



**TESE DE DOUTORADO**

**ESTUDO DA HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAIS MICRO-  
HETEROGÊNEOS E VISCOELÁSTICOS EMPREGANDO O MEC**

Por

**Adrián Alberto Betancur Arroyave**

**Grupo de Mecânica Experimental e Computacional-GMEC**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
BRASILIA DF**

**2017**

**Adrián Alberto Betancur Arroyave**

**ESTUDO DA HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAIS  
MICRO-HETEROGÊNEOS E VISCOELÁSTICOS  
EMPREGANDO O MEC**

Tese apresentada à Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências Mecânicas.

Programa: Ciências Mecânicas  
Grupo de Mecânica Experimental e Computacional (GMEC)

Orientadora: Carla Tatiana Mota Anflor

Brasília

2017

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**ESTUDO DA HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAIS MICRO-  
HETEROGÊNEOS E VISCOELÁSTICOS EMPREGANDO O MEC**

ADRIÁN ALBERTO BETANCUR ARROYAVE

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Ciências Mecânicas pelo Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília.

**BANCA EXAMINADORA:**

---

**Prof.<sup>a</sup> Carla Tatiana Mota Anflor (UnB/FGA)**

---

**Prof. Daniel Monteiro Rosa, (UnB/ENM)**

---

**Prof. Luciano Mendes Bezerra (FT/ENC)**

---

**Prof. André Maués Brabo Pereira (UFF)**

**BRASILIA DF**

**2017**

## FICHA CATALOGRÁFICA

ADRIAN A, BETANCUR

Estudo da homogeneização de materiais micro-heterogêneos e viscoelásticos empregando o MEC. [DISTRITO FEDERAL] 2017. xv, 155p., 210 x 297 mm (ENMC/FT/UnB, Doutor, Ciências Mecânicas, 2017).

Tese de Doutorado Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica

1. Elasticidade

2. Homogeneização

3. Método dos Elementos de Contorno

4. Módulo de Young

5. Viscoelasticidade

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ADRIAN A, BETANCUR (2017). Estudo da homogeneização de materiais micro-heterogêneos e viscoelásticos empregando o MEC. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM. DT - 43/2017. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília - DF, 155p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Adrián Alberto Betancur Arroyave

TÍTULO: Estudo da homogeneização de materiais micro-heterogêneos e viscoelásticos empregando o MEC.

GRAU: Doutor

ANO: 2017.

É concedido à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta Tese de Doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa Tese de Doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Adrián Alberto Betancur Arroyave

aabetanc@gmail.com

## **Dedicatória**

À minha família

## **Agradecimentos**

Agradeço a Deus por tudo.

A meus pais Alberto e Amanda pelo apoio incondicional e conselhos valiosos em todas minhas decisões.

A professora Carla Anflor, por sua orientação, ajuda motivação e compreensão.

Ao professor Eder Lima por sua valiosa ajuda.

Ao Professor Jhon Nero Vaz Goulart por seus aportes e recomendações

Aos meus companheiros do Grupo de Investigação, com os quais tive a oportunidade de compartilhar meus dias. Ao lado de Tiago de Melo, Niécio Junior Anunciação, Tatiane Almeida, Miéle Pestana, Angélica Brambila, Matheus Oberg (Machiche), Jhony Ordoñez Lopez, Carolina Burbano Sandoval, Lucas Emerick (Belinho), Lucas Silva, Gabriel Viana, Victor Macena, Jalusa Ferrari, Maria Luiza Santos, Rolan Emilio Ramirez (Chayanne Emilio), Daniel Canongia (Cavaquinho), Matheus Hoffmann, José Manuel Bautista (Don Adolfo), Jose David Hurtado (Casa sola) y Diana Candela Sandoval.

À Faculdade de Tecnologia (FT) da Universidade de Brasília pela formação científica que me proporcionou ao longo de todo o tempo que estive aqui.

Ao professor André Maués Brabo Pereira e Ricardo Leiderman por abrir as portas de seu laboratório na Universidade Federal de Fluminense, ao igual que Marcio Gonçalves pela sua valiosa ajuda.

A Fernanda Pinna, a quem Deus colocou em meu caminho nesta etapa da minha vida e que me acompanha em todo este tempo, por seu amor, carinho, compreensão, e também por suas chateações, o qual tem me permitido crescer como pessoa. A ela e sua família uma imensa gratidão.

A CAPES e a FAPDF pelo apoio financeiro, o que possibilitou o desenvolvimento da minha formação.

Ao Programa Sapiensa da Alcaldía de Medellín pela ajuda financeira no programa Enlazamundos.

*“Não entendes realmente algo a menos que sejas capaz de explicasse-lo á teu avô.”*

*Einstein*



## Resumo

O principal objetivo deste trabalho consiste em desenvolver um procedimento para problemas multiescala usando o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para determinar o módulo de Young efetivo de um Ferro Fundido Nodular GGG-40.

Todas as rotinas foram escritas usando o MEC como método numérico, devido a suas principais características as quais fazem com que seja uma ferramenta adequada para modelagem multiescala de materiais.

Foram usados procedimentos completos para a caracterização das propriedades mecânicas do GGG-40. Procedimentos de Microtomografia e Micro-indentação (dureza Vickers) também foram usados para determinar a morfologia dos nódulos de grafita e o módulo de Young, respectivamente.

Para o procedimento de homogeneização foram analisados vários modelos em 2D e 3D, considerando a geometria real e sintética dos nódulos de grafita. A malha do MEC foi gerada através das imagens adquiridas por microtomografia computadorizada por Raios X, o que permitiu modelar a morfologia real dos nódulos de grafita. O módulo de Young efetivo obtido através do procedimento de homogeneização para cada modelo foi comparado com os obtidos por ensaio de tração.

Finalmente, a metodologia proposta foi adaptada para homogeneização multiescala para problemas de viscoelasticidade. Para efeito de comparação e validação foram usados dados reportados em literatura. A análise multiescala acoplada ao MEC mostrou ser uma metodologia numérica eficiente para problemas de micromecânica de materiais heterogêneos.

## **Abstract.**

The main goal of this work relies on developing a novel for multiscale methodology using the Boundary element Method (BEM) for determining the effective Young's modules of a GGG-40 Nodular Cast Iron (NCI).

All routines were written using the BEM as numerical method, due to its main features that makes this a suitable tool for modeling multiscale materials.

Full experimental procedures for characterizing the mechanical properties were used for GGG-40. Computational X-ray Microtomography (Micro-CT) and Microindentation (Vickers Hardness) tests were also used to determine the morphology of the graphite's nodules and the Yong's module, respectively.

For the homogenization procedure several models, such as 2D and 3D, considering the real and synthetic geometry of the graphite's nodules were analyzed. The resulted effective young's modules from each one were compared. The BEM mesh was generated through the images acquired by Micro-CT, which allowed modeling the real morphology of the graphite's nodule. The effective Young's modules obtained through a homogenization procedure for each model were compared with those obtained from tensile tests.

Finally, the purposed methodology herein was adapted for a multiscale homogenization for viscoelasticity problems. Geometric data parameters reported in the literature were used for comparison and validation. The multiscale analysis coupled with the BEM showed to be an efficient numerical methodology for micro mechanical problems of heterogeneous materials.

## **Declaração de Originalidade**

Declaro que o presente trabalho de Tese doutoral é um trabalho pessoal do autor e está devidamente referenciado.

## Lista de Abreviaturas

|     |                                     |
|-----|-------------------------------------|
| BEM | <i>Boundary Element Method</i>      |
| CAD | <i>Computer-Aided Design</i>        |
| CCP | Condições de Contorno Periódicas    |
| CT  | <i>Computerized Tomography</i>      |
| CV  | Coeficiente de variação             |
| EIC | Equação Integral de Contorno        |
| EV  | Elemento de Volume                  |
| EVR | Elemento de Volume Representativo   |
| HB  | <i>Hardness Brinell</i>             |
| HV  | <i>Hardness Vickers</i>             |
| FFN | Ferro Fundido Nodular               |
| MDF | Método das Diferenças Finitas       |
| MEC | Método dos Elementos de Contorno    |
| MEF | Método dos Elementos Finitos        |
| MEV | Microscopia Eletrônica de Varredura |
| MVF | Método de Volume Finitos            |
| VM  | von-Mises                           |
| PVC | Problema de Valor de Contorno       |
| 2D  | Bidimensional                       |
| 3D  | Tridimensional                      |

## Símbolos Matemáticos e Itálicos

|            |  |
|------------|--|
| $[A]$      | Matriz contendo as integrais de $T_{ij}$   |
| $[B]$      | Matriz contendo as integrais de $U_{ij}$   |
| $b_i$      | Campo de forças volumétricas               |
| $C_{ijkl}$ | Tensor constitutivo                        |
| $C_{ij}$   | Tensor constitutivo de segunda ordem       |
| $D$        | Função de fluência                         |
| $D_{kij}$  | Matriz de Deformação                       |
| $d$        | Distância dos centros entre inclusões      |
| $E$        | Módulo de Young                            |
| $E^*$      | Módulo de Young efetivo                    |
| $e_i$      | Força específica                           |
| $F$        | Força                                      |
| $G$        | Módulo de Cisalhamento                     |
| $G_z$      | Número do Tamanho de Grão                  |
| $G_{ij}$   | Matriz das integrais de força superficiais |
| $H_{ij}$   | Matriz das integrais de deformações        |
| $K$        | Módulo cortante                            |
| $L$        | Tensor constitutivo de viscosidade         |
| $m$        | Número de nó                               |
| $N_i$      | Função de forma                            |
| $N_{area}$ | Nodularidade                               |
| $n$        | Número de nó                               |

|                |   |
|----------------|---|
| $n_j$          | Vetor normal unitário na direção $j$        |
| $J$            | Jacobiano                                   |
| $P$            | Força pontual                               |
| $P_C$          | Parâmetro Característico                    |
| $P_{esp}$      | Ponto espelho                               |
| $P_{img}$      | Ponto imagem                                |
| $q$            | Força distribuída                           |
| $r$            | Distância de ponto fonte ao ponto campo     |
| $\mathbb{R}^2$ | Espaço bidimensional                        |
| $\mathbb{R}^3$ | Espaço tridimensional                       |
| $S_{ij}$       | Tensor de complacência                      |
| $S$            | Contorno tridimensional                     |
| $S_n$          | Elemento de Contorno Tridimensional         |
| $s$            | Comprimento de arco                         |
| $s^2$          | Desvio padrão de uma propriedade arbitraria |
| $t$            | Tempo                                       |
| $t_i$          | Tração na direção $i$                       |
| $U$            | Matriz de deformação                        |
| $u_i$          | Deformação na direção $i$                   |
| $V$            | Domino tridimensional                       |
| $V_f$          | Fração de volume da inclusão                |
| $W$            | Trabalho                                    |
| $X$            | Ponto campo                                 |
| $x, y, z$      | Coordenadas cartesianas                     |
| $x_i$          | Propriedade arbitraria                      |
| $\bar{x}$      | Meia de uma propriedade arbitraria          |
| $Y$            | Ponto fonte                                 |

### Símbolos Gregos

|                    |                                    |
|--------------------|------------------------------------|
| $\Delta$           | Delta de Dirac                     |
| $\Delta A$         | Diferencial de área                |
| $\Delta F$         | Diferencial de forças              |
| $\alpha$           | Componente volumétrica de carga    |
| $\beta$            | Componente deviatoria de carga     |
| $\varepsilon_{ij}$ | Tensor de deformação               |
| $\lambda$          | Constante de Lamé                  |
| $\gamma$           | Parâmetro temporal de viscosidade  |
| $\gamma^i$         | Deformação de Cisalhamento         |
| $\eta_v$           | Módulo de viscosidade              |
| $\sigma_{ij}$      | Componentes de esforço             |
| $\phi$             | Ângulos entre tensores             |
| $\phi_k$           | Conjunto de funções de forma       |
| $\varphi$          | Deformação unitária                |
| $T$                | Parâmetro temporal                 |
| $\tau$             | Tensão de Cisalhamento             |
| $\mu$              | Módulo de elasticidade transversal |

|               |                                 |
|---------------|---------------------------------|
| $\nu$         | Razão de Poisson                |
| $\nu^*$       | Módulo de Poisson efetivo       |
| $\omega_{ij}$ | Tensor de rotação infinitesimal |
| $\Omega$      | Domino bidimensional            |
| $\Gamma$      | Contorno bidimensional          |
| $\xi$         | Parâmetro adimensional          |
| $\eta$        | Parâmetro adimensional          |
| $\delta$      | Operador Delta de Kronecker     |

### Sufixos e prefixos

|              |   |
|--------------|---|
| $i, j, k, l$ | Sufixos para notação indicial, sistema coordenado |
| DD           | Distribuição Diluída (Distributed diluit)         |
| DS           | Esquema Diferencial (Diferencial Scheme)          |
| esp          | Espelho   |
| EPD          | Estado Plano de Deformação                        |
| EPT          | Estado Plano de Tensão                            |
| e            | Elástico  |
| el           | Elemento  |
| img          | Imagem  |
| inc          | Inclusão  |
| mat          | Matriz  |
| MAX          | Máximo  |
| MIN          | Mínimo  |
| MT           | Mori-Tanaka                                       |
| mom          | Monocíclico                                       |
| SK           | Auto-consistente (Self-consistent)                |
| t            | Tempo   |
| T            | Transposta de um vector ou matriz                 |
| v            | Viscoso   |
| *            | Propriedades efetivas                             |

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| 1. INTRODUÇÃO                                       | 24 |
| 1.1. Generalidades                                  | 24 |
| 1.2. Originalidade da Tese                          | 26 |
| 1.3. Objetivos                                      | 27 |
| 1.1.1. Geral  | 27 |
| 1.3.1. Específicos                                  | 27 |
| 1.4. Resumo da Tese                                 | 28 |
| 2. REVISÃO DA LITERATURA                            | 30 |
| 2.1. Estado da Arte                                 | 30 |
| 2.1.1. Vantagens e desvantagens do MEC              | 32 |
| 2.2. Contexto histórico do MEC                      | 33 |
| 2.3. Estudos numérico de materiais microestruturais | 35 |
| 2.4. Trabalhos Numéricos Desenvolvidos com FFN      | 38 |
| 3. METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)           | 40 |
| 3.1. Introdução                                     | 40 |
| 3.2. Teoria de elasticidade                         | 40 |
| 3.2.1. Teorema de Cauchy                            | 40 |
| 3.2.2. Deformação                                   | 42 |
| 3.2.3. Lei constitutiva                             | 43 |
| 3.3. Formulação do MEC                              | 45 |
| 3.3.1. Teorema da Reciprocidade de Betti            | 46 |
| 3.3.2. Identidade de Somigliana                     | 47 |
| 3.3.3. Solução fundamental                          | 49 |
| 3.3.4. Equação integral de contorno                 | 50 |
|   | 15 |

|  |    |
|--|----|
| 3.3.5. Tensões internas  | 51 |
| 3.3.6. Formulação Algébrica  | 52 |
| 3.3.7. Singularidade   | 61 |
| 3.3.8. Formulação do MEC por sub-regiões   | 68 |
| 3.4. Exemplos  | 69 |
| 3.4.1. Exemplo I: Placa com uma inclusão   | 69 |
| 3.4.2. Exemplo II: Placa com duas inclusões  | 71 |
| 3.4.3. Exemplo III: EV 3D com uma inclusão   | 73 |
| 3.5. Conclusões  | 74 |
| 4. ENSAIOS EXPERIMENTAIS   | 75 |
| 4.1. Introdução  | 75 |
| 4.2. Ferros Fundidos   | 75 |
| 4.2.1. Tipos de matriz   | 76 |
| 4.2.2. Tipos de Ferro fundido  | 77 |
| 4.2.3. Ferro Fundido Nodular (FFN)   | 80 |
| 4.3. Análises Experimental   | 81 |
| 4.3.1. Microtomografia Computarizada por Raios X (Micro-CT)                        | 82 |
| 4.3.2. Microestrutura morfológica do FFN GGG-40                                    | 84 |
| 4.3.3. Testes de Dureza e Micro-dureza: Metodologia da “Deformação Elástica Falsa” | 85 |
| 4.3.4. Ensaio de tração  | 87 |
| 4.3.5. Caracterização Química  | 87 |
| 4.4. Resultados  | 87 |
| 4.4.1. Microtomografia Computarizada por Raios X (Micro-CT)                        | 87 |
| 4.4.2. Microestrutura Morfológica do FFN GGG-40                                    | 88 |



|   |     |
|---|-----|
| 4.4.3. Testes de Dureza e Micro-dureza:Metodologia da “Deformação Elástica Falsa” | 90  |
| 4.4.4. Ensaio de tração   | 91  |
| 4.5. Conclusões sobre a caracterização experimental do GGG-40                     | 92  |
| 5. ESTUDO COMPUTACIONAL DO MICROMECHANISMO EMPREGANDO MEC                         | 94  |
| 5.1. Introdução   | 94  |
| 5.2. Procedimento   | 94  |
| 5.2.1. Descrição do modelo  | 95  |
| 5.2.2. Elemento de Volume Representativo (EVR)                                    | 101 |
| 5.2.3. Condições de Contorno Periódicas (CCP)                                     | 104 |
| 5.3. Exemplos   | 109 |
| 5.3.1. Exemplo I: Homogeneização com geometria sintética em 2D                    | 109 |
| 5.3.2. Exemplo II: Homogeneização com a geometria real em 2D                      | 116 |
| 5.3.3. Exemplo III:Homogeneização com a geometria sintética em 3D                 | 118 |
| 5.3.4. Exemplo IV: Homogeneização com a geometria real 3D                         | 122 |
| 5.4. Conclusões sobre homogeneização do FFN GGG-40                                | 124 |
| 6. VISCO-ELASTICIDADE   | 126 |
| 6.1. Introdução   | 126 |
| 6.2. Descrição do modelo  | 126 |
| 6.2.1. Lei constitutiva   | 126 |
| 6.2.2. Definição histórica admissível   | 127 |
| 6.2.3. Lei constitutiva hereditária linear  | 127 |
| 6.2.4. Modelos analógicos   | 128 |
| 6.3. Formulações MEC para Viscoelasticidade                                       | 130 |
| 6.3.1. Modelo de Maxwell 2D   | 130 |

|   |     |
|---|-----|
| 6.3.2. Modelo de Kelvin 2D              | 133 |
| 6.3.3. Modelo de Boltzmann 2D           | 133 |
| 6.3.4. Formulação Kelvin 3D             | 134 |
| 6.4. Exemplos                           | 136 |
| 6.4.1. Exemplo I: Viga Homogênea        | 136 |
| 6.4.2. Exemplo II: Estabilidade         | 137 |
| 6.4.3. Exemplo III: Viga Heterogênea    | 138 |
| 6.4.4. Exemplo IV: Homogeneização       | 140 |
| 6.4.5. Exemplo V: Viga Homogênea em 3D  | 141 |
| 6.4.6. Exemplo VI: Estabilidade em 3D   | 143 |
| 6.5. Conclusões sobre viscoelasticidade | 143 |
| 7. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS       | 145 |
| 7.1. Conclusões                         | 145 |
| 7.2. Trabalhos Futuros                  | 147 |
| 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS           | 148 |

## Lista de Figuras

|  |    |
|--|----|
| Figura 2.1 Representação esquemática do MEF, MEC e MDF. ....                               | 31 |
| Figura 2.2 Reprodução de modelo CAD em interface gráfica de Matlab. ....                   | 32 |
| Figura 3.1 Forças na superfície de um elemento. ....                                       | 40 |
| Figura 3.2 Esquema de MEC para problema elástico linear. ....                              | 45 |
| Figura 3.3 Aproximação do contorno ao ponto singular $y$ . ....                            | 50 |
| Figura 3.4 “Discretização” de um problema de MEC. ....                                     | 52 |
| Figura 3.5 Representação dos elementos de forma quadrático descontínuo ....                | 53 |
| Figura 3.6 Elemento quadrilaterais Lineares de 4 nós. ....                                 | 56 |
| Figura 3.7 Elemento quadrilaterais quadrático de 8 nós. ....                               | 56 |
| Figura 3.8 Sistema coordenado local (intrínseco). ....                                     | 58 |
| Figura 3.9 Serependity de 8 nós por elemento. ....   | 58 |
| Figura 3.10 Malha modelo tridimensional. ....  | 60 |
| Figura 3.11 Subdivisão do elemento para extração da singularidade.....                     | 65 |
| Figura 3.12 Mapeamento de subelementos. ....   | 65 |
| Figura 3.13 Subelementos intrínseco do sistema coordenado. ....                            | 66 |
| Figura 3.14 Elemento linear de 4 nós. ....   | 66 |
| Figura 3.15 Problema de sub-regiões. ....  | 68 |
| Figura 3.16 Modelo de placa infinita com inclusão. ....                                    | 70 |
| Figura 3.17 Esforços circunferenciais $ \sigma_\theta $ da interface matriz-inclusão. .... | 71 |
| Figura 3.18 Placa com duas inclusões próximas ao centro. ....                              | 72 |
| Figura 3.19 Esforços de von-Mises para um quarto da matriz de inclusão usando MEC....      | 72 |
| Figura 3.20 EV para modelo tridimensional a ) MEC, b) FEM. ....                            | 73 |
| Figura 3.21 Resultados da esforço no contorno do EV. ....                                  | 73 |
| Figura 4.1 Diagrama de fase Ferro-Ferro, Carbono-Silício.....                              | 78 |
| Figura 4.2 Sete tipos de grafita estabelecidas pela especificações da ASTM A247. ....      | 79 |
| Figura 4.3 Microestrutura do ferro maleável, atacada com 4% de picral.....                 | 79 |
| Figura 4.4 Microestrutura da grafita compactada do ferro fundido não-tratado. ....         | 80 |
| Figura 4.5 Ferro Fundido Nodular FFN GGG-40. ....  | 81 |
| Figura 4.6 Esquema ilustrativo do processo que aquisição CT.....                           | 83 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 4.7 Determinação do parâmetro característico $r/d$ para o GGG-40. ....                                       | 84  |
| Figura 4.8 Micrografias obtidas por microscopia Confocal. ....  | 85  |
| Figura 4.9 Ensaios de dureza e Microdureza. ....  | 86  |
| Figura 4.10 Parâmetro característico ( $P_c$ ) do FFN GGG-40. ....  | 88  |
| Figura 4.11 Estrutura metalográfica do FFN GGG-40. ....   | 88  |
| Figura 4.12 Número do Tamanho de Grão ( $G_z$ ) para o GGG-40. ....   | 89  |
| Figura 4.13 Histogramas com os resultados do módulo de Young. ....  | 90  |
| Figura 4.14 Curva dos ensaios de tensão-deformação FFN. ....  | 92  |
| Figura 5.1 Esquema ilustrativo dos conceitos de EPT e EPD. ....   | 95  |
| Figura 5.2 Inclusão e matriz. ....  | 99  |
| Figura 5.3 Níveis microscópicos e longitudinal da escala. ....  | 101 |
| Figura 5.4 EVR variando a quantidades de constituintes ao interior do EV. ....                                      | 103 |
| Figura 5.5 EVR variando o tamanho do EV. ....   | 103 |
| Figura 5.6 Ilustração da Convergencia do EVR. ....  | 105 |
| Figura 5.7 Esquema para imposição das condições de contorno no EVR. ....  | 107 |
| Figura 5.8 Detalhe da microestrutura de um FFN GGG-40. ....   | 109 |
| Figura 5.9 Caso 1: Curva de convergência do EVR. ....   | 111 |
| Figura 5.10 Caso 2: Curva de convergência do EVR. ....  | 112 |
| Figura 5.11 Caso 1. $E^*$ do material para 20 microestruturas com 27 nódulos distribuídos em forma aleatória. ....  | 114 |
| Figura 5.12 Caso 1. Histograma do $E^*$ [GPa] para 20 amostras com 27 nódulos distribuídos em forma aleatória. .... | 114 |
| Figura 5.13 Caso 2. $E^*$ do material para 20 microestruturas com 27 nódulos distribuídos em forma aleatória. ....  | 115 |
| Figura 5.14 Caso 2. Histograma do $E^*$ [GPa] para 20 amostras com 27 nódulos distribuídos em forma aleatória. .... | 115 |
| Figura 5.15 EVR para o FFN GGG-40. ....   | 116 |
| Figura 5.16 Contração da malha dos nódulos de grafita do FFN GGG-40. ....   | 116 |
| Figura 5.17 Iustração do EVR com diferentes números de inclusões. ....  | 117 |
| Figura 5.18 $E^*$ do FFN GGG-40. ....   | 118 |
| Figura 5.19 Construção da geometria. ....   | 119 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 5.20 Identificação da superfície. ....   | 119 |
| Figura 5.21 Verificação das normais internas. ....  | 119 |
| Figura 5.22 Verificação das normais externas. ....  | 119 |
| Figura 5.23 Modelo reconstruído. ....   | 120 |
| Figura 5.24 EV em 3D para homogeneização assíntótica. ....  | 120 |
| Figura 5.25 Curva de convergência do EVR. Valores de $E^*$ para diferentes distribuições de nódulos. ....   | 121 |
| Figura 5.26 a) $E^*$ para 20 mostras com distribuições aleatórias de nódulos. b) Histograma de $E^*$ . .... | 122 |
| Figura 5.27 EVR usado na simulação em 3D direta. ....   | 123 |
| Figura 5.28 EV usado na simulação em 3D com a geometria real. ....  | 123 |
| Figura 6.1 Representação do modelo e Hooke. ....  | 128 |
| Figura 6.2 Representação do modelo de Newton. ....  | 129 |
| Figura 6.3 Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt. ....   | 129 |
| Figura 6.4 Modelo 3D para implementação do modelo de Kelvin-Voigt. ....                                     | 134 |
| Figura 6.5 Modelo de exemplo usado. ....  | 136 |
| Figura 6.6 Deslocamentos ao longo para pontos sobre a face carregada. ....                                  | 137 |
| Figura 6.7 Deslocamentos em função de diferente passos de tempo. ....                                       | 137 |
| Figura 6.8 Esquema de chapa com inclusões. ....   | 138 |
| Figura 6.9 Relação dos módulos de Young com uma inclusão. ....  | 138 |
| Figura 6.10 Relação dos módulos de Young com duas inclusões. ....   | 139 |
| Figura 6.11 Relação dos módulos de Young com quatro inclusões. ....   | 139 |
| Figura 6.12. Relação dos módulos de Young com quatro inclusões. ....  | 140 |
| Figura 6.13. Coeficiente de variação do material visco-elástico. ....                                       | 141 |
| Figura 6.14 Detalhe das dimensões e das condições de contorno. ....   | 142 |
| Figura 6.15 Resposta em termos de deslocamentos na face A do domínio. ....                                  | 142 |
| Figura 6.16 Análise da estabilidade com diferentes passos de tempo. ....                                    | 143 |
| Figura 7.1 Ilustração dos modelos implementados. ....   | 146 |

## Lista de Tabelas

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 3.1 Elementos e nós para o modelamento em 3D.....  | 57  |
| Tabela 3.2 Símbolos representados no sistema de MEC para sub-regiões. ....                          | 68  |
| Tabela 4.1 Faixa de composições para a Ferros típicos (% peso). ....                                | 77  |
| Tabela 4.2 microestruturas e composição química do FFN. ....  | 81  |
| Tabela 4.3 Parâmetros usados para estimar o módulo de Young. ....                                   | 86  |
| Tabela 4.4 A composição química do FFN GGG-40 (Percentage em peso%). ....                           | 87  |
| Tabela 4.5 Parâmetros Experimentais obtidos por o sistema confocal. ....                            | 89  |
| Tabela 4.6 Propriedades mecânicas experimentais. ....   | 91  |
| Tabela 4.7 Resultados experimentais obtidas por ensaios de tensão e microdureza. ....               | 92  |
| Tabela 5.1 Imposição de Condições de contorno dependendo da posição dos esforços....                | 107 |
| Tabela 5.2 Propriedades do FFN GGG-40. ....   | 110 |
| Tabela 5.3 Caso 1. E*da microestrutura com diferentes distribuições aleatórias de nódulos.<br>..... | 112 |
| Tabela 5.4 Caso 2. E*da microestrutura com diferentes distribuições aleatórias de nódulos.<br>..... | 113 |
| Tabela 5.5 E* para os testes computacionais do FFN GGG com várias distribuições de<br>nódulos. .... | 121 |
| Tabela 5.6 Resultado do processo de homogeneização assintótica com geometria real....               | 124 |
| Tabela 6.1 Propriedades físicas do material. ....   | 136 |
| Tabela 6.2 Propriedades físicas do material. ....   | 138 |
| Tabela 6.3 Propriedades físicas do material. ....   | 142 |
| Tabela 7.1 Resumos dos resultados.....  | 146 |

## **Lista de Algoritmos**

|   |     |
|---|-----|
| Algoritmo 1 Algoritmo da integração de Gauss da equação integral de Contorno..... | 55  |
| Algoritmo 2 Substituição de Variáveis de Telles. ....                             | 64  |
| Algoritmo 3 Algoritmo para inserção de pontos com o comando ginput .....          | 117 |

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Generalidades

A maioria dos materiais de Engenharia apresenta características heterogêneas quando vistos microscopicamente. A heterogeneidade no material pode se apresentar por causa da sua constituição microestrutural devida aos processos de fabricação, ou também ao desenvolvimento de materiais compósitos cuja finalidade é gerar propriedades que não se encontram em nenhum material de maneira individual (ASKELAND; FULAY; WRIGHT, 2010).

As heterogeneidades no material têm algumas formas de se apresentar tais como buracos (espaços vazios). As rochas, concretos, tecidos biológicos, carbonetos e zeólitas, etc. são exemplos de materiais que apresentam este tipo de heterogeneidades. Também se pode encontrar na forma de inclusões ou irregularidades na estrutura cristalina, como os compósitos e as ligas metálicas, respectivamente (QU et al., 2011) (SAPUAN, 2017).

Em definitivo, grande parte dos materiais com estruturas heterogêneas são projetados com o objetivo de mudar as suas propriedades mecânicas para fazê-los aptos para uma determinada solicitação. Têm-se, por exemplo, melhora na resistência à compressão como no caso dos concretos; na condutividade elétrica como nos supercondutores; aumento da resistência ao desgaste como nos aços inoxidáveis ou melhora na usinabilidade e a resistência à tração como no caso da maioria dos ferros fundidos, etc.(DANDEKAR; SHIN, 2012; GIBSON, 2010).

Na atualidade, a determinação das características microestruturais e a avaliação das propriedades mecânicas vêm sendo um problema de essencial importância na ciência e na engenharia dos materiais (BURONI, 2006). O uso dos métodos numéricos para a determinação do comportamento, tanto macroscópico como microscópico, de materiais submetidos à determinadas solicitações também tem sido objeto de estudo nos últimos anos.

Existem muitos métodos experimentais para o estudo das propriedades destes materiais (PUNDALE; ROGERS; NADKARNI, 1998), tais como as análises de caracterização morfológica ou de propriedades mecânicas os quais são muito empregados



na atualidade pelos laboratórios avançados de pesquisa e pela indústria em geral. Dentro das caracterizações morfológicas existentes na atualidade algumas das mais importantes são por exemplo as análises com Microscopia Ótica (YACOBI, 2008); Microscopia Eletrônica de Varredura (MEV) (DEDAVID; GOMES; MACHADO, 2007), Difração de Raios-X, (INKSON, 2016); (VEYTSKIN et al., 2017), Espectroscopia de Energia Dispersiva (EDS) (GIRÃO; CAPUTO; FERRO, 2017), análises termogravimétrica, ente outros.

A caracterização mecânica geralmente se desenvolve mediante testes experimentais os quais podem ser destrutivos ou não-destrutivos. No primeiro caso temos, por exemplo, os ensaios de tração, de impacto, de dureza, ensaios à torção, ao desgaste, à fadiga, à corrosão, etc. (CALLISTER, 2008; SHACKELFORD, 2008); no caso de ensaios não destrutivos têm-se os testes visuais, ultrassom, termografia, radiografia, eletromagnéticos, etc. (BOYES, 2010; GHOLIZADEH, 2016; JOLLY et al., 2015; SHACKELFORD, 2008).

Muitas destas características ou propriedades dos materiais podem ser determinadas sem a necessidade de uma amostra particular da mesma. Com o desenvolvimento das simulações numéricas para análise destas microestruturas fundamentadas em modelos matemáticos, é possível determinar as propriedades e/o seu comportamento quando submetidas à determinadas solicitações em alternativa aos métodos experimentais. A modelagem computacional oferece a possibilidade de reduzir, em muitos casos, os custos da análise destes materiais, como por exemplo: reduzir o trabalho experimental, custos de operação e/ou analisar situações que em muitos casos seria impossível de realizar. (BENEDETTI; ALIABADI, 2013; PETROV et al., 2016).

Atualmente, o uso dos métodos numéricos para resolver equações diferenciais tais como Métodos de Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF) ou Método dos Elementos de Contorno (MEC) são muito empregados (BURONI; MARCZAK, 2008). Dentre estes Métodos, a formulação do MEC baseia-se na obtenção de uma Equação Integral de Contorno (EIC) deduzida a partir da manipulação algébrica das equações diferenciais governantes do problema (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1987). O MEC faz aproximações das equações governantes no contorno para os problemas em 2D, ou na superfície para problemas em 3D, do corpo utilizando as chamadas funções de forma que dão origem a um sistema de equações lineares que contém as incógnitas do problema.

No estudo de Materiais microheterôgeneos os métodos numéricos são indispensáveis para obter as propriedades efetivas, a partir de uma detalhada informação dos campos de tração e de deslocamentos, podendo ser mais precisos que os métodos analíticos (YAO et al., 2004). Para a determinação das propriedades efetivas são empregadas geralmente os processos de homogeneização o qual permite determinar o comportamento geral do material submetido à determinadas solicitações. Tais processos de homogeneização consistem em teorias de análise de materiais compósitos ou microestruturais a partir das teorias de misturas, a qual trata os compostos como se fossem materiais homogêneos tendo em conta o comportamento dos diferentes constituintes de acordo com sua proporção em volume no interior do compósito.

Igualmente, a caracterização numérica e o desenvolvimento de métodos de análise oferecem a possibilidade de criação de novos materiais. A partir dos métodos numéricos é possível obter uma melhora da capacidade de análise das propriedades mecânicas em pontos específicos, tais como por exemplo, a avaliação de deslocamento intergranular, propagação de trincas, crescimento de grão, etc.

Neste sentido, neste trabalho será desenvolvida uma metodologia considerando a parte experimental e numérica simultaneamente para a caracterização mecânica de um ferro fundido nodular GGG-40. Para tanto foi desenvolvida uma rotina numérica usando o MEC para determinação do módulo de Young efetivo através de um processo de homogeneização multiescala. A obtenção da malha da microestrutura foi realizada a partir de imagens obtidas por técnica de microtomografia por raios-X, permitindo obter um EVR (Elemento de Volume Representativo) baseado na morfologia real do GGG-40.

## **1.2. Originalidade da Tese**

Esta tese contém três contribuições significativas, a primeira consiste no desenvolvimento de uma estratégia de homogeneização multiescala empregando o MEC para a determinação do módulo de Young Efetivo de um ferro fundido nodular. O processo de homogeneização multiescala foi realizado a partir de modelos numéricos em 2D e 3D.

A segunda contribuição é a determinação da geometria real das inclusões de grafita em um FFN GGG-40. Dois temas que tem sido pouco estudado é a determinação da

geometria real das inclusões nodulares em ferros fundidos nodulares e o desenvolvimento de um modelo numérico que considere a geometria real destas inclusões nodulares. Para estabelecer as propriedades mecânicas da inclusão é proposto um inédito procedimento experimental cuidadosamente elaborado mediante ensaios de microdureza.

Referente aos materiais com comportamento viscoelásticos microestruturais, uma das contribuições deste trabalho é a aplicação do processo de homogeneização em materiais submetidos a tensão constante (Fluência). A modelagem numérica foi realizada em modelos 2D e 3D.

### **1.3. Objetivos**

#### **1.1.1. Geral**

Este trabalho está focado na determinação do módulo de Young efetivo mediante a homogeneização multiescala utilizando o MEC. A estratégia será aplicada a materiais com comportamento linear elástico e estendida a materiais microestruturais com comportamento viscoelástico. A aplicação da técnica de microtomografia por Raios-X é um dos testes experimentais inéditos deste trabalho, tendo em vista a pouca literatura reportada empregando esta técnica experimental para suporte aos processos de homogeneização. Alguns procedimentos experimentais adicionais serão empregados a fim de avaliar os modelos numéricos desenvolvidos.

#### **1.3.1. Específicos**

Desenvolvimento de código numérico por sub-regiões para análise da estrutura de um FFN.

Programar as estratégias de homogeneização mediante Elementos de Volume Representativos (EVR).

Implementar condições de contorno periódicas para as análises da o módulo de Young efetivo do material.

Análise da estrutura do FFN mediante teste experimental.

Validação dos modelos numéricos implementados com dados experimentais efetuados.

Desenvolver a metodologia para análise de materiais microestruturais com comportamento viscoelásticos.

Encontrar um EVR do modelo viscoelástico a partir da determinação de diferentes tipos de módulos efetivos.

## **1.4. Resumo da Tese**

Esta tese está dividida em nove capítulos.

No capítulo 1 é apresentada uma introdução, bem como a importância da análise numérica e modelagem computacional de material heterogêneo.

O capítulo 2 exibe uma revisão bibliográfica do MEC, e suas vantagens e desvantagens, assim como uma menção das principais contribuições matemáticas desenvolvidas ao longo das últimas décadas e que efetivamente contribuíram para o desenvolvimento e estruturação do MEC. Igualmente de faz uma menção de alguns trabalhos com problemas de homogeneização em FFN.

No capítulo 3 é apresentada a formulação matemática e a metodologia implementada nesta tese para análise de materiais heterogêneos.

Na sequência, é apresentado um esboço geral do método começando com as relações constitutivas e equações de equilíbrio até chegar à obtenção da identidade de Somigliana. O mesmo procedimento é expresso em linguagem de programação em forma vetorial para a implementação no código numérico tanto para modelos 3D como para 2D. O código desenvolvido é avaliado e validado com resultados analíticos e numéricos de casos existentes na literatura.

No capítulo 4 realiza-se uma caracterização tanto morfológica como mecânica de um FFN GGG-40. É apresentada uma introdução sobre os ferros fundidos, suas características e importância como materiais de Engenharia. Logo, o procedimento de caracterização é apresentado e destacado por sua novidade quanto à análise por sistema de microtomografia computarizada por raios-X (Micro-CT), técnica pouco implementada na

engenharia. Outro tema ainda abordado consiste na determinação das propriedades mecânicas dos nódulos de grafita a partir de testes de microdureza, seguindo um processo experimental inédito e cuidadosamente elaborado.

No capítulo 5 é apresentada a metodologia numérica para o processo de homogeneização utilizada nesta tese e a descrição dos modelos com suas hipóteses tanto para os problemas em 2D e 3D. São apresentados igualmente os resultados dos modelos numéricos. A estratégia de análise consiste em fazer uma comparação entre os modelos numéricos em 2D e 3D utilizando tanto as geometrias sintéticas como a geometria real do problema. Neste item é apresentado uma análise e discussão dos resultados obtidos.

No capítulo 6 é realizado um estudo da teoria de viscoelasticidade, em que os principais modelos são apresentados: o modelo de Kelvin-Voigt de Maxwell e de Boltzmann. As formulações dos modelos linear-elástico, tanto bi-dimensional como tri-dimensional são reformuladas para um modelo com comportamento viscoelástico. O código com dados experimentais é avaliado e logo é apresentado um estudo da influência das inclusões ao interior de um material viscoelástico submetido a um ensaio de fluência. Posteriormente, se empregam as técnicas de homogeneização para o caso em 2D para determinar o EVR do concreto asfáltico cujo dados estão reportado na literatura.

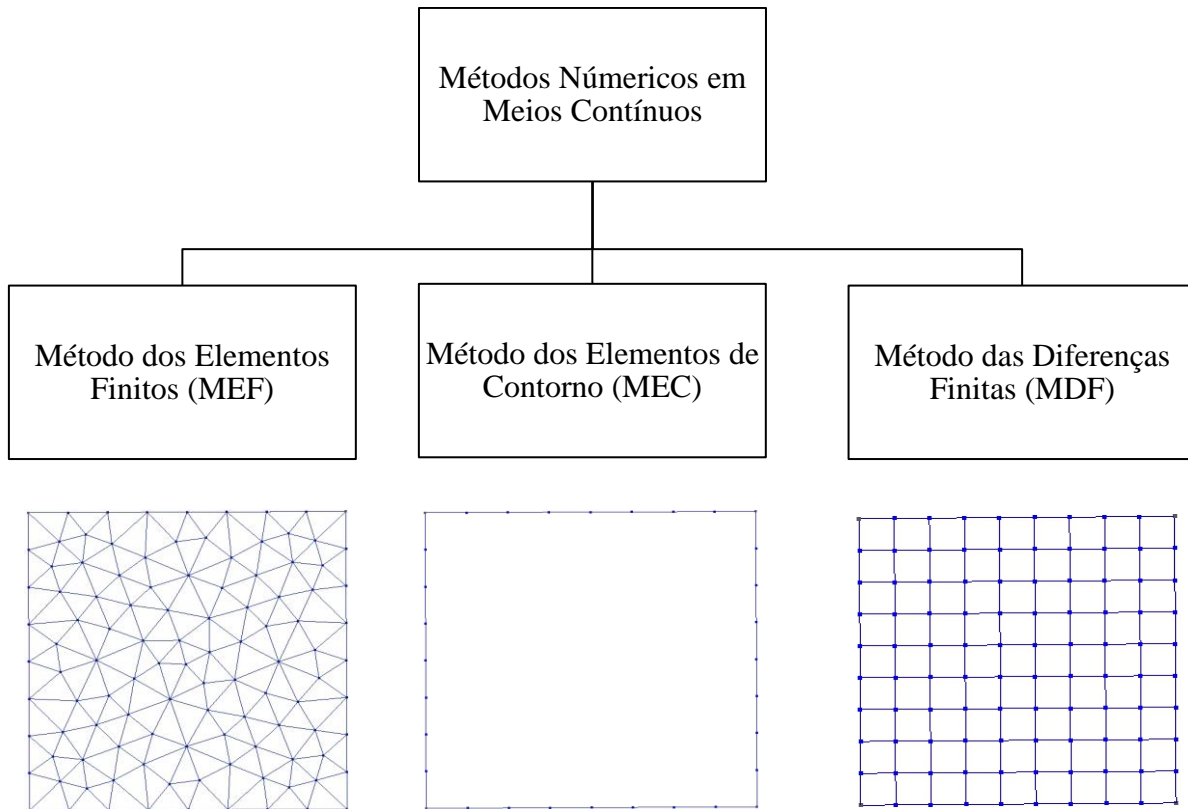
Finalmente, no capítulo 7 é realizada uma análise e discussão ampla dos resultados e das conclusões do trabalho e sugestões de possíveis trabalhos futuros.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1. Estado da Arte

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), também conhecido na literatura como *Boundary Element Method (BEM)*, é um método computacional para solução de Problemas de Valor de Contorno (PVC) através formulações integrais. O MEC é descrito por alguns autores como (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1987); (BECKER, 1992); (L.WROBEL, 2002); (M.H. ALIABADI, 2002) e (MUKHERJEE; MUKHERJEE, 2005)) entre tantos outros, como uma potente ferramenta computacional que permite a modelagem numérico, mediante equações de equilíbrio, do comportamento de um material sobre solicitações de carregamento, temperatura, som, etc. Este método apresenta uma característica importante quando comparado á outros métodos convencionais tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método de Volumes Finitos, (MVF) entre outros. O MEC tem como principal característica uma redução da dimensionalidade do problema ao analisar o problema só no contorno do sistema, por exemplo: estudo do da linha do contorno se o problema é em uma superfície ou a análise de uma superfície se o problema é em um volume (M.H. ALIABADI, 2002).

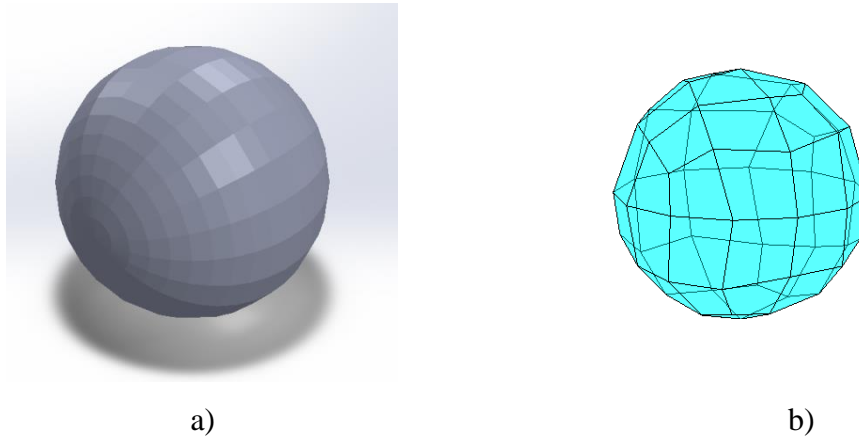
No MEC, a fronteira do material (ou do problema) é dividida em um número de pequenos segmentos (para 2D) ou elementos (Para 3D) onde a equação diferencial governante, na forma de identidade integral, é integrada numericamente. Segundo (M.H. ALIABADI, 2002) este método é muito confiável para análise de domínios infinitos, bem como problemas de descontinuidade forte, como fratura ou geometrias irregulares onde a geração de malha apresenta elevada complexidade. Na Figura 2.1 é apresentado um diagrama onde se faz um comparativo em quanto a estrutura da malha de cada um dos métodos mais usados na atualidade, os quais são MEF, MEC e MDF. Pode ser observado que a malha do MEF apresenta uma maior quantidade de graus de liberdade com respeito ao MEC para um mesmo sólido. O mesmo pode ser verificado ao se comparar o MDF em relação ao MEC.



**Figura 2.1** Representação esquemática do MEF, MEC e MDF.

No MEC, os parâmetros desconhecidos para problemas de elasticidade são os deslocamentos e as forças de superfície, as quais são avaliadas na superfície “discretizada” obtendo ao final um sistema matricial que contém as incógnitas do problema.

O MEC por suas características de ser um método de fronteira apresenta uma boa integração com as ferramentas CAD (Computer-Aided Design), o que permite uma maior facilidade para geração de malha de superfície. Na Figura 2.2 é apresentado um exemplo de esfera desenhada em CAD e reproduzida a partir da interface gráfica do Matlab.



**Figura 2.2** Reprodução de modelo CAD em interface gráfica de Matlab.

a) Desenho CAD, b) Reprodução em interface gráfica do Matlab.

Para aplicar o MEC, é necessário o conhecimento prévio de uma solução particular do problema, a qual é conhecida como solução fundamental. A obtenção da solução fundamental é a parte mais crítica e fundamental do MEC, já que a integração destas soluções pode ser de difícil obtenção em alguns casos; a formulação requer a integração de funções que contêm singularidades as quais necessitam de procedimentos elaborados para sua integração. A equação integral é avaliada, geralmente, em cada um dos nós do problema de contorno obtendo-se assim um sistema matricial o qual é desenvolvido para encontrar a solução do problema. Além disso, o MEC, ao contrário de outros métodos, geram matrizes totalmente preenchidas e não simétricas, limitando os benefícios no uso de soluções iterativas e sistemas de gerenciamento de armazenamento de memória. O procedimento algébrico do sistema e o desenvolvimento do método será explicado adiante. A continuação são resumidas as principais vantagens e desvantagens do MEC.

### **2.1.1. Vantagens e desvantagens do MEC**

O MEC, como qualquer outro método numérico tem vantagens e desvantagens (RASHED, 2001):

#### **2.1.1.a. Vantagens**

Somente problemas de fronteiras precisam ser quantificados, o que resulta em uma preparação fácil de dados e menor exigência computacional.

Permite o tratamento de domínios infinitos e semi-infinitos com boa precisão.



Os locais internos incógnitos são computados na etapa de pós-processamento que simplifica qualquer otimização de processo.

Resultada relativamente boa precisão para concentração de tensões devida à propagação de trincas ou cargas concentradas.

#### **2.1.1.b. Desvantagens**

As matrizes do sistema não são simétricas ou densamente cheias.

As soluções fundamentais nem sempre são fáceis de serem obtidas.

Dificuldade no tratamento de estruturas pouco espessas.

“Discretização” necessária do domínio para alguns casos de aplicações não lineares.

## **2.2. Contexto histórico do MEC**

Neste trabalho, é feita uma recompilação dos dados históricos os quais também são referenciados nos livros de (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1987); (L.WROBEL, 2002); (M.H. ALIABADI, 2002). Outro trabalho que apresenta detalhes históricos significativos é apresentado por (CHENG; CHENG, 2005), em que faz um estudo de toda a evolução do MEC e sua riqueza matemática.

O MEC tomou força no campo dos métodos numéricos depois de muito tempo de desenvolvimento até ter um amadurecimento na primeira metade do século XX, quando os procedimentos numéricos puderam ser desenvolvidos por computadores. Com o desenvolvimento dos sistemas computacionais, o MEC assim como outros métodos numéricos, começaram a ter uma maior aplicabilidade e portanto, um maior desenvolvimento nas metodologias aplicadas.

Inicialmente, o MEC começou com a teoria potencial no início do século XVII até o início do século XX (L.WROBEL, 2002). Os fundamentos matemáticos surgiram no início do século XVII com os trabalhos de (LAGRANGE, 1773 , FOURIER, 1822, MAXWELL, 1873 e SOMIGLIANA 1887) os quais são referenciados por (CHENG; CHENG, 2005). As primeiras contribuições importantes segundo (CHENG; CHENG, 2005) se deram com os trabalhos de Lagrange quem desenvolveu a técnica de redução espacial da representação integral deixando porém mais eficiente o método de solução de equações integrais. A

solução numérica de um sistema de equação integral do MEC foi desenvolvida inicialmente por (SOMIGLIANA, 1887), apesar das principais propriedades das equações diferenciais já estarem bem estabelecidas no século XIX, somente no trabalho de (FREDHOLM, 1903) as primeiras investigações foram encaminhadas no desenvolvimento de equações Integrais. Fredholm igualmente apresentou as condições de existência e unicidade, conhecidas como os teoremas de (FREDHOLM, 1903). A origem e consolidação do MEC começa a se mostrar como uma importante ferramenta numérica com as implementações das equações integrais. Foi na década de 60s com os trabalhos de (JASWON; PONTER, 1963; JASWON, 1963); (G.T.SYMM, 1963) aliado a isto estava à evolução da ciência da computação a qual surgia como importante nessa época. Os problemas potenciais 2D foram primeiramente formulados por (JASWON, 1963) e (G.T.SYMM, 1963), os quais desenvolveram um método direto da equação integral do contorno para problemas potenciais usando as identidades de Green. Na sequência, (RIZZO, 1967) e (CRUSE, 1969, 1968; CRUSE; VANBUREN, 1971) estenderam a formulação para os casos de problemas elásticos, onde desenvolveram a EIC para problemas elasticidade em 2D e 3D usando a identidade de Somigliana. Também apresentaram uma formulação para problemas elastodinâmico transiente empregando a transformada de Laplace (CRUSE, 1968; CRUSE; RIZZO, 1968). Nos anos 70 houve um grande desenvolvimento do método, em que a partir de então, passa a ser conhecido como até hoje com o nome de Método dos Elementos de Contorno (MEC). A primeira conferência de cientistas da área foi organizada em junho de 1975 por (CRUSE, 1974) com o nome de “Método de Equação Integral de Limites: Aplicação Computacional em Mecânica Aplicada”. Em 1976, Brebbia organizou uma conferência com o nome de "Boundary Element Methods" em Southampton, U.K., e em 1978 publicou os trabalhos que foram apresentados (TELLES; BREBBIA, 1979). Estes dois episódios estabeleceram o nome da técnica numérica como o “*Boundary Element Method-BEM*”, ou Método dos Elementos de Contorno. Igualmente, neste período foi prolífico para o desenvolvimento do MEC nas áreas de acústica e radiação (BANAUGH; GOLDSMITH, 2014; CHEN; SCHWEIKERT, 1963; SHAW, 1975). Os trabalhos de (LACHAT; WATSON, 1976) são considerados por (M.H. ALIABADI, 2002) como as primeiras contribuições mais significativas às quais fizeram a técnica do MEC como uma técnica efetiva. Até esta data as equações integrais eram temas quase exclusivamente dos

matemáticos e dos físicos, depois com o avanço da mecânica computacional, a metodologia foi adotada por engenheiros e cientistas de diversas áreas, (BANERJEE; CATHIE, 1980; BANERJEE; RAVEENDRA, 1986; CHRISTENSEN; LO, 1979; CROTTY et al., 1980; CRUSE, 1969, 1968; CRUSE; VANBUREN, 1971; PARIS; GARRIDO, 1986).

Uma das principais diferenças entre o MEC e o MEF se refere as funções peso usadas para encontrar a forma fraca das equações diferenciais parciais. O MEF usa funções arbitrárias e simples, enquanto o MEC usa soluções analíticas representando os efeitos de uma carga pontual em outro ponto de um domínio infinito (BECKER, 1992) . Estas soluções são conhecidas como soluções fundamentais. O uso dessas funções é a razão da precisão maior do MEC em relação ou MEF, particularmente em regiões onde as variáveis apresentam alto gradiente.

Atualmente, diversos livros que tratam sobre o MEC, em diversas áreas de aplicação. Podem ser encontrados, como, por exemplo, os trabalhos de ((BANERJEE; CATHIE, 1980); (BERBBIA; WALKER, 1980); (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984); (BECKER, 1992); (J.T. KATSIKADELIS, 2002), (BEER; SMITH; DUENSER, 2008); (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1987); (KANE, 1994); (M.H. ALIABADI, 2002); (L.WROBEL, 2002); (DOMÍNGUEZ, 1993; KIRKUP, 2007; MUKHERJEE; MUKHERJEE, 2005), entre outros.

### **2.3. Estudos numérico de materiais microestruturais**

Um dos mais antigos trabalhos que vale a pena ressaltar é o de (ACHENBACH; ZHU, 1989; ZHU; ACHENBACH, 1991) os quais estabeleceram um modelo de célula unitária contendo uma interface. A partir deste modelo foi estudado o efeito na distribuição de esforços na matriz e nas fibras causadas pela variação dos parâmetros de interfaces. (GHOSH; MOORTHY, 1995) desenvolveram um método de elementos finitos com células de Voronoi para examinar a pequena deformação de microestruturas bidimensionais heterogêneas arbitrárias elastoplásticas. Os resultados numéricos foram comparados com soluções analíticas. A influência da forma, tamanho, orientação e distribuição das inclusões nas respostas micro e macroscópica foram investigadas. (LEE; GHOSH, 1999) propuseram a análise em duas escalas usando o método de homogeneização assintótica e o método de

elementos finitos sobre células de Voronoi para análise de microestruturas de materiais porosos e compósitos. O tensor de elasticidade ortótropo foi obtido pela análise de problemas microestruturais com condições de contorno periódicas. Os parâmetros que caracterizam o comportamento plástico do material foram determinados a partir de análises microestruturais com homogeneização assintótica e os resultados da análise macroscópica foram comparados com uma análise de duas dimensões com homogeneização. (GALVANETTO; PELLEGRINO; SCHREFLER, 1997) derivaram uma relação constitutiva homogeneizada para compósitos periódicos elastoplásticos. A relação foi obtida pela análise de células unitárias submetidas a um grande número de condições de contorno diferentes. O método foi proposto para células unitárias bidimensionais submetidas a carga proporcional constante e pequenas estirpes do material. (KOUZNETSOVA; BREKELMANS; BAAIJENS, 2001) apresentaram a estratégia de micro macro para modelagem de materiais heterogêneos não-lineares em grandes deformações. As propriedades do método foram demonstradas para a placa de alumínio submetida à flexão pura. No mesmo trabalho também foi estudada a influência da distribuição espacial das heterogeneidades no comportamento macroscópico geral.

As propriedades efetivas usando o MEC bidimensional sobre materiais macroestruturais utilizando geometrias sintéticas de diferentes tamanhos foram estudadas por (YAO et al., 2004); em suas análises, os autores avaliaram geometrias circulares e elípticas em diferentes direções e também com inclusões de diferentes propriedades mecânicas mostrando que o MEC pode ser mais adequado para análises das interfaces com respeito ao MEF. (PIERARD et al., 2007) analisaram a tensão uniaxial do composto contendo inclusões elipsoidais alinhadas e incorporadas em um material com comportamento elastoplástico. As propriedades efetivas foram obtidas pela análise de elementos finitos sobre um EVR. Os resultados foram utilizados para avaliar a precisão de um método de homogeneização. O comportamento não-linear foi modelado pelo uso do tensor de rigidez tangente e secante das fases. O tensor de rigidez efetiva foi calculado pelo método de Mori-Tanaka. (BRASSART; DOGHRI; DELANNAY, 2010) apresentaram modelagem micromecânica de compósitos feitos de uma matriz elastoplástica com inclusões esféricas elásticas e elipsoidais lineares sujeitas a cargas não monotônicas. O modelo de homogeneização de campo médio foi acoplado a uma solução de elementos

finitos do problema de inclusão equivalente. A abordagem proposta foi aplicada para o método Mori-Tanaka e modelos de inclusão diluídos. (HUANG; ZHENG; YAO, 2011) estudo um sólido macroestrutural com poros preenchido de fluido usando um modelo MEC bidimensional por sub-regiões. Foi mostrado que o método por sub-regiões eram mais eficiente e preciso para determinar a propriedades efetivas que uma simples análises de materiais heterogêneos analisados por superposição dos domínios.

Este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de um algoritmo baseado no MEC para a análise do módulo de Young efetivo de materiais heterogêneos de comportamento elástico linear. Pelas características morfológicas, foi escolhido o Ferro Fundido Nodular (FFN), ou também conhecido como *Nodular Cast Iron* (NCI), na literatura científica, o qual reproduz as características desejadas de um material com estrutura heterogênea. O FFN consiste de uma matriz isotrópica e homogênea contendo uma quantidade distribuída de heterogeneidades carbonosas, as quais são chamadas de nódulos de grafita. Neste trabalho, os nódulos de grafita do FFN foram modelados numericamente como geometria sintética e na sequência com a geometria real. A geometria sintética é uma aproximação da geometria do nódulo de grafita a partir de um círculo (2D) ou de uma esfera (3D). Esta característica foi uma das justificativas em se escolher o FFN como material de estudo. A modelagem da geometria real do nódulo de grafita somente foi possível devido ao uso de imagens obtidas da microestrutura do FFN. Para prever a resposta elástica do material, é empregado um esquema de análise estática com a teoria de propriedades efetivas (ZOHDI; WRIGGERS, 2005). Esta teoria prediz as propriedades efetivas de uma amostra macroscópica baseado no volume representativo do campo de esforços extraído a partir do microheterogeneidades das amostras. Porém, os macrocampos são definidos como os volumes representativos dos correspondentes microcampos, e as propriedades efetivas são determinadas a partir das relações entre os microcampos representativos.

Ao final deste trabalho, a metodologia numérica para homogeneização foi estendida para a análise de materiais viscoelásticos, baseados no modelo de Kelvin-Voigt.

Para a avaliação dos modelos numéricos, recursos experimentais como microtomografia, análises morfológicas mediante a Microscopia Eletrônica de Varredura

(MEV), ensaios de tração e ensaios de microdureza foram empregados no sentido de obter os parâmetros reais e corroborar com os dados obtidos numericamente via MEC.

## **2.4. Trabalhos Numéricos Desenvolvidos com FFN**

Nos últimos anos, alguns trabalhos numéricos relacionados com materiais microestruturas, tais como o FFN, vem sendo desenvolvidos. A maioria destes trabalhos, foram realizados assumindo que os nódulos de grafita eram espaços vazios. Este tipo de concepção é aceitável porque os nódulos de grafita não contribuem de forma significativa para o reforço da matriz. Alguns trabalhos determinam o comportamento do FFN a partir da implementação numérica, onde o foco consiste principalmente em gerar modelos numéricos para prever o comportamento à solicitação de carregamento ou a determinação das propriedades efetivas. (ZHANG; BAI; FRANÇOIS, 1999) investigaram o efeito do tamanho e da distância de espaçamento dos nódulos de grafita (espaços vazios) em um FFN a partir de simulações com MEF. Os autores descobriram que a distribuição e espaçamento tem uma grande influência no comportamento do material. (PUNDALE; ROGERS; NADKARNI, 1998) empregaram o MEF para calcular os módulos de elasticidade efetivos do FFN, assumindo os nódulos de grafita como espaços vazios. Seus resultados para propriedades efetivas concordaram com dados experimentais obtidos. (ZOHDI, 2005) realizou uma homogeneização microestrutural mais confiável usando elementos de volume (EV) sobre diferentes partes de um material para assim encontrar o Elemento de Volume Representativo (EVR) através de um processo estatístico. Nesta metodologia, são tomadas pequenas amostras de materiais com diferentes distribuições das heterogeneidades, para assim, mediante dados estatísticos obter a resposta global do material. Este autor sugeriu que esta metodologia estatística era mais precisa e confiável que simplesmente determinar as propriedades efetivas diretamente, devido as irregularidades das amostras. (BURONI; MARCZAK, 2008) formularam um procedimento empregando MEC 2D para modelar as propriedades elásticas efetivas do FFN. Neste trabalho, a análise das tensões nas inclusões foi determinada mediante funções de forma de base trigonométrica com o objetivo de reduzir o custo computacional, no entanto, os nódulos de grafita foram simulados como espaços vazios. (RODRÍGUEZ et al., 2015) utilizaram o método de homogeneização assintótica e EVR em 2D e 3D para investigar o comportamento de um FFN e avaliar as

propriedades elásticas efetivas. A análise foi desenvolvida via MEF e os resultados obtidos permitiram concluir que os EVR em 3D apresentavam maior rigidez em comparação com os EVR em 2D, e que a causa dessa maior rigidez estava no fato de o modelo 3D considerar forças ‘hidrostáticas’ no interior da célula unitária.

Mais recentemente, (FERNANDINO; CISILINO; BOERI, 2015) desenvolveram um método para calcular as propriedades elásticas efetivas de um FFN austemperado por análise multiescala bidimensional utilizando MEF. Os resultados foram comparados com os dados obtidos pelo teste experimentais. Os trabalhos experimentais consistiram em testes de tração, análises de morfologia mediante MEV e testes de nanoindentação para identificar tanto a rigidez da matriz ferrítica e da inclusão gráfitica. A partir dos dados experimentais obtidos, foi possível estabelecer a nodularidade do FFN estudado para a homogeneização do material. Segundo os autores, o modelo desenvolvido estava de acordo com os dados experimentais.

## 3. METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

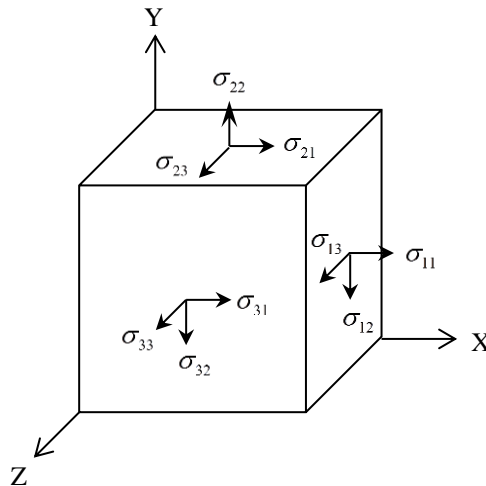
### 3.1. Introdução

Neste capítulo é apresentada uma breve introdução sobre a teoria da elasticidade linear dando suporte a introdução do MEC e suas particularidades para implementação numérica em 2D e 3D. Alguns exemplos numéricos em 2D e 3D são modelados para validar a implementação numérica e seus resultados são comparados com a solução analítica ou com resultados obtidos via MEF.

### 3.2. Teoria de elasticidade

#### 3.2.1. Teorema de Cauchy

A teoria da elasticidade envolve variáveis tensoriais de diferentes ordens (escalares, vetoriais, matriciais, etc.) que dependem das coordenadas espaciais utilizadas para formular o problema em estudo. Suponha-se um cubo com comportamento elástico linear submetido ao carregamento hidrostático, mas em condições de equilíbrio (Figura 3.1). O tensor de tensões é simétrico, devido à garantia de equilíbrio rotacional do elemento volumétrico do material.



**Figura 3.1** Forças na superfície de um elemento.



Definem-se os vetores de tensão, que fisicamente, representam o resultado da interação entre dois planos justapostos como o limite de tensão quando a área tende ao valor zero, como se mostra na Eq.(3-1).

$$t(x, y) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (3-1)$$

Onde  $\Delta F$  representa a distribuição de forças em um plano de área  $\Delta A$ . Este vetor tensão depende além da coordenada espacial do ponto, do vetor que caracteriza o plano de interesse. Portanto, em um mesmo ponto existem infinitas possibilidades de vetor tensão, o que é conveniente para a definição do modelo matemático. O tensor de tensões é representado empregando a notação indicial de Einstein,  $\sigma_{ij}$ , a qual expressa as componentes do vetor de tensões segundo três planos perpendiculares entre si ( $i, j, k$ ), chamasse estes planos como cartesianos (OXYZ). Então para a descrição de um estado temos as seguintes variáveis:

Esforços diretos:  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$

Tensões indiretas:  $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{21}, \sigma_{32}, \sigma_{13}$

Uma vez conhecido o tensor de tensões é possível obter o vetor de tensões em qualquer plano de interesse por meio da relação de Cauchy. A qual é dada pela Eq. (3-2):

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (3-2)$$

Assim pode ser escrever o tensor de esforços como é mostrada na Eq.(3-3):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

E possível verificar que o elemento fica caracterizado por 9 componentes as quais estão relacionadas entre si pelas equações de equilíbrio. Estas relações podem ser dois tipos: 1) Equações de momentum ou 2) equações de esforços normais.

Atribui-se as falhas nos materiais a ocorrência de valores elevados de tensão em determinados pontos do sólido. Isto leva ao interesse em se obter valores máximos e mínimos de tensão que podem ocorrer em um ponto. Essas são as chamadas tensões

principais, e as direções em que ocorrem são as direções principais. Na Eq. (3-4) pela notação do Einstein o sistema de equações para um sistema em 3D é apresentada.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= 0\end{aligned}\tag{3-4}$$

Onde cada um dos  $b_i$  representa os componentes de força no corpo. Os sólidos de interesse devem estar sob equilíbrio estático ou quase estático, o que implica considerar insignificantes as forças de inércia. A Eq. (3-4) pode ser também representada mediante a notação de Einstein para efeitos de praticidade mediante a Eq. (3-5) :

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0\tag{3-5}$$

Onde a “vírgula” denota a derivada com respeito à segunda variável.

### 3.2.2. Deformação

As forças internas que se aplicam sobre um corpo geram deslocamentos lineares e angulares, para o caso proposto anteriormente se tem as Eq. (3-6) e Eq. (3-7).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\tag{3-6}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})\tag{3-7}$$

Onde  $\varepsilon_{ij}$  é um tensor simétrico de segundo ordem denominado tensor de deformações infinitesimais, e  $\omega_{ij}$  é o tensor de rotação infinitesimal. Logo, o campo de deslocamentos é expresso como a soma das deformações lineares e deformações rotacionais Eq.(3-8).

$$u_{ij} = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\tag{3-8}$$

No que se refere a problemas simplesmente conexos, o campo de deformações deve atender as condições de compatibilidade para garantir a continuidade do campo de

deslocamentos. Tais condições são expressas pelas relações de compatibilidade de Saint-Venant, e expressadas mediante a notação de Einstein como apresenta na Eq.(3-9):

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (3-9)$$

Quando uma estrutura é solicitada por forças externas ocorre uma indução de força internas no corpo que segue uma distribuição contínua. Deste modo, é conveniente ter uma maneira de descrever a forma com que as forças internas estão distribuídas a fim de conhecer a forma de transmissão de esforços ao longo da estrutura. A relação entre as tensões e as deformações no sistema estático apresentado na Figura 3.1 está dada pelas Eqs (3-10).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (1/E) \left[ \sigma_x - (\nu)(\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= (1/E) \left[ \sigma_y - (\nu)(\sigma_z + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_z &= (1/E) \left[ \sigma_z - (\nu)(\sigma_x + \sigma_y) \right] \\ \gamma_{xy} &= \tau_z / G \\ \gamma_{yz} &= \tau_x / G \\ \gamma_{zx} &= \tau_y / G \end{aligned} \quad (3-10)$$

Onde E é o módulo de Young, G o módulo de cisalhamento e  $\nu$  é uma constante que depende das características do material.

### 3.2.3. Lei constitutiva

A lei de comportamento linear ou equação constitutiva linear de um material elástico é escrita em notação indicial segundo a Eq.(3-11) o qual indica uma relação linear entre os tensores de deformação e de tensões:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm} \varepsilon_{km} \quad (3-11)$$

Onde  $C_{ijkm}$  são as componentes do tensor constitutivo. Na notação de Voigt, a Eq. (3-11) pode-se escrever como uma transformação linear em 6 dimensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3-12)$$

O tensor de elasticidade satisfaça três simetrias Eq. (3-13).

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijkm}, \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3-13)$$

Dadas pela simetria do tensor de tensões  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , da simetria do tensor de deformações  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  e do requerimento termodinâmico de que o trabalho efetuado por um material elástico em um ciclo de carga fechado e nulo, respectivamente. Além de isotropia também permite reescrever a lei constitutiva segundo a Eq. (3-14)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3-14)$$

Onde o parâmetro  $\lambda$  é a constante de Lamé e  $\mu$  é o módulo de elasticidade transversal. A expressão acima é conhecida como Lei de Hooke generalizada para sólidos elásticos lineares isotrópicos. As Eqs.(3-8), (3-11) e (3-14) formam o conjunto fundamental de equações diferenciais do campo da Teoria da Elasticidade Linear. Esse conjunto possui número de incógnitas compatível com o número de equações. Deste modo, para resolvê-las é necessário especificar as condições de contorno, que são particulares de cada problema. Fisicamente, as condições de contorno representam a forma com que o sólido é suportado ou a forma com que ele é solicitado. Geralmente se prescreve deslocamentos ou forças de superfície em partes complementares do contorno do sólido gerando as condições de contorno mistas. O conjunto formado pelas equações de equilíbrio, compatibilidade, constitutivas e as condições de contorno apropriadas é conhecido como problema de valores de contorno (PVC).

Tendo em conta a Eq.(3-14) o comportamento anisotrópico elástico linear fica caracterizado por 21 constantes elásticas independentes. Estas constantes são dependentes da estrutura interna do material. A inversa das relações de tensão-deformação (Eq.(3-11)) são as relações deformação-tensão de acordo a Eq. (3-15):

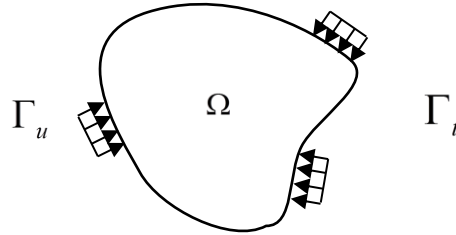
$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3-15)$$

Onde  $S_{ijkl}$  é denominado tensor de complacência de quarta ordem o qual está relacionado com o tensor de elasticidade dado pela Eq. (3-16):

$$S_{ijkl} C_{kmrs} = 1/2 (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \quad (3-16)$$

Onde  $\delta_{ij}$  é o operador delta de Kronecker.

Admite-se que o sólido bidimensional de interesse seja representado por um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , o qual tem o contorno  $\partial\Omega = \Gamma$  (Figura 3.2).



**Figura 3.2** Esquema de MEC para problema elástico linear.

Agora, busca-se resolver as equações fundamentais de equilíbrio da Elasticidade Linear respeitando as seguintes condições de contorno, Eq.(3-17).

$$\begin{cases} u_i(x) = \bar{u}_i, & x \in \Gamma_u \\ t_i(x) = \sigma_{ij}(x)n_j(x) = \bar{t}_i, & x \in \Gamma_t \end{cases} \quad (3-17)$$

Onde  $\bar{u}_i$  são as deformações conhecidas,  $\bar{t}_i$  as forças de superfícies impostas e  $n_j$  o vetor normal à superfície orientada apontando para fora. Como pode observar o contorno é composto por duas partes complementares  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , de fato, esta divisão é apenas simbólica servindo para diferenciar as condições a serem inicialmente impostas, a vez que de fato, para cada ponto  $x \in \Gamma$  coexistem tanto forças, quanto deslocamentos.

### 3.3. Formulação do MEC

Neste item é apresentada uma revisão da formulação do MEC para elasticidade linear bidimensional. Na sequência será apresentado o procedimento matemático das equações integrais do contorno 3D para problemas elásticos lineares e viscoelásticos.

### 3.3.1. Teorema da Reciprocidade de Betti

A fim de obter a formulação clássica de MEC duas premissas devem ser seguidas. A primeira delas é dispor da formulação integral do problema, de preferência que envolva integrais de linha e de superfície, que no caso dos problemas de elasticidade linear compreendam a reunião das equações constitutivas, compatibilidade e de equilíbrio em apenas uma equação. A segunda é o conhecimento prévio da solução fundamental, que nada mais é que uma solução particular do operador diferencial que rege o problema.

A formulação integral dos problemas de elasticidade pode ser obtida de várias maneiras como, por exemplo: teoremas variacionais, princípio dos trabalhos virtuais, por meio do método dos resíduos ponderados (MRP), conforme descrito por (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1987) ou, a que será seguida, utilizando um teorema clássico da Mecânica, a saber, o teorema dos *trabalhos Recíprocos de Betti*.

Desenvolveremos o procedimento matemático para chegar à equação integral. Para maiores informação indica-se a literatura apresentada em (M.H. ALIABADI, 2002). A partir da equação de equilíbrio (Eq.(3-5)) é possível escrever a relação apresentada pela Eq. (3-18):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega = 0 \quad (3-18)$$

Onde  $\Omega$  refere-se ao domínio com contorno  $\Gamma$  do problema e  $u_i^*$  é uma função ponderadora de deslocamento que sera determinada mais afrente. As trações  $\sigma_{ij,j}$ , as forças do corpo  $b_i$  e os deslocamentos  $u_i^*$  são função de  $X \in \Omega$  ( $X \equiv x, y$ ) para um corpo bidimensional.

As integrais que estão envolvendo os termos  $\sigma_{ij,j} u_i^*$  na Eq(3-18) podem ser escritas conforme a Eq.(3-19) segundo a regra do produto:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (3-19)$$

Desde que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}u_{i,j}^* + \sigma_{ij}u_{j,i}^*) \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}u_{i,j}^* + \sigma_{ij}u_{j,i}^*) \\
&= \sigma_{ij}u_{i,j}^*
\end{aligned} \tag{3-20}$$

Logo, pelo teorema da divergência têm-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}n_j u_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma \tag{3-21}$$

Onde  $n_j$  é o vetor normal do contorno  $\Gamma$ . Logo

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* d\Gamma \tag{3-22}$$

Usando as Eq.(3-21) e a Eq.(3-17) tem-se:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* d\Omega \tag{3-23}$$

Agora substituindo a Eq. (3-14) na equação Eq.(3-23) resulta:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} [\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ii}^*] d\Omega \tag{3-24}$$

Como  $\delta_{ij}\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{mm}^*$  e  $\varepsilon_{kk} = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}$ , então a seguinte relação se cumpre:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} [\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{mm}^* + 2\mu\varepsilon_{ij}^*] \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij} d\Omega \tag{3-25}$$

Logo, das Eq.(3-24) e Eq.(3-25) se cumpre a seguinte relação à qual é conhecida como o Teorema da Recíprocidade de Betti Eq. (3-26):

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \tag{3-26}$$

### 3.3.2. Identidade de Somigliana

As equações integrais para os problemas de elasticidade agora podem ser obtidas a partir do teorema da Recíprocidade de Betti, Eq.(3-26), ao tomar as forças do corpo  $b_i^*$  para corresponder a uma força pontual numa placa infinita, representado pela função de Delta de Dirac  $\Delta(X - X')$ :

$$b_i^* = \Delta(X - X')e_i \quad (3-27)$$

Onde os componentes do vetor unitário  $e_i$  correspondem às forças unitárias positivas na direção aplicada em  $X'$  e  $X, X' \in \Omega$ . Para problemas bidimensionais,  $e_i$  são uma força por unidade de espessura e para problemas tridimensionais a força é puramente concentrada.

A função Delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega} g(X) \Delta(X - X') d\Omega = g(X') \quad (3-28)$$

Agora, usando esta propriedade e o Teorema de Betti obtém-se:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = \int_{\Omega} \Delta(X - X') e_i u_i d\Omega = u_i(X') e_i \quad (3-29)$$

Os deslocamentos e as trações correspondentes à solução de uma força pontual podem ser escritos como:

$$u_i^* = U_{ij}(X', X) e_j \quad (3-30)$$

$$t_i^* = T_{ij}(X', X) e_j \quad (3-31)$$

A partir da Eq.(3-29) e da Eq.(3-26) obtém-se a Eq.(3-32) para problemas bidimensionais:

$$u_j(y) = \int_{\Gamma} [t_i(x) U_{ij}(x, y) - u_i(x) T_{ikj}(x, y) \eta_k] d\Gamma + \int_{\Omega} b_i U_{ij}(x, y) d\Omega \quad (3-32)$$

A Eq.(3-32) é conhecida como Identidade de Somigliana para deslocamentos e representa uma formulação integral equivalente do PVC de Elasticidade Linear. Na ausência de forças de volume, a identidade de Somigliana é escrita em função apenas dos termos de contorno, sem a necessidade do conhecimento de informações do que é imposto na superfície do sólido, evidenciando a característica do MEC com relação à diminuição de uma dimensão espacial para realização das análises. Esta expressão é utilizada para resolver a técnica computacional do MEC.



### 3.3.3. Solução fundamental

#### 3.3.3.a. Solução fundamental 2D

Define-se a solução fundamental para os deslocamentos e as forças de superfície como.

$$U_{ij}(x, y) = -\frac{1}{8\pi\mu}(1-\nu)(3-4\nu)\log\frac{1}{r}\delta_{ij} + r_i r_j \quad (3-33)$$

$$T_{ij}(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] + (1-2\nu)(n_i r_j - n_j r_i) \right\} \quad (3-34)$$

O ponto  $x$  é conhecido como ponto campo e o ponto de aplicação da força concentrada (ponto  $y$ ) é conhecido como ponto de colocação, ou ponto fonte. Neste, quando o ponto fonte ( $y$ ) se aproxima ao ponto campo ( $x$ ) as equações das soluções fundamentais se tornam singulares. Deste modo, um estudo limite deve ser conduzido para avaliar a natureza da singularidade e assim tratá-las caso a caso analiticamente.

#### 3.3.3.b. Solução fundamental 3D

A solução fundamental de Kelvin é derivada a partir das equações de equilíbrio de Navier-Cauchy, para um sólido elástico tridimensional infinitamente estendido. Na Eq. (3-35) é apresentado a solução junto com os componentes cartesianos do campo de deslocamentos  $u_j(X)$ , devido a um único ponto fonte no sistema  $e_i(Y)$  na forma:

$$u_j(Y) = U_{ij}(X, Y)e_i(Y) \quad (3-35)$$

Onde

$$U_{ij}(X, Y) = \frac{A}{r} [B\delta_{ij} + r_i r_j] \quad (3-36)$$

e

$$\begin{aligned}
A &= 1/\left[16\pi G(1-\nu)\right] \\
B &= 3-4\nu \\
r_i &= x_i(X) - x_i(Y) \\
r^2 &= r_i r_i
\end{aligned}
\tag{3-37}$$

Onde os pontos chamados  $X$  e  $Y$  são respectivamente: o ponto campo e o ponto fonte. É importante observar que a Eq.(3-36) é singular, isto é, tende ao infinito na medida que o ponto fonte se aproxima ao ponto campo (quando  $r \rightarrow 0$ ). A solução fundamental para as forças de superfícies é apresentada na Eq. (3-38).

$$T_{ij} = \frac{-2GA}{r^2} \left[ C(n_i r_j - n_j r_i) + (3r_i r_j + C\delta_{ij}) n_m r_m \right]
\tag{3-38}$$

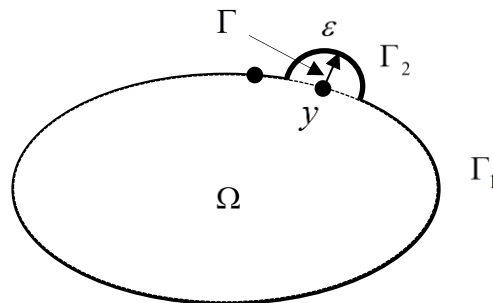
Onde  $C = 1 - 2\nu$ .

### 3.3.4. Equação integral de contorno

A identidade de Somigliana pode ser reescrita de uma maneira mais geral. Tomando a Eq.(3-32) e tendo em conta que não se tem forças de domínio, a identidade de Somigliana pode ser expressa segundo a Eq. (3-39).

$$u_j(y) = \int_{\Gamma} t_i(x) U_{ij}(x, y) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_i T_{ikj}(x, y) \eta_k d\Gamma
\tag{3-39}$$

Para a obtenção da equação integral de contorno é necessário particionar o contorno de integração  $\Gamma$  de modo que seja possível extrair a singularidade na medida que o ponto fonte se aproxima ao ponto campo durante o processo de integração, Figura 3.3 é apresentada a forma como o contorno é particionado.



**Figura 3.3** Aproximação do contorno ao ponto singular  $y$ .

Então a Eq. (3-32) pode ser apresentada como segue:

$$u_j(y) = \int_{\Gamma-\Gamma_1+\Gamma_2} t_i(x) U_{ij}(x, y) d\Gamma - \int_{\Gamma-\Gamma_1+\Gamma_2} u_i T_{ikj}(x, y) \eta_k d\Gamma \quad (3-40)$$

Onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são contornos extraídos e inseridos, respectivamente. Agora, se considera o limite quando o ponto campo se aproximar ao ponto fonte, isto é  $\varepsilon \rightarrow 0$  e efetuando as respectivas derivações se obtém a Eq. (3-41).

$$c_{ij}(y) u_j(y) + \oint_{\Gamma} T_{ij}(x, y) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x, y) t_j(x) d\Gamma \quad (3-41)$$

Onde  $c_{ij}$  é a constante, a qual depende da posição dos pontos de colocação, o “circulo” na primeira integral indica que a mesma deve ser avaliada no sentido do Valor Principal de Cauchy,  $\mu_j$  e  $t_j$  são componentes do deslocamento e as tensões, respectivamente;  $U_{ij}$ ,  $T_{ij}$  são as soluções fundamentais dos problema elastostático,  $y$  é o ponto de colocação,  $x$  é o ponto no contorno e  $\Omega$  é o domínio. O termo  $c_{ij}$  surge devido à singularidade forte do núcleo  $T_{ij}$ , e vale:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & y \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & y \in \Gamma \text{ suave} \\ 0, & y \text{ fora do domínio} \end{cases} \quad (3-42)$$

### 3.3.5. Tensões internas

O campo de tensões em pontos internos ao domínio pode ser obtido a partir da Eq. (3-15) utilizando as expressões fundamentais da elasticidade linear, resultando em:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega \quad (3-43)$$

Em que as matrizes  $S$  e  $D$  são expressos por:

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (3-44)$$

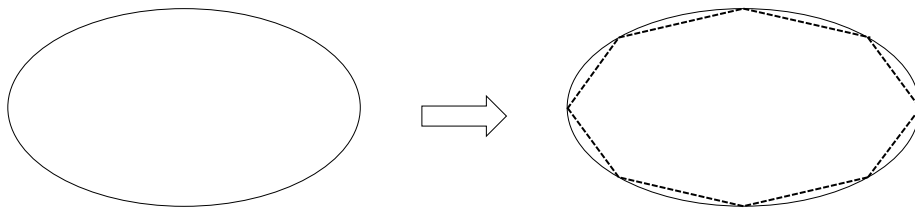
$$S_{kij} = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{aligned} &2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \\ &2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3-45)$$

A Eq.(3-41) fornece o campo de deslocamentos procurado de forma analítica. Entretanto, para obtê-lo é preciso impor as condições de contorno de forma contínua ao longo de todo o contorno, o que pode não ser possível em problemas gerais. Além disso, não se conhece a priori todos os deslocamentos e todas as forças de superfície. Portanto, o MEC propõe uma maneira aproximada de impor estas condições de contorno atendendo à equação integral de forma aproximada. Isto permite que a Eq.(3-41) seja utilizada para encontrar os deslocamentos e forças incógnitas em um conjunto infinito de pontos e assim obter a solução do problema. Ressalta-se que uma vez que o termo de domínio é conhecido, sua correspondente integral é geralmente suprimida.

### 3.3.6. Formulação Algébrica

#### 3.3.6.a. Formulação Algébrica 2D

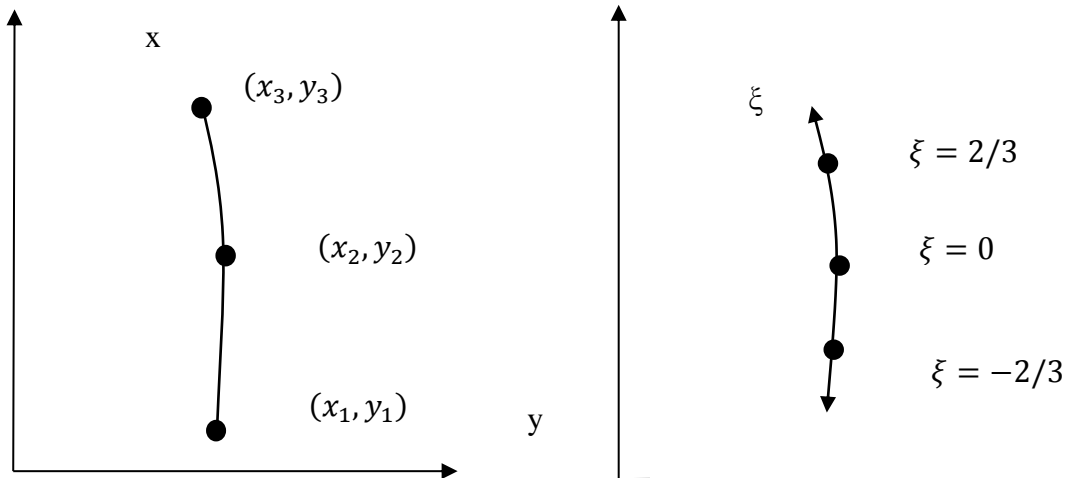
A fim de possibilitar o desenvolvimento do modelo computacional é preciso que se disponha de uma formulação algébrica. Portanto, o contorno pode ser considerado, de forma aproximada, como um conjunto de elementos de tamanho finito. Existe a possibilidade de utilizar elementos contínuos ou descontínuos. Na Figura 3.4 é apresentado um esquema de “discretização” de uma mostra elíptica bidimensional com elementos lineares.



**Figura 3.4** “Discretização” de um problema de MEC.

Neste trabalho são utilizados os elementos quadráticos descontínuos, isto é que as funções interpoladoras dos nós em cada elemento são funções de forma de segundo grau e seus nós extremos estão distanciados entre cada elemento. Na Figura 3.5 é apresentado o efeito da

interpolação levada a cabo mediante as funções de forma. Neste caso, o sistema real é substituído, mediante as funções interpoladora, por um sistema de referência intrínseco onde as variáveis de interpolação  $\xi$  varia de  $-2/3$  até  $2/3$ .



**Figura 3.5** Representação dos elementos de forma quadrático descontínuo

As funções interpoladoras da segunda ordem para o mapeamento intrínseco estão dadas segundo a Eq. (3-46).

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= \xi \left( \frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right) \\
 N_2(\xi) &= 1 - \frac{9}{4} \xi^2 \\
 N_3(\xi) &= \xi \left( \frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3-46}$$

De forma geral, elementos descontínuos são mais indicados em locais que exista descontinuidade do vetor normal, ou de forças de superfície, como em cantos, por exemplo.

Pode-se agora escrever a geometria e as variáveis nodais em função de  $\xi$ , Eq.(3-47).

$$x = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + N_3(\xi)x_3
 \tag{3-47}$$

O uso de polinômios de Lagrange para a parametrização é frequente, embora o aumento da ordem do polinômio possa levar a oscilações de resultados nas extremidades dos intervalos. Assim, escolhe-se um conjunto de  $k$  pontos sobre o contorno local,

chamados nós, normalmente com distribuição uniforme, em relação a qual a parametrização é conduzida:

$$x_i(\xi) = \phi_k(\xi) x_i^k \quad (3-48)$$

Em que  $x_1^k$  representa o conjunto de coordenadas nodais e  $\phi_k$  é o conjunto de funções de forma fornecidas por polinômios de Lagrange de grau  $k - 1$ , tal que:

$$\phi_k(\xi) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^k \frac{\xi - \xi_i}{\xi_k - \xi_i} \quad (3-49)$$

A presente tese faz uso de elementos de contorno isoparamétrico, isto significa que o mesmo conjunto de funções de forma utilizado para aproximar a geometria, é utilizado para aproximar as variáveis de contorno:

$$u_i(\xi) = \phi_k(\xi) u_i^k \quad (3-50)$$

$$t_i(\xi) = \phi_k(\xi) t_i^k \quad (3-51)$$

Sento  $u_i^k$  o conjunto de deslocamentos nodais, e  $t_i^k$  o conjunto de forças de superfícies nodais. Essas adoções permitem reescrever a Eq.(3-41), suprimindo o termo de forças de volume, da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} c_{ij}(y) u_j(y) + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^m \left[ \int_{-1}^1 T_{ij}(y, x(\xi)) \phi_l(\xi) J(\xi) d\xi \right] u_j^{el} = \\ \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^m \left[ \int_{-1}^1 U_{ij}(y, x(\xi)) \phi_l(\xi) J(\xi) d\xi \right] t_j^{el} \end{aligned} \quad (3-52)$$

Em que  $l$  é o número de nós que varia de 1 até  $m$  para elementos lineares, quadráticos, etc. Enquanto  $x(\xi)$  é ponto fonte,  $u_j^{el}$  e  $t_j^{el}$  são as deformações e forças de superfícies do nó local  $l$  sobre o elemento  $el$ , respectivamente. Note que existe uma transformação entre o espaço euclidiano e o espaço adimensional padrão que permite o uso de quadraturas de integração, sendo o Jacobiano fornecido por:

$$J(\xi) = \frac{dS}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (3-53)$$

Para calcular os integrais da Eq.(3-52) é necessário avaliá-las segundo o valor Principal de Cauchy. Fazendo corresponder a um dos nós do elemento, a Eq.(3-52) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$c_{ij}(y)u_j(y) + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^m h^{el} u_j^{el} = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^m g^{el} t_j^{el} \quad (3-54)$$

Em que  $h^{el}$  e  $g^{el}$  representam as integrais já avaliadas.

A forma algorítmica é apresentada no Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1** Algoritmo da integração de Gauss da equação integral de Contorno

---

```

For i=1 até N_Sub-regiões
  NOS_FISloc, ELEM_FISloc, NOS_GEOloc, ELEM_GEOloc, CDCloc
  For j=1 até NE (Numero de elementos da sub-Região i)
    Determine as coordenadas dos nós de cada elemento
    (x1, y1, x2, y2, x3, y3)
    For no=1 até Nf (Numero de nós físicos)
      Determine Jac ( Jacobiano )
      Compute eet (Variável de Telles)
      For ii= 1 até NPG (Número de pontos de Gauss)
        Use Algoritmo da Transformada de Telles
        Assign Material ← (E, ν, G, h)
        Compute Φ (Funções de forma)
        Compute U, P;
        Assign U = [U44 U45
                   U54 U55]
        Assign P = [P44 P45
                   P54 P55]
        Assign Ge = U*Φ
        Assign He = P*Φ
        Assign HS44 = P44; HS55 = P55; HS45 = P45; HS54 =
P54;
        Assign FCij = [HS44 HS45
                       HS54 HS55]
        Sum He = FHe*Jt*Wg(ii)*Jac
        Sum Cije = FCij*Jt*Wg(ii)*Jac
        Sum Ge = FGe*Jt*Wg(ii)*Jac
      End
      Assign H(j, no)=h_el(no)
      Assign G(j, no)=g_el(no)
    End
    Assign H=H-Cij
    Aplica condições de contorno
  End
H,G Da i-esima sub-região

```

---

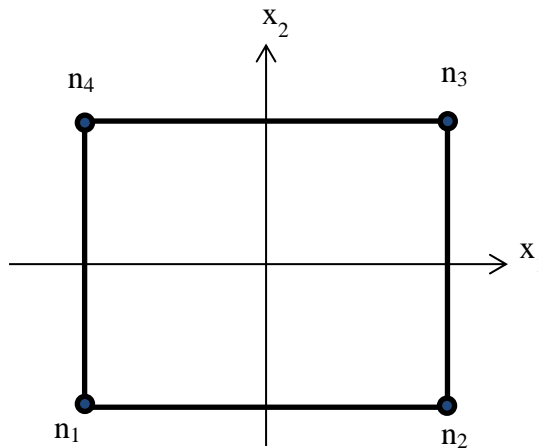
### 3.3.6.b. Formulação Algébrica 3D

A equação integral de contorno é expressa em forma algébrica segundo a Eq.(3-55):

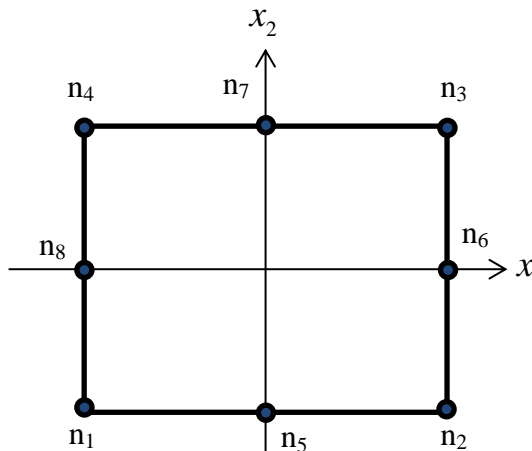
$$c_{ij}(y)u_i(y) = \sum_{n=1}^{N_e} \int_S U_{ij}(x(\xi), y) t_j(x(\xi)) dS(x(\xi)) - \sum_{n=1}^{N_e} \int_{S_n} T_{ij}(x(\xi), y) u_j(x(\xi)) dS(x(\xi)) \quad (3-55)$$

Onde  $S_n$  é a porção do elemento e  $S = \sum_{n=1}^N S_n$ .

Os tipos de elementos deste modelo são Quadriláterais de 4 nós (Figura 3.6) e quadriláterais de 8 nós (Figura 3.7).



**Figura 3.6** Elemento quadriláterais Lineares de 4 nós.



**Figura 3.7** Elemento quadriláterais quadrático de 8 nós.



Na Tabela 3.1 é resumida na linguagem matricial entre os nós de cada elemento, e suas respectivas coordenadas geométricas no sistema de referência intrínseco:

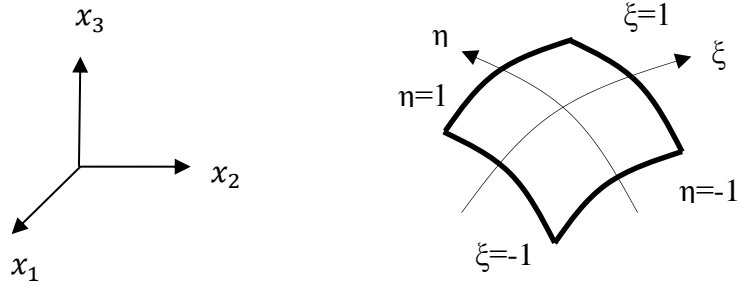
**Tabela 3.1** Elementos e nós para o modelamento em 3D.

| Elementos de 4 nós |  |  |
|--------------------|--|--|
| Nó                 | n: número do nó,<br>x <sub>i</sub> : Coordenadas dos nós | [n, x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> ]   |
| Elemento           | N: número do elemento<br>N <sub>i</sub> : n-ésimo nó     | [N, n <sub>1</sub> , n <sub>2</sub> , n <sub>3</sub> , n <sub>4</sub> ]  |
| Elementos de 8 nós |  |  |
| Nó                 | n: número do nó,<br>x <sub>i</sub> : Coordenadas dos nós | [n, x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> ]   |
| Elemento           | N: número do elemento<br>N <sub>i</sub> : n-ésimo nó     | [N, n <sub>1</sub> , n <sub>5</sub> , n <sub>2</sub> , n <sub>6</sub> , n <sub>3</sub> , n <sub>7</sub> , n <sub>4</sub> , n <sub>8</sub> ] ou<br>[N, n <sub>1</sub> , n <sub>2</sub> , n <sub>3</sub> , n <sub>4</sub> , n <sub>5</sub> , n <sub>6</sub> , n <sub>7</sub> , n <sub>8</sub> ] <sup>*</sup> |

O primeiro passo é subdividir o contorno  $S$  da região de interesse dentro de suficiente número de elementos ( $S_n$ ). Os elementos devem ser agrupados em pedaços contínuos à aproximação do contorno. Um maior número de elementos usados para esse propósito dá uma melhor aproximação, mas para manter uma eficiência computacional é necessário especificar a menor quantidade de elementos possíveis. Cada elemento do sistema coordenado global  $x_i$  é interpolado entre as coordenadas  $x_i^n$  dos nós desses elementos através das funções de interpolação:

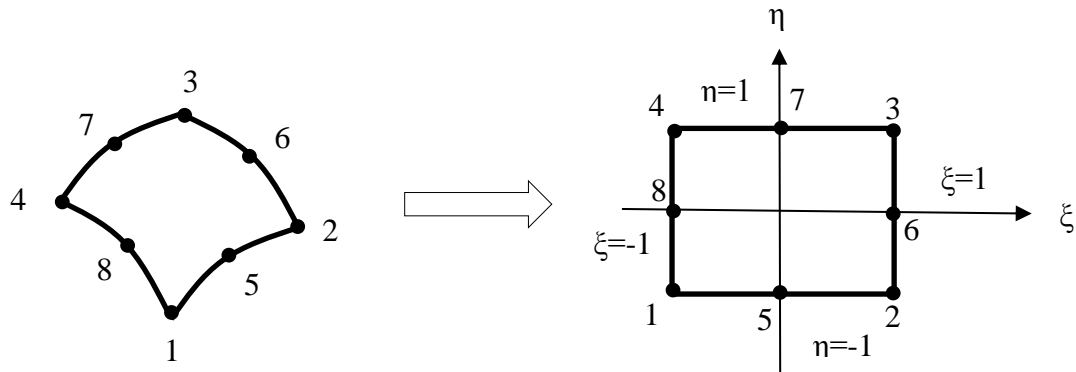
$$x_i = \sum_{n=1}^M N_n(\xi, \eta) x_i^n \quad (3-56)$$

Onde  $M$  é o número de nó. Os parâmetros  $\xi$ ,  $\eta$  são as coordenadas intrínsecas, definidas pelo sistema de eixos curvilíneos, o qual está sempre tangencial ao elemento. Definem-se, as coordenadas intrínsecas para um elemento normalmente com valores de  $\pm 1$ .  
Figura 3.8.



**Figura 3.8** Sistema coordenado local (intrínseco).

No sistema de coordenadas intrínseco, estes elementos são placas quadradas (Figura 3.9), e temos três nós por lado.



**Figura 3.9** Serendipity de 8 nós por elemento.

Os elementos são quadrados no sistema de coordenadas intrínseco, mas o mapeamento quadrático a partir dos elementos reais pode ter a geometria real da amostra. Isto é, o elemento pode ser um quadrilátero, curvilíneo, etc. (como por exemplo, na Figura 3.9). As 4 esquinas estão associadas com as funções de forma segundo as Eq.(3-57).

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)
 \end{aligned}
 \tag{3-57}$$

Estas equações padronizadas, e suas relações entre as coordenadas intrínsecas dos nós 1-4, são evidentes.

As funções de forma para os nós nas metades são:

$$\begin{aligned}
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\
 N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\
 N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi^2)(1 - \eta) \\
 N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{3-58}$$

A natureza quadrática destas funções de forma, é evidente partir dos termos de  $\xi^2$  e  $\eta^2$ . Mas não constituem um conjunto polinomial devido a que estes não são  $\xi^2\eta^2$ .

### 3.3.6.c. Interpolação dos campos

As variações dos deslocamentos e das forças sobre cada elemento pode ser descrita em termos dos elementos nos valores nodais, da mesma maneira em que a geometria é interpolada entre os valores nodais, apesar de não ser necessário, é conveniente fazer o uso precisamente das mesmas funções de interpolação para estas quantidades, em quanto seja feita a geometria. Até aqui, as funções isoparamétricas, as trações e os deslocamentos coordenados  $(\xi, \eta)$ , são interpolados entre os valores nodais, identificados por superíndices  $\alpha$ , usando as equações.

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^M N_n(\xi, \eta) u_i^n \\
 t_i(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^M N_n(\xi, \eta) t_i^n
 \end{aligned} \tag{3-59}$$

Onde  $n$  denota o  $n$ -ésimo nó no  $M$ -ésimo elemento. Estes elementos de familiar metodologia serão denotados como os deslocamentos trações necessários, que não são interpolados pelas funções de diferente ordem e são indexadas, mas pode conferir uma altura, isto poderia não ser necessário, devido a complicações ulteriores.

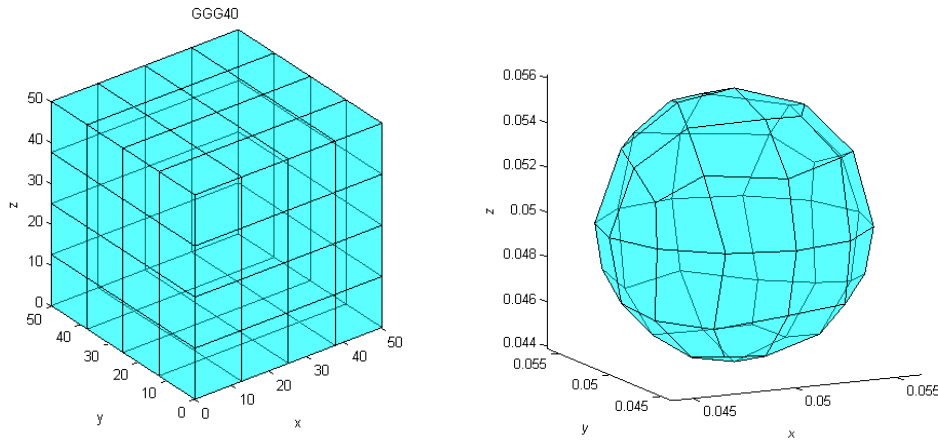
### 3.3.6.d. Elementos Isoparamétricos

A formulação dos elementos de contorno isoparamétricos para elementos lineares e pode ser escrita como:

$$c_{ij}u(y) = \sum_{i=1}^{N_e} \left( \sum_{k=1}^{N_n} t_j^n(x(\xi)) \int_S U_{ij}(x(\xi), y) N_n(x(\xi)) dS(x(\xi)) \right) - \sum_{i=1}^{N_e} \left( \sum_{k=1}^{N_n} u_j^n(x(\xi)) \oint_S T_{ij}(x(\xi), y) N_n(x(\xi)) dS(x(\xi)) \right) \quad (3-60)$$

Onde  $N_e$  é o número total de nós em i-esimo elemento.

Tanto a malha do EV como dos nódulos de grafita nodular são discretizadas com elementos isoparamétricos quadrilaterais de 4 nós, tal como é apresentado na Figura 3.10. a) e b).



**Figura 3.10** Malha modelo tridimensional.  
a) Malha do EVR, b) Malha nodular sítica.

A soma dupla na Eq.(3-60) deve ser avaliada, considerando que alguns nós sejam compartilhados entre elementos, e os valores de forças e deformações estejam bem definidos. Aqui é adaptada uma estratégia de arranjo que pode permitir, por diferentes valores de forças prescritos, coletar os valores de deslocamento de elementos por elemento. Segue continuação a estratégia vindo da Eq. (3-60), reescrita como:

$$c(y_j)u(y_j) + \sum_{i=1}^N H_{ji}u_i = \sum_{i=1}^{N_e} G_{ji}q_i, \quad j = 1, \dots, N \quad (3-61)$$

Onde  $N$  é o número total de nós que constituem o contorno discreto,  $H_{ji}$  feita a partir da primeira integral na double suma na Eq. (6-19) e  $G_{ji}$  representa a segunda integral double na Eq. (6-19). Isto pode ser escrito em forma matricial como segue:

$$[c]\{u\} = [G]\{t\} - [H']\{u\} \quad (3-62)$$

Onde os vetores  $\{u\}$  e  $\{t\}$  c constituem o conjunto completo de vetores de deslocamento e tração, respetivamente e  $[c]$ ,  $[G]$  e  $[H']$  são as matrizes de coeficientes dos termos da integração. Este sistema pode se escrever segundo a Eq. (3-63):

$$\sum_{i=1}^N H_{ji} u_i = \sum_{i=1}^{N_e} G_{ij} q_i \quad (3-63)$$

Onde  $[H] = [H'] + [c]$ . A técnica de colocação, agora pode ser aplicada para todos os pontos nodais e elementos do contorno discreto e, portanto, o sistema de  $N$  equações pode ser escrito na seguinte notação matricial:

$$Hu = Gt \quad (3-64)$$

Onde  $H$  e uma matriz  $N \times N$ ,  $G$  é uma matriz retangular  $N \times N_e$ ,  $u$  um vetor de deslocamento  $N \times 1$  e  $q$  um vetor de tração  $N_e \times 1$ . Ao substituir as condições de contorno no interior do sistema resulta em um novo sistema algébrico que pode ser escrito na forma matricial como:

$$Ax = b \quad (3-65)$$

Onde  $x$  é o vetor que contém deslocamentos de contorno desconhecidos,  $A$  é a matriz de coeficientes a qual é não simétrica e cheia e  $b$  é obtido ao multiplicar as Condições de contornos prescritas pela correspondente coluna das matrizes  $G$  e  $H$ . O sistema da Eq.(3-65) pode ser resolvido diretamente avaliando a inversa de  $A$ .

### 3.3.7. Singularidade

#### 3.3.7.a. Forte 2D

Os termos da matriz  $H$  são da forma  $1/r$  que é chamada de singularidade forte (Integral no sentido do valor principal de Cauchy). Esta singularidade pode ser extraída de

maneira direita mediante a movimentação do corpo rígido. Isto é assumindo que as forças de superfície em qualquer ponto do contorno sejam zero, assim, tem-se:

$$Hv^q = 0 \quad (3-66)$$

Onde  $v^q$  é um vetor que para todos os nós tem deslocamentos unitários ao longo da direção  $q$  e zero na outra direção. Logo, para satisfazer a Eq (3-66) tem-se:

$$H_{ii} = -\sum_{j=1}^N H_{ij} \quad j \neq i \quad (3-67)$$

Sendo  $j$  ímpar.

Os termos da diagonal da matriz  $H$  são iguais à soma de todos os outros termos fora da diagonal correspondentes ao grau de liberdade em consideração.

### 3.3.7.b. Forte 3D

A Eq.(3-60) possui uma singularidade forte. Esta equação é implementada aqui para um caso finito. Contudo, a extração da singularidade é feita mediante um movimento de corpo rígido do deslocamento  $u_j^n$  na  $n$ -ésima direção cartesiana, as superfícies de trações devem ser todas igual a zero. Assim:

$$\begin{aligned} u_j^k &= u_j^n \\ t_j^k &= 0 \end{aligned} \quad (3-68)$$

Substituindo esta equação na Eq. (3-64) é obtida a seguinte matriz:

$$[H]\{I\}^n = \{0\} \quad (3-69)$$

Onde  $\{I\}^n$  é o conjunto de  $n$  vetores colunas, na qual (para todos os nós), os deslocamentos unitários são prescritos na  $n$ -ésima direção e os deslocamentos nulos nas outras direções. Da Eq.(3-69) os coeficientes da sub-matriz singular para o  $k$ -ésimo nó (o qual aparece na diagonal da matriz  $H$ ) pode ser determinado a partir da soma dos elementos fora da diagonal.

$$[H]_{ij}^{kk} = (\delta_{km} - 1) \sum_{m=1}^N [H]_{ij}^{km} \quad (3-70)$$

Onde  $N$  é o número de nós, e os sub-índices  $i$  e  $j$  variam de 1 até 3 (três direções), é os sub-índices  $k$  e  $m$  referem-se aos nós.

### 3.3.7.c. Fraca 2D

A matriz  $G$  contém termos da forma  $\log(r)$ , e é chamada de singularidade fraca. Esta pode ser avaliada pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis proposta por (TELLES; BREBBIA, 1979) o qual implementa um procedimento para a troca de variáveis para fazer a integração dos pontos onde a distância entre os nós é muito próxima. A transformação de variáveis faz com que o Jacobiano resultante da transformação cancele a singularidade ou debilita o efeito da singularidade suficientemente de maneira que uma baixa ordem de quadratura poderia ser usada para efetuar a integração. A simples transformação é dada por

$$\eta = \bar{\eta} + \frac{1}{2} \left( 1 - (\bar{\eta})^2 \right) \quad (3-71)$$

Para a singularidade em  $\eta = 1$  o jacobiano da transformação é dado segundo a Eq. (3-72).

$$J = \frac{d\eta}{d\bar{\eta}} = (1 - \bar{\eta}) \quad (3-72)$$

Com a finalidade de ilustrar o efeito de tal transformação, considere,

$$\int_{-1}^1 \ln(1 - \eta) d\eta = 2 \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1 - \eta}{2}\right) (1 - \bar{\eta}) d\bar{\eta} \quad (3-73)$$

Onde a integral no lado direito da equação anterior é agora regular. A transformação baseada num polinômio de terceiro grau foi também desenvolvida por Telles para tratar com singularidades com um intervalo de integração de  $[-1, 1]$ . Considere o polinômio de terceiro grau.

$$\eta(\xi) = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d \quad (3-74)$$

Ao impor as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^{2\eta}}{d\xi^2} \right)_{\eta'} &= 0 \\ \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)_{\eta'} &= 0 \\ \eta(1) &= 1 \\ \eta(-1) &= -1 \end{aligned} \quad (3-75)$$

Onde  $\eta'$  são o ponto no qual a integral é singular.

As constantes na Eq.(3-74) são avaliadas.

$$a = \frac{1}{(1+\bar{\xi}^2)}; \quad b = -\frac{3\bar{\xi}}{(1+\bar{\xi}^2)}; \quad c = \frac{3\bar{\xi}^2}{(1+\bar{\xi}^2)}; \quad d = -b \quad (3-76)$$

Onde  $\bar{\xi}$  é w o valor de  $\xi$  a qual satisfaça  $\eta(\bar{\xi}) = \bar{\eta}$  e é dada pela Eq. (3-77).

$$\bar{\xi} = \sqrt[3]{\bar{\eta}(\bar{\eta}^2 - 1) + |\bar{\eta}^2 - 1|} + \sqrt[3]{\bar{\eta}(\bar{\eta}^2 - 1) - 1 + |\bar{\eta}|} \quad (3-77)$$

Usando a transformação acima (Eq. (3-77)) temos que:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 f \left\{ \frac{\left[ (\xi - \bar{\xi})^3 + \bar{\xi}(\bar{\xi}^2 + 3) \right]}{(1 + 3\bar{\xi}^2)} \right\} \frac{3(\xi - \bar{\xi}^2)}{(1 + 3\bar{\xi}^2)} d\xi \quad (3-78)$$

A característica da Eq.(3-78) que concentra automaticamente os pontos de integração perto da singularidade.

O algoritmo numérico é apresentado a continuação.

### Algoritmo 2 Substituição de Variáveis de Telles.

---

```

Input gamm,eet;

Assign eest = eet^2 - 1;
Assign term1 = eet*eest + abs(eest);
Compute term1

Assign term2 = eet*eest - abs(eest);
Compute term2

Sum GAMM = term1 + term2 + eet;

Assign Q = 1 + 3*GAMM^2;
Assign A = 1/Q;
Assign B = -3*GAMM/Q;

```

---



---

```
Assign C = 3*GAMM^2/Q;
```

```
Assign D = -B;
```

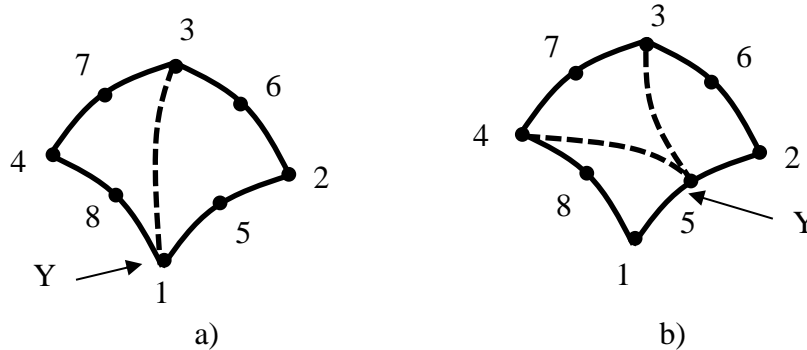
```
Sum eta = A*gammm^3 + B*gammm^2 + C*gammm + D;
```

```
Sum Jt = 3*A*gammm^2 + 2*B*gammm + C;
```

---

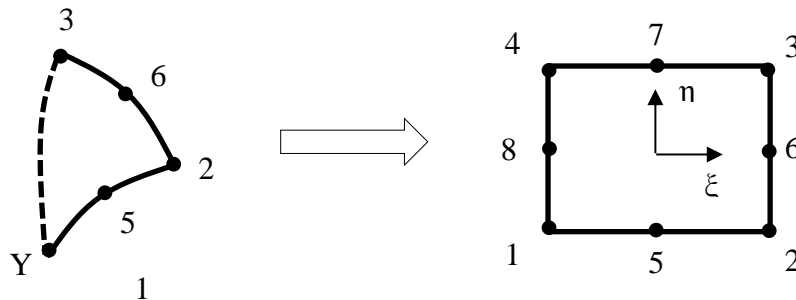
### 3.3.7.d. Fraca 3D

Para extrair a singularidade da equação integral de contorno é empregada a técnica de subdivisão de elemento, desenvolvida por (LACHAT; WATSON, 1976). Esta técnica consiste em particionar o elemento quadrático segundo a localização do ponto fonte. Se o ponto fonte está numa esquina do elemento então o elemento quadrático é particionado em dois triângulos (Figura 3.11a), e se o ponto fonte se colocar em um lado do elemento quadráticos então dito elemento é particionado em três sub-elementos (Figura 3.11b).



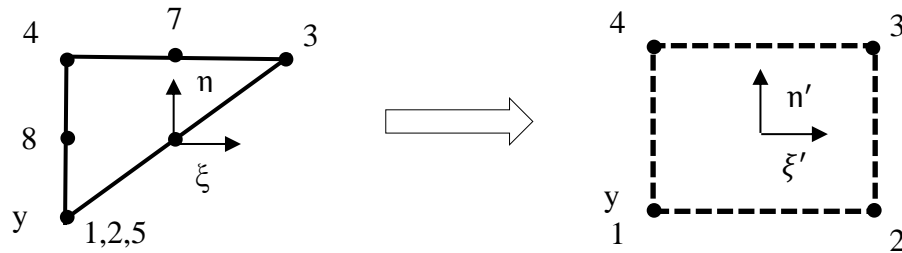
**Figura 3.11** Subdivisão do elemento para extração da singularidade

A técnica consiste basicamente no mapeamento de subelementos triangulares ao interior do espaço quadrilateral intrínseco. Como pode ser observado na Figura 3.12 os nós 1, 8 e 4 do elemento intrínseco são coincidentes com o ponto fonte  $Y$ . Como resultado deste procedimento de partição o jacobiano da transformação é de ordem  $r$ , onde  $r$  é a distância a partir do vértice  $Y$ . ver (GAO; DAVIES, 2002).



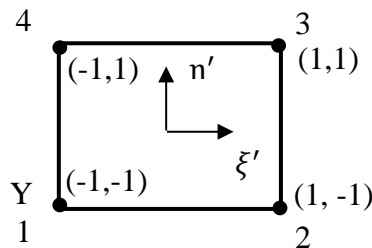
**Figura 3.12** Mapeamento de subelementos.

Como consequência, isto elimina a singularidade fraca e a integral pode ser avaliadas pela quadratura de Gauss normal. Devido a que a transformação a partir de um sistema coordenado intrínseco a um sub-elemento intrínseco coordenado é linear, é possível um procedimento alternativo. Neste caso, um conjunto de coordenadas intrínsecas  $\xi'$  e  $\eta'$  com a origem no centro do elemento é definido para cada sub-elemento (Figura 3.13).



**Figura 3.13** Subelementos intrínseco do sistema coordenado.

As funções de forma linear (Figura 3.14) agora são usadas para determinar as coordenadas intrínsecas para um ponto no novo sistema coordenado intrínseco, como segue:



**Figura 3.14** Elemento linear de 4 nós.

$$\begin{aligned} \xi(\xi', \eta') &= \sum_{n=1}^4 N'_n(\xi', \eta') \xi^n \\ \eta(\xi', \eta') &= \sum_{n=1}^4 N'_n(\xi', \eta') \eta^n \end{aligned} \tag{3-79}$$

Onde as funções de forma lineares são:

$$\begin{aligned}
N_1'(\xi', \eta') &= \frac{1}{4}(1 - \xi')(1 - \eta') \\
N_2'(\xi', \eta') &= \frac{1}{4}(1 + \xi')(1 - \eta') \\
N_3'(\xi', \eta') &= \frac{1}{4}(1 + \xi')(1 + \eta') \\
N_4'(\xi', \eta') &= \frac{1}{4}(1 - \xi')(1 + \eta')
\end{aligned} \tag{3-80}$$

Os parâmetros  $\xi^n$  e  $\eta^n$  são os valores nodais do sistema coordenado intrínseco original. Se o elemento é particionado em  $N_s$  subelementos a integral singular assume a forma

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e} f(Y, X) d\Gamma &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&= \sum_{s=1}^{N_s} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi'', \eta'') J(\xi'', \eta'') J_s(\xi', \eta') d\xi' d\eta'
\end{aligned} \tag{3-81}$$

Onde  $\xi''$  significa  $\xi(\xi', \eta')$ ,  $\eta''$  significa  $\eta(\xi', \eta')$ , e  $J_s(\xi', \eta')$  é o Jacobiano da transformação desde a origem até o novo sistema coordenado intrínseco.

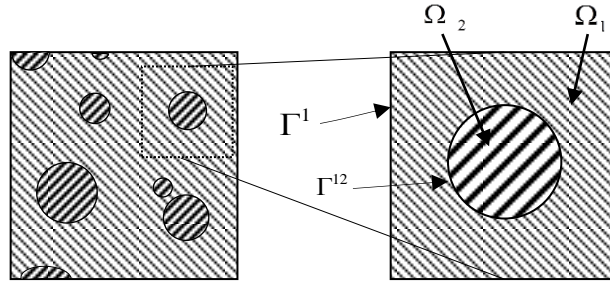
$$J_s(\xi', \eta') = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi', \eta')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi(\xi', \eta')}{\partial \xi'} & \frac{\partial \eta(\xi', \eta')}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial \xi(\xi', \eta')}{\partial \eta'} & \frac{\partial \eta(\xi', \eta')}{\partial \eta'} \end{vmatrix} \tag{3-82}$$

O jacobiano  $J_s(\xi', \eta')$  tende a zero na media  $O(r) \rightarrow 0$  desde que o sistema coordenado intrínseco original, dos nós associados com o ponto fonte P tomam o mesmo valor no subelemento transformado. Isto é, nós 1 e 2 na Figura 3.13 são coincidentes configuração.

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_2 = -1 \\
\eta_1 &= \eta_2 = -1
\end{aligned} \tag{3-83}$$

### 3.3.8. Formulação do MEC por sub-regiões

A continuação apresenta um estudo de MEC com sub-regiões. Conforme mostrado na Figura 3.15 as sub-regiões as quais representa as inclusões são circulares e são discretizadas por 4 elementos quadráticos descontínuos.



**Figura 3.15** Problema de sub-regiões.

A Tabela 3.2 resume os termos utilizados no sistema de MEC por sub-regiões.

**Tabela 3.2** Símbolos representados no sistema de MEC para sub-regiões.

| Símbolo          | Representação  |
|------------------|--|
| $\Gamma^i$       | Parte externa de contorno da zona. $\Omega^i$  |
| $\Gamma^{ij}$    | Contorno entre as zonas $\Omega^i$ e $\Omega^j$ .  |
| $u^{ij}, t^{ij}$ | Deslocamentos e trações nos nós em $\Gamma^{ij}$ como parte da zona $\Omega^i$ .                               |
| $H^i, G^i$       | Partes das matrizes de H e G obtidas da zona $\Omega^i$ os quais multiplica $u^i$ e $t^i$ respectivamente.     |
| $H^{ij}, G^{ij}$ | Partes das matrizes H e G obtidas para a zona $\Omega^i$ que multiplica $u^{ij}$ e $t^{ij}$ , respectivamente. |

Fonte: (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1987)

Onde, as equações matriciais para o problema serão:

Para a zona  $\Omega^1$ :

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & G^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^1 \\ t^{12} \end{Bmatrix} \quad (3-84)$$

Para a zona  $\Omega^2$ :

$$H^{21} u^{21} = G^{21} t^{21} \quad (3-85)$$

As condições de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamento sobre os contornos internos (interfases)  $\Gamma^{ij}$  são dadas pela Eq. (3-86).

$$\begin{aligned} u^{12} &= u^{21} \\ t^{12} &= -t^{21} \end{aligned} \quad (3-86)$$

Agora, o sistema de Eqs. (3-85) ficam da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} H^{21} & G^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{12} \\ t^{12} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3-87)$$

Logo, juntando as Eq.(3-85) com as Eq. (3-87) chega-se ao sistema apresentado na Eq. (3-88).

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^{12} & -G^{12} & 0 \\ 0 & H^{21} & G^{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^{12} \\ t^{12} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-88)$$

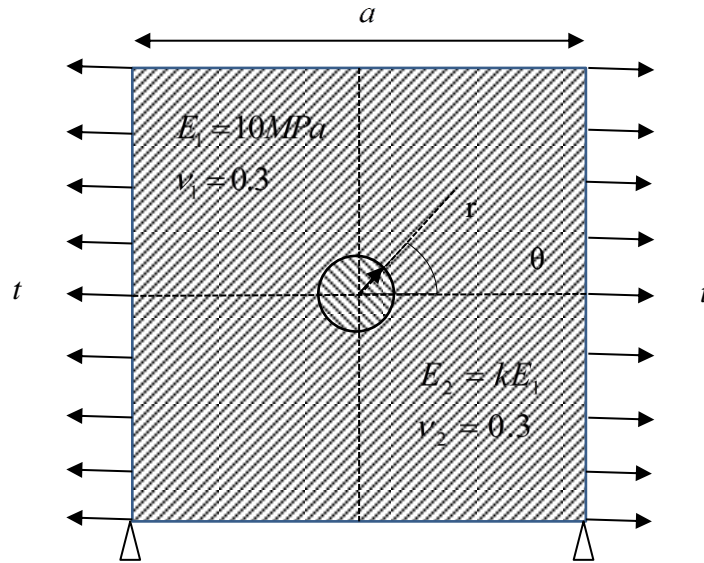
A Eq.(3-88) representa a formulação para sub-regiões. Para mais detalhes remetemos ao leitor aos trabalhos de (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1987).

### 3.4. Exemplos

Dois exemplos apresentados no trabalho de (YAO; KONG; ZHENG, 2003) foram reproduzidos com o objetivo de ilustrar e validar a formulação de sub-regiões. Alguns outros tratamentos analíticos são apresentados por (KASAYAPANAND, 2008; OGBONNA, 2015; SEZAWA; KÔGAKUHAKWI, 1931; SHIOYA, 1967; THIBODEAU; WOOD, 1938).

#### 3.4.1. Exemplo I: Placa com uma inclusão

O primeiro exemplo consiste numa chapa metálica no qual vai se estudar a influência de uma inclusão em seu interior, conforme Figura 3.16. As análises foram comparadas com FEM e com a solução analítica. A chapa está submetida à uma tensão constante em suas faces esquerda e direita, enquanto que as demais faces estão com condição de deslocamento restrito na direção  $y$ .

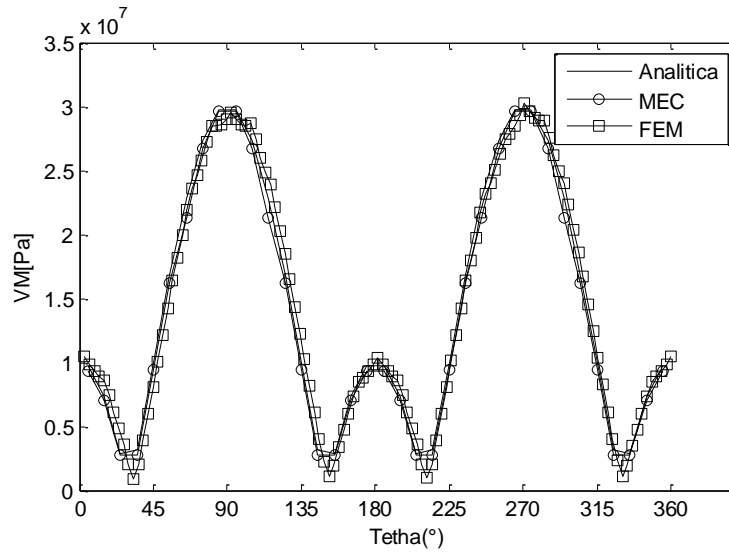


**Figura 3.16** Modelo de placa infinita com inclusão.

A solução analítica está dada pela Eq.(3-89).

$$|\sigma_{\theta}| = t|1 - 2 \cos 2\theta| \quad (3-89)$$

Os lados da placa têm dimensões de  $a = 100mm$ , raio da inclusão circular é de  $r = 2mm$  a força de tração  $t = 10MPa$ , e as propriedades dos materiais foram de:  $E_1 = 10MPa$   $\nu = 0.3$  para a matriz metálica e,  $E_2 = kE_1$   $\nu = 0.3$  para inclusão. Neste caso a variável  $k$  ( $k = 10^{-15}$ ) foi escolhida para simular um material de pouca rigidez de maneira a assemelhar uma matriz com um espaço vazio. O material da inclusão foi dividido em 4 elementos quadráticos descontínuos. Os resultados estão apresentados na Figura 3.17 onde se faz a comparação dos resultados analíticos com a curva simulada.

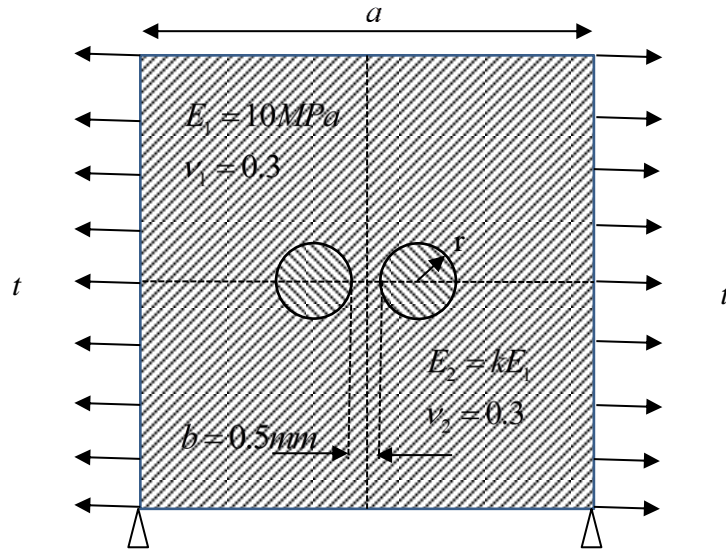


**Figura 3.17** Esforços circunferenciais  $|\sigma_{\theta}|$  da interface matriz-inclusão.

Neste caso, é evidente que o máximo esforço circunferencial tem sido em  $3t = 30MPa$  quando  $\theta$  é igual ao  $90^\circ$  ou  $270^\circ$ , e o valor mínimo foi de zero quando  $\theta$  foi igual ao  $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ$  ou  $330^\circ$ . Pode-se observar que os resultados numéricos estão de acordo aos resultados analíticos. Pode-se observar igualmente que a redução de elementos foi significativa com respeito aos trabalhos de (YAO; KONG; ZHENG, 2003). Os autores empregaram 10 elementos constantes na interfase da inclusão, e neste trabalho foram empregados apenas 4 elementos.

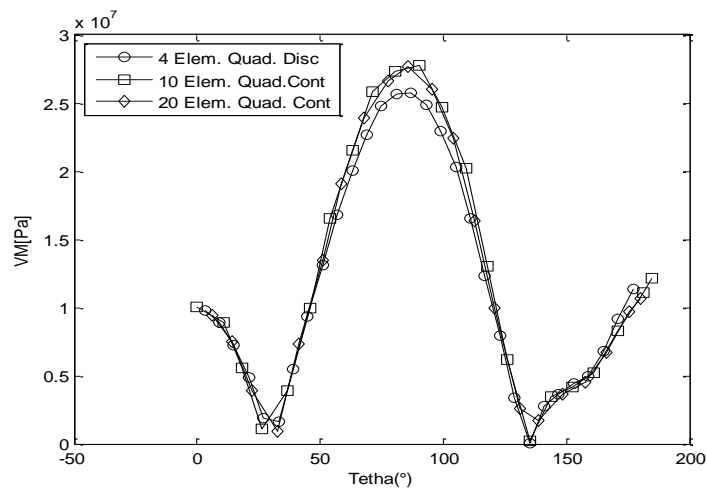
### 3.4.2. Exemplo II: Placa com duas inclusões

O segundo exemplo considera desta vez uma placa com duas inclusões, conforme o trabalho de (YAO; KONG; ZHENG, 2003), e apresentado na Figura 3.18.



**Figura 3.18** Placa com duas inclusões próximas ao centro.

Neste modelo computacional  $a = 100 \text{ mm}$ , o raio das duas inclusões foi de  $r = 5 \text{ mm}$ , o comprimento mínimo entre as duas inclusões foram de  $b = 0.5 \text{ mm}$ . As propriedades dos materiais foram de:  $E_1 = 10 \text{ MPa}$  e  $\nu_1 = 0.3$  para a matriz e de  $\nu_2 = 0.3$  para inclusão. O modelamento da inclusão foi feito supondo ele como se fossem espaços vazios, para o qual, se fez com que  $E_2$  fora demasiado pequeno ( $k = 10^{-15}$ ). Cada inclusão foi discretizada com 4 elementos quadráticos descontínuos. As tensões de von-Mises para um um quarto de inclusão é mostrada na Figura 3.19.



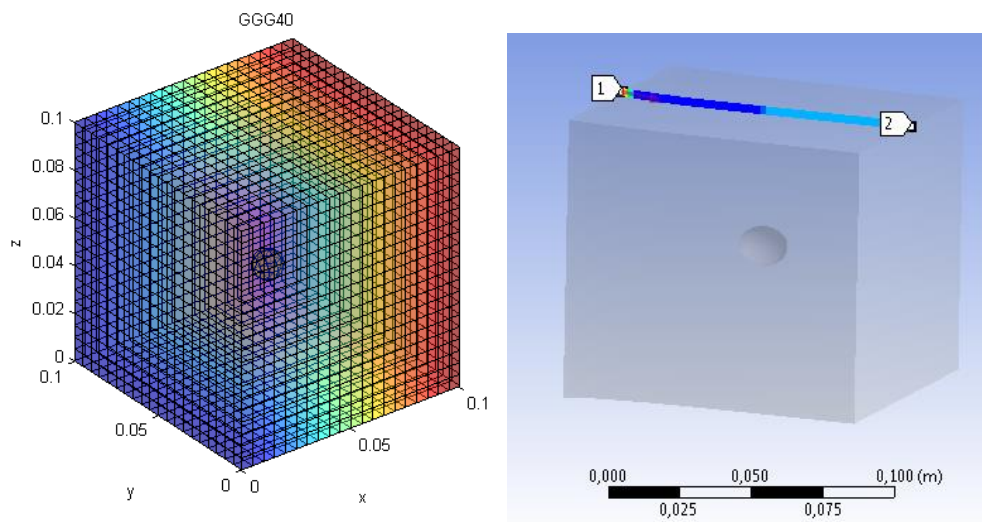
**Figura 3.19** Esforços de von-Mises para um quarto da matriz de inclusão usando MEC.



Pode-se observar que os esforços de von-Mises incrementam suavemente com os resultados obtidos com a solução analítica, mostrando um pequeno desfase em 180°. Isto pode ser devido à proximidade das inclusões o qual incrementa os fatores de concentração de tensões.

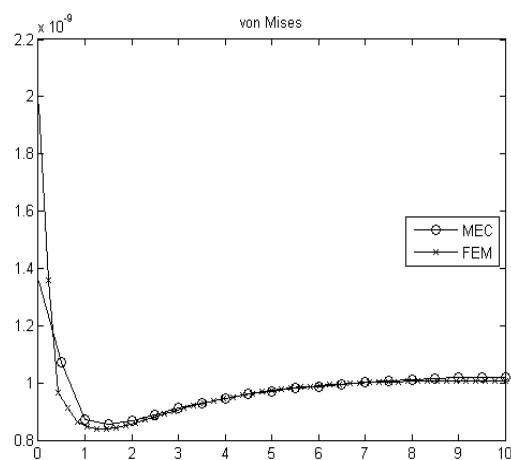
### 3.4.3. Exemplo III: EV 3D com uma inclusão

Neste caso o modelo desenvolvido foi comparando com o método dos elementos finitos segundo se apresenta na Figura 3.20, onde foi derivada as tensões de von Mises na superfície superior de cada um dos EV.



**Figura 3.20** EV para modelo tridimensional a ) MEC, b) FEM.

Os resultados da curva de convergência são apresentados na Figura 3.21.



**Figura 3.21** Resultados da esforço no contorno do EV.

Pode ser observado uma grande concordância entre os resultados com FEM e os obtidos com MEC. A diferença nas laterais da superfície, pode ser devido ao tamanho do elemento empregado em cada um dos modelos. Para o Modelo MEC os tamanhos dos elementos são relativamente maiores que os elementos empregados no FEM. Isto devido ao custo computacional que requer a geração de uma malha muito refinada do EV.

### **3.5. Conclusões**

Neste capítulo, foi apresentada a formulação do MEC por sub-regiões para problemas multi-domínios, onde os resultados foram validados com os dados analíticos e numéricos reportados previamente na literatura. Para isso, foi modelada uma placa com uma inclusão circular de propriedade mecânicas diferentes. As dimensões da inclusão com respeito à chapa foram escolhidas de tal modo de assemelhar uma inclusão no interior de uma chapa infinita. A razão imposta de  $k = E_1/E_2$  foi escolhida de maneira a ser suficientemente baixa para tentar aproximar a uma placa com um espaço vazio e validá-la assim com a solução analítica. Os resultados obtidos com MEC mostraram estar de acordo com a solução analítica. Igualmente, fez-se a comparação com FEM empregando um software comercial, onde se mostrou que o MEC foi mais eficiente pela simplicidade da malha e boa convergência a solução analítica, além de ter uma menor quantidade de elementos comparados com os trabalhos da literatura.

## **4. ENSAIOS EXPERIMENTAIS**

### **4.1. Introdução**

Neste capítulo é apresentada a análise experimental do FFN GGG-40. Os dados obtidos são empregados posteriormente para suporte e a validação do modelo numérico de homogeneização. Em primeiro lugar é apresentado um breve resumo dos diferentes tipos de ferros fundidos e suas diferenças com o ferro fundido nodular. Faz-se uma breve recompilação bibliográfica dos principais modelos numéricos desenvolvido para analisar esses tipos de materiais. Logo, é apresentado em forma sequencial, a metodologia experimental deste trabalho que consiste na caracterização microestrutural, medição dos tamanhos de grãos e determinação das propriedades mecânicas.

Foi realizada uma caracterização microestrutural mediante Microscopia óptica Laser (Confocal). A caracterização da forma dos nódulos de grafita foi feita mediante Microtomografia computadorizada por raios-X (Micro-CT). Para a determinação das propriedades mecânicas foram realizados testes de dureza, microdureza e ensaios de tração-deformação. A composição química foi determinada por Microscopia Eletrônica de Varredura (MEV) mediante a técnica de difração de raios X (DRX). Com a informação do tamanho do nódulo médio da grafita, nodularidade, módulo de rigidez e composição química do material foi possível a avaliação dos diferentes modelos numéricos desenvolvidos o qual será apresentado nos capítulos subsequentes.

### **4.2. Ferros Fundidos**

O ferro fundido é um dos materiais mais antigos desenvolvidos pelo homem. Se tem registros de partes na China desde o século VI a.C , onde os primeiros ferros fabricados foram de cinza maleáveis. Porém, o ferro fundido nodular (também conhecido como ferro dúctil) foi desenvolvido até 1948 (BRADLEY; SRINIVASAN, 1990). Neste ferro, a alta concentração de carbono é responsável pelas propriedades mecânicas e facilidade da manufatura, também é responsável pela degradação da ductilidade e a tenacidade à fratura. O carbono, neste material está presente principalmente como grafita esferoidal também chamado de grafita nodular. Esta configuração da grafita possibilita, em muitos casos, o

aparecimento de fraturas quando este tipo de material é submetido á níveis relativamente baixos de esforços.

Uma das características mais importantes nos ferros fundidos é o tipo de matriz ferrítica a qual varia dependendo dos processos de fabricação e dos tratamentos térmicos posteriores. Dependendo destes fatores, também é possível a determinação do tipo de inclusões o qual corresponde à acumulação do conteúdo de carbono que pode se apresentar como lamelas, agulhas, nódulos, etc.

#### **4.2.1. Tipos de matriz**

Dependendo da composição do ferro e dos tratamentos térmicos depois do processo de fabricação, se pode conseguir uma variedade de matrizes metálicas.

##### **4.2.1.a. Matriz ferrítica**

A matriz ferrítica é obtida geralmente através de um processo de austemperado do material depois da fundição [Normas ASTM 897M e EN1564]. Com isto, se consegue uma formação completa de ferrita ao interior da microestrutura já que durante a transformação bainítica que acontece na austêmpera, a austenita tem tempo suficiente para se transformar em ferrita. Para obter uma ferrita fina é necessário inserir uma quantidade suficiente de silício durante o processo de fundição. Isto ajuda a nucleação de partículas de carbono durante o resfriamento e uma boa consistência com a fase ferrítica. Para obter uma completa estrutura ferrítica no caso do ferro fundido, é necessário resfriar o ferro numa velocidade de resfriamento relativamente lento.

A ferritização pós-solidificação da matriz pode ser feita de duas formas: uma é mantendo constante a mistura acima da temperatura crítica (chamada um recozimento crítico) por um curto tempo ou mantendo a mistura baixo a temperatura crítica durante um longo tempo (chamado um recozimento subcrítico). Quando estão presente na matriz a ferrita e a perlita, a ferrita usualmente está rodeando a grafita.

##### **4.2.1.b. Matriz perlítica**

A estrutura perlítica se forma quando a taxa de solidificação e a subsequente taxa de resfriamento não dão a oportunidade para o carbono formar em uma estrutura

exclusivamente grafitica. Uma matriz perlítica no ferro fundido usualmente conte menos que 0.8% do carbono. A rápida solidificação e as taxas de resfriamento no processo posterior à solidificação favorecem a formação de perlita ao invés de ferrita na matriz devido à alta velocidade de resfriamento que ocasiona uma limitada difusão de carbono na matriz da solução.

#### 4.2.1.c. Matrizes bainíticas e martensita temperada.

Uma microestrutura de bainita pode ser produzida por aquecimento no interior de uma salmoeira quente e desenvolvendo um posterior processo de austemperado. A microestructura bainítica pode ser também produzida a partir da fundição do ferro adicionando pequenas quantidades de níquel e molibdênio. A microestrutura da martensita temperada na fundição do ferro é produzida com um tratamento térmico similar ao usado para os aços, incluindo a revenido e a têmpera.

#### 4.2.1.d. Carbonetos primários

As rápidas taxas de resfriamento que acontecem perto do final da solidificação durante os tratamentos térmicos podem gerar carbono na forma de carbonos primários que poderia ter solidificado em grafita. Estes carbonos estão geralmente mais compactados que os carbonos nas estruturas laminares encontrados na perlita. Isso causa um detrimento das propriedades mecânicas, especialmente a usinabilidade. Isto pode geralmente ser eliminado pela austenitização seguida por um resfriamento lento.

### 4.2.2. Tipos de Ferro fundido

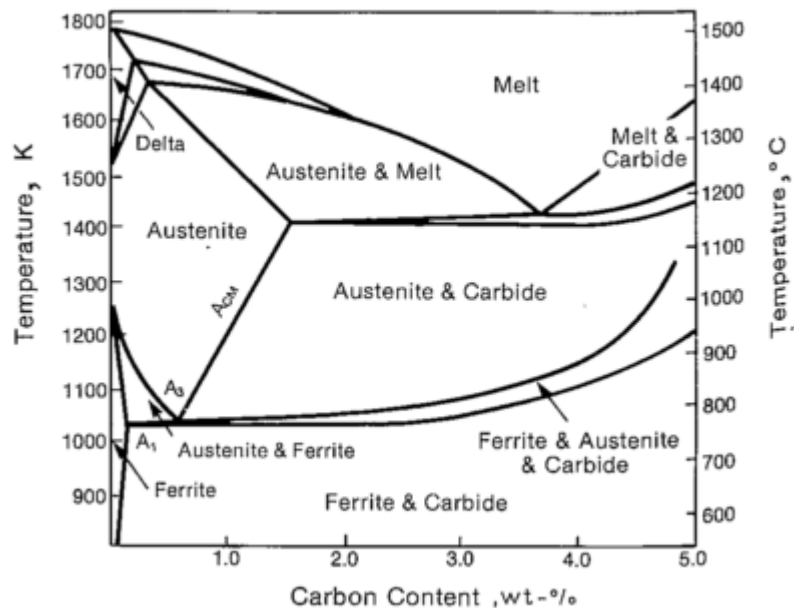
Existem 5 tipos de ferros produzidos comercialmente hoje em dia: os quais são: branco, cinza, maleáveis, dúctil ou também nodular. Os componentes típicos destas ligas são apresentados na Tabela 4.1.

**Tabela 4.1** Faixa de composições para a Ferros típicos (% peso).

| <b>Tipo</b>      | <b>C</b> | <b>Si</b> | <b>Mn</b> | <b>S</b>  | <b>P</b> |
|------------------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| Branco           | 1.8-3.6  | 0.5-1.9   | 0.25-0.8  | 0.06-0.2  | 0.06-0.2 |
| Maleável         | 2.2-2.9  | 0.9-1.0   | 0.15-1.2  | 0.02-0.2  | 0.02-1.0 |
| Cinza            | 2.5-4.0  | 1.0-3.0   | 0.2-1.0   | 0.02-0.25 | 0.02-1.0 |
| Dúctil           | 3.0-4.0  | 1.8-2.8   | 0.1-1.0   | 0.01-0.03 | 0.01-0.1 |
| Grafita compacta | 2.5-4.0  | 1.0-3.0   | 0.2-1.0   | 0.01-0.03 | 0.01-0.1 |

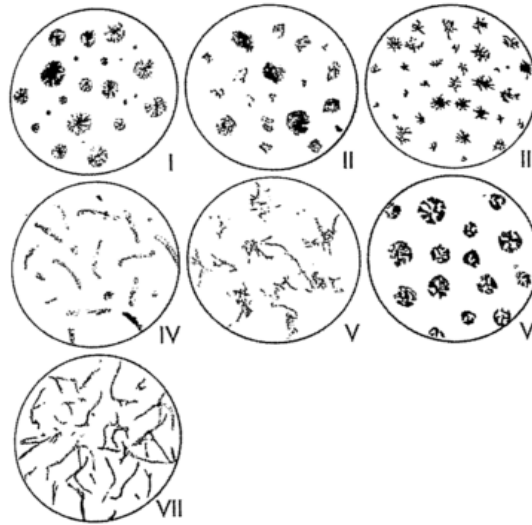
Fonte: (BRADLEY; SRINIVASAN, 1990).

A grafita no ferro pode ser apresentar de algumas formas tais como agulhas, “*pop corn*” globulados, esferas (nodular) ou tubos delgados. A morfologia da grafita é usada como base para a classificação dos ferros. O ferro branco se dá quando a composição do silício é muito baixa e/ou quando é efetuado um resfriamento muito rápido durante o tratamento térmico posterior à fundição, o qual faz com que os carbonos reacionarem com o ferro e forme a cementita (FeC) (ao invés de grafita, que é a fase de equilíbrio). Dos diagramas de fase de Fe-Fe e C-Si é apresentado na Figura 4.1 onde é possível evidenciar o resultado final do tipo de ferro dependendo da quantidade de carbono e tratamento térmico posterior.



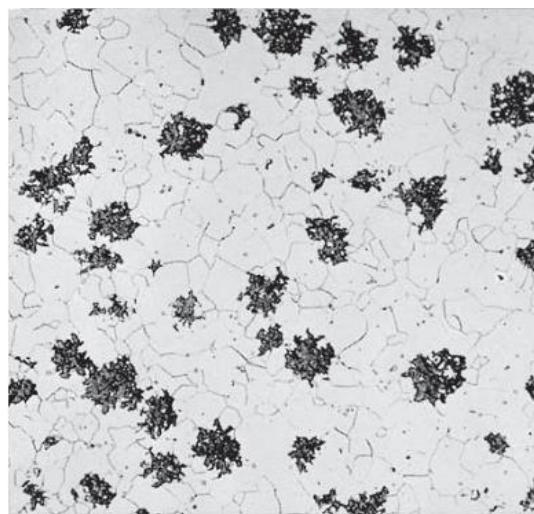
**Figura 4.1** Diagrama de fase Ferro-Ferro, Carbono-Silício.  
 Fonte: (BRADLEY; SRINIVASAN, 1990).

Pode-se assumir uma variedade de formas as quais dependem da composição, da taxa de resfriamento, e do tratamento da mistura (tipos de inoculantes adicionados). Os vários tipos de grafita os quais podem formar no ferro têm sido classificados pela American Society para ensaios e materiais (Especificações na A247) e são apresentados esquematicamente na Figura 4.2.



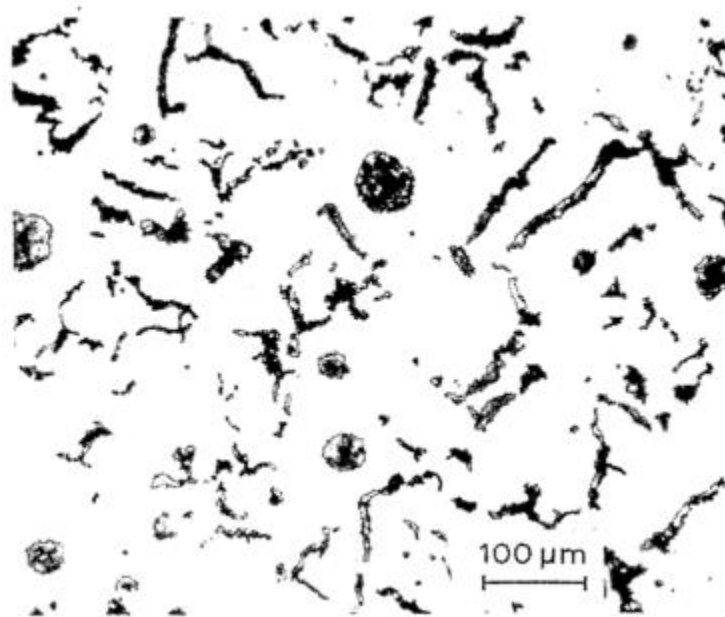
**Figura 4.2** Sete tipos de grafita estabelecidas pela especificações da ASTM A247.  
 Fonte: (BRADLEY; SRINIVASAN, 1990).

O tipo I de grafita é essencialmente esférica e é a usual forma que acontecem nos ferros dúcteis. O tipo II, a grafita é degenerada a partir da forma do tipo I, apresentado algumas de uma forma não esférica, e como produto disso, se obtêm um ferro nodular com propriedades mecânicas menos dúcteis e menos desejáveis. O tipo III é grafita nodular, mas com uma forma um pouco e irregular, apresentando-se como uma forma de “*pop corn*”. Esta forma é apresentada nos ferros maleáveis os quais são formados a partir ferro branco recosido. A microestrutura de um ferro maleável é apresentada na Figura 4.3.



**Figura 4.3** Microestrutura do ferro maleável, atacada com 4% de picral.  
 Fonte: (BRADLEY; SRINIVASAN, 1990).

Onde a matriz branca é ferrita e a parte obscura é a segunda fase a qual é grafita. O tipo IV da Figura 4.2 é o tipo de grafita compactada o qual tem os constituintes estruturais da grafita a qual forma tubulares muito longas. A microestrutura de ferro contém a grafita compactada é apresentada na figura Figura 4.4.



**Figura 4.4** Microestrutura da grafita compactada do ferro fundido não-tratado.  
Fonte: (BRADLEY; SRINIVASAN, 1990).

As formas das grafitas observadas nos tipos V e nos tipos VI da Figura 4.2 são algumas vezes observadas no ferros dúcteis onde são considerados como grafitas degeneradas, e são as que apresentam as melhores propriedades mecânicas. O tipo de grafita VII é em forma de agulhas e acontecem nos ferros cinzas.

#### **4.2.3. Ferro Fundido Nodular (FFN)**

O ferro fundido nodular oferece grande Usinabilidade ao ter uma ductilidade baixa com respeito aos outros ferros fundidos. A forma e o tamanho da grafita afetam enormemente a resistência do material, quanto mais grande o nódulo de grafita, menos resistência terá (TONG et al., 2009). Hoje em dia, o FFN tem uma significativa preferencias entre todos os tipos de ferros fundidos. Os FFNs são similares aos aços desde o ponto de vista das propriedades mecânicas e também são os mais comumente usados na engenharia. Ao mesmo tempo, eles são similares às fundições de ferro desde o ponto de



vista das propriedades físicas e químicas. Os FFNs mais preferidos na indústria são os GGG40, GGG50, GGG60 e GGG70 (Tabela 4.2).

**Tabela 4.2** microestruturas e composição química do FFN.

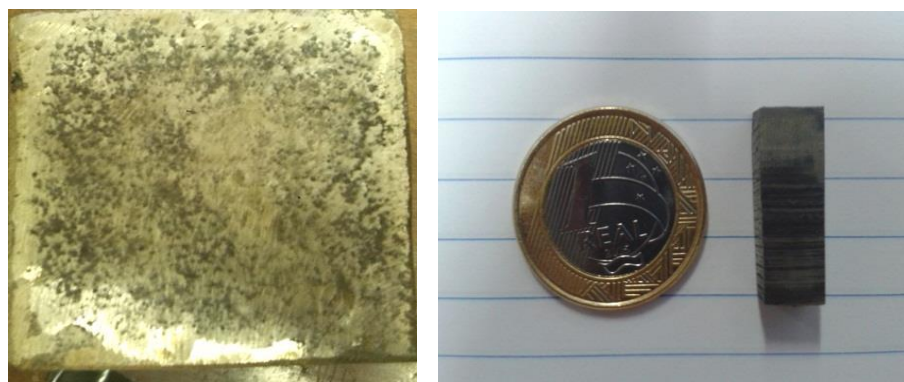
|                  |           |       |       |       |           |
|------------------|-----------|-------|-------|-------|-----------|
| Tipo de Material | GGG40     | GGG50 | GGG60 | GGG70 | GGG80     |
| Micro-Estrutura  | Ferrítica |       |       |       | Perlítica |

Fonte: (KARAMAN; ÇETİNARSLAN, 2010)

Devido às suas propriedades atraentes, como a alta capacidade de resistência, excelente resistência ao desgaste e custo relativamente baixo em comparação com aços de liga com propriedades mecânicas equivalentes, o FFN é amplamente utilizado em componentes automotivos, como virabrequim e rodízios, indústria ferroviária e automobilista em geral (QI et al., 2009); (ROULA; KOSNIKOV, 2008) investigaram a distribuição e o efeito da grafita nos diferentes elementos modularizastes e mostraram que manganês não afetava na forma final da grafita no FFN, mas sim o silício e o magnésio. Eles mostraram o efeito nodularizante do manganês devido ao efeito alcalino do mesmo, desse elemento na nodulação de grafita (Roula e Kosnikov, 2008).

### 4.3. Análises Experimental

Como foi comentado anteriormente, o FFN tem sido amplamente utilizado na indústria (Automotiva e ferroviária), devido à sua ampla aplicabilidade, a sua economia no processo de fabricação e as suas boas propriedades mecânicas (PANNEERSELVAM et al., 2015); (CAKIR et al., 2005). A Figura 4.5 ilustra uma amostra de FFN GGG-40, o qual é objeto de estudo neste trabalho.



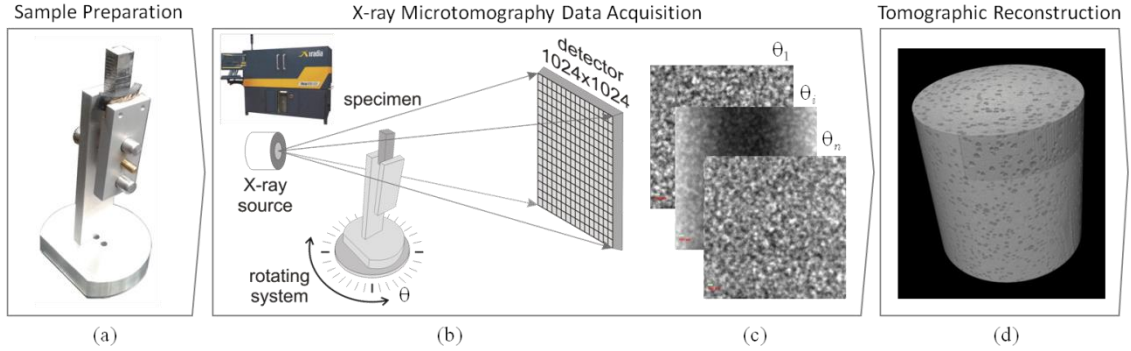
**Figura 4.5** Ferro Fundido Nodular FFN GGG-40.

O metal da matriz geralmente consiste de ferrita, perlita ou a formação de ambos. As propriedades do FFN são devidas a microestrutura da matriz obtida por tratamento térmico chamado *Austempering* (ou austêmpera) e aos microcomponentes (PUNDALE; ROGERS; NADKARNI, 1998); (COCCO; IACOVIELLO; CAVALLINI, 2010; ORTIZ; CISILINO; OTEGUI, 2001).

#### **4.3.1. Microtomografia Computarizada por Raios X (Micro-CT)**

O uso de microtomografia computadorizada por raio-X (Micro-CT) tem sido muito utilizada nos últimos anos. Para validar a metodologia proposta, foram realizadas aquisições de imagens digitais por micro-CT, passando pela preparação de amostras, aquisição de dados, reconstrução, segmentação, geração de malha. As amostras foram escaneadas usando um escâner micro-CT de alta resolução ZEISS X radial 510 Versa, onde o processo é esquematizado na Figura 4.6.

A radiografia é uma técnica de imagem que utiliza raios X para revelar a estrutura interna do material e sua composição. Nesta técnica, que é essencialmente 2-D, a amostra a ser fotografada é posicionada entre uma fonte de raios X e um detector, tal como esquematicamente representado em Figura 4.6 (b). A atenuação da energia que é transmitida através da amostra e registrada pelo detector são proporcionais à densidade da amostra. Em geral, as partes mais densas absorverão mais energia. Portanto, a energia registrada pelo detector reflete a distribuição espacial de densidade da amostra. A tomografia, que é essencialmente 3-D, baseia-se no corte radiográfico repetitivo da amostra, em que os radiogramas são adquiridos sequencialmente enquanto a amostra (ou o sistema de fonte-detector) é girada de forma incremental, conforme indicado esquematicamente na Figura 4.6(b) e c). A partir da coleção dos radiogramas adquiridos, as imagens transversais da amostra são computadas usando algoritmos de reconstrução tomográfica, produzindo uma pilha de fatias horizontais de imagem em escala de cinza em bruto 2-D. O objeto digital 3-D pode ser visualizado a partir da pilha de imagens em escala de cinza 2-D, conforme indicado na Figura 4.6 (d). Em Micro-CT, as dimensões dos voxels reconstruídos (isto é, um elemento de pixel volumétrico) estão, em geral, na gama de micrómetros.



**Figura 4.6** Esquema ilustrativo do processo de aquisição CT.  
a) preparação das amostras, (b) preparação do sistema de aquisição de imagens no Micro-CT, (c) conjunto da radiografia das projeções, e (d) reconstrução do volume.

Com as reconstruções tomográficas foi possível determinar tanto a geometria para uma fatia qualquer em 2D como a geometria tridimensional dos nódulos de grafita do FFN GGG-40 para um EVR. Com uma das fatias em 2D foi determinada o parâmetro característico de nodularidade a partir de uma análise estatística de razão entre o tamanho médio dos nódulos de grafita e a distância entre centro entre dois nódulos arbitrários. Eq. (4-1):

$$P_c = \frac{r_{med}}{d_{med}} \quad (4-1)$$

Onde  $r_{med}$  esta dado pela Eq. (4-2) e

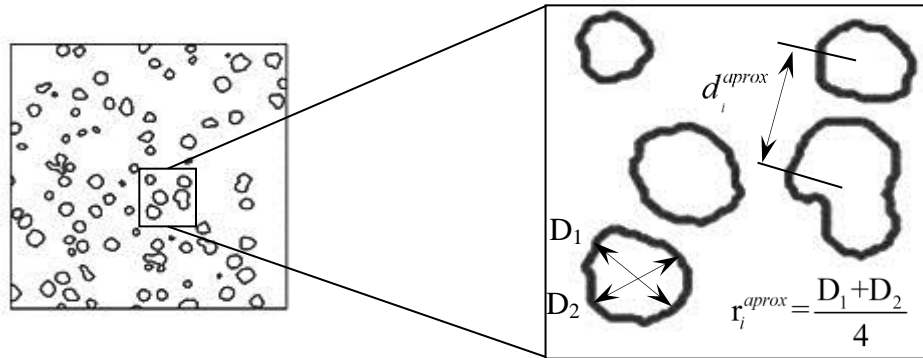
$$r_{medio} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i^{approx}}{n} \quad (4-2)$$

E  $d_{med}$  esta dada pela Eq. (4-3)

$$d_{medio} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^{approx}}{n} \quad (4-3)$$

Nas Eq.(4-2) e (4-3)  $n$  é número de nódulos do EVR (Figura 4.7a),  $r_i^{approx}$  é o raio aproximado do  $i$ -esimo nódulo de grafita e  $d_i^{approx}$  é a distância aproximada dos centros de um nódulo de grafita arbitrária e o centro aproximado da grafita mais próxima (Figura

4.7b). Estes valores de  $r_i^{aprox}$  e  $d_i^{aprox}$  chamam-se “aproximado” devido a não ter uma possibilidade de determinar o centro geométrico dos nódulos de grafita de maneira acertiva.

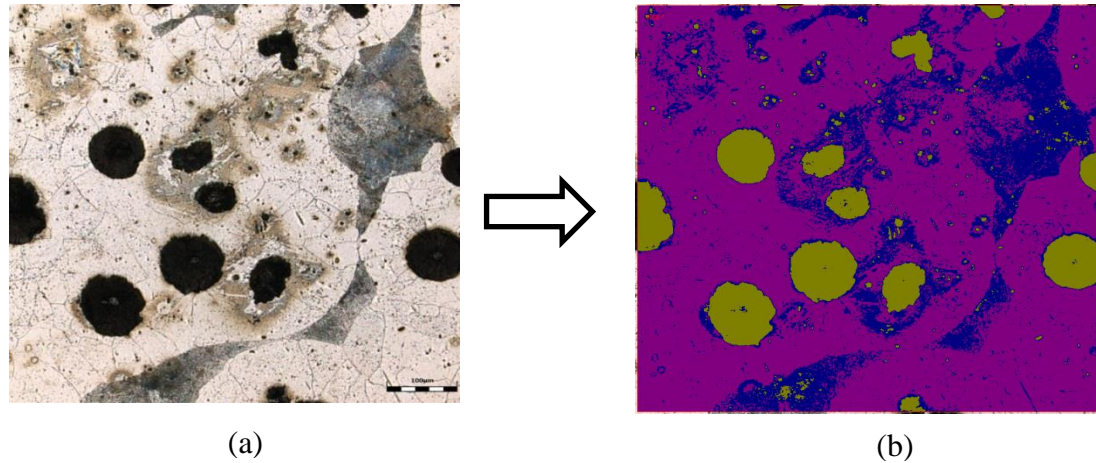


**Figura 4.7** Determinação do parâmetro característico r/d para o GGG-40.

#### 4.3.2. Microestrutura morfológica do FFN GGG-40

A análise de microscopia laser foi utilizada para caracterizar a morfologia dos nódulos de grafita e suas distribuições espaciais. As micrografias foram binarizadas utilizando uma Olympus LEXT OLS4100 para determinar a quantidade de nódulos de grafita e o tamanho médio das mesmas, (Figura 4.8).

Para a determinação do tamanho de nódulos foi seguido o procedimento indicado pela norma ASTM-E112-96 (ASTM INTERNATIONAL, 2004) onde o sistema Confocal estima o número do tamanho de grão (G) -ou *Grain Size Number*- e baseado em correlações, tabuladas na mesma norma, se estima o diâmetro médio dos nódulos de grafita.



**Figura 4.8** Micrografias obtidas por microscopia Confocal.  
a) micrograma de uma seção superficial do GGG-40, b) micrografia binarizada para a contagem tanto dos nódulos como para a determinação do tamanho meio.

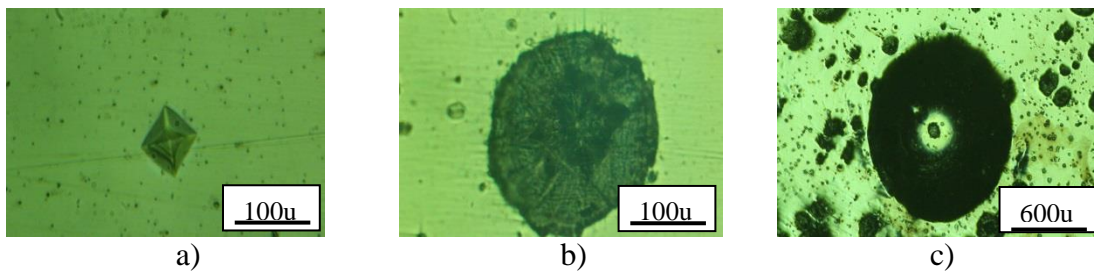
#### **4.3.3. Testes de Dureza e Micro-dureza: Metodologia da “Deformação Elástica Falsa”**

O teste de microdureza HV foi realizado para medir a dureza tanto da matriz ferrítica quanto do nódulo de grafita. Os experimentos foram conduzidos de acordo com as especificações da ASTM E92-16 (ASTM INTERNATIONAL, 2016). A metodologia para determinar propriedades mecânicas a partir de ensaios de dureza foi desenvolvida por (OLIVER; PHARR, 1992, 2004). Esta metodologia foi usada para encontrar o módulo de Young ( $E$ ) para ambas as fases: matriz e inclusão. Para o presente trabalho, as medições foram realizadas com um sistema de microdureza Vickers (VEYTSKIN et al., 2017) FM 700 dual equipado com uma câmera de 100X.

A dureza média do volume ferrítico foi determinada pelo teste de dureza Brinell (HB). Os experimentos foram conduzidos de acordo com as especificações da ASTM E92-16 (ASTM INTERNATIONAL, 2012) E desenvolvido em um testador semi-automático de dureza Brinell ZHU250. Posteriormente, a resistência à tração do GGG-40 foi determinada através dos dados padronizados Standard entre a dureza HB e a resistência à tração.

Figura 4.9 a) e Figura 4.9 b) Descrevem as marcas de indentação para os testes de microdureza e dureza. O teste HB é apresentado de acordo Figura 4.9 c) Para este caso o

entalhe esférico é maior do que o indentador do HV, conseqüentemente o valor da dureza indica somente a dureza o material sem diferenciação da gráfica com a matriz ferrítica.



**Figura 4.9** Ensaios de dureza e Microdureza.

a) dureza (HV) na matriz ferrítica, b) dureza HV na inclusão de grafita, c) dureza HB

Para utilizar o modelo matemático desenvolvido por (OLIVER; PHARR, 1992, 2004) é preciso identificar os parâmetros geométricos da impressão da superfície entalhada, então a partir da curva de “carga-deslocamento” se pode obter o valor do módulo elásticos. Neste caso, como não se dispõe de curvas “Carga-deslocamento” se faz a suposição de que a deformação Plástica sofrida pelo material é igual á uma deformação Elástica “Falsa” a qual sera usada para estimar o módulo de Young usando as equações de Oliver e Pharr. Eq.(4-4).

$$E = \frac{1 - \nu^2}{\frac{1}{E_r} - \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}} \quad (4-4)$$

Onde ( $\nu_i$ ) é a razão de Poisson do indentador, ( $\nu$ ) o módulo de Poisson da amostra  $i$ , ( $E_i$ ) é o módulo de Young do indentador, ( $E_r$ ) é o módulo “reduzido” de Young da amostra e ( $E$ ) é o módulo de Young da amostra. Os valores dos testes são apresentados na Tabela 4.3.

**Tabela 4.3** Parâmetros usados para estimar o módulo de Young.

| Parâmetro | Valor    |
|-----------|----------|
| $\nu$     | 0.30     |
| $\nu_i$   | 0.07     |
| $E_i$     | 1411 GPa |

#### 4.3.4. Ensaio de tração

Foram realizados ensaios de tração nas amostras do FFN GGG-40 em forma de blocos obtidos a partir da usinagem do FFN GGG-40 de acordo com as especificações da norma (ASTM INTERNATIONAL, 2010) utilizando uma máquina de teste Instron 8801 ( $\pm 100$  kN (2248 lbs)) com um extensômetro de medição dinâmico 2620-601 Instron. O módulo de Young, o limite de escoamento, e à resistência última a tração foram extraído a partir da curva de tensão-deformação.

#### 4.3.5. Caracterização Química

A composição química do FFN GGG-40 foi determinada pela técnica de difração de Raios X no Microscópio Electrónico de Varredura (MEV) os dados foram comparados com os dados do fabricante, *Metalrens Ltd.* A composição química, fornecida pelo fabricante é mostrada Na Tabela 4.4

**Tabela 4.4** A composição química do FFN GGG-40 (Percentage em peso%).

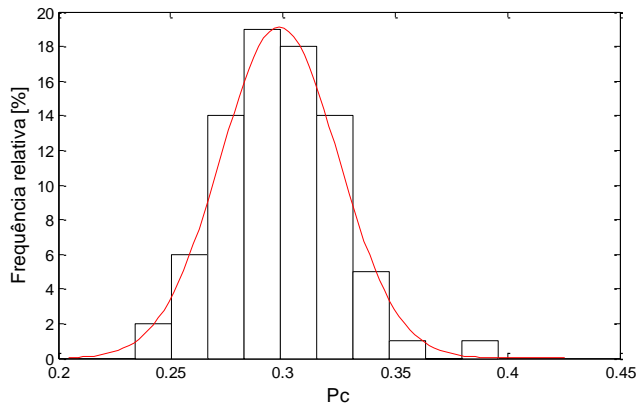
| C   | Si   | Mg   | S    | P    | Fe    |
|-----|------|------|------|------|-------|
| 3.6 | 2.45 | 0.33 | 0.02 | 0.08 | 93.52 |

Para os ferros fundidos nodulares a formação da grafita nodular, durante o processo de fundição, abedece a elementos adicionais como o silício e o magnésio os quais são adicionados para alterar o mecanismo de solidificação. Estes elementos são responsáveis pela forma esférica dos nódulos. O FFN é formado por aproximadamente 7% de nódulos de grafita e 93% de matriz ferrítica-perlítica, em peso.

### 4.4. Resultados

#### 4.4.1. Microtomografia Computarizada por Raios X (Micro-CT)

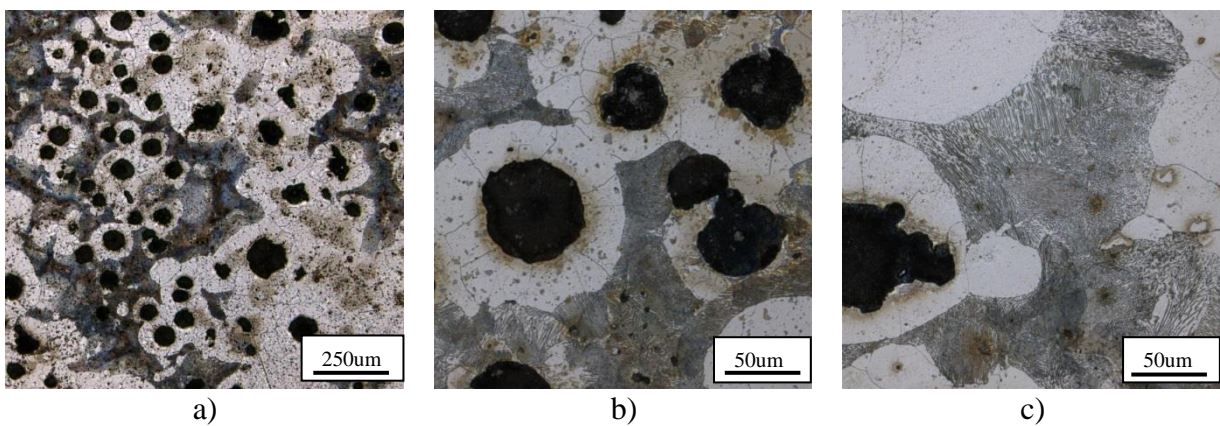
Os resultados para  $r/d$  são apresentados no histograma de acordo com a Figura 4.10. O parâmetro característico foi  $P_c = 0,29 \pm 0,01$ , O erro foi significativamente baixo para a representação do modelo do FFN. (ORTIZ; CISILINO; OTEGUI, 2001) Também realizou uma análise estatística para um FFN e obteve um parâmetro característico de 0,25. Uma explicação razoável sobre a diferença entre os parâmetros pode estar no processo de fabricação o que afeta a nodularidade e a densidade da grafita nucleada.



**Figura 4.10** Parâmetro característico ( $P_c$ ) do FFN GGG-40.

#### 4.4.2. Microestrutura Morfológica do FFN GGG-40

A Figura 4.11 mostra a microestrutura da amostra GGG-40, após um ataque químico com Nital a 3%. Na Figura 4.11 a) é apresentada a estrutura ferrítico-perlítica do FFN, onde pode ser observada uma forma esférica denominada estruturas "olho de touros"; esta configuração é conseguida por certos elementos de liga como Magnésio, Silício e outros elementos em pequenas quantidades. Neste material a ferrita pode ser encontrada ao redor das partículas de grafita para configurar a estrutura chamada de "Olhos de Touro". Figura 4.11 b) Mostra a estrutura da matriz com os "olhos de touro" e a mistura de perlita lamelar e uma estrutura de matriz ferrítica.



**Figura 4.11** Estrutura metalográfica do FFN GGG-40.  
a) Estrutura ferrítico-perlítica, b) Configuração do “Olhos de Touro”, c) e ferrita perlita lamelar.

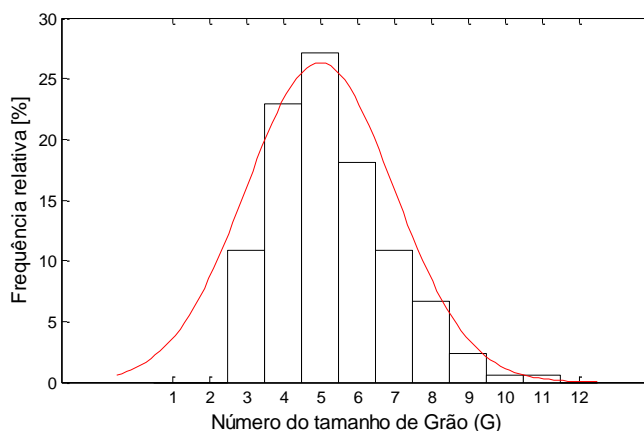


Na Figura 4.11 c) observa-se que a bainita foi decomposta para definir perlita lamelar e a ferrita. Nesta, a presença de perlita é ocasionada por uma taxa de resfriamento rápido durante o processo de fabricação (BRADLEY; SRINIVASAN, 1990).

Na Tabela 4.5. são resumidas os resultados da análises micrográficas binarizada para Número de Tamanho de Grão  $G_z = 4.62$  (ASTM INTERNATIONAL, 2004). O tamanho médio nodular da contagem estatística é apresentado na Figura 4.12.

**Tabela 4.5** Parâmetros Experimentais obtidos por o sistema confocal.

| Amostragem                              |                          |                                   |
|---|--------------------------|-----------------------------------|
| Norma padronizada                       | ASTM                     | E112-96(ASTM INTERNATIONAL, 2004) |
| ASTM Número do tamanho de Grão $G_z$    | 4.62                     |                                   |
| Área média do grão [ $\mu\text{m}^2$ ]  | 5233.55                  |                                   |
| Número total de grãos                   | 166                      |                                   |
| Área total de grãos [ $\mu\text{m}^2$ ] | 868768.75                |                                   |
| Área analisada [ $\text{mm}^2$ ]        | 6.55                     |                                   |
| Elongação                               | 0.99                     |                                   |
| Referência                              | ASTM Grain Size Number G |                                   |



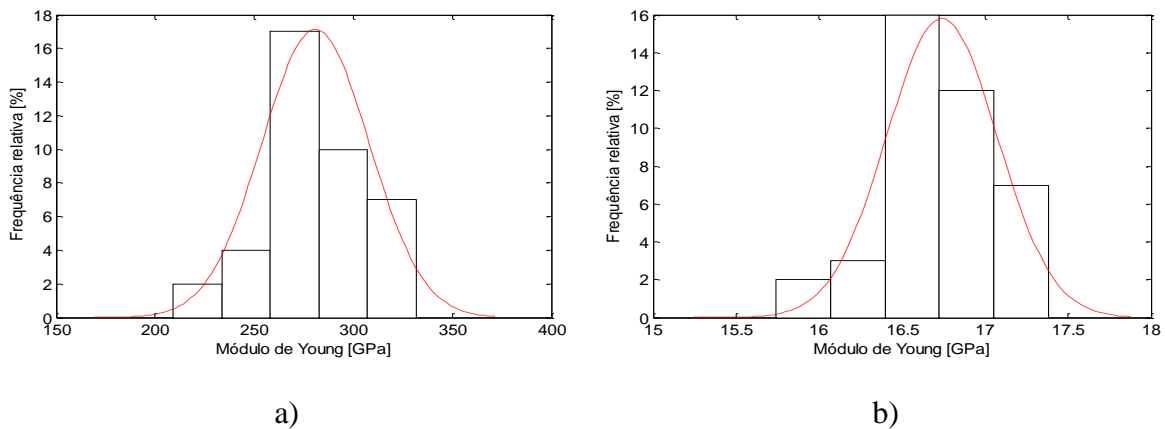
**Figura 4.12** Número do Tamanho de Grão ( $G_z$ ) para o GGG-40.

Segundo a Figura 4.12 o tamanho do grafita nodular indica um  $G_z$  em torno de 5. Uma tabela incorporada na ASTM E 112-96 (ASTM INTERNATIONAL, 2004) apresenta uma relação entre o número de tamanho do grão ( $G_z$ ) e o diâmetro médio. Para este estudo, o diâmetro médio é de cerca de  $60\mu\text{m}$ , mostrando uma grande concordância com as

normas. (D.S H, 1998; ENDO; YANASE, 2014; HÜTTER; ZYBELL; KUNA, 2015; KONEČNÁ et al., 2013; SAHIN; ERDOGAN; KILICLI, 2007).

#### 4.4.3. Testes de Dureza e Micro-dureza: Metodología da “Deformação Elástica Falsa”

A partir dos dados de dureza Vickers foi determinado o módulo de Young efetivo e os resultados estatísticos são apresentados nos histogramas Figura 4.13 a) e Figura 4.13 b).



**Figura 4.13** Histogramas com os resultados do módulo de Young.  
a) Matriz b) nódulos.

O valor médio e desvio padrão para a matriz e o nódulo são apresentados como Eq.(4-5) e Eq.(4-6), respectivamente.

$$E_{Matriz} = 271 \pm 20 GPa \quad (4-5)$$

$$E_{Nodulo} = 16.5 \pm 0.5 GPa \quad (4-6)$$

Vale destacar uma diferença significativa entre o módulo de Young da matriz com respeito a dos nódulos de grafita. Os nódulos de grafita são mais macios do que a matriz. Alguns estudos relativos à determinação do módulo de Young para o FFN podem ser encontrados em (PUNDALE; ROGERS; NADKARNI, 1998). De acordo com estes autores em geral, o FFN apresenta um módulo de Young em torno de 10-15% menor do que do aço. Por nanoindentação de ferros dúcteis, (DIERICKX et al., 1997) encontraram um valor para o módulo de Young da grafita de  $15 \pm 5 GPa$ . (SPICER et al., 2015) através da técnica

ultrassônica do laser para determinaram os módulos elásticos da grafita e encontraram valores na faixa de 6.9 GPa e 13.5GPa por uma série de grafitas.

Diferentes autores (DRYDEN; DEAKIN; PURDY, 1987); (SPEICH; SCHWOEBLE; KAPADIA, 1980) avaliaram o módulo da grafita e descobriram valores entre 8 a 11GPa. Testes de microindentação foram empregados por (FERNANDINO; CISILINO; BOERI, 2015) para avaliar o módulo de Young de um FFN. Os Autores identificaram duas zonas diferentes: a primeira conhecida como *Primeira Zona de Resfriamento* (FTF- First To Freeze zone) e outra conhecida como *Última Zona de Resfriamento* (LTF- Last To Freeze zones), devido ao fenômeno da taxa de resfriamento. Eles encontraram um valor de 235GPa para o FTF e 255GPa para a zona LTF. Na Tabela 4.6 mostra o módulo comparativo de Young e a resistência à tração tanto para o nódulo de grafita quanto para a matriz ferrítica.

**Tabela 4.6** Propriedades mecânicas experimentais.

| Resultados    |          | Esforço último de ruptura $\sigma_{ut}$ [MPa] | Módulo de Young $E$ [GPa] |
|---------------|----------|---|---------------------------|
| Experimentais | Matrix   | 532   | 271                       |
|               | Inclusão | -   | 16.5                      |
| Literatura    | Matrix   | 510 <sup>1</sup>                              | 235 <sup>2</sup>          |
|               | Inclusão | -   | 15 <sup>2</sup>           |

Fonte: <sup>1</sup>(ZHANG; BAI; FRANÇOIS, 1999) <sup>2</sup>(FERNANDINO; CISILINO;

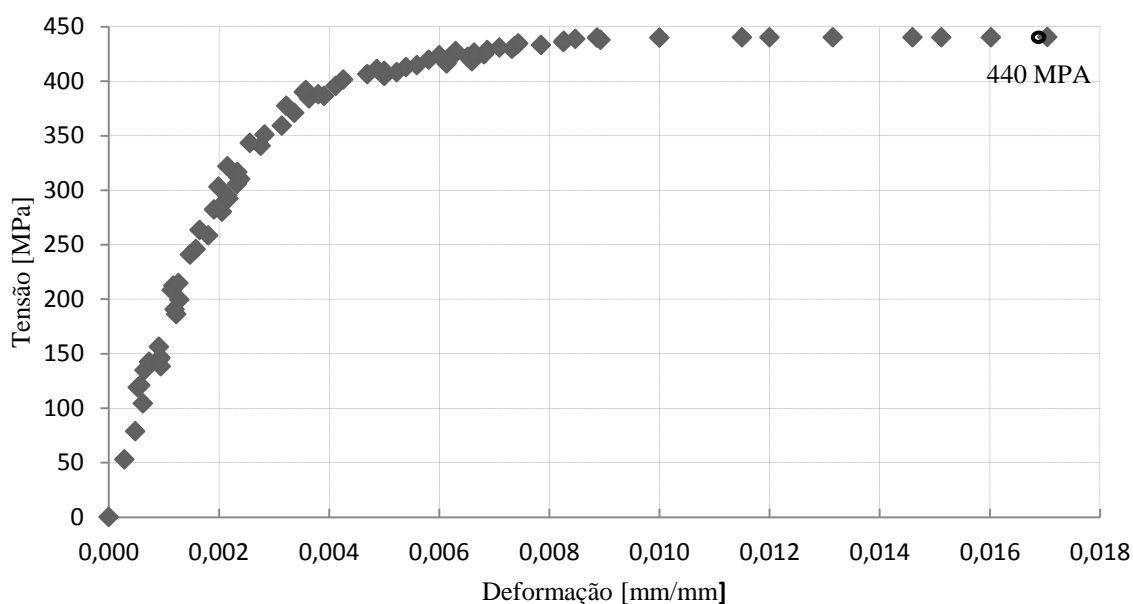
BOERI, 2015)

O módulo efetivo obtido neste trabalho, para a matriz ferrítica é maior do que os disponíveis na literatura para o FFN GGG-40, conforme Tabela 4.6. É importante observar que o material não tem exatamente as mesmas propriedades devido à pequena influência dos parâmetros no processo de fabricação padrão. O módulo efetivo para o grafita nodular foi relativamente pequeno quando comparado com o módulo da matriz. Apesar dessas pequenas diferenças, os módulos efetivos para ambas as fases estão em boa concordância com os relatados na literatura.

#### 4.4.4. Ensaios de tração

Foram realizados quatro ensaios de tração e a curva tensão versus deformação de um destes ensaios é ilustrada em Figura 4.14. As propriedades mecânicas, tais como limite de elasticidade, tração final, módulo de Young e razão de Poisson foram obtidos a partir

das curvas experimentais e são relatadas em Tabela 4.7. O módulo de Young foi de 181GPa, este valor é a média de quatro testes experimentais. As propriedades mecânicas obtidas estão de acordo com as disponíveis na literatura. O módulo de elasticidade obtido por algumas obras para o FFN é 187 GPa (ZHANG; BAI; FRANÇOIS, 1999), 172 GPa (FERNANDINO; CISILINO; BOERI, 2015), 179 GPa (ZYBELL et al., 2014).



**Figura 4.14** Curva dos ensaios de tensão-deformação FFN.

**Tabela 4.7** Resultados experimentais obtidas por ensaios de tensão e microdureza.

| Resultados   | Esforço de fluência $\sigma_{0.2}$ [MPa] | Esforço ótimo de rotura $\sigma_{ut}$ [MPa] | Módulo de Young E [GPa] |
|--------------|--|---|-------------------------|
| Experimental | 325                                      | 437   | 181                     |
| Literatura   | 329 <sup>1</sup>                         | 536 <sup>1</sup>                            | 172 <sup>1</sup>        |

Fonte: <sup>1</sup>(FERNANDINO; CISILINO; BOERI, 2015).

## 4.5. Conclusões sobre a caracterização experimental do GGG-40

Neste capítulo foi apresentada a parte experimental deste trabalho que inclui a caracterização microestrutural, morfológica e de propriedades mecânicas de um FFN GGG-40. Para a caracterização da morfologia foi utilizado técnica de microscopia eletrônica de varredura (MEV), onde foi possível identificar as fases presentes na microestrutura, e fazer uma contagem da nodularidade e do tamanho de grão médio apartir

análises via MEV também foi possível identificar a quantidade de elementos químicos presentes no material. Com a microtomografia foi possível uma reconstrução tridimensional de uma amostra representativa e posteriormente uma reconstrução das malhas bidimensionais e tridimensionais para pequenos elementos de área e volume da mesma amostra, o qual será implementado na modelagem numérica.

As propriedades mecânicas foram determinadas mediante ensaios de tração em que foi possível determinar, principalmente, os esforços de escoamento, os esforços últimos de ruptura e o módulo de Young. Estes valores foram uma indicação das propriedades da microestrutura. Para a determinação das propriedades mecânicas das inclusões gráficas e da matriz ferrítica foi desenvolvido um cuidadoso procedimento de microdureza, mediante a metodologia da “Deformação Falsa” para determinar E. O procedimento seguiu as normas específicas e as hipóteses planteadas por diferentes autores que tem recompilado trabalhos exaustivos na área de testes de dureza. Os resultados experimentais mostraram boa concordância com análises posteriores, referenciados na literatura científica e nas normas estabelecidas.

## **5. ESTUDO COMPUTACIONAL DO MICROMECHANISMO EMPREGANDO MEC**

### **5.1. Introdução**

A resposta mecânica microscópica de um material é determinada, fundamentalmente, pela sua microestrutura e a interação entre seus constituintes. Neste capítulo, é apresentada o processo de homogeneização para a determinação do módulo de Young efetivo para o FFN GGG-40 a partir de dois processos: Homogeneização assintótica com geometrias sintéticas e Homogeneização direta com as geometrias reais dos nódulos de grafita obtidos por Micro-CT.

### **5.2. Procedimento**

Para análise das propriedades efetivas de materiais micro-heterogêneos, é efetuado o método de homogeneização a partir da teoria dos campos médios, isto é, para analisar uma estrutura heterogênea toma-se uma célula unitária do material contendo uma só inclusão, e a resposta da propriedade efetiva do material corresponde a uma média obtida de uma quantidade representativa de células unitárias no elemento qualquer do mesmo. Para implementar o método, é necessário implementar condições de contorno periódicas no modelo matemático a ser analisado, com o objetivo de garantir uma maior precisão e uma rápida convergência. Para o modelo bidimensional, as propriedades efetivas serão estimadas a partir da hipótese de estado plano de tensões.

O modelo por sub-regiões implementado no capítulo 2 é empregado para efetuar a análise da homogeneização assintótica para o FFN GGG-40, é feita uma primeira aproximação com material férrico supondo os nódulos de grafita como espaços vazios, logo é implementado o modelo por sub-regiões para analisar o material com a inclusões de grafita. As propriedades mecânicas obtidas nos ensaios experimentais foram implementadas no modelo numérico e os resultados finais da modelagem foram validados.

Com os microgramas obtidas nos testes por Micro-CT, foi possível construir uma malha com as geometrias reais das inclusões de grafita, e na sequência proceder com o

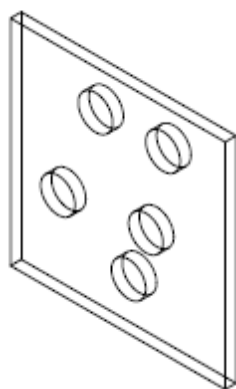
processo de homogeneização assintótica. Os resultados obtidos a partir da implementação numérica foram validados com os testes experimentais.

### 5.2.1. Descrição do modelo

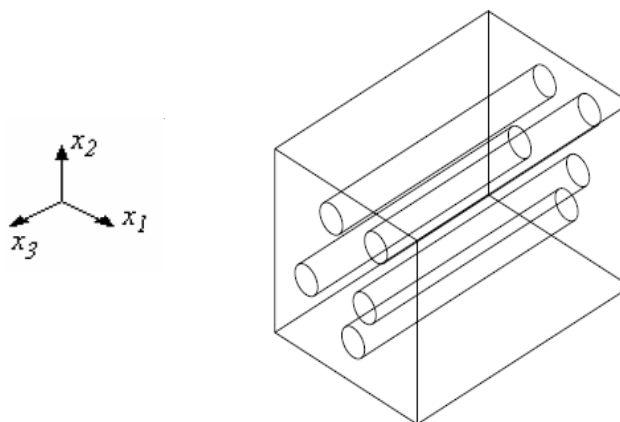
#### 5.2.1.a. EPT, EPD e propriedades efetivas no plano.

Neste tópico serão apresentadas as maneiras para calcular as propriedades efetivas em sólidos com inclusões circulares. Em elasticidade plana são comumente empregadas hipóteses de estado plano de tensões (EPT), e estado plano de deformações (EPD), isto faz referência sobre o comportamento em uma terceira dimensão. Assim, é possível modelar uma chapa de espessura fina contendo furos circulares com a hipótese de EPT ou o caso de um sólido contendo furos cilíndricos compridos alinhados na terceira direção ( $x_3$ ) com a hipótese de EPD (NEMAT-NASSER, 1999). Na Figura 5.1 é apresentado um esquema onde se pode diferenciar os conceitos de EPT e EPD.

#### Estado Plano de Tensões (EPT)



#### Estado Plano de deformações (EPD)



**Figura 5.1** Esquema ilustrativo dos conceitos de EPT e EPD.

Quando os microconstituintes do material são isotrópicos, a simetria geométrica da microestrutura implica simetria macroscópica do material. Para este caso são necessários três casos de carregamento para determinar as constantes elásticas que determinam o comportamento macroscópico do material no plano. Eqs. (5-1), (5-2) e (5-3):

$$\begin{cases} \langle \sigma_1 \rangle_{\Omega} \\ \langle \sigma_2 \rangle_{\Omega} \\ \langle \sigma_{12} \rangle_{\Omega} \end{cases} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{16}^* \\ c_{21}^* & c_{22}^* & c_{26}^* \\ c_{61}^* & c_{62}^* & c_{66}^* \end{bmatrix} \begin{cases} \beta \\ 0 \\ 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_{11}^* = \frac{\langle \sigma_1 \rangle_{\Omega}}{\beta} \\ c_{21}^* = \frac{\langle \sigma_2 \rangle_{\Omega}}{\beta} \\ c_{61}^* = \frac{\langle \sigma_{12} \rangle_{\Omega}}{\beta} \end{cases} \quad (5-1)$$

$$\begin{cases} \langle \sigma_1 \rangle_{\Omega} \\ \langle \sigma_2 \rangle_{\Omega} \\ \langle \sigma_{12} \rangle_{\Omega} \end{cases} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{16}^* \\ c_{21}^* & c_{22}^* & c_{26}^* \\ c_{61}^* & c_{62}^* & c_{66}^* \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ \beta \\ 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_{12}^* = \frac{\langle \sigma_1 \rangle_{\Omega}}{\beta} \\ c_{22}^* = \frac{\langle \sigma_2 \rangle_{\Omega}}{\beta} \\ c_{62}^* = \frac{\langle \sigma_{12} \rangle_{\Omega}}{\beta} \end{cases} \quad (5-2)$$

$$\begin{cases} \langle \sigma_1 \rangle_{\Omega} \\ \langle \sigma_2 \rangle_{\Omega} \\ \langle \sigma_{12} \rangle_{\Omega} \end{cases} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{16}^* \\ c_{21}^* & c_{22}^* & c_{26}^* \\ c_{61}^* & c_{62}^* & c_{66}^* \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_{16}^* = \frac{\langle \sigma_1 \rangle_{\Omega}}{2\beta} \\ c_{26}^* = \frac{\langle \sigma_2 \rangle_{\Omega}}{2\beta} \\ c_{66}^* = \frac{\langle \sigma_{12} \rangle_{\Omega}}{2\beta} \end{cases} \quad (5-3)$$

No caso do material estudado, a distribuição aleatória das inclusões no plano leva a um comportamento estatisticamente isotrópico (NEMAT-NASSER; LORI; DATTA, 1996); (COSTA, 2016), desenvolveu uma análise da isotropia deste mesmo material, supondo o FFN GGG-40 como se fosse um material ortotrópico, chegando à conclusão de que o material é efetivamente de comportamento isotrópico logo de encontrar uma rigidez do material similar em todas as direções. Logo, aqui supomos de entrada um FFN GGG-40 como um material isotrópico então as matrizes constitutivas em função das constantes elásticas  $E^*$  e  $\nu^*$  para EPT e EPD, são dadas pelas Eq. (5-4) e Eq. (5-5), respectivamente:



$$C_{EPT}^* = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu^*)}{2} \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

$$C_{EPD}^* = \frac{E^{*2}E_3^*}{(1+\nu^*)\{(1-\nu^{*2})E_3^* - 2\nu_3^{*2}E^*\}} \begin{bmatrix} \frac{1}{E^*} - \frac{\nu_3^{*2}}{E_3^*} & \frac{1}{E^*} + \frac{\nu_3^{*2}}{E_3^*} & 0 \\ \frac{1}{E^*} - \frac{\nu_3^{*2}}{E_3^*} & \frac{1}{E^*} + \frac{\nu_3^{*2}}{E_3^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\{(1-\nu^*)E_3^* - 2\nu_3^{*2}E^*\}}{2E^*E_3^*} \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

Na modelagem de EPD, o comportamento no plano é função da resposta no plano na terceira dimensão, e por conseguinte deve ser assumida. Isto não acontece na modelagem de EPT onde a lei constitutiva tem a mesma forma que para isotropia. As expressões para obter  $E^*$  e  $\nu^*$  para um material isotrópico podem ser desenvolvidas a partir dos sistemas de Eq.(5-1) e Eq.(5-2), e as matrizes constitutivas Eq.(5-4) e Eq.(5-5). Logo para o EPT são obtidas as Eq.(5-6) e Eq.(5-7):

$$E = [\beta \ 0 \ 0]^T \rightarrow \begin{cases} E^* = \frac{1 - \left( \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_{\Omega}}{\langle \sigma_{11} \rangle_{\Omega}} \right)}{\beta} \langle \sigma_{11} \rangle_{\Omega} \\ \nu^* = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_{\Omega}}{\langle \sigma_{11} \rangle_{\Omega}} \end{cases} \quad (5-6)$$

$$E = [0 \ \beta \ 0]^T \rightarrow \begin{cases} E^* = \frac{1 - \left( \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_{\Omega}}{\langle \sigma_{22} \rangle_{\Omega}} \right)}{\beta} \langle \sigma_{22} \rangle_{\Omega} \\ \nu^* = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_{\Omega}}{\langle \sigma_{22} \rangle_{\Omega}} \end{cases} \quad (5-7)$$

E, para EPD, as Eq.(5-8) e Eq.(5-9):

$$E = [\beta \ 0 \ 0]^T \rightarrow \begin{cases} E^* = \frac{4E_3^* (\langle \sigma_{11} \rangle_\Omega + \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega) \beta^2}{\Xi (\langle \sigma_{11} \rangle_\Omega - \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega)} \\ \nu^* = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_\Omega}{\langle \sigma_{11} \rangle_\Omega} \end{cases} \quad (5-8)$$

$$E = [0 \ \beta \ 0]^T \rightarrow \begin{cases} E^* = \frac{4E_3^* (\langle \sigma_{22} \rangle_\Omega + \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega) \beta}{\Xi_2 (\langle \sigma_{22} \rangle_\Omega - \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega)} \\ \nu^* = \frac{4E_3^* \beta \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega - \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega^2 \nu_3^* + \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega^2 \nu_3^*}{\Xi_2} \end{cases} \quad (5-9)$$

Com as seguintes definições:

$$\Xi_1 = \beta \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega E_3^* - 3\beta \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega^2 E_3^* + \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega^2 \nu_3^* - \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega^2 \nu_3^* \quad (5-10)$$

$$\Xi_2 = \beta \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega E_3^* - 3\beta \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega E_3^* + \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega^2 \nu_3^* - \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega^2 \nu_3^* \quad (5-11)$$

Se for considerado o caso de isotropia com a hipótese de EPD, as expressões para obter as propriedades efetivas, podem ser fornecidas fazendo  $E_3 = E$  e  $\nu_3 = \nu$ .

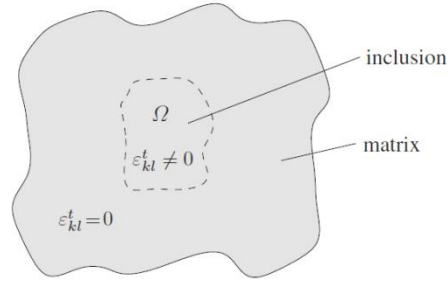
$$E = [\beta \ 0 \ 0]^T \rightarrow \begin{cases} E^* = \frac{(3\langle \sigma_{22} \rangle_\Omega - \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega)}{(\langle \sigma_{22} \rangle_\Omega - \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega) \beta} \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega \\ \nu^* = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_\Omega}{\langle \sigma_{22} \rangle_\Omega - \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega} \end{cases} \quad (5-12)$$

$$E = [0 \ \beta \ 0]^T \rightarrow \begin{cases} E^* = \frac{(3\langle \sigma_{11} \rangle_\Omega - \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega)}{(\langle \sigma_{11} \rangle_\Omega - \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega) \beta} \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega \\ \nu^* = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_\Omega}{\langle \sigma_{11} \rangle_\Omega - \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega} \end{cases} \quad (5-13)$$

A resposta macroscópica isotrópica no plano é independente da hipótese de EPT ou de EPD, em que geralmente, o comportamento macroscópico é considerado isotrópico.

### 5.2.1.b. Tensor de Eshelby

Para ter um modelo matemático deve-se ter em conta a deformação da matriz, que neste caso vai ser denotada como  $\varepsilon_{ij}^e$  e da inclusão denotada como,  $\varepsilon_{kl}^t$  onde uma representação esquemática é apresentada na Figura 5.2.



**Figura 5.2** Inclusão e matriz.  
Fonte: (GROSS; SEELING, 2006)

Onde a descrição da matriz com inclusões é a soma de dois campos de deslocamento, uma parte elástica  $\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}$  e uma de auto-deformações  $\varepsilon_{kl}^t$  Eq.(5-14).

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^t \quad (5-14)$$

Temos que para uma inclusão as tensões estão dadas pela Eq.(5-15).

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^t) \quad (5-15)$$

Onde  $\varepsilon_{kl}^t$  representa as auto-deformações a qual é produzida pela mesma inclusão. A inversa da Eq.(5-15) é a relação da Eq.(5-16)

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^t \quad (5-16)$$

No qual  $S_{ijkl}$  é conhecido como o tensor de Eshelby e os quais estão dados pela Eq.(5-17).

$$S_{ijkl} = \alpha \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \left( I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (5-17)$$

Onde  $I$  está dado pela Eq.(5-18):

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5-18)$$

E  $\alpha$  e  $\beta$  as constantes escalares volumétricas e deviatória, Eq.(5-19) e Eq.(5-20):

$$\alpha = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)} = \frac{3K}{3K + 4\mu} \quad (5-19)$$

$$\beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} = \frac{6(K+2\mu)}{5(3K+4\mu)} \quad (5-20)$$

Estes valores de  $\alpha$  e  $\beta$  foram obtidos por (HILL, 1963) fazendo o cálculo das propriedades efetivas de um material com inclusões esféricas. Estes parâmetros são escalares e referem-se a dois estados: Estado plano de tensão e estado plano de deformação que ocorrem frequentemente no fenômeno de deformação devido a campos de tensão causado pelas cargas sobre a microestrutura do material.

O parâmetro  $\alpha$  é o esforço volumétrico e o parâmetro  $\beta$  os campos de esforços deviatórios. Na maioria dos materiais metálicos  $\beta$  está próximo de 0.45 e  $\alpha$  variando entre 0 e 1. Nas equações acima  $\mu$  é o módulo de cisalhamento e  $\kappa$  é o módulo volumétrico da matriz. O coeficiente de Poisson é denotado por  $\nu$  e o módulo de Young por  $E$ . O coeficiente de Poisson pode variar entre -1 e 0.5. Em muitos dos problemas práticos o valor de  $\alpha$  é ignorado devido ao desprezo das forças volumétricas.

De maneira geral, a obtenção dos componentes do tensor  $E^*$  é realizada através da resolução de problemas de valores de contorno, onde são aplicadas condições de contorno de deslocamento ou tensões, considerando seis casos de carregamento linearmente independentes conforme apresentado na Eq.(5-21).

$$E = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

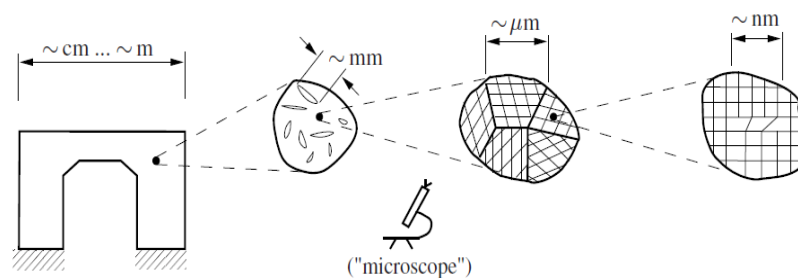
Cada um dos seis casos independentes de carga proporciona seis equações para um total de trinta e seis equações que permitem calcular as trinta e seis constantes elásticas da relação entre médias Eq.(5-24).

Para cada caso de carregamento linearmente independente, se verifica a influência nas outras direções, da qual se originam seis equações. Considerando, os seis casos de carregamento completasse um total de trinta e seis. Para simplificar a análise pode ser aplicado algum artifício. Por exemplo, se for admitido comportamento isotrópico, somente é realizado um único caso de carregamento que permita a obtenção de um tensor de tensões de componentes hidrostáticas e desviadoras não nulas, por outro lado, se o problema for

analisado em duas dimensões, seriam necessários somente três casos de carregamento independentes.

### 5.2.2. Elemento de Volume Representativo (EVR)

As heterogeneidades em um material podem acontecer por muitas situações particulares, como inclusões ou impurezas, limites de grão pronunciados, defeitos de superfície, fissuras, entre outros. A Figura 5.3 apresenta um esquema representativo de uma microestrutura de um material heterogêneo.



**Figura 5.3** Níveis microscópicos e longitudinal da escala.

Fonte:(GROSS; SEELING, 2006).

Os materiais heterogêneos podem ser tratados em três diferentes tipos de casos: 1) Comportamento Linear Elástico, 2) Comportamento elástico-plástico, 3) Materiais termoelásticos. Para materiais com comportamento elástico as teorias de homogeneização se baseiam nas relações constitutivas de tensão e deformação medidas em microcampos a partir dos EVRs.

Um critério energético para a determinação dos EVR, e logo foi desenvolvido por (HILL, 1963) o qual foi chamado como condição energética de Hill. Nestas condições, estabelece que as propriedades macroscópicas sejam indiferentes das propriedades individuais microscópica de cada um deles, isto matematicamente é expresso pela Eq.(5-22).

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle_{\Omega} = \langle \sigma \rangle_{\Omega} : \langle \varepsilon \rangle_{\Omega} \quad (5-22)$$

Onde  $\langle . \rangle$  representa as propriedades macroscópicas média dentro de um volume de controle, isto é uma média volumétrica da propriedade microscópica Eq. (5-23).

$$\langle \cdot \rangle_{\Omega} \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \cdot d\Omega \quad (5-23)$$

As relações constitutivas a nível micro estão representadas pela Eq.(5-24).

$$\langle \sigma \rangle_{\Omega} = C : \langle \varepsilon \rangle_{\Omega} \quad (5-24)$$

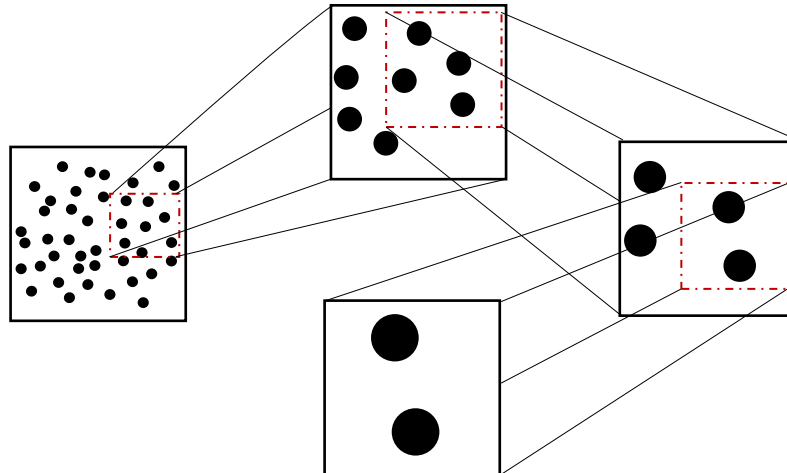
Na literatura, algumas definições há sido estabelecidas para quantificar os tamanhos dos EVR, onde algumas das mais representativas podem ser encontradas nos trabalhos de (STROEVEN; ASKES; SLUYS, 2004).

Para a determinação do tamanho de EVR, foram empregados dois procedimentos os quais resolvem os problemas de valores de contorno, sejam de tensão ou deslocamentos, das amostras de material microheterogêneo e nas quais se verifica a resposta do valor médio das variáveis dos microcampos.

Existem muitos procedimentos para determinar as dimensões e o número de heterogeneidades que devem incluir-se no EVR. Neste trabalho, a dimensão do EVR é determinada em forma numérica empregando dois procedimentos: 1) incrementando o número de heterogeneidades em um EV determinado, ou, 2) através do sucessivo incremento do volume da amostra.

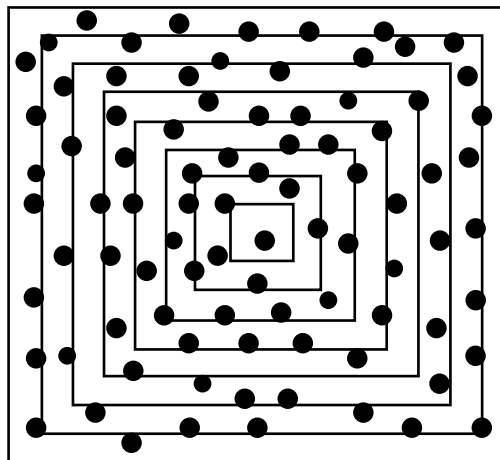
O tamanho da amostra representativa, será aquele que proporcione uma resposta macroscópica invariante (com certa margem) para distintas distribuições das partículas. O tamanho do EVR vai depender dos fatores tais como: grau de dispersão dos microconstituintes e fração de volume dos mesmos, contrastes em suas propriedades mecânicas e propriedades que se deseja homogeneizar, entre outros (SOARES, 2010).

A Figura 5.4 apresenta um EV onde o número de heterogeneidades é incrementado mantendo constantes suas fracções de volume de inclusões.



**Figura 5.4** EVR variando a quantidade de constituintes ao interior do EV.

Outra maneira de se obter um EVR é a metodologia que consiste no incremento gradual de seu tamanho, para incorporar na análise, maior quantidade de informação da microestrutura (Figura 5.5) e mantendo constantes o tamanho das inclusões e a fração de volume.



**Figura 5.5** EVR variando o tamanho do EV.

Em cada um dos métodos são verificadas as variáveis de campo como as tensões e os deslocamentos. Logo, a partir da relação entre elas é determinada a módulo efetivo  $E^*$ .

Os autores (STROEVEN; ASKES; SLUYS, 2004) estimaram o EVR a partir de elementos arbitrários com análises estatísticas para medição das flutuações de qualquer uma das propriedades que se deseja medir. Geralmente, a propriedade mais utilizada é o módulo de Young, mas também se pode trabalhar com as tensões medias, deslocamentos,

energia e fator de concentração, dentre outros. Neste método, cada série de  $n$  amostras, se estima o desvio padrão ( $s^2$ ) e a média ( $\bar{x}$ ) da propriedade a medir, conforme Eq.(5-25) e Eq. (5-26).

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (5-25)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5-26)$$

Onde  $x_i$  representa o valor da propriedade da amostra  $i$ . O coeficiente de variação está dado pela relação do desvio padrão e a média Eq.(5-27).

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \quad (5-27)$$

O CV estima a flutuação da propriedade medida com respeito ao valor médio. Segundo as condições anteriores, será considerada uma amostra representativa de material aquela em que as propriedades homogeneizadas sejam independentes das condições de contorno ou então, aquela para o qual se verifique homogeneidade estatística.

### 5.2.3. Condições de Contorno Periódicas (CCP)

Para processos de análises de homogeneização mediante métodos numéricos é indispensável a utilização das condições de contorno periódicas com a finalidade de obter uma maior precisão nos resultados. Trata-se da fronteira periódica, o qual é uma das mais utilizadas na comunidade científica, uma vez que apresenta uma excelente capacidade de reproduzir o comportamento de materiais que apresentem uma microestrutura periódica (ou quase periódica) e a taxa de convergência é mais rápida que outros tipos de condições, como as de Neumann o Dirichelet (BURLA; KUMAR; SANKAR, 2009; KANIT et al., 2003; NGUYEN et al., 2012; YUE; WEINAN E, 2007). Esta condição de fronteira estabelece que a fronteira que define os limites do EV pode ser dividida em dois grupos iguais tais que:

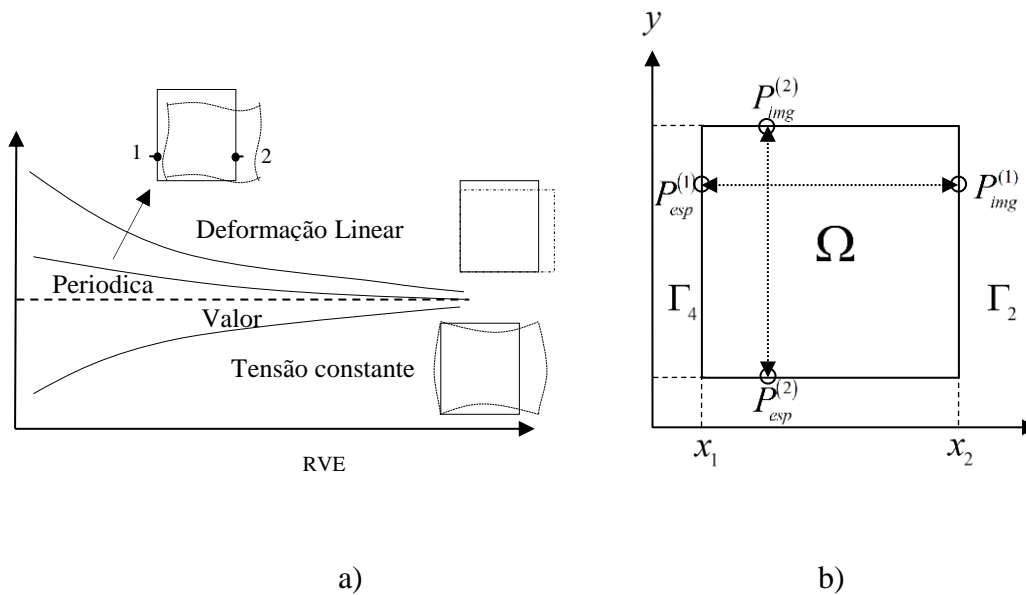
$$\partial\Omega = (\Gamma_i^- \cup \Gamma_i^+) \quad (5-28)$$



Isto significa que cada ponto da parte positiva  $y^+ \in \Gamma_i^+$  tem o seu par na parte negativa  $y^- \in \Gamma_i^-$ . Além disso, é necessário garantir que o vetor normal unitário a  $\Gamma_i^+$  e  $\Gamma_i^-$  nos pontos  $y^+$  e  $y^-$ , respectivamente, satisfaça a condição.

$$n_i^+ = -n_i^- \quad (5-29)$$

Na Figura 5.6. Encontram-se uma representação esquemática do modo de deformação de um EV quando assumida a condição de contorno periódica.



**Figura 5.6** Ilustração da Convergência do EVR.

a) ilustra propriedade da convergência (adaptado de (NGUYEN et al., 2012) ) e b) é o EV bidimensional como ponto “imagem” (img) e ponto “espelho” (esp) (adaptado de (METHODS et al., 2011)).

Portanto, em termos de forças, esta baseia-se na ideia de levar os mesmos valores em dois pontos homólogos (a imagem de ponto e espelho) em faces opostas ( $\Gamma_1$  - $\Gamma_3$ ) e ( $\Gamma_2$  - $\Gamma_4$ ) da (Figura 5.6 b)). O vetor de tensão leva os valores opostos em dois pontos homólogos em faces opostas Eqs. (5-30) e (5-31):

$$\frac{\partial \sigma(P_{esp}^{(1)})_{\Gamma_4}}{\partial n} = - \frac{\partial \sigma(P_{img}^{(1)})_{\Gamma_2}}{\partial n} \quad (5-30)$$

$$\frac{\partial \sigma \left( P_{esp}^{(2)} \right)_{\Gamma_1}}{\partial n} = - \frac{\partial \sigma \left( P_{img}^{(2)} \right)_{\Gamma_3}}{\partial n} \quad (5-31)$$

Contudo, a condição de equilíbrio deve garantir que a somas de força em um elemento sejam igual à zero.

$$F^+ + F^- = 0 \quad (5-32)$$

Então, segundo a configuração esquematizada na Figura 4-6 b) tem-se que impor a condição seguinte em todos os pontos do contorno.

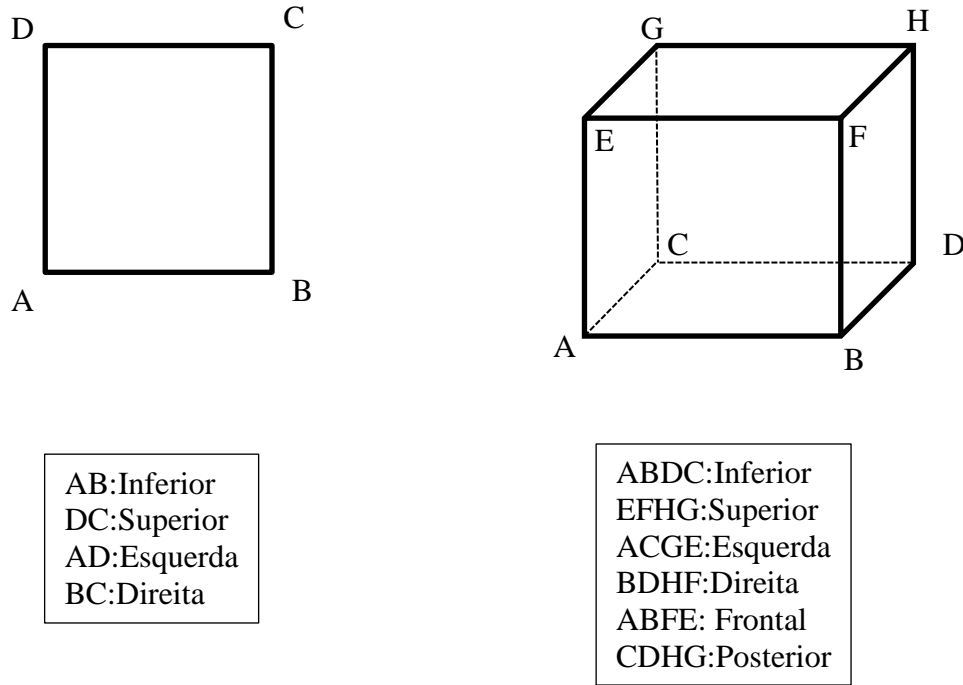
$$P_{esp}^{(1)} - P_{img}^{(1)} = u_{esp}^{(1)} - u_{img}^{(1)} \quad (5-33)$$

Onde  $P_{esp}^{(1)}$  e  $P_{img}^{(1)}$  são os vetores de posição dos ponto “imagem” e o ponto “espelho”, e  $u_{esp}^{(1)}$  e  $u_{img}^{(1)}$  são as deformações sofridas pelo material em cada uma de suas caras. Segundo a Eq. (5-33) a diferença das deformações macroscópica nos pontos “img” e “esp” do material devem sempre permanecer constantes. Para isso, qualquer valor de deformação fisicamente aceitável é valido, então, para este caso de homogeneização é imposto uma deformação unitária ( $\varphi$ ). Assim, as condições de contorno impostas são consideradas conforme apresentado na Eq. (5-34).

$$u_{esp}^{(1)} = u_{img}^{(1)} + \varphi \quad (5-34)$$

Isto vai garantir que a imposição de deformação em um nó geométrico de qualquer um das faces pode ser obtida pela posição do outro que satisfaça uma combinação linear dos vetores de deformação.

Dependendo do modelo a ser utilizado, 2D ou 3D, tem-se uma variedade de possibilidades para a imposição de condições de contorno periódicas que dependerão da posição dos contornos, sendo arestas para 2D ou superfície em 3D. Na Figura 5.7 é apresentada os possíveis casos de imposição das CCP segundo a aresta dos EVR.



**Figura 5.7** Esquema para imposição das condições de contorno no EVR.  
Fonte:(BURLA; KUMAR; SANKAR, 2009).

Assim, dependendo da aresta ou da superfície onde for se impor as condições de contorno, tem-se as seguintes possibilidades:

**Tabela 5.1** Imposição de Condições de contorno dependendo da posição dos esforços.

| Frontal e Posterior   | Esquerda e Direita   | Inferior e Superior   |
|---|--|---|
| $u_x^{Frontal} = u_x^{Posterior} + \varphi$ $u_y^{Frontal} = u_y^{Posterior}$ $u_z^{Frontal} = u_z^{Posterior}$ | $u_x^{Direita} = u_x^{Esquerda}$ $u_y^{Direita} = u_y^{Esquerda}$ $u_z^{Direita} = u_z^{Esquerda}$           | $u_x^{superior} = u_x^{inferior}$ $u_y^{superior} = u_y^{inferior}$ $u_z^{superior} = u_z^{inferior}$ |
| $u_x^{Frontal} = u_x^{Posterior}$ $u_y^{Frontal} = u_y^{Posterior}$ $u_z^{Frontal} = u_z^{Posterior}$           | $u_x^{Direita} = u_x^{Esquerda}$ $u_y^{Direita} = u_y^{Esquerda} + \varphi$ $u_z^{Direita} = u_z^{Esquerda}$ | $u_x^{superior} = u_x^{inferior}$ $u_y^{superior} = u_y^{inferior}$ $u_z^{superior} = u_z^{inferior}$ |

|   |  |   |
|---|--|---|
| $u_x^{Frontal} = u_x^{Posterior}$ $u_y^{Frontal} = u_y^{Posterior}$ $u_z^{Frontal} = u_z^{Posterior}$           | $u_x^{Direita} = u_x^{Esquerda}$ $u_y^{Direita} = u_y^{Esquerda}$ $u_z^{Direita} = u_z^{Esquerda}$ | $u_x^{superior} = u_x^{inferior}$ $u_y^{superior} = u_y^{inferior}$ $u_z^{superior} = u_z^{inferior} + \varphi$ |
| $u_x^{Frontal} = u_x^{Posterior}$ $u_y^{Frontal} = u_y^{Posterior}$ $u_z^{Frontal} = u_z^{Posterior}$           | $u_x^{Direita} = u_x^{Esquerda}$ $u_y^{Direita} = u_y^{Esquerda}$ $u_z^{Direita} = u_z^{Esquerda}$ | $u_x^{superior} = u_x^{inferior} + \varphi$ $u_y^{superior} = u_y^{inferior}$ $u_z^{superior} = u_z^{inferior}$ |
| $u_x^{Frontal} = u_x^{Posterior}$ $u_y^{Frontal} = u_y^{Posterior}$ $u_z^{Frontal} = u_z^{Posterior} + \varphi$ | $u_x^{Direita} = u_x^{Esquerda}$ $u_y^{Direita} = u_y^{Esquerda}$ $u_z^{Direita} = u_z^{Esquerda}$ | $u_x^{superior} = u_x^{inferior}$ $u_y^{superior} = u_y^{inferior}$ $u_z^{superior} = u_z^{inferior}$           |
| $u_x^{Frontal} = u_x^{Posterior}$ $u_y^{Frontal} = u_y^{Posterior}$ $u_z^{Frontal} = u_z^{Posterior}$           | $u_x^{Direita} = u_x^{Esquerda}$ $u_y^{Direita} = u_y^{Esquerda}$ $u_z^{Direita} = u_z^{Esquerda}$ | $u_x^{superior} = u_x^{inferior}$ $u_y^{superior} = u_y^{inferior}$ $u_z^{superior} = u_z^{inferior}$           |

Fonte: (BURLA; KUMAR; SANKAR, 2009).

Para uma malha gerada pelo MEC, a imposição das condições periódicas não representa grande dificuldade devido à facilidade de construção de uma malha regular. Para os casos de malhas geradas pelo MEF a imposição das condições de contorno requer algum procedimento especial na geração das malhas, geralmente quando as malhas ou a amostra carecem de periodicidade. Alguns trabalhos a respeito podem ser consultados (BURLA; KUMAR; SANKAR, 2009; COOK, 1995; DAVIES; CRANN, 2004; GITMAN; ASKES; SLUYS, 2007; NGUYEN et al., 2012; SANDSTÖM; LARSSON; RUNESSON, 2014).

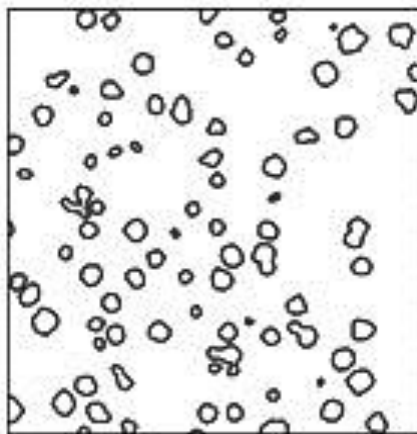
### 5.3. Exemplos

Nestes exemplos serão determinados o módulo efetivo para modelos de homogeneização em 2D e 3D considerando os nódulos de grafita com suas geometrias reais e sintéticas.

#### 5.3.1. Exemplo I: Homogeneização com geometria sintética em 2D

Para homogeneização no caso bidimensional foi adotada a hipótese do EPT. A Figura 5.8 apresenta uma micrografia típica do FFN GGG-40 obtida via Micro-CT. Neste modelo, os nódulos de grafita são modelados com geometrias sintéticas, isto é, os nódulos de grafita são modelados com uma geometria circular perfeita. Além disso, é tido em consideração a rigidez da grafita a qual foi obtida experimentalmente mediante testes de micro-indentação. Os autores (BERDIN; DONG; PRIOUL, 2001); (TONG et al., 2009); (PUNDALE; ROGERS; NADKARNI, 1998); (BURONI; MARCZAK, 2008) modelaram o nódulo de grafita como se fossem espaços vazios, isto devido as baixas propriedades mecânicas da fase gráfitica com respeito a matriz.

A relação  $r/d$  é escolhida como parâmetro característico, onde  $r$  é o raio médio do nódulo e  $d$  é o comprimento mínimo médio entre centros de nódulos.



**Figura 5.8** Detalhe da microestrutura de um FFN GGG-40.

Segundo os resultados obtidos experimentalmente para o parâmetro  $r/d$  o módulo de Young e a razão de Poisson obtidos no capítulo 3, são tabulados e apresentados na Tabela 5.2.

**Tabela 5.2** Propriedades do FFN GGG-40.

| <b>Parâmetro</b>             | <b>Valor</b> |
|------------------------------|--------------|
| r/d                          | 0,30         |
| Módulo de Young              | 182GPa       |
| Razão de Poisson             | 0.28         |
| Percentual da Grafita(%peso) | 7%           |

Neste trabalho foi empregada a mesma estratégia de (ZOHD, 2005) e (BURONI, 2006). Foram modeladas 20 amostras, cada uma com uma distribuição aleatória de nódulos. A quantidade de inclusões tomaram a seguintes quantidades 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52 e 57. Para efeito da simulação numérica, foram feitas duas estratégias:

#### Estratégia I

- É definida uma dimensão específica e constante para o EVR e é tomada como parâmetro característico;
- É considerada que a fração de inclusões é de 7%;
- O tamanho dos nódulos é determinado para cada amostra considerando a quantidade destes dentro da matriz e a fração de área correspondente;
- Os nódulos são gerados em forma aleatória verificando para que não existam superposições entre eles, e cumprindo as relações de  $R/d=0,29$ , de tal maneira que, a distribuição corresponda aos dados experimentais;
- O Módulo de Young e a razão de Poisson são de 182GPa e 0,28, respectivamente.

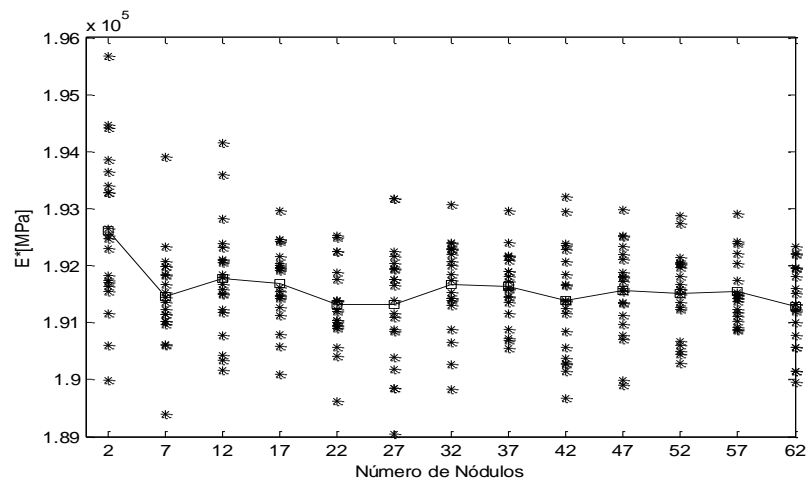
#### Estratégia II

- Adota-se um raio unitário para todos os nódulos e esta dimensão é tomada como parâmetro característico;
- Considera-se que a fração de volume das inclusões é de 7%;
- A partir do número de nódulos que se deseja gerar para cada amostra e com a fração de volume se calcula a área da microestrutura;

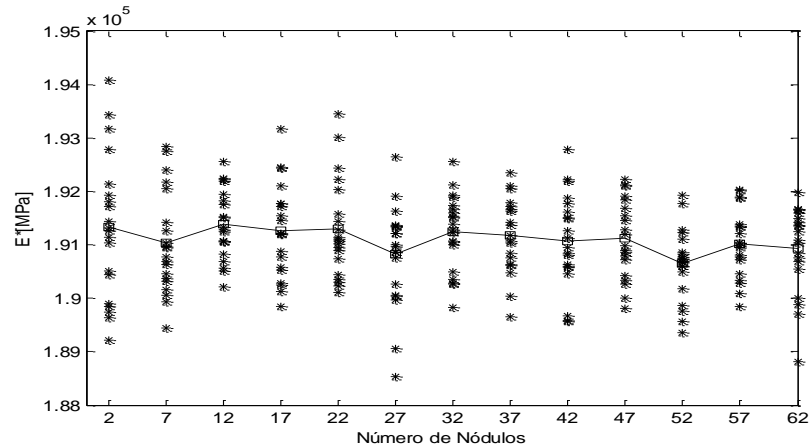
- Os nódulos são gerados em forma aleatória verificando que não existam superposições entre eles, e cumprindo as relações de  $R/d=0,29$ , de tal maneira que, a distribuição corresponda aos dados experimentais;
- O Módulo de Young e a razão de Poisson são de 182GPa e 0,28, respectivamente.

As Figura 5.9 e Figura 5.10 apresentam-se as curvas de convergência para  $E^*$  onde pode ser observado que em cada uma delas há uma grande dispersão para cada um dos ensaios computacionais.

Quanto menor a quantidade de nódulos maior a variação do  $E^*$ , e maior a sua dependência do posicionamento de cada inclusão. Esta afirmação está de acordo com os resultados obtidos por (BURONI, 2006) e (ZHANG; BAI; FRANÇOIS, 1999), os quais indicam que a posição dos furos afetam significativamente os módulos efetivos quando eles estão incluídos em uma menor quantidade ao interior da matriz homogênea.



**Figura 5.9** Caso 1: Curva de convergência do EVR.



**Figura 5.10** Caso 2: Curva de convergência do EVR.

Nas Tabela 5.3 e Tabela 5.4 são apresentados os valores de  $E^*$  obtidos para cada uma das amostras, a diferença entre os valores máximos e mínimos, os desvios padrões e as porcentagens de variação da diferença de valores máximos e mínimos com respeito a média (DVM) e ao desvio padrão (DM).

**Tabela 5.3** Caso 1.  $E^*$  da microestrutura com diferentes distribuições aleatórias de nódulos.

| N de nódulos | $E^*$<br>[MPa] | Diferença<br>$E_{\max} - E_{\min}$ | Desv.<br>Padrão. | %<br>(DVM) | %<br>(DM) |
|--------------|----------------|------------------------------------|------------------|------------|-----------|
| 2            | 192610         | 5689                               | 1408             | 2,95       | 0,73      |
| 7            | 191454         | 4510                               | 876              | 2,36       | 0,46      |
| 12           | 191778         | 3992                               | 1009             | 2,08       | 0,53      |
| 17           | 191685         | 2876                               | 697              | 1,50       | 0,36      |
| 22           | 191311         | 2905                               | 728              | 1,52       | 0,38      |
| 27           | 191324         | 4132                               | 1084             | 2,16       | 0,57      |
| 32           | 191663         | 3233                               | 798              | 1,69       | 0,42      |
| 37           | 191634         | 2416                               | 628              | 1,26       | 0,33      |
| 42           | 191386         | 3536                               | 982              | 1,85       | 0,51      |
| 47           | 191559         | 3084                               | 815              | 1,61       | 0,43      |
| 52           | 191518         | 2587                               | 736              | 1,35       | 0,38      |
| 57           | 191554         | 2048                               | 566              | 1,07       | 0,30      |
| 62           | 191286         | 2373                               | 736              | 1,24       | 0,38      |

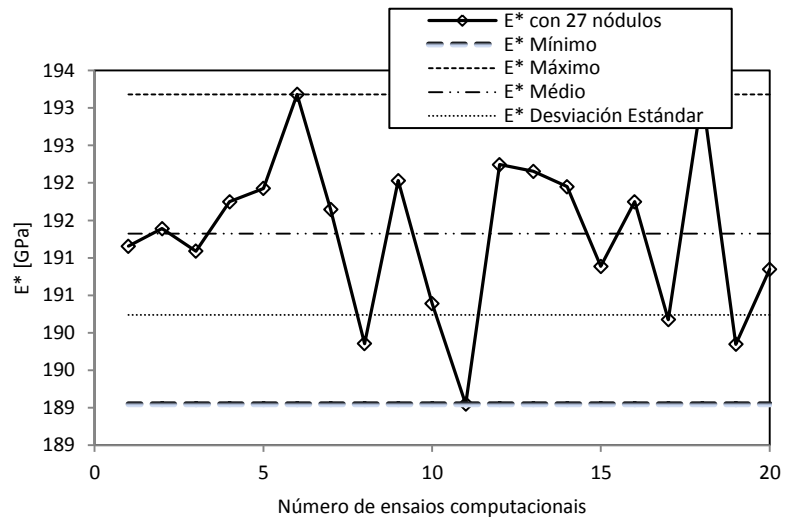
Pode ser observado que a partir de 27 nódulos o desvio padrão com respeito à média é inferior a 2 % (%DVM em 27 nódulos=2,16), o qual é adequado para a obtenção de  $E^*$  a partir de EVR.



**Tabela 5.4** Caso 2.  $E^*$  da microestrutura com diferentes distribuições aleatórias de nódulos.

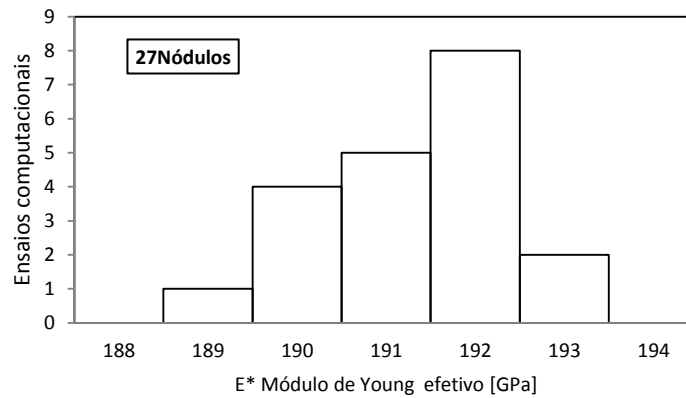
| N nódulos | $E^*_{med}$<br>[MPa] | Diferença<br>$E^*_{max}-E^*_{min}$ | Desv.<br>Padrão | %<br>(DVM) | %<br>(DM) |
|-----------|----------------------|------------------------------------|-----------------|------------|-----------|
| 2         | 191328               | 4867                               | 1351            | 2,54       | 0,71      |
| 7         | 191035               | 3399                               | 968             | 1,78       | 0,51      |
| 12        | 191381               | 2344                               | 652             | 1,22       | 0,34      |
| 17        | 191265               | 3332                               | 879             | 1,74       | 0,46      |
| 22        | 191290               | 3344                               | 927             | 1,75       | 0,48      |
| 27        | 190819               | 4108                               | 951             | 2,15       | 0,50      |
| 32        | 191240               | 2716                               | 704             | 1,42       | 0,37      |
| 37        | 191172               | 2705                               | 699             | 1,41       | 0,37      |
| 42        | 191077               | 3221                               | 888             | 1,69       | 0,46      |
| 47        | 191122               | 2419                               | 730             | 1,27       | 0,38      |
| 52        | 190651               | 2575                               | 667             | 1,35       | 0,35      |
| 57        | 191019               | 2191                               | 637             | 1,15       | 0,33      |
| 62        | 190801               | 2858                               | 1092            | 1,50       | 0,57      |

Nas Figura 5.11 e Figura 5.13 é exposto os resultados obtidos de  $E^*$  com microestruturas com 27 nódulos em cada um dos experimentos. Cada ponto destas figuras representa o resultado de um ensaio computacional do material com distribuição aleatória de nódulos. Também se observam os valores máximos, mínimos, médios e desvios padrões do grupo de amostras analisadas. As Figura 5.12 e Figura 5.13 apresentam os correspondentes histogramas destes resultados, em que pode ser observado que a maioria dos ensaios desenvolvidos alcançou valores de  $E^*$  de 192GP quando se varia o tamanho de nódulos e 191GPa para a determinação do EVR variando o tamanho do EVR. Isto indica que independentemente da forma como se estime o EVR, seja variando o volume ou o tamanho dos nódulos o resultado final é similar.

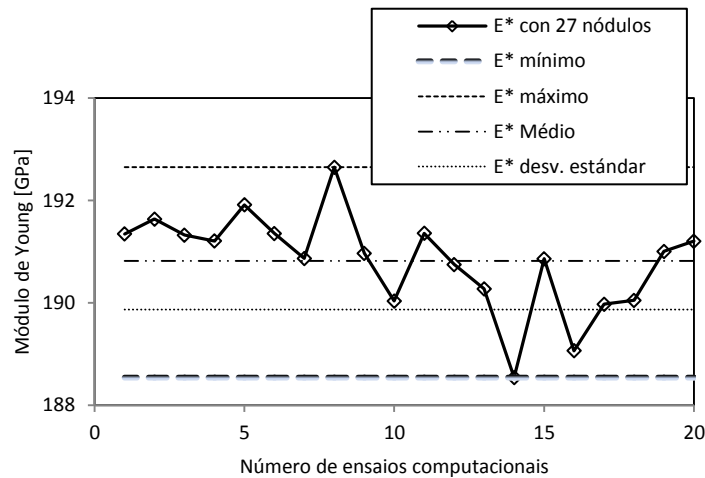


**Figura 5.11** Caso 1.  $E^*$  do material para 20 microestruturas com 27 nódulos distribuídos em forma aleatória.

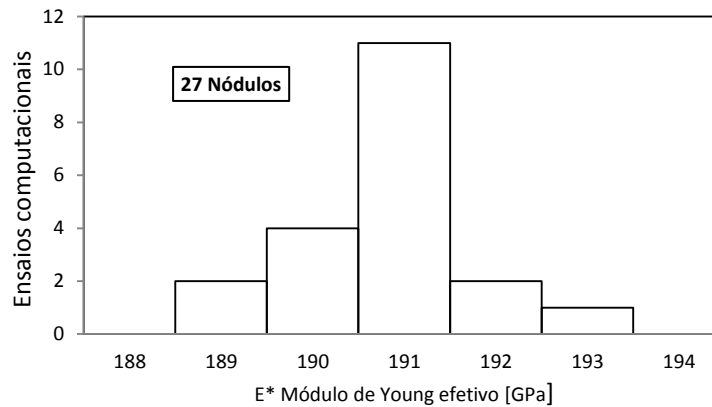
O valor de  $E^*$  para o FFN GGG-40 é obtido a partir dos ensaios computacionais que são de 192GPa, enquanto que, as obtidas em dados experimentais foram de 187GPa (ZHANG; BAI; FRANÇOIS, 1999).



**Figura 5.12** Caso 1. Histograma do  $E^*$  [GPa] para 20 amostras com 27 nódulos distribuídos em forma aleatória.



**Figura 5.13** Caso 2.  $E^*$  do material para 20 microestruturas com 27 nódulos distribuídos em forma aleatória.



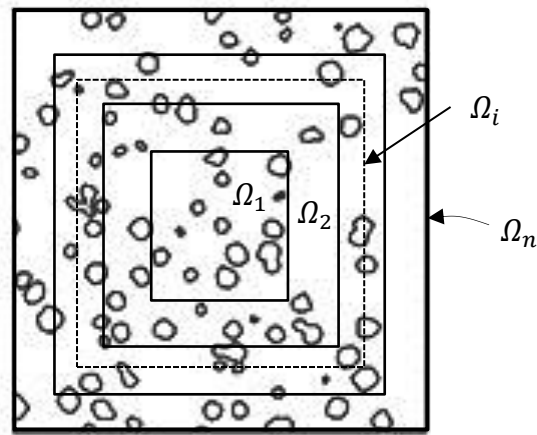
**Figura 5.14** Caso 2. Histograma do  $E^*$  [GPa] para 20 amostras com 27 nódulos distribuídos em forma aleatória.

A diferença obtida para os valores de  $E^*$  com respeito aos dados experimentais é de aproximadamente 6%. Esta diferença é atribuído as simplificações impostas ao modelo de microestrutura, como modelagem em 2D e representação dos nódulos com geometrias sintética. (RODRÍGUEZ et al., 2015) já haviam demonstrado mediante MEF que existia uma pequena diferença referente as propriedades efetivas ao usar EVR bidimensionais e tridimensionais. Na mesma linha de pensamento, é razoável intuir que os efeitos hidrostáticos sobre a deformação de uma inclusão circular são diferentes do efeito que ocorre na prática em um nódulo de grafita tridimensional, onde se tem uma rigidez volumétrica significativa e como consequência um comportamento mais flexível. Uma diferença mais pronunciada nas propriedades efetivas com respeito aos dados experimentais

foi observada por (BURONI; MARCZAK, 2008), onde alcançaram valores de módulo de Young efetivo de 160GPa. Nesse trabalho as propriedades efetivas foram de 191GPa para o módulo de Young usando as mesmas condições experimentais reportadas na bibliografia.

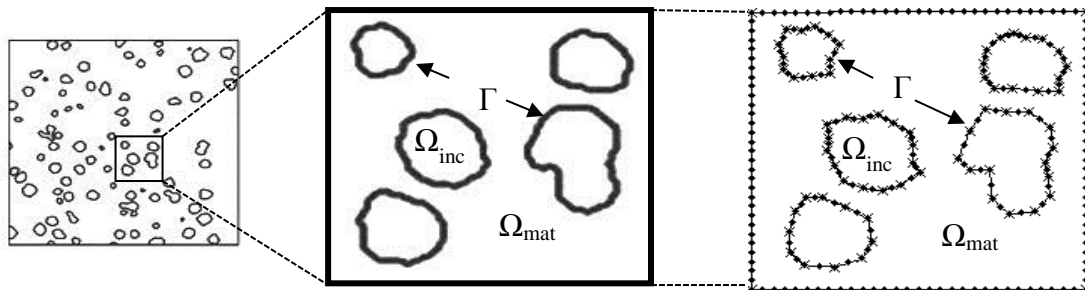
### 5.3.2. Exemplo II: Homogeneização com a geometria real em 2D

A Figura 5.15 descreve o procedimento de homogeneização utilizado neste trabalho. Este procedimento consiste na geração de vários EVRs com diferentes tamanhos. Este EVR foi obtido a partir de testes numéricos para determinar o módulo efetivo.



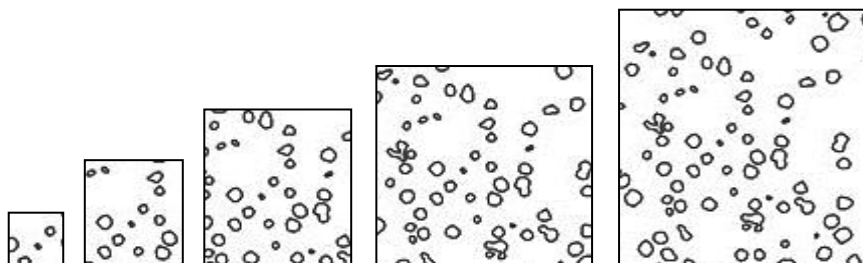
**Figura 5.15** EVR para o FFN GGG-40.

Os microgramas obtidos com o Micro-CT foram utilizados para recuperar as formas e a distribuição do nódulo. A Figura 5.16 representa um modelo de malha bidimensional que representa as inclusões de geometria irregular ( $\Omega_{inc}$ ) dentro da matriz ferrítica ( $\Omega_{mat}$ ).



**Figura 5.16** Construção da malha dos nódulos de grafita do FFN GGG-40.

A estratégia para a geração da malha no material, foi desenvolvida assumindo uma placa quadrada de dimensões definidas. Neste modelo, os nódulos de grafita têm a forma geométrica verdadeira. O contorno é representado por um elemento quadrático contínuo. As dimensões do domínio foram progressivamente aumentadas até que a estabilização em nos módulos efetivo foram alcançadas (Figura 5.17).



**Figura 5.17** Ilustração do EVR com diferentes números de inclusões. Tamanhos de amostras de  $(0,5 \times 0,5) \text{ mm}^2$ ;  $(1 \times 1) \text{ mm}^2$ ;  $(2 \times 2) \text{ mm}^2$ ;  $(3 \times 3) \text{ mm}^2$ ;  $(4 \times 4) \text{ mm}^2$ .

O algoritmo computacional é apresentado na continuação que utiliza a ferramenta `ginput` de Matlab. Algoritmo 3 gera a malha com nódulos de grafita da forma “pop corn” com o comando `ginput`.

---

**Algoritmo 3** Algoritmo para inserção de pontos com o comando `ginput`

---

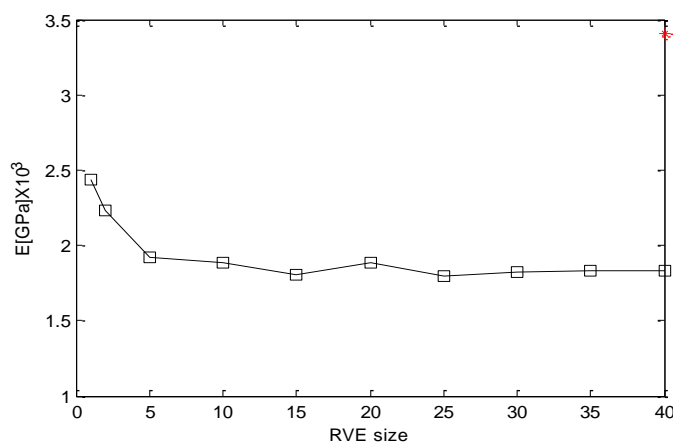
```

Assign Image
Assign Scale
Assign Xo, y0, xfin, yfim (Limites inferior e superior x, y)
Assign N (numero de inclusões)
For i=1: N
    but = 1;
    Do while but == 1
        Assign [xi,yi,but] <= ginput(1);
        Assign xy2(:,n) <= [m;xi;yi;but];
    End
    Assign mapa_inclu{k} <= [M,x,y,but];
End
No ponto internos

```

---

Para evitar problemas de singularidade por cantos pronunciados se acondicionou o programa para não permitir pontos geométricos com uma distância menor ou igual  $10^{-2}(X_{fim} - X_{in})$ . A partir daí a análise de homogeneização multiescala foi realizada utilizando diferente EV segundo a Figura 5.17. Os resultados do processo de homogeneização são apresentados na Figura 5.18.



**Figura 5.18**  $E^*$  do FFN GGG-40.

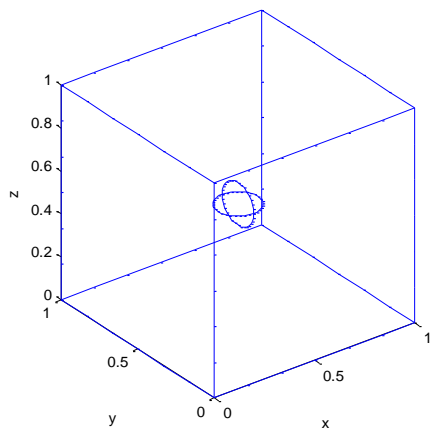
Pode-se evidenciar que à medida que o número de inclusões aumentou, as propriedades efetivas são estabilizadas atingindo valores de 187 GPa para um EVR com 30 inclusões. O EVR neste caso foi de  $1,5 \times 1,5 \text{ mm}^2$ . O método mostrou uma alta precisão do módulo efetivo em relação aos valores recuperados com os resultados experimentais, a diferença foi de 4%. O erro no valor de Young efetivo obtido é devido possivelmente a dois fatos: o modelo bidimensional, mesmo considerando a geometria real da inclusão, ainda não se aproxima satisfatoriamente da realidade de um comportamento de um FFN em 3D. Por outro lado, os erros gerados durante o processamento da discretização do contorno também podem influenciar no valor módulo efetivo do material.

### 5.3.3. Exemplo III: Homogeneização com a geometria sintética em 3D

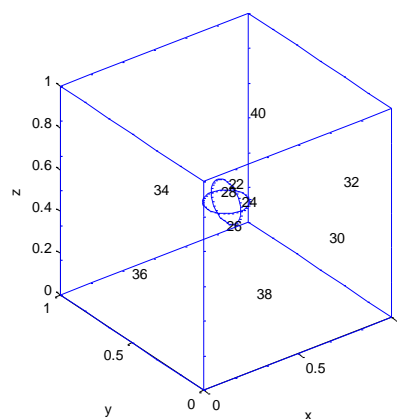
A distribuição dos nódulos de grafita para o modelo 3D com geometria sintética foram gerados aleatoriamente, considerando a nodularidade da amostra. A geometria foi desenhada em CAD e a reconstrução da malha tridimensional do modelo do EV realizada no software GMESH 3.0. Foi desenvolvido um código em Matlab para impor as condições de contorno ao problema. Para o modelo gerado, primeiro se fez uma reconstrução das malhas em Matlab com os dados obtidos do GMESH para ter a visualização das faces, arestas e vértices dos modelos (Figura 5.19), logo é identificada a numeração de cada superfície, aresta e/ou vértice. No presente caso a ser analisado, como a imposição das

condições de contorno é efetuada nas superfícies do EV, faz-se necessário somente a identificação das superfícies (Figura 5.20).

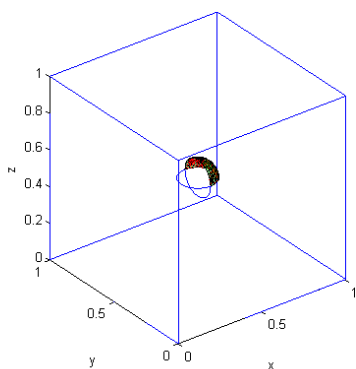
Logo, é feita uma verificação das normais de tal maneira que estas estejam orientadas corretamente, para garantir uma correta integração numérica do modelo. (Figura 5.21 e Figura 5.22). Depois de verificadas estas condições, os modelos são finalmente gerados e a malha reconstruída, conforme ilustrado na Figura 5.23.



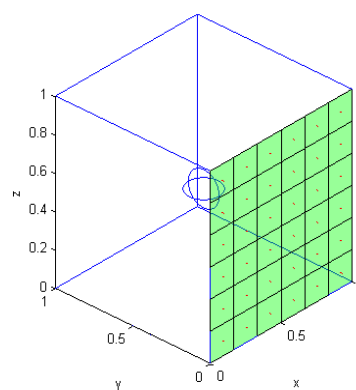
**Figura 5.19** Construção da geometria.



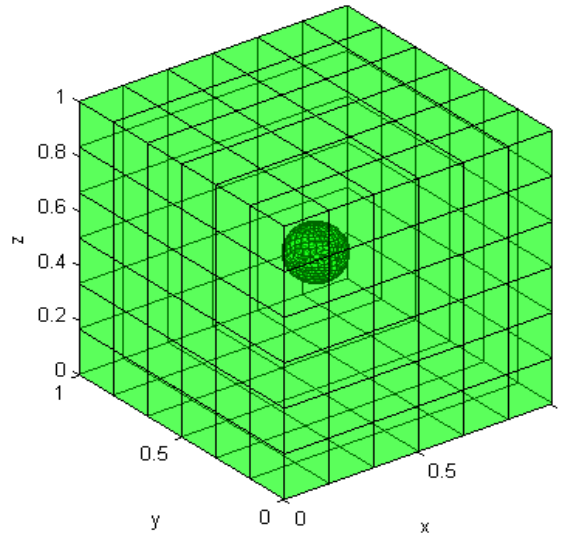
**Figura 5.20** Identificação da superfície.



**Figura 5.21** Verificação das normais internas.

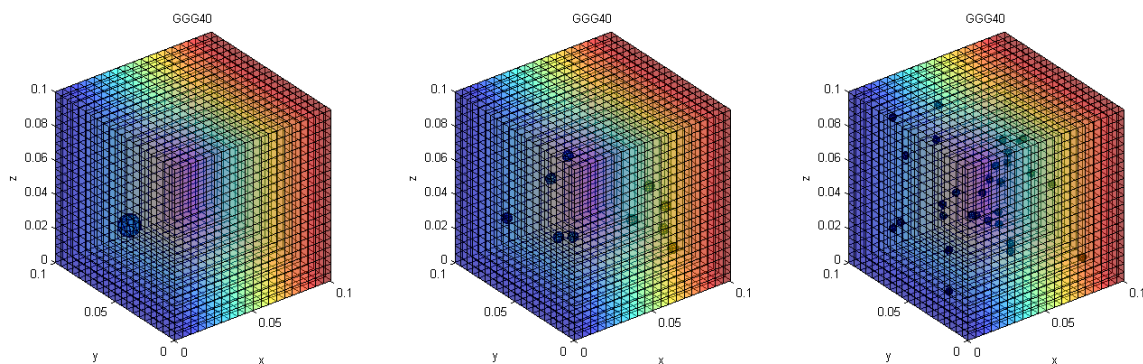


**Figura 5.22** Verificação das normais externas.



**Figura 5.23** Modelo reconstruído.

Foi implementada a estratégia de homogeneização assintótica usando elementos de volume (EV) para encontrar o Elemento de Volume representativo (EVR) do material. As quantidades de inclusões foram sendo acrescentadas no interior do EV mantendo uma razão constante de volume nodular com respeito ao tamanho do EV, e sempre mantendo fixa a mesma modularidade do FFN GGG-40 (Figura 5.24).



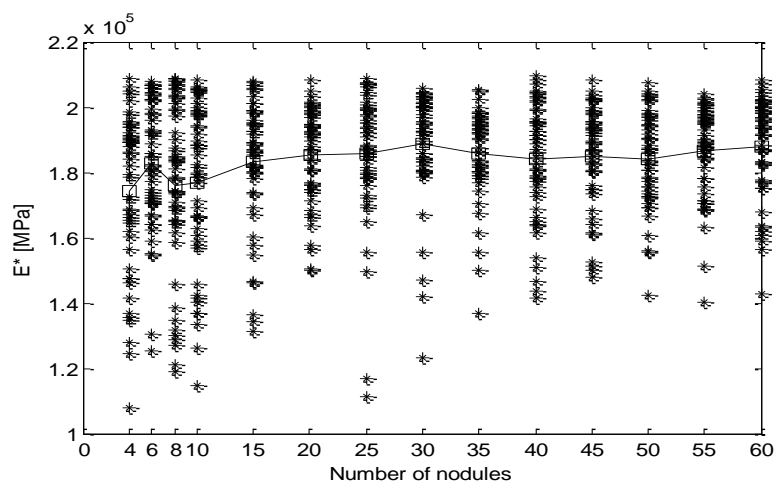
**Figura 5.24** EV em 3D para homogeneização assintótica.

a) EV com uma inclusão, b) EV com 10 inclusões, c) EV com 30 inclusões.

Figura 5.25 a) apresenta a curva de convergência do  $E^*$  para um modelo bidimensional. Na Tabela 5.5 apresenta os valores meios de cada uma das amostras para  $E^*$ , a diferença entre os valores máximos e mínimos ( $E_{max}-E_{min}$ ), o desvio padrão, a



percentagem de variação da diferença entre os valores máximos e mínimos com respeito à média (DVM) e o desvio padrão (DM).



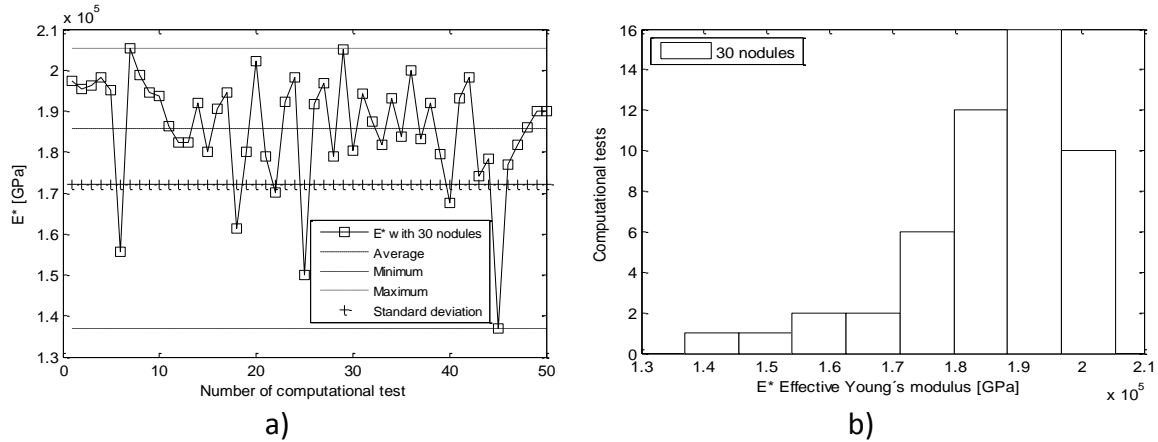
**Figura 5.25** Curva de convergência do EVR. Valores de  $E^*$  para diferentes distribuições de nódulos.

**Tabela 5.5**  $E^*$  para os testes computacionais do FFN GGG com várias distribuições de nódulos.

| Nº | E [MPa] | $E_{\max}-E_{\min}$ | Desv. Est. | % (DVM) | % (DM) |
|----|---------|---------------------|------------|---------|--------|
| 4  | 171467  | 94558               | 23414      | 5.86    | 1.45   |
| 6  | 180984  | 76856               | 18222      | 4.49    | 1.07   |
| 8  | 174642  | 83962               | 24417      | 5.10    | 1.48   |
| 10 | 175217  | 87349               | 23073      | 5.29    | 1.40   |
| 15 | 181034  | 71682               | 18181      | 4.19    | 1.06   |
| 20 | 183229  | 54483               | 13697      | 3.15    | 0.79   |
| 25 | 183518  | 90956               | 18716      | 5.24    | 1.08   |
| 30 | 186362  | 77318               | 15850      | 4.38    | 0.90   |
| 35 | 183688  | 64007               | 12893      | 3.69    | 0.74   |
| 40 | 181913  | 63627               | 16635      | 3.70    | 0.97   |
| 45 | 188039  | 41409               | 9869       | 2.33    | 0.55   |
| 50 | 183910  | 48671               | 12513      | 2.80    | 0.72   |
| 55 | 185587  | 49910               | 11749      | 2.84    | 0.67   |
| 60 | 186718  | 64689               | 16368      | 3.70    | 0.94   |

Pode ser observado que para 30 inclusões se alcança um  $E^*$  representativo, onde se tem desvios da media inferior ao 5% com o incremento das inclusões. Figura 5.26 a) apresenta o resultado para  $E^*$  para um EVR com 30 nódulos de grafita. Figura 5.26 b)

apresenta os correspondentes histogramas dos resultados, em que pode ser apreciado os dados para  $E^*$  foram de  $E^*$  de 186GPa. O valor para  $E^*$  nos dados experimentais foram do 181GPa (ZHANG; BAI; FRANÇOIS, 1999).

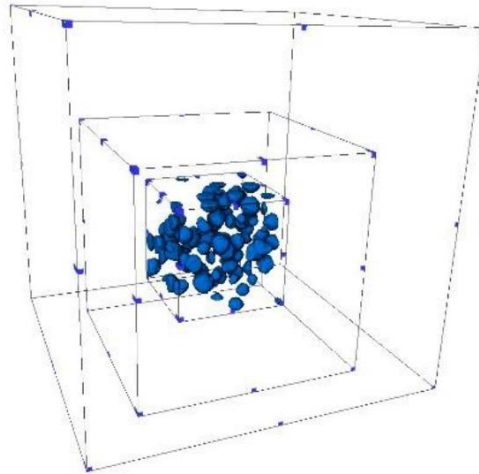


**Figura 5.26** a)  $E^*$  para 20 mostras com distribuições aleatórias de nódulos. b) Histograma de  $E^*$ .

A análise em 3D pode ser determinar que o módulos de Young foi de 186GPa. Há uma diferença obtida 2% approx com respeito do teste em 2D. Isto demuertra que o modelo 3D aproxima mais ao valor experimentais obtidos e ao dados blibliográficos reportados na literatura.

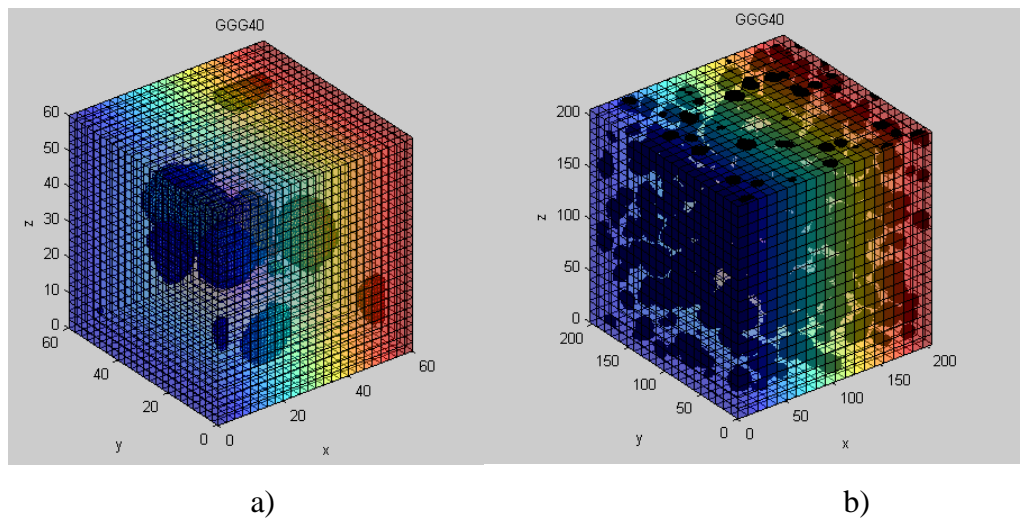
#### 5.3.4. Exemplo IV: Homogeneização com a geometria real 3D

Com a malha gerada a partir da reconstrução tridimensional obtida pelo sistema de microtomografia por Raios-X, foram simulados 2 modelos (EVs) com tamanhos de 50, 200 voxels, a dimensão dos modelos foram obtidas por (COSTA, 2016). Os EVRs foram retirados do centro da amostra, de modo que os centróides dos mesmos fossem idênticos, conforme observado na Figura 5.27, que mostra respectivamente os modelos de  $50^3$ ,  $100^3$  e  $200^3$  voxels.



**Figura 5.27** EVR usado na simulação em 3D direta.  
 Fonte: (COSTA, 2016).

Após o processamentos de imagens foi gerado um EVR conforme apresentado na Figura 5.28. A malha externa do cubo foi construída no Matlab com elementos quadráticos lineares de 4 e 8 nós. O tempo de simulação foi de até 24 horas um processador Corel i7.



**Figura 5.28** EV usado na simulação em 3D com a geometria real.  
 a) EV de 50Voxels, b) EV de 200Voxels.

Os resultados para os módulos efetivos considerando 50 e 200 Voxels são apresentados na

Tabela 5.6. O tempo de simulação variou entre 24 e 36 horas, possivelmente por causa do método de solução do sistema matricial, o qual foi feito por eliminação gaussiana.

**Tabela 5.6** Resultado do processo de homogeneização assintótica com geometria real.

|               | EV de 50 <sup>3</sup> Voxels | EV de 200 <sup>3</sup> Voxels |
|---------------|------------------------------|-------------------------------|
| $E_{xx}(GPa)$ | 185,24                       | 184,53                        |
| $E_{yy}(GPa)$ | 185,32                       | 184,73                        |
| $E_{zz}(GPa)$ | 185,93                       | 183,35                        |

É possível evidenciar que os valores do módulo de Young efetivo se aproximam mais aos valores obtidos experimentalmente. Nota-se que neste caso o módulo da grafita não foi considerada. A diferença com respeito ao valor experimental foi de 1%, o qual indica a precisão da metodologia implementada.

#### 5.4. Conclusões sobre homogeneização do FFN GGG-40

Foi implementado um código de MEC para a análise da estrutura do FFN GGG-40 supondo os nódulos de grafita com geometria sintéticas e logo com geometria real. Para o caso da geometria sintética a análise foi realizada usando dois mecanismos para a determinação do EVR 1) variando o tamanho e o número das inclusões e 2) variando o tamanho do EVR impondo como condição um parâmetro característico. Neste caso foi utilizado o tamanho das inclusões como parâmetro característico. Encontraram-se em ambos os casos o tamanho do EVR coincidia com uma margem de erro de 1%. O custo computacional difere em 5% sendo o segundo caso de maior rapidez computacional. Isto pode ser causado pelo fato dos elementos permanecem constantes. A diferença dos valores numéricos com respeito aos valores experimentais são atribuído ao modelo utilizado e as simplificações feitas no mesmo.

Para o caso de homogeneização usando a geometria real do problema o valor de módulo efetivo se aproxima mais aos dado experimentais e o custo computacional foi mais elevado devido ao procedimento de emalhado. Mas em definitivo, para o FFN é indispensável usar geometrias reais para o caso de homogeneização multiescala.

Para o caso 3D foi avaliada o modelo 3D com o MEF a partir de construções geométricas obtida no Ansys, o sistema converge aproximadamente bem, e as

diferenças podem ser causadas pelo refinamento da malha gerada no GMESH. Uma malha mais refinada geralmente tornava o problema de elevado custo computacional.

No processo de homogeneização, as propriedades efetivas foram determinadas com valores satisfatórios aos valores obtidos experimentalmente, apresentando diferença de 1%, o qual indica efetividade do modelo numérico e a importância de modelar esse tipo de materiais com as geometrias reais quando não se tem uma perfeita nodularidade no caso de FFN utilizado neste trabalho.

## 6. VISCO-ELASTICIDADE

### 6.1. Introdução

Os materiais visco-elásticos, assim como os compósitos, são muito comuns na engenharia. Trata-se de materiais solicitados que por tensões constantes (ou deformações constantes) apresentam deformações (ou tensões) que variam com o tempo. Entretanto, uma vez retirada à solicitação, o material recupera completamente seu estado inicial embora não instantaneamente.

A investigação teórica em viscoelasticidade, normalmente envolve duas categorias: uma delas trata do desenvolvimento das equações constitutivas consistentes com as observações físicas e a outra corresponde à aplicação destas formulações aos problemas de valor de contorno.

Neste capítulo é realizado uma revisão dos diferentes tipos de modelos de viscoelasticidade, bem como sua formulação tanto em 2D como em 3D considerando o MEC por sub-regiões. Foram modelados problemas viscoelásticos em 2D e 3D, a fim de validar a implementação numérica. O processo de homogeneização multiescala é realizado para problemas em 2D em um material microestruturalmente heterogêneo. Os dados foram validados com dados reportados na literatura.

### 6.2. Descrição do modelo

#### 6.2.1. Lei constitutiva

Assim como acontece com materiais de comportamento elástico, os materiais viscoelásticos também tem um comportamento similar, o qual obedecem a certas regras constitutivas. Seja  $\sigma$  e  $\varepsilon$ , com componentes cartesianas  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  serem funções definida no intervalo temporal  $(-\infty, \infty)$ , cujos valores  $\sigma(t)$  e  $\varepsilon(t)$  são o tensor de tensões e deformações infinitesimais no instante  $t$ , respectivamente. A relação constitutiva esta dada segundo a Eq. (6-1):

$$\sigma(t) = L\varepsilon(t) \quad (6-1)$$

Onde  $L$  é uma transformação que associa o histórico de deformações com o de tensões (GURTING; STERNBERG, 1961). A Eq.(6-1) é conhecida como equação constitutiva hereditária que descreve o comportamento das forças e deformações dependente do tempo, estabelecendo assim, a chamada mecânica hereditária que atualmente é conhecida como teoria da viscoelasticidade.

### 6.2.2. Definição histórica admissível

Um histórico de deformações  $\varepsilon$  é admissível se  $\varepsilon$  é contínuo em tudo  $t \in (-\infty, \infty)$ , e  $\varepsilon=0$  em  $(-\infty, 0)$ . Uma definição análoga se aplica ao histórico de tensões. (GURTING; STERNBERG, 1961)

Esta definição é importante, pois está contida na próxima definição que deixa clara as restrições da teoria da linear.

### 6.2.3. Lei constitutiva hereditária linear

Uma transformação  $L$  que associa a cada histórico de deformações  $\varepsilon$  a um histórico de tensões,  $\sigma = L\varepsilon$ , é uma lei hereditária linear, se as seguintes propriedades forem atendidas. Seja  $\varepsilon'$  e  $\varepsilon''$  dois históricos de deformações admissíveis e suponha que  $\sigma' = L\varepsilon'$  e  $\sigma'' = L\varepsilon''$  então:

- a) Linearidade: sendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  números reais, então,

$$L(\lambda_1\varepsilon' + \lambda_2\varepsilon'') = \lambda_1L(\varepsilon') + \lambda_2L(\varepsilon'');$$

- b) Invariança da traslação: para todo Para cada  $\lambda$  fixado na relação  $\varepsilon''(t) = \varepsilon'(t - \lambda)$  para  $t \in (-\infty, \infty)$  implica que  $\sigma''(t) = \sigma'(t - \lambda)$  para  $t \in (-\infty, \infty)$
- c) Não retroatividade: para todo  $t$  fixo,  $\varepsilon' = \varepsilon''$  em  $(-\infty, t]$ , implica que  $\sigma' = \sigma''$  em  $(-\infty, t]$ ;
- d) Continuidade: para todo  $t$  fixo e todo  $\alpha > 0$ , existe um  $\delta_t(\alpha) > 0$  tal que  $|\varepsilon'(\tau)| < \delta_t(\alpha)$  para todo  $\tau \in (-\infty, t]$  implica que  $|\sigma'(t)| < \alpha$ .

O postulado (a) expressa o princípio da superposição linear. Na teoria da viscoelasticidade Linear, esse princípio é conhecido como princípio da superposição de Boltzmann. O postulado (b) garante que a constituição do material permanece invariável com o tempo. O postulado (c), também conhecido como princípio da causalidade, estabelece que se dois históricos de deformação coincidirem até o instante  $t$ , então os dois históricos de tensões associados também têm que ser iguais.

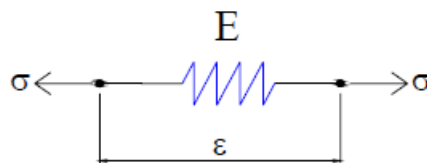
O postulado (d), em termos de (a) estabelece que se dois históricos de deformação fossem suficientemente próximos até o instante  $t$ , então os valores de tensão correspondentes no instante  $t$ , serão arbitrariamente próximos. (GURTING; STERNBERG, 1961)

Caso estes postulados sejam todos observados, então é possível obter uma forma geral de representação da Lei constitutiva, conhecida como forma integral.

#### 6.2.4. Modelos analógicos

A teoria dos modelos analógicos mecânicos é a analogia mecânica para a teoria dos circuitos elétricos (N. W. TSCHOEGL, 1989). Nesses modelos, os fenômenos físicos envolvidos são representados por elementos gráficos que podem ser conectados entre si, de forma a reproduzir determinado comportamento. De modo geral, esse procedimento facilita o processo de análise do sistema mecânico.

O elemento de mola unidimensional (Figura 6.1) representa o material com comportamento elástico linear (lei de Hooke). Neste comportamento, o material recupera instantaneamente sua condição inicial depois de ser feita a solitação.

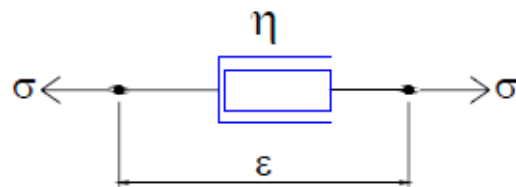


**Figura 6.1** Representação do modelo e Hooke.

Onde  $E$  é o módulo de Young e  $\varepsilon$  é a deformação sofrida pela mola devido ao esforço aplicado.

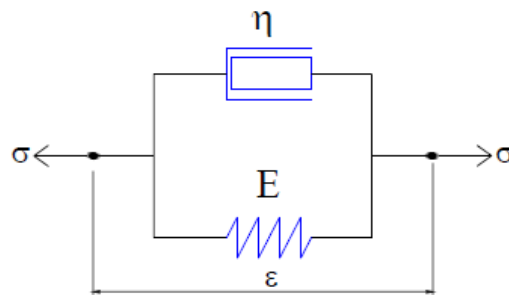


O comportamento puramente viscoso é representado com um elemento de amortecedor unidimensional (Figura 6.2). Esse material apresenta tensões que são proporcionais à taxa de deformação que o material sofre e não a deformação propriamente dita. Isto é, depende de uma constante variacional chamada parâmetro de viscosidade a qual depende igualmente das características do material. Este modelo também é conhecido como modelo de Newton. Neste caso o material pode alterar sua configuração apresentando deformações permanentes.



**Figura 6.2** Representação do modelo de Newton.

Associação dos dois elementos representa o comportamento viscoelástico (Figura 6.3), que possui características intermediárias aos dos modelos descritos. Uma possibilidade de associação direta é, por exemplo, dispor os dois elementos em série (Modelos de Maxwell) ou em paralelo (Modelos de Kelvin-Voigt).



**Figura 6.3** Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.

Onde  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade,  $E$  é o módulo de Young e  $\varepsilon$  a deformação sofrida pela mola devida ao carregamento.

Nesse caso as equações são:

$$\text{Equilíbrio: } \sigma(t) = \sigma^e(t) + \sigma^v(t).$$

$$\text{Compatibilidade: } \varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) = \varepsilon^v(t)$$

$$\text{Equações constitutivas: } \sigma^e(t) = E\varepsilon^e(t) \text{ e } \sigma^v(t) = \eta\dot{\varepsilon}^v(t)$$

Substituindo as equações constitutivas e compatibilidade na equação de equilíbrio, obtém-se a equação diferencial do modelo.

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (6-2)$$

Para um dado histórico de tensões a solução da equação diferencial linear de primeira ordem é:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} d\tau \quad (6-3)$$

Integrando por partes é encontrada a função de influência fornecida pelo modelo:

$$D(t-T) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t-T)} \right) \quad (6-4)$$

Quando  $t$  tende ao infinito, a solução  $D$  corresponde a uma solução elástica assintótica quando toda tensão é suportada pela mola.

Um histórico de deformação é possível obter a tensão atual diretamente por meio da Eq. (6-2). Um teste de relaxação é fisicamente impossível com o modelo de Kelvin, pois  $\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \delta(t)$  o que corresponderia a uma tensão inicial infinitamente alta. Logo, não há função de relaxação correspondente para esse modelo.

### 6.3. Formulações MEC para Viscoelasticidade

#### 6.3.1. Modelo de Maxwell 2D

A Eq.(6-2) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t) - \eta \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} \quad (6-5)$$

Adoptando a simplificação na variável de viscosidade  $\eta$ , segundo (MESQUITA, 2002),  $\eta = \gamma E$  onde  $\gamma$  é o parâmetro de viscosidade, a Eq (6-5) pode ser apresentada como:

$$\sigma(t) = \gamma [E\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\sigma}(t)] \quad (6-6)$$

A extensão para o caso tridimensional pode ser feita diretamente, gerando a equação constitutiva do modelo:

$$\sigma_{ij}(t) = \gamma [C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}(t) - \dot{\sigma}_{kl}(t)] \quad (6-7)$$

Substituindo essa expressão na equação ponderada pela solução fundamental do MEC, omitindo a dependência explícita de t resulta:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \gamma [C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}] d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (6-8)$$

Definindo I, de modo a simplificar o trabalho algébrico:

$$I = - \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \gamma [C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}] d\Omega \quad (6-9)$$

Tendo em conta que  $u_{ki,l}^* C_{ijmn} = \sigma_{kmn}^*$  :

$$I = - \int_{\Omega} \gamma u_{ki,j}^* C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{kl} d\Omega = - \int_{\Omega} \gamma \sigma_{kmn}^* \dot{\epsilon}_{mn} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \dot{\sigma}_{kl} u_{ki,j}^* d\Omega \quad (6-10)$$

Logo, integrando por partes ambas as integrais resultantes:

$$I = - \int_{\Gamma} \gamma \sigma_{kij}^* \dot{u}_i n_j d\Gamma + \int_{\Omega} \gamma \sigma_{kij}^* \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma \dot{\sigma}_{ij} u_{ki}^* n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \gamma \dot{\sigma}_{ij,j} u_{ki}^* d\Omega \quad (6-11)$$

Substituindo as equações do Equilíbrio fundamental de Kelvin Eq (6-12). e de equilíbrio físico, Eq, (6-15), tem-se a Eq (6-14):

$$\sigma_{kmn,n}^* = -\delta(p,s) \delta_{km} \quad (6-12)$$

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = -\dot{b}_i \quad (6-13)$$

$$I = - \int_{\Gamma} \gamma p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \gamma [-\delta(p,s) \delta_{ki}] \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \gamma [-\dot{b}_i] u_{ki}^* d\Omega \quad (6-14)$$

A segunda integral na Eq (6-14) pode se apresentar como na Eq (6-15):

$$\int_{\Omega} \gamma [-\delta(p,s) \delta_{ki}] \dot{u}_i d\Omega = -\gamma \dot{u}_k(p) \quad (6-15)$$

Omitido a posição  $p$  do ponto fonte:

$$I = -\gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma - \gamma \dot{u}_k + \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \quad (6-16)$$

Substituindo a Eq.(6-16) na Eq.(6-8)

$$\gamma \dot{u}_k + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma = \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (6-17)$$

Omitindo as forças volumétricas, isto é  $b_i = 0$  tem-se:

$$\gamma \dot{u}_k + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma = \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma \quad (6-18)$$

Esta equação é válida para pontos internos no domínio. Por tanto para a avaliação no contorno se faz o limite da Eq.(6-18), obtendo assim a clássica identidade de Somigliana, resultando em:

$$\gamma c_{ki} \dot{u}_i + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma = \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma \quad (6-19)$$

A qual expressada em forma matricial é:

$$\gamma H \dot{U} = \gamma G \dot{P} + G P \quad (6-20)$$

Esta equação representa uma equação diferencial de primeira ordem no domínio do tempo. Para resolvê-la é aplicado uma aproximação de ordem linear no espaço do tempo para a primeira derivada da função utilizando diferenças finitas progressivas ou ascendentes. Dividindo a variação de deformação ( $\Delta U$ ) e/ou forças ( $\Delta P$ ) dependentes de um tempo específico (s) em passos finitos  $\Delta t$ , assume-se que:

$$\dot{U} = \frac{\Delta U}{\Delta t} \quad (6-21)$$

$$\dot{P} = \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad (6-22)$$

Onde  $\Delta U = U^{t+1} - U^t$  e  $\Delta P = P^{t+1} - P^t$

Logo, substituindo essa aproximação na Eq. (6-20)

$$\gamma H \frac{\Delta U}{\Delta t} = \gamma G \frac{\Delta P}{\Delta t} + G P^{t-1} \quad (6-23)$$

Que após manipulação algébrica resulta:

$$HU^{t+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{\gamma}\right) GP^{t+1} + HU^t - GP^t \quad (6-24)$$

Este é o sistema de equações que deve ser resolvido ao longo do tempo, para encontrar os valores das grandezas de contorno, utilizando os modelos de Maxwell.

### 6.3.2. Modelo de Kelvin 2D

Considerando o mesmo procedimento para a derivação da equação matricial de Maxwell (Eq. (6-24)) obtém-se a equação matricial para o modelo de Kelvin, Eq. (6-25)

$$\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) HU^{t+1} = GP^{t+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} HU^t \quad (6-25)$$

Onde as tensões totais em pontos internos é dada segundo a Eq. (6-26):

$$\sigma_{el}^{t+1} = \frac{\left(\sigma^{t+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_{el}^t\right)}{1 + \frac{\gamma}{\Delta t}} \quad (6-26)$$

### 6.3.3. Modelo de Boltzmann 2D

O mesmo procedimento é aplicado para um modelo misto ou de Boltzmann. Obtendo-se as grandezas no contorno, segundo a Eq.(6-27):

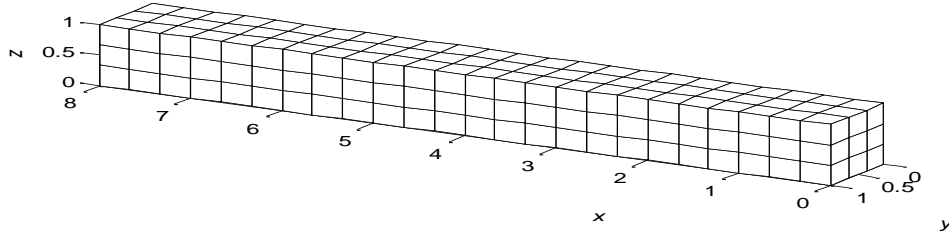
$$\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) HU^{t+1} = \left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_1 + E_2}{E_2}\right) G + \frac{\gamma}{\Delta t} (HU^t - GP^t) \quad (6-27)$$

As tensões totais no contorno são obtidas:

$$\sigma^{t+1} = \frac{\left(GP^{t+1} - \frac{E_2}{E_1 + E_2} HU^{t+1} - \frac{\gamma E_2}{E_1 + E_2} HU^{t+1} + \frac{\gamma E_2}{E_1 + E_2} GP^{t+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_2}{E_1 + E_2} \sigma^t\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_2}{E_1 + E_2}\right)} \quad (6-28)$$

### 6.3.4. Formulação Kelvin 3D

As equações fenomenológicas implementadas no MEC foram empregadas para o estudo de um prisma viscoelástico submetido a uma força constante. A geometria foi discretizada em 54 elementos constantes, conforme ilustrado na Figura 6.4. As faces “A” e “B” tiveram condições de contorno de engaste e força constante, respectivamente. A carga constante foi aplicada por um período de 45 dias.



**Figura 6.4** Modelo 3D para implementação do modelo de Kelvin-Voigt.

Considerando o modelo mecânico análogo e o método dos resíduos ponderados pertinente a formulação do MEC se parte da equação de equilíbrio, conforme apresentada na Eq.(6-29).

$$\int_V u_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i) dV = 0 \quad (6-29)$$

onde  $\Omega$  é o domínio analisado e  $u_{ki}^*$  é a solução fundamental de Kelvin. Logo, impondo as relações viscoelásticas apresentadas na Eq.(6-3) e aplicando o teorema da divergência chega-se na Eq.(6-30).

$$\int_S u_{ki}^* p_i dS - \int_V \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} dV - \int_V \varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} dV + \int_V u_{ki}^* b_i dV = 0 \quad (6-30)$$

Onde S é o contorno do corpo analisado. Logo, considerando que,

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (6-31)$$

$$\varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{u}_{l,m} = \gamma \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} \quad (6-32)$$

E substituindo tais considerações na Eq.(6-30) resulta a Eq.(6-33).

$$\int_S u_{ki}^* p_i dS - \int_V \sigma_{kij}^* u_{i,j} dV - \gamma \int_V \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} dV + \int_V u_{ki}^* b_i dV = 0 \quad (6-33)$$

Ao integrar por partes o segundo e o terceiro termo da Eq.(6-33) obtém-se a Eq.(6-34).

$$\int_S u_{ki}^* p_i dS - \int_S \sigma_{kij}^* n_j u_i dS + \int_V \sigma_{kij,j}^* u_i dV - \gamma \int_S \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i dS + \gamma \int_V \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i dV + \int_V u_{ki}^* b_i dV = 0 \quad (6-34)$$

A Eq.(6-34) pode ser reescrita ao usar o teorema fundamental do equilíbrio.

$$\sigma_{kij,j}^* = -\delta(p, q) \delta_{ki} \quad (6-35)$$

Onde  $\delta(p, q)$  é a função Delta de Dirac,  $q$  são o ponto campo e  $p$  o ponto fonte. Aplicando a Eq.(6-35) na Eq.(6-34), e levando em consideração as propriedades do delta de Dirac e o fato de que  $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$ , é obtido finalmente a representação da equação integral viscoelástica do modelo constitutivo de Kelvin-Voigt, conforme a Eq. (6-36).

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_S u_{ki}^* p_i dS - \int_S p_{ki}^* u_i dS - \gamma \int_S p_{ki}^* \dot{u}_i dS + \int_V u_{ki}^* b_i dV \quad (6-36)$$

onde  $\bar{C}_{ki}$  é o mesmo termo obtido para a formulação elástica. Para o problema algébrico computacional as fronteiras da superfície  $S$  do domínio analisado foram divididas por subdomínios  $S_n$  onde as variáveis foram aproximadas, seguindo a Eq. (6-37).

$$\begin{aligned} p_i &= \phi^N P_i^N \\ u_i &= \phi^N U_i^N \\ \dot{u}_i &= \phi^N \dot{U}_i^N \end{aligned} \quad (6-37)$$

Onde  $\phi^N$  e  $N$  são as funções de forma e  $p$  o nó do elemento, respectivamente. Os valores de  $P_i^N$ ,  $U_i^N$  e  $\dot{U}_i^N$  são variáveis nodais. Adotando essas aproximações numa representação integral para deslocamentos e trações, obtém-se a Eq.(6-38).

$$\bar{C}_{ki} U_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) = \sum_{c=1}^{n_c} \int_{S_c} u_{ki}^* \phi^N dS P_i^N - \sum_{s=1}^{n_s} \int_{S_s} p_{ki}^* \phi^N dS U_i^N - \gamma \sum_{s=1}^{n_s} \int_{S_s} p_{ki}^* \phi^N dS \dot{U}_i^N + b_i \sum_{s=1}^{n_s} \int_V B_{ki}^* dV \quad (6-38)$$

A Eq.(6-38) pode ser apresentada sob a forma matricial representando a discretização do problema.

$$HU(t) + \gamma H\dot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) \quad (6-39)$$

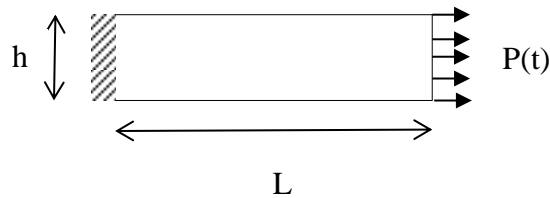
Para a solução da equação matricial das diferenciais temporais (Eq. (6-39)) é necessário aproximar a velocidade no tempo. Este procedimento é realizado adotando-se um comportamento linear ao longo do tempo, conforme apresentado na Eq.(6-40).

$$\dot{U}^{t+1} = \frac{U^{t+1} - U^t}{\Delta t} \quad (6-40)$$

## 6.4. Exemplos

### 6.4.1. Exemplo I: Viga Homogênea

Para a validação do modelo foi usada uma placa em estado plano de tensão, submetida a um ensaio de fluência que consiste na aplicação de forças de superfície constantes ao longo do tempo. Empregando os modelos de Kelvin foi modelada uma chapa submetida à tensão uniaxial tal como é apresentado na Figura 6.5.



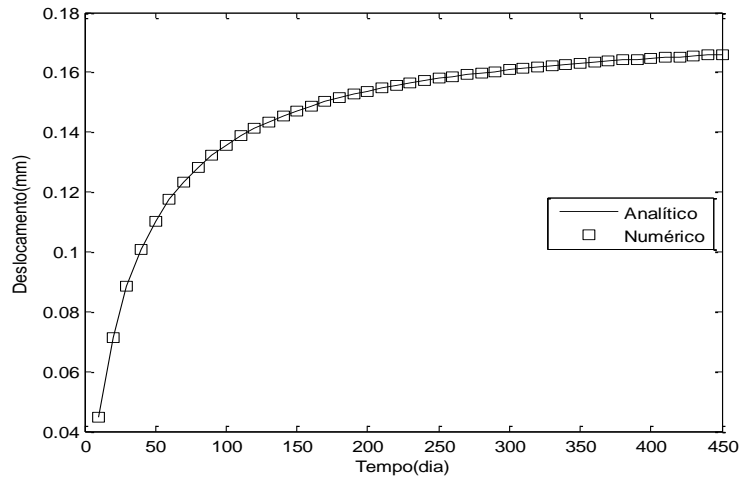
**Figura 6.5** Modelo de exemplo usado.

**Tabela 6.1** Propriedades físicas do material.

| Propriedades físicas       | Geometria                  |
|----------------------------|----------------------------|
| $E=22,5757\text{kN/mm}^2$  | $L=800\text{mm}$           |
| $\gamma=45,4545\text{dia}$ | $h=100\text{mm}$           |
| $\nu=0$                    |                            |
| Parâmetro de análise       | Carregamento               |
| $\Delta t=1\text{dia}$     | $P(t)=0,005\text{kN/mm}^2$ |
| Tempo total=450dias        |                            |

O modelo implementando é comparado com a solução analítica de acordo com a Figura 6.6.

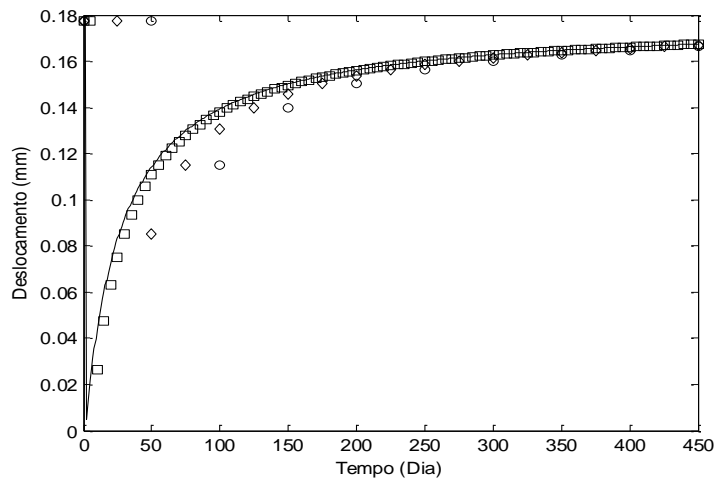




**Figura 6.6** Deslocamentos ao longo para pontos sobre a face carregada.

#### 6.4.2. Exemplo II: Estabilidade

A estabilidade do método também foi avaliada por meio da análise para intervalos de tempo cada vez maiores. A Figura 6.7 ilustra o procedimento, considerando os deslocamentos de fase.

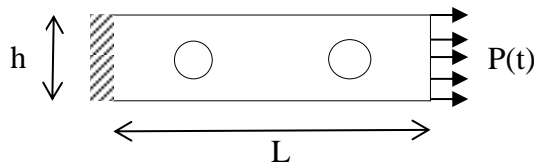


**Figura 6.7** Deslocamentos em função de diferente passos de tempo.

Pode ser observado que sem importar o passo temporal a convergência é a mesma.

### 6.4.3. Exemplo III: Viga Heterogênea

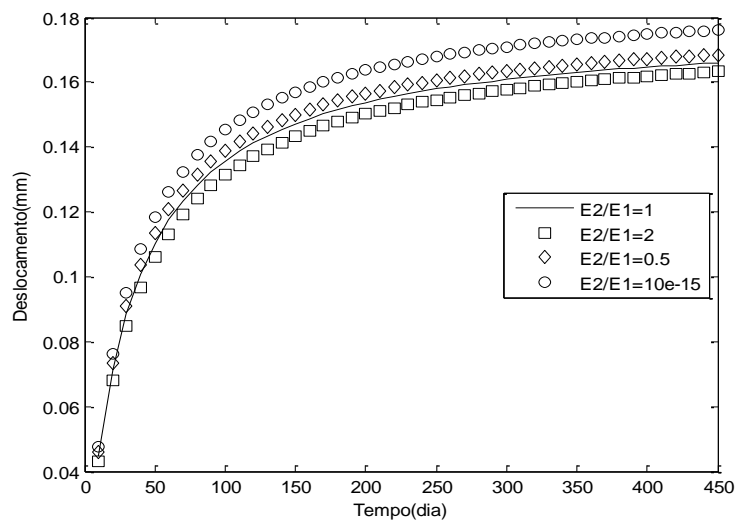
O efeito do número de inclusões no interior da chapa também foi avaliado, em que foi possível observar que à medida que se incrementa o número de inclusões (Figura 6.8) os deslocamentos são mais pronunciados. Este comportamento está apresentado conforme a Figura 6.9 com uma inclusão, onde os módulos de Young das inclusões foram impostos, conforme as seguintes relações:  $E_2/E_1=[1, 2, 0.5, 10^{-15}]$ . O mesmo procedimento foi realizado considerando 2 inclusões (Figura 6.10) e 4 Inclusões (Figura 6.11).



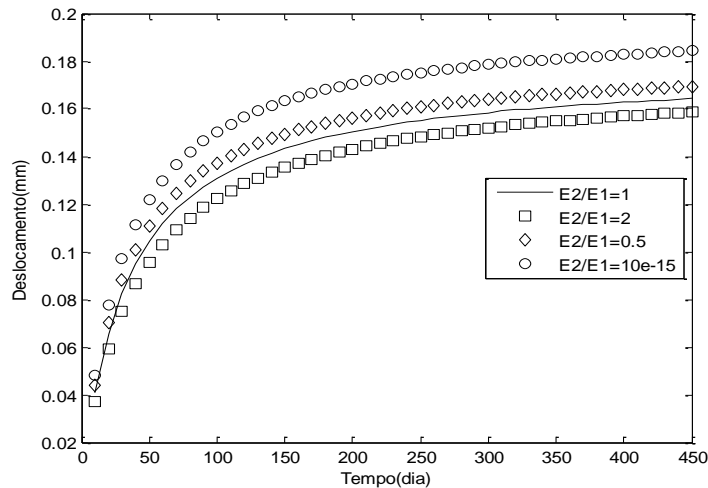
**Figura 6.8** Esquema de chapa com inclusões.

**Tabela 6.2** Propriedades físicas do material.

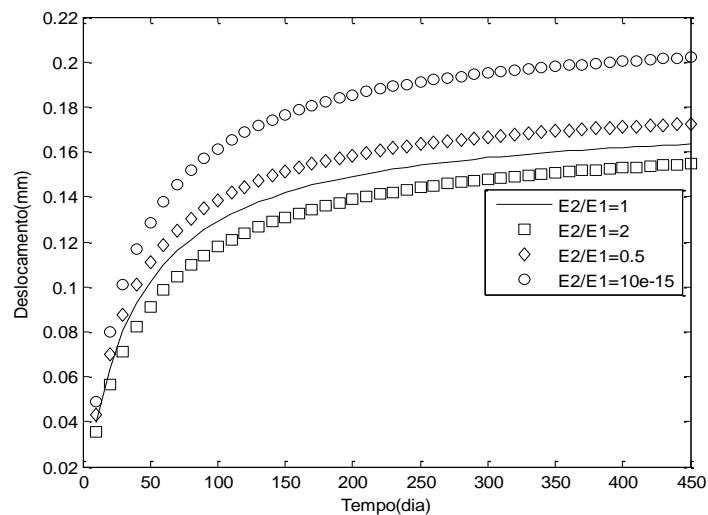
| Propriedades físicas       | Geometria                  |
|----------------------------|----------------------------|
| $E=22,5757\text{kN/mm}^2$  | $L=800\text{mm}$           |
| $\gamma=45,4545\text{dia}$ | $h=100\text{mm}$           |
| $\nu=0$                    |                            |
| Parâmetro de análise       | Carregamento               |
| $\Delta t=1\text{dia}$     | $P(t)=0,005\text{kN/mm}^2$ |
| Tempo Total=450dias        |                            |



**Figura 6.9** Relação dos módulos de Young com uma inclusão.



**Figura 6.10** Relação dos módulos de Young com duas inclusões.



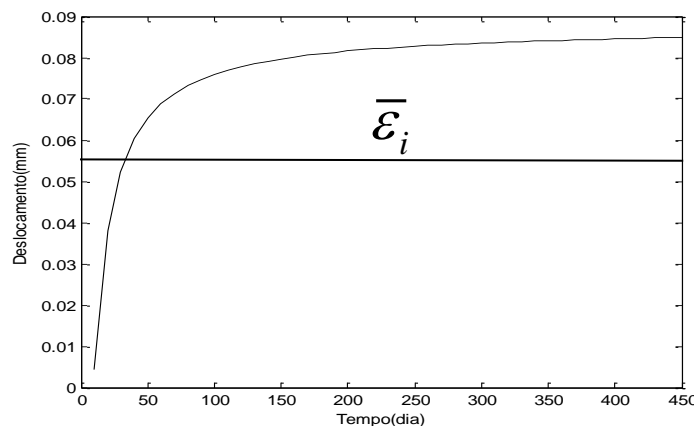
**Figura 6.11** Relação dos módulos de Young com quatro inclusões.

É possível ver em cada uma das figuras (Figura 6.9, Figura 6.10, Figura 6.11) que ao incrementar o número das inclusões os deslocamentos vão se incrementando, e pode ser visto também, que na medida que se incrementa a relação dos módulos o material sofre um maior deslocamento, sendo mais pronunciado na parte onde a viscosidade tende ao estado elástico. Este comportamento pode ser mais pronunciado quando o número de inclusões é aumentado. É importante salientar que quando a relação de módulos de  $k = 10^{15}$  estamos supondo que a inclusão apresenta um comportamento como se fosse um furo.

#### 6.4.4. Exemplo IV: Homogeneização

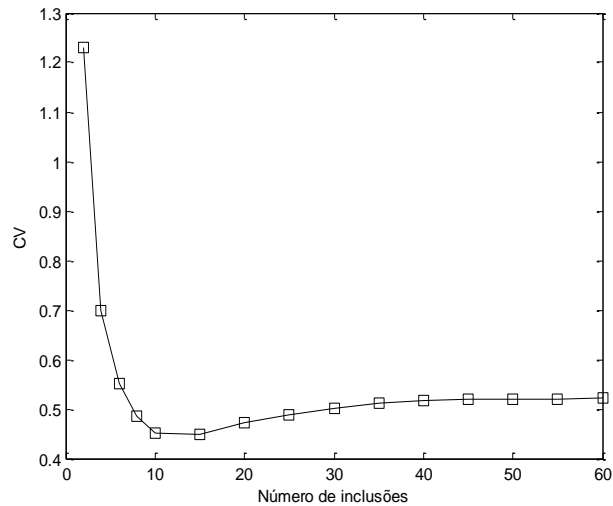
Tendo o modelo avaliado com dados, é feita uma homogeneização de uma amostra de material heterogêneo tipo concreto especial, neste caso foi tomado o mesmo material usado por (SOUZA, 2005) o qual trabalhou com uma Areia Asfalto Usinada Quente (AAUQ). Neste caso, o processo de homogeneização foi realizado supondo um nível de deslocamento médio de cada um dos ensaios de tensão-deformação de uma amostra viscoelástica submetida a um ensaio de fluência (*Creep test*).

Foi realizada uma análise de homogeneização do material viscoelástico mediante os ensaios do histórico de fluência das amostras. Para este caso, se toma como propriedade efetiva, para chegar ao EVR adequado, a média dos deslocamentos nos históricos de fluência, isto é,  $\bar{\epsilon}_i$ .  
Figura 6.12.



**Figura 6.12.** Relação dos módulos de Young com quatro inclusões.

Para cada EV, é realizada 20 ensaios de fluência variando em cada um a distribuição das heterogeneidades. Foi estimada para cada EV a média, o desvio padrão e o coeficiente de variância segundo as Eq.(5-25), Eq. (5-26), Eq.(5-27), respectivamente. As dimensões das inclusões foram obtidas para um concreto asfáltico (AAUQ), o mesmo material empregado por (SOUZA, 2005). Logo, o gráfico do número de inclusões x coeficiente de Variação para cada um dos ensaios é apresentada na Figura 6.13.



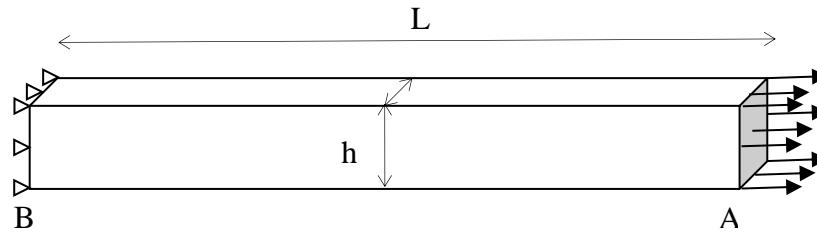
**Figura 6.13.** Coeficiente de variação do material visco-elástico.

É possível observar que a partir de 40 inclusões o coeficiente de variação é de 0.51, a partir daí se apresenta um erro menor que 1%, isto significa que as propriedades efetivas não têm variação significativa. Logo, o EVR com 40 inclusões é um tamanho representativo do AAUQ. As dimensões para este EVR é de 0.005m x 0.005m o que está de acordo com os resultados experimentais de Vasconcelos et al. (SOUZA, 2005).

Pode ser observado que quanto menor o número de inclusões maior é o coeficiente de variância do material. Isso significa que as amostras têm muita variabilidade em relação à deformação média.

#### **6.4.5. Exemplo V: Viga Homogênea em 3D**

Para a validação do modelo proposto em 3D foi discretizado um prisma, consoante Figura 6.14, considerando a ausência de força de corpo. A geometria do prisma está submetida a um carregamento constante em uma de suas extremidades e a um engaste na outra. Os parâmetros de solicitação e as propriedades físicas do material são apresentados na Tabela 6.3.

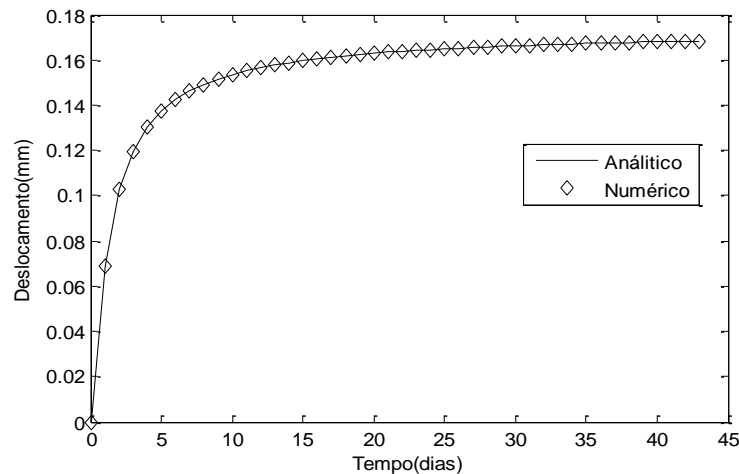


**Figura 6.14** Detalhe das dimensões e das condições de contorno.

**Tabela 6.3** Propriedades físicas do material.

| Propriedades físicas      | Geometria                  |
|---------------------------|----------------------------|
| $E=22,5757\text{kN/mm}^2$ | $L=800\text{mm}$           |
| $\gamma=4,4545\text{dia}$ | $h=100\text{mm}$           |
| $\nu=0$                   | $p=100\text{mm}$           |
| Parâmetro de análise      | Carregamento               |
| $\Delta t=1\text{dia}$    | $P(t)=0,005\text{kN/mm}^2$ |
| Tempo total=45dias        |                            |

Os valores dos deslocamentos avaliados na face A são obtidos com a implementação proposta usando MEC e posteriormente comparados com a curva analítica deste problema, conforme ilustrado na Figura 6.15.



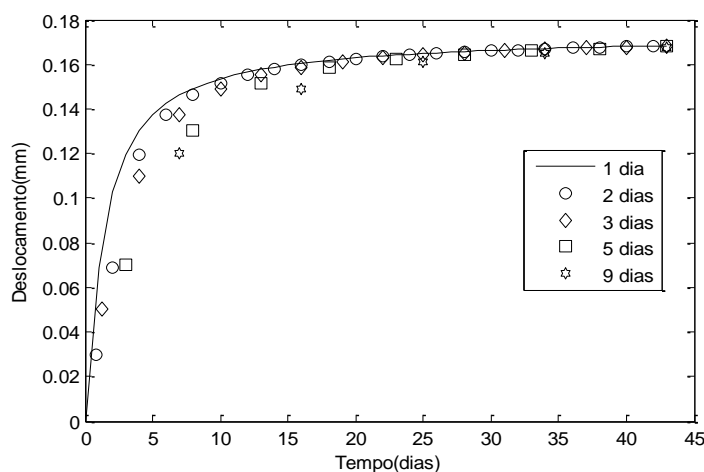
**Figura 6.15** Resposta em termos de deslocamentos na face A do domínio.

É possível verificar que o modelo implementado foi capaz de prever o comportamento viscoelástico do problema analisado pela concordância satisfatória da curva numérica com a analítica obtida a partir da Eq.(6-4). Isto indica que para um passo temporal diário unitário o método implementado prevê o comportamento viscoelástico do

material, apresentando coerência com os resultados obtidos por (MESQUITA, 2002; MESQUITA; CODA, 2002).

#### 6.4.6. Exemplo VI: Estabilidade em 3D

No passo seguinte foi avaliado a estabilidade do método implementado. Para estas análises foram utilizadas uma variação temporal dos deslocamentos, mudando os passos temporais em 1, 2, 3, 5 e 9 dias, durante cada rodada. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 6.16.



**Figura 6.16** Análise da estabilidade com diferentes passos de tempo.

Neste caso, pode ser observado que nos primeiros dias o método tem uma leve diferença com respeito ao método analítico, mas que vai se estabilizando à medida que os dias vão passando e o comportamento viscoso vai sendo alcançado. De forma geral, os resultados apresentaram uma boa estabilidade.

### 6.5. Conclusões sobre viscoelasticidade

Neste capítulo foi realizada uma análise elementar da teoria da viscoelasticidade e de como se pode adaptar ao código de MEC para análises de matérias viscoelásticos. O código foi avaliado com resultados analíticos reportados na literatura e mostrou satisfatória concordância com os resultados analíticos.

Apenas um problema de viscoelasticidade com o modelo de Kelvin-Voigt foi considerado tanto em 3D como em 2D. A consistência do método aplicado também pode

ser comprovada ao confrontar com diferenças de espaços de tempo entre cada ensaio, mostrando-se por tanto a qualidade e consistência do modelo implementado.

Foi realizada uma avaliação da influência de rigidez na matriz quando o número de inclusões era gradualmente aumentado, possível observar uma diferença pronunciada nos deslocamentos à medida que transcorre o tempo de carga aplicada.

Em cada um dos casos avaliados pode ser comprovado que a rigidez da inclusão tem um efeito significativo nos valores de deslocamentos do material viscoelástico, sendo este mais crítico na média a rigidez diminui. Este fator (rigidez da inclusão) tem maior influência sobre a rigidez do material que o número de inclusões (e percentagem de espaços da inclusão).



## 7. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

### 7.1. Conclusões

Neste capítulo são apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido neste trabalho. Foi realizada uma ampla revisão bibliográfica sobre o Ferro Fundido Nodular GGG-40 onde foi possível verificar a escassez de trabalhos que consideraram a geometria real do nódulo de grafita para um processo de homogeneização multiescala. Para o procedimento da homogeneização fez-se necessário a caracterização da microestrutura do FFN GGG-40.

Foi desenvolvido uma metodologia fundamentada nos ensaios de microdureza para determinar, de uma forma aproximada, o módulo de Young tanto dos nódulos de grafita como da matriz ferrítica. Neste caso, foi verificado que a partir da microindentação é possível determinar o módulo de Young com certa aproximação. Os resultados para o módulo de Young apresentaram valores dentro das faixas aceitáveis desta classe de material.

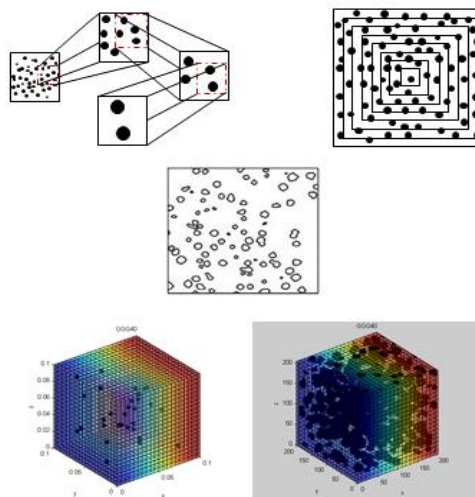
Além de efetuar uma caracterização das propriedades mecânicas do material e da morfologia, também foi realizado uma análise microscópica computarizada por raios X (Micro-CT). A partir desta ferramenta foi possível obter uma reconstrução das malhas para a modelagens numérica dos nódulos de grafita ao interior do matriz ferrítica, reproduzindo, tanto para o caso 2D como 3D a geometria real dos nódulos de grafita.

Também foi realizado o processo de homogeneização para 2D e 3D considerando os nódulos de grafita como geometrias sintéticas. Especificamente para o caso 2D foi implementado subregiões e neste caso o nódulo de grafita não foi considerado com um módulo de Young de 15 GPa.

Os resultados de todos os modelos numéricos implementados nesta tese podem ser resumidos conforme a tabela .

**Tabela 7.1** Resumos dos resultados.

| <b>Modelo</b>                | <b>E*[GPa]</b> |
|------------------------------|----------------|
| Sintético 2D – Estratégia I  | 192            |
| Sintético 2D – Estratégia II | 191            |
| Real 2D                      | 187            |
| Sintético 3D                 | 186            |
| Real 3D                      | 184            |
| <b>Experimental</b>          | <b>181</b>     |



**Figura 7.1** Ilustração dos modelos implementados.

Para o caso Sintético 2D foram adotados duas estratégias distintas para se determinar o EVR. A partir da implementação destas duas estratégias foi possível verificar que a Estratégia II, a qual considera a variação do tamanho dos elementos do volume representativo e mantém constante o tamanho das inclusões nodulares em escala normalizada, é a mais rápida em convergência. Porém, é importante salientar que ambas as estratégias resultam praticamente no mesmo valor de módulo de Young. Também foi possível verificar que modelos em 3D considerando a geometria real predizem com precisão o valor do módulo de Young efetivo quando comparados aos demais modelos. No caso desta tese o modelo real 3D considerando condições de contorno periódicas resultou em um módulo de Young efetivo no valor de 184 GPa, ficando muito próximo ao valor obtido experimentalmente.

O mesmo processo de homogeneização empregado para o GGG-40 considerando apenas a parte elástica foi implementado para problemas de natureza viscoelástica. Os resultados apresentaram valores satisfatórios aos encontrados em literatura.

## 7.2. Trabalhos Futuros

A partir dos resultados obtidos neste trabalho sugere-se alguns temas ainda não solucionados/implementados como proposta de continuidade na linha de estudos em nível de materiais microestruturais usando o MEC.

- Implementação de subregiões para problemas elásticos e viscoelásticos para problemas de homogeneização assintótica em 3D.
- Implementação para problemas de plasticidade.
- Consideração da imposição do dano em nível de microestrutura.
- Estudo da descolamento entre o nódulo da grafita e a matriz no início da região de escoamento do material.
- Análise da influência dos tipos do FFN GGG-40 conforme classificação da norma ASTM A247 nas propriedades efetivas do material.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACHENBACH, J. D.; ZHU, H. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 37, n. 3, p. 381–393, 1989.

ASKELAND, D.; FULAY, P.; WRIGHT, W. **The Science and Engineering of Materials**. 6. ed. USA: CENGAGE Learning, 2010.

ASTM INTERNATIONAL. **E112-96 Standard Test Methods for Determining Average Grain Size**, United State, 2004.

ASTM INTERNATIONAL. **E8/E8M-09 Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials**, United states, 2010.

ASTM INTERNATIONAL. **E10-12 Standard Test Method for Brinell Hardness of Metallic Materials**, United State, 2012.

ASTM INTERNATIONAL. **E92-16 Standard Test Methods for Vickers Hardness and Knoop Hardness of Metallic**, United State, 2016.

BANAUGH, R.; GOLDSMITH, W. Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 109, n. 1957, p. 1590–1601, 2014.

BANERJEE, P. K.; CATHIE, D. N. A direct formulation and numerical implementation of the boundary element method for two-dimensional problems of elastoplasticity. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 22, n. 4, p. 233–245, 1980.

BANERJEE, P. K.; RAVEENDRA, S. T. Advanced boundary element analysis of two and three dimensional problems of elastoplasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, n. 6, p. 985–1002, 1986.

BECKER, A. **The Boundary Element Method in Engineering: a complete course**. London, UK McGraw-Hill, , 1992.

BEER, G.; SMITH, I.; DUENSER, C. **The Boundary Element Method with Programming**. Springer W ed. Morlenbach Germany: Springer-Verlag, 2008.

BENEDETTI, I.; ALIABADI, M. H. A three-dimensional cohesive-frictional grain-boundary micromechanical model for intergranular degradation and failure in polycrystalline materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 265, p. 36–62, out. 2013.

BERBBIA, C.; WALKER, S. **The Boundary Element Techniques in Engineering**. 1. ed. London, UK: Newnes-Butterworths, 1980.

BERDIN, C.; DONG, M. J.; PRIOUL, C. Local approach of damage and fracture toughness for nodular cast iron. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 68, p. 1107–1117, 2001.

BOYES, W. **Non-Destructive Testing**. 4. ed. Linacre House, Jordan Hill. Oxford: Elsevier, 2010.

BRADLEY, W. L.; SRINIVASAN, M. N. Fracture and fracture toughness of cast irons. **International Materials Reviews**, v. 35, n. 3, p. 129–161, 1990.

BRASSART, L.; DOGHRI, I.; DELANNAY, L. Homogenization of elasto-plastic composites coupled with a nonlinear finite element analysis of the equivalent inclusion problem. **International Journal of Solids and Structures**, v. 47, n. 5, p. 716–729, 2010.

BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements An Introductory Course**. Second Ed ed. New York: McGraw-Hill, 1987.

BREBBIA, C.; TELLES, J.; WROBEL, L. **Boundary Element Techniques**. 1. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

BURLA, R. K.; KUMAR, A. V.; SANKAR, B. V. Implicit boundary method for determination of effective properties of composite microstructures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, n. 11–12, p. 2514–2526, 2009.

BURONI, F. C. **Modelagem e projeto Computacional de Materiais Microporosos com distribuição aleatória utilizando uma Formulação de Elementos de Contorno, Dissertação de Mestrado**. [s.l.] Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.

BURONI, F. C.; MARCZAK, R. J. Effective properties of materials with random micro-cavities using special boundary elements. **Journal of Materials Science**, v. 43, n. 10, p. 3510–3521, 2008.

CAKIR, M. C. et al. The effects of austempering temperature and time onto the machinability of austempered ductile iron. **Materials Science and Engineering: A**, v. 407, n. 1–2, p. 147–153, out. 2005.

CALLISTER, W. **Ciência e Engenharia de Materiais, Uma Introdução**. 7. ed. Rio de Janeiro, Brasil: [s.n.].

CHEN, L.; SCHWEIKERT, G. Sound Radiation from an Arbitrary Body. **The Journal of the Acoustical society of America**, v. 35, n. 10, 1963.

CHENG, A.; CHENG, D. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, p. 268–302, 2005.

CHRISTENSEN, R. M.; LO, K. H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 27, n. 4, p. 315–330, 1979.

COCCO, V. DI; IACOVIELLO, F.; CAVALLINI, M. Damaging micromechanisms characterization of a ferritic ductile cast iron. **Engineering Fracture MEchanics**, v. 77, p. 2016–2023, 2010.

COOK, R. D. **Finite Element Modeling for Stress Analysis** New York John Wiley & Sons, , 1995.

COSTA, M. J. G. DA. **Homogeneização Computacional de Ferro fundido Nodular Utilizando Microtomografia e Elementos Finitos, Dissertação de Mestrado**. [s.l.] Universidade Federal Fluminense, 2016.

CROTTY, J. M. et al. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 18, n. 4, p. 997–1017, 1980.

CRUSE, T. Numerical Solutions in three Dimensional Elastostatics. **Int. J. Solids**

**Structures**, v. 5, p. 1259–1274, 1969.

CRUSE, T. A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. II. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 22, n. 2, p. 341–355, 1968.

CRUSE, T. A. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. **Computers and Structures**, v. 4, n. 4, p. 741–754, 1974.

CRUSE, T. A.; VANBUREN, W. Three-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack. **International Journal of Fracture Mechanics**, v. 7, n. 1, p. 1–15, 1971.

CRUSE, T.; RIZZO, F. A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, p. 244–259, 1968.

D.S H, W. B. Micromechanical modelling of damage and fracture of ductile materials. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 21, p. 1175–1188, 1998.

DANDEKAR, C. R.; SHIN, Y. C. Modeling of machining of composite materials: A review. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 57, p. 102–121, jun. 2012.

DAVIES, A. J.; CRANN, D. The Laplace transform boundary element methods for diffusion problems with periodic boundary conditions. **Boundary Elements XXVI**, v. 1, p. 393–402, 2004.

DEDAVID, B. A.; GOMES, C. I.; MACHADO, G. Microscopia Eletrônica de Varredura -Aplicações e Preparação de Amostras. **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**, p. 60, 2007.

DIERICKX, P. et al. Study of Physico-Chemical Mechanisms Responsible for Damage of Heat Treated and As-Cast Ferritic Spheroidal Graphite Cast Irons. **Advanced Materials Research**, v. 4–5, n. 2, p. 153–160, 1997.

DOMÍNGUEZ, J. **Boundary elements in dynamics**. London, UK: Elsevier Applied Science e Computational Mechanics Publications Southampton Boston, 1993.

DRYDEN, J. R.; DEAKIN, A. S.; PURDY, G. S. Elastic Analysis of Deformation Near a Spherical Carbon Particle embedded in Iron. v. 35, n. 3, p. 681–689, 1987.

ENDO, M.; YANASE, K. Effects of small defects, matrix structures and loading conditions on the fatigue strength of ductile cast irons. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 69, p. 34–43, 2014.

FERNANDINO, D. O.; CISILINO, A. P.; BOERI, R. E. Determination of effective elastic properties of ferritic ductile cast iron by computational homogenization, micrographs and microindentation tests. **Mechanics of Materials**, v. 83, p. 110–121, 2015.

FREDHOLM, I. Sur une Classe D'equations Fonctionnelles. **Magazin for Naturvidenskaberne. Annali di Matematica**, v. 2, p. 365–390, 1903.

G.T.SYMM. Integral equation methods in potential theory. II. **The Royal Society**,

v. 275, n. 1360, p. 33–46, 1963.

GALVANETTO, U.; PELLEGRINO, C.; SCHREFLER, B. Plane stress plasticity in periodic composites. **Computational Materials Science(Netherlands)**, v. 13, p. 31–41, 1997.

GAO, X. W.; DAVIES, T. **Boundary Element Programming in Mechanics**. [s.l.] Cambridge University Press, 2002.

GHOLIZADEH, S. A review of non-destructive testing methods of composite materials. **Procedia Structural Integrity**, v. 1, p. 50–57, 2016.

GHOSH, S.; MOORTHY, S. Elastic-plastic analysis of arbitrary heterogeneous materials with the Voronoi Cell finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 121, n. 1–4, p. 373–409, 1995.

GIBSON, R. F. A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures. **Composite Structures**, v. 92, n. 12, p. 2793–2810, nov. 2010.

GIRÃO, A. V.; CAPUTO, G.; FERRO, M. C. Application of Scanning Electron Microscopy–Energy Dispersive X-Ray Spectroscopy (SEM-EDS). **Comprehensive Analytical Chemistry**, v. 75, p. 153–168, 2017.

GITMAN, I. M.; ASKES, H.; SLUYS, L. J. Representative volume: Existence and size determination. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 74, n. 16, p. 2518–2534, 2007.

GROSS, D.; SEELING, T. **Fracture Mechanics with an Introduction to Micromechanics**. 2. ed. Darmstadt: Springer-Verlag, 2006.

GURTING, M. E.; STERNBERG, E. On the linear theory of viscoelasticity. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 7, n. 1, p. 402–411, 1961.

HILL, R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, p. 357–372, 1963.

HUANG, Q.; ZHENG, X.; YAO, Z. Boundary element method for 2D solids with fluid-filled pores. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 35, n. 2, p. 191–199, 2011.

HÜTTER, G.; ZYBELL, L.; KUNA, M. Micromechanisms of fracture in nodular cast iron: From experimental findings towards modeling strategies - A review. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 144, p. 118–141, 2015.

INKSON, B. J. **Scanning Electron Microscopy (SEM) and Transmission Electron Microscopy (TEM) for Materials Characterization**. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-08-100040-3.00002-X>>. Acesso em: 25 abr. 2017.

J.T. KATSIKADELIS. **Boundary Elements Theory and Applications**. 1. ed. Oxford: Elsevier Science Ltd, 2002.

JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory. I. **Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences**, v. 275, p. 23–32, 1963.

JASWON, M. A.; PONTER, A. R. An Integral Equation Solution of the Torsion Problem. **MAthematical Physical & Engineering Sciences**, p. 237–246, 1963.

JOLLY, M. et al. Review of Non-destructive Testing (NDT) Techniques and their Applicability to Thick Walled Composites. **Procedia CIRP**, v. 38, p. 129–136, 2015.

KANE, J. H. **Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics**. 2. ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1994.

KANIT, T. et al. Determination of the size of the representative volume element for random composites: Statistical and numerical approach. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 13–14, p. 3647–3679, 2003.

KARAMAN, S.; ÇETİNDARSLAN, C. S. **Manufacturing Process of GGG40 Nodular Cast Iron**. Unitech 10. **Anais...**Gabrovo: 2010

KASAYAPANAND, N. Exact Solution of Double Filled Hole of an Infinite Plate. **Mechanics of Materials and Structure**, v. 3, n. February, p. 365–373, 2008.

KIRKUP, S. **The Boundary Element Method in Acoustics**. Disponível em: <<http://www.boundary-element-method.com/>>. Acesso em: 25 maio. 2016.

KONEČNÁ, R. et al. A comparative study of the fatigue behavior of two heat-treated nodular cast irons. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 108, p. 251–262, 2013.

KOUZNETSOVA, V.; BREKELMANS, W. A M.; BAAIJENS, F. P. T. Approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. **Computational Mechanics**, v. 27, n. 1, p. 37–48, 2001.

L.WROBEL. **The Boundary Element Method. Applications in Thermo-Fluids and Acoustics**. 1. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2002.

LACHAT, J. C.; WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three dimensional elastostatics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 10, n. May 1975, p. 991–1005, 1976.

LEE, K.; GHOSH, S. A microstructure based numerical method for constitutive modeling of composite and porous materials. **Materials Science and Engineering: A**, v. 272, n. 1, p. 120–133, 1999.

M.H. ALIABADI. **The Boundary Element Method**. 1. ed. London, UK: [s.n.].

MESQUITA, A. D. Boundary integral equation method for general viscoelastic analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, n. 9, p. 2643–2664, 2002.

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Alternative Kelvin viscoelastic procedure for finite elements. **Applied Mathematical Modelling**, v. 26, n. 4, p. 501–516, 2002.

MUKHERJEE, S.; MUKHERJEE, Y. X. **Boundary Methods. Elements, Contours, and Nodes**. Boca Raton FL: Taylor & Francis Group, LLC, 2005.

N. W. TSCHOEGL. **The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior-an introduction**. 1. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1989. v. 1

NEMAT-NASSER, S. **Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials**. 2. ed. North-Holland: Elsevier, 1999.

NEMAT-NASSER, S.; LORI, M.; DATTA, S. K. Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials. **Journal of Applied Mechanics**, v. 63, p. 561, 1996.



NGUYEN, V. D. et al. Imposing periodic boundary condition on arbitrary meshes by polynomial interpolation. **Computational Materials Science**, v. 55, p. 390–406, 2012.

OGBONNA, N. A representation theorem for the circular inclusion problem. **Math. Mech**, v. 1520, n. 12, p. 1514–1520, 2015.

OLIVER, C.; PHARR, M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. **Journal of Materials Research**, v. 7, n. 11, p. 1564–1583, 1992.

OLIVER, W. C.; PHARR, G. M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology. **Journal of Materials Research**, v. 19, n. 1, p. 3–20, 2004.

ORTIZ, J.; CISILINO, A.; OTEGUI, J. Effect of Microcracking on the Micromechanics of Fatigue crack Growth in Austempered Ductile Iron. **Fatigue Fract Engng Mater Struct**, v. 24, p. 591–605, 2001.

PANNEERSELVAM, S. et al. An investigation on the stability of austenite in Austempered Ductile Cast Iron (ADI). **Materials Science and Engineering: A**, v. 626, p. 237–246, fev. 2015.

PARIS, F.; GARRIDO, J. Aspecto numericos de la aplicacion del metodo de los elementos de contorno al problema de contacto. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 2, n. 1, p. 43–62, 1986.

PETROV, I. et al. Numerical Modeling of Non-destructive Testing of Composites. **Procedia Computer Science**, v. 96, n. September, p. 930–938, 2016.

PIERARD, O. et al. Micromechanics of elasto-plastic materials reinforced with ellipsoidal inclusions. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 21, p. 6945–6962, 2007.

PUNDALE, S. H.; ROGERS, R. J.; NADKARNI, G. R. Finite Element Modeling of Elastic Modulus in Ductile Irons: Effect of Graphite Morphology. **American Foundrymen's Society Transactios**, v. 106, p. 99–105, 1998.

QI, K. et al. Research on the hot deformation behavior and graphite morphology of spheroidal graphite cast iron at high strain rate. **Materials and Design**, v. 30, n. 10, p. 4511–4515, 2009.

QU, X. et al. Review of metal matrix composites with high thermal conductivity for thermal management applications. **Progress in Natural Science: Materials International**, v. 21, n. 3, p. 189–197, 2011.

RASHED, Y. F. **Tutorial 1: An Introduction to Boundary Elements** Giza Egypt Departament of Structural Engineering, Cairo University, , 2001. Disponível em: <[http://www.boundaryelements.com/index.php?option=com\\_content&view=category&layout=blog&id=13&Itemid=44](http://www.boundaryelements.com/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=13&Itemid=44)>

RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Q.App Math**, v. 25, n. 1, p. 83–95, 1967.

RODRÍGUEZ, F. J. et al. Evaluación de propiedades elásticas de la fundición nodular empleando micromecánica computacional. **Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingenieria**, v. 31, n. 2, p. 91–105, 2015.

ROULA, A.; KOSNIKOV, G. A. Manganese distribution and effect on graphite shape in advanced cast irons. **Materials Letters**, v. 62, n. 23, p. 3796–3799, 2008.

SAHIN, Y.; ERDOGAN, M.; KILICLI, V. Wear behavior of austempered ductile irons with dual matrix structures. **Materials Science and Engineering A**, v. 444, n. 1–2, p. 31–38, 2007.

SANDSTÖM, C.; LARSSON, F.; RUNESSON, K. Weakly periodic boundary conditions for the homogenization of flow in porous media. **Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences**, v. 1, n. 1, p. 12, 2014.

SAPUAN, S. M. Chapter 3 - Composite Materials. In: **Composite Materials**. [s.l.] Elsevier Inc., 2017. v. 72p. 57–93.

SEZAWA, K.; KÔGAKUHAKWI. Stresses under Tension in a Plate with a Heterogeneous Insertion. **Japan Aerospace Exploration Agency**, v. 68, p. 25–43, 1931.

SHACKELFORD, J. F. **Ciencia dos materiais**. 6. ed. São Paulo: Pearson Education, 2008.

SHAW, R. P. Diffraction of Waves by Circular Obstacles with Variable Impedance Boundary Conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 38, 1975.

SHIOYA, S. On a semi-infinite thin plate with a circular inclusion under. **The Japan Society of Mechanical Engineers**, v. 10, n. 37, 1967.

SOARES, G. F. P. **Homogenização de um material composto formado por uma matriz polimérica com uma segunda fase particulada, Tese de Doutorado**. [s.l.] Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superficies sferiche. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa**, v. 4, p. 101–172, 1887.

SOUZA, F. V. **Modelo Multi-escala para Análise Estrutural de Compósitos Viscoelásticos Suscetíveis ao Dano**. Fortaleza-CE: Universidade Federal do Ceará, 2005.

SPEICH, G. R.; SCHWOEBLE, A. J.; KAPADIA, B. M. Elastic moduli of gray and nodular cast iron. **Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics**, v. 47, n. 4, p. 821–826, 1980.

SPICER, J. B. et al. Laser Ultrasonic Assessment of the Effects of Porosity and Microcracking on the Elastic Moduli of Nuclear Graphites. **Journal of Nuclear Materials**, v. 471, p. 80–91, 2015.

STROEVEN, M.; ASKES, H.; SLUYS, L. J. Numerical determination of representative volumes for granular materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 3221–3238, 2004.

TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. On the application of the boundary element method to plasticity. **Applied Mathematical Modeling**, v. 3, n. 7, p. 466–470, 1979.

THIBODEAU, W.; WOOD, L. Photoelastic Determination of Stresses Around a Circular Inclusion in Rubber. **Research of the National Bureau of Standards**, v. 20, p. 393–409, 1938.

TONG, X. et al. Effects of graphite shape on thermal fatigue resistance of cast iron

with biomimetic non-smooth surface. **International Journal of Fatigue**, v. 31, n. 4, p. 668–677, 2009.

VEYTSKIN, Y. B. et al. Micromechanical characterization of shales through nanoindentation and energy dispersive x-ray spectrometry. **Geomechanics for Energy and the Environment**, v. 9, p. 21–35, 2017.

YACOBI. **Analytical microscopy**. Disponível em: <<http://www.nrel.gov/docs/fy00osti/22211.pdf>>. Acesso em: 10 abr. 2017.

YAO, Z. et al. 2D simulation of composite materials using BEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28, n. 8, p. 927–935, 2004.

YAO, Z.; KONG, F.; ZHENG, X. Simulation of 2D Elastic Bodies with Randomly Distributed Circular Inclusions Using the BEM. **Electronic Journal of Boundary Elements**, v. 1, n. 2, p. 270–282, 2003.

YUE, X.; WEINAN E. The local microscale problem in the multiscale modeling of strongly heterogeneous media: Effects of boundary conditions and cell size. **Journal of Computational Physics**, v. 222, n. 2, p. 556–572, 2007.

ZHANG, K.; BAI, J.; FRANÇOIS, D. Ductile fracture of materials with high void volume fraction. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, p. 3407–3425, 1999.

ZHU, H.; ACHENBACH, J. D. Effect of Fiber-Matrix Interphase Defects on Microlevel Stress States at Neighboring Fibers. **Journal of Composite Materials**, v. 25, p. 224–238, 1991.

ZOHDI, T. I. Statistical ensemble error bounds for homogenized microheterogeneous solids. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, v. 56, n. 3, p. 497–515, maio 2005.

ZOHDI, T. I.; WRIGGERS, P. **Introduction to Computational Micromechanics**. 1. ed. New York: [s.n.]. v. 20

ZYBELL, L. et al. Overload Effects During Fatigue Crack Growth in Nodular Cast Iron - simulation with an Extended Strip-yield Model. **Procedia Materials Science**, v. 3, p. 221–226, 2014.