onde aplicação $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{p^*} \mathbb{Z}_p$ é a multiplicação por p.

Logo, temos a correspondente sequência exata longa

$$\cdots \to H_j(G, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{p^*} H_j(G, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\phi} H_j(G, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\delta} H_{j-1}(G, \mathbb{Z}_p) \to \cdots, \tag{2.1}$$

onde p^* é a multiplicação por p.

Corolário 2.3.13 (Corolário 7.2.6 em [32]). *Seja G um grupo profinito, K um subgrupo fechado normal de G e $B \in PMod([\widehat{\mathbb{Z}}G])$. Então, existe a seguinte sequência exata:*

$$H_2(G,B) \to H_2(G/K,B_K) \to H_1(K,B)_{G/K} \xrightarrow{\alpha_1} H_1(G,B) \xrightarrow{\alpha_2} H_1(G/K,B_K) \to 0$$

2.4 Dimensão Cohomologica

Seja G um grupo profinito e seja p um número primo. Seja A um grupo abeliano, denotamos por A_p sua **componente p-primaria** i.e. o subgrupo consistindo dos elementos de A de ordem p^n para algum n, $A_p = \{a \in A | \exists n \geq 0, |a| = p^n\}$. Se $A = A_p$ dizemos que A é **p-primário**.

Definição 2.4.1. A **p-dimensão cohomológica** $cd_p(G)$ de um grupo profinito G se define como o menor inteiro não negativo n tal que $H^k(G,A)_p = 0$ para toda $k > n$ e para todo $[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$-módulo discreto A, se tal n existe, ou seja

$$cd_p(G) = min\{n | H^k(G,A)_p = 0, \forall k > n, \forall A \in DMod([[\widehat{\mathbb{Z}}G]])\}.$$

Se tal n não existe dizemos que $cd_p(G) = \infty$.

Como no caso abstrato, se $cd_p(G) < \infty$, então G é livre de p-torsão. Além disso, $cd_p(G) \leq n$ se, e somente se, existe uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_p$ ou $(\mathbb{F}_p)$ de comprimento n sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$(ou $[[\mathbb{F}_pG]]$).

Exemplo 2.4.2.

1. $cd_p(\widehat{\mathbb{Z}}) = 1$.
2. $cd_p(\mathbb{Z}_p) = 1$.

Definição 2.4.3. Seja G um grupo profinito, definimos a **dimensão cohomológica** $cd(G)$ de G da seguinte forma forma,

$$cd(G) = \sup_p cd_p(G)$$

Propriedade 2.4.4 ([45], Proposição 11.1.4). *Seja G um grupo pro-p, então*

1 $cd_q(G) = 0$ *para cada primo $q \neq p$;*

2 $cd_p(G) = 0$ *se e somente se G é trivial.*

A seguinte proposição simplifica o problema de encontrar a p-dimensão cohomológica de um grupo profinito.

Propriedade 2.4.5 ([32], Proposição 7.1.4). *Seja G um grupo profinito e seja n um número natural fixo. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $cd_p(G) \leq n$;
2. $H^k(G,A) = 0$, *para todo $k > n$ e todo $A \in DMod([[\widehat{\mathbb{Z}}G]])$ p-primário.*

Os seguintes resultados relacionam a p-dimensão cohomológica de um grupo profinito e a de seus subgrupos fechados.

Teorema 2.4.6 ([32], Teorema 7.3.1). *Seja G um grupo profinito, S um subgrupo fechado de G e p um número primo. Então*

1. $cd_p(S) \leq cd_p(G)$.

2. *Se* $p \nmid [G : S]$ *então* $cd_p(S) = cd_p(G)$.

3. *Se* $cd_p(G) \leq \infty$ *e* S *é aberto em* G *então* $cd_p(S) = cd_p(G)$.

Agora definiremos módulos e grupos profinitos de tipo FP_m.

Definição 2.4.7. Sejam G um grupo profinito e M um $[[\mathbb{Z}_p G]]$-módulo profinito. Dizemos que M é de **tipo FP_m sobre** $[[\mathbb{Z}_p G]]$ se M tem uma resolução projetiva de $[[\mathbb{Z}_[G]]$-módulos profinitos onde todos os módulos em dimensão menor ou igual a m são finitamente gerados. Se M for de tipo FP_m para todo m, então M é dito de tipo FP_∞.

Definição 2.4.8. Um grupo profinito G é de **tipo FP_m sobre** $\mathbb{Z}_p$, para algum $0 \leq m \leq \infty$, se existe uma resolução projetiva profinita do $[[\mathbb{Z}_p G]]$-módulo trivial $\mathbb{Z}_p$,

$$\cdots \to P_i \to P_{i-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z}_p \to 0,$$

onde cada P_i é $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulo projetivo finitamente gerado para $i \leq m$. E o grupo G é de tipo FP_∞ se G é de tipo FP_m para todo $m \geq 0$.

Nas últimas definições, podemos trocar $\mathbb{Z}_p$ por $\mathbb{F}_p$.

Observação 2.4.9. *Analogamente ao caso abstrato, um grupo pro-p G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ se, e somente se, qualquer subgrupo aberto H de G também é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$, vide ([41], Proposição.4.2.1).*

Corolário 2.4.10 ([41],Corolário 4.2.5). *Um grupo pro-p G é do tipo FP_∞ se e só $H^n(G, \mathbb{F}_p)$ é um $\mathbb{F}_p$-espaço vetorial de dimensão finita para cada $n \geq 0$, ou seja, $\dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G, \mathbb{F}_p) < \infty$ para cada $n \geq 0$.*

Observação 2.4.11. *Seja G um grupo profinito, então $H^n(G, A)$, onde A é um $[[\mathbb{F}_p G]]$ módulo discreto, é um $\mathbb{F}_p$-espaço vetorial.*

Proposição 2.4.12 ([41], Proposição 4.6.1). *Se um grupo profinito G tem p-dimensão cohomológica finita e é do tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$, então $H^n(G, \mathbb{F}_p)$ é um $\mathbb{F}_p$-espaço vetorial de dimensão finita para cada $n \geq 0$, ou seja, $\dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G, \mathbb{F}_p) < \infty$ para cada $n \geq 0$.*

2.5 Deficiência de um Grupo Profinito

Seja G um grupo profinito finitamente gerado, então nós dizemos que G tem **deficiência** k se existe uma apresentação $\pi : F \to G$ de G de deficiência k, i.e. tal que o posto do grupo profinito livre F menos o número de geradores de $Ker(\pi)$ como um subgrupo normal fechado de F é k. Denotamos por $def(G)$ o maior k tal que G é de deficiência k.

Definição 2.5.1. Seja G um grupo pro-p finitamente apresentável. Definimos a **deficiência** de G como o número

$$def(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G, \mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, \mathbb{F}_p).$$

Observação 2.5.2. *Note que, se X é um conjunto minimal de geradores e R é um conjunto minimal de relações para um grupo pro-p finitamente apresentado $G = \langle X|R\rangle$ tal que R é um subconjunto de um grupo pro-p livre com base X, então a cardinalidade de X e de R correspondem a*

$$|X| = \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G, \mathbb{F}_p) = dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, \mathbb{F}_p)$$

e

$$|R| = \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G, \mathbb{F}_p) = dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, \mathbb{F}_p),$$

respectivamente. Portanto, $def(G) = |X| - |R|$.

p-Deficiência de um grupo Profinito

Introduzimos a p-**deficiência** de um grupo profinito, a qual ajuda a descrever mais precisamente propriedades de grupos profinitos; maiores detalhes deste invariante pode ser encontrado em [15].

Seja G um grupo profinito. Denotamos por $d(G)$ a quantidade mínima de geradores de G. Seja M um G-módulo finito não trivial, denotamos por $\dim(M)$ o posto de M como $\mathbb{Z}$-módulo (veja definição 1.2.25) e $\dim\big(H^i(G, M)\big)$ o posto de $H^i(G, M)$ como $\mathbb{Z}$-módulo (veja definição 1.2.25), para $i = 0, 1, 2$. Assim definimos

$$\overline{\chi_2}(G, M) = \frac{-\dim H^2(G, M) + \dim H^1(G, M) - \dim H^0(G, M)}{\dim(M)} \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$$

Além disso definimos

$$\overline{\chi_1}(G, M) = \frac{\dim H^1(G, M) - \dim H^0(G, M)}{\dim(M)} \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$$

Exemplo 2.5.3 (([15], Example 2.6))**.**

a) Se G é um grupo profinito finitamente gerado com $d(G)$ denotando a quantidade mínima de geradores de G, então $\dim H^0(G, M) = \dim M^G$ e $\overline{\chi_1}(G, M) \leq d(G) - 1$, onde M é um G-módulo finito.

b) Se F é um grupo profinito de posto finito $d(F)$,

$$\overline{\chi_2}(F, M) = \overline{\chi_1}(F, M) = d(F) - 1,$$

onde M é um G-módulo finito.

Definição 2.5.4. Se N é um subgrupo fechado de G e $\mathcal{M}_p(N)$ é o conjunto de todos os finitos $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulos sobre o qual N age trivialmente, introduzimos o seguinte invariante:

$$def_p(G, N) = \inf_{M \in \mathcal{M}_p(N)} \{1 + \overline{\chi_2}(G, M)\}$$

Para simplificar, denotamos por

$$def_p(G) := def_p(G, \{1\})$$

O número $def_p(G)$ é chamado de p-**deficiência** de G.

Observação 2.5.5. *Comparando $def_p(G)$ com a deficiência de G observamos que*

$$def(G) \leq def_p(G) \leq dimH^1(G, \mathbb{F}_p) - dimH^2(G, \mathbb{F}_p),$$

Exemplo 2.5.6. *Seja G um grupo profinito livre de posto finito $d(G)$, então pelo exemplo 2.5.3 temos que para todo G-módulo finito M, $\chi_1(G, M) = \chi_2(G, M) = d(G) - 1$. Assim para um subgrupo fechado N de G, temos $def_p(G, N) = d(G)$.*

Proposição 2.5.7 ([15], Proposição 3.2). *Seja G um grupo profinito finitamente gerado e N um subgrupo normal de índice infinito tal que $H^1(N, \mathbb{F}_p) \neq 0$. Se $def_p(G, N) \geq 2$, então $H^1(N, \mathbb{F}_p)$ é infinito.*

Corolário 2.5.8 ([15], Corolário 3.3). *Seja G um grupo profinito finitamente gerado e N um subgrupo normal de índice infinito tal que p divide $|N|$. Se $def_p(G) \geq 2$, então existe algum subgrupo aberto U de N tal que $H^1(U, \mathbb{F}_p)$ é infinito. Em particular, qualquer subgrupo normal não trivial de um grupo profinito de deficiência maior do que 2 que tem índice infinito é infinitamente gerado.*

2.6 Característica de Euler de um grupo Profinito

Para que a seguinte definição faça sentido, colocamos que nosso grupo profinito G satisfaça as seguintes condições:

(i) $cd_p(G) < \infty$.

(ii) $\dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G, \mathbb{F}_p) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.6.1. Seja G um grupo profinito que satisfazem as condições (i), (ii). Defina a **p-característica de Euler** G como,

$$\chi_p(G) = \sum_{0 \leq i \leq cd_p(G)} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} \big(H_i(G, \mathbb{F}_p)\big)$$

Para qualquer grupo profinito abeliano finitamente gerado B, definimos o p-posto racional de B por

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(B) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} B),$$

onde $\mathbb{Q}_p$ é o corpo de frações de $\mathbb{Z}_p$.

Observe que $\mathbb{Q}_p$ não é grupo abeliano profinito pois não é compacto.

Observação 2.6.2. *Se G é um grupo pro-p satisfazendo a definição 2.6.1, então $cd(G) = cd_p(G)$ e a p-característica de Euler de G é chamada de* ***característica de Euler*** de G *e $\chi_p(G)$ é denotada por $\chi(G)$.*

Proposição 2.6.3 ([24], seção I.3). *Seja G um grupo profinito de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ e $cd_p(G) < \infty$. Então*

$$\chi_p(G) = \sum_{0 \leq i \leq cd_p(G)} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} \big(H_i(G, \mathbb{F}_p)\big) = \sum_{0 \leq i \leq cd_p(G)} (-1)^i \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p} \big(H_i(G, \mathbb{Z}_p)\big),$$

onde $\mathbb{F}_p$ é o corpo com p-elementos, para p primo.

Proposição 2.6.4 ([6], Capitulo 9, Teorema 6.3). *Seja G um grupo profinito satisfazendo a definição 2.6.1. Então para um subgrupo aberto U de G temos a seguinte relação:*

$$\chi_p(G) = \chi_p(U)/[G:U]$$

2.7 Construções Livres

Muito da teoria de grupos finitos, quando interpretado da maneira adequada, pode ser executado para grupos profinitos. As principais referências para esta seção são [32] (cap. 3, 8 e 9), [45] (cap. 5) e [13] (cap. 22 e 25)

Grupos livres e projetivos

Como neste trabalho lidamos apenas com grupos finitamente gerados, nos restringimos aos grupos livres de posto finito. O completamento profinito (resp. pro-p) de um grupo livre (abstrato) de posto finito r é o grupo profinito (resp. pro-p) livre de posto finito r. Isto, pois este satisfaz a devida propriedade universal de objeto livre na categoria dos grupos profinitos (resp. pro-p)(Cf. Prop. 3.3.2 em [32])

Assim como no caso abstrato temos a seguinte proposição,

Proposição 2.7.1 (Prop. 3.6.2(b) em [32]). *Subgrupos fechados H de índice finito de um grupo profinito (resp. pro-p) livre F são profinitos (resp. pro-p) livres e satisfazem a Fórmula de Schreier*

$$d(H) - 1 = [F:H](d(F) - 1) \tag{2.2}$$

Aqui, cabe ressalta-nos o seguinte profundo resultado de O. Mel'nikov.

Teorema 2.7.2 (Teorema 8.6.5 em [32]). *Seja F um grupo profinito (resp. pro-p) livre de posto finito r, com $r \geq 2$. Um subgrupo fechado normal de F é finitamente gerado se, e somente se, ele possui índice finito em F.*

Mais fundamentalmente, todo subgrupo de um grupo livre (abstrato) é um grupo livre (Teorema de Nielsen-Schreier); isto não ocorre já no grupo profinito livre de posto 1 (e.g. o grupo $\mathbb{Z}_p$ não é profinito livre); o análogo pro-p do referido Teorema é consequência do importante resultado.

Teorema 2.7.3 (Teorema 7.7.4 em [32]). *Seja G um grupo pro-p. As condições são equivalentes:*

1 G é um grupo pro-p livre.

2 a dimensão co-homológica de G é no máximo igual a 1.

Observe que o Teorema anterior junto com a proposição 2.4.4, justificam que um grupo pro-p G não trivial é livre se $cd_p(G) = 1$. Na realidade, os grupos pro-p livres são muito mas simples e se comportam de maneira mais próxima aos grupos livres abstratos do que os grupos profinitos livres. Isto se reflete em toda a Teoria Combinatorial de grupos pro-p e profinitos.

Na categoria dos Grupos, os grupos projetivos são retratos de grupos livre e logo são grupos livres, à luz do Teorema de Nielsen-Schreier. Um grupo **profinito projetivo** é um objeto projetivo na categoria dos grupos profinitos (i.e. cada morfismo $P \to X$ fatora-se através de cada epimorfismo $Y \to X$). Ao contrário do que ocorre com grupos abstratos ou pro-p, grupos profinitos projetivos podem não ser livres (e.g um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ contido em $\widehat{\mathbb{Z}}$).

Proposição 2.7.4 (Sec. 7.6 em [32]). *Seja G um grupo profinito. As seguintes asserções são equivalentes:*

(a) G é um grupo profinito projetivo;

(b) G é isomorfo a um subgrupo fechado de um grupo profinito livre;

(c) para cada primo p, G é p-projetivo (i.e. $cd_p(G) \leq 1$);

(d) para cada primo p, todo p-Sylow de G é pro-p livre

Além disso temos a seguinte equivalência para grupos pro-p livres.

Teorema 2.7.5 (Teorema 7.7.4 em [32]). *Seja G um grupo pro-p. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1 $cd_p(G) \leq 1$;

2 $H^2(G, \mathbb{F}_p) = 0$;

3 G é um grupo pro-p livre.

Amalgamações

Essencialmente existem duas tipos diferentes de amalgamações de grupos: produtos livres com amalgamações e HNN-extensões; estas duas são construções-chaves e ferramentas essenciais no estudo de grupos infinitos. A ideia geral neste contexto é: decompor, se possível, um grupo como uma amalgamação de seus subgrupos; e então, informações sobre este grupo podem ser obtidas das correspondentes informações sobre esses subgrupos. Assumiremos aqui conhecidas tais construções no contexto de grupos abstratos, as quais serão denotadas por $\amalg^{abs}$ e HNN^{abs}.

Sejam G_1 e G_2 grupos profinitos e G_0 subgrupo fechado de G_1 e G_2. Começamos discutindo no universo profinito os produtos livres com amalgamação $G^{abs} = G_1 \amalg^{abs}_{G_0} G_2$ e as imersões canônicas $\varphi_i^{abs} : G_i \to G^{abs} (i \in 1, 2)$. Seja $\mathcal{N}$ a coleção de todos os subgrupos normais N de G^{abs} tais que G^{abs}/N é um grupo finito (resp. p-grupo finito) e $(\varphi_i^{abs})^{-1}(N)$ é um subgrupo fechado de G_i $(i \in 1, 2)$. O completamento profinito (resp. pro-p) $\widehat{G^{abs}}^{\mathcal{N}}$ de G^{abs} com respeito de $\mathcal{N}$ é o **produto profinito** (resp. **pro-p**) **livre** de G_1 e G_2 com amalgamação G_0, denotado por $G_1 \amalg_{G_0} G_2$ (resp. $G_1 \amalg^{p}_{G_0} G_2$). Quando G_0 é trivial, dizemos simplesmente produto profinito (resp. pro-p) livre. Quando trabalhamos exclusivamente na categoria dos grupos pro-p, denotamos $\amalg^p$ por $\amalg$, por simplicidade notacional, já que p fica implícito no contexto.

A justificativa para esta definição de produto profinito (resp. pro-p) livre com amalgamação vem do fato que este grupo profinito (resp. pro-p) G construído, é um pushout na categoria dos grupos profinitos (resp. pro-p) dos monomorfismos dados, isto é: para quaisquer homomorfismos contínuos de grupos profinitos (resp. pro-p) $\psi_i : G_i \to K$ $(i \in \{1, 2\})$ satisfazendo $\psi \circ f_1 = \psi_2 \circ f_2$, existe um único homomorfismo contínuo $\psi : G \to K$ tal que $\psi\varphi = \psi_i$ $(i \in 1, 2)$, onde cada φ_i é a composição $G_i \to G^{abs} \to \widehat{G^{abs}}^{\mathcal{N}}$ das aplicações canônicas

$$
\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_2"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_2"] & \\
G_2 \arrow[r, "\varphi_1"'] \arrow[drr, bend right, "\psi_1"'] & G \arrow[dr, "\exists!\psi"] & \\
 & & K
\end{tikzcd}
$$

(Cf. Proposição 9.2.1 em [32]). Vide [[32], capítulo 9] para produto pro-$\mathcal{C}$ livre com amalgamação. Em contraste com o caso abstrato, em geral pode ocorrer das aplicações canônicas $G_i \to G(i \in \{1, 2\})$ não serem injetivas tanto no caso pro-p quanto profinito; quando ambas são injetivas dizemos que o produto livre com amalgamação é próprio. Por outro lado, se a imagem canônica de G_0 em G coincide com a imagem canônica de G_1 (resp. G_2) em G então $G = G_1 \amalg_{G_0} G_2$ é isomorfo a G_2 (resp. G_1); nestas situações dizemos que este produto livre amalgamado é **fictício**.

Proposição 2.7.6 (Teorema 2.3 em [29])**.** *O produto profinito livre de G_1 e G_2 com amalgamação G_0 é próprio se G_0 for central em G_1 ou G_2.*

Proposição 2.7.7 (Teorema 3.2 em [29])**.** *O produto pro-p livre de G_1 e G_2 com amalgamação G_0 é próprio se G_0 for procíclico*

O resultado a seguir são consequências imediatas (e podem ser melhor compreendidos através) da teoria de grupos profinitos agindo sobre árvores profinitas.

Teorema 2.7.8. *Seja $G = G_1 \amalg_H G_2$ um produto pro-p livre com amalgamação próprio.*

(a) (Teorema 4.2(b) em [31]) Seja K um subgrupo finito de G. Então $K \subset gG_ig^{-1}$ para algum $g \in G$ e algum $i \in \{1, 2\}$.

(b) (Teorema 4.3(b) em [31]) Seja $g \in G$. Então $G_i \cap gG_jg^{-1} \subseteq bHb^{-1}$ para algum $b \in G_i$,

Vamos definir agora HNN-extensões. Dado um grupo profinito (resp. pro-p) H, junto a um isomorfismo contínuo entre dois de seus subgrupos fechados $f : A \to B$, consideramos a HNN-extensão $G^{abs} = HNN^{abs}(H, A, B, f, t)$ e a imersão canônica $\varphi^{abs} : H \to G^{abs}$. Seja $\mathcal{N}$ a coleção de todos os subgrupos normais N de G^{abs} tais que G^{abs}/N é um grupo finito (resp. p-grupo finito) e $(\varphi^{abs})^{-1}(N)$ é um subgrupo fechado de H. O completamento profinito (resp. pro-p) $\widehat{G^{abs}}^{\mathcal{N}}$ de G^{abs} com respeito a $\mathcal{N}$, com a imagem $\iota(t)$ da letra estável t pela aplicação canônica $\iota : G^{abs} \to \widehat{G^{abs}}^{\mathcal{N}}$, é a **HNN-extensão profinita** (resp. **pro-p**) de H com subgrupos associados A e B por f, denotada por $HNN(H, A, B, f, \iota(t))$ (resp. $HNN^p(H, A, B, f, \iota(t))$). Quando trabalhamos exclusivamente na categoria dos grupos pro-p, denotamos HNN^p por HNN, por simplicidade notacional-já que p fica implícito no contexto; ademais, dependendo da situação é comum vermos na literatura os seguintes abusos de notação: $HNN(H, A, f, t)$, $HNN(H, A, t)$.

A razão para esta definição vem do fato que este grupo profinito (resp. pro-p) construído, possui a seguinte propriedade universal: para cada grupo profinito (resp. pro-p) K, para cada

$k \in K$ e para cada homomorfismo contínuo $\psi : H \to K$ satisfazendo $k^{-1}\psi(a)k = \psi(f(a))$ para todo $a \in A$, existe um único homomorfismo contínuo $\omega : G \to K$ com $\omega(\iota(t)) = k$ tal que $\psi = \varphi\omega$, onde φ é a composição $H \to G^{abs} \to \widehat{G^{abs}}^{\mathcal{N}}$ das aplicações canônicas

$$\begin{tikzcd} G = HNN(H,A,B,f,\iota(t)) \arrow[dr, "\exists!\omega"] & \\ H \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & K \end{tikzcd}$$

Em contraste com o caso abstrato, em geral pode ocorrer da aplicação canônica $\varphi : H \to G$ não ser injetiva tanto no caso pro-p quanto profinito. Quando φ é injetiva dizemos que a HNN-extensão é própria.

2.8 Grupos agindo sobre árvore

Uma abordagem para se estudar amalgamações é puramente Combinatorial, via relações e apresentações de grupos. Uma segunda abordagem a qual é uma poderosa técnica geométrica/ topológica foi desenvolvida por J-P. SERRE e H. BASS (Cf. [37]). A ideia geral da Teoria de Bass-Serre é a seguinte. Ao analisarmos a ação de um grupo sobre uma árvore, a estrutura de amalgamação deste grupo pode ser deduzida. Mais precisamente, "o que podemos dizer sobre um grupo G agindo sobre uma árvore T quando conhecemos o grafo quociente $G\backslash T$ bem como todos os estabilizadores de vértices e arestas?"$-$ o principal resultado de Bass-Serre diz que podemos reconstruir G a partir destas informações por meio de sucessivas amalgamações e extensões HNN.

Observamos ainda, que a Teoria de Bass-Serre recupera de modo relativamente fácil os principais Teoremas da Teoria Combinatorial de grupos, e.g. Nielsen-Schreier, subgrupo de Kurosh, Howson, Grushko-Neumann, M.Hall.

Agora notamos que, em geral, um elemento de um grupo profinito ou pro-p não pode ser expresso como uma palavra finita nos geradores; isto elimina a possibilidade de utilizar os métodos combinatórios no sentido original. Como veremos a seguir, a versão profinita da teoria de Bass-Serre existe mas não com força total. Esta teoria desenvolvida por O. Mel'nikov, L. Ribes e P. Zalesski [48], [27], [47], [30] é, com os Métodos Homológicos, um dos principais instrumentos da Teoria Combinatorial de Grupos profinitos, e portanto da nossa investigação.

Um **grafo profinito** consiste de um conjunto compacto totalmente desconexo não vazio Γ com um subconjunto distinguido fechado $V(\Gamma)$ e duas aplicações contínuas $d_0, d_1 : \Gamma \to V(\Gamma)$ cujas restrições a $V(\Gamma)$ sejam $id_{V(\Gamma)}$. Os elementos de $V(\Gamma)$ são chamadas de vértices de Γ, os elementos de $E(T) := \Gamma - V(\Gamma)$ são chamados de arestas de Γ, $d_0(e)$ (resp. $d_1(e)$) é chamado de vértice inicial (resp.final) de uma aresta e. Um morfismo é uma aplicação $\alpha : \Gamma \to \Delta$ entre grafos profinitos tal que $d_j\alpha = \alpha d_j$ para cada $j \in \{0, 1\}$. Se α é injetiva (resp. sobrejetiva), dizemos que $\alpha(\Gamma)$ é um subgrafo de Δ (resp. um quociente de Γ).

Um grafo profinito Γ é conexo se todos os seus quocientes finitos são grafos conexos no sentido usual (i.e a realização geométrica de cada um destes é conexa).

Seja Γ um grafo profinito. Denotamos por $(E^*(\Gamma), *)$ o espaço topológico quociente $E^*(\Gamma) = \Gamma/V(\Gamma)$ com ponto distinguido $* = \{V(\Gamma)\}$. Dizemos que Γ é uma **árvore profinita** (resp. **pro-p**) se:

A1. Γ é conexo

A2. para cada primo l (resp. para $l = p$), temos a seguinte sequência exata de $\mathbb{F}_l$- módulos profinitos livres

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_l[|(E^*(\Gamma, *))|] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{F}_l[|(V(\Gamma))|] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F}_l \longrightarrow 0,$$

onde os $\mathbb{F}_l$- homomorfismos são dados por $\varepsilon(v) = 1$ para cada $v \in V(\Gamma)$, e, $d(\overline{e}) = d_1(e) - d_0(e)$ onde $\overline{e}$ é a imagem de uma aresta $e \in E(\Gamma)$ no quociente $E^*(\Gamma)$, e $d(*) = 0$. (Cf. [48], Lema 1.16])

A intersecção de uma família de subárvores profinitas (resp. pro-p) de uma árvore profinita (resp. pro-p) é, ou vazia, ou uma árvore profinita (resp. pro-p). A menor (única) subárvore profinita (resp. pro-p) contendo dois vértices v e w será chamada de a geodésica conectando v e w e será denotada por $[v, w]$ (Cf. pag. 83-84 em [32]).

Um grupo profinito G age sobre um grafo Γ profinito, se a ação sobre o espaço topológico subjacente Γ é contínua e comuta com as aplicações d_0 e d_1, (i.e., $g(d_j(m))) = d_j(gm)$, para quaisquer $g \in G$, $m \in \Gamma$, $j \in \{0, 1\}$). Denotaremos o subgrupo dos estabilizadores de um elemento m de Γ por $stab_G(m)$.

Colecionamos a seguir alguns resultados fundamentais da teoria de grupos profinitos agindo sobre árvore pro-p.

Teorema 2.8.1. *Seja G um grupo pro-p agindo sobre uma árvore pro-p T*

1() (Prop. 3.5 em [32]) $T/\tilde{G}$ é uma árvore pro-p, onde $\tilde{G} = \overline{\langle stab_g(v) \mid v \in V(T) \rangle}$.

(2) (Cor. 3.6 em [32]) $G/\tilde{G}$ é um grupo pro-p livre, onde $\tilde{G} = \overline{\langle stab_g(v) \mid v \in V(T) \rangle}$.

(3) (Cor. 3.8 em [32]) Se v e w são dois vértices distintos de T, então $E([v, w]) \neq \emptyset$ e $(stab_G(v) \cap stab_G(w)) \leq stab_G(e)$ para cada $e \in [v, w]$.

(4) (Teor. 3.9 em [32]) Se G é finito, então $G = stab_G(v)$, para algum $v \in V(T)$.

Encerramos o presente capítulo com grupos fundamentais de grafos finitos de grupos pro-p, os quais aparecem apenas no Capítulo 5. Estes grupos são generalizações das duas importantes construções por amalgamações que apresentamos anteriormente. Até o final da presente seção Γ será um grafo finito conexo diferente de um único vértice. Um **grafo de grupos pro-p** $(\mathcal{G}, \Gamma)$ consiste de uma coleção de grupos pro-p $\{\mathcal{G}(m) \mid m \in \Gamma\}$ e uma coleção de homomorfismos contínuos $\{\partial_{j,e} : \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(d_j(e)) \mid e \in E(\Gamma), j \in \{0, 1\}\}$. Dizemos que $\mathcal{G}(v)$, $v \in V(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{G}(e)$, $e \in E(\Gamma)$) são os grupos-vértices (resp. grupos-arestas).

Seja T uma subárvore maximal de Γ. Uma T-**especialização** (β, β_1) de $(\mathcal{G}, \Gamma)$ para um grupo pro-p K consiste de duas aplicações $\beta : \bigcup_{m \in \Gamma} \mathcal{G}(m) \to K$ e $\beta_1 : \Gamma \to K$ satisfazendo:

(1) $\beta_{|\mathcal{G}(m)} : \mathcal{G}(m) \to K$ é um homomorfismo contínuo, $\forall m \in V(\Gamma)$;

(2) $\beta_1(m) = 1$, $\forall m \in T$;

(3) $\beta_1(e)^{-1} \beta_{|\mathcal{G}(d_0(e))}(\partial_{0,e}(g)) \beta_1(e) = \beta_{|\mathcal{G}(d_1(e))}(\partial_{1,e}(g)), \forall e \in E(T), \forall g \in G(e)$.

O **grupo pro-p fundamental** de um grafo de grupos pro-p $(\mathcal{G},\Gamma)$ com respeito a uma subárvore maximal T, consiste de um grupo pro-p $G = \prod_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ e uma T-especialização $(\nu,\nu_1):(\mathcal{G},\Gamma)\to G$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para cada T-especialização $(\beta,\beta_1):(\mathcal{G},\Gamma)\to K$ existe um único homomorfismo contínuo $\omega: G\to K$ tal que $\omega\nu=\beta$ e $\omega\nu_1=\beta_1$.

$$\begin{tikzcd} G = \prod_1(\mathcal{G},\Gamma,T) \arrow[dr, "\exists!\omega"] & \\ (\mathcal{G},\Gamma) \arrow[u, "{(\nu,\nu_1)}"] \arrow[r, "{(\beta,\beta_1)}"'] & K \end{tikzcd}$$

A existência de tal grupo pode ser realizada procedendo como anteriormente (Cf. [48], (3.3)): consideramos a construção abstrata correspondente; ignoramos a topologia de cada $\mathcal{G}(m)$ e formamos o grupo fundamental abstrato (Cf. [10], Sec. I.4); e completamos este grupo com respeito a uma certa topologia pro-p. Alternativamente, podemos verificar que o grupo dado pela apresentação pro-p

$$G=\langle X,Y\,|\,U,V,W\rangle,$$

onde $X=\{\text{ger}\,\mathcal{G}(v)|v\in V(\Gamma)\}$, $Y=t_e|\,e\in E(\Gamma)$, $U=\{\text{rel}\mathcal{G}(v)\,|\,v\in V(\Gamma)\}$,

$V=\{t_e^{-1}\partial_{0,e}(g)t_e\partial_{1,e}(g)^{-1}\,|\,g\in\mathcal{G}(e),\ e\in E(\Gamma)\}$, e $W=\{t_e\,|\,e\in E(T)\}$, satisfaz a propriedade universal.

A seguir, vamos também supor que cada uma das aplicações $\partial_{j,e}$ bem como cada uma das aplicações canônicas $\mathcal{G}(m)\to\prod_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ sejam injetivas. Com efeito, sempre podemos substituir os grupos em $(\mathcal{G},\Gamma)$ por suas imagens canônicas em $\pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$; esta operação não altera o grupo $\pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ e ficamos assim na situação desejada.

Para a T-especialização $(\nu,\nu_1):(\mathcal{G},\Gamma)\to\prod_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ definimos o **grafo padrão do grupo pro-p fundamental de grafos de grupos** $S=S(\mathcal{G},\Gamma,T)$ do seguinte modo:

$S=\cup_{m\in\Gamma}G/\nu(\mathcal{G}(m))$ com a topologia da união disjunta, $V(S)=\cup_{v\in V(\Gamma)}G/\nu(\mathcal{G}(v))$, $d_0(g\nu(\mathcal{G}(m)))=g\nu(\mathcal{G}(d_0(m)))=g\nu_1(m)\nu(\mathcal{G}(d_1(m)))$. Notamos que $E(S)$ é um subconjunto compacto de S.

Analogamente ao que ocorre na Teoria de Bass-Serre, o grupo $G=\prod_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ age naturalmente sobre $S=S(\mathcal{G},\Gamma,T)$ por $g_1(g_2\nu(\mathcal{G}(m)))=(g_1g_2)\nu(\mathcal{G}(m))$, e de modo que $G\backslash S=\Gamma$; se $Gs=m\in\Gamma$, então o estabilizador de um elemento s de S é conjugado a $\nu(\mathcal{G}(m))$; e, o grafo $S=S(\mathcal{G},\Gamma,T)$ é uma *árvore* (Cf. [48], Prop. 3.8).

Para conveniência do leitor, explicitamos a construção da árvore profinita padrão sobre a qual um dado produto profinito livre amalgamado próprio $G=A\amalg_C B$ age. Os vértices de S são todas as classes laterais de G/A e G/B, e as arestas de S são todas as classes laterais de G/C; cada aresta gC conecta o vértice inicial gA ao vértice final gB.

$$gA\bullet\overset{gC}{\longrightarrow}\bullet gB$$

Por último como no caso abstrato, introduziremos a sequência exata longa de Mayer-Vietoris para grupos profinitos (pro-p).

Teorema 2.8.2 (Sequência de Mayer-Vietoris em Homologia, Teorema 5.7 em [27]). *Seja G um grupo profinito (resp. pro-p) agindo sobre uma árvore profinita (resp. pro-p) T, onde*

$\{G_e\}_{e\in E(T)}$ *são os grupos de arestas e* $\{G_v\}_{v\in V(T)}$ *são os grupos de vértices. Então para cada* $[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$*-módulo profinito (resp.* $[[\mathbb{Z}_pG]]$*-módulo profinito)* M *temos a sequência longa exata*

$$\cdots \to \bigoplus_{e\in E(T)/G} H_j(G_e,M) \to \bigoplus_{v\in V(T)/G} H_j(G_v,M) \to H_j(G,M) \to \bigoplus_{e\in E(T)/G} H_{j-1}(G_e,M) \to \cdots$$

Proposição 2.8.3 ([44], Proposição 5.2.1)**.** *Seja* G *um grupo pro-p, então*

$$H_1(G,\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}}.$$

Teorema 2.8.4 (Teorema 1.13 em [14])**.**

i) Considere o produto pro-p amalgamado próprio $G = G_1 \amalg_C G_2$ *dado pela apresentação*

$$\langle X_1, X_2 \,|\, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2,\ c = \phi(c),\ c\in C\rangle,$$

onde $\phi : C \to G$ *é um homomorfismo injetor,* $G_i = \langle X_i \,|\, \mathcal{R}_i\rangle$*, para* $i = \{1,2\}$*. Então existe uma sequência exata longa da seguinte forma:*

$$\cdots \to H_1(C,\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\alpha} H_1(G_1,\mathbb{Q}_p) \oplus H_1(G_2,\mathbb{Q}_p) \to H_1(G,\mathbb{Q}_p) \to H_0(C,\mathbb{Q}_p) \to \cdots$$

ou equivalentemente, usando a proposição 2.8.3, temos

$$\cdots \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}}) \oplus (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_2^{\mathrm{ab}}) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \cdots,$$

ii) Considere a HNN-extensão pro-p própria $G = HNN(G_1, C, t)$ *dado pela apresentação*

$$\langle X_1, t \,|\, \mathcal{R}_1,\ c = t\phi(c)t^{-1},\ c\in C\rangle,$$

onde $\phi : G_1 \to G$ *é um homomorfismo injetor,* $G_1 = \langle X_1 \,|\, \mathcal{R}_1\rangle$*. Então existe uma sequência exata longa da seguinte forma:*

$$\cdots \to H_1(C,\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\alpha} H_1(G_1,\mathbb{Q}_p) \to H_1(G,\mathbb{Q}_p) \to H_0(C,\mathbb{Q}_p) \to \cdots$$

ou equivalentemente, usando a proposição 2.8.3, temos

$$\cdots \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow \cdots,$$

onde $\alpha(q \otimes c\overline{C'}) = (q \otimes c\phi(c)^{-1}\overline{G_1'})$*,* $c \in C$ *e* $q \in \mathbb{Q}_p$*.*

Teorema 2.8.5 (Sequência De Mayer-Vietoris em cohomologia, Proposição 9.2.13 e 9.4.2 em [32])**.**

i) Seja $G = G_1 \amalg_C G_2$ *um produto profinito livre amalgamado próprio de grupos profinitos, então para qualquer* $[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$*-módulo de esquerda discreto* A *existe uma sequência exata longa*

$$0 \longrightarrow H^0(G,A) \longrightarrow H^0(G_1,A) \oplus H^0(G_2,A) \longrightarrow H^0(C,A) \cdots \longrightarrow H^n(G,A) \longrightarrow \cdots,$$

ii) Seja $G = HNN(G_1, C, t)$ *uma HNN-extensão profinita própria de grupos profinitos, então para qualquer* $[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$*-módulo à esquerda discreto* A *existe de sequência exata longa*

$$0 \longrightarrow H^0(G,A) \longrightarrow H^0(G_1,A) \longrightarrow H^0(C,A) \cdots \longrightarrow H^n(G,A) \longrightarrow \cdots,$$

Capítulo 3

Grupos Limites, Grupos Profinito limites e Pro-p limites

3.1 Grupos limites

3.1.1 Introdução, definição e exemplos

Nos anos recentes grupos limites (ou w-grupos residualmente livres) tem muita atenção (Cf. [40], [3], [8], [17], [28]) primeiramente dado pelo excelente trabalho de Z. Sela (Cf. [34], [35] e as referências anteriormente mencionadas).

Esta classe de grupos foi introduzida por Benjamin Baumslag in [2] com o nome tradicional de *grupos totalmente residualmente livres*, e seguidamente estudado intensamente por muitos autores (Cf. [11], [18], [22], [19], [20]). Diz-se G é um **grupo limite** se para qualquer subconjunto T de G existe um homomorfismo de G a um grupo livre F que é injetivo sobre T.

Exemplos de grupos limites incluem todos os grupos livres finitamente gerados, grupos abelianos livres finitamente gerados e todos os grupos fundamentais de superfícies fechadas orientáveis. Além disso, a classe de grupos limites é fechada com respeito a subgrupos finitamente gerados e produto livre. Este fato poder ser usado para construir muitos exemplos. Exemplos mais sofisticados podem ser encontrados nos artigos citados anteriormente.

Remark 3.1.1. *O grupo $G = \langle a, b\rangle_{a^2b^2=c^2d^2}\langle c, d\rangle$ é o grupo fundamental de uma superfície fechada não orientável, e é um grupo limite (Cf. [17, §3.1]). Além disso, $G^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}^3 \times C_2$, onde $C_2 = \mathbb{Z}/2Z$.*

3.1.2 Extensão de Centralizador

Por $\mathbb{N}$ denotamos o conjunto de inteiros positivos e por $\mathbb{N}_0$ o conjunto de inteiros não negativos, i.e., $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Seja G um grupo limite. Existe um procedimento padrão para construir um grupo limite $G(C, m)$, onde $C \subseteq G$ é um subgrupo cíclico maximal de G e $m \in \mathbb{N}$. Este procedimento é conhecido como ***extensão de centralizador***, i.e., se G é um grupo limite, então

$$G(C, m) = G \star_C (C \times \mathbb{Z}^m) \tag{3.1}$$

é novamente um grupo limite (Cf. [20, Lema 2 e Teo. 4]). Por facilidade chamaremos a um grupo limite G de uma *iterada extensão de centralizador de um grupo livre*(=i.e.c.l), se existe uma sequência de grupos limites $(G_k)_{0\leq k\leq n}$ tal que

(EZ_1) $G_0 = F$ é um grupo livre finitamente gerado, e $G_n \simeq G$;

(EZ_2) para $k \in \{0, \dots, n-1\}$ existe um subgrupo cíclico maximal $C_k \subseteq G_k$ e $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $G_{k+1} \simeq G_k(C_k, m_k)$.

Se G é uma iterada extensão de centralizador de um grupo livre, chamaremos o menor $n \in \mathbb{N}_0$ para qual existe uma sequência de grupos limites $(G_k)_{0\leq k\leq n}$ satisfazendo (EZ_1) e (EZ_2) de *nível* de G. Este número é denotado por $\ell(G)$. Por exemplo, um grupo livre finitamente gerado é uma iterada extensão de centralizador de um grupo livre de nível 0, e um grupo abeliano livre finitamente gerado é uma iterada extensão de centralizador de um grupo livre de nível 1.

3.1.3 Altura de um grupo limite

Pelo segundo Teorema de imersão (Cf. [22, §2.3, Thm. 2]), cada grupo limite G é isomórfico a um subgrupo de uma i.e.c.l de um grupo H. A ***altura*** $\mathrm{ht}(G)$ de G é definida como

$$\mathrm{ht}(G) = \min\{\, \ell(H) \mid G \subseteq H,\ H \text{ an i.e.c.f. group}\,\}. \tag{3.2}$$

Por exemplo, um grupo livre G é de altura 0 se, e somente se, este é um grupo livre de posto finito, e um grupo abeliano livre não cíclico finitamente gerado é de altura 1.

3.1.4 Propriedades e Teoremas sobre grupos limites

Resumiremos propriedades importantes de um grupo limite no seguinte Teorema, as quais podem ser encontradas no artigo dado por E.Alibegović e M.Bestvina [1].

Teorema 3.1.2. *Seja G um grupo limite. Então*

(1) o grupo G é livre de torsão.

(2) todo subgrupo abeliano de G é finitamente gerado.

(3) Se G for não abeliano, então seu centro é trivial.

(4) O grupo G é finitamente apresentado.

As seguintes três proposições de grupos limites podem ser encontradas no artigo de D. Kochloukova em [23].

Proposição 3.1.3 (Corolário 4). *A abelianização de um grupo limite não trivial é infinito.*

Proposição 3.1.4 (Lema 5). *Para um grupo limite G, a característica de Euler $\chi(G)$ é não positiva. Além disso, $\chi(G) = 0$ se, e somente se, G é abeliano.*

Proposição 3.1.5 (Corolário 8). *Todo grupo limite G é de tipo FP_∞ e $cd(G) < \infty$.*

Grupos limites com a quantidade mínima de geradores menor ou igual a 3 são conhecidos. Em [11] o seguinte foi mostrado.

Teorema 3.1.6 ([11]). *Seja G um grupo limite. Então*

(a) $d(G) = 1$ se, e só se, G é um grupo cíclico infinito;

(b) $d(G) = 2$ se, e só se, G é um grupo livre de posto 2 ou abeliano livre de posto 2;

(c) $d(G) = 3$ se, e só se, G é um grupo livre de posto 3, um grupo abeliano livre de posto 3, ou uma i.e.c.l de posto 2, i.e, G tem a apresentação

$$G = \langle\, x_1, x_2, x_3 \mid x_3^{-1}\, v\, x_3 = v\,\rangle, \tag{3.3}$$

onde $v = v(x_1, x_2) \in F(\{x_1, x_2\})$ é não trivial.

Teorema 3.1.7 (Teorema 1 em [4]). *Seja G um grupo limite não abeliano e H um subgrupo normal de G finitamente gerado, então H tem índice finito em G.*

3.2 Grupos Profinitos Limites e Pro-p limites

Seja $\mathcal{C}$ uma classe não-vazia de grupos finitos fechada sob formação de subgrupo quociente e produto direto finito. Definimos indutivamente as seguintes classes de grupos pro-$\mathcal{C}$:

$\mathcal{G}_0$ é a classe de todos os grupos pro-$\mathcal{C}$ livres de posto finito.

$\mathcal{G}_n$ $(N > 0)$ é a classe de todos os grupos G_n, onde G_n é o produto pro-$\mathcal{C}$ livre amalgamado $G_{n-1} \amalg_{C_{n-1}} A_{n-1}$ satisfazendo:

(i) C_{n-1} é um subgrupo próprio procíclico e um fator direto de um grupo pro-$\mathcal{C}$ abeliano livre de posto finito qualquer A_{n-1}.

(ii) C_{n-1} é um subgrupo do grupo G_{n-1} de $\mathcal{G}_{n-1}$ tal que o normalizador em G_{n-1} de cada subgrupo procíclico não trivial de C_{n-1} coincide com C_{n-1}.

Definição 3.2.1. Um grupo **pro-$\mathcal{C}$ limite** G é um subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado de algum grupo G_n de $\mathcal{G}_n$ $(n \geq 0)$. A altura de G ht(G) é o menor inteiro n.

Observamos que, quando $\mathcal{C}$ consiste de todos os p-grupos finitos a nossa classe de grupos pro-$\mathcal{C}$ coincide precisamente com a classe de grupos originalmente estudada em [25].

Exemplo 3.2.2. *Consideremos o grupo pro-p G com a seguinte apresentação*

$$G = \langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g | a_1^{p^n}[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]\rangle,$$

onde $p > 2$ e n um número natural ou ∞ (este último significa que $a_1^{p^n} = 1$). Este grupo é chamado ***grupo Demushkin****.*

Se $n = \infty$, então G tem a apresentação pro-p $\langle x_1, \cdots x_d \,|\, [x_1, x_2] \cdots [x_{d-1}, x_d]\rangle$ onde d é par. Se $d = 2$ então G é um grupo pro-p abeliano livre de posto finito, logo um grupo pro-p limite.

Os grupos pro-p limites foram estudados por Pavel Zalesski e Dessislava Kochloukova em seu artigo [25], seguidamente foram estudados por Pavel Zalesski e Ilir Snopche em seu artigo [40].

A continuação faremos um resumo das Propriedades e Teoremas sobre grupos pro-p limite demonstradas no artigo [25] e [40]

No seguinte Teorema temos um conjunto de propriedades que satisfazem um grupo pro-p limite.

Teorema 3.2.3 (Dessislava Kochloukova e Pavel Zalesski). *Seja G um grupo pro-p limite. Então*

(1) G é livre-por-(poli-procíclico livre de torsão);

(2) G tem dimensão cohomológica finita, logo G é livre de torsão;

(3) G é do tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ e tem característica de Euler não positiva;

(4) Se G é 2-gerado então G é pro-p livre ou pro-p abeliano livre.

Demonstração. A demonstração do Teorema encontra-se em [25]. Para (1), (2), (3), observar Lema 3.1, Proposição 4.3, Corolário 4.4 e Teorema 8.1. A demonstração de (4) esta incluída na seção 7.

∎

Agora temos um corolário do Teorema 3.2.3 o qual nós diz que a abelianização de um grupo pro-p limite não trivial não é um grupo de torsão.

Corolário 3.2.4 (Corolário 4.5 em [25]). *Cada grupo pro-p limite não trivial tem abelianização infinita.*

O seguinte Teorema caracteriza o índice de um subgrupo normal de um grupo pro-p limite.

Teorema 3.2.5 (Teorema 6.7 em [25]). *Seja G um grupo pro-p limite não abeliano e H um subgrupo normal não trivial finitamente gerado de G. Então $[G : H]$ é finito.*

O seguinte Teorema expressa um grupo pro-p limite num grafo finito de grupos.

Teorema 3.2.6 (Teorema B em [40]). *Seja G um grupo pro-p limite. Se G tem altura $n \geq 1$, então G é o grupo fundamental de um grafo finito de grupos que tem grupos de arestas grupos procíclicos e triviais e grupos de vértices finitamente gerados. Além disso, se G é não abelino, então existe ao menos um grupo de vértice que é pro-p não abeliano e todos os grupos de vértices não abelianos de G são pro-p limite de altura no máximo $n-1$.*

O seguinte Teorema fala sobre a característica de Euler e deficiência de um grupo pro-p limite

Teorema 3.2.7 (Teorema C em [40]). *Seja G um grupo pro-p limite. Então*

(1) O grupo G tem característica de Euler não positiva. Além disso, $\chi(G) = 0$ se e só se G é abeliano;

(2) Se cada pro-p subgrupo abeliano de G é procíclico e G é não procíclico, então $def(G) \geq 2$;

(3) *Existe só uma quantidade finita de classes de conjugação de subgrupos abelianos maximais não procíclico;*

(4) *[Propriedade Greenberg-Stallings] Se H e K são subgrupos finitamente gerados de G com a propriedade que $H \cap K$ tem índice finito em H e K, então $H \cap K$ tem índice finito em $\langle H, K\rangle$.*

Lembre-se que para um grupo G pro-p define-se a deficiência $def(G)$ de G como

$$def(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, \mathbb{F}_p)$$

O seguinte resultado mostra que para um subgrupo aberto U de G, a função $d(U)$ é uma função monótona.

Teorema 3.2.8 (Teorema 3.3 [26]). *Seja G um grupo pro-p limite e U um subgrupo normal aberto de G de índice primo p. Então $d(U) > d(G)$.*

O seguinte Teorema ajuda a calcular o posto racional de um grupo pro-p limite.

Teorema 3.2.9 (Teorema 5.3 em [26]). *Seja G um grupo pro-p limite e $\{U_i\}_{i\in I}$ uma sequência de subgrupos abertos de G tal que $U_{i+1} \leq U_i$ para todo $i \in I$ e $cd(\bigcap_i U_i) \leq 2$. Então,*

(1) $\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i, \mathbb{F}_p)/[G : U_i] = 0$ *para* $j \geq 3$;

(2) *Se $\{[G : U_i]\}_{i\in I}$ converge para o infinito, então temos*

$$\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} \big(H_1(U, \mathbb{F}_p) - H_2(U, \mathbb{F}_p)\big)/[G : U_i] = -\chi(G),$$

onde $\chi(G)$ é a característica de Euler de G.

(3) *Se $[G : U_i]$ converge para o infinito e $\bigcap_{i\in I} U_i = 1$, então temos*
$\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_i, \mathbb{F}_p)/[G : U_i] = 0$ *e* $\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} (H_1(U_i, \mathbb{F}_p)/[G : U_i] = -\chi(G)$.

Definição 3.2.10. Seja G um grupo e $\widehat{G}$ seu completamento profinito de G. O grupo G é chamado **bom** se o homomorfismo de grupos cohomologícos

$$H^n(\widehat{G}, M) \longrightarrow H^n(G, M)$$

induzido pelo homomorfismo natural $G \longrightarrow \widehat{G}$ de G a seu completamento profinito $\widehat{G}$ é um isomorfismo, para cada G-módulo M finito.

Definição 3.2.11. Seja G o grupo fundamental de um grafo de grupos (Δ, X), onde G_e são os grupos de arestas e G_v são os grupos de vértices, para todo $v \in V(X)$, $e \in E(X)$. A topologia profinita sobre G é **eficiente** se G é residualmente finito e a topologia profinita sobre G induz a topologia profinita completa sobre G_v e G_e, para todos os grupos de arestas e vértices, e G_v e G_e são fechados na topologia profinita sobre G.

O seguinte Teorema permite trabalhar com completamento profinito de um grupo limite.

Teorema 3.2.12 (Teorema 3.8 e 3.9 em [16]). *Seja G um grupo limite. Então, a topologia profinita sobre G é eficiente e G é um grupo bom.*

As seguintes duas proposições são dadas por Theo Zapata na sua tese de doutorado (Cf. [49])

Proposição 3.2.13 (Proposição 2.3.2 em [49]). *Se G é um grupo limite, então o completamento profinito de G é profinito limite.*

Teorema 3.2.14 (Proposição 2.2.2 em [49]). *Se G é um grupo profinito limite, então a p-dimensão cohomológica de G é finita, para qualquer primo p, assim G é livre de torsão.*

Capítulo 4

Posto racional de um Grupo Limite

O propósito de esta seção é investigar a seguinte pergunta que foi dada por D.H. Kochloukova e P.A. Zalesski em [26], onde eles respondem a pergunta para pro-p grupos limites em Teorema 3.2.8.

Pergunta A. *Seja G um grupo limite não abeliano, e seja U um subgrupo normal de G de índice primo p. Será verdade que $d(U) > d(G)$?*

Aqui $d(G)$ denota o número mínimo de geradores de um grupo finitamente gerado G.

Para um grupo abstrato G finitamente gerado, existem dois invariantes homológicos os quais podem ser vistos como aproximações homológicas de $d(G)$: O *posto racional* de G dado por

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \dim_{\mathbb{Q}}(G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(G, \mathbb{Q})), \tag{4.1}$$

onde $G^{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$ denota a *abelianização* de G, e

$$d(G^{\mathrm{ab}}) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(G^{\mathrm{ab}}) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(H_1(G, \mathbb{Z})). \tag{4.2}$$

Em particular, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) \leq d(G^{\mathrm{ab}}) \leq d(G)$.

Um dos principais resultados de este capítulo é responder afirmativamente o análogo da pergunta A para o posto racional. (Cf. Teorema. 4.3.3). Outro principal resultado, deste capítulo é encontrar classes de grupos limites que respondem a Pergunta A positivamente (cf Corolário 4.3.4 e Teorema 4.3.12).

Remark 4.0.15. *Os resultados deste capítulo foram publicados em [43].*

4.1 Grupos limites como grupo fundamental de um grafo de grupos

Nesta seção expressaremos um grupo limite como um grafo finito de grupos. Como consequência, obtemos o seguinte Teorema, o qual é levemente mais preciso que o Teorema [20, Teorema. 6].

Teorema 4.1.1. *Seja G um grupo limite de altura $n \geq 1$. Então G é isomórfico ao grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}', \Lambda_0, \mathcal{T}_0)$ de um grafo de grupos $\mathcal{G}'$ satisfazendo* *(i)* Λ_0 *é finito;*

(ii) *Para todo* $v \in V(\Lambda_0)$, $\mathcal{G}'_v$ *é um grupo abeliano livre ou um grupo limite de altura ao mais* $n-1$*;*

(iii) *Para todo* $e \in E(\Lambda_0)$, $\mathcal{G}'_e$ *é um grupo cíclico infinito ou trivial.*

Demonstração. Seja G um grupo limite de altura $\mathrm{ht}(G) = n \geq 1$, e seja H uma iterada extensão de centralizador de um grupo livre de nível $\ell(H) = n$ tal que $G \subseteq H$.

Pelo Teorema 1.1.4, H age sobre um *árvore* Γ sem inversão (de arestas) com 2 órbitas sobre $V(\Gamma)$ e 2 órbitas sobre $E(\Gamma)$, onde $V(\Gamma)$ é o conjunto de *vértices* de Γ, e $E(\Gamma)$ é o conjunto de (orientadas) *arestas* de Γ

Além disso, para $v \in V(\Gamma)$ seu estabilizador H_v é um grupo abeliano livre ou um grupo limite de altura $n-1$.

Para $e \in E(\Gamma)$, seu estabilizador H_e é cíclico infinito ou trivial. Como G esta agindo sobre Γ sem inversão de arestas, o Teorema de Estrutura da Teoria de Bass-Serre (Cf. Teorema 1.1.6) implica que G é isomórfico ao grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}, \Lambda, \mathcal{T})$ do grafo de grupos $\mathcal{G}$ sobre um grafo conexo Λ e $\mathcal{T}$ é uma subárvore maximal de Λ. Além disso, para todo $e \in E(\Lambda)$, $\mathcal{G}_e$ é um grupo cíclico infinito ou trivial.

Por simplicidade assumimos que $G = \pi_1(\mathcal{G}, \Lambda, \mathcal{T})$. Já que G é finitamente gerado, $E = E(\Lambda) \setminus E(\mathcal{T})$ é finito. Caso contrário, G possui um grupo livre infinitamente gerado como uma imagem homomórfica. Similarmente, como G é finitamente gerado, existe um conjunto finito $\Omega \subseteq V(\Lambda)$, tal que

$$G = \langle\, e,\, \mathcal{G}_v \mid e \in E,\, v \in \Omega \,\rangle. \tag{4.3}$$

Seja $\mathcal{T}_0 = \mathrm{span}_{\mathcal{T}}(\Omega \cup \{\, o(e), t(e) \mid e \in E \,\})$ a árvore dada pelo conjunto Ω e as origens e finais das arestas em E, e seja Λ_0 o subgrafo de Λ satisfazendo $V(\Lambda_0) = V(\mathcal{T}_0)$, e $E(\Lambda_0) = E(\mathcal{T}_0) \sqcup E$. Pela construção, Λ_0 é um grafo conexo finito, e $\mathcal{T}_0$ é uma subárvore maximal de Λ_0. Seja $\mathcal{G}' = \mathcal{G}|_{\Lambda_0}$ a restrição de $\mathcal{G}$ a Λ_0. Então, pela definição nós temos um homomorfismo canônico de grupos $i_{\mathcal{T}} \colon \pi_1(\mathcal{G}', \Lambda_0, \mathcal{T}_0) \to \pi_1(\mathcal{G}, \Lambda, \mathcal{T})$. Para $P_0 \in V(\Lambda_0)$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathcal{G}', \Lambda_0, P_0) \arrow[r, "i_{P_0}"] \arrow[d] & \pi_1(\mathcal{G}, \Lambda, P_0) \arrow[d] \\
\pi_1(\mathcal{G}', \Lambda_0, \mathcal{T}_0) \arrow[r, "i_{\mathcal{T}}"] & \pi_1(\mathcal{G}, \Lambda, \mathcal{T})
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

onde i_{P_0} é uma aplicação canônica e pela Proposição 1.1.5 as aplicações verticais são isomorfismos. Como uma aplicação canônica é uma aplicação que leva palavras reduzidas generalizadas em palavras reduzidas generalizadas temos que i_{P_0} é injetivo, logo $i_{\mathcal{T}}$ é injetivo. Assim, por (4.4), $i_{\mathcal{T}}$ é um isomorfismo, pois i_{p_0} é sobrejetora.

Pelo argumento anterior, é suficiente mostrar que $\mathcal{G}'_v$ é finitamente gerado para todo $v \in V(\Lambda_0)$. Isto segue ao aplicarmos o Teorema 1.1.3 uma quantidade finita de vezes, portanto para todo $v \in V(\Lambda_0)$, $\mathcal{G}'_v$ é um grupo abeliano livre ou um grupo limite de altura ao mais $n-1$.

■

4.2 Propriedades do posto racional

Lema 4.2.1. *Seja* G *um grupo limite e* $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = 1$, *então* $G \simeq \mathbb{Z}$

Demonstração. Supor que G é um grupo não abeliano, então existem a, b em G tais que $[a, b] \neq 1$. Pela hipótese existe um grupo livre de posto finito F e um epimorfismo ϕ tal que $\phi : G \longrightarrow F$ e $\phi([a, b]) \neq 1$. Logo, existe um epimorfismo entre $G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ e $F^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(F)$ e $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(F) = 1$. Já que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(F) = d(F^{\mathrm{ab}}) = d(F) = 1$, então F é um grupo abeliano e $G' \leq Ker(\phi)$, assim $\phi([a, b]) = 1$. Isto é uma contradição. Logo G é um grupo abeliano. Já que G é livre de torsão (Cf. Teorema 3.1.2 item (1)) e $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = 1$, então nós temos que $G \simeq \mathbb{Z}$. ∎

Lema 4.2.2. *Seja G_1 e G_2 grupos finitamente gerados, e seja $C = \langle c \rangle$ um subgrupo cíclico infinito ou trivial.*

(a) Se $G = G_1 \star_C G_2$ é um produto livre com amalgamação em C, então

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - \rho(G), \tag{4.5}$$

onde $\rho(G) \in \{0, 1\}$. Além disso, se $C = 1$, então $\rho(G) = 0$.

(b) Se $G = \mathrm{HNN}_{\phi}(G_1, C, t) = \langle\, G_1, t \mid t\,c\,t^{-1} = \phi(c)\,\rangle$ é uma HNN-extensão com subgrupo associado em $C \subseteq G_1$, então

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \rho(G), \tag{4.6}$$

onde $\rho(G) \in \{0, 1\}$. Além disso, existe uma sequência exata

$$C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha} G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta} G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0, \tag{4.7}$$

onde $\alpha(c \otimes q) = (c\phi(c)^{-1}G_1^{'}) \otimes q$, $q \in \mathbb{Q}$. Além,

(1) $\rho(G) = 0$ se, e somente se, α é injetivo;

(2) $\rho(G) = 1$ se, e somente se, α é a aplicação nula.

Demonstração.

I) Seja $G = G_1 *_C G_2$. Pelo Teorema 1.2.20 item(i) temos a sequência exata longa de Mayer-Vietoris associada a $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha} (G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus (G_2^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} (G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to (\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to 0, \tag{4.8}$$

onde $\alpha(c_1 \otimes q) = (c_1 G_1^{'} \otimes q, -\phi(c_1) G_2^{'} \otimes q)$, com $c_1 \in C$.
Já que $1 = \dim_{\mathbb{Q}}(C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}}(im\alpha) + \dim_{\mathbb{Q}}(ker\alpha)$, então temos os seguintes dois casos:

1) Se α é uma aplicação injetiva, então nós temos a sequência exata

$$0 \to C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha} (G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus (G_2^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} (G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to (\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to 0, \tag{4.9}$$

logo temos,

$$\begin{aligned} -\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) - 2.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) &= 0 \\ -1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) + 1 - 2 + 1 &= 0 \\ \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) &= rk_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - 1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

2) Se α é a aplicação nula, então nós temos a seguinte sequência exata

$$0 \to (G_1^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus (G_2^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} (G^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to (\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to 0, \quad (4.11)$$

logo temos,

$$\text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G) + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) - 2.\text{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 0$$

$$\text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G) + 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\text{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) \quad (4.12)$$

II) Seja $G = HNN(G_1, C, t)$.

a) Pelo Teorema 1.2.20 item(ii) temos a sequência exata longa de Mayer-Vietoris associada a $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha} (G_1^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} (G^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0, \quad (4.13)$$

onde $\alpha(c_1 \otimes q) = ((c_1\phi(c_1)^{-1}G_1^{'}) \otimes q)$, com $c_1 \in C$.
Já que $1 = \dim_{\mathbb{Q}}(C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}}(Im\alpha) + \dim_{\mathbb{Q}}(Ker\alpha)$ então temos os seguintes dois casos:
Se α é uma aplicação injetiva, então temos uma sequência exata

$$0 \to C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha} (G_1^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} (G^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0, \quad (4.14)$$

Logo,

$$-\text{rk}_{\mathbb{Q}}(C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) - \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G) + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) - \text{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 0$$

$$-1 + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) - \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G) + 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\text{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) \quad (4.15)$$

Se α é a aplicação nula, então temos uma sequência exata

$$0 \to (G_1^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} (G^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0,$$

logo,

$$\text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) - \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G) + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) - \text{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) + \text{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 0$$

$$\text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) - \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G) + 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\text{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \text{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 \quad (4.16)$$

Por último, os remarques (1) e (2) seguem do fato que $\dim_{\mathbb{Q}}(im(\alpha)) \in \{0, 1\}$, que $\dim_{\mathbb{Q}}(im(\alpha)) = 1$ se e só se, α é injetiva.

■

4.3 Resultados Principais Do Capítulo

4.3.1 Teorema sobre Posto racional em grupos limites

Usando o Lema 4.2.2 nós provamos uns dos principais Teoremas deste capítulo.

Observação 4.3.1. *No seguinte Teorema por comodidade algumas vezes usaremos o seguinte isomorfismo $H_1(G,\mathbb{Q}) \cong G/[G,G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, onde $\mathbb{Q}$ é um G-módulo trivial, dado pela observação 1.2.18 item(c).*

Lema 4.3.2. *Seja $G = \mathrm{HNN}_{\phi}(G_1, C, t) = \langle\, G_1, t \mid\ t c t^{-1} = \phi(c)\,\rangle$ uma HNN-extensão com subgrupo base G_1 e subgrupo cíclico infinito $C = \langle c\rangle \neq 1$. Se U é um subgrupo normal de G de índice primo p, tal que $|G_1 : U \cap G_1| = p$ e $|C : C \cap U| = p$, então o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_2"'] & G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"'] \\ C^p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha_1"] & (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{tikzcd} \tag{4.17}$$

onde tr_1 é a aplicação induzida do homomorfismo transfer $\tau : G_1^{\mathrm{ab}} \to (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}}$, tr_2 é a aplicação injetiva induzida do homomorfismo injetivo $\gamma : C \to C^p$, $c_1 \mapsto c_1^p$, $\alpha(c_1 \otimes q) = ((c_1\phi(c_1)^{-1}G_1^{'}) \otimes q)$ e $\alpha_1(c_1^p \otimes q) = ((c_1^p\phi(c_1)^{-p}(U \cap G_1)^{'}) \otimes q)$, $c_1 \in C$.

Demonstração. Já que $|G_1 : U \cap G_1| = p$, então pelo Corolário 1.2.21 temos o homomorfismo transfer $\tau : G_1^{\mathrm{ab}} \to (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}}$ dado por

$$gG_1^{'} \mapsto \bigoplus_{h \in \mathcal{T}} hg\overline{hg}^{-1}(U \cap G_1)^{'},$$

onde $\mathcal{T}$ é o conjunto de representantes para $G_1/G_1 \cap U$ e $\overline{hg}$ é o representante da classe $(U \cap G_1)hg$. Além disso, τ é independente de $\mathcal{T}$ e induz um homomorfismo

$$\mathrm{tr}_1 : G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

dado por $gG_1^{'} \otimes q \mapsto \tau(gG_1^{'}) \otimes q$.

Como $|C : C \cap U| = p$, então $C \nleq U$ e $\phi(C) \nleq U$, pois U é normal. Logo $UC = G$ e $U\phi(C) = G$, além disso $U \cap C = C^p$ e $U \cap \phi(C) = \phi(C)^p$. Já que

$$p = |\frac{G_1}{U \cap G_1}| = |\frac{C(U \cap G_1)}{U \cap G_1}| = |\frac{\phi(C)(U \cap G_1)}{U \cap G_1}|,$$

então $\mathcal{T} = \{1, c, c^2, \dots c^{p-1}\}$ ou $\mathcal{T} = \{1, \phi(c), \phi(c)^2, \dots \phi(c)^{p-1}\}$ são conjuntos de representantes para $G_1/U \cap G_1$.

Por outro lado, o homomorfismo injetivo

$$\gamma : C \to C^p,$$

dado por $c_1 \mapsto c_1^p$, induz um homomorfismo injetivo $\mathrm{tr}_2 : C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to C^p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ dado por $c_1 \otimes q \mapsto c_1^p \otimes q$, pois $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é um functor exato.

Agora nós provamos que $tr_1 \circ \alpha = \alpha_1 \circ tr_2$, ou seja o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{tikzcd} C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_2"'] & G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"'] \\ C^p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha_1"] & (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{tikzcd} \tag{4.18}$$

Em efeito, seja $c_1 \otimes q$ um gerador de $C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, então

$$(\alpha_1 \circ \mathrm{tr}_2)(c_1 \otimes q) = \alpha_1(c_1^p \otimes q) = (c_1^p \phi(c_1)^{-p}(U \cap G_1)^{'}) \otimes q$$

$$(\mathrm{tr}_1 \circ \alpha)(c_1 \otimes q) = tr_1\big(c_1 \phi(c_1)^{-1} G_1{}' \otimes q\big) = (\tau(c_1 G_1^{'})\tau(\phi(c_1)G_1{}')^{-1}) \otimes q.$$

Usando $\mathcal{T} = \{1, c, c^2, \dots c^{p-1}\}$, temos que $\tau(cG_1^{'}) = c^p(U \cap G_1)^{'}$. Similarmente usando $\mathcal{T} = \{1, \phi(c), \phi(c)^2, \dots \phi(c)^{p-1}\}$, temos que $\tau(\phi(c)G_1^{'}) = \phi(c)^p(U \cap G_1)^{'}$, logo $\tau(\phi(c_1)G_1^{'}) = \phi(c_1)^p(U \cap G_1)^{'}$. Assim

$$(\mathrm{tr}_1 \circ \alpha)(c_1 \otimes q) = (\tau(c_1 G_1^{'})\tau(\phi(c_1)G_1{}')^{-1}) \otimes q = (c_1^p \phi(c_1)^{-p}(U \cap G_1)^{'}) \otimes q.$$

Portanto $\mathrm{tr}_1 \circ \alpha = \alpha_1 \circ \mathrm{tr}_2$ ∎

Teorema 4.3.3. *Seja G um grupo limite não abeliano, e seja U um subgrupo normal de G de índice primo p. Então* $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$.

Demonstração. Para demonstrar o Teorema procederemos pela indução sobre a altura $n = \mathrm{ht}(G)$ de G (Cf. §3.1.3). Se $n = 0$, então G é um grupo livre finitamente gerado satisfazendo $d(G) \geq 2$, e o Teorema de Nielsen-Schreier (Cf. Teorema 1.1.2) produz

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = d(U) = p \cdot (d(G) - 1) + 1 > d(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) \tag{4.19}$$

e logo nós temos a veracidade do Teorema para $n = 0$.

Assumimos que G é um grupo limite de altura $\mathrm{ht}(G) = n \geq 1$, e que o Teorema é valido para todos os grupos limites de altura menor ou igual a $n - 1$.

Pelo Teorema 4.1.1, G é isomórfico ao grupo fundamental $\pi_1(\Upsilon, \Lambda, \mathcal{T})$ do grafo de grupos Υ com grafo conexo finito Λ cujos grupos de arestas são grupos cíclicos infinitos ou triviais, e cujos grupos de arestas são grupos limites de altura no máximo $n - 1$ ou grupos abelianos livres. Aplicamos indução também sobre $s(\Lambda) = |V(\Lambda)| + |E(\Lambda)|$, logo é suficiente considerar os seguintes dois casos:

(I) $G = G_1 \star_C G_2$ e G_i é um grupo limite de altura no máximo $n-1$ ou grupo abeliano livre, e C é grupo cíclico infinito ou trivial, $i \in \{1, 2\}$;

(II) $G = \mathrm{HNN}_\phi(G_1, C, t)$, onde G_1 é um grupo limite de altura no máximo $n - 1$ ou grupo abeliano livre, e C é grupo cíclico infinito ou trivial.

Caso I: Seja $G = G_1 \star_C G_2$. Se C é não trivial, então G_1 ou G_2 é não abeliano, caso contrário, usando o Corolário 1.2.27 um conclui que $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2) - \chi(C) = 0$ e G seria um grupo (Cf. Prop. 3.1.4) o qual é uma contradição à hipótese.

O grupo G age naturalmente sobre a árvore T sem inversão de arestas com duas órbitas V_1 e V_2 sobre $V(T)$ e duas órbitas E_1 e E_2 sobre $E(T)$ satisfazendo $\bar{E}_1 = E_2$. Nós pudemos assumir que para $e \in E_1$ temos que $o(e) \in V_1$ e $t(e) \in V_2$, i.e. T/G tem uma aresta e dois vértices.

Além disso, U age sobre T, e como $[G : U] < \infty$, então pelo Teorema de Estrutura (Cf. Teorema 1.1.6), U é isomórfico ao grupo fundamental $U \simeq \pi_1(\Delta, T/U)$ de um grafo de grupos $(\Delta, T/U)$ com grafo adjacente conexo T/U e com grupo de vértices $\{stab_U(gG_1)\}_{g\in\mathcal{T}_1}$, $\{stab_U(gG_2)\}_{g\in\mathcal{T}_2}$ e grupos de arestas $\{stab_U(gC)\}_{g\in\mathcal{T}_3}$, onde $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_3$ são os conjuntos de representantes das classes duplas (U, G_1), (U, G_2) e (U, C), respectivamente. Então os estabilizadores são da forma,

$$\{stab_U(gG_1)\}_{g\in\mathcal{T}_1} = \{U \cap stab_G(gG_1)\}_{g\in\mathcal{T}_1} = \{U \cap gG_1g^{-1}\}_{g\in\mathcal{T}_1}.$$

$$\{stab_U(gG_2)\}_{g\in\mathcal{T}_2} = \{U \cap stab_G(gG_2)\}_{g\in\mathcal{T}_2} = \{U \cap gG_2g^{-1}\}_{g\in\mathcal{T}_2}.$$

$$\{stab_U(gC)\}_{g\in\mathcal{T}_3} = \{U \cap stab_G(gC)\}_{g\in\mathcal{T}_3} = \{U \cap gCg^{-1}\}_{g\in\mathcal{T}_3}.$$

Já que U é um subgrupo normal em G e $|G : U| = p$, então,

$$p = |G : U| = |G : G_1U||G_1 : G_1 \cap U|$$

$$p = |G : U| = |G : G_2U||G_2 : G_2 \cap U|$$

$$p = |G : U| = |G : CU||C : C \cap U|,$$

portanto nós temos as seguintes restrições,

$$|G : U\,G_i| \in \{1, p\} \qquad \text{and} \qquad |G : U\,C| \in \{1, p\}, \tag{4.20}$$

e podemos distinguir os seguintes casos:

(I.1) $|G : U\,C| = 1$, i.e., U tem uma órbita sobre E_1 e E_2;

(I.2) $|G : U\,C| = p$, i.e., U tem p órbitas sobre E_1 e E_2.

Caso I.1: A hipótese implica $|G_1 : G_1 \cap U| = |G_2 : G_2 \cap U| = p$, assim $G_2, G_1 \nleq U$, então $|G_1U : U|$ e $|G_2U : U|$ dividem $|G : U|$, portanto $UG_2 = UG_1 = G$. Além disso $|C : C \cap U| = p$, então $C \neq 1$ e $C \nleq U$, então $|CU : U|$ divide a $|G : U|$, então $UC = G$.

Assim, $U \cap C$ é o grupo de aresta do grafo $(\Delta, T/U)$, e $U \cap G_1$, $U \cap G_2$ são os grupos de vértices do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$. Então U é o produto de amalgamação $(U \cap G_1) \star_{C\cap U} (U \cap G_2)$.

Pelo Lema 4.2.2(a) temos

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_2) - 1 \tag{4.21}$$

Pela simetria assumimos que, G_1 não é um grupo abeliano, mas G_2 poderia ser abeliano. Agora, pela hipótese de indução, temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) \geq 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1)$. Se G_2 não é um grupo abeliano, então pela hipótese de indução, temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_2) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2)$, assim pela equação (4.21) temos,

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) &\geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_2) - 1 \\ &> \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - 1 = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G). \end{aligned}$$

Agora, se G_2 é abeliano, então C é um fator direto de G_2, ou seja $G_2 \simeq C \times B$, onde B é um grupo abeliano livre de posto $d(G_2) - 1$. Assim $G = G_1 \star_C G_2 \simeq G_1 \star_C (C \times B)$. Além disso, a aplicação α em (4.9) é injetiva e logo pela equação (4.10) temos $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1)+\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2)-1$ e $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_2) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2)$

Assim pela equação (4.21) temos

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}((U \cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_2) - 1$$

$$\geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G).$$

Caso I.2: Neste caso U tem p órbitas sobre E_1 e p órbitas on E_2. Além disso, $|G : UG_i| \in \{1, p\}$. Logo, por equação 4.20, é suficiente considerar os seguintes três casos

(a) $|G : UG_1| = |G : UG_2| = p$;

(b) $G = UG_1 = UG_2$;

(c) $|G : UG_2| = p$ e $G = UG_1$.

Caso (a): Pela hipótese, $UG_1 = UG_2 = U$, i.e., U é o grupo fundamental do grafos de grupos $(\Delta, T/U)$ com $2p$ vértices e p arestas, o qual é contradição pois T/U é conexo. Portanto este caso não é valido.

Caso (b): Pela hipótese, $|G_1 : G_1 \cap U| = |G_2 : G_2 \cap U| = p$, assim $G_2, G_1 \nleq U$, portanto $|G_1U : U|$ e $|G_2U : U|$ dividem a $|G : U|$, então $UG_2 = UG_1 = G$. Assim, $U \cap G_1$ e $U \cap G_2$ são os grupos de vértices do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$. Fazer $U_1 = U \cap G_1$, $U_2 = U \cap G_2$, logo usando o Teorema 1.2.19 sobre U, obtemos uma sequência exata

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \bigoplus_{r\in\mathcal{R}} H_1(C^r, \mathbb{Q}) \arrow[r, "\beta"] & H_1(U_1, \mathbb{Q}) \oplus H_1(U_2, \mathbb{Q}) \arrow[r] & H_1(U, \mathbb{Q}) \arrow[d] \\ 0 & \mathbb{Q} \arrow[l] & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \arrow[l] & \mathbb{Q}^p \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{4.22}$$

onde $\mathcal{R} \subset G$ é o conjunto de representantes de G/U. Logo da equação 4.22 temos a seguinte igualdade

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_2) + (p-1) + \delta \tag{4.23}$$

onde $\delta = \dim(\mathrm{im}(\beta)) \leq p$. Agora nós distinguimos dois casos.

(1) Supor que $C = 1$. Então β é a 0-aplicação, e como $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1)$ e $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_2) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2)$, então pela equação 4.23 temos

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_2) + (p-1) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) + 1 > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G).$$

(2) Supor que $C \neq 1$. Então, pela equação 4.23 e que $\delta = \dim(\mathrm{im}(\beta)) \leq p$, obtemos que,

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_2) - 1. \tag{4.24}$$

No caso em que uns dos grupos G_1 ou G_2 seja abeliano, então ambos não podem ser abelianos, caso contrário, a característica de Euler $\chi(G) = \chi(G_1)+\chi(G_2)-\chi(C)$ é igual a 0, e G é abeliano, qual foi excluído pela hipótese (Cf. Prop. 3.1.4). Sem perda de generalidade assumimos que G_1 é um grupo não abeliano.

Se G_1 e G_2 são grupos não abelianos, então por indução temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U\cap G_1) \geq 1+\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1)$ e $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U\cap G_2) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2)$, então usando 4.24 temos

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U\cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U\cap G_2) - 1$$

$$> \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - 1 = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$$

Supor que G_1 é um grupo não abeliano e G_2 é um grupo abeliano, então $G_2 \simeq C\times B$, onde B é um grupo abeliano livre de posto $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2)-1$, e $G \simeq G_1 \star_C (C\times B)$, assim $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1)+\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2)-1$. Além disso, pela hipótese de indução temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U\cap G_1) \geq 1+\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1)$, e é claro que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U\cap G_2) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2)$, então usando 4.24

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U\cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U\cap G_2) - 1$$

$$\geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - 1 = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$$

Caso (c): Seja $U_1 = U\cap G_1$. Pela hipótese $|G_1 : U_1| = p$ e $G_1 \nleq U$, assim $p = |G_1U : U|$ divide a $|G : U|$, logo $UG_1 = G$. Além, $|G_2 : G_2\cap U| = 1$, assim $G_2 \leq U$.

Escolhendo o conjunto de representastes $\mathcal{R} \subseteq G_1$ para G_1/U_1, temos que U_1 e $\{G_2^g\}_{g\in\mathcal{R}}$ são os grupos de vértices do grafo de grupo $(\Delta, T/U)$

Logo usando o Teorema 1.2.19 sobre U, obtemos uma sequência exata associada a $\mathrm{Tor}_\bullet^U(\_,\mathbb{Q})$

$$\bigoplus_{r\in\mathcal{R}} H_1(C^r,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} H_1(U_1,\mathbb{Q}) \oplus \bigoplus_{r\in\mathcal{R}} H_1(G_2^r,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(U,\mathbb{Q}) \longrightarrow 0\ . \tag{4.25}$$

Logo temos a seguinte igualdade

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = p\cdot \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U_1) - \delta, \tag{4.26}$$

onde $\delta = \dim(\mathrm{im}(\alpha))$. Nós distinguimos dois casos.

(1) Se $C = 1$, então $\delta = 0$. Assim, pela equação (4.25) temos que,

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = p\cdot \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U_1). \tag{4.27}$$

Além disso, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U_1) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1)$ e usando 4.27 temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U_1) + p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G).$$

(2) Se $C \neq 1$, então pela equação (4.26) e que $\delta = \dim(\mathrm{im}(\alpha)) \leq p$, obtemos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq p\cdot (\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - 1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U_1) \tag{4.28}$$

Se $d(G_2) = 1$, então G_2 é abeliano e $G_2 = C$. Assim $G = G_1 \star_C C = G_1$, logo pela hipótese de indução $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$. Então, assumimos que $d(G_2) \geq 2$, então pelo Lema 4.2.1 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) \geq 2$. Se G_1 é um grupo não abeliano, então pela hipótese de indução, temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U_1) \geq 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1)$. Então usando a equação 4.28 temos que,

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U_1) + p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - p$$

$$\geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 + p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - p \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) + 1 > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G).$$

Assumimos agora que G_1 é abeliano, então $G = (B \times C) \star_C G_2$, onde B é um grupo abeliano livre de posto $d(G_1) - 1$. Então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) + d(B)$, assim usando a equação 4.28 temos que,

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U_1) + p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - p$$

$$\geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 2.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - 2 > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_2) - 1 \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G).$$

Caso II: Seja $G = \mathrm{HNN}_{\phi}(G_1, C, t) = \langle\, G_1, t \mid t\,c\,t^{-1} = \phi(c)\,\rangle$ uma HNN-extensão com $C = \langle c \rangle$. Pela equação (4.6), temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1. \tag{4.29}$$

Se $C = 1$, então $G = G_1 \star < t >$ é isomórfico a um produto livre. Logo o resultado segue do caso (I). Então nós assumimos que $C \neq 1$. Note que G_1 é não abeliano. Caso contrário, usando Corolário 1.2.27 temos que $\chi(G) = \chi(G_1) - \chi(C) = 0$, e G seria abeliano (Cf. Proposição 3.1.4), uma contradição.

O grupo G age naturalmente sobre a árvore T sem inversão de arestas com uma órbita V_1 sobre $V(T)$ e duas órbitas E_1 e E_2 sobre $E(T)$ satisfazendo $\bar{E_1} = E_2$. Nós pudemos assumir que para $e \in E_1$ temos que $o(e) \in V_1$ e $t(e) \in V_2$, i.e. T/G tem uma aresta e um vértice.

Além disso, U age sobre T, e como $[G : U] < \infty$, então pelo Teorema de Estrutura (Cf. Teorema 1.1.6), U é isomórfico ao grupo fundamental $U \simeq \pi_1(\Delta, T/U)$ de um grafo de grupos $(\Delta, T/U)$ com grafo adjacente conexo T/U e com grupo de vértices $\{stab_U(gG_1)\}_{g \in \mathcal{T}_1}$ e grupos de arestas $\{stab_U(gC)\}_{g \in \mathcal{T}_2}$, onde $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ são os conjuntos de representantes das classes duplas (U, G_1) e (U, C), respectivamente. Então os estabilizadores são da forma,

$$\{stab_U(gG_1)\}_{g \in \mathcal{T}_1} = \{U \cap stab_G(gG_1)\}_{g \in \mathcal{T}_1} = \{U \cap gG_1g^{-1}\}_{g \in \mathcal{T}_1}.$$

$$\{stab_U(gC)\}_{g \in \mathcal{T}_2} = \{U \cap stab_G(gC)\}_{g \in \mathcal{T}_2} = \{U \cap gCg^{-1}\}_{g \in \mathcal{T}_2}.$$

Já $|G : U| = p$, então,

$$p = |G : U| = |G : G_1U||G_1 : G_1 \cap U|$$

$$p = |G : U| = |G : CU||C : C \cap U|,$$

portanto nós temos as seguintes restrições,

$$|G : UG_1| \in \{1, p\}, \qquad \text{and} \qquad |G : UC| \in \{1, p\}. \tag{4.30}$$

Logo nós podemos distinguir os seguintes dois casos:

(II.1) $G = UC$;

(II.2) $|G : UC| = p$.

Caso II.1: Temos que $|G_1 : G_1 \cap U| = p$. Assim, $U \cap G_1$ é o grupo de vértices do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$. Agora, pela hipótese, $|C : C \cap U| = p$, logo $C \nleq U$ e $\phi(C) \nleq U$, pois U é normal. Logo $UC = G$ e $U\phi(C) = G$, e além disso $U \cap C = C^p$ e $U \cap \phi(C) = \phi(C)^p$. Então, C^p é o grupo de arestas do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$, então $U = HNN(U \cap G_1, C^p, t) = \langle U \cap G_1, t | (c^p)^t = \phi(c)^p \rangle$, com $C = \langle c \rangle$.

Pelo Lema 4.2.2 item(b) temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) + 1. \tag{4.31}$$

Já que G_1 é um grupo não abeliano, então pela hipótese de indução temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1 \cap U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1$. Então

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1 \cap U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G). \tag{4.32}$$

Supor que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$, então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1 \cap U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$. Pelo Lema 4.2.2 item (b), temos que $\rho(U) = 0$ e $\rho(G) = 1$. Além disso, pelo Lema 4.2.2 item (b), temos as seguintes sequências exatas

$$C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha} (G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} (G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0, \tag{4.33}$$

com $\alpha(c_1 \otimes q) = ((c_1\phi(c_1)^{-1}G_1^{'}) \otimes q)$, $c_1 \in C$, e

$$C^p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha_1} ((U \cap G_1)^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta_1} (U^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0,$$

com $\alpha_1(c_1^p \otimes q) = ((c_1^p\phi(c_1)^{-p}(U \cap G_1)^{'}) \otimes q)$, $c_1 \in C$. Como $\rho(G)$ é igual 1, então α é a aplicação nula e α_1 é uma aplicação injetiva pois $\rho(U) = 0$.

Pelo Lema 4.3.2 o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_2"'] & G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"'] \\ C^p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha_1"] & (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{tikzcd} \tag{4.34}$$

onde tr_1 é a aplicação induzida do homomorfismo transfer $\tau : G_1^{\mathrm{ab}} \to (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}}$ e tr_2 é a aplicação injetiva induzida do homomorfismo injetivo $\gamma : C \to C^p$, $c_1 \mapsto c_1^p$, $c_1 \in C$.

Por último, como $\alpha_1 \circ \mathrm{tr}_2$ é injetivo, então α é injetivo. Isto é uma contradição. Logo temos $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$

Caso II.2: Neste caso U tem $2p$ órbitas sobre $E(T)$ e novamente distinguimos 2 casos:

(a) U tem 1 órbita sobre $V(T)$;

(b) U tem p órbitas sobre $V(T)$.

Caso (a): Temos que $|C : C \cap U| = 1$ e $C \leq U$, logo $\phi(C) \leq U$, pois U é normal. Assim, $\{C^g\}_{g \in \mathcal{T}_2}$ são os grupos de arestas do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$. Neste caso $|G_1 : U \cap G_1| = p$, então U é o grupo fundamental do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$ com grupos de vértices $U \cap G_1$ e p grupos de arestas $\{C^g\}_{g \in \mathcal{T}_2}$, onde $\mathcal{T}_2$ é o conjunto de representantes de $G_1/G_1 \cap U$. Assumimos $\mathcal{T}_2 = \{g_0, \cdots, g_{p-1}\}$.

Logo usando o Teorema 1.2.19 sobre U com o item(ii) do Teorema 1.2.20 obtemos uma sequência exata Mayer-Vietoris associada a $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha_1} ((U \cap G_1)^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta_1} (U^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0, \tag{4.35}$$

onde $\alpha_1((c_i^{g_i})_i \otimes q) = \bigoplus_{i=0}^{p-1}(g_i c_i \phi(c_i)^{-1} g_i^{-1} (U \cap G_1)^{'}) \otimes q$, com $c_i \in C$. Assim,

$$-dim_{\mathbb{Q}}(Im(\alpha_1)) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) + p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 0$$

$$-dim_{\mathbb{Q}}(Im(\alpha_1)) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) + p - 1 + 1 = 0$$

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) + dim_{\mathbb{Q}}(Im(\alpha_1)) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) + p$$

Pela hipótese de indução, temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1$. Então,

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G). \tag{4.36}$$

Supor que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$, então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1 \cap U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$. Então $\dim_{\mathbb{Q}}(Im(\alpha_1)) = p$, logo α_1 é injetivo.

Por outro lado, como $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1$ e pelo Lema 4.2.2 item (b), temos que $\rho(G) = 1$. Ademas, pelo Lema 4.2.2 item (b), temos a sequência exata

$$C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha} (G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} (G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0,$$

onde $\alpha(c_1 \otimes q) = ((c_1 \phi(c_1)^{-1} G_1^{'}) \otimes q)$, com $c_1 \in C$.

Como $\rho(G) = 1$, pelo Lema 4.2.2 item(b) então α é a aplicação nula. Já que $|G_1 : U \cap G_1| = p$, então pelo Corolário 1.2.21 temos o homomorfismo transfer $\tau : G_1^{\mathrm{ab}} \to (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}}$ dado por

$$gG_1^{'} \mapsto \bigoplus_{h \in \mathcal{T}} hg\overline{hg}^{-1}(U \cap G_1)^{'},$$

onde $\mathcal{T}$ é o conjunto de representantes para $G_1/G_1 \cap U$ e $\overline{hg}$ é o representante da classe $(U \cap G_1)hg$. Como τ é independente de $\mathcal{T}$, então $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2$, além disso τ induz um homomorfismo

$$\mathrm{tr}_1 : G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

dado por $gG_1^{'} \otimes q \mapsto \tau(gG_1^{'}) \otimes q$.

Por outro lado, o homomorfismo injetivo $\gamma : C \to \bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i}$, dado por $c_1 \mapsto (c_1^{g_i})_i$, induz um homomorfismo injetivo tr_2 de $C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ em $\bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ dado por $c_1 \otimes q \mapsto (c_1^{g_i})_i \otimes q$, pois $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é um functor exato.

Agora provaremos que $tr_2 \circ \alpha = \alpha_1 \circ tr_1$, ou seja o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_2"'] & G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"'] \\ \bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha_1"] & (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} Q \end{tikzcd} \tag{4.37}$$

Em efeito, seja $c_1 \otimes q$ um gerador de $C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Já que $c_1\phi(c_1)^{-1} \in U$, então temos que $\tau(c_1\phi(c_1)^{-1}G_1') = \bigoplus_{i=0}^{p-1} g_i c_1\phi(c_1)^{-1}g_i^{-1}(U\cap G_1)'$. Assim

$$(\mathrm{tr}_1 \circ \alpha)(c_1 \otimes q) = \tau(c_1\phi(c_1)^{-1}G_1') \otimes q = (\bigoplus_{i=0}^{p-1} g_i c_1\phi(c_1)^{-1}g_i^{-1}(U\cap G_1)') \otimes q.$$

Além disso

$$(\alpha_1 \circ \mathrm{tr}_2)(c_1 \otimes q) = \alpha_1((c_1^{g_i})_i \otimes q) = (\bigoplus_{i=0}^{p-1} g_i c_1\phi(c_1)^{-1}g_i^{-1}(U\cap G_1)') \otimes q.$$

Então $\mathrm{tr}_1 \circ \alpha = \alpha_1 \circ \mathrm{tr}_2$

Já que $\alpha_1 \circ \mathrm{tr}_2$ é injetivo, então α é injetivo. Assim temos uma contradição e logo $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$.

Caso (b): Neste caso temos $|G_1 : U \cap G_1| = 1$ e $|C : U\cap C| = 1$, logo $G_1 \subseteq U$ e $C \subseteq U$. Como G/U age transitivamente sobre $\Lambda = U/T$, então Λ é um grafo k-regular. Logo $|E(\Lambda)| = k \cdot |V(\Lambda)|$, forçando assim $k = 2$. Então Λ é um grafo conexo 2-regular, e assim um circuito com p vértices.

Como $|G : U| = p$, então $\{g_0, \ldots, g_{p-1}\} \subseteq G$ é um conjunto de representante para G/U. Assim $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \{g_0, \ldots, g_{p-1}\}$.

Portanto U é o grupo fundamental de um grafo de grupos $(\Delta, T/U)$ com grupos de vértices C^{g_i} e p grupos de arestas $G_1^{g_i}$ tal que o grafo de grupos $(\Delta, T/U)$ é um circuito com p arestas, para $i = 0, \ldots, p-1$.

Logo usando o Teorema 1.2.19 sobre U com o item(i),(ii) do Teorema 1.2.20 obtemos uma sequência exata Mayer-Vietoris associada a $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha_1} \bigoplus_{i=0}^{p-1} (G_1^{g_i})^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta_1} (U^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{Q} \to \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0, \tag{4.38}$$

onde $\alpha_1((c_1^{g_i})_i \otimes q) = (g_i c_1 \phi(c_1)^{-1} g_i^{-1} (G_1^{g_i})')_i \otimes q$ com $c_1 \in C$, logo,

$$-\dim_{\mathbb{Q}}(Ker(\alpha_1)) + p - p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) - p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) + p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 0$$

$$-\dim_{\mathbb{Q}}(Ker(\alpha_1)) + p - p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) - p + p - 1 = 0$$

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = p.(\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) - 1) + 1 + \dim_{\mathbb{Q}}(Ker(\alpha_1)) \tag{4.39}$$

Portanto

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq 1 - p + p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) \tag{4.40}$$

Supor que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$, então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = 1 - p + p.\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1 = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$. Pelo Lema 4.2.1, temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) \geq 2$, assim $(p-1)\cdot(\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1)-1) \geq 1$, portanto da equação (4.39) deduzimos $\dim_{\mathbb{Q}}(Ker(\alpha_1)) = 0$ e $p = 2$, logo α_1 é injetivo.

Por outro lado, pelo Lema 4.2.2 item (b), temos $\rho(G) = 1$. Além disso, pelo Lema 4.2.2 item (b), temos uma sequência exata

$$C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha} (G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} (G^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0,$$

onde $\alpha(c_1 \otimes q) = ((c_1\phi(c_1)^{-1}G_1') \otimes q)$, com $c_1 \in C$.

Já que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_1) + 1$ e pelo Lema 4.2.2 item(b), então α é a aplicação nula.

Por outro lado, o homomorfismo injetivo

$$\gamma : C \to \bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i},$$

dado por $c_1 \mapsto (c_1^{g_i})_i$, induz um homomorfismo injetivo tr_1 de $C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ em $\bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ dado por $c_1 \otimes q \mapsto (c_1^{g_i})_i \otimes q$, pois $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é um functor exato. Além disso, o homomorfismo injetivo

$$\tau : G_1^{\mathrm{ab}} \to \bigoplus_{i=0}^{p-1} (G_1^{g_i})^{\mathrm{ab}},$$

dado por $xG_1' \mapsto (x^{g_i}(G_1^{g_i})')_i$, induz um homomorfismo injetivo tr_2 de $G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ em $\bigoplus_{i=0}^{p-1} (G_1^{g_i})^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, dado por $xG_1' \otimes q \mapsto (x^{g_i}(G_1^{g_i})')_i \otimes q$, pois $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é um functor exato.

Agora provaremos que $\mathrm{tr}_2 \circ \alpha = \alpha_1 \circ \mathrm{tr}_1$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"'] & G_1^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[d, "\mathrm{tr}_2"'] \\
\bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha_1"] & \bigoplus_{i=0}^{p-1} (G_1^{g_i})^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},
\end{tikzcd} \tag{4.41}$$

Em efeito, seja $c_1 \otimes q$ é um elemento de $C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Assim

$$(\mathrm{tr}_2 \circ \alpha)(c_1 \otimes q) = \widehat{\tau}(c_1\phi(c_1)^{-1}{G_1}' \otimes q) = (g_i c_1 \phi(c_1)^{-1} x^{-i}(G_1^{g_i})')_i \otimes q.$$

Além disso,

$$(\alpha_1 \circ \mathrm{tr}_1)(c_1 \otimes q) = \alpha_1((c_1^{g_i})_i \otimes q) = (g_i c_1 \phi(c_1)^{-1} g_i^{-1}(G_1^{g_i})')_i \otimes q$$

.

Então $\mathrm{tr}_2 \circ \alpha = \alpha_1 \circ \mathrm{tr}_1$

Já que $\alpha_1 \circ \mathrm{tr}_1$ é injetiva, então α é injetiva. Isto é uma contradição, logo $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$. ∎

Corolário 4.3.4. *Seja G um grupo limite não abeliano tal que G^{ab} é livre de torsão e que $d(G) = d(G^{\mathrm{ab}})$. Se U é um subgrupo normal de G de índice primo p, então $d(U) > d(G)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.3.3, temos que $d(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = d(G^{\mathrm{ab}}) = d(G)$. ∎

Remark 4.3.5. *Seja G um grupo limite. Não é conhecido se o completamento pro-p de um grupo limite G é um grupo pro-p limite. Se isto fosse verdade o Corolário 4.3.4 pode seguir como consequência do Teorema 3.2.8 ou seja para grupos limites cujo completamento pro-p é um grupo pro-p limite o corolário 4.3.4 é consequência do Teorema 3.2.8.*
Em efeito

Demonstração. *Usamos $\widehat{G}_p$ para denotar completamento pro-p de um grupo G. Seja U um subgrupo normal do grupo limite G de índice primo, então sobre as hipóteses do corolário 4.3.4, temos que $p = [G : U] = [\widehat{G}_p : \widehat{U}]$, $d(G^{\mathrm{ab}}) = d(\widehat{G^{\mathrm{ab}}}_p)$ e pelo Teorema 3.2.8, $d((\widehat{U}_p) > d(\widehat{G}_p)$. Logo temos a seguinte cadeia de desigualdades,*

$$d(U) \geq d(\widehat{U}_p) \geq d(\widehat{G}_p) \geq d(\widehat{G^{\mathrm{ab}}}_p) = d(G^{\mathrm{ab}}) = d(G) \tag{4.42}$$

∎

Para G um grupo livre, um grupo abeliano livre ou uma iterada extensão de centralizador de um grupo livre, tem-se que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = d(G)$. Em particular, em conexão com o Teorema 3.1.6 concluímos o seguinte corolário.

Corolário 4.3.6. *Seja G um grupo limite não abeliano satisfazendo $d(G) \leq 3$, e seja U um subgrupo normal de G de índice primo $p \geq 2$. Então $d(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G) = d(G)$.*

Outra consequência do Teorema 4.3.3 é a seguinte

Corolário 4.3.7. *Seja G um grupo limite não abeliano, e N um subgrupo normal de G tal que G/N é infinito e nilpotente. Então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(N) = \infty$. Em particular, $d(N) = \infty$ e se $\alpha\colon G \to \mathbb{Z}$ é um homomorfismo não-trivial, então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\ker(\alpha)) = \infty$.*

Demonstração. Supor que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(N) = n < \infty$. Seja $h = h(G/N)$ o número de Hirsch do grupo nilpotente finitamente gerado G/N. Então $h(U/N) = h(G/N)$ para cada subgrupo de índice finito U em G satisfazendo $N \subset U$. Em particular, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U/N) \leq h(U/N) = h$, e portanto $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(N) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U/N) \leq n + h$, contradizendo o Teorema 4.3.3. ∎

Remark 4.3.8. *A afirmação do Corolário 4.3.7 contínua sendo valido se substituímos "nilpotente" por "minimax".*

4.3.2 Incremento do posto racional em extensão de centralizador

A seguinte proposição nós permite analisar o incremento do posto racional de um subgrupo normal de índice primo $p \geq 2$ de uma iterada extensão de centralizador de um grupo livre.

Proposição 4.3.9. *Seja $G_0 = F$ um grupo livre de posto finito. Seja $G_{i+1} = G_i \star_{C_i} B_i$ a iterada extensão de centralizador de G_0, para $i \geq 0$. Supor que, para algum $n \geq 0$, G_n é não abeliano e U é um subgrupo normal de G_n de índice primo $p \geq 2$, então*

1.- Se $n = 0$, então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) = d(G_0)\big(p - \frac{p}{d(G_0)} + \frac{1}{d(G_0)}\big) = f(p)d(G_0)$ com $f(p) \geq 1 + \frac{(p-1)}{d(G_0)}$,

2.- Se $n > 0$, então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq f(p)d(G_n)$, onde

$$f(p) = p - \frac{p-1}{d(G_n)}\Big(\sum_{j=0}^{n-1} d(B_j) - (n-1)\Big),$$

e $f(p) \geq 1 + \dfrac{(p-1)}{d(G_n)}$.

Demonstração. É claro que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G_n) = d(G_n^{\mathrm{ab}}) = d(G_n)$, logo pelo Teorema 4.3.3 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > d(G_n)$, portanto $d(U) > d(G_n)$. A demonstração será feita em passos.

- **Passo 1**: Supor que $n \geq 1$, então, pelo Lema 3.1.4, temos que G_i é não abeliano para $0 \leq i \leq n$. Provamos que

$$d(G_n) > \sum_{j=0}^{n-1} d(B_j) - (n-1) \tag{4.43}$$

De fato: Prova-se que, para $1 \leq i \leq n$,

$$d(G_i) > \sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - (i-1).$$

Usamos a indução sobre i. Para $i = 1$, temos que que $d(G_1) = d(G_0) + d(B_0) - 1$. Como G_0 não é abeliano, então $d(G_1) > d(B_0)$.

Supor que a equação 4.43 vale para $n > i > 1$. Provaremos que

$$d(G_{i+1}) > \sum_{j=0}^{i} d(B_j) - i.$$

Pela hipótese de indução $d(G_i) > \sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - (i-1)$. Logo, já que $d(G_{i+1}) = d(G_i) + d(B_i) - 1$, então

$$d(G_{i+1}) > \sum_{j=0}^{i} d(B_j) - i.$$

Portanto

$$d(G_n) > \sum_{j=0}^{n-1} d(B_j) - (n-1)$$

- **Passo 2:** Neste passo serão usadas as equações dadas na demonstração do Teorema 4.3.3 para o caso em que o grupo é um produto amalgamado.

Supor que $n \geq 1$. Prova-se que, para $1 \leq i \leq n$, e U um subgrupo normal de índice primo p de G_i

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq f(p) d(G_i), \quad \text{onde}$$

$$f(p) = p - \frac{p-1}{d(G_i)}\big(\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - (i-1)\big).$$

Usaremos indução sobre i.

2.1) Supor que $i = 1$, então temos, $G_1 = G_0 \star_{C_0} B_0$. Seja U um subgrupo normal de índice primo p de G_1, então provamos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(G_1)(p - \frac{pd(B_0)}{d(G_1)} + \frac{d(B_0)}{d(G_1)}),$$

onde denotamos $f(p) := p - \frac{pd(B_0)}{d(G_1)} + \frac{d(B_0)}{d(G_1)}$.

Em efeito:

Sejam $|\mathcal{T}_1| = |G_1 : U\, G_0|$, $|\mathcal{T}_2| = |G_1 : U\, B_0|$ e $|\mathcal{T}_3| = |G_1 : U\, C_0|$. Como $C_0 \neq 1$ então temos os seguintes dois casos.

1.Seja $|\mathcal{T}_1| = 1$. Logo pela equação 4.21, 4.24 e 4.28, temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq |\mathcal{T}_1| d(U \cap G_0) - |\mathcal{T}_1| + |\mathcal{T}_2| d(U \cap B_0) - |\mathcal{T}_2| + 1.$$

Já que $|G_0 : G_0 \cap U||\mathcal{T}_1| = p$, então pelo Teorema de Nielsen-Schreier temos que

$$d(U \cap G_0) - 1 = (d(G_0) - 1)\frac{p}{|\mathcal{T}_1|}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) &\geq |\mathcal{T}_1| d(U \cap G_0) - |\mathcal{T}_1| + |\mathcal{T}_2| d(U \cap B_0) - |\mathcal{T}_2| + 1 \\
&= |\mathcal{T}_1|(d(U \cap G_0) - 1) + |\mathcal{T}_2|(d(U \cap B_0) - 1) + 1 \\
&= |\mathcal{T}_1|\big(d(G_0) - 1\big)\frac{p}{|\mathcal{T}_1|} + |\mathcal{T}_2|\big(d(U \cap B_0) - 1\big) + 1 \\
&= p\big(d(G_0) - 1\big) + |\mathcal{T}_2|\big(d(U \cap B_0) - 1\big) + 1 \\
&= p\big(d(G_0) + d(B_0) - 1\big) - pd(B_0) + |\mathcal{T}_2|\big(d(U \cap B_0) - 1\big) + 1 \\
&\geq pd(G_1) - pd(B_0) + d(B_0) \\
&= d(G_1)\big(p - \frac{pd(B_0)}{d(G_1)} + \frac{d(B_0)}{d(G_1)}\big).
\end{aligned}$$

Neste caso $f(p) = p - \dfrac{pd(B_0)}{d(G_1)} + \dfrac{d(B_0)}{d(G_1)}$.

2.- Se $|\mathcal{T}_1| = p$, então $|\mathcal{T}_2| = 1$, logo pela equação 4.28,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) &\geq d(B_0) + pd(G_0) - p \\
&= d(B_0) + p\big(d(G_0) - 1\big) \\
&= d(B_0) + p\big(d(G_0) + d(B_0) - 1\big) - pd(B_0) \\
&= pd(G_1) - pd(B_0) + d(B_0) \\
&= d(G_1)\big(p - \frac{pd(B_0)}{d(G_1)} + \frac{d(B_0)}{d(G_1)}\big).
\end{aligned}$$

Neste caso, $f(p) = p - \dfrac{pd(B_0)}{d(G_1)} + \dfrac{d(B_0)}{d(G_1)}$.

2.2) Supor que para todo subgrupo normal U de G_i de índice primo $p \geq 2$ nós temos que $d(U) \geq f(p)d(G_i)$, onde

$$f(p) = p - \frac{p-1}{d(G_i)}\big(\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - (i-1)\big),$$

para $1 < i < n \ldots$ (**hipótese de indução**).

Seja $G_{i+1} = G_i \star_{C_i} B_i$ e U um subgrupo normal de índice primo p de G_{i+1}, então nós provamos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(G_{i+1})f(p)$$

onde

$$f(p) = p - \frac{p-1}{d(G_{i+1})}\big(\sum_{j=0}^{i} d(B_j) - i\big).$$

Em efeito:

Sejam $|\mathcal{T}_1| = |G_{i+1} : U\,G_i|$, $|\mathcal{T}_2| = |G_{i+1} : U\,B_i|$ e $|\mathcal{T}_3| = |G_{i+1} : U\,C_i|$. Como $C_i \neq 1$ então temos os seguintes dois casos.

1.Seja $|\mathcal{T}_1| = 1$. Logo pela equação 4.21, 4.24 e 4.28, temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq |\mathcal{T}_1|d(U \cap G_i) - |\mathcal{T}_1| + |T_2|d(U \cap B_i) - |\mathcal{T}_2| + 1.$$

Já que $|G_i : G_i \cap U||\mathcal{T}_1| = p$, então pela hipótese de indução temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_i) \geq d(G_i)\big(\frac{p}{|\mathcal{T}_1|} - \frac{p - |\mathcal{T}_1|}{|\mathcal{T}_1|d(G_i)}\big(\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - (i-1)\big)\big),$$

portanto,

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq |\mathcal{T}_1|d(G_i)\big(\frac{p}{|\mathcal{T}_1|} - \frac{p - |\mathcal{T}_1|}{|\mathcal{T}_1|d(G_i)}\big(\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - (i-1)\big)\big) - |\mathcal{T}_1| + |\mathcal{T}_2|d(U \cap B_i) - |\mathcal{T}_2| + 1$$

$$\begin{aligned}
&= pd(G_i) - (p - |\mathcal{T}_1|)(\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - (i-1)\big) - |\mathcal{T}_1| + |\mathcal{T}_2|d(U \cap B_i) - |\mathcal{T}_2| + 1 \\
&\geq pd(G_i) - (p - |\mathcal{T}_1|)\big(\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - (i-1)\big) - |\mathcal{T}_1| + d(B_i) \\
&= pd(G_i) - p\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) + |\mathcal{T}_1|(\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - i) + d(B_i) + p(i-1) \\
&\geq pd(G_i) - p\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) + (\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - 1) + d(B_i) + p(i-1) \\
&= p\big(d(G_{i+1}) - d(B_i) + 1\big) - p\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) + (\sum_{j=0}^{i-1} d(B_j) - 1) + d(B_i) + p(i-1) \\
&= pd(G_{i+1}) - (p-1)\sum_{j=0}^{i} d(B_j) + (p-1)i \\
&= d(G_{i+1})f(p)
\end{aligned}$$

onde

$$f(p) = p - \frac{p-1}{d(G_{i+1})}\big(\sum_{j=0}^{i} d(B_j) - i\big).$$

2.- Se $|\mathcal{T}_1| = p$, então $|\mathcal{T}_2| = 1$, logo pela equação 4.28,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) &\geq d(B_i) + pd(G_i) - p \\
&= d(B_i) + p(d(G_{i+1}) - d(B_i) + 1) - p \\
&= pd(G_{i+1}) + d(B_i) - pd(B_i)
\end{aligned}$$

$$\geq pd(G_{i+1}) - (p-1)\big(\sum_{j=0}^{i} d(B_j) - i\big)$$
$$= f(p)d(G_{i+1}),$$

onde

$$f(p) = p - \frac{p-1}{d(G_{i+1})}\big(\sum_{j=0}^{i} d(B_j) - i\big).$$

Portanto, para $i = n$, temos $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq f(p)d(G_n)$, onde

$$f(p) = p - \frac{p-1}{d(G_n)}\big(\sum_{j=0}^{n-1} d(B_j) - (n-1)\big),$$

.

- **Passo3**:

  Resumindo o Passo 2 temos o seguinte:

  1) Se $n = 0$, então pelo Teorema de Nielsen-Schreier temos que,

  $$d(U) = d(G_0)\big(p - \frac{p}{d(G_0)} + \frac{1}{d(G_0)}\big) = f(p)d(G_0)$$

  com $f(p) \geq 1 + \dfrac{(p-1)}{d(G_0)}$.

  2) Se $n > 0$, então pelo Passo 2, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq f(p)d(G_n)$, onde

  $$f(p) = p - \frac{p-1}{d(G_n)}\big(\sum_{j=0}^{n-1} d(B_j) - (n-1)\big).$$

  Agora usando o Passo 1, nós obtemos a seguinte desigualdade

  $$f(p) \geq 1 + \frac{(p-1)}{d(G_n)},$$

■

4.3.3 Grupos limites com só uma relação

Para um grupo limite G não é necessariamente verdade que, $d(G) = d(G^{\mathrm{ab}})$ (Cf. Remark 4.3.13). O seguinte Lema mostra que existe uma classe de grupos limites contendo grupos G satisfazendo $d(G) \neq d(G^{\mathrm{ab}})$ que responde afirmativamente a **Pergunta A**.

Lema 4.3.10. *Seja $G = G_1 \star_C G_2$ um grupo limite não abeliano, onde G_1 e G_2 são grupos livres de posto finito $r(G_1)$ e $r(G_2)$, respectivamente, e seja $C = \langle c\rangle$ um grupo cíclico infinito ou trivial. Então, se U é um subgrupo normal de índice primo p em G, temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > d(G)$. In particular, $d(U) > d(G)$.*

Demonstração.

Se $C = 1$, então G é um grupo livre finitamente gerado, e a prova segue do Teorema de Nielsen-Schreier.

Então nós podemos assumir que $C \neq 1$. Como G é um grupo não abeliano, então G_1 ou G_2 é um grupo não abeliano. Caso contrário, $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2) - \chi(C) = 0$, e pelo Lema 3.1.4, G é um grupo abeliano.

Seja T a árvore sobre o qual G age naturalmente. Então, como na demonstração do Teorema 4.3.3, Caso I, nós podemos distinguir dois casos:

(1) $G = UC$, i.e., U tem uma órbita sobre E_1 e E_2;

(2) $|G : UC| = p$, i.e., U tem p órbitas sobre E_1 e E_2;

 (b) $G = UG_1 = UG_2$;

 (c) $|G : UG_2| = p$ e $G = UG_1$.

Caso 1:

A hipótese implica $|G_1 : G_1 \cap U| = |G_2 : G_2 \cap U| = p$, assim $G_2, G_1 \nleq U$, então $|G_1U : U|$ e $|G_2U : U|$ dividem $|G : U|$, portanto $UG_2 = UG_1 = G$. Além disso $|C : C \cap U| = p$, então $C \neq 1$ e $C \nleq U$, então $|CU : U|$ divide a $|G : U|$, então $UC = G$.

Assim, $U \cap C$ é o grupo de aresta do grafo $(\Delta, T/U)$, e $U \cap G_1$, $U \cap G_2$ são os grupos de vértices do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$. Então U é o produto de amalgamação $(U \cap G_1) \star_{C \cap U} (U \cap G_2)$.

Pela simetria escolhemos G_1 não abeliano. Supor que G_2 é abeliano, então $d(G_2) = 1$. Se $d(G_1) = 2$, então pelo corolário 4.3.6 o Lema está provado. Assim temos que $d(G_1) \geq 3$. Pelo Teorema de Nielsen-Schreier, temos que $d(U \cap G_1) > 1 + d(G_1)$. Agora, já que G_2 é um grupo abeliano, então $d(U \cap G_2) = d(G_2)$, portanto pelo Lema 4.2.2

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(U \cap G_1) + d(U \cap G_2) - 1 > d(G_1) + d(G_2) \geq d(G).$$

Se G_2 não é um grupo abeliano, então pelo Teorema de Nielsen-Schreier temos que $d(U \cap G_1) \geq 1 + d(G_1)$ e $d(U \cap G_2) \geq 1 + d(G_2)$, portanto pelo Lema 4.2.2

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(U \cap G_1) + d(U \cap G_2) - 1 \geq d(G_1) + d(G_2) + 1 > d(G).$$

Caso 2(b): Pela hipótese, $|G_1 : G_1 \cap U| = |G_2 : G_2 \cap U| = p$, assim $G_2, G_1 \nleq U$, portanto $|G_1U : U|$ e $|G_2U : U|$ dividem a $|G : U|$, então $UG_2 = UG_1 = G$. Assim, $U \cap G_1$ e $U \cap G_2$ são os grupos de vértices do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$.

Como $C \neq 1$, então pela equação 4.24, temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(U \cap G_1) + d(U \cap G_2) - 1.$$

Pela simetria escolhemos que G_1 seja não abeliano.
Supor que G_2 é abeliano, então $d(G_2) = 1$. Se $d(G_1) = 2$, então pelo Corolário 4.3.6 o Lema está provado.
Assim nós temos que $d(G_1) \geq 3$, pelo Teorema de Nielsen-Schreier, nós temos que $d(U \cap G_1) > 1 + d(G_1)$. Agora, já que G_2 é abeliano, então $d(U \cap G_2) = d(G_2)$, portanto

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(U \cap G_1) + d(U \cap G_2) - 1 > d(G_1) + d(G_2) \geq d(G).$$

Por outro lado, se G_2 não é abeliano, então pelo Teorema de Nielsen-Schreier, temos que $d(U \cap G_1) \geq 1 + d(G_1)$ e $d(U \cap G_2) \geq 1 + d(G_2)$ portanto

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(U \cap G_1) + d(U \cap G_2) - 1 \geq d(G_1) + d(G_2) + 1 > d(G).$$

Caso 2(c): Seja $U_1 = U \cap G_1$. Pela hipótese $|G_1 : U_1| = p$ e $G_1 \not\leq U$, assim $p = |G_1U : U|$ divide a $|G : U|$, logo $UG_1 = G$. Além, $|G_2 : G_2 \cap U| = 1$, assim $G_2 \leq U$.

Como $C \neq 1$, então pela equação 4.28

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(G_1 \cap U) + pd(G_2) - p.$$

Se G_2 é abeliano, então $d(G_2) = 1$. Logo G_1 é um grupo não abeliano. Supor que $d(G_1) = 2$, então pelo Corolário 4.3.6, o lema está demonstrado.
Então $d(G_1) \geq 3$, logo pelo Teorema de Nielsen-Schreier temos que $d(G_1 \cap U) > d(G_1) + 1$, portanto

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(G_1 \cap U) + pd(G_2) - p = d(G_1 \cap U) > d(G_1) + 1 = d(G_1) + d(G_2) \geq d(G)$$

Por outro lado, se G_2 não é abeliano, então $d(G_2) \geq 2$. Se G_1 é abeliano, então $d(G_1) = 1$ e $d(U \cap G_1) = d(G_1)$. Se $d(G_2) = 2$, então pelo Corolário 4.3.6 o lema fica provado.
Logo $d(G_2) > 2$, portanto

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(G_1 \cap U) + pd(G_2) - p \geq d(G_1) + pd(G_2) - p > d(G_1) + d(G_2) \geq d(G).$$

Se G_1 não é abeliano, então pelo Teorema de Nielsen-Schreier temos que $d(U \cap G_1) \geq 1 + d(G_1)$. Então

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(G_1 \cap U) + pd(G_2) - p \geq d(G_1) + 1 + pd(G_2) - p \geq d(G_1) + d(G_2) + 1 > d(G).$$

■

Lema 4.3.11. *Seja $G = \mathrm{HNN}_{\phi}(G_1, C, t) = \langle G_1, t \mid tct^{-1} = \phi(c) \rangle$ um grupo limite não abeliano, onde G_1 é um grupo livre de posto r e C é um grupo cíclico ou trivial. Seja U um subgrupo normal de G de índice primo p. Então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > d(G)$, e, em particular, $d(U) > d(G)$.*

Demonstração. Se C é trivial, então $G = G_1 \star < t >$ é um grupo livre de posto $r+1$, e portanto pelo Teorema de Nielsen-Schreier o Lema está provado. Além disso, se $r = 1$, então $\chi(G) = 0$, e G é um grupo abeliano. (Cf. Prop. 3.1.4), o qual é excluído pela hipótese. Logo $r \geq 2$. Seja T a árvore sobre qual G age naturalmente. Então nós podemos distinguir três casos:

(1) $G = UC$;

(2) $|G : UC| = p$;

  (a) U tem 1 órbita sobre $V(T)$;

  (b) U tem p órbitas sobre $V(T)$.

Caso 1: Temos que $|G_1 : G_1 \cap U| = p$. Assim, $U \cap G_1$ é o grupo de vértices do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$. Agora, pela hipótese, $|C : C \cap U| = p$, logo $C \not\leq U$ e $\phi(C) \not\leq U$, pois U é normal. Logo $UC = G$ e $U\phi(C) = G$, e além disso $U \cap C = C^p$ e $U \cap \phi(C) = \phi(C)^p$. Então, C^p é o grupo de arestas do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$, então $U = HNN(U \cap G_1, C^p, t) = \langle U \cap G_1, t | (c^p)^t = \phi(c)^p \rangle$, com $C = \langle c \rangle$.

Pelo Lema 4.2.2 item(b) temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) + 1$$

Supor que $d(G_1) \geq 3$. Já que G_1 não é abeliano, então pelo Teorema de Nielsen-Schreier, temos que $d(G_1 \cap U) > d(G_1) + 1$. Então

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(G_1 \cap U) > d(G_1) + 1 \geq d(G).$$

Se $d(G_1) = 2$, então $d(G) \leq 3$, logo pelo Corolário 4.3.6 o Lema fica provado.

Caso 2(a): Temos que $|C : C \cap U| = 1$ e $C \leq U$, logo $\phi(C) \leq U$, pois U é normal. Assim, $\{C^g\}_{g \in \mathcal{T}_2}$ são os grupos de arestas do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$. Então U é o grupo fundamental do grafo de grupos $(\Delta, T/U)$ com grupos de vértices $U \cap G_1$ e p grupos de vértices $\{C^g\}_{g \in T_2}$, onde $\mathcal{T}_2$ é o conjunto de representantes de $G_1/G_1 \cap U$.

Supor que $d(G_1) \geq 3$, já que $|G_1 : G_1 \cap U| = p > 1$ e G_1 é não abeliano, então pelo Teorema de Nielsen-Schreier nós temos que $d(U \cap G_1) > d(G_1) + 1$. Portanto pela equação 4.36, temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq d(U \cap G_1) > d(G_1) + 1 \geq d(G).$$

Se $d(G_1) = 2$, então $d(G) \leq 3$, logo pelo Corolário 4.3.6 o Lema fica provado.

Caso 2(b): Neste caso temos $G_1 \subseteq U$ e $C \subseteq U$. Como G/U age transitivamente sobre $\Lambda = U/T$, então Λ é um k-regular. Logo $|E(\Lambda)| = k \cdot |V(\Lambda)|$, forçando assim $k = 2$. Então Λ é um grafo conexo 2-regular, e assim um circuito com p vértices.

Seja $\{g_1, \ldots, g_p\} \subseteq G$ um conjunto de representante para G/U. Portanto U é o grupo fundamental de um grafo de grupos $(\Delta, T/U)$ com grupos de vértices C^{x^i} e p grupos de arestas $G_1^{x^i}$ tal que o grafo de grupos $(\Delta, T/U)$ é um circuito com p arestas, para $i = 0, \ldots, p-1$.

Supor que $d(G_1) \geq 3$, logo pela equação 4.40 temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) \geq 1 - p + \sum_{i=0}^{p-1} d(G_1^{x^i}) = 1 - p + pd(G_1) > d(G_1) + 1 \geq d(G)$$

Se $d(G_1) = 2$, então $d(G) \leq 3$, logo pelo Corolário 4.3.6 o Lema fica provado.

∎

Como uma consequência dos Lemas anteriores uno conclui o seguinte.

Teorema 4.3.12. *Seja G um grupo limite não abeliano de um relator ciclicamente pinchado ou conjugado pinchado, e seja U um subgrupo normal de G de índice primo p. Então $d(U) > d(G)$.*

Demonstração. Se G é um grupo de um relator ciclicamente pinchado, então $G \simeq G_1 \star_C G_2$ com G_1 e G_2 grupos livres, e C sendo um grupo cíclico infinito gerado por uma palavra ciclicamente reduzida $w \in G_1$ e C é um subgrupo cíclico maximal em G_1 ou G_2(Vide [12]). Logo neste caso, Lema 4.3.10 produz o resultado. Se G é um grupo de um relator conjugado pinchado, então $G \simeq \mathrm{HNN}_\phi(G_1, C, t)$-extensão com G_1 um grupo livre, C a subgrupo cíclico gerado por uma palavra ciclicamente reduzida $w \in G_1$, e C ou $\phi(C)$ é um subgrupo cíclico maximal G_1 (Vide [12]). Então, pelo Lema 4.3.11, temos que $d(U) > d(G)$ completando a demonstração. ∎

Remark 4.3.13. *Existe um grupo limite G satisfazendo $d(G^{\mathrm{ab}}) \lneq d(G)$. No blog de* ***Mathoverflow*** *temos o seguinte exemplo dado por H. Wilton em [46]. Seja $G_1 = G_2 = F_2$ grupos livres de posto 2, e seja $C_1 = C_2 = \langle w \rangle$, onde $w = a^2ba^{-1}b^{-1}$. Então w é uma palavra ciclicamente reduzida, e C_i é um subgrupo cíclico maximal de G_i para $i = 1, 2$, mas C_i não é um fator livre. Por um resultado de B. Baumslag (Cf. [17, Cor. 3.6]), o correspondente doble*

$G = G_1 \star_{C_1 = C_2} G_2$ é um grupo limite não abeliano e tem abelianização G^{ab} isomórfico a $\mathbb{Z}^3$, i.e., $d(G^{\mathrm{ab}}) = 3$. A projeção canônica $\beta\colon G \to (F_2/\langle w^{F_2}\rangle) \star (F_2/\langle w^{F_2}\rangle)$ is é um homomorfismo sobrejetor. Assim, pela hipótese e o Teorema de Grushko-Neumann, $d(F_2/\langle w^{F_2}\rangle \star F_2/\langle w^{F_2}\rangle) = 4$. Logo $d(G) = 4$. Note que pelo Lema 4.3.10, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > 4$ para qualquer subgrupo normal U de G de índice primo p.

Capítulo 5

Subgrupos Normais em Grupos profinitos e pro-p limites

Um dos objetivos principais deste capítulo é encontrar aproximações homológicas para um grupo pro-p limite usando o corpo $\mathbb{Q}_p$ e para o completamento profinito de um grupo limite usando o corpo $\mathbb{F}_p$ (Cf. Teorema 5.1.2 e Teorema 5.1.7). Além disso, dar solução ao análogo do Teorema 3.1.7 para o completamento profinito de um grupo limito (Cf. Teorema 5.1.5 e Teorema 5.1.12) e por último resolver o análogo do Teorema 4.3.3 para o caso pro-p limite (Cf. Teorema 5.2.7).

5.1 Aproximações homológicas para um grupo pro-p (profinito)

De aqui para frente, assumiremos p um número primo maior o igual a 2.

Lema 5.1.1. *Seja G um grupo pro-p do tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$. Então*

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_j(G,\mathbb{Z}_p)\big) \leq dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G,\mathbb{F}_p)$$

para $j \geq 0$.

Demonstração.

Considere a sequência exata curta

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{p^*} \mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p \to 0,$$

onde aplicação $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{p^*} \mathbb{Z}_p$ is a multiplicação por p.

Pelo Exemplo 2.3.12 temos a correspondente sequência exata longa

$$\cdots \to H_j(G,\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{p^*} H_j(G,\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\phi} H_j(G,\mathbb{F}_p) \to \cdots, \tag{5.1}$$

onde p^* é a multiplicação por p.

Como G é um grupo pro-p, então pelo corolário 2.4.10 $H_j(G,\mathbb{F}_p)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}_p$ e $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G,\mathbb{F}_p)$ é finita para cada $j \geq 0$. Logo $H_j(G,\mathbb{F}_p)$ é um grupo profinito abeliano finitamente gerado, para $j \geq 0$.

Da equação 5.1 temos que

$$H_j(G,\mathbb{Z}_p)/pH_j(G,\mathbb{Z}_p) \simeq im(\phi) \subseteq H_j(G,\mathbb{F}_p)$$

.

logo

$$d\big(\frac{H_j(G,\mathbb{Z}_p)}{pH_j(G,\mathbb{Z}_p)}\big) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G,\mathbb{F}_p). \tag{5.2}$$

Já que G é de Tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$, então $H_j(G,\mathbb{Z}_p)$ é um $\mathbb{Z}_p$-módulo finitamente gerado. Assim $H_j(G,\mathbb{Z}_p)$ é um grupo pro-p abeliano finitamente gerado. Logo temos que,

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_j(G,\mathbb{Z}_p)) = d\big(\frac{H_j(G,\mathbb{Z}_p)}{Tor(H_j(G,\mathbb{Z}_p))}\big) \tag{5.3}$$

Por outro lado, temos que

$$d\big(\frac{H_j(G,\mathbb{Z}_p)}{Tor(H_j(G,\mathbb{Z}_p))}\big) \leq d\big(\frac{H_j(G,\mathbb{Z}_p)}{pH_j(G,\mathbb{Z}_p)}\big) \tag{5.4}$$

Portanto, usando 5.4 e 5.2, obtemos o resultado.

■

Agora nós provaremos que acontece quando no Teorema 3.2.9 o corpo é $\mathbb{Q}_p$. Neste caso nós temos o seguinte Teorema:

Teorema 5.1.2. *Seja G um grupo pro-p limite e $\{U_i\}_{i\in I}$ uma sequência de subgrupos abertos de G tal que $U_{i+1} \leq U_i$ para todo $i \in I$ e $cd(\bigcap_i U_i) \leq 2$. Então,*

(1) $\varinjlim_i \dim_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_j(U_i,\mathbb{Z}_p)\big)/[G:U_i] = 0$ *para* $j \geq 3$*;*

(2) Se $\{[G:U_i]\}_{i\in I}$ converge para o infinito, então temos

$$\varinjlim_i \big(\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_1(U,\mathbb{Z}_p)) - \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_2(U,\mathbb{Z}_p))\big)/[G:U_i] = -\chi(G),$$

onde $\chi(G)$ é a característica de Euler de G.

(3) Se $\bigcap_{i\in I} U_i = 1$, então temos

$$\varinjlim_i \dim_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_2(U_i,\mathbb{Z}_p)\big)/[G:U_i] = 0$$

e

$$\varinjlim_i \dim_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_1(U_i,\mathbb{Z}_p)\big)/[G:U_i] = \varinjlim_i \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_i)/[G:U_i] = -\chi(G)$$

.

Demonstração.

1) Como G é pro-p limite, então G é do tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$. Logo pela observação 2.4.9 também U_i é do tipo F_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$, para cada $i \in I$.

   Usando lema 5.1.1, temos que

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_j(U_i,\mathbb{Z}_p))/[G:U_i] \leq dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i,\mathbb{F}_p)/[G:U_i],$$

para $j \geq 3$.

Agora pelo Teorema 3.2.9, item (i), nós temos que

$$\lim_{\overrightarrow{i}} dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i, \mathbb{F}_p)/[G : U_i] = 0.$$

Portanto segue que

$$\lim_{\overrightarrow{i}} \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_j(U_i, \mathbb{Z}_p))/[G : U_i] = 0$$

para $j \geq 3$.

2) Pelo Teorema 3.2.3 item(3) G é do tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$, logo pelo Corolário 2.4.10 $H_j(G, \mathbb{F}_p)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}_p$ e $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G, \mathbb{F}_p)$ é finita para cada $j \geq 0$, assim a característica de Euler de G está bem definida (Cf. definição 2.6.1). Usando a Proposição 2.6.3, temos que a característica de Euler é equivalente à seguinte expressão

$$\chi(G) = \sum_{0 \leq j} (-1)^j \dim_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_j(G, \mathbb{Z}_p)\big).$$

Por outro lado, pela proposição 2.6.4 temos que $\chi(G) = \chi(U_i)/[G : U_i]$, para cada $i \in I$. Logo,

$$\chi(G) = \sum_{0 \leq j} (-1)^j \dim_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_j(U_i, \mathbb{Z}_p)\big)/[G : U_i]$$

Defina $L(U_i) = \dim_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_1(U_i, \mathbb{Z}_p)\big) - \dim_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_2(U_i, \mathbb{Z}_p)\big)$

Assim, temos que

$$\chi(G) = \sum_{3 \leq j} (-1)^j \dim_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_j(U_i, \mathbb{Z}_p)\big)/[G : U_i] - L(U_i)/[G : U_i] + 1/[G : U_i]$$

Fazendo $\lim_{\overrightarrow{i}}$ e usando item (1), obtemos que

$$-\chi(G) = \lim_{\overrightarrow{i}} L(U_i)/[G : U_i]$$

3) Como G é pro-p limite, então G é do tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$. Logo também U_i é do tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$, para cada $i \in I$.

Usando lema 5.1.1, temos que

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_2(U_i, \mathbb{Z}_p))/[G : U_i] \leq dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_i, \mathbb{F}_p)/[G : U_i].$$

Agora pelo Teorema 3.2.9, item (iii), nós temos que

$$\lim_{\overrightarrow{i}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_i, \mathbb{F}_p)/[G : U_i] = 0.$$

Logo, segue que

$$\lim_{\overrightarrow{i}} \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_2(U_i, \mathbb{Z}_p))/[G : U_i] = 0 \tag{5.5}$$

Portanto,

$$\lim_{\overrightarrow{i}} \dim_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_1(U_i, \mathbb{Z}_p)\big)/[G : U_i] = \lim_{\overrightarrow{i}} L(U_i)/[G : U_i] + \lim_{\overrightarrow{i}} \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_2(U_i, \mathbb{Z}_p)\big)/[G : U_i] \tag{5.6}$$

Por último, usando item (2) e 5.5, temos

$$\lim_{\overrightarrow{i}} \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_i) = \lim_{\overrightarrow{i}} \dim_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_1(U_i, \mathbb{Z}_p)\big)/[G : U_i] = -\chi(G)$$

.

■

Logo temos o Corolário referente à parte de torsão de um grupo pro-p limite.

Corolário 5.1.3. *Seja G um grupo pro-p limite e $\{U_i\}_{i\in I}$ uma sequência de subgrupos abertos de G tal que $U_{i+1} \leq U_i$ e $\bigcap_i U_i = 1$. Então*

$$\lim_{i\in I} T(U_i)/[G : U_i] = 0,$$

onde $T(U_i)$ é o posto do grupo de torsão de U_i^{ab}.

Demonstração. Temos que $d(U_i) \geq d(U_i^{\mathrm{ab}}) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_i) + T(U_i)$. Pelo Teorema 5.1.2, temos que $\lim_{i\in I} d(U_i)/[G : U_i] = -\chi(G)$ e pelo Teorema 3.2.9 temos $\lim_{i\in I} \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_i)/[G : U_i] = -\chi(G)$ respectivamente. Logo

$$\lim_{i\in I} T(U_i)/[G : U_i] = 0,$$

■

Agora analisaremos a p-deficiência de um grupo profinito particular.

Lema 5.1.4. *Seja G um grupo limite não abeliano tal que cada subgrupo abeliano tem posto menor o igual a 2. Seja $\widehat{G}$ o completamento profinito de G e p um número primo, então a p-deficiência de $\widehat{G}$ é $def_p(\widehat{G}) \geq 2$.*

Demonstração. Prova-se usando indução sobre a altura $\mathrm{ht}(G)$ de G que $def_p(\widehat{G}) \geq 2$. De fato, se $h(G) = 0$, então G é livre não abeliano, logo $\widehat{G}$ é um grupo profinito livre não abeliano finitamente gerado. Como $cd_p(\widehat{G}) = 1$, então $def_p(\widehat{G}) = d(\widehat{G}) \geq 2$ (Cf. Exemplo 2.5.6).

Supor que o fato vale para subgrupos limites de altura $h(G) - 1$. Pelo Teorema 4.1.1 temos que G é isomorfo ao grupo fundamental de um grafo finito de grupos $(\Gamma, \mathbb{T})$, onde os grupos de vértices são grupos limites não abelianos de altura ao mais $h(G) - 1$ e grupos abelianos livres de posto finito, e os grupos de arestas são grupos cíclicos infinitos ou triviais. Podemos fazer indução sobre o comprimento de Γ, então nós temos os seguintes casos

1 $G = G_1 \star_C G_2$, onde G_i é um grupo não abeliano de altura ao mais $h(G) - 1$ ou abeliano livre de posto finito e C é um grupo cíclico infinito o trivial, para $i \in \{1, 2\}$.

2 $G = HNN(G_1, C, t)$, onde G_1 é um grupo não abeliano de altura ao mais $h(G) - 1$ ou abeliano livre de posto finito e C é um grupo cíclico infinito o trivial.

Caso [1]:

Seja $G = G_1 \star_C G_2$. Se $C \neq 1$,então G_1 ou G_2 é não abeliano pois G é não abeliano. Além disso usando o Teorema 3.2.12 temos $\widehat{G} = \widehat{G_1} \amalg_{\widehat{C}} \widehat{G_2}$. Sem perda de generalidade supor que G_1 é não abeliano, então pela hipótese de indução, $def_p(\widehat{G_1}) \geq 2$. Se G_2 é abeliano, então pela Observação 2.5.5,

$$def_p(\widehat{G_2}) \geq def(\widehat{G_2}) \geq def(G_2) \geq 1.$$

Se G_2 é não abeliano então, pela indução $def_p(\widehat{G_2}) \geq 2$. Seja M um finito $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}]]$-module, então pelo Teorema 2.8.5 item(i) temos a seguinte sequência de Mayer-Vitories,

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(\widehat{G}, M) \to H^0(\widehat{G_1}, M) \oplus H^0(\widehat{G_2}, M) \to H^0(\widehat{C}, M) \to \\ \to H^1(\widehat{G}, M) \to H^1(\widehat{G_1}, M) \oplus H^1(\widehat{G_2}, M) \to H^1(\widehat{C}, M) \to H^2(\widehat{G}, M) \to \\ \to H^2(\widehat{G_1}, M) \oplus H^2(\widehat{G_2}, M) \to H^2(\widehat{C}, M) \to \cdots \end{aligned} \tag{5.7}$$

Denotamos $\dim\big(H^i(G, M)\big)$ o posto de $H^i(G, M)$ como $\mathbb{Z}$-módulo, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Como $\widehat{C}$ é profinito livre de posto 1, então $H^2(\widehat{C}, M) = 0$, logo a equação 5.7 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} -\dim H^2(\widehat{G}, M) + \dim H^1(\widehat{G}, M) - \dim H^0(\widehat{G}, M) = -\dim H^2(\widehat{G_1}, M) + \dim H^1(\widehat{G_1}, M) - \\ \dim H^0(\widehat{G_1}, M) - \dim H^2(\widehat{G_2}, M) + \dim H^1(\widehat{G_2}, M) - \dim H^0(\widehat{G_2}, M) - \\ \big(-\dim H^2(\widehat{C}, M) + \dim H^1(\widehat{C}, M) - \dim H^0(\widehat{C}, M)\big). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Já que M é um finito $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}]]$-module, então M é um finito $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G_i}]]$-module, para $i \in \{1, 2\}$, além disso M é um finito $\mathbb{Z}_p[[\widehat{C}]]$-module.

Portanto da equação 5.8 temos que,

$$\chi_2(\widehat{G}, M) = \chi_2(\widehat{G_1}, M) + \chi_2(\widehat{G_2}, M) - \chi_2(\widehat{C}, M) \tag{5.9}$$

Como $\chi_2(\widehat{G_1}, M) \geq def_p(\widehat{G_1}) - 1 \geq 1$, $\chi_2(\widehat{G_2}, M) \geq def_p(\widehat{G_2}) - 1 \geq 0$ e $\chi_2(\widehat{C}, M) = d(\widehat{C}) - 1 = 0$, temos que $\chi_2(\widehat{G}, M) \geq 1$, logo $def_p(\widehat{G}) \geq 2$.

Se $C = 1$, então da equação 5.7 e 5.8, temos que

$$\chi_2(\widehat{G}, M) = \chi_2(\widehat{G_1}, M) + \chi_2(\widehat{G_2}, M) + 1 \tag{5.10}$$

Se G_1 e G_2 são abelianos, então $def(G_i) \geq 1$, assim $1 + \chi_2(\widehat{G_i}, M) \geq def_p(\widehat{G_i}) \geq def(\widehat{G_i}) \geq 1$, para $i \in \{1, 2\}$, logo $\chi_2(\widehat{G}, M) \geq 1$, portanto $def_p(\widehat{G}) \geq 2$.

Então suporemos sem perda de generalidade que G_1 é não abeliano, pela indução $def_p(\widehat{G_1}) \geq 2$, além disso $def_p(\widehat{G_2}) \geq 1$.

Como $\chi_2(\widehat{G_1}, M) \geq def_p(\widehat{G_1}) - 1 \geq 1$ e $\chi_2(\widehat{G_2}, M) \geq def_p(\widehat{G_2}) - 1 \geq 0$, temos que $\chi_2(\widehat{G}, M) \geq 2$, logo $def_p(\widehat{G}) \geq 3$.

Caso [2]

Seja $G = HNN(G_1, C, t)$. Se $C = 1$, então G é um produto livre e o resultado segue do caso [1]. Se $C \neq 1$, então G_1 não abeliano pois G é não abeliano. Além disso usando o Teorema 3.2.12 temos $\widehat{G} = HNN(\widehat{G_1}, \widehat{C}, t)$. Então pela hipótese de indução $def_p(\widehat{G_1}) \geq 2$. Seja M um finito $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}]]$-módulo, então pelo Teorema 2.8.5 item(ii) temos a seguinte sequência de Mayer-Vitories,

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(\widehat{G}, M) \to H^0(\widehat{G_1}, M) \to H^0(\widehat{C}, M) \to \\ \to H^1(\widehat{G}, M) \to H^1(\widehat{G_1}, M) \to H^1(\widehat{C}, M) \to H^2(\widehat{G}, M) \to \\ \to H^2(\widehat{G_1}, M) \to H^2(\widehat{C}, M) \to \cdots \end{aligned} \tag{5.11}$$

Como $\widehat{C}$ é profinito livre de posto 1, então $H^2(\widehat{C}, M) = 0$, logo temos que

$$\begin{aligned} - \dim H^2(\widehat{G}, M) + \dim H^1(\widehat{G}, M) - \dim H^0(\widehat{G}, M) = - \dim H^2(\widehat{G_1}, M) + \dim H^1(\widehat{G_1}, M) - \\ \dim H^0(\widehat{G_1}, M) - \big(- \dim H^2(\widehat{C}, M) + \dim H^1(\widehat{C}, M) - \dim H^0(\widehat{C}, M)\big). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Já que M é um finito $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}]]$-module, então M é um finito $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G_1}]]$-módulo, além disso M é um finito $\mathbb{Z}_p[[\widehat{C}]]$-module. Portanto da equação 5.11 temos que,

$$\chi_2(\widehat{G}, M) = \chi_2(\widehat{G_1}, M) - \chi_2(\widehat{C}, M) \tag{5.13}$$

Como $\chi_2(\widehat{G_1}, M) \geq def_p(\widehat{G_1}) - 1 \geq 1$ e $\chi_2(\widehat{C}, M) = d(\widehat{C}) - 1 = 0$, temos que $\chi_2(\widehat{G}, M) \geq 1$, logo $def_p(\widehat{G}) \geq 2$. ∎

Teorema 5.1.5. *Seja G um grupo limite não abeliano tal que cada subgrupo abeliano tem posto menor o igual a 2. Seja $\widehat{G}$ o completamento profinito de G e N um subgrupo fechado normal de $\widehat{G}$ tal que $0 < \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(N, \mathbb{F}_p) < \infty$, para todo primo p tal que p divide $|N|$. Então $|\widehat{G} : N| < \infty$.*

Demonstração.

Seja p um número primo que divide $|N|$. Pelo Lema 5.1.4 temos que $def_p(\widehat{G}) \geq 2$.

Supor pela contradição que $|\widehat{G} : N| = \infty$. Usando a proposição 2.5.7 temos que $H^1(N, \mathbb{F}_p)$ é infinito. o qual é uma contradição. Portanto $|\widehat{G} : N| < \infty$. ∎

A seguinte Lema é o análogo ao caso profinito dada no Teorema 5.1 em [26].

Lema 5.1.6. *Dado p um número primo e G um grupo profinito tal que $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G, \mathbb{F}_p) < \infty$ e p-dimensão cohomológica finita, agindo sobre uma árvore profinita T tal que T/G é finita e cada estabilizador de aresta G_e e vértice G_v tem $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G_e, \mathbb{F}_p)$ e $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G_v, \mathbb{F}_p)$ finitas, $\forall j \geq 1$, $\forall v \in V(T)/G$, $\forall e \in E(T)/G$. Dado $j \geq 1$ um inteiro e $\{U_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de subgrupos abertos normais de G tal que para cada i temos $U_{i+1} \leq U_i$ e para cada $v \in V(T)/G$ e $e \in E(T)/G$:*

$$\lim_{i \to \infty} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i \cap G_v, \mathbb{F}_p)/[G_v : (U_i \cap G_v)] = \rho_1(v) < \infty \tag{5.14}$$

$$\lim_{i \to \infty} \dim_{\mathbb{F}_p} H_{j-1}(U_i \cap G_e, \mathbb{F}_p)/[G_e : (U_i \cap G_e)] = \rho_2(e) < \infty \tag{5.15}$$

onde $\rho_1(v)$, $\rho_2(e)$ são funções contínuas com domínio $\{v\}_{v \in V(T)/G}$ e $\{e\}_{e \in E(T)/G}$ respectivamente. Então

$$\sup_{\overrightarrow{i}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i, \mathbb{F}_p)/[G : U_i] \leq \sum_{v \in V(T)/G} \rho_1(v) + \sum_{e \in E(T)/G} \rho_2(e)$$

Em particular, se $\rho_1(v)$ e $\rho_2(e)$ são as aplicações nulas, então

$$\lim_{i \to \infty} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i, \mathbb{F}_p)/[G : U_i] = 0$$

Demonstração. Já que as seguintes dimensões $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G,\mathbb{F}_p)$, $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G_v,\mathbb{F}_p)$ e $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G_e,\mathbb{F}_p)$ são finitas, então as seguintes dimensões $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i,\mathbb{F}_p)$, $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i\cap G_v,\mathbb{F}_p)$ e $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i\cap G_e,\mathbb{F}_p)$ são finitas para $\forall j\geq 1$, $\forall i\geq 1$, $\forall v\in V(T)$, $\forall e\in E(T)$.

Usando o Teorema 2.8.2 temos a seguinte sequência longa exata Mayer-Vietoris sobre o subgrupo U_i

$$\cdots\to\bigoplus_{e\in E(T)/G}\bigoplus_{g\in G_e\backslash G/U_i} H_j(U_i\cap G_e^g,\mathbb{F}_p)\to\bigoplus_{v\in V(T)/G}\bigoplus_{g\in G_v\backslash G/U_i} H_j(U_i\cap G_v^g,\mathbb{F}_p)$$
$$\to H_j(U_i,\mathbb{F}_p)\to\bigoplus_{e\in E(T)/G}\bigoplus_{g\in G_e\backslash G/U_i} H_{j-1}(U_i\cap G_e^g,\mathbb{F}_p)\to\cdots$$

Assim obtemos a seguinte desigualdade,

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}_p}\left(H_j(U_i,\mathbb{F}_p)\right)\leq &\sum_{v\in V(T)/G}\sum_{g\in G_v\backslash G/U_i}\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i\cap G_v^g,\mathbb{F}_p)+\\ &\sum_{v\in E(T)/G}\sum_{g\in G_e\backslash G/U_i}\dim_{\mathbb{F}_p} H_{j-1}(U_i\cap G_e^g,\mathbb{F}_p)\end{aligned}\tag{5.16}$$

Como $V(T)/G$ e $E(T)/G$ são conjuntos finitos, então pela definição de limite de (5.14) e (5.15), para um fixo $\epsilon>0$, existe $i_0\in N$ tal que, para $i\geq i_0$, $v\in V(T)/G$ e $e\in E(T)/G$ temos que

$$dim_{\mathbb{F}_p}H_j(U_i\cap G_v,\mathbb{F}_p)\leq\epsilon[G_v:U_i\cap G_v]\tag{5.17}$$

e

$$dim_{\mathbb{F}_p}H_{j-1}(U_i\cap G_e,\mathbb{F}_p)\leq\epsilon[G_e:U_i\cap G_e]\tag{5.18}$$

Observamos que,

$$|G:U_i|=|G:G_vU_i||G_vU_i:U_i|=|G:G_vU_i||G_v^gU_i:U_i|$$

e

$$|G:U_i|=|G:G_eU_i||G_eU_i:U_i|=|G:G_eU_i||G_e^gU_i:U_i|,$$

logo obtemos

$$\sum_{g\in G_v\backslash G/U_i}[G_v^g:U_i\cap G_v^g]=[G:U_i]\ \text{ e }\ \sum_{g\in G_e\backslash G/U_i}[G_e^g:U_i\cap G_e^g]=[G:U_i]\tag{5.19}$$

Como U_i é normal em G, então para todo $g\in G$ temos que

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i\cap G_v^g,\mathbb{F}_p)=\dim_{\mathbb{F}_p} H_j\big((U_i\cap G_v)^g,\mathbb{F}_p\big)$$

e

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_{j-1}(U_i\cap G_e^g,\mathbb{F}_p)=\dim_{\mathbb{F}_p} H_{j-1}\big((U_i\cap G_e)^g,\mathbb{F}_p\big)$$

.

De 5.16 temos que

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{F}_p}\left(H_j(U_i,\mathbb{F}_p)\right) \leq & \sum_{v\in V(T)/G}\sum_{g\in G_v\backslash G/U_i} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i\cap G_v^g,\mathbb{F}_p) + \\
& \sum_{v\in E(T)/G}\sum_{g\in G_e\backslash G/U_i} \dim_{\mathbb{F}_p} H_{j-1}(U_i\cap G_e^g,\mathbb{F}_p) \qquad (5.20) \\
= & \sum_{v\in V(T)/G}\sum_{g\in G_v\backslash G/U_i} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i\cap G_v,\mathbb{F}_p) + \\
& \sum_{v\in E(T)/G}\sum_{g\in G_e\backslash G/U_i} \dim_{\mathbb{F}_p} H_{j-1}(U_i\cap G_e,\mathbb{F}_p) \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Usando 5.17, 5.18, 5.20, temos que

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i,\mathbb{F}_p) \leq & \sum_{v\in V(T)/G}\sum_{g\in G_v\backslash G/U_i} \big(\epsilon+\rho(v)\big)[G_v : U_i\cap G_v] + \qquad (5.22) \\
& \sum_{e\in E(\Lambda)}\sum_{g\in G_e\backslash G/U_i} \big(\epsilon+\rho(e)\big)[G_e : U_i\cap G_e] \\
= & \sum_{v\in V(T)/G}\sum_{g\in G_v\backslash G/U_i} \big(\epsilon+\rho(v)\big)[G_v^g : U_i\cap G_v^g] + \qquad (5.23) \\
& \sum_{e\in E(T)/G}\sum_{g\in G_e\backslash G/U_i} \big(\epsilon+\rho(e)\big)[G_e^g : U_i\cap G_e^g]
\end{aligned}$$

Usando 5.19 e 5.23 temos que

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i,\mathbb{F}_p) \leq & \sum_{v\in V(T)/G} \big(\epsilon+\rho(v)\big)[G : U_i] + \qquad (5.24) \\
& \sum_{e\in E(T)/G} \big(\epsilon+\rho(e)\big)[G : U_i]
\end{aligned}$$

Portanto para $i \geq i_0$ (lembrando que i_0 depende de ϵ)

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i,\mathbb{F}_p)/[G:U_i] \leq & \sum_{v\in V(T)/G} \big(\epsilon+\rho(v)\big) + \qquad (5.25) \\
& \sum_{e\in E(T)/G} \big(\epsilon+\rho(e)\big),
\end{aligned}$$

logo temos

$$\begin{aligned}
\sup_{\overrightarrow{i}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i,\mathbb{F}_p)/[G:U_i] \leq & \sum_{v\in V(T)/G} \big(\epsilon+\rho(v)\big) + \qquad (5.26) \\
& \sum_{e\in E(T)/G} \big(\epsilon+\rho(e)\big)
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$, na equação 5.26 temos que

$$\sup_{\overrightarrow{i}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i,\mathbb{F}_p)/[G:U_i] \leq \sum_{v\in V(T)/G} \rho(v) + \sum_{e\in E(T)/G} \rho(e)$$

■

Teorema 5.1.7. *Seja $\widehat{G}$ o completamento profinito de um grupo limite G de altura $n \in \mathbb{Z}_0^+$ e p um número primo. Se $\{U_i\}_{i\geq 1}$ é uma sequência de subgrupos normais abertos de $\widehat{G}$ tal que $U_{i+1} \leq U_i$ para todo $i \geq 1$ e $cd_p(\bigcap_{i\geq 1} U_i) \leq 2$. Então,*

(1) $\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G} : U_i] = 0$ *para* $j \geq 3$*;*

(2) Se $\{[\widehat{G} : U_i]\}_{i\geq 1}$ *converge para o infinito, então temos*

$$\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} \big(H_1(U_i, \mathbb{F}_p) - H_2(U_i, \mathbb{F}_p)\big)/[G : U_i] = -\chi_p(\widehat{G}),$$

onde $\chi_p(\widehat{G})$ *é a p-característica de Euler de* $\widehat{G}$*.*

(3) Se $\bigcap_{i\geq 1} U_i = 1$*, então* $\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_i, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G} : U_i] = 0$
e $\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_i, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G} : U_i] = -\chi_p(\widehat{G})$*.*

Demonstração.

Como G tem a propriedade de ser bom (Cf. Proposição 3.2.12), temos que a p-dimensão cohomológica $cd_p(\widehat{G})$ de $\widehat{G}$ é igual à dimensão cohomológica de G, logo $cd_p(\widehat{G})$ é finita, pois a dimensão cohomológica de G é finita (Cf. Proposição 3.1.5). Novamente usando a propriedade de G de ser bom e que G é do Tipo FP_∞ (Cf. Proposição 3.1.5), temos $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(\widehat{G}, \mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(G, \mathbb{F}_p) < \infty$ para $j \geq 0$.

1) Fazemos a prova usando a indução sobre a altura de G. Primeiro, se a altura de G é 0, então G é um grupo livre, logo $\widehat{G}$ é profinito livre, então U_i é profinito livre e $cd_p(U_i) = 1$. Portanto $H_j(U_i, \mathbb{F}_p) = 0$, para $j \geq 2$ e $i \geq 1$.

   Assumimos que o Teorema vale para grupos limites de altura menor que altura de G. Seja n a altura de G e $G \subseteq G_n = G_{n-1} *_{C_{n-1}} A_{n-1}$, onde $A_{n-1} = C_{n-1} \times B$ é abeliano livre finitamente gerado. Logo G é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(\Phi, \Lambda)$ de um grafo finito de grupos Φ com grafo conexo finito Λ cujos grupos de arestas $\{G_e\}_{e\in E(\Lambda)}$ são grupos cíclicos infinitos ou triviais e cujos grupos de vértices $\{G_v\}_{v\in V(\Lambda)}$ são grupos limites não abelianos de altura ao máximo $n-1$ ou abelianos livres de posto finito.

   Como a topologia profinita sobre G é eficiente (Cf. Teorema 3.2.12), então $\widehat{G}$ é isomorfo ao grupo fundamental de um grafo finito de grupos cujos grupos de arestas são $\{\widehat{G}_e\}_{e\in E(\Lambda)}$, onde $\widehat{G}_e \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ ou $\{1\}$ e os grupos de vértices são $\{\widehat{G}_v\}_{v\in V(\Lambda)}$, ou seja, grupos profinito limites.

   Para $j \geq 3$, definimos a seguintes sucessões de funções,

$$\rho_1(i, v) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i \cap \widehat{G}_v, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G}_v : U_i \cap \widehat{G}_v] \tag{5.27}$$

   e

$$\rho_2(i, e) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_{j-1}(U_i \cap \widehat{G}_e, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G}_e : U_i \cap \widehat{G}_e] \tag{5.28}$$

   Para $v \in V(\Lambda)$, se G_v não é abeliano, então aplicamos indução sobre o grupo G_v, logo temos que $\rho_1(i, v)$ converge para 0 quando i vai para o infinito. Se G_v é abeliano, então

$\widehat{G}_v$ é profinito abeliano livre (isomorfo a $\widehat{\mathbb{Z}}^n$, onde n é um número natural finito), assim $U_i \cap \widehat{G}_v \simeq \widehat{G}_v$ para cada $i \geq 1$. Assim,

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i \cap \widehat{G}_v, \mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_{i+1} \cap \widehat{G}_v, \mathbb{F}_p),$$

para cada $i \geq 1$. Se $\{[\widehat{G}_v : U_i \cap \widehat{G}_v]\}_i$ vai para o infinito, então

$$\lim_{i\to\infty} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i \cap \widehat{G}_v, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G}_v : \widehat{G}_v \cap U_i] = \lim_{i\to\infty} \rho_1(i,v) = 0.$$

Caso contrário, se $[\widehat{G}_v : U_i \cap \widehat{G}_v]$ não vai para o infinito então existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{i_0} \cap \widehat{G}_v = U_{i_0+1} \cap \widehat{G}_v = U_{i_0+2} \cap \widehat{G}_v = \cdots$. Desta forma $\bigcap_{i\in I} (U_i \cap \widehat{G}_v) = U_{i_1} \cap \widehat{G}_v$ para $i_1 \in \mathbb{N}$. Assim $cd_p(U_{i_1} \cap \widehat{G}_v) = cd_p\big(\bigcap_{i\in I} U_i \cap \widehat{G}_v\big) \leq cd_p\big(\bigcap_{i\in I} U_i\big) \leq 2$, logo $cd_p(U_t \cap \widehat{G}_v) \leq 2$ para $t \geq i_1$.

Então, $H_j(U_t \cap \widehat{G}_v, \mathbb{F}_p) = 0$, para $t \geq i_1$, $j \geq 3$, portanto

$$\lim_{i\to\infty} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i \cap \widehat{G}_v, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G}_v : \widehat{G}_v \cap U_i] = \lim_{i\to\infty} \rho_1(i,v) = 0.$$

Observe que, se $G_e \neq 1$ para $e \in E(\Lambda)$, então $\widehat{G}_e$ é isomorfo ao grupo profinito $\widehat{\mathbb{Z}}$. Logo, para $i \in I$, $U_i \cap \widehat{G}_e$ é trivial ou grupo livre profinito isomorfo a $\widehat{\mathbb{Z}}$. Assim $cd_p(U_i \cap \widehat{G}_e) \leq 1$, para cada $i \in I$. Logo $H_{j-1}(U_i \cap \widehat{G}_e, \mathbb{F}_p) = 0$, para $j \geq 3$. Portanto $\rho_2(i,e)$ converge para 0 quando i vai pra infinito.

Portanto usando Lema 5.1.6 temos o resultado para $j \geq 3$.

2) Lembramos que a p-característica de Euler de $\widehat{G}$ é definida como

$$\chi_p(\widehat{G}) = \sum_{0 \leq i \leq cd_p(\widehat{G})} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\widehat{G}, \mathbb{F}_p)$$

Logo

$$\chi_p(\widehat{G}) = \chi_p(U_i)/[\widehat{G} : U_i] = \sum_{j\geq 0} (-1)^j \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G} : U_i]$$

Define $L(U) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U, \mathbb{F}_p)$, então temos

$$\chi_p(\widehat{G}) = \sum_{j\geq 3} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i, \mathbb{F}_p))/[\widehat{G} : U_i] - L(U_i)/[\widehat{G} : U_i] + 1/[\widehat{G} : U_i],$$

Logo

$$\chi_p(\widehat{G}) = \sum_{j\geq 3} \lim_{i\to\infty} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_i, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G} : U_i] - \lim_{i\to\infty} L(U_i)/[\widehat{G} : U_i] + \lim_{i\to\infty} 1/[\widehat{G} : U_i]$$

Assim, pelo item (1) do Teorema e que $\{[\widehat{G} : U_i]\}_{i\geq 1}$ converge para o infinito, temos que

$$\chi_p(\widehat{G}) = -\lim_{\overrightarrow{i}} L(U_i)/[\widehat{G} : U_i]$$

3) Se $\bigcap_{i\geq 1} U_i = 1$, então $[\widehat{G} : U_i]$ converge para o infinito.

Por argumento similar ao item (i) do Teorema, nós provamos que

$$\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_i, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G} : U_i] = 0,$$

De fato, fazemos indução sobre o grupo G_v no caso que G_v não é abeliano, onde $v \in V(\Lambda)$. Assim nós temos

$$\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_i \cap \widehat{G}_v, \mathbb{F}_p))/[\widehat{G}_v : U_i \cap \widehat{G}_v] = 0,$$

No caso que G_v ser abeliano procedemos do mesmo jeito que item (1).

Além disso, como $U_i \cap \widehat{G}_e$ é trivial ou isomorfo a $\widehat{\mathbb{Z}}$, temos que $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_i \cap \widehat{G}_e, \mathbb{F}_p) \leq C$ é constante para todo $i \in I$. Portanto

$$\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_i \cap \widehat{G}_e, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G}_e : U_i \cap \widehat{G}_e] \leq \varinjlim_i C/[\widehat{G}_e : \widehat{G}_e \cap U_i] = 0.$$

Portanto pelo Lema 5.1.6 temos que

$$\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_i, \mathbb{F}_p)/[\widehat{G} : U_i] = 0,$$

Por outro lado, pelo item(2) do Teorema

$$\begin{aligned}\varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_i, \mathbb{F}_p))/[\widehat{G} : U_i] &= \varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} L(U_i)/[\widehat{G} : U_i] + \varinjlim_i \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_i, \mathbb{F}_p))/[\widehat{G} : U_i] \\ &= -\chi_p(\widehat{G}) + 0 = -\chi_p(\widehat{G}).\end{aligned}$$

■

O seguinte Teorema é o análogo profinito do Teorema 2.7 em [38].

Teorema 5.1.8. *Seja G um grupo profinito finitamente gerado livre de torsão e N um subgrupo finitamente gerado de G tal que $[G : N] = \infty$. Se $RG(G) > 0$ (posto gradiente positivo), então a ação da esquerda por multiplicação de G no espaço de cosets G/N é fiel.*

Note que a conclusão é equivalente a dizer que o core de N em G é trivial.

Demonstração. Seja K o núcleo da ação. Queremos provar que $K = 1$. Pela contradição supor que K é não trivial. Temos que $K \lhd_c G$ e $K \leq N$. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela definição de índice do grupo profinito e que $|K| = [G : N] = \infty$, existe $V \trianglelefteq_\circ G$ tal que

$$|G : NV|, |KV : V| > \frac{d(N)+1}{\epsilon} \tag{5.29}$$

Agora temos,

$$\begin{aligned} d(V) &\leq d(N \cap V) + d(\frac{V}{K \cap V}) \cdots \text{usando Lema2.1.10} && (5.30)\\ &\leq d(N)|N : N \cap V| + d(KV) \cdots \text{usando Corolário 2.1.11} && (5.31)\\ &\leq \frac{d(N)|G : V|}{|G : NV|} + d(G)|G : KV| + 1 \cdots \text{usando corolário 2.1.11} && (5.32)\\ &= \frac{d(N)|G : V|}{|G : NV|} + \frac{d(G)|G : V|}{|VK : V|} + 1 && (5.33)\end{aligned}$$

Logo temos,

$$\frac{d(V)-1}{|G:V|} \leq \frac{d(N)}{|G:NV|} + \frac{d(G)}{|VK:V|} \tag{5.34}$$

$$\leq \frac{d(N)+d(G)}{\min\{|G:NV|, |VK:V|\}} \tag{5.35}$$

$$< \epsilon \frac{(d(N)+d(G))}{d(N)+1} \cdots \text{usando a equação 5.29} \tag{5.36}$$

Seja a constante $C = \dfrac{(d(N)+d(G))}{d(N)+1}$, temos que

$$RG(G) < \epsilon.C$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos $RG(G) = 0$, o qual é uma contradição.

■

Corolário 5.1.9. *Seja G um grupo profinito livre de torsão e N um subgrupo finitamente gerado de G. Se $N_G(N)$ é finitamente gerado e $RG(N_G(N)) > 0$, então $[N_G(N):N] < \infty$.*

Demonstração. Supor que $[N_G(N):N] = \infty$, então aplicando o Teorema 5.1.8 à ação de $N_G(N)$ sob $N_G(N)/N$, temos que a ação é fiel, ou seja, $\bigcap_{g\in N_G(N)} gNg^{-1} = 1$. Por outro lado, temos que $N = \bigcap_{g\in N_G(N)} gNg^{-1}$, logo $N = 1$, o qual é uma contradição. ■

Corolário 5.1.10. *Seja G um grupo profinito finitamente gerado livre de torsão e N um subgrupo normal finitamente gerado de G. Se $RG(G) > 0$ (posto gradiente positivo), então $|G:N| < \infty$.*

Demonstração. Se N é normal, então $N_G(N) = G$, logo usando o corolário 5.1.9 temos que $[G:N] < \infty$. ■

No seguinte Teorema usaremos homologia de um grupo, para caracterizar o índice de um subgrupo normal.

Proposição 5.1.11. *Seja G um grupo profinito livre de torsão e N um subgrupo normal de G. Dado p um número primo e supor que existe $\{V_i\}_{i\geq 1}$ uma sequência de subgrupos normais abertos de G tal que $V_{i+1} \leq V_i$ para todo $i \geq 1$ e $\bigcap_{i\geq 1} V_i = 1$ satisfazendo as seguintes condições*

i) Existe $k_1 > 0$, tal que $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(V_iN, \mathbb{F}_p) \leq k_1[G:NV_i]$, para todo $i \geq 1$.

ii) Existe $k_2 > 0$, tal que $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(N\cap V_i, \mathbb{F}_p) \leq k_2[N:N\cap V_i]$, para todo $i \geq 1$.

Se $\lim_{i\to\infty} \dfrac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(V_i,\mathbb{F}_p)}{[G:V_i]}$ existe e é positivo, então $|G:N| < \infty$.

Demonstração. Supor pela contradição que $[G:N] = \infty$. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela definição de índice do grupo profinito e que $|N| = [G:N] = \infty$, existe $V_{i_0} \trianglelefteq_\circ G$ tal que

$$|G:NV_{i_0}|, |NV_{i_0}:V_{i_0}| > \frac{k_2+1}{\epsilon} \tag{5.37}$$

Seja $i \geq i_0$ tal que $H_1(V_i, \mathbb{F}_p) \neq 0$. Pelo corolário 2.3.13 temos a seguinte sequência exata

$$H_1(N\cap V_i, \mathbb{F}_p)_{V_i/V_i\cap N} \xrightarrow{\alpha_1} H_1(V_i,\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\alpha_2} H_1(V_i/V_i\cap N, \mathbb{F}_p) \to 0 \tag{5.38}$$

Seja $A := H_1(N \cap V_i, \mathbb{F}_p)_{V_i/V_i \cap N}$, $B := H_1(V_i, \mathbb{F}_p)$, $C = H_1(V_i/V_i \cap N, \mathbb{F}_p)$

Temos que $B/ker(\alpha_2) \simeq C$. Temos que $\ker(\alpha_2) = \alpha_1(A) \simeq A/\ker(\alpha_1)$. Logo

$$d(\ker(\alpha_2)) \leq d(A) \leq d(H_1(N \cap V_i, \mathbb{F}_p)) \leq [N : N \cap V_i]k_2 < \infty. \tag{5.39}$$

Então, usando Lema 2.1.10, temos

$$d(B) \leq d(C) + d(\ker(\alpha_2)) \leq d(C) + [N : N \cap V_i]k_2$$

Logo,

$$\begin{align} d(B) &\leq [N : N \cap V_i]k_2 + d(H_1(\frac{V_i}{N \cap V_i}, \mathbb{F}_p)) \tag{5.40}\\ &\leq k_2|N : N \cap V_i| + d(H_1(NV_i, \mathbb{F}_p)) \tag{5.41}\\ &\leq \frac{k_2|G : V_i|}{|G : NV_i|} + k_1|G : NV_i| \tag{5.42}\\ &= \frac{k_2|G : V_i|}{|G : NV_i|} + \frac{k_1|G : V_i|}{|V_iN : V_i|} \tag{5.43}\end{align}$$

Logo temos,

$$\begin{align} \frac{d(B)}{|G : V_i|} &\leq \frac{k_2}{|G : NV_i|} + \frac{k_1}{|V_iK : V_i|} \tag{5.44}\\ &\leq \frac{k_1 + k_2}{\min\{|G : NV_i|, |VK : V_i|\}} \tag{5.45}\\ &< \epsilon\frac{k_1 + k_2}{k_2 + 1} \cdots \text{usando a equação 5.29} \tag{5.46}\end{align}$$

Seja a constante $L_1 = \dfrac{(k_1 + k_2)}{k_2 + 1}$, temos que

$$0 \leq \frac{d(H_1(V_i, \mathbb{F}_p))}{[G : V_i]} < \epsilon.L_1$$

Portanto para $i \geq i_0$ temos

$$0 \leq \frac{d(H_1(V_i, \mathbb{F}_p))}{[G : V_i]} < \epsilon.L_1$$

Fazendo $i \to \infty$ e $\epsilon \to 0$, temos $\lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{d(H_1(V_i, \mathbb{F}_p))}{[G : V_i]} = 0$ o que é uma contradição.

■

Teorema 5.1.12. *Seja $\widehat{G}$ o completamento profinito de um grupo limite não abeliano G de altura $n \geq 0$, e considere N um subgrupo fechado normal finitamente gerado em $\widehat{G}$. Então $[\widehat{G} : N] < \infty$.*

Demonstração. Seja p um número primo. Existe em $\widehat{G}$ uma família $\{V_i\}_{i \geq 1}$ de abertos normais em $\widehat{G}$ tal que $V_{i+1} \subset V_i$ e $\bigcap\limits_{i \geq 1} V_i = 1$. Como G tem a propriedade de ser bom (Cf. Proposição 3.2.12), temos que, para todo primo q, a q-dimensão cohomológica $cd_q(\widehat{G})$ de $\widehat{G}$ é igual à dimensão cohomológica de G, logo pela proposição 3.1.5 $cd_q(\widehat{G})$ é finita, assim $\widehat{G}$ é livre de torsão.

Seja p um numero primo. Usando novamente que G tem a propriedade de ser bom (Cf. Proposição 3.2.12), temos que $H^i(\widehat{G},\mathbb{F}_p)\cong H^i(G,\mathbb{F}_p)$, logo usando o dual Pontryagin $((H^i(\widehat{G},\mathbb{F}_p))^*\cong H_i(\widehat{G},\mathbb{F}_p)$ e $((H^i(G,\mathbb{F}_p))^*\cong H_i(G,\mathbb{F}_p)$, portanto $H_i(\widehat{G},\mathbb{F}_p)\cong H_i(G,\mathbb{F}_p)$ para $i\geq 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\chi_p(\widehat{G}) &= \sum_{0\leq i\leq cd_p(G)} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}\left(H_i(\widehat{G},\mathbb{F}_p)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}\left(H_i(\widehat{G},\mathbb{F}_p)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}\left(H_i(G,\mathbb{F}_p)\right)\\
&= \sum_{0\leq i\leq cd(G)} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}\left(H_i(G,\mathbb{F}_p)\right)\\
&= \chi(G) \qquad (5.47)
\end{aligned}$$

A característica de Euler de um grupo limite não abeliano é negativa (Cf. Lema3.1.4), então $\chi_p(\widehat{G})=\chi(G)<0$. Logo, usando o Teorema 5.1.7 item (3), temos que

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(V_i,\mathbb{F}_p)}{[\widehat{G}:V_i]} = -\chi_p(\widehat{G})>0. \qquad (5.48)$$

Portanto usando a Proposição 5.1.11, obtemos o resultado. ∎

O seguinte corolário nós proporciona uma demonstração distinta à feita no Teorema 3.2.5.

Corolário 5.1.13. *Se G um grupo pro-p limite não abeliano e considere N um subgrupo fechado normal finitamente gerado em G. Então $[G:N]<\infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.7 item[1], temos que $\chi(G)<0$. Existe em G uma família $\{V_i\}_{i\geq 1}$ de abertos normais em G tal que $V_{i+1}\subset V_i$ e $\bigcap_{i\geq 1} V_i=1$. Logo, usando a Proposição 3.2.9 item[3], temos que $\lim_{i\to\infty}\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(V_i,\mathbb{F}_p)}{[G:V_i]}=-\chi(G)>0$. Pelo Teorema 3.2.3 item(ii), G é livre de torsão, portanto usando o Teorema 5.1.11, obtemos o resultado. ∎

5.2 Posto p-racional de um Grupo pro-p limite

Exemplo 5.2.1. *O grupo pro-p $G=F\amalg_C F$, onde $F=F(x,y)$ é um grupo pro-p livre de posto dois e C é um subgrupo procíclico auto centralizado de F gerado por $x^p[x,y]$, é um grupo pro-p limite cuja abelianização tem torsão. De fato, o grupo $F\amalg_C F$ esta imerso em $F\amalg_C A$, onde $A\simeq\mathbb{Z}_p^2$ com $A/C\simeq\langle a\rangle$, pois $F\amalg_C F\simeq F\amalg_C aFa^{-1}$ é um subgrupo de $F\amalg_C A$ gerado por F e aFa^{-1}. Assim $F\amalg_C F$ é um grupo pro-p limite. Além disso G^{ab} tem um elemento de ordem p, pois $G^{\mathrm{ab}}=\langle x,y,z,w\,|\,(xz^{-1})^p=1,[x,y]=[x,z]=[x,w]=[y,z]=[y,w]=[z,w]\rangle$*

Pelo exemplo anterior e o corolário 3.2.4 faz sentido estudar o posto *p-racional* de um grupo pro-p limite. Seja p um número primo fixo, $\mathbb{Z}_p$ o completamento pro-p de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}_p$ o corpo de frações de $\mathbb{Z}_p$. Para um grupo pro-p finitamente gerado G, o posto *p-racional* $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$ de G é dado da forma:

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G):=\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}G^{\mathrm{ab}})=\dim_{\mathbb{Q}_p}H_1(G,\mathbb{Q}_p),\ (\text{ Cf. Proposição 2.8.3})$$

onde $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$ é interpretado como o posto do grupo pro-p abeliano livre $\dfrac{G^{\mathrm{ab}}}{T(G^{\mathrm{ab}})}$, onde $T(G^{\mathrm{ab}})$ é o grupo de torsão de G^{ab}.

Agora procuramos adaptar o Lema 4.2.2 para o caso pro-p.

Lema 5.2.2. *Sejam G_1 e G_2 pro-p grupos finitamente gerados, e seja $C = \langle c \rangle$ um subgrupo procíclico infinito isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ ou trivial de G_1 e G_2.*

(a) Se $G = G_1 \amalg_C G_2$ é um produto pro-p livre com amalgamação em C, então

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) - \rho(G), \tag{5.49}$$

onde $\rho(G) \in \{0, 1\}$. Além disso, se $C = 1$, então $\rho(G) = 0$.

(b) Se $G = \mathrm{HNN}_\phi(G_1, C, t) = \langle\, G_1, t \mid t c t^{-1} = \phi(c) \,\rangle$ é uma HNN-extensão pro-p com subgrupo associado em $C \subseteq G_1$, então

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \rho(G), \tag{5.50}$$

onde $\rho(G) \in \{0, 1\}$. Além disso, existe uma sequência exata

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0, \tag{5.51}$$

onde $\alpha(q \otimes c) = q \otimes (c\phi(c)^{-1}\overline{G_1'})$, $q \in \mathbb{Q}_p$. Além,

(1) $\rho(G) = 0$ se, e somente se, α é injetivo;

(2) $\rho(G) = 1$ se, e somente se, α é a aplicação nula.

Demonstração.

I) Seja $G = G_1 *_C G_2$. Usando o Teorema 2.8.4 item(i) temos a sequência exata longa de Mayer-Vietoris associada a $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} -$

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}}) \oplus (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_2^{\mathrm{ab}}) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}}) \to \mathbb{Q}_p \to (\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p \to 0 \tag{5.52}$$

Já que $1 = \dim_{\mathbb{Q}_p}(C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(im\alpha) + \dim_{\mathbb{Q}_p}(ker\alpha)$, então temos 2 casos:

1) Se α é uma aplicação injetiva, então nós temos a sequência exata

$$0 \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}}) \oplus (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_2^{\mathrm{ab}}) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}}) \to \mathbb{Q}_p \to (\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p \to 0, \tag{5.53}$$

logo temos,

$$-\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) + 1 - 2 + 1 = 0$$

$$-1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) + 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) - 1$$

2) Se α é a aplicação nula, então nós temos a seguinte sequência exata

$$0 \to (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (G_1^{\mathrm{ab}}) \oplus (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_2^{\mathrm{ab}}) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}}) \to \mathbb{Q}_p \to (\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p \to 0, \tag{5.54}$$

logo temos,

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) + 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2)$$

II) Seja $G = HNN(G_1, C, t)$. Usando o Teorema 2.8.4 item(ii) temos a sequência exata longa de Mayer-Vietoris associada a $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} -$

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}}) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}}) \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p \to 0, \tag{5.55}$$

onde $\alpha(q \otimes c_1) = (q \otimes (c_1\phi(c_1)^{-1}\overline{G_1'}))$, com $c_1 \in C$.

Já que $1 = \dim_{\mathbb{Q}_p}(C_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(Im\alpha) + \dim_{\mathbb{Q}_p}(Ker\alpha)$ então temos os seguintes dois casos:
Se α é uma aplicação injetiva, então temos uma sequência exata

$$0 \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}}) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}}) \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p \to 0, \tag{5.56}$$

Logo,

$$-\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) + 1 - 1 + 1 = 0$$

$$-1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) + 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1)$$

Se α é a aplicação nula, então temos uma sequência exata

$$0 \to (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}}) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}}) \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p \to 0,$$

logo,

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) + 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + 1 \tag{5.57}$$

Por último, os remarques (1) e (2) seguem do fato que $\dim_{\mathbb{Q}_p}(im(\alpha)) \in \{0, 1\}$ e que $\dim_{\mathbb{Q}_p}(im(\alpha)) = 1$ se e só se, α é injetiva.

∎

Agora procuramos adaptar o Lema 4.2.1 nesta vez para caso pro-p limite.

Lema 5.2.3. *Se G é um grupo pro-p limite não procíclico, então* $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) \geq 2$.

Demonstração. Nos procedemos pela indução sobre a altura $\mathrm{ht}(G)$ de G. Se $n = 0$, então G é um grupo pro-p abeliano livre ou pro-p livre, logo é claro que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) \geq 2.$$

Então assumimos que G é um grupo pro-p limite de altura $n \geq 1$. Assumimos que o resultado é valido para grupos pro-p limite de altura $n-1$. Logo, pelo Teorema 3.2.6 G é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(\Upsilon, \Lambda)$ de um grafo de grupos Υ com grafo conexo finito Λ, cujos grupos de arestas são grupos procíclicos infinitos isomorfos a $\mathbb{Z}_p$ e grupos triviais e cujos grupos de vértices são grupos pro-p limite não abelianos de altura ao máximo $n-1$ e grupos pro-p abelianos livres de posto finito. Fazemos também indução sobre o comprimento de Λ, então é suficiente considerar os seguintes dois casos:

I) $G = G_1 \star_C G_2$ onde G_i é um grupo pro-p limite não abeliano de altura no máximo $n-1$ ou pro-p abeliano livre de posto finito e C é um grupo procíclico infinito isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ ou trivial, $i \in \{1, 2\}$.

II) $G = HNN(G_1, C, t)$, onde G_1 é um grupo pro-p limite não abeliano de altura no máximo $n-1$ ou pro-p abeliano livre de posto finito e C é procíclico infinito ou trivial.

Caso I Seja $G = G_1 \star_C G_2$, então, pelo Lema 5.2.2 item (a) temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) - \rho(G), \tag{5.58}$$

Se $C = 1$, então $\rho(G) = 0$, assim

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) \geq 1 + 1 = 2 \tag{5.59}$$

Agora supor que $C \neq 1$. Não pode acontecer que G_1 e G_2 sejam procíclicos pois nesse caso G seria procíclico. Sem perda de generalidade supor que G_1 não é procíclico. Logo se G_1 é abeliano então $\mathrm{rk}_p(G_1) \geq 2$, ou se G_1 é um grupo limite de altura ao mais $n-1$, então pela hipótese de indução $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) \geq 2$. Além disso $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) \geq 1$, portanto usando equação 5.58, temos

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) - \rho(G) \geq 2 + 1 - 1 = 2, \tag{5.60}$$

Caso II Seja $G = HNN(G_1, C, t)$. Se $C = 1$, então o Lema segue do Caso (I). Então supor que $C \neq 1$. Então, pelo Lema 5.2.2 item(b) temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \rho(G), \tag{5.61}$$

Agora G_1 não é procíclico, pois caso contrário G seria procíclico. Assim se G_1 é abeliano então $\mathrm{rk}_p(G_1) \geq 2$, ou se G_1 é um grupo limite de altura no máximo $n-1$, então pela hipótese de indução $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) \geq 2$. Portanto pela equação 5.61

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \rho(G) \geq 2. \tag{5.62}$$

■

Logo temos o seguinte Corolário

Corolário 5.2.4. *Seja G um grupo pro-p limite e $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = 1$, então $G \simeq \mathbb{Z}_p$.*

Na seguinte proposição observamos que se no Teorema 3.2.7 item (2) mudamos o corpo $\mathbb{F}_p$ para o corpo $\mathbb{Q}_p$ obtemos um resultado similar.

Proposição 5.2.5. *Seja G um grupo pro-p limite não pro-cíclico. Se cada pro-p subgrupo abeliano de G é procíclico, então*

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} H_1(G,\mathbb{Q}_p) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) \geq 2 + \dim_{\mathbb{Q}_p} H_2(G,\mathbb{Q}_p)$$

Demonstração. Nos procedemos pela indução sobre a altura de G. Se $n = 0$, então G é um grupo pro-p abeliano livre ou pro-p livre não abeliano. Logo pela hipótese G é pro-p livre não abeliano, assim $cd(G) = 1$ e $H_2(G,\mathbb{Q}_p) = 0$. Logo

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) \geq 2.$$

Então assumimos que G é um grupo pro-p limite de altura $n \geq 1$. Assumimos que o resultado é valido para grupos pro-p limite de altura $n-1$. Logo, pelo Teorema 3.2.6 G é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(\Upsilon,\Lambda)$ de um grafo de grupos Υ com grafo conexo finito Λ, cujos grupos de arestas são grupos procíclicos infinitos isomorfos a $\mathbb{Z}_p$ e grupos triviais e cujos grupos de vértices são grupos pro-p limite não abelianos de altura ao máximo $n-1$ e grupos pro-p abelianos livres de posto finito. Fazemos também indução sobre o comprimento de Λ, então é suficiente considerar os seguintes dois casos:

I) $G = G_1 \star_C G_2$ (produto livre com amalgamação pro-p própria) onde G_i é um grupo pro-p limite não abeliano de altura no máximo $n-1$ ou abeliano pro-p de posto finito e C é um grupo procíclico infinito isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ ou trivial, $i \in \{1,2\}$.

II) $G = HNN(G_1, C, t)$ (HNN-extensão pro-p própria), onde G_1 é um grupo pro-p limite de altura no máximo $n-1$ ou pro-p abeliano livre de posto finito e C é procíclico infinito ou trivial.

Caso I Seja $G = G_1 \star_C G_2$. Se $C = 1$, então

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G,\mathbb{Q}_p) - H_2(G,\mathbb{Q}_p)\big) &= \dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_1,\mathbb{Q}_p) - H_2(G_2,\mathbb{Q}_p)\big) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_2,\mathbb{Q}_p) - H_2(G_2,\mathbb{Q}_p)\big).\end{aligned} \tag{5.63}$$

Observamos que, se G_i é um grupo pro-p limite não abeliano, então pela indução temos $\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_i,\mathbb{Q}_p) - H_2(G_i,\mathbb{Q}_p)\big) \geq 2$. Se G_i é um grupo pro-p abeliano livre, então $G_i \simeq \mathbb{Z}_p$, assim $\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_i,\mathbb{Q}_p) - H_2(G_i,\mathbb{Q}_p)\big) \geq 1$, para $i \in \{1,2\}$. Portanto pela equação 5.63 temos

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G,\mathbb{Q}_p) - H_2(G,\mathbb{Q}_p)\big) &= \dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_1,\mathbb{Q}_p) - H_2(G_1,\mathbb{Q}_p)\big) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_2,\mathbb{Q}_p) - H_2(G_2,\mathbb{Q}_p)\big) \\ &\geq 1 + 1 = 2.\end{aligned} \tag{5.64}$$

Supor que $C \neq 1$, então $H_2(C,\mathbb{Q}_p) = 0$. Logo, pela sequência Mayer-Vietoris $\big($Cf. Teorema 2.8.4) item (i)$\big)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_2(G_1,\mathbb{Q}_p)\oplus H_2(G_2,\mathbb{Q}_p) \arrow[r] & H_2(G,\mathbb{Q}_p) \arrow[d, "\gamma"] \\
H_1(G,\mathbb{Q}_p) \arrow[d] & H_1(G_1,\mathbb{Q}_p)\oplus H_1(G_2,\mathbb{Q}_p) \arrow[l] & H_1(C,\mathbb{Q}_p) \arrow[l] \\
H_0(C,\mathbb{Q}_p) \arrow[r] & H_0(G_1,\mathbb{Q}_p)\oplus H_0(G_2,\mathbb{Q}_p) \arrow[r] & H_0(G,\mathbb{Q}_p) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{5.65}$$

temos que

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G,\mathbb{Q}_p)-H_2(G,\mathbb{Q}_p)\big) &= \dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_1,\mathbb{Q}_p)-H_2(G_2,\mathbb{Q}_p)\big) \\ &\quad +\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_2,\mathbb{Q}_p)-H_2(G_2,\mathbb{Q}_p)\big)-1.\end{aligned} \tag{5.66}$$

Pela hipótese temos que nenhum dos G_i são procíclicos, pois sem perda de generalidade, supor que G_1 é procíclico, logo $G \simeq G_2$. Se G_2 é abeliano então pela hipótese procíclico, logo G procíclico, uma contradição. Se G_2 é pro-p livre não abeliano temos contradição com a altura de G. Assim, aplicamos indução sobre G_1 e G_2, portanto temos que

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G,\mathbb{Q}_p)-H_2(G,\mathbb{Q}_p)\big) = &\quad \dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_1,\mathbb{Q}_p)-H_2(G_1,\mathbb{Q}_p)\big) \qquad (5.67)\\ &+\quad \dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_2,\mathbb{Q}_p)-H_2(G_2,\mathbb{Q}_p)\big)-1 \\ &\geq 2+2-1=3 \qquad (5.68)\end{aligned}$$

II) Seja $G = HNN(G_1, C, t)$. Se $C = 1$, então Proposição segue do caso(I). Supor que $C \neq 1$, então $H_2(C,\mathbb{Q}_p) = 0$. Logo, pela sequência Mayer-Vietoris $\big($Cf. Teorema 2.8.4) item (ii)$\big)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_2(G_1,\mathbb{Q}_p) \arrow[r] & H_2(G,\mathbb{Q}_p) \arrow[d, "\gamma"] \\
H_1(G,\mathbb{Q}_p) \arrow[d] & H_1(G_1,\mathbb{Q}_p) \arrow[l] & H_1(C,\mathbb{Q}_p) \arrow[l] \\
H_0(C,\mathbb{Q}_p) \arrow[r] & H_0(G_1,\mathbb{Q}_p) \arrow[r] & H_0(G,\mathbb{Q}_p) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{5.69}$$

temos que

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G,\mathbb{Q}_p)-H_2(G,\mathbb{Q}_p)\big) = \dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_1,\mathbb{Q}_p)-H_2(G_1,\mathbb{Q}_p)\big) \tag{5.70}$$

.

Pela hipótese temos que, G_1 não é procíclico, pois caso contrário $G_1 \simeq \mathbb{Z}_p$, logo $G \simeq \mathbb{Z}_p$, uma contradição. Assim podemos aplicar indução sobre G_1, logo

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G,\mathbb{Q}_p)-H_2(G,\mathbb{Q}_p)\big) = &\quad \dim_{\mathbb{Q}_p}\big(H_1(G_1,\mathbb{Q}_p)-H_2(G_1,\mathbb{Q}_p)\big) \\ &\geq 2.\end{aligned} \tag{5.71}$$

■

Observação 5.2.6. *A demonstração da proposição 2.3.10 vale também se mudamos o corpo $\mathbb{Q}_p$ para o corpo $\mathbb{F}_p$, obtendo assim uma demonstração alternativa do item (2) do Teorema 3.2.7.*

5.2.1 Teorema sobre Posto p-racional em grupos pro-p limite

A demonstração do seguinte Teorema basicamente é a adaptação do Teorema 4.3.3 para grupos pro-p limites, usando os fatos que são verdade tanto para grupos limites discretos e grupos pro-p limites.

Teorema 5.2.7. *Seja G um grupo pro-p limite não abeliano, e seja U um subgrupo normal aberto de G de índice primo p. Então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$.*

Demonstração.

Procedemos a demonstração pela indução sobre $n = \mathrm{ht}(G)$. Se $n = 0$, então G é um grupo pro-p livre finitamente gerado satisfazendo $d(G) \geq 2$, e o Teorema de Nielsen-Schreier (Cf. Proposição 2.7.1) produz

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) = d(U) = p \cdot (d(G) - 1) + 1 > d(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G), \tag{5.72}$$

logo o Teorema está provado.

Assumimos que G é um grupo pro-p limite de altura $\mathrm{ht}(G) = n \geq 1$, e que o Teorema vale para todo grupo pro-p limite de altura no máximo $n-1$. Pelo Teorema 3.2.6, G é isomórfico ao grupo fundamental $\pi_1(\Upsilon, \Lambda, \mathcal{T})$ de um grafo de grupos Υ com grafo conexo finito adjunto Λ cujos grupos de arestas são grupos procíclicos infinitos isomorfos a $\mathbb{Z}_p$ ou triviais, e cujos grupos de vértices são grupos pro-p limites de altura no máximo $n-1$. Aplicando indução sobre o comprimento do grafo Λ, $s(\Lambda) = |V(\Lambda)| + |E(\Lambda)|$, então é suficiente considerar os seguintes dois casos:

(I) $G = G_1 \star_C G_2$ e G_i é um grupo pro-p limite de altura no máximo $n-1$, e C é um grupo procíclico isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ ou trivial, $i \in \{1, 2\}$;

(II) $G = \mathrm{HNN}_\phi(G_1, C, t)$ onde G_1 é um a grupo pro-p limite de altura no máximo $n-1$, e C é um grupo procíclico isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ ou trivial.

Caso I: Seja $G = G_1 \star_C G_2$. Se C é não trivial, então G_1 ou G_2 é abeliano. Caso contrário temos que $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2) - \chi(C) = 0$, logo pelo Teorema 3.2.7, G é um grupo pro-p limite abeliano o qual é uma contradição. Pelo Hipóteses, temos que

$$|G : U\,G_i| \in \{1, p\} \qquad \text{and} \qquad |G : U\,C| \in \{1, p\}, \tag{5.73}$$

e podemos distinguir os seguintes casos:

(I.1) $|G : U\,C| = 1$,

(I.2) $|G : U\,C| = p$,

Caso I.1: A hipótese implica que $G = U\,G_1 = U\,G_2$, Assim, temos que $U \simeq (U \cap G_1) \star_{(U \cap C)} (U \cap G_2)$. A hipótese implica também que $|C : C \cap U| = p$, i.e., $C \neq 1$. Logo sem perda de generalidade podemos assumir que G_1 não é abeliano, e pela hipótese de indução, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_1) \geq 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1)$. Se G_2 é também não abeliano, então, pela indução, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_2) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) + 1$. logo, aplicando Lema 5.2.2(a), concluímos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_2) - 1 > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G). \tag{5.74}$$

Por outro lado, se G_2 é abeliano, C é um fator direto em G_2, i.e., $G_2 \simeq \mathbb{Z}_p \times B$, onde B é um grupo pro-p abeliano livre de posto $d(G_2)-1$. Logo temos, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1)+\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2)-1$. Além disso, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_2) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2)$ e pelo Lema 5.2.2(a) produz

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}((U \cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_2) - 1 \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G). \tag{5.75}$$

Caso I.2: Neste caso temos que $|G : UG_i| \in \{1, p\}$. Logo, pela (5.73), é suficiente considerar os seguintes 3 casos,

(a) $|G : UG_1| = |G : UG_2| = p$;

(b) $|G : UG_1| = p$ e $G = UG_2$;

(c) $G = UG_1 = UG_2$.

Caso (a): Pela hipótese, $UG_1 = UG_2 = U$, logo $U = G$, isto é impossível.
Caso (b): Seja $U_2 = U \cap G_2$. Pela hipótese, $|G_2 : U_2| = p$ e $G_1 \subseteq U$. Escolhendo um conjunto de representantes $\mathcal{R} \subseteq G_2$ para G_2/U_2, usando o Teorema 2.8.2 e a proposição 2.8.3 obtemos a sequência Mayer-Vietoris

$$\cdots \longrightarrow \coprod_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C^r \xrightarrow{\alpha} \coprod_{r \in \mathcal{R}} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (G_1^r)^{\mathrm{ab}}) \oplus (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U_2^{\mathrm{ab}}) \longrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U^{\mathrm{ab}} \longrightarrow 0\,. \tag{5.76}$$

Isto produz

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) = p \cdot \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2) - \delta, \tag{5.77}$$

onde $\delta = \dim(\mathrm{im}(\alpha)) \leq p$. Logo distinguimos dois casos.
(1) Se $C = 1$, então $\delta = 0$. Logo, por (5.76),

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) = p \cdot \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2). \tag{5.78}$$

Como $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2)$ (a igualdade é dada no caso que G_2 é abeliano), concluímos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) = p \cdot \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$.
(2) Se $C \neq 1$, então $C = \mathbb{Z}_p$, logo pela equação (5.77),

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq p \cdot (\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) - 1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2) \geq 2 \cdot (\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) - 1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2). \tag{5.79}$$

Como $d(G_1) = 1$ implica que $G_1 = \mathbb{Z}_p$ e $G = \mathbb{Z}_p \star_{\mathbb{Z}_p} G_2 \simeq G_2$, o qual foi excluído por (I), assim podemos assumir que $d(G_1) \geq 2$. Logo usando o Lema 5.2.3, temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) \geq 2$. Assim, usando a equação 5.79 temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2). \tag{5.80}$$

Se G_2 não é abeliano, então pela hipótese de indução, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2) \geq 1+\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2)$. Logo $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$. Se G_2 é abeliano, então $G_2 = (\mathbb{Z}_p \times B)$ para algum grupo pro-p abeliano livre B de posto $d(G_2) - 1$ e $G = G_1 \star_{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{Z}_p \times B)$. Em particular, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + d(B)$. Como $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) = d(B) + 1$, então usando (5.80) temos

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq& \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2)\\ =& \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(B) + 1 > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)\end{aligned}$$

Caso (c): Seja $U_1 = U \cap G_1$, $U_2 = U \cap G_2$. Pela hipótese, $|G_1 : U_1| = p$ e $|G_2 : U_2| = p$, logo pelo mesmo argumento usando no caso (b) obtemos a sequência Mayer-Vietoris,

$$\begin{tikzcd} \coprod_{r\in\mathcal{R}} (\mathbb{Q}_p \otimes C^r) \arrow[r, "\beta"] & (\mathbb{Q}_p \otimes_{Z_p} U_1^{\mathrm{ab}}) \oplus (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U_2^{\mathrm{ab}}) \arrow[r] & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U^{\mathrm{ab}} \arrow[d] \\ & 0 & \coprod_{i=1}^{p-1} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p) \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{5.81}$$

onde $\mathcal{R} \subset G$ é um conjunto de representantes de G/U. Novamente distinguimos dois casos.
(1) $C = 1$. Então β é a 0-aplicação, e como $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_i) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_i)$ para $i \in \{1, 2\}$, temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U_2) + (p-1) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) + 1 > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G). \tag{5.82}$$

(2) $C \neq 1$. Então, por (5.81),

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_2) - 1. \tag{5.83}$$

Se G_1 e G_2 não são abelianos, então pela hipótese de indução, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_1) \geq 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1)$ e $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_2) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2)$. Logo

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) - 1 = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G). \tag{5.84}$$

Neste caso um dos grupos G_1, G_2 é não abeliano, caso contrário a característica de Euler de G $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2) - \chi(C)$ é igual a 0 e G seria um grupo abeliano (Cf. Teorema 3.2.7), o qual é uma contradição.

Sem perda de generalidade podemos assumir que G_1 é não abeliano e que G_2 é abeliano. Então $G_2 \simeq \mathbb{Z}_p \times B$, onde B é um grupo pro-p abeliano livre de posto $d(G_2) - 1$, e $G \simeq G_1 \star_{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{Z}_p \times B)$. Logo $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) - 1$. Além disso, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_2) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2)$ e por hipótese de indução, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_1) \geq 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1)$. Assim, pela equação (5.83) temos que,

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + 1 + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) - 1 = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_2) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G). \tag{5.85}$$

Caso II: Seja $G = \mathrm{HNN}(G_1, C, t) = \langle\, G_1, t \mid tct^{-1} = \phi(c) \,\rangle$ com $C = \langle c \rangle$. Pelo Lema 5.2.2 item (b), temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + 1. \tag{5.86}$$

Se $C = 1$, então $G = G_1 \star < t >$ é isomórfico a um produto pro-p livre. Logo o Teorema segue do Caso (I). Assim, assumiremos que $C \neq 1$. Note que G_1 não pode ser abeliano. Caso contrário, temos $\chi(G) = \chi(G_1) - \chi(C) = 0$, e G seria um grupo abeliano (Cf. Teorema. 3.2.7), uma contradição.

Como no Caso (I), temos que

$$|G : UG_1| \in \{1, p\}, \qquad \text{and} \qquad |G : UC| \in \{1, p\}. \tag{5.87}$$

Logo podemos distinguir os seguintes 2 casos:

(II.1) $G = UC$;

(II.2) $|G : UC| = p$.

Caso II.1: Pela hipótese, $G = UG_1$. Assim $U \simeq \mathrm{HNN}(U \cap G_1, C^p, t) = \langle U \cap G_1, t \mid t\,(c^p)\,t^{-1} = \phi(c)^p \rangle$, e como na equação (5.86), concluímos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_1) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_1) + 1. \tag{5.88}$$

Já que G_1 não é abeliano e $|G_1 : U \cap G_1| = p$, a hipótese de indução implica que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1 \cap U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + 1$. Logo

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1 \cap U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + 1 \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G). \tag{5.89}$$

Supor que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$. Então $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1 \cap U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + 1 = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$.

Pelo Lema 5.2.2(b), temos a sequência exata

$$\ldots \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}}) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}}) \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p \to 0,$$

onde $\alpha(q \otimes c_1) = (q \otimes (c_1\phi(c_1)^{-1}\overline{G_1'}))$, com $c_1 \in C$ e

$$\ldots \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C^p \xrightarrow{\alpha_1} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}}) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U^{\mathrm{ab}}) \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p \to 0,$$

onde $\alpha_1(q \otimes c_1^p) = (q \otimes (c_1^p\phi(c_1^p)^{-1}\overline{(U \cap G_1)'}))$, com $c_1 \in C$. Em particular, pelo Lema 5.2.2(b), $\rho(U) = 0$ e $\rho(G) = 1$, i.e., α é a 0-aplicação, e α_1 é injetiva.

Similar ao caso (II.1) do Teorema 4.3.3, a última sequência produz um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"'] & (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{tr}_2"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C^p \arrow[r, "\alpha_1"] & (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}}) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd} \tag{5.90}$$

onde a aplicação tr_1 e a aplicação tr_2 são dadas pelos homomorfismos transfer definido em 2.1.3.

Além, como a aplicação tr_1 no diagrama 5.90 é um isomorfismo, então α é injetiva o qual produz uma contradição. Assim $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(G)$.

Caso II.2: Novamente nós podemos distinguir dois casos:

Caso (a): Neste caso $|G_1 \colon U \cap G_1| = p$ e $C \subseteq U$. Logo, U é o grupo fundamental de um grafo de grupos da forma de um buquê de p laços. Usando o Teorema 2.8.2 sobre U e $\mathbb{Q}_p$ com o item(i),(ii) do Teorema 2.8.4 obtemos a sequência longa exata Mayer-Vietoris

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i} \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0, \tag{5.91}$$

onde $\alpha_1(q \otimes (c_i^{g_i})_i) = q \otimes \bigoplus_{i=0}^{p-1}(g_i c_i \phi(c_i)^{-1} g_i^{-1}\overline{(U \cap G_1)'})$, com $c_i \in C$ e $\{g_0, \ldots, g_{p-1}\} \subseteq G_1$ é um conjunto de representantes para $G_1/U \cap G_1$.

Além disso, pela Lema 5.2.2(b), nós temos a sequência exata,

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0, \tag{5.92}$$

onde $\alpha(q \otimes c_1) = (q \otimes (c_1\phi(c_1)^{-1}\overline{G_1'}))$, com $c_1 \in C$.

Similar ao caso II.2 item(a) do Teorema 4.3.3, as equações 5.91 e 5.92 produzem o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"'] & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{tr}_2"'] & \dots \\ \dots \arrow[r] & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i} \arrow[r, "\alpha_1"] & (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (U \cap G_1)^{\mathrm{ab}}) \arrow[r] & \dots, \end{tikzcd} \tag{5.93}$$

onde tr_2 é dada pelo homomorfismo transfer definido em 2.1.3 e é similar ao caso II.2 item(a) do Teorema 4.3.3, e para $c \in C$, $q \in \mathbb{Q}_p$, temos que $\mathrm{tr}_1(q \otimes c) = q \otimes (c^{g_i})$.

Assim, pela equação 5.91 temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U) + \dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{im}(\alpha_1)) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(U \cap G_1) + p, \tag{5.94}$$

e pela indução temos $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_1) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + 1$. Logo

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U \cap G_1) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + 1 \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G). \tag{5.95}$$

Supor que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$, então temos igualdade na equação (5.95). Em particular, (5.94) implica que $\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{im}(\alpha_1)) = p$, i.e., α_1 é injetiva. Logo, como tr_1 é injetivo, $\alpha_1 \circ \mathrm{tr}_1$ é injetivo, assim α é injetiva. Do Lema 5.2.2(b) concluímos que $\rho(G) = 1$ e $\alpha = 0$, uma contradição. Assim $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$.

Caso (b): Neste caso temos que $G_1 \subseteq U$ e $C \subseteq U$. Assim, U é o grupo fundamental de um grafo de grupos da forma de uma circuito com p vértices.

Usando o Teorema 2.8.2 sobre U e $\mathbb{Q}_p$ com o item(i),(ii) do Teorema 2.8.4 obtemos a sequência longa exata Mayer-Vietoris

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i} \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigoplus_{i=0}^{p-1} (G_1^{g_i})^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0, \tag{5.96}$$

onde $\alpha_1(q \otimes (c_1^{g_i})_i) = \left(q \otimes \left(g_i c_1 \phi(c_1)^{-1} g_i^{-1} \overline{(G_1^{g_i})'}\right)_i\right)$ com $c_1 \in C$, e $\{g_0, \dots, g_{p-1}\} \subseteq G$ um conjunto de representantes para G/U.

Além disso, pelo Lema 4.2.2(b), temos a sequência exata

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0, \tag{5.97}$$

onde $\alpha(q \otimes c_1) = (q \otimes (c_1 \phi(c_1)^{-1} \overline{G_1'}))$, com $c_1 \in C$.

Similar ao caso II.2 item(a) do Teorema 4.3.3, as equações 5.96 e 5.97 produzem o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"'] & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_1^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\mathrm{tr}_2"'] \\ \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigoplus_{i=0}^{p-1} C^{g_i} \arrow[r, "\alpha_1"] & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigoplus_{i=0}^{p-1} (G_1^{g_i})^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd} \tag{5.98}$$

onde tr_1 e tr_2 são as aplicações diagonais definidas similarmente ao caso II.2 item(b) do Teorema 4.3.3. Logo, pela equação 5.96, temos que

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) = 1 + p \cdot (\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) - 1) + \dim_{\mathbb{Q}_p}(\ker(\alpha_1)). \tag{5.99}$$

Pela Lema 5.2.3 temos que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) > 1$, assim $(p-1) \cdot (\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) - 1) \geq 1$, logo

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) + 1 \geq \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G). \tag{5.100}$$

Supor que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$. Então temos igualdade na equação (5.100), assim

$$1 + p \cdot (\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) - 1) + \dim_{\mathbb{Q}_p}(\ker(\alpha_1)) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G) + 1,$$

logo

$$0 = (p-1) \cdot (\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) - 1) - 1 + \dim_{\mathbb{Q}_p}(\ker(\alpha_1)),$$

portanto $\dim_{\mathbb{Q}_p}(\ker(\alpha_1)) = 0$, $p = 2$ e $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G_1) = 2$. Em particular, α_1 é injetiva, e pelo Lema 4.2.2(b), $\rho(G) = 1$, i.e., $\alpha = 0$. Logo, como tr_1 é injetivo, então α é injetivo, o qual é uma contradição. Portanto $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(U) > \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}_p}(G)$. ∎

Referências Bibliográficas

[1] E. Alibegović and M. Bestvina, *Limit groups are cat(0)*, Journal of the London Mathematical Society **74** (2006), no. 1, 259.

[2] B. Baumslag, *Residually free groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **17** (1967), 402–418. MR 0215903

[3] M. Bestvina and M. Feighn, *Notes on Sela's work: limit groups and Makanin-Razborov diagrams*, Geometric and cohomological methods in group theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 358, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009, pp. 1–29. MR 2605174

[4] M. Bridson and J. Howie, *Normalisers in limit groups*, Mathematische Annalen **337** (2007), no. 2, 385–394.

[5] M. Bridson and D. Kochloukova, *Volume gradients and homology in towers of residually-free groups*, Mathematische Annalen **367** (2017), no. 3, 1007–1045.

[6] K. Brown, *Cohomology of groups*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1976.

[7] T. Camps, V. große, and G. Rosenberger, *Einführung in die kombinatorische und die geometrische Gruppentheorie*, Berliner Studienreihe zur Mathematik [Berlin Study Series on Mathematics], vol. 19, Heldermann Verlag, Lemgo, 2008. MR 2378619

[8] C. Champetier and V. Guirardel, *Limit groups as limits of free groups*, Israel J. Math. **146** (2005), 1–75. MR 2151593

[9] D. Cohen, *Combinatorial group theory: a topological approach (london mathematical society student texts 14, cambridge university press, 1989)*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **33** (1990), no. 3, 498.

[10] W. Dicks, *Groups, trees, and projective modules*, Lecture Notes in Physics, no. 790, Springer-Verlag, 1980.

[11] B. Fine, A. Gaglione, A. Myasnikov, G. Rosenberger, and D. Spellman, *A classification of fully residually free groups of rank three or less*, J. Algebra **200** (1998), no. 2, 571–605. MR 1610668

[12] B. Fine, O. Kharlampovich, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, and G. Rosenberger, *On the surface group conjecture*, Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.) **15** (2007), 1–15. MR 2367908

[13] M. Fried and M. Jarden, *Field arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[14] D. Gildenhuys and L. Ribes, *On the cohomology of certain topological colimits of pro-c-groups*, Journal of Algebra **29** (1974), no. 1, 172 – 197.

[15] F. Grunewald, A. Zapirain, A. Pinto, and P. Zalesskii, *Normal subgroups of profinite groups of non-negative deficiency*, Journal of Pure and Applied Algebra **218** (2014), no. 5, 804 – 828.

[16] F. Grunewald, A. Zapirain, and P. Zalesskii, *Cohomological goodness and the profinite completion of bianchi groups*, Duke Math. J. **144** (2008), no. 1, 53–72.

[17] V. Guirardel, *Limit groups and groups acting freely on trees*, Geom. Topol. **8** (2004), 1427–1470 (electronic). MR 2119301

[18] I. Kapovich, *Subgroup properties of fully residually free groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 1, 335–362 (electronic). MR 1859278

[19] O. Kharlampovich and A. Myasnikov, *Irreducible affine varieties over a free group. I. Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz*, J. Algebra **200** (1998), no. 2, 472–516. MR 1610660

[20] ———, *Irreducible affine varieties over a free group. II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups*, J. Algebra **200** (1998), no. 2, 517–570. MR 1610664

[21] ———, *Elementary theory of free non-abelian groups*, J. Algebra **302** (2006), no. 2, 451–552. MR 2293770

[22] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, and D. Serbin, *Subgroups of fully residually free groups: algorithmic problems*, Group theory, statistics, and cryptography, Contemp. Math., vol. 360, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 63–101. MR 2105437

[23] D. Kochloukova, *On subdirect products of type* FP_m *of limit groups*, J. Group Theory **13** (2010), no. 1, 1–19. MR 2604842

[24] D. Kochloukova and P. Zalesskii, *Profinite and pro-p completions of poincaré duality groups of dimension 3*, Transactions of the American Mathematical Society **360** (2008), no. 4, 1927–1949.

[25] ———, *On pro-p analogues of limit groups via extensions of centralizers*, Mathematische Zeitschrift **267** (2011), no. 1, 109–128.

[26] ———, *Subgroups and homology of extensions of centralizers of pro-p groups*, Math. Nachr. **288** (2015), no. 5-6, 604–618. MR 3338916

[27] O. Mel'nikov, *Subgroups and homology of free products of profinite groups*, Mathematics of the USSR-Izvestiya **34** (1990), no. 1, 97.

[28] F. Paulin, *Sur la théorie élémentaire des groupes libres (d'après Sela)*, Astérisque (2004), no. 294, ix, 363–402. MR 2111650

[29] L. Ribes, *On amalgamated products of profinite groups*, Mathematische Zeitschrift **123** (1971), no. 4, 357–364.

[30] L. Ribes, D. Segal, and P. Zalesskii, *Conjugacy separability and free products of groups with cyclic amalgamation*, Journal of the London Mathematical Society **57** (1998), no. 3, 609–628.

[31] L. Ribes and P. Zalesskii, *Pro-p trees and applications*, pp. 75–119, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.

[32] ______, *Profinite groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete : a series of modern surveys in mathematics, Springer, 2000.

[33] J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, Pure and Applied Mathematics, vol. 85, Elsevier, 1979.

[34] Z. Sela, *Diophantine geometry over groups. I. Makanin-Razborov diagrams*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2001), no. 93, 31–105. MR 1863735

[35] ______, *Diophantine geometry over groups. II. Completions, closures and formal solutions*, Israel J. Math. **134** (2003), 173–254. MR 1972179

[36] J. Serre, *Galois cohomology*, english ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Translated from the French by Patrick Ion and revised by the author. MR 1867431

[37] ______, *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation. MR 1954121

[38] M. Shusterman, *Ascending chains of finitely generated subgroups*, Journal of Algebra **471** (2017), 240 – 250.

[39] ______, *Schreier's formula for prosupersolvable groups*, International Journal of Algebra and Computation **27** (2017), no. 01, 41–48.

[40] I. Snopche and P. Zalesskii, *Subgroup properties of pro-p extensions of centralizers*, Selecta Mathematica **20** (2014), no. 2, 465–489.

[41] P. Symonds and T. Weigel, *Cohomology of p-adic analytic groups*, (2000), 349–410.

[42] J. Tate, *Number theoretic background*, Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics **33** (1979), no. 2, 3–26.

[43] T. Weigel and J. Gutierrez, *Normal subgroups in limit groups of index prime*, https://arxiv.org/abs/1607.02079, July 2016-(Accepted for publication).

[44] G. Wiese, *Euler characteristics of profinite groups*, http://math.uni.lu/wiese/other/essay.pdf, January 2002.

[45] J. Wilson, *Profinite groups*, London Mathematical Society Monographs, Clarendon Press, 1998.

[46] H. Wilton, *Abelianization of limit groups*, http://mathoverflow.net/questions/209853/abelianization-of-limit-groups, June 2015.

[47] P. Zalesskii, *Profinite groups that act on trees and do not have free nonabelian pro-p subgroups*, Mathematics of the USSR-Sbornik **69** (1991), no. 1, 57.

[48] P. Zalesskii and O. Mel'nikov, *Subgroups of profinite groups acting on trees*, Mathematics of the USSR-Sbornik **63** (1989), no. 2, 405.

[49] Theo Allan Darn Zapata, *Grupos profinitos limites*, Tese de Doutorado, Universidade Nacional de Brasilia (2011).