



Universidade de Brasília
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**Cosmologia e Energia Gravitacional no Teleparalelismo
Conforme**

Jucélia Gomes da Silva

Brasília - DF

2017

Universidade de Brasília
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**Cosmologia e Energia Gravitacional no Teleparalelismo
Conforme**

Jucélia Gomes da Silva

Tese de doutorado realizada sob a orientação do Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília em complementação aos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutora em Física.

Brasília - DF

2017

“Cosmologia e energia gravitacional no
teleparalelismo conforme.”

Por

Jucélia Gomes da Silva.

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos
requisitos para a obtenção do grau de Doutora em Física.

Aprovada por:



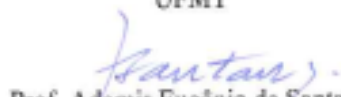
Prof. Sérgio Costa Ulhoa
IF/UnB



Prof. Ronni Geraldo Gomes Amorim
FGA/UnB



Prof. Alessandro Ferreira dos Santos
UFMT



Prof. Ademir Eugênio de Santana
IF/UnB

Prof. Dr. Geraldo Magela e Silva
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

A maior Vitória está em acreditar sem mesmo nunca ter visto. Esta é minha grande vitória.

“Quem me protege e me ampara é meu Deus, é o Senhor quem sustenta minha vida.” **Salmo 53(54),6**

Agradecimentos

A Deus, meu Pai, e toda a Família Celeste.

Ao meu esposo Arthur Akira Mamiya.

Aos meus pais Cinézio Gomes da Silva e Adelizia Ferreira da Silva.

Às Famílias Silva, Vilas Boas e Mamiya.

Ao meu orientador Prof. Sérgio Costa Ulhoa.

A todos os professores.

Aos técnicos.

Aos amigos.

À Universidade de Brasília.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Nesta tese é calculada a energia gravitacional tensorial apresentada por Maluf, para o caso de um universo homogêneo e isotrópico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) no contexto do Teleparalelismo Conforme, gerando um resultado não-nulo e positivo para um universo plano sob certas condições iniciais. As soluções das equações de campo foram encontradas incluindo a imposição de uma equação de estado para fluido escuro aplicado a FRW. Trabalhou-se com soluções analíticas no vácuo, e com soluções numéricas quando o universo é preenchido por um fluido perfeito conforme. No vácuo, há uma solução particular que, quando submetida a certas condições de contorno, se comporta de forma semelhante ao gás de Chaplygin modificado. Para o caso do universo com fluido perfeito conforme, foi possível observar que o campo escalar contribui na aceleração do universo, sendo para o caso plano interpretado como o responsável por tal efeito; foi também calculada a energia associada ao fluido escuro para diferentes soluções.

Palavras chaves: *Gravidade Conforme, Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral, Gravidade Teleparalela Conforme, Energia Gravitacional*

In this Thesis the tensorial gravitational energy presented by Maluf is calculated, for the case of a homogeneous isotropic Friedmann-Robertson-Walker (FRW) universe in the context of Conformal Teleparallel Gravity, yielding a positive non-zero result for a flat universe under certain initial conditions. The solutions of the field equations were found by imposing an equation of state for the dark fluid applied to FRW. Both analytical solutions in vacuum and numerical solutions when the universe is filled with a conformal perfect fluid were studied. In vacuum, there is a particular solution which, when submitted to certain initial conditions, behaves similarly to the modified Chaplygin gas. For the case of the universe with conformal perfect fluid, it was possible to observe that the scalar field contributes to the acceleration of the universe, being for the flat case interpreted as the responsible for such effect; additionally the energy associated to the dark fluid was calculated for different solutions .

Keywords:: *Conformal Gravity, Teleparallel Equivalent of General Relativity, Conformal Teleparallel Gravity, Gravitational Energy*

Conteúdo

Lista de Figuras	xi
Introdução	1
1 Gravitação	4
1.1 Notação Tensorial	5
1.2 Relatividade Geral	6
1.2.1 O Formalismo da Relatividade Geral	7
1.2.2 Equações de Einstein	10
1.2.3 Tensor Momento-Energia $T^{\mu\nu}$	12
1.3 Cosmologia	13
2 Gravidade Teleparalela	20
2.1 Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral	21
2.1.1 Tetradas	21
2.1.2 Formalismo da teoria TERG	24
2.1.3 Equações de campo da teoria TERG	30
2.2 Transformações Conformes	34
2.3 Teoria de Weyl	36
2.4 Teleparalelismo Conforme	39
2.4.1 Equações de campo do Teleparalelismo Conforme.	43
2.4.1.1 Equação de campo com respeito a $\phi(t)$	43
2.4.1.2 Equações de campo com respeito a $e_{a\mu}$	44
2.5 Teoria de Brans-Dicke	48
2.5.1 Hoyle-Narlikar	49

3	Momento-energia Gravitacional P^a	50
3.1	Conservação da Energia e Teorema de Noether	50
3.2	Momento-Energia Gravitacional	54
3.2.1	Conservação da energia no TERG	59
3.2.2	Conservação da Energia no Teleparalelismo Conforme	59
4	Cosmologia Conforme Teleparalela	61
4.1	Densidade de Lagrangiana para fluido perfeito conforme	61
4.2	Equações de campo com fluido perfeito conforme	63
4.3	Friedmann-Robertson-Walker	68
4.3.1	Equação de campo com respeito a $\phi(t)$ para FRW	71
4.3.2	Equações de campo com respeito a $e_{a\mu}$ para FRW com fluido perfeito conforme	72
4.4	Soluções das Equações de Campo do Teleparalelismo Conforme	76
4.4.1	Soluções para o vácuo	77
4.4.2	Soluções na presença de fluido perfeito conforme	90
4.5	Energia Gravitacional	98
5	Conclusão	107
	Bibliografia	110

Lista de Figuras

4.1	Gráficos do fator de escala em função do tempo para um Universo plano no vácuo para diferentes valores de w , com as condições iniciais $a(0) = 1$ e $\dot{a}(0) = 1$	88
4.2	Gráficos do fator de escala em função do tempo para um Universo aberto no vácuo para diferentes valores de w , com as condições iniciais: (a) $a(0) = 0$ e $\dot{a}(0) = 1$; (b) $a(0) = 1$ e $\dot{a}(0) = 1$; (c) $C_1 = C_2 = 0$	89
4.3	Gráficos do fator de escala $a(t)$ e do campo escalar $\phi(t)$ em função do tempo para um Universo aberto, plano ou fechado, ou seja, com o parâmetro de curvatura variando entre $k = -1, 0, 1$	92
4.4	Gráficos da densidade de um fluido perfeito conforme $\rho(t)$ e do parâmetro de Hubble $H(t)$ em função do tempo para $k = -1, 0, 1$	93
4.5	Gráficos do parâmetro de desaceleração $q(t)$ em função do tempo para $k = -1, 0, 1$	94
4.6	Gráficos em função do tempo (a) do parâmetro de Hubble, (b) do campo escalar, (c) da densidade de um fluido perfeito conforme, (d) do fator de escala, (e) da Energia Escura (E_d), para o modelo de universo $k = 0$ e $w = -1$	103
4.7	Gráficos em função do tempo (a) do parâmetro de Hubble, (b) do campo escalar, (c) da densidade de um fluido perfeito conforme, (d) do fator de escala, (e) da Energia Escura (E_d), para o modelo de universo $k = 0$ e $w = 0$	104
4.8	Gráficos em função do tempo (a) do parâmetro de Hubble, (b) do campo escalar, (c) da densidade de um fluido perfeito conforme, (d) do fator de escala, (e) da Energia Escura (E_d), para o modelo de universo $k = 0$ e $w = 1/3$	105

4.9 Gráficos em função do tempo (a) do parâmetro de Hubble, (b) do campo escalar, (c) da densidade de um fluido perfeito conforme, (d) do fator de escala, (e) da Energia Escura (E_d), para o modelo de universo $k = 0$ e $w = 1$.106

Introdução

A Relatividade Geral é uma teoria gravitacional desenvolvida por Einstein em 1915 [1], que gera resultados coerentes com às observações feitas, como a radiação cósmica de fundo [2], estruturas em grandes escalas [3], a descoberta das ondas gravitacionais em 2016 [4]. Esta teoria é suportada por dois princípios básicos - o Princípio da Equivalência e o Princípio da Covariância [5].

Embora a Relatividade Geral seja uma teoria já consolidada, grande parte da composição do Universo não é explicada por ela, um total de 96% [6]. Esta porcentagem é dividida entre matéria escura e energia escura, sendo esta última a maior entre elas. A matéria escura foi deduzida inicialmente por Fritz Zwicky em 1933 [7], denominando-a como matéria invisível, a qual interage apenas gravitacionalmente em torno das galáxias. Esta dedução foi feita a partir do cálculo das velocidades radiais de algumas galáxias. Foi evidenciada empiricamente por Vera Coper Rubin em 1965 [8].

A energia escura foi descoberta em 1998 por dois grupos independentes - Permuter et. al. [9] e Riess et. al. [10] - onde foi verificado que o redshift de certas supernovas era mais baixo que o esperado, o que indicava uma expansão acelerada do Universo. Pouco é sabido o que pode estar causando esta aceleração; é sugerido que seja uma quantidade exótica ou fluido escuro, que exiba pressão negativa, sendo denominada de energia escura.

Assim posto, nosso foco é estudar no contexto cosmológico uma teoria alternativa à Relatividade Geral, mas que seja capaz de reproduzir seus resultados, com possibilidade de trazer novas soluções que possam compôr a compreensão dos questionamentos ainda abertos, como a energia escura. Outro questionamento que é investigado no modelo adotado nesta tese se refere à localizabilidade da energia gravitacional.

Na Relatividade Geral o problema da não-localizabilidade da energia gravitacional é comumente relacionado ao Princípio da Equivalência [11], por não permitir, para regiões suficientemente pequenas, distinguir efeitos de referencial acelerado de efeitos de forças

gravitacionais, dessa forma, impedindo uma definição local e não ambígua de energia gravitacional. A importância de definir uma expressão para a energia gravitacional é de agregar conhecimento sobre o conteúdo do Universo a fim de explicar seus fenômenos, e classificar as soluções da teoria.

Há inúmeras teorias alternativas, dentre elas a teoria do Teleparalelismo Conforme, desenvolvida por Maluf e Faria [12]. Sua vantagem advém de que ela proporciona uma formulação natural e coerente para o desenvolvimento desta tese. Sua energia gravitacional tem uma expressão tensorial, a teoria se reduz ao Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG) para certas condições, e as equações de campo são invariantes por transformações conformes devido à inclusão de um campo escalar, o qual é interpretado por contribuir na explicação da aceleração do Universo no modelo cosmológico apresentado nesta tese. Outra maneira da gravidade ser invariante por transformações conformes é escolhendo uma Lagrangiana com o termo quadrático do tensor de Weyl [13]. Esta é uma proposta que não foi avaliada neste trabalho por envolver termos de quarta ordem.

A expressão tensorial da energia gravitacional foi obtida no contexto do Teleparalelismo Equivalente a Relatividade Geral por Maluf *et al* [14], de maneira não ambígua e natural. Esta teoria é uma teoria gravitacional alternativa formulada na geometria de Weitzenböck, utilizando o campo de tetradas $e_{a\mu}$, com torção diferente de zero e curvatura nula.

Portanto, nesta tese é calculada a energia escura, que é a diferença entre a energia total e a energia da matéria, para um universo homogêneo e isotrópico de Friedmann-Robertson-Walker utilizando soluções numéricas na teoria do Teleparalelismo Conforme, acrescido de uma equação de estado para fluido escuro. Esta teoria dá significado para a energia escura, uma vez que no contexto do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral para um universo plano, é nula [15] a diferença entre a energia total e a energia da matéria, ao contrário do resultado obtido no Teleparalelismo Conforme. Também são resolvidas as equações de campo, o que possibilita identificar como fluidos comuns e variáveis do modelo se comportam em função do tempo.

A tese está organizada da seguinte forma: No capítulo 1 - É feita uma breve revisão da Relatividade Geral, com seu formalismo e uma abordagem sobre cosmologia. No capítulo 2 - É introduzida a teoria do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral, suas equações de campo. É comentado sobre as transformações conformes e a teoria

de Weyl, e é introduzido o Teleparalelismo Conforme para o tensor Momento-Energia da matéria $T^{\mu\nu} = 0$. No capítulo 3 - É discutido o problema da não-localizabilidade da energia gravitacional e apresentadas algumas propostas para a expressão da energia gravitacional, em particular a energia gravitacional do TERG, com $T^{\mu\nu} \neq 0$. No capítulo 4 - São mostrados os cálculos, resultados e discussões das soluções obtidas das equações de campo do Teleparalelismo Conforme para um $T^{\mu\nu}$ representando um fluido conforme, bem como solução numérica para a energia escura. Na sequência, a conclusão.

A notação utilizada para as coordenadas no espaço-tempo será com letras gregas $\mu, \nu, \sigma, \rho, \dots$ e índices SO(3,1) com letras latinas a, b, c, \dots que vão de 0 a 3. Quando a escrita de índices estiver entre parênteses, como $(0), (i)$, significa que se refere ao espaço tangente e não ao espaço físico. É adotado também que $G = c = 1$ e a assinatura da métrica é $(-, +, +, +)$.

Capítulo 1

Gravitação

A Física teve seus primeiros conhecimentos concretizados sistematicamente com Isaac Newton (1642-1727), abordados em seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, em 1686 [1]. Dentre as demais contribuições, Newton elaborou as Leis de Movimento e a Lei Universal da Gravitação, onde é definido que a força que atua sobre dois corpos é proporcional ao produto de suas massas pela distância quadrada que há entre elas. Foi assim a primeira teoria de gravitação, aplicada para explicar as leis empíricas de Kepler.

Anos mais tarde, em 1915, Einstein publica uma nova teoria gravitacional, a Teoria da Relatividade Geral (TRG). Construída com uma linguagem tensorial, que reproduz os resultados da Mecânica Newtoniana, sendo esta seu limite não-relativístico. Além disso, ocasionou descobertas relevantes como as soluções descrevendo um universo não-estático, buracos negros e ondas gravitacionais. Entretanto, a gravitação Newtoniana é ainda utilizada para descrever em grande parte a mecânica planetária e de satélites.

Após a construção da Relatividade Geral, no século XX, começaram a surgir teorias alternativas de Gravitação, que têm como base a TRG. As motivações para essas propostas são a unificação do Eletromagnetismo com a Gravitação, a busca pela explicação da expansão acelerada do Universo e o desenvolvimento de uma teoria compatível com a teoria quântica. Estes são tópicos ativamente estudados nos dias atuais.

Esta tese segue a linha de uma teoria gravitacional alternativa e que portanto, nas seções e capítulos subsequentes serão apresentadas brevemente a teoria da Relatividade Geral e algumas das teorias alternativas importantes para o resultado final deste trabalho.



Figura 1.1: Representação de um ponto P numa variedade M em dois sistemas de coordenadas: x e x'^1 .

1.1 Notação Tensorial

Neste trabalho será adotado o somatório de Einstein sobre os índices que se repetem,

$$A_i B^i = \sum_{i=0}^{i=n} A_i B^i, \quad (1.1)$$

onde n é a dimensão do espaço.

Seja um ponto P numa variedade \mathcal{M} identificado em um sistema de coordenadas x através de suas coordenadas x^μ e em um sistema de coordenadas x' através de suas coordenadas x'^μ , conforme ilustra a Figura 1.1. A relação entre esses dois sistemas é dada por $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$. No caso geral, a transformação da derivada é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (1.2)$$

A derivada faz parte de um conjunto de objetos geométricos que obedecem a uma lei de transformação de sistema de coordenadas. Destes, três deles serão destacados aqui: os vetores contravariantes, os vetores covariantes e os tensores. Os vetores contravariantes são vetores que por convenção são escritos com os índices levantados e obedecem à transformação

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (1.3)$$

Os vetores covariantes são os vetores escritos com índices abaixados e se transformam da forma

$$W'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} W_\nu. \quad (1.4)$$

Vetores são um tipo especial de tensor, denominados tensores de ordem um.

Tensor é um objeto geométrico que possui n índices contravariantes $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ ou m

¹Figura feita pela autora deste trabalho.

índices covariantes $T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$, ou ainda n índices contravariantes e m índices covariantes $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}$, denominados tensores mistos do tipo (n, m) . Por exemplo, um tensor $A^{\mu\nu}_{\rho}$ é um tensor de terceira ordem do tipo $(2,1)$, o que significa que ele tem dois índices contravariantes e um índice covariante. O tensor $B^{\alpha\rho\beta}$ é um tensor do tipo $(3,0)$, ou seja, que possui três índices contravariantes, e o tensor C_{abcd} é um tensor do tipo $(0,4)$, ou seja, que possui quatro índices covariantes.

Para uma quantidade ser considerada como um tensor ela deve obedecer à lei de transformação geral dos tensores, que é dada pela expressão,

$$T'^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\rho_2}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\rho_n}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\sigma_2}}{\partial x'^{\nu_2}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T^{\rho_1\rho_2\dots\rho_n}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n}. \quad (1.5)$$

Tensores de ordem zero são os escalares ou invariantes. Invariantes podem ser obtidos pela contração dos índices, isto é, índices contravariantes com índices covariantes, como por exemplo $T^{\mu}_{\mu} = T$. A importância das equações no contexto relativístico serem tensoriais se deve ao fato de que expressões tensoriais não se alteram com mudança de coordenadas, ou seja, são covariantes por transformações de coordenadas, dando assim um significado físico ao cálculo. Para mais detalhes sobre as operações tensoriais, a referência [16] pode ser consultada.

1.2 Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral foi desenvolvida por Einstein em 1915. Einstein nasceu em 14 de Março de 1879 em Ulm, Alemanha, e faleceu em 18 de Abril de 1955 em Princeton, Estados Unidos [1]. Além da TRG, desenvolveu também a Teoria da Relatividade Restrita em 1905, ganhou o prêmio Nobel pelo Efeito Fotoelétrico em 1921 [17], explicou o Movimento Browniano e trabalhou com Física Quântica [1].

A Relatividade Restrita ou Especial trata-se do aperfeiçoamento da Física Clássica, com destaque em alguns pontos culminantes. (i) - Devido a invariância das Equações de Maxwell por meio das Transformações de Lorentz, postulou-se que todas as equações físicas devem ser covariantes por tais transformações. (ii) - Valor constante para a velocidade da luz (c). (iii) - Equivalência entre massa e energia. (iv) - Simultaneidade é relativa e dependente do sistema referencial, como dito por Einstein [18]. Contudo, esta

teoria não é adequada para descrever a ação de um forte campo gravitacional.

Com essa limitação, Einstein formulou uma nova teoria para abranger esses campos, que é a Teoria da Relatividade Geral. Ele fundamentou esta teoria com o Princípio da Equivalência o qual afirma que localmente as leis da Relatividade Restrita são válidas, e que um campo gravitacional não pode ser distinguido de um referencial acelerado ou não-inercial, sustentando a igualdade entre as massas inerciais e massas gravitacionais. A TRG também segue o Princípio de Covariância, o qual afirma que as Leis Físicas devem ser invariantes por transformações de coordenadas [1; 18; 19; 5].

Há testes que corroboram esta teoria citados por [20; 21], alguns deles são: o deslocamento do periélio de Mercúrio, a deflexão da luz, perda de energia de pulsares binários, lentes gravitacionais e existência de ondas gravitacionais, sendo este último confirmado recentemente pelo projeto LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) [4], inclusive o prêmio Nobel de 2017 foi para Rainer Weiss, Barry C. Barish e Kip S. Thorne [22], pela sua contribuição para a detecção de ondas gravitacionais. A confirmação das ondas gravitacionais é algo que a comunidade científica esperava e que agora abre possibilidades para investigar o regime gravitacional de campo forte [23]. Com a confirmação da existência das ondas gravitacionais, a dúvida quanto a se essas ondas podem transportar energia é levantada novamente.

1.2.1 O Formalismo da Relatividade Geral

O espaço-tempo na Relatividade Geral, bem como na Relatividade Restrita, pode ser descrito localmente usando coordenadas cartesianas, sendo uma coordenada temporal e três coordenadas espaciais. Geralmente a coordenada temporal corresponde ao primeiro índice, quando os índices variam de 0 a 3, $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, ou ao último índice quando variam de 1 a 4, $x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4)$.

Na Relatividade Geral a geometria do espaço-tempo é curva, definida pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Num espaço plano, denominado espaço de Minkowski, o tensor métrico é definido por $\eta_{\mu\nu}$. Em coordenadas cartesianas é representado pela matriz 4x4,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

As componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ são dadas a partir do conhecimento do elemento de linha (ds^2), comumente referido somente como métrica, que é a distância infinitesimal entre dois pontos no espaço-tempo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Toda métrica possui uma assinatura, que é dada pela quantidade de sinais negativos ($-$) e sinais positivos ($+$) que há na diagonal principal da matriz. No caso de Minkowski o elemento de linha é descrito por $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, na forma estendida em coordenadas cartesianas

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

com assinatura $(-, +, +, +)$. Com o conhecimento da assinatura da matriz pode-se referir a uma métrica como Euclidiana ou Riemanniana se todos os sinais da assinatura forem positivos $(+, +, +, +)$, ou como métrica Lorentziana ou pseudo-Riemanniana em caso de haver ao menos um sinal diferente, como acontece na métrica de Minkowski. Esta é a métrica utilizada na Relatividade Restrita.

O tensor métrico é um tensor simétrico, ou seja $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, cujo determinante é representado por g . Define-se a inversa do tensor métrico como o tensor $g^{\mu\nu}$, também simétrico, tal que

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = g_{\sigma\rho} g^{\sigma\mu} = \delta^\mu_\rho.$$

Em caso de mudança de coordenadas, como visto na seção 1.1, o tensor métrico, sendo do tipo $(0,2)$, obedece a lei de transformação,

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^{\nu'}} g_{\sigma\rho},$$

válida para qualquer tensor covariante de segunda ordem.

Existem sistemas de coordenadas para os quais em um dado ponto p , a métrica é igual a métrica de Minkowski e a primeira derivada do tensor métrico é nula, $\frac{\partial g_{\mu\nu}(p)}{\partial x^\rho} = 0$.

Tais coordenadas são denominadas coordenadas localmente inerciais. A existência delas é relevante por viabilizar o Princípio de Equivalência de Einstein que garante que a Física seja localmente a Física da Relatividade Especial, uma vez que localmente a métrica é Minkowski.

Na TRG é fundamental que as equações sejam tensoriais. Como as equações geralmente possuem derivadas, deve-se optar por uma nova definição de derivada, as derivadas covariantes (∇_α), as quais preservam a natureza tensorial, ao contrário das derivadas parciais ∂_x . A derivada covariante atua nos tensores covariantes e contravariantes da forma

$$\nabla_\alpha A^\beta = \partial_\alpha A^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\rho} V^\rho, \quad (1.6)$$

$$\nabla_\alpha B_\beta = \partial_\alpha B_\beta - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} B_\rho, \quad (1.7)$$

$$\nabla_\alpha T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\delta_1 \dots \delta_m} = \frac{\partial T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\delta_1 \dots \delta_m}}{\partial x^\alpha} + \sum_i \Gamma^{\beta_i}_{\alpha\rho} T^{\rho\beta_2 \dots \beta_n}_{\delta_1 \dots \delta_m} - \sum \Gamma^\rho_{\alpha\delta_1} T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\rho\delta_2 \dots \delta_m}, \quad (1.8)$$

onde $\Gamma^\beta_{\alpha\rho}$ é um objeto não-tensorial, denominado conexão. Um outro modo de identificá-la é através da notação (;), assim, $\nabla_\alpha A^\beta = A^\beta_{;\alpha}$.

Ao impôr a uma conexão que seus índices sejam simétricos, $\Gamma^\alpha_{\rho\sigma} = \Gamma^\alpha_{\sigma\rho}$, e que a derivada covariante da métrica seja nula, $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, é possível construir com o tensor métrico os chamados Símbolos de Christoffel, ${}^\circ\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}$,

$${}^\circ\Gamma^\alpha_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\rho g_{\sigma\lambda} + \partial_\sigma g_{\lambda\rho} - \partial_\lambda g_{\rho\sigma}). \quad (1.9)$$

Uma característica fundamental da TRG é sua escolha de conexão, os Símbolos de Christoffel. Todas as quantidades que dependem dos Símbolos de Christoffel serão denotadas com um (${}^\circ$).

As conexões assumem papel importante na definição de certas quantidades tensoriais, como é o caso do tensor curvatura, denominado tensor de Riemann, $R^\rho_{\alpha\beta\sigma}$,

$$R^\rho_{\alpha\beta\sigma} = \partial_\beta \Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma \Gamma^\rho_{\beta\alpha} + \Gamma^\rho_{\beta\nu} \Gamma^\nu_{\sigma\alpha} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu} \Gamma^\nu_{\beta\alpha}, \quad (1.10)$$

escrito também como $R^\rho_{\alpha\beta\sigma} = g^{\rho\lambda} (R_{\lambda\alpha\beta\sigma})$. A definição de tensor curvatura 1.10 é válida para qualquer conexão. Este tensor obedece à identidade de Bianchi 1.11 e às simetrias

1.12 e 1.13,

$$\nabla_\lambda R_{\sigma\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\sigma\nu\lambda\alpha} + \nabla_\alpha R_{\sigma\nu\beta\lambda} = 0, \quad (1.11)$$

$$R_{\lambda\alpha\beta\sigma} + R_{\lambda\beta\sigma\alpha} + R_{\lambda\sigma\alpha\beta} = 0, \quad (1.12)$$

$$R_{\lambda\alpha\beta\sigma} = R_{\beta\sigma\lambda\alpha} = -R_{\lambda\alpha\sigma\beta} = -R_{\alpha\lambda\beta\sigma}. \quad (1.13)$$

O tensor de Riemann guarda as propriedades geométricas do espaço-tempo, e dele derivam-se o tensor de Ricci $R_{\alpha\sigma} = R^\rho_{\alpha\rho\sigma}$ que é simétrico e o escalar de Ricci (ou escalar de curvatura) $R = g^{\alpha\sigma} R_{\alpha\sigma} = R^\alpha_\alpha$, que são usados nas equações de campo da TRG. Dessa forma, pelo tensor de Riemann atribui-se curvatura ao espaço-tempo no âmbito da Relatividade Geral. Em particular na métrica de Minkowski o tensor curvatura é nulo em coordenadas cartesianas, sendo assim, tal sistema de coordenadas define uma variedade plana.

Um corpo em queda livre na TRG percorre trajetórias denominadas geodésicas. Uma geodésica é definida como a curva de menor distância entre dois pontos. Esta trajetória é representada por uma curva paramétrica $x^\mu(\lambda)$, a qual obedece a equação 1.14, que se chama equação da geodésica,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (1.14)$$

onde x^μ a coordenada da trajetória, λ o parâmetro da curva e $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ a conexão. Observa-se que para o caso da TRG a conexão contém as informações da geometria do espaço-tempo através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ implícito na sua definição 1.9. Na escolha de um sistema de coordenadas cartesianas para o espaço plano, a conexão é nula $\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = 0$, o que implica que o percurso que uma partícula percorre em 1.14 é uma reta, condizente com o que se espera na Relatividade Especial.

De posse dos conceitos básicos da Relatividade Geral, pode-se introduzir as equações de campo desta teoria.

1.2.2 Equações de Einstein

As equações de campo da teoria geral de Einstein foram construídas a fim de estabelecer uma relação entre a geometria do espaço-tempo e seu conteúdo de matéria. Uma exigência da teoria TRG é que a conexão entre elas seja feita por meio de equações covariantes, de

acordo com o princípio estabelecido. Assim a expressão apresentada por Einstein é dada por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, definido por $G_{\mu\nu} \equiv {}^\circ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {}^\circ R g_{\mu\nu}$ (sendo que o tensor de Ricci e o escalar de Ricci são calculados a partir dos Símbolos de Christoffel). Estas equações são um acoplamento entre geometria e matéria, que determina o efeito de interação entre elas. O lado esquerdo das equações 1.15 guarda as informações da geometria do espaço-tempo pelas quantidades tensor métrico, tensor de Ricci e escalar de Ricci. No lado direito estão as informações da matéria contidas no tensor Momento-Energia da matéria $T_{\mu\nu}$.

Uma forma usual de encontrar as equações de campo dá-se por meio da escolha de uma densidade de Lagrangiana L introduzida na ação $S = \int L d^4x$ e aplica-se o Princípio de Mínima Ação $\delta S = 0$.

Em 1915, David Hilbert propõe uma ação, conhecida como ação de Hilbert-Einstein,

$$S_{HE} = \int {}^\circ R \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.16)$$

onde ${}^\circ R$ é o escalar de Ricci e o termo $\sqrt{-g} d^4x$ é o elemento de volume para o espaço-tempo com $g = \det(g_{\mu\nu})$. O escalar de curvatura ${}^\circ R$ foi escolhido por ser um invariante da teoria e gerar equações de segunda ordem. A variação desta ação com respeito à inversa do tensor métrico, $g^{\mu\nu}$, exige pelo Princípio de Mínima Ação que $\delta S_{HE} = 0$. Depois de variar a ação, obtêm-se as equações de Einstein para o vácuo,

$${}^\circ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {}^\circ R g_{\mu\nu} = 0.$$

Para soluções com matéria é adicionada uma fonte do tipo L_M , onde a ação geral torna-se igual a

$$S = \int \left(\frac{1}{2k} {}^\circ R + L_M \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.17)$$

O termo $k = \left(\frac{1}{16\pi} \right)$ é adicionado para que no limite retorne a Física Gravitacional de Newton. Ao variar L_M com respeito ao tensor métrico $g^{\mu\nu}$ gera-se o Tensor Momento-Energia dos campos de matéria, $T_{\mu\nu}$, que atua como fonte nas equações de Einstein 1.15, assim como as cargas elétricas são fontes nas equações de campo eletromagnético. Para

maiores detalhes da demonstração das equações de Einstein recomendam-se as referências [5; 21; 24; 25].

1.2.3 Tensor Momento-Energia $T^{\mu\nu}$

O tensor Momento-Energia $T^{\mu\nu}$ é a quantidade que guarda todas as informações da matéria contida no espaço-tempo, sendo responsável por deformar e determinar a geometria do espaço-tempo.

$T^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, de ordem 2. A componente temporal T^{00} descreve a densidade de massa-energia ρ , as componentes espaciais diagonais T^{ii} as componentes da pressão, as componentes espaciais não diagonais T^{ij} são os termos de cisalhamento, as componentes tempo-espaço T^{0i} o fluxo da energia e as componentes espaço-tempo T^{i0} a densidade do momento [26].

Este tensor obedece à Lei de Conservação, $\nabla_\rho T^{\sigma\rho} = 0$. Na sua forma estendida,

$$\partial_\rho T^{\sigma\rho} + \Gamma^\sigma_{\gamma\rho} T^{\gamma\rho} + \Gamma^\rho_{\gamma\rho} T^{\sigma\gamma} = 0. \quad (1.18)$$

Suponha o caso específico em que a distribuição de matéria possa ser atribuída como um fluido² perfeito. O fluido perfeito é caracterizado apenas pela densidade de energia e pressão, ou seja, “*um fluido que não tem condução de calor e viscosidade*” [27; 26]. Sua forma é expressa como,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (1.19)$$

sendo U_μ a quadri-velocidade do fluido. A relação entre as quantidades ρ e p é descrita pela Equação de Estado, $p = p(\rho)$. Para o caso do fluido perfeito, a Equação de Estado é da forma,

$$p = \omega\rho, \quad (1.20)$$

o que possibilita estudar diversos tipos de fluidos, ω é o fator de proporcionalidade constante no tempo. Por exemplo, para poeira a pressão é nula, o que implica $\omega = 0$ e o

²Para Shutz: “*Fluido é um tipo especial de contínuo. Um contínuo é uma coleção de partículas tão numerosas que a dinâmica das partículas individuais não podem ser seguidas, deixando somente a descrição da coleção em termos da quantidade ‘média’: número de partículas por unidade de volume, densidade de energia, densidade de momento, pressão, temperatura, etc.*” [27]

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} (\text{FluidoPerfeito}) &= \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, & T_{\mu\nu} (\text{Poeira}) &= \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \text{(a)} & & \text{(b)} \\
T_{\mu\nu} (\text{Radiação}) &= \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho \end{pmatrix}, & T_{\mu\nu} (\text{Vácuo}) &= \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_v \end{pmatrix}. \\
& \text{(c)} & & \text{(d)}
\end{aligned}$$

Tabela 1.1: Tensor Momento-Energia para (a) um fluido perfeito geral, (b) poeira, $p = 0$, (c) radiação, $p = \frac{1}{3}\rho$, (d) vácuo, $p = -\rho_v$.

tensor Momento-Energia representado apenas por $T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu$. Para radiação $\omega = \frac{1}{3}$ e para o vácuo $p = -\rho_v$, onde neste caso ρ_v é a energia do vácuo e portanto $\omega = -1$. As matrizes abaixo ilustram esses exemplos [5; 28].

1.3 Cosmologia

Um dos anseios primordiais da humanidade é saber a origem de tudo. Nisto consiste a Cosmologia, a busca pelo conhecimento de como foi a origem do Universo e como há de ser sua evolução, será ela eterna ou chegará a um fim? Assim, a Física com suas leis visam interpretar, compreender e propor matematicamente a suposta dinâmica deste “único” Universo com tudo o que nele contém.

Embora seja uma área de estudo antiguíssima, a cosmologia considerada nos dias atuais surge em 1929, com a Lei de Hubble [21]. Deixando a crença do Universo estático para estudar o Universo em expansão. Há diversos estudos com modelos cosmológicos, como por exemplo Friedmann-Robertson-Walker, De Sitter, Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr-Newmann, Gödel, Kerr e os atuais modelos de gravidade que propõem uma Lagrangiana mais geral [5; 21]. O fundamento primário destes modelos se baseiam no Princípio Cosmológico ou Princípio de Copérnico, o qual sustenta a noção de homogeneidade e isotropia do Universo em grandes escalas, não sendo a Terra ou qualquer corpo celeste privilegiado num ponto preferencial, prevalecendo em todas as direções do Universo as mesmas propriedades.

Friedmann-Robertson-Walker

A métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) possui as propriedades de homogeneidade e isotropia, proposta por Howard Robertson e Arthur Walker em 1934 [21]. Em coordenadas esféricas é igual a

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (1.21)$$

onde $a(t)$ é denominado fator de escala e k o parâmetro de curvatura do espaço-tempo, com $k = -1$ para um universo aberto; $k = +1$ para um universo fechado e $k = 0$ para um universo plano. Note que $a(t)$ será escrito apenas como a .

Utilizando a métrica de FRW com o tensor Momento-Energia para um fluido perfeito com um observador cuja 4-velocidade é igual a $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$, as componentes do tensor de Einstein 1.15 e tensor Momento-Energia 1.19 são

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k), \\ G_{11} &= -\frac{1}{1 - kr^2}(2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k), \\ G_{22} &= -r^2(2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k), \\ G_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta (2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho, \\ T_{11} &= p \left(\frac{a^2}{1 - kr^2} \right), \\ T_{22} &= pa^2 r^2, \\ T_{33} &= pa^2 r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Em seguida substituem-as nas equações de Einstein, e as equações obtidas 1.22 e 1.23 são denominadas Equações de Friedmann, com a densidade de energia dependente do tempo, $\rho(t)$, bem como a pressão, $p(t)$. A primeira equação se refere à coordenada temporal e a segunda equação às coordenadas espaciais. O resultado das componentes T_{ii} são iguais e para as componentes do tensor T_{ij} com $i \neq j$ são nulas.

$$\frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) = 8\pi\rho, \quad (1.22)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{a^2}(\dot{a}^2 + k) = -8\pi p. \quad (1.23)$$

Substituindo 1.22 em 1.23 e reescrevendo-as em termos de \dot{a} e \ddot{a} ,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (1.24)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p). \quad (1.25)$$

Aleksandr Friedmann (1888-1925) as encontrou em 1922. Sua solução foi a primeira a mostrar um universo não estático a partir da equação 1.24, caso $\dot{a} \neq 0$, e com possibilidade de estar acelerando através da equação 1.25, se $\ddot{a} \neq 0$ [29]. Anos depois, em 1927 Georges Lemaître também as derivou independentemente [21]. Nas referências [30; 21], são mostrados alguns casos de soluções para o fator de escala.

Einstein, como era o pensamento da época, esperava que o Universo fosse estático. Decepcionado com o resultado das equações, introduziu uma constante nas suas equações para 'frear' o Universo e corrigir tal fenômeno, denominada Constante Cosmológica, Λ . A ação de Hilbert-Einstein teria então a forma,

$$S_{EH} = \int (\text{}^{\circ}R - 2\Lambda + L_M)\sqrt{-g}d^4x.$$

Derivando esta ação com respeito a $g^{\mu\nu}$ e aplicando o Princípio de Mínima Ação, as equações de campo com a Constante Cosmológica são expressas por

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

o que resulta nas Equações de Friedmann iguais a

$$\frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) - \Lambda = 8\pi\rho, \quad (1.27)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{a^2}(\dot{a}^2 + k) - \Lambda = -8\pi p. \quad (1.28)$$

Este modelo de universo com o valor de Λ positivo, escolhida de forma a produzir uma

solução estática, é denominado universo de Einstein. Ao contrário deste, o universo de Friedmann-Lemaître não requer uma escolha para o valor de Λ , apenas que seja positiva [21].

Em 1929 Edwin Hubble comprovou observacionalmente que o universo realmente está sofrendo uma expansão [31]. Estas observações tornaram um marco histórico na Cosmologia. Deste acontecimento foram definidos novos parâmetros cosmológicos que serão citados abaixo.

O parâmetro de Hubble, $H(t)$,

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.29)$$

definido em termos do fator de escala e da sua derivada mede o quanto o Universo expande. O parâmetro de desaceleração, $q(t)$,

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (1.30)$$

A constante de Hubble, H_0 ,

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t=0)}{a(t=0)}, \quad (1.31)$$

que é um parâmetro cosmológico que indica a taxa de expansão do universo no tempo presente. Atualmente $H_0 = 73,2 \text{ km/sec/megaparsec}$ [32]. A Lei de Hubble

$$v = H(t)r, \quad (1.32)$$

onde r é a distância da Galáxia até nós, $H(t)$ o parâmetro de Hubble e v a velocidade da Galáxia. O parâmetro de Densidade, Ω ,

$$\Omega = \frac{8\pi}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (1.33)$$

sendo ρ_c a densidade crítica definida por $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi}$. Onde a soma do parâmetro de Densidade total é dado pela soma de todas as formas de contribuições,

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_k + \Omega_\Lambda. \quad (1.34)$$

Ao substituir a constante de Hubble, a densidade de energia $\rho \rightarrow \rho_0$, o parâmetro de Densidade $\Omega \rightarrow \Omega_0$ e considerar o fator de escala igual a 1, encontra-se na Equação de

Friedmann 1.22,

$$\begin{aligned}\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} &= 8\pi\rho, \\ k &= H_0^2(\Omega_0 - 1).\end{aligned}$$

Disto, segue que para um universo aberto $\Omega_0 < 1$, com $k = -1$. Para um universo fechado $\Omega_0 > 1$, com $k = +1$ e para um universo plano $\Omega_0 = 1$, com $k = 0$. Para este caso, o modelo que contém $k = 0$ é chamado universo de Einstein-de Sitter [21].

De acordo com [6], somente 4% do conteúdo total do Universo é conhecido, com 96% a descobrir. Destes, $\Omega_{\text{matéria bariônica}} \simeq 0.04$, $\Omega_{\text{radiação}} \simeq 5.10^{-5}$, $\Omega_{\text{matéria escura}} \simeq 0.26$, $\Omega_{\text{energia escura}} \simeq 0.7$. O procedimento destes cálculos é feito a partir da expressão do parâmetro de Densidade calculado separadamente para cada conteúdo de matéria presente no Universo, com os valores dos outros parâmetros cosmológicos. Por exemplo, para matéria bariônica se calcula como $\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}$ e para radiação $\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}$.

A densidade de matéria é encontrada a partir do cálculo das componentes da Lei de conservação (1.18). Disto, é encontrada a Equação da Continuidade,

$$\partial_0\rho + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (1.35)$$

que pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned}\partial_0\rho + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) &= 0, \\ \frac{1}{a^3}\partial_0(\rho a^3) + 3\frac{\dot{a}}{a}p &= 0, \\ \frac{1}{a^3}\partial_0(\rho a^3) &= -3\frac{\dot{a}}{a}p.\end{aligned}$$

Há dois modos de resolver esta equação. Primeiro, resolvendo para um contexto geral de ω , equação 1.20. Segundo, substituindo o valor de p conforme o modelo de universo escolhido, de acordo com o valor de ω na Equação de Estado.

Exemplo - Para um caso de universo com poeira, onde não há pressão, então, $\omega = 0$ na Equação de Estado. Assim,

$$\begin{aligned}
\partial_0(\rho a^3) &= 0 \\
\int \partial_0(\rho a^3) dt &= 0 \\
\rho_m a^3 &= cte \\
\rho_m &\propto a^{-3}.
\end{aligned}$$

A expressão para ω geral encontrada a partir da Equação da Continuidade é $\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$. É imediato verificar que quando substituído o valor de $\omega = 0$, obtém-se o resultado do exemplo acima.

De Sitter

Supondo a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, para uma densidade constante ρ_0 , e $k = 0$, a primeira equação de Friedmann 1.27 se torna igual a,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) - \Lambda &= 8\pi\rho_0 \\
\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi\rho_0}{3} + \frac{\Lambda}{3} \\
\frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3} + \frac{\Lambda}{3}}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Posto que todos os termos do lado direito desta equação é constante, a integração é direta,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a} \frac{da}{dt} dt &= \int \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3} + \frac{\Lambda}{3}} dt \\
\ln a &= \left(\sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3} + \frac{\Lambda}{3}} \right) t + \ln a_0 \\
a &= a_0 e^{\left(\sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3} + \frac{\Lambda}{3}} \right) t}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Pela definição do parâmetro de Hubble,

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3} + \frac{\Lambda}{3}},$$

pode-se escrever,

$$a(t) = a_0 e^{Ht}. \tag{1.38}$$

Esta solução foi derivada por Willem de Sitter em 1917. Ao substituir esta solução na métrica 1.21 para um universo plano, obtém-se a métrica de De Sitter

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht} [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (1.39)$$

cujo universo se expande exponencialmente. A diferença entre o universo de De Sitter e o anti-de Sitter é o sinal do Λ . No universo de De Sitter Λ é positivo, no universo de Anti-de Sitter o Λ é negativo [21], com Λ associado à energia escura. O modelo Anti-de Sitter é utilizado na correspondência AdS/CFT que relaciona uma Teoria de Campo Conforme com Gravidade Quântica [33].

Capítulo 2

Gravidade Teleparalela

A teoria primordial da gravitação (Relatividade Geral) é escrita no espaço de Riemann através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e da conexão dos Símbolos de Christoffel Γ . Neste espaço Riemanniano também é possível escrever a Relatividade Geral em termos dos campos de tetrada $e_{a\mu}$. Assim é definida a geometria da gravidade de Einstein. Outras teorias da gravitação, podem ser escritas ainda nesse ou noutros espaços, como é o caso das teorias teleparalelas.

A teoria Teleparalela ou simplesmente Teleparalelismo é uma vertente pensada originalmente por Einstein e desenvolvida entre os anos 1928 e 1932 com base no conceito de “Fern-parallelismus” ou Paralelismo à Distância, no intuito de unificar uma teoria de campo gravitacional com a teoria eletromagnética [34; 35; 36; 37]. Paralelismo à Distância é um tipo de geometria que permite dois vetores em pontos diferentes serem comparados tanto em seus módulos quanto em suas direções, ao contrário da geometria Riemanniana, na qual é possível apenas a comparação entre seus módulos. Por exemplo, seja V_A um vetor no ponto A e V_B um vetor no ponto B . A fim de compará-los, na geometria Riemanniana é feito um deslocamento do vetor V_B até o vetor V_A através do transporte paralelo, dependendo do caminho que este vetor é transportado sua direção final pode ser diferente, sem modificar seu comprimento. Isso o impede de ser comparado quanto à sua direção. No Paralelismo à Distância existem tetradas em cada ponto do espaço-tempo, tetradas consistem num conjunto de quatro vetores ortogonais e unitários, assim, não é necessário deslocar o vetor V_B até o vetor V_A , sendo apenas necessário observar se as componentes das tetradas do vetor V_A são iguais as do vetor V_B , caso a resposta seja afirmativa, então

diz-se que eles são iguais em direção e módulo [37].

Depois da proposta Paralelismo à Distância de Einstein, outras teorias desse tipo foram sendo obtidas. Uma delas é o objeto de estudo deste capítulo, a teoria Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG), uma formulação alternativa.

2.1 Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral é uma teoria gravitacional alternativa, formulada no espaço de Weitzenböck em termos dos campos de tetradas $e_{a\mu}$ e da conexão de spin $\omega_{\mu ab}$. A conexão de Weitzenböck Γ definida em 2.16, tem torção não nula e curvatura zero. Por se tratar de uma outra geometria espera-se que além de produzir resultados da Relatividade Geral devido sua equivalência, possa propor explicações para fenômenos ainda sem explicação no Universo, como Jamil et. al. [38], o qual explica que matéria escura pode ser um efeito da torção no espaço-tempo. No entanto, já é possível encontrar resultados imediatos desta teoria, como é o caso da definição da energia gravitacional, momento e momento-angular, encontrados de forma natural e covariantes.

2.1.1 Tetradas

Dado x^μ ser considerado uma coordenada do espaço-tempo, onde μ assume os valores $\mu = (0, 1, 2, 3)$ então a base que descreve um espaço tangente neste sistema de referência são todos os vetores que se associam com essas coordenadas, na forma

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.1)$$

Seja $\{e_a\}$ uma base ortonormal do espaço vetorial. Para construí-la vamos definir a matriz e_a^μ , cujos elementos correspondem às componentes dos vetores e_a na base de coordenada curva ∂_μ , por

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu. \quad (2.2)$$

Comumente $\{e_a\}$ são conhecidas como tetradas. O termo tetrada significa um conjunto de quatro vetores ortonormais $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Se ao invés de tetradas tivéssemos uma tríade, então seria um conjunto de três vetores, dando a entender o raciocínio de porque

o número quatro. Vierbein é o termo alemão para tetrada.

A relação de ortonormalidade que caracteriza o conceito de tetrada é expressa por

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu, \quad (2.3)$$

que pode ser reescrita em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ da forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (2.4)$$

A condição de ortonormalidade das tetradas é preservada pelas transformações de Lorentz $\Lambda_{a'}^a$, que levam uma tetrada $\{e_a\}$ para outra tetrada $\{e_{a'}\}$. É importante ressaltar que as transformações de Lorentz preservam a métrica de Minkowski por definição, conforme a equação

$$\Lambda_{a'}^b \Lambda_{c'}^d \eta_{bd} = \eta_{a'c'}, \quad (2.5)$$

da forma que, ao aplicar a transformação de Lorentz para a tetrada e_a^μ obtém-se

$$e_{a'}^\mu = \Lambda_{a'}^b e_b^\mu, \quad (2.6)$$

e feito o mesmo para o produto entre duas tetradas, encontra-se

$$\begin{aligned} e_{a'}^\mu e_{b'}^\nu g_{\mu\nu} &= \Lambda_{a'}^c e_c^\mu \Lambda_{b'}^d e_d^\nu g_{\mu\nu} \\ &= \Lambda_{a'}^c \Lambda_{b'}^d \eta_{cd} \\ &= \eta_{a'b'}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

O resultado 2.7 demonstra que a transformação de tetrada por Lorentz gera outra tetrada como definida em 2.3. Pode-se ver também que o produto da transformação de Lorentz de duas tetradas gera o mesmo tensor métrico, conforme demonstrado abaixo

$$\begin{aligned} e_{a'}^\mu e_{b'}^\nu \eta_{a'b'} &= \Lambda_{a'}^c e_c^\mu \Lambda_{b'}^d e_d^\nu \eta_{a'b'} \\ &= e_c^\mu e_d^\nu \eta_{cd} \\ &= g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Devido a propriedade 2.7 os índices de tetrada latinos (a, b, c, \dots) são chamados índices

SO(3,1), conhecidos também como índices dos vetores no espaço tangente ou base de tetrada. Os índices gregos (μ, ν, ρ, \dots) são índices na base de coordenadas no espaço-tempo.

Um vetor do espaço-tempo pode ser representado no espaço tangente como

$$Z^\mu = e_a^\mu Z^a, \quad (2.9)$$

da mesma forma, um vetor do espaço tangente pode ser representado no espaço-tempo por,

$$Z^a = e^a_\mu Z^\mu. \quad (2.10)$$

Uma outra relação obtida das tetradas que será útil posteriormente é a relação entre o determinante da tetrada e o determinante do tensor métrico, dada por

$$\begin{aligned} \det(e_a^\mu)^2 &= (-1) \det(g_{\mu\nu}) \\ e^2 &= (-1)g \\ e &= \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Na literatura o assunto aqui discutido pode ser encontrado em [39; 40; 41]. Mashhoon [39] trata também da velocidade e aceleração de um observador percorrendo uma linha-mundo S numa trajetória x^μ , Figura 2.1. O entendimento inicia-se com a afirmação de que a tetrada $e_{(0)}^\mu$ é igual a 4-velocidade $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Assim,

$$e_{(0)}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.12)$$

onde τ é o tempo próprio, e a 4-aceleração é igual a

$$\frac{De_a^\mu}{d\tau} = \phi_a^b e_b^\mu, \quad (2.13)$$

onde $\phi_{ab}(\tau)$ é um tensor de aceleração antissimétrico. Para um observador inercial a aceleração é nula. Essas discussões também podem ser encontradas nas referências [40; 41].

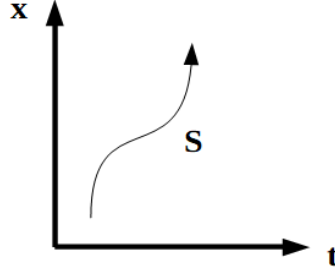


Figura 2.1: Linha-mundo S de um observador no espaço-tempo bidimensional ¹.

2.1.2 Formalismo da teoria TERG

O espaço-tempo do TERG (Teleparalelismo Equivalente a Relatividade Geral) é um espaço 4-dimensional, cuja descrição geométrica é representada pelo campo de tetradas ortormais $e^a{}_\mu$, onde os índices latinos representam o vetor no espaço tangente ou $SO(3,1)$, e os índices gregos as componentes nas direções das coordenadas do espaço-tempo [42; 43]. No TERG quem desempenha o papel do tensor $g_{\mu\nu}$ são os campos de tetrada, e a conexão utilizada é a conexão de Weitzenböck [15]. Esta conexão é encontrada a partir do “Postulado da Tetrada” [5],

$$\nabla_\mu e^a{}_\nu = 0 \quad (2.14)$$

$$\partial_\mu e^a{}_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} e^a{}_\lambda + \omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu = 0, \quad (2.15)$$

onde $\omega_{\mu ab}$ é a conexão de spin do grupo $SO(3,1)$ e $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ as componentes da conexão de Weitzenböck. Nesta seção os Símbolos de Christoffel serão escritos na forma ${}^\circ\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ e o respectivo tensor curvatura ${}^\circ R^\rho{}_{\alpha\beta\sigma}$. A fim de que a teoria possa exibir invariância global de Lorentz, impõe-se que a conexão de spin seja nula. Ao fazer isso, obtém-se para a conexão de Weitzenböck,

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = e_a{}^\rho \partial_\mu e^a{}_\nu. \quad (2.16)$$

Substituída 2.16 na definição do tensor de Riemann 1.10 verifica-se que a curvatura é nula. A demonstração segue abaixo.

¹Figura feita pela autora deste trabalho.

$$\begin{aligned}
R^{\rho}_{\alpha\beta\sigma} &= \partial_{\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\rho}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} \\
&= \partial_{\beta}(e_a^{\rho}\partial_{\sigma}e^a_{\alpha}) - \partial_{\sigma}(e_a^{\rho}\partial_{\beta}e^a_{\alpha}) + (e_a^{\rho}\partial_{\beta}e^a_{\nu})(e_b^{\nu}\partial_{\sigma}e^b_{\alpha}) - (e_a^{\rho}\partial_{\sigma}e^a_{\nu})(e_b^{\nu}\partial_{\beta}e^b_{\alpha}) \\
&= \partial_{\beta}e_a^{\rho}\partial_{\sigma}e^a_{\alpha} + e_a^{\rho}\partial_{\beta}\partial_{\sigma}e^a_{\alpha} - \partial_{\sigma}e_a^{\rho}\partial_{\beta}e^a_{\alpha} - e_a^{\rho}\partial_{\sigma}\partial_{\beta}e^a_{\alpha} + e_a^{\rho}e_b^{\nu}\partial_{\beta}e^a_{\nu}\partial_{\sigma}e^b_{\alpha} \\
&\quad - e_a^{\rho}e_b^{\nu}\partial_{\sigma}e^a_{\nu}\partial_{\beta}e^b_{\alpha} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O segundo e o quarto termo se cancelam devido a comutatividade da derivada parcial, e os demais termos por serem iguais. Veja que o quinto termo resulta em,

$$\begin{aligned}
\partial_{\beta}(e^a_{\nu}e_a^{\rho}) &= e_a^{\rho}\partial_{\beta}e^a_{\nu} + e^a_{\nu}\partial_{\beta}e_a^{\rho} \\
0 &= e_a^{\rho}\partial_{\beta}e^a_{\nu} + e^a_{\nu}\partial_{\beta}e_a^{\rho} \\
e_a^{\rho}\partial_{\beta}e^a_{\nu} &= -e^a_{\nu}\partial_{\beta}e_a^{\rho} \\
(e_b^{\nu}\partial_{\sigma}e^b_{\alpha})e_a^{\rho}\partial_{\beta}e^a_{\nu} &= -e^a_{\nu}\partial_{\beta}e_a^{\rho}(e_b^{\nu}\partial_{\sigma}e^b_{\alpha}) \\
e_a^{\rho}e_b^{\nu}\partial_{\beta}e^a_{\nu}\partial_{\sigma}e^b_{\alpha} &= -\delta^a_b\partial_{\beta}e_a^{\rho}\partial_{\sigma}e^b_{\alpha} \\
e_a^{\rho}e_b^{\nu}\partial_{\beta}e^a_{\nu}\partial_{\sigma}e^b_{\alpha} &= -\partial_{\beta}e_a^{\rho}\partial_{\sigma}e^a_{\alpha},
\end{aligned}$$

e o sexto termo,

$$e_a^{\rho}e_b^{\nu}\partial_{\sigma}e^a_{\nu}\partial_{\beta}e^b_{\alpha} = -\partial_{\sigma}e_a^{\rho}\partial_{\beta}e^a_{\alpha}.$$

Quando esses termos são substituídos no tensor de Riemann, conclui-se que a curvatura calculada com a conexão de Weitzenböck é nula, $R^{\rho}_{\alpha\beta\sigma} = 0$.

É conveniente neste ponto definir um tensor denominado torção dado por

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}, \quad (2.17)$$

e $T_{\mu} = T^{\lambda}_{\lambda\mu}$. No caso da Teoria Relatividade Geral a torção é nula, devido a simetria nos dois últimos índices dos Símbolos de Christoffel.

Ao substituir 2.16 na definição 2.17, verifica-se que a torção nessa geometria é não-

nula, expressa da seguinte forma

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = e_a^{\lambda} \partial_{\mu} e^a_{\nu} - e_a^{\lambda} \partial_{\nu} e^a_{\mu}, \quad (2.18)$$

onde este tensor é antissimétrico em seus dois últimos índices.

Existe uma relação entre a conexão de Weitzenböck, $\Gamma_{\rho\mu\nu}$, e os Símbolos de Christoffel, ${}^{\circ}\Gamma_{\rho\mu\nu}$, através da definição do tensor contorção, $K_{\rho\mu\nu}$,

$$K_{\rho\mu\nu} = \Gamma_{\rho\mu\nu} - {}^{\circ}\Gamma_{\rho\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Bel [44] demonstra que este tensor é antissimétrico em dois de seus índices a partir da compatibilidade com a métrica de ambas conexões. Também é demonstrado por Bel a relação entre os tensores contorção e torção. Na notação aqui adotada e seguindo o raciocínio desse artigo tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} g_{\mu\nu} - {}^{\circ}\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} &= 0 \\ (\partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\rho\mu} g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\rho\nu} g_{\mu\beta}) - (\partial_{\rho} g_{\mu\nu} - {}^{\circ}\Gamma^{\beta}_{\rho\mu} g_{\beta\nu} - {}^{\circ}\Gamma^{\beta}_{\rho\nu} g_{\mu\beta}) &= 0 \\ g_{\beta\nu} ({}^{\circ}\Gamma^{\beta}_{\rho\mu} - \Gamma^{\beta}_{\rho\mu}) + g_{\mu\beta} ({}^{\circ}\Gamma^{\beta}_{\rho\nu} - \Gamma^{\beta}_{\rho\nu}) &= 0 \\ g_{\beta\nu} (-K^{\beta}_{\rho\mu}) + g_{\mu\beta} (-K^{\beta}_{\rho\nu}) &= 0 \\ K_{\mu\rho\nu} &= -K_{\nu\rho\mu}, \end{aligned}$$

sendo ele, neste caso, antissimétrico no primeiro e terceiro índices. Ao tomar a diferença entre dois tensores contorção, encontra-se que

$$\begin{aligned} K_{\rho\mu\nu} - K_{\rho\nu\mu} &= (\Gamma_{\rho\mu\nu} - {}^{\circ}\Gamma_{\rho\mu\nu}) - (\Gamma_{\rho\nu\mu} - {}^{\circ}\Gamma_{\rho\nu\mu}) \\ &= T_{\rho\mu\nu} + {}^{\circ}T_{\rho\nu\mu} \\ &= T_{\rho\mu\nu}. \end{aligned}$$

O termo ${}^{\circ}T_{\rho\nu\mu}$ é nulo como já foi explicado anteriormente. Ao escrever uma combinação entre os tensores torção permutando seus índices, e ao utilizar a propriedade de antissi-

metria do tensor contorção, tem-se

$$\begin{aligned} (T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\mu\nu} - T_{\nu\rho\mu}) &= K_{\mu\nu\rho} - K_{\mu\rho\nu} + K_{\rho\mu\nu} - K_{\rho\nu\mu} - K_{\nu\rho\mu} + K_{\nu\mu\rho} \\ K_{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{2} (T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\mu\nu} - T_{\nu\rho\mu}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Da definição do tensor de Riemann 1.10 em termos da conexão de Weitzenböck isolada da equação 2.19 e da expressão do tensor contorção 2.20, encontra-se a relação entre a curvatura da Relatividade Geral e a geometria de Weitzenböck. Segue a demonstração.

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{\alpha\beta\sigma} &= \partial_{\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\rho}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} \\ R^{\rho}_{\alpha\beta\sigma} &= \partial_{\beta}({}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} + K^{\rho}_{\sigma\alpha}) - \partial_{\sigma}({}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} + K^{\rho}_{\beta\alpha}) + ({}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\beta\nu} + K^{\rho}_{\beta\nu})({}^{\circ}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} + K^{\nu}_{\sigma\alpha}) \\ &\quad - ({}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} + K^{\rho}_{\sigma\nu})({}^{\circ}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} + K^{\nu}_{\beta\alpha}). \end{aligned}$$

No lado direito desta equação identifica-se

$${}^{\circ}R^{\rho}_{\alpha\beta\sigma} = \partial_{\beta}{}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}{}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} + {}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\beta\nu}{}^{\circ}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} - {}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}{}^{\circ}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha},$$

que substituído na equação anterior,

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{\alpha\beta\sigma} &= {}^{\circ}R^{\rho}_{\alpha\beta\sigma} + \partial_{\beta}K^{\rho}_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}K^{\rho}_{\beta\alpha} + {}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\beta\nu}K^{\nu}_{\sigma\alpha} + {}^{\circ}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha}K^{\rho}_{\beta\nu} \\ &\quad - {}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}K^{\nu}_{\beta\alpha} - {}^{\circ}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}K^{\rho}_{\sigma\nu} + K^{\rho}_{\beta\nu}K^{\nu}_{\sigma\alpha} - K^{\rho}_{\sigma\nu}K^{\nu}_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

No sexto termo desta equação, aplica-se a simetria ${}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} = {}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}$. O próximo passo é contrair os índices ρ com β ,

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{\alpha\rho\sigma} &= {}^{\circ}R^{\rho}_{\alpha\rho\sigma} + \partial_{\rho}K^{\rho}_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}K^{\rho}_{\rho\alpha} + {}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\rho\nu}K^{\nu}_{\sigma\alpha} + {}^{\circ}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha}K^{\rho}_{\rho\nu} \\ &\quad - {}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}K^{\nu}_{\rho\alpha} - {}^{\circ}\Gamma^{\nu}_{\rho\alpha}K^{\rho}_{\sigma\nu} + K^{\rho}_{\rho\nu}K^{\nu}_{\sigma\alpha} - K^{\rho}_{\sigma\nu}K^{\nu}_{\rho\alpha}. \end{aligned}$$

Agora a contração é feita com os índices α e σ ,

$$\begin{aligned} R &= {}^{\circ}R + g^{\alpha\sigma}(\partial_{\rho}K^{\rho}_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}K^{\rho}_{\rho\alpha} + {}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\rho\nu}K^{\nu}_{\sigma\alpha} + {}^{\circ}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha}K^{\rho}_{\rho\nu} \\ &\quad - {}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}K^{\nu}_{\rho\alpha} - {}^{\circ}\Gamma^{\nu}_{\rho\alpha}K^{\rho}_{\sigma\nu} + K^{\rho}_{\rho\nu}K^{\nu}_{\sigma\alpha} - K^{\rho}_{\sigma\nu}K^{\nu}_{\rho\alpha}). \end{aligned}$$

Através da equação 2.20 pode se verificar que

$$K^{\rho}_{\rho\alpha} = T_{\alpha}, \quad (2.21)$$

$$K^{\nu\alpha}_{\alpha} = -T^{\nu}, \quad (2.22)$$

e da equação 1.6,

$${}^{\circ}\nabla_{\sigma}T_{\alpha} = \partial_{\sigma}T_{\alpha} - {}^{\circ}\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}T_{\mu} \quad (2.23)$$

$${}^{\circ}\nabla_{\rho}K^{\rho}_{\sigma\alpha} = \partial_{\rho}K^{\rho}_{\sigma\alpha} + {}^{\circ}\Gamma^{\rho}_{\rho\gamma}K^{\gamma}_{\sigma\alpha} - {}^{\circ}\Gamma^{\gamma}_{\rho\sigma}K^{\rho}_{\gamma\alpha} - {}^{\circ}\Gamma^{\gamma}_{\rho\alpha}K^{\rho}_{\sigma\gamma}. \quad (2.24)$$

Ao substituir as igualdades (2.21 - 2.24) em R com a notação (${}^{\circ}$) nas derivadas covariantes com respeito aos Símbolos de Christoffel, encontra-se

$$R = {}^{\circ}R - 2{}^{\circ}\nabla_{\mu}T^{\mu} - T_{\mu}T^{\mu} - K_{\rho\alpha\nu}K^{\nu\rho\alpha}, \quad (2.25)$$

através da definição 2.20 o termo $K_{\rho\alpha\nu}K^{\nu\rho\alpha}$ é igual a

$$K_{\rho\alpha\nu}K^{\nu\rho\alpha} = \frac{1}{4}T_{\rho\alpha\nu}T^{\rho\alpha\nu} + \frac{1}{2}T_{\rho\alpha\nu}T^{\alpha\rho\nu}. \quad (2.26)$$

Ao substituir o valor de 2.26 em 2.25 encontra-se a forma geral para o tensor curvatura

$$R = {}^{\circ}R - 2{}^{\circ}\nabla_{\mu}T^{\mu} + \left(\frac{1}{4}T_{\mu\nu\rho}T^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu\rho}T^{\nu\mu\rho} - T_{\mu}T^{\mu} \right), \quad (2.27)$$

que como demonstrado $R = 0$ na geometria de Weitzenböck. Portanto a curvatura dos Símbolos de Christoffel pode ser escrita em termos da torção de Weitzenböck como

$${}^{\circ}R = - \left(\frac{1}{4}T_{\mu\nu\rho}T^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu\rho}T^{\nu\mu\rho} - T_{\mu}T^{\mu} \right) + 2{}^{\circ}\nabla_{\mu}T^{\mu}, \quad (2.28)$$

e ao comparar 2.28 com 1.16 identifica-se que a densidade de Lagrangiana nesta teoria é obtida através desta expressão multiplicada pelo determinante da tetrada. Despreza-se o termo da divergência ${}^{\circ}\nabla_{\mu}T^{\mu}$ devido a ele não ter nenhuma contribuição na variação da ação total quando integrado pelo teorema de Stokes. Com a adição da densidade de Lagrangiana da matéria \mathcal{L}_M encontra-se a forma geral da densidade de Lagrangiana no

TERG conforme apresentada em [43]

$$\mathcal{L}_{TERG+M}(e_{a\mu}) = -ke \left(\frac{1}{4} T_{\mu\nu\rho} T^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\rho} T^{\nu\mu\rho} - T_\mu T^\mu \right) - \mathcal{L}_M, \quad (2.29)$$

onde $k = \frac{1}{16\pi G}$. Esta densidade de Lagrangiana pode ser reescrita em termos de índices latinos, uma vez que os índices estão contraídos, e com o tensor Σ^{abc} , antissimétrico nos dois últimos índices $\Sigma^{abc} = -\Sigma^{acb}$ [45]. A densidade de Lagrangiana toma assim a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{TERG+M}(e_{a\mu}) = -ke \Sigma^{abc} T_{abc} - L_M, \quad (2.30)$$

sendo Σ^{abc} igual a,

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4} (T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2} (\eta^{ac} T^b - \eta^{ab} T^c), \quad (2.31)$$

onde $T^b = T_a^{\ a b}$. Com esta notação o escalar de curvatura 2.28 pode ser reescrito como,

$${}^\circ R = -\Sigma^{abc} T_{abc} + 2{}^\circ \nabla_\mu T^\mu, \quad (2.32)$$

ou na forma de derivada parcial

$${}^\circ R = -\Sigma^{abc} T_{abc} + \frac{2}{e} \partial_\mu (e T^\mu), \quad (2.33)$$

cujo termo ${}^\circ \nabla_\mu T^\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu (e T^\mu)$ para esta situação. Segue demonstração abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \partial_\mu (e T^\mu) &= \frac{1}{e} [(\partial_\mu e) T^\mu + e (\partial_\mu T^\mu)] \\ &= \frac{1}{e} (\partial_\mu e) T^\mu + \partial_\mu T^\mu, \end{aligned} \quad (2.34)$$

o determinante do campo de tetrada é igual à raiz negativa do determinante do tensor métrico, ou seja, $e = \sqrt{-g}$. Através dos pares de equações (3.33-3.34) e (4.67-4.68) apresentadas em [5] vemos que a derivada parcial do determinante do tensor métrico pode ser escrito como,

$$\partial_\lambda g = g g^{\mu\sigma} \partial_\lambda g_{\sigma\mu}, \quad (2.35)$$

assim ao derivar $\sqrt{-g}$, tem-se

$$\begin{aligned}\partial_\lambda \sqrt{-g} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-1)gg^{\mu\sigma} \partial_\lambda g_{\sigma\mu} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\sigma} \partial_\lambda g_{\sigma\mu}.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Substitui-se 2.36 em 2.34 com o determinante do campo de tetrada substituído por $\sqrt{-g}$, $\mu \rightarrow \nu$, $\sigma \rightarrow \rho$ e $\lambda \rightarrow \mu$, obtém-se,

$$\frac{1}{e} \partial_\mu (e T^\mu) = \partial_\mu T^\mu + \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho}) T^\mu.\tag{2.37}$$

Para a derivada covariante aplica-se a definição 1.6 e tem-se que,

$$\begin{aligned}{}^\circ\nabla_\mu T^\mu &= \partial_\mu T^\mu + {}^\circ\Gamma^\nu_{\nu\mu} T^\mu \\ &= \partial_\mu T^\mu + \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho}) T^\mu,\end{aligned}\tag{2.38}$$

onde esta conexão, são os símbolos de Christoffel de onde surge a igualdade

$$\begin{aligned}{}^\circ\Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\alpha g_{\sigma\lambda} + \partial_\sigma g_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda g_{\alpha\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \partial_\sigma g_{\alpha\lambda},\end{aligned}\tag{2.39}$$

onde no terceiro termo os índices $\lambda \leftrightarrow \alpha$ foram trocados entre si, devido a soma que há entre os índices α e λ e devido a simetria do tensor métrico. Assim é verificado que para este caso, 2.37 é igual a 2.38, de modo que a igualdade ${}^\circ\nabla_\mu T^\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu (e T^\mu)$ é verdadeira.

2.1.3 Equações de campo da teoria TERG

As equações de campo são encontradas ao variar a ação em termos da tetrada $e_{a\mu}$ através da equação de Euler-Lagrange. Sendo a ação escrita como

$$\begin{aligned}S &= S_{TERG} + \mathcal{S}_M \\ S &= \int -k e \Sigma^{abc} T_{abc} d^4x + \mathcal{S}_M.\end{aligned}\tag{2.40}$$

A equação de Euler-Lagrange é expressa por

$$\frac{\delta L}{\delta e_{a\mu}} = \frac{\partial L}{\partial e_{a\mu}} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu e_{a\mu})} = 0. \quad (2.41)$$

A variação da ação será calculada por partes,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{TERG}(e_{a\mu}) &= \delta (-ke\Sigma^{abc}T_{abc}) \\ &= -k(\delta e)\Sigma^{abc}T_{abc} - ke\delta(\Sigma^{abc})T_{abc} - ke\Sigma^{abc}\delta(T_{abc}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$= \delta \mathcal{L}_e + \delta \mathcal{L}_\Sigma + \delta \mathcal{L}_T. \quad (2.43)$$

Para resolver $\delta \mathcal{L}_e$ substitui-se a igualdade $\delta e = ee^{d\lambda}\delta e_{d\lambda}$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_e &= -kee^{d\lambda}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\delta e_{d\lambda}, \\ \frac{\delta \mathcal{L}_e}{\delta e_{a\mu}} &= -kee^{d\lambda}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\delta_a^d\delta_\mu^\lambda, \\ &= -kee^{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para resolver $\delta \mathcal{L}_\Sigma$, substitui-se a equação 2.31 no tensor Σ^{abc} ,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_\Sigma &= -ke\delta(\Sigma^{abc})T_{abc} \\ \delta \mathcal{L}_\Sigma &= -ke \left[\frac{1}{4}(\delta T^{abc} + \delta T^{bac} - \delta T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}\delta T^b - \eta^{ab}\delta T^c) \right] T_{abc}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

ao analisar os termos multiplicativos, percebe-se que todos eles podem ficar em função de δT^{abc} como seguem abaixo

$$\begin{aligned} T_{abc}\delta T^{bac} &= T_{bac}\delta T^{abc}, \\ T_{abc}\delta T^{cab} &= T_{cba}\delta T^{acb} = -T_{cba}\delta T^{abc} = T_{cab}\delta T^{abc}, \\ T^b = T_e^b &= \eta_{ef}T^{efb} \Rightarrow \delta T^b = \eta_{ef}\delta T^{efb} \\ T_{abc}\eta^{ac}\delta T^b &= T_{abc}\eta^{ac}\eta_{ef}T^{efb} = -T_{efb}\eta^{ef}\eta_{ac}\delta T^{acb} \\ &= -T_b\eta_{ac}(-\delta T^{abc}) = \eta_{ac}T_b\delta T^{abc}, \\ T_{abc}\eta^{ab}\delta T^c &= \eta_{ab}T_c\delta T^{abc}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Substituindo-os na expressão 2.45 vemos que é possível isolar o termo δT^{abc} de modo que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_\Sigma &= -ke\delta T^{abc} \left[\frac{1}{4}(T_{abc} + T_{bac} - T_{cab}) + \frac{1}{2}(\eta_{ac}T_b - \eta_{ab}T_c) \right], \\ \delta\mathcal{L}_\Sigma &= -ke\Sigma_{abc}\delta T^{abc}.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Ao somar a variação $\delta\mathcal{L}_\Sigma$ encontrada em 2.47 com o terceiro termo da expressão 2.42 a ser aplicado a variação $\delta\mathcal{L}_T$, tem-se,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{\Sigma+T} &= \delta\mathcal{L}_\Sigma + \delta\mathcal{L}_T \\ &= -2ke\Sigma^{abc}\delta T_{abc}.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Os índices do tensor Σ_{bcd} foram levantados e os índices do tensor T^{bcd} abaixados. Ao escrever o tensor torção na forma,

$$T_{bcd} = e_c^\lambda e_d^\nu T_{b\lambda\nu},\tag{2.49}$$

$$T_{b\lambda\nu} = \partial_\lambda e_{b\nu} - \partial_\nu e_{b\lambda},\tag{2.50}$$

com ,

$$\delta e = ee^{d\lambda}\delta e_{d\lambda},\tag{2.51}$$

$$\delta e_c^\lambda = -e_c^\rho e^{\epsilon\lambda}\delta e_{\epsilon\rho},\tag{2.52}$$

e,

$$\begin{aligned}\partial_\lambda (e\Sigma^{bcd}e_c^\lambda e_d^\nu \delta e_{b\nu}) &= e\Sigma^{b\lambda\nu}\partial_\lambda (\delta e_{b\nu}) + (\delta e_{b\nu})\partial_\lambda (e\Sigma^{b\lambda\nu}), \\ e\Sigma^{b\lambda\nu}\partial_\lambda (\delta e_{b\nu}) &= -(\delta e_{b\nu})\partial_\lambda (e\Sigma^{b\lambda\nu}),\end{aligned}\tag{2.53}$$

onde a derivada total acima se anula nas fronteiras, o que resulta na igualdade 2.53. A expressão 2.48 toma a forma,

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{\Sigma+T} &= -2ke\Sigma^{bcd}\delta(e_c^\lambda e_d^\nu T_{b\lambda\nu}) \\
&= -2ke\Sigma^{bcd}(\delta e_c^\lambda) e_d^\nu T_{b\lambda\nu} - 2ke\Sigma^{bcd}e_c^\lambda (\delta e_d^\nu) T_{b\lambda\nu} \\
&\quad - 2ke\Sigma^{bcd}e_c^\lambda e_d^\nu (\partial_\lambda \delta e_{b\nu} - \partial_\nu \delta e_{b\lambda}) \\
&= -2ke\Sigma^{bcd}(-e_c^\rho e^{e\lambda} \delta e_{e\rho}) e_d^\nu T_{b\lambda\nu} - 2ke\Sigma^{bcd}e_c^\lambda (-e_d^\rho e^{e\nu} \delta e_{e\rho}) T_{b\lambda\nu} \\
&\quad - 2ke\Sigma^{bcd}e_c^\lambda e_d^\nu (\partial_\lambda \delta e_{b\nu} - \partial_\nu \delta e_{b\lambda}) \\
&= 2ke\Sigma^{bcd}e_c^\rho e^{e\lambda} e_d^\nu T_{b\lambda\nu} \delta e_{e\rho} + 2ke\Sigma^{bcd}e_c^\lambda e_d^\rho e^{e\nu} T_{b\lambda\nu} \delta e_{e\rho} \\
&\quad + 2k\partial_\lambda (e\Sigma^{b\lambda\nu}) \delta e_{b\nu} - 2k\partial_\nu (e\Sigma^{b\lambda\nu}) \delta e_{b\lambda}.
\end{aligned}$$

A variação desta expressão em termos de $e_{a\mu}$ é calculada como,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_{\Sigma+T}}{\delta e_{a\mu}} &= 2ke\Sigma^{bcd}e_c^\rho e^{e\lambda} e_d^\nu T_{b\lambda\nu} \delta_a^e \delta_\mu^\rho + 2ke\Sigma^{bcd}e_c^\lambda e_d^\rho e^{e\nu} T_{b\lambda\nu} \delta_a^e \delta_\mu^\rho \\
&\quad + 2k\partial_\lambda (e\Sigma^{b\lambda\nu}) \delta_a^b \delta_\mu^\nu - 2k\partial_\nu (e\Sigma^{b\lambda\nu}) \delta_a^b \delta_\mu^\lambda \\
&= 2ke\Sigma^{b\mu\nu} T_b^a{}_\nu + 2ke\Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}^a + 2k\partial_\lambda (e\Sigma^{a\lambda\mu}) - 2k\partial_\nu (e\Sigma^{a\mu\nu}),
\end{aligned}$$

ao trocar $\nu \rightarrow \lambda$ e aplicar a propriedade de antissimetria,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_{\Sigma+T}}{\delta e_{a\mu}} &= 2ke\Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}^a + 2ke\Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}^a - 2k\partial_\lambda (e\Sigma^{a\mu\lambda}) - 2k\partial_\lambda (e\Sigma^{a\mu\lambda}) \\
&= -4k [\partial_\lambda (e\Sigma^{a\mu\lambda}) - e\Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}^a].
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Por fim, a variação em termos da ação da matéria é definida como:

$$\frac{\delta L_M}{\delta e_{a\mu}} \equiv eT^{a\mu}. \tag{2.55}$$

Depois de ter encontrado as variações da ação e aplicado o Princípio de Mínima Ação, é encontrado

$$\partial_\lambda (e\Sigma^{a\mu\lambda}) - e \left(\Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}^a - \frac{1}{4} e^{a\mu} T_{bcd} \Sigma^{bcd} \right) = \frac{1}{4k} eT^{a\mu}. \tag{2.56}$$

Estas são as equações de campo para a densidade de Lagrangiana do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral. Observe ainda que 2.56 é proporcional ao tensor de

Einstein 1.15, ou seja,

$$\partial_\lambda (e\Sigma^{a\mu\lambda}) - e \left(\Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}{}^a - \frac{1}{4} e^{a\mu} T_{bcd} \Sigma^{bcd} \right) = \frac{1}{2} e \left({}^\circ R^{a\mu} - \frac{1}{2} {}^\circ R e^{a\mu} \right),$$

sendo reescrita como,

$${}^\circ R^{a\mu} - \frac{1}{2} {}^\circ R e^{a\mu} = \frac{1}{2k} e T^{a\mu}. \quad (2.57)$$

2.2 Transformações Conformes

Leitores podem se confundir com o termo Transformações Conformes, porque na literatura este termo por muitas vezes é utilizado tanto para falar de uma classe de transformações de coordenadas quanto de transformações no tensor métrico por um reescalamento local.

A transformação apresentada nesta seção trata de uma reescala somente da métrica por uma função suave não-nula, que não dependa de uma mudança no sistema de coordenadas. Assim, se definem as Transformações Conformes ou Transformações de Weyl

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\theta(x)} g_{\mu\nu}, \quad (2.58)$$

onde $e^{\theta(x)}$ é chamado de fator conforme, sendo ele uma função suave, não-nula na variedade [46; 47]. Esse tipo de transformação se trata de uma transformação local de escala [5], que tem como característica a preservação do ângulo entre dois vetores quaisquer [48] e da estrutura causal [47], não preservando o comprimento dos vetores. A demonstração da preservação dos ângulos dada abaixo é discutida em [49; 50].

Sejam dois vetores \vec{A} e \vec{B} separados por um ângulo θ . O produto escalar entre eles é dado na forma,

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A \cdot B \cdot \cos(\theta) \\ A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} &= \sqrt{A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}} \cdot \sqrt{B^\rho B^\sigma g_{\rho\sigma}} \cdot \cos(\theta) \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}}{\sqrt{A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}} \cdot \sqrt{B^\rho B^\sigma g_{\rho\sigma}}} \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Ao aplicar a transformação conforme no tensor métrico,

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \vec{B} &= A \cdot B \cdot \cos(\theta) \\
A^\mu B^\nu \tilde{g}_{\mu\nu} &= \sqrt{A^\mu A^\nu \tilde{g}_{\mu\nu}} \cdot \sqrt{B^\rho B^\sigma \tilde{g}_{\rho\sigma}} \cdot \cos(\theta) \\
A^\mu B^\nu e^{2\theta(x)} g_{\mu\nu} &= \sqrt{A^\mu A^\nu e^{2\theta(x)} g_{\mu\nu}} \cdot \sqrt{B^\rho B^\sigma e^{2\theta(x)} g_{\rho\sigma}} \cdot \cos(\theta) \\
A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} &= \frac{e^{2\theta(x)}}{e^{2\theta(x)}} \sqrt{A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}} \cdot \sqrt{B^\rho B^\sigma g_{\rho\sigma}} \cdot \cos(\theta) \\
\theta &= \cos^{-1} \left(\frac{A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}}{\sqrt{A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}} \cdot \sqrt{B^\rho B^\sigma g_{\rho\sigma}}} \right). \tag{2.60}
\end{aligned}$$

Portanto como demonstrado, o ângulo é preservado depois de aplicada a transformação conforme, ou seja, 2.59 é igual a 2.60.

O tensor de Riemann é dividido em uma parte com traço e outra parte sem traço. A parte com traço é o tensor de Ricci, e a parte sem traço é denominado tensor de Weyl $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$, definido por

$$C_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\lambda\mu\nu\kappa} - \frac{2}{n-2} (g_{\lambda[\nu} R_{\kappa]\mu} - g_{\mu[\nu} R_{\kappa]\lambda}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{\lambda[\nu} g_{\kappa]\mu}, \tag{2.61}$$

onde n é a dimensão e os colchetes indicam que esses índices devem ser antissimetrizados. Este tensor é invariante por transformações conformes na forma,

$$\tilde{C}_{\lambda\mu\nu\kappa} = C_{\lambda\mu\nu\kappa}. \tag{2.62}$$

O tensor de Riemann, assim como o tensor de Ricci e o escalar de curvatura não são invariantes por transformações conformes, como demonstrado em [46; 47]. A transformação conforme do escalar de curvatura é escrito abaixo,

$$R \rightarrow \tilde{R} = \{R - 2(n-1)g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\theta - (n-2)(n-1)g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\theta)\nabla_\nu\theta\}.$$

A aplicação da transformação conforme para o tensor métrico contravariante e o determinante do tensor métrico se dá na forma,

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} = e^{-2\theta(x)} g^{\mu\nu}, \tag{2.63}$$

$$g \rightarrow \tilde{g} = e^{8\theta} g, \tag{2.64}$$

e para o campo de tetradas,

$$e_{a\mu} \rightarrow \tilde{e}_{a\mu} = e^{\theta(x)} e_{a\mu}, \quad (2.65)$$

$$e^{a\mu} \rightarrow \tilde{e}^{a\mu} = e^{-\theta(x)} e^{a\mu}, \quad (2.66)$$

$$e \rightarrow \tilde{e} = e^{4\theta} e. \quad (2.67)$$

As tetradas se transformam como 2.65 e 2.66 devido à relação com o tensor métrico, dada por $e^a{}_{\mu} e_{a\nu} = g_{\mu\nu}$.

2.3 Teoria de Weyl

Hermann Klaus Hugo Weyl, nasceu em 1885 em Elmshorn-Alemanha e faleceu em 1955 em Zurique-Suíça, aos 70 anos. Grande colaborador na ciência da Matemática como por exemplo na teoria dos números e equações diferenciais singulares [51]. Também desenvolveu interesses na Física, especialmente após o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral feita por Einstein. Weyl encontrou na teoria Gravitacional de Einstein uma oportunidade para desenvolver uma teoria que unificasse Gravitação e Eletromagnetismo, cujo vínculo seria a geometrização de ambas as forças [52]. Essa foi a motivação que o fez desenvolver a teoria hoje denominada teoria de Weyl [13] surgida em 1918 [52].

Na geometria Riemanniana o transporte paralelo de um vetor leva-o a mudar somente sua direção durante o trajeto a ser percorrido, não alterando seu comprimento. Na geometria de Weyl, este vetor quando transportado paralelamente muda tanto sua direção quanto seu comprimento [53]. Assim, Weyl aplica seu conhecimento para um espaço não-Riemanniano denominado espaço de Weyl e desenvolve os cálculos de sua teoria a partir da definição da derivada covariante do tensor métrico, que não é nula [54], dada por

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 2\phi_{\rho} g_{\mu\nu}, \quad (2.68)$$

ao contrário da geometria Riemanniana, para a qual $\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0$, e $\phi_{\rho}(x)$ é um vetor da teoria, que depois é comparado ao 4-potencial A_{μ} do Eletromagnetismo [53].

Weyl a partir da definição de derivada covariante 2.68 encontra uma conexão denominada conexão de Weyl, cuja torção é nula [54]. Obtida a conexão ele aplica uma reescala

no tensor métrico e transforma o vetor $\phi_\rho(x)$ na forma,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\theta(x)} g_{\mu\nu}, \quad (2.69)$$

$$\phi_\mu \rightarrow \tilde{\phi}_\mu = \phi_\mu - \partial_\mu \theta, \quad (2.70)$$

da qual chegou a conclusão de que sua conexão era invariante por essas transformações, denominadas transformações de Gauge. A transformação em 2.69 é reconhecida como uma transformação conforme ou transformação de Weyl como já apresentada na seção anterior.

Com a conexão, Weyl agora poderia com uma Lagrangiana encontrar suas equações de campo. Mas antes, dois pontos devem ser considerados para entender a escolha da ação de Weyl: o peso de Gauge e a relação entre o escalar de curvatura no espaço de Weyl e o escalar de curvatura no espaço Riemanniano.

O peso de Gauge é definido por um número associado à quantidade de vezes em que o tensor métrico aparece na definição da quantidade geométrica a ser calculada. Por exemplo, o peso de Gauge para o tensor métrico covariante $g_{\mu\nu}$ é igual a um, para o tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$ o peso de Gauge é igual a menos um, e para o determinante do tensor métrico $\sqrt{-g}$ em 4-dimensões o peso de Gauge é igual a dois [54].

A relação entre os escalares de curvatura é expressa por [55],

$$R_w = {}^\circ R - (n-1)(n-2)\phi_\mu\phi^\mu - 2(n-1)^\circ\nabla_\mu\phi^\mu, \quad (2.71)$$

onde n é a dimensão. Para $n = 4$,

$$R_w = {}^\circ R - 6\phi_\mu\phi^\mu - 6^\circ\nabla_\mu\phi^\mu. \quad (2.72)$$

Agora a Lagrangiana pode ser construída. As Lagrangianas estudadas por Weyl podem ser escritas na forma,

$$S_w = \int [\alpha R^2 + \beta R^\mu{}_{\nu\lambda\kappa} R_\mu{}^{\nu\lambda\kappa} + A F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.73)$$

onde α, β e A são constantes, $F_{\mu\nu}$ é o tensor do campo Eletromagnético e $R^2, R^\mu{}_{\nu\lambda\kappa} R_\mu{}^{\nu\lambda\kappa}$ são os termos quadráticos da curvatura. Para alguns modelos, Weyl considera $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ [55].

Weyl escolheu estes termos da Lagrangiana comparando os pesos de Gauge da quantidade $\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ em função do peso de Gauge das quantidades candidatas. Foi uma ideia aplausível de Weyl, a junção da parte geométrica da Gravitação e do Eletromagnetismo. A variação desta ação com respeito a A_μ e g^μ gera equações de campo de quarta ordem, nas quais é possível observar a conservação de carga do Eletromagnetismo [54] e as quais reproduzem resultados da Relatividade Geral como o deslocamento do periélio de Mercúrio e a deflexão da luz [13].

Mas a teoria de Weyl apresenta alguns problemas. Um deles foi discutido por Einstein explicando que devem existir vetores cujo comprimento não dependa da trajetória percorrida [54]. Essa exigência não é satisfeita na teoria de Weyl. O outro problema crucial está na definição da derivada covariante que leva a contradições [54].

Contudo, seu esforço não foi em vão. Na tentativa de escrever uma teoria unificada, Weyl desenvolveu o conceito de transformações de Gauge e invariância de Gauge, e escreveu uma teoria alternativa à Relatividade Geral [13; 56]. Há estudos dessa teoria em teoria quântica [57; 58], física de partículas [59; 60], física de altas energias [61; 62], e energia escura [63], dentre outros.

Na literatura há interesse em resolver os problemas da teoria de Weyl, como é o caso da não-integrabilidade que também é um problema físico como discutido em [53; 64], e em aplicar essa teoria a Lagrangianas que sejam conformalmente invariantes, como é o exemplo da Lagrangiana de Rudolf Bach, $L = C_{\lambda\mu\nu\kappa}C^{\lambda\mu\nu\kappa}$ [13], construída com o tensor de Weyl, ao contrário da Lagrangiana da Relatividade Geral. De modo mais geral encontra-se na literatura os nomes ação de Weyl [65; 66] ou ação de Weyl e Bach [67], para o vácuo para a ação

$$S_w = -\alpha \int C_{\lambda\mu\nu\kappa}C^{\lambda\mu\nu\kappa}\sqrt{-g}d^4x, \quad (2.74)$$

sendo α um coeficiente adimensional.

Essas teorias exibem um grau de dificuldade maior do que as teorias de segunda ordem no que se refere às resoluções das equações de campo, devido a serem equações de quarta ordem.

2.4 Teleparalelismo Conforme

A gravidade conforme na teoria do Teleparalelismo é a teoria gravitacional invariante por transformações conformes locais aplicada na teoria do teleparalelismo [12]. Para que essa teoria seja construída é necessário encontrar uma Lagrangiana que satisfaça essa condição de invariância. Primeiramente vamos aplicar as transformações conformes na Lagrangiana do TERG e verificar se ela é invariante por tais transformações.

A seguir serão apresentados como os tensores que compõem a Lagrangiana do TERG se transformam.

O tensor torção com índices latinos é dado por

$$T_{abc} = e_b^\mu e_c^\nu (\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}). \quad (2.75)$$

Aplicada a transformação conforme neste tensor, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{abc} &= \tilde{e}_b^\mu \tilde{e}_c^\nu (\partial_\mu \tilde{e}_{a\nu} - \partial_\nu \tilde{e}_{a\mu}) \\ &= \eta_{bd} (e^{-\theta} e^{d\mu}) \eta_{ce} (e^{-\theta} e^{e\nu}) [\partial_\mu (e^\theta e_{a\nu}) - \partial_\nu (e^\theta e_{a\mu})] \\ &= e^{-2\theta} e_b^\mu e_c^\nu [e_{a\nu} e^\theta \partial_\mu (\theta) + e^\theta \partial_\mu (e_{a\nu}) - e_{a\mu} e^\theta \partial_\nu (\theta) - e^\theta \partial_\nu (e_{a\mu})] \\ &= e^{-2\theta} e_b^\mu e_c^\nu (\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}) + e^{-2\theta} e_b^\mu e_c^\nu (e_{a\nu} e^\theta \partial_\mu \theta - e_{a\mu} e^\theta \partial_\nu \theta). \end{aligned} \quad (2.76)$$

O primeiro termo da expressão 2.76 contém o tensor T_{abc} em 2.75, assim tem-se

$$\tilde{T}_{abc} = e^{-\theta} (T_{abc} + \eta_{ac} e_b^\mu \partial_\mu \theta - \eta_{ab} e_c^\mu \partial_\mu \theta). \quad (2.77)$$

O tensor T_a é dado por

$$\begin{aligned} T_a &= T_{ba}^b \\ &= e_b^\mu e_a^\nu T_{\mu\nu}^b \\ &= \eta_{ad} e^{b\mu} e^{d\nu} (\partial_\mu e_{b\nu} - \partial_\nu e_{b\mu}). \end{aligned}$$

Ao aplicar a transformação conforme,

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_a &= \eta_{ad} \tilde{e}^{b\mu} \tilde{e}^{d\nu} (\partial_\mu \tilde{e}_{b\nu} - \partial_\nu \tilde{e}_{b\mu}) \\
&= \eta_{ad} e^{-\theta} e^{b\mu} e^{-\theta} e^{d\nu} [\partial_\mu (e^\theta e_{b\nu}) - \partial_\nu (e^\theta e_{b\mu})] \\
&= e^{-\theta} (T_a + e^{b\mu} \eta_{ba} \partial_\mu \theta - e^{b\mu} e_{b\mu} e_a^\nu e_{b\mu} \partial_\nu \theta) \\
&= e^{-\theta} (T_a - 3e_a^\mu \partial_\mu \theta).
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Os cálculos dos termos quadráticos do tensor torção com transformação conforme são,

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{abc} \tilde{T}_{abc} &= [e^{-\theta} (T^{abc} + \eta^{ac} e^{b\mu} \partial_\mu \theta - \eta^{ab} e^{c\mu} \partial_\mu \theta)] \cdot [e^{-\theta} (T_{abc} + \eta_{ac} e_b^\nu \partial_\nu \theta - \eta_{ab} e_c^\nu \partial_\nu \theta)] \\
&= e^{-2\theta} [T^{abc} T_{abc} - T^\nu \partial_\nu \theta - T^\nu \partial_\nu \theta - T^\mu \partial_\mu \theta + 4g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta - g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta - T^\mu \partial_\mu \theta \\
&\quad - g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta + 4g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta] \\
&= e^{-2\theta} (T^{abc} T_{abc} - 4T^\mu \partial_\mu \theta + 6g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta),
\end{aligned} \tag{2.79}$$

e,

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{abc} \tilde{T}_{bac} &= [e^{-\theta} (T^{abc} + \eta^{ac} e^{b\mu} \partial_\mu \theta - \eta^{ab} e^{c\mu} \partial_\mu \theta)] \cdot [e^{-\theta} (T_{bac} + \eta_{bc} e_a^\nu \partial_\nu \theta - \eta_{ba} e_c^\nu \partial_\nu \theta)] \\
&= e^{-2\theta} [T^{abc} T_{bac} - T^\nu \partial_\nu \theta + g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta - g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta - T^\mu \partial_\mu \theta \\
&\quad - g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta + 4g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta], \\
&= e^{-2\theta} (T^{abc} T_{bac} - 2T^\mu \partial_\mu \theta + 3g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta),
\end{aligned} \tag{2.80}$$

e,

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^a \tilde{T}_a &= [e^{-\theta} (T^a - 3e^{a\mu} \partial_\mu \theta)] \cdot [e^{-\theta} (T_a - 3e_a^\nu \partial_\nu \theta)] \\
&= e^{-2\theta} (T^a T_a - 3T^\nu \partial_\nu \theta - 3T^\mu \partial_\mu \theta + 9g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta), \\
&= e^{-2\theta} (T^a T_a - 6T^\mu \partial_\mu \theta + 9g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta).
\end{aligned} \tag{2.81}$$

A densidade de Lagrangiana da teoria do TERG dada pela expressão 2.28 sem a adição da matéria não é invariante por transformações conformes. Demonstração segue abaixo

em termos de índices latinos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{TERG}(\tilde{e}_{a\mu}) &= -k\tilde{e} \left(\frac{1}{4}\tilde{T}^{abc}\tilde{T}_{abc} + \frac{1}{2}\tilde{T}^{abc}\tilde{T}_{bac} - \tilde{T}^a\tilde{T}_a \right) \\
&= -ke^{4\theta} e \left[\frac{1}{4}e^{-2\theta} (T^{abc}T_{abc} - 4T^\mu\partial_\mu\theta + 6g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}e^{-2\theta} (T^{abc}T_{bac} - 2T^\mu\partial_\mu\theta + 3g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta) \right. \\
&\quad \left. - e^{-2\theta} (T^aT_a - 6T^\mu\partial_\mu\theta + 9g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta) \right] \\
&= -ke^{2\theta} e \left[\left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a \right) + 4T^\mu\partial_\mu\theta - 6g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta \right] \\
&= e^{2\theta} [\mathcal{L}_{TERG}(e^a{}_\mu) - ke(4T^\mu\partial_\mu\theta - 6g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta)]. \tag{2.82}
\end{aligned}$$

Conclui-se a partir desta demonstração que a Lagrangiana 2.28 não é invariante por transformações conformes, assim será escolhida outra Lagrangiana para esta teoria.

Maluf e Faria em [12] apresentam uma Lagrangiana similar a do TERG, com um fator $\frac{1}{3}$ multiplicando o termo T^aT_a ,

$$\mathcal{L}(e_{a\mu}) = -ke \left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - \frac{1}{3}T^aT_a \right). \tag{2.83}$$

Esta densidade de Lagrangiana também não exibe invariância quando aplicada a transformação conforme devido a um termo, $e^{2\theta}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\tilde{e}_{a\mu}) &= -k\tilde{e} \left(\frac{1}{4}\tilde{T}^{abc}\tilde{T}_{abc} + \frac{1}{2}\tilde{T}^{abc}\tilde{T}_{bac} - \frac{1}{3}\tilde{T}^a\tilde{T}_a \right) \\
&= -ke^{4\theta} e \left[\frac{1}{4}e^{-2\theta} (T^{abc}T_{abc} - 4T^\mu\partial_\mu\theta + 6g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}e^{-2\theta} (T^{abc}T_{bac} - 2T^\mu\partial_\mu\theta + 3g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3}e^{-2\theta} (T^aT_a - 6T^\mu\partial_\mu\theta + 9g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta) \right] \\
&= e^{2\theta}\mathcal{L}(e_{a\mu}). \tag{2.84}
\end{aligned}$$

Para essa expressão 2.84 ser invariante Maluf e Faria incluem um campo escalar ϕ e uma derivada covariante D_μ . Eles se transformam na forma

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = e^{-\theta}\phi, \tag{2.85}$$

$$\tilde{D}_\mu = e^{-\theta}D_\mu\phi, \tag{2.86}$$

onde $D_\mu\phi = (\partial_\mu - \frac{1}{3}T_\mu)\phi$, e $T_\mu = e^a{}_\mu T_a$. Desse modo, a Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}(e_{a\mu}, \phi) = ke \left[-\phi^2 \left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - \frac{1}{3}T^a T_a \right) + k' g^{\mu\nu} D_\mu\phi D_\nu\phi \right], \quad (2.87)$$

onde k é a constante gravitacional e k' uma constante arbitrária. Para o caso em que $\phi = 1$, esta Lagrangiana se reduz à Lagrangiana do TERG para o caso particular em que $k' = 6$. Ao substituir $k' = 6$ a expressão 2.87 fica igual a

$$\mathcal{L}(e_{a\mu}, \phi) = ke \left[-\phi^2 \left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - \frac{1}{3}T^a T_a \right) + 6g^{\mu\nu} D_\mu\phi D_\nu\phi \right]. \quad (2.88)$$

Ao aplicar a transformação conforme,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{e}_{a\mu}, \tilde{\phi}) &= k\tilde{e} \left[-\tilde{\phi}^2 \left(\frac{1}{4}\tilde{T}^{abc}\tilde{T}_{abc} + \frac{1}{2}\tilde{T}^{abc}\tilde{T}_{bac} - \frac{1}{3}\tilde{T}^a\tilde{T}_a \right) + 6\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{D}_\mu\tilde{\phi}\tilde{D}_\nu\tilde{\phi} \right] \\ &= kee^{4\theta} \left\{ -e^{-2\theta}\phi^2 \left[\frac{1}{4}e^{-2\theta} (T^{abc}T_{abc} - 4T^\mu\partial_\mu\theta + 6g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}e^{-2\theta} (T^{abc}T_{bac} - 2T^\mu\partial_\mu\theta + 3g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{3}e^{-2\theta} (T^a T_a - 6T^\mu\partial_\mu\theta + 9g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta) \right] + 6e^{-4\theta} g^{\mu\nu} D_\mu\phi D_\nu\phi \right\} \\ &= ke \left[-\phi^2 \left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - \frac{1}{3}T^a T_a \right) + 6g^{\mu\nu} D_\mu\phi D_\nu\phi \right] \\ &= \mathcal{L}(e_{a\mu}, \phi). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Portanto esta densidade de Lagrangiana é invariante sob as transformações conformes.

A equação 2.88 pode ser ainda reescrita de forma a simplificar a variação desta Lagrangiana para gerar as equações de campo. Ao aplicar a definição de derivada covariante no último termo da expressão 2.88, tem-se

$$\begin{aligned} 6g^{\mu\nu} D_\mu\phi D_\nu\phi &= 6g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu\phi - \frac{1}{3}T_\mu\phi \right) \left(\partial_\nu\phi - \frac{1}{3}T_\nu\phi \right) \\ 6g^{\mu\nu} D_\mu\phi D_\nu\phi &= 6g^{\mu\nu} \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - 4g^{\mu\nu}\phi(\partial_\mu\phi)T_\nu + \frac{2}{3}\phi^2 T^a T_a. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Substitui-se 2.90 em 2.88 e sua expressão toma a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e_{a\mu}, \phi) &= ke \left[-\phi^2 \left(\Sigma^{abc}T_{abc} + \frac{2}{3}T^a T_a \right) + 6g^{\mu\nu} \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - 4g^{\mu\nu}\phi(\partial_\mu\phi)T_\nu + \frac{2}{3}\phi^2 T^a T_a \right] \\ &= ke \left[-\phi^2 \Sigma^{abc}T_{abc} + 6g^{\mu\nu} \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - 4g^{\mu\nu}\phi(\partial_\mu\phi)T_\nu \right], \end{aligned}$$

onde,

$$\Sigma^{abc}T_{abc} + \frac{2}{3}T^aT_a = \frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - \frac{1}{3}T^aT_a. \quad (2.91)$$

Assim a expressão para a Lagrangiana do Teleparalelismo Conforme a ser considerada é 2.92.

$$\mathcal{L}_{TC}(e_{a\mu}, \phi) = ke \left[-\phi^2 \Sigma^{abc}T_{abc} + 6g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 4g^{\mu\nu} \phi (\partial_\mu \phi) T_\nu \right]. \quad (2.92)$$

2.4.1 Equações de campo do Teleparalelismo Conforme.

As equações de campo são encontradas variando 2.92 com respeito ao campo de tetrada $e_{a\mu}$ e ao campo escalar ϕ .

2.4.1.1 Equação de campo com respeito a $\phi(t)$

A variação com respeito ao campo escalar ϕ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{TC}(e_{a\mu}, \phi) &= ke \left(-\phi^2 \Sigma^{abc}T_{abc} + 6g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 4g^{\mu\nu} \phi (\partial_\mu \phi) T_\nu \right), \\ \delta \mathcal{L}_{TC}(e_{a\mu}, \phi) &= k \left[-e \Sigma^{abc}T_{abc} \delta \phi^2 + 6eg^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta \phi) (\partial_\nu \phi) + 6eg^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \delta \phi) \right. \\ &\quad \left. - 4eg^{\mu\nu} (\delta \phi) (\partial_\mu \phi) T_\nu - 4eg^{\mu\nu} \phi (\partial_\mu \delta \phi) T_\nu \right]. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Na variação do segundo e do último termo da expressão 2.93, os cálculos foram feitos conforme visto em 2.53. Isso aplica também às outras variações similares com as apresentadas abaixo,

$$eg^{\mu\nu} \partial_\nu \phi (\partial_\mu \delta \phi) = -\partial_\mu (eg^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \delta \phi, \quad (2.94)$$

$$eg^{\mu\nu} \phi T_\nu (\partial_\mu \delta \phi) = -[eg^{\mu\nu} T_\nu (\partial_\mu \phi) + \phi \partial_\mu (eg^{\mu\nu} T_\nu)] \delta \phi. \quad (2.95)$$

Assim a expressão 2.93 é igual à,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{TC}(e_{a\mu}, \phi) &= k \left[-2\phi e \Sigma^{abc}T_{abc} - 6\partial_\mu (eg^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - 6\partial_\nu (eg^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) \right. \\ &\quad \left. - 4eg^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) T_\nu + 4eg^{\mu\nu} T_\nu (\partial_\mu \phi) + 4\phi \partial_\mu (eg^{\mu\nu} T_\nu) \right] \delta \phi. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Note que o quarto e o quinto termo desta expressão se cancelam. Portanto, a variação em relação ao campo ϕ é,

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_{TC}(e_{a\mu}, \phi)}{\delta\phi} &= k \left[-2e\phi\Sigma^{abc}T_{abc} - 6\partial_\mu(eg^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) - 6\partial_\nu(eg^{\mu\nu}\partial_\mu\phi) + 4\phi\partial_\mu(eg^{\mu\nu}T_\nu) \right] \\ &= k \left[-2e\phi\Sigma^{abc}T_{abc} - 12\partial_\nu(eg^{\mu\nu}\partial_\mu\phi) + 4\phi\partial_\mu(eT^\mu) \right].\end{aligned}\quad (2.97)$$

Ao aplicar o Princípio de Mínima Ação com respeito ao campo ϕ , $\frac{\delta\mathcal{L}_{TC}(e_{a\mu}, \phi)}{\delta\phi} = 0$, e dividir a expressão 2.97 pelo fator $(-2k)$, obtém-se

$$\partial_\nu(eg^{\mu\nu}\partial_\mu\phi) + \frac{1}{6}\phi \left[e\Sigma^{abc}T_{abc} - 2\partial_\mu(eT^\mu) \right] = 0. \quad (2.98)$$

Esta é a equação de campo com respeito a ϕ . O termo entre colchetes contém o escalar de curvatura 2.33. Desse modo, a equação de campo 2.98 toma a forma

$$\partial_\nu(eg^{\mu\nu}\partial_\mu\phi) - \frac{1}{6}{}^\circ Re\phi = 0. \quad (2.99)$$

2.4.1.2 Equações de campo com respeito a $e_{a\mu}$

Ao reescrever a densidade de Lagrangiana 2.92 com a definição 2.4 tem-se,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{TC}(e_{a\mu}, \phi) &= ke \left[-\phi^2\Sigma^{abc}T_{abc} + 6e^{a\mu}e_a{}^\nu\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - 4e^{a\mu}e_a{}^\nu\phi(\partial_\mu\phi)T_\nu \right], \\ &= -ke\phi^2\Sigma^{abc}T_{abc} + 6kee^{a\mu}e_a{}^\nu\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - 4kee^{a\mu}e_a{}^\nu\phi(\partial_\mu\phi)T_\nu \\ &= \mathcal{L}_{e\Sigma T} + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_{eT}.\end{aligned}\quad (2.100)$$

A resolução desta expressão será feita por partes. Assim, para calcular $\mathcal{L}_{e\Sigma T}$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{e\Sigma T} &= -ke\phi^2\Sigma^{abc}T_{abc} \\ &= -k(\delta e)\phi^2\Sigma^{abc}T_{abc} - ke\phi^2(\delta\Sigma^{abc})T_{abc} - ke\phi^2\Sigma^{abc}(\delta T_{abc})\end{aligned}\quad (2.101)$$

$$= \mathcal{L}_{\delta e} + \mathcal{L}_{\delta\Sigma} + \mathcal{L}_{\delta T}. \quad (2.102)$$

No primeiro termo da expressão 2.101, utilize a igualdade 2.51. A variação segue

abaixo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\delta e} &= -ke e^{d\lambda} \phi^2 \Sigma^{bce} T_{bce} (\delta e_{d\lambda}) \\
\frac{\delta \mathcal{L}_{\delta e}}{\delta e_{a\mu}} &= -ke e^{d\lambda} \phi^2 \Sigma^{bce} T_{bce} \delta^a_d \delta^\mu_\lambda \\
&= -ke e^{a\mu} \phi^2 \Sigma^{bcd} T_{bcd}.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

No segundo termo da expressão 2.101

$$\mathcal{L}_{\delta\Sigma} = -ke\phi^2 \left[\frac{1}{4} (\delta T^{abc} + \delta T^{bac} - \delta T^{cab}) + \frac{1}{2} (\eta^{ac} \delta T^b - \eta^{ab} \delta T^c) \right] T_{abc}. \tag{2.104}$$

A expressão 2.104 pode ser reescrita com os termos encontrados em 2.46, de forma que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\delta\Sigma} &= -ke\phi^2 \delta T^{abc} \left[\frac{1}{4} (T_{abc} + T_{bac} - T_{cab}) + \frac{1}{2} (\eta_{ac} T_b - \eta_{ab} T_c) \right] \\
&= -ke\phi^2 \Sigma^{abc} \delta T_{abc}.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Ao somar 2.105 com o terceiro termo da 2.101,

$$\mathcal{L}_{\delta\Sigma+\delta T} = -2ke\phi^2 \Sigma^{abc} \delta T_{abc}. \tag{2.106}$$

As expressões (2.49-2.53) vão ser necessárias para aplicar na variação de 2.106. Seguem os cálculos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\delta\Sigma+\delta T} &= -2ke\phi^2 \Sigma^{bcd} \delta [e_c^\lambda e_d^\nu T_{b\lambda\nu}] \\
&= -2ke\phi^2 \Sigma^{bcd} (\delta e_c^\lambda) e_d^\nu T_{b\lambda\nu} - 2ke\phi^2 \Sigma^{bcd} e_c^\lambda (\delta e_d^\nu) T_{b\lambda\nu} \\
&\quad - 2ke\phi^2 \Sigma^{bcd} e_c^\lambda e_d^\nu [\partial_\lambda (\delta e_{b\nu}) - \partial_\nu (\delta e_{b\lambda})] \\
&= 2ke\phi^2 \Sigma^{bcd} e_d^\nu T_{b\lambda\nu} e_c^\rho e^{e\lambda} \delta e_{e\rho} + 2ke\phi^2 \Sigma^{bcd} e_c^\lambda T_{b\lambda\nu} e_d^\rho e^{e\nu} \delta e_{e\rho} \\
&\quad + 2k\partial_\lambda (e\phi^2 \Sigma^{b\lambda\nu}) \delta e_{b\nu} - 2k\partial_\nu (e\phi^2 \Sigma^{b\lambda\nu}) \delta e_{b\lambda} \\
\frac{\mathcal{L}_{\delta\Sigma+\delta T}}{\delta e_{a\mu}} &= 2ke\phi^2 \Sigma^{bcd} e_d^\nu e_c^\mu e^{a\lambda} T_{b\lambda\nu} + 2ke\phi^2 \Sigma^{bcd} e_c^\lambda e_d^\mu e^{a\nu} T_{b\lambda\nu} \\
&\quad + 2k\partial_\lambda (e\phi^2 \Sigma^{a\lambda\mu}) - 2k\partial_\nu (e\phi^2 \Sigma^{a\mu\nu}) \\
&= 2ke\phi^2 \Sigma^{b\mu\lambda} T_b^a{}_\nu + 2ke\phi^2 \Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}^a - 4k\partial_\lambda (e\phi^2 \Sigma^{a\mu\lambda}) \\
&= -4k [\partial_\lambda (e\phi^2 \Sigma^{a\mu\lambda}) - e\phi^2 \Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}^a].
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Substitui-se 2.103 e 2.107 em 2.102 e o valor para o primeiro termo de 2.100 é encontrado, sendo ele igual a

$$\mathcal{L}_{e\Sigma T} = -kee^{a\mu}\phi^2\Sigma^{bcd}T_{bcd} - 4k[\partial_\lambda(e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}) - e\phi^2\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda}{}^a]. \quad (2.108)$$

Para o segundo termo de 2.100, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e &= 6kee^{b\sigma}e_b{}^\nu\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi \\ &= 6k(\delta e)e^{b\sigma}e_b{}^\nu\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi + 6ke(\delta e^{b\sigma})e_b{}^\nu\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi + 6kee^{b\sigma}(\delta e_b{}^\nu)\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Utilize as igualdades 2.51 e 2.52 na expressão 2.109. A variação segue abaixo,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_e &= 6kee^{d\lambda}e^{b\sigma}e_b{}^\nu\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi(\delta e_{d\lambda}) - 6kee^{b\lambda}e^{d\sigma}e_b{}^\nu\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi(\delta e_{d\lambda}) \\ &\quad - 6kee^{b\sigma}e_b{}^\rho e^{e\nu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi(\delta e_{e\rho}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{L}_e}{\delta e_{a\mu}} &= 6kee^{a\mu}e^{b\sigma}e_b{}^\nu\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi - 6kee^{b\mu}e^{a\sigma}e_b{}^\nu\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi - 6kee^{b\sigma}e^{a\nu}e_b{}^\mu\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi \\ &= 6kee^{a\mu}g^{\sigma\nu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi - 6kee^{a\sigma}g^{\mu\nu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi - 6kee^{a\nu}g^{\sigma\mu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi \\ &= 6kee^{a\mu}g^{\sigma\nu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi - 12kee^{a\nu}g^{\sigma\mu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Para o terceiro termo de 2.100, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eT} &= -4kee^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu \\ \delta\mathcal{L}_{eT} &= -4k(\delta e)e^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu - 4ke(\delta e^{b\sigma})e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu \\ &\quad - 4kee^{b\sigma}(\delta e_b{}^\nu)\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu - 4kee^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)(\delta T_\nu), \end{aligned} \quad (2.111)$$

a variação com relação a T_ν é obtida abaixo,

$$\begin{aligned} \delta T_\nu &= \delta[e_c{}^\rho T_{\rho\nu}^c] \\ &= \delta[e_c{}^\rho(\partial_\rho e_c{}^\nu - \partial_\nu e_c{}^\rho)] \\ &= (\delta e_c{}^\rho)\partial_\rho e_c{}^\nu + e_c{}^\rho\partial_\rho(\delta e_c{}^\nu) - (\delta e_c{}^\rho)\partial_\nu e_c{}^\rho - e_c{}^\rho\partial_\nu(\delta e_c{}^\rho) \\ &= e_c{}^\sigma e^{e\rho}T_{\nu\rho}^c\delta e_{e\sigma} + (\partial_\nu e^{c\rho})\delta e_{c\rho} - (\partial_\rho e^{c\rho})\delta e_{c\nu}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Substitui-se 2.112 em 2.111

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{eT} &= -4kee^{d\lambda}e^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu\delta e_{d\lambda} + 4kee^{b\lambda}e^{d\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu\delta e_{d\lambda} \\
&\quad + 4kee^{b\sigma}e_b{}^\rho e^{e\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu\delta e_{e\rho} - 4kee^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)[e_c{}^\sigma e^{e\rho}T_{\nu\rho}^c]\delta e_{e\sigma} \\
&\quad - 4kee^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)[\partial_\nu e^{c\rho}]\delta e_{c\rho} + 4kee^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)[\partial_\rho e^{c\rho}]\delta e_{c\nu} \\
\frac{\delta\mathcal{L}_{eT}}{\delta e_{a\mu}} &= -4kee^{a\mu}e^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu + 4kee^{b\mu}e^{a\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu \\
&\quad + 4kee^{b\sigma}e_b{}^\mu e^{a\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu - 4kee^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)e_c{}^\mu e^{a\rho}T_{\nu\rho}^c \\
&\quad - 4kee^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)\partial_\nu e^{a\mu} + 4kee^{b\sigma}e_b{}^\nu\phi(\partial_\sigma\phi)\partial_\rho e^{a\rho} \\
&= -4kee^{a\mu}g^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu + 4kee^{b\mu}e^{a\sigma}g^{\mu\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu \\
&\quad + 4kee^{a\nu}g^{\sigma\mu}\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu - 4keg^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)T_{\nu}{}^{\mu a} \\
&\quad - 4keg^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)\partial_\nu e^{a\mu} + 4keg^{\sigma\mu}\phi(\partial_\sigma\phi)\partial_\rho e^{a\rho}. \tag{2.113}
\end{aligned}$$

Encontrado todas as variações da expressão 2.100, aplica-se o Princípio de Mínima Ação com respeito o campo de tetradas $e_{a\mu}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_{TC}(e^a{}_\mu, \phi)}{\delta e_{a\mu}} &= 0 \\
\frac{\delta\mathcal{L}_{e\Sigma T}}{\delta e_{a\mu}} + \frac{\delta\mathcal{L}_e}{\delta e_{a\mu}} + \frac{\delta\mathcal{L}_{eT}}{\delta e_{a\mu}} &= 0. \tag{2.114}
\end{aligned}$$

Substitui-se 2.108, 2.110 e 2.113 em 2.114,

$$\begin{aligned}
&- kee^{a\mu}\phi^2\Sigma^{bcd}T_{bcd} - 4k\partial_\lambda(e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}) + 4Ke\phi^2\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda}{}^a + 6kee^{a\mu}g^{\sigma\nu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi \\
&- 12kee^{a\nu}g^{\sigma\mu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi - 4kee^{a\mu}g^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu + 4kee^{b\mu}e^{a\sigma}g^{\mu\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu \\
&+ 4kee^{a\nu}g^{\sigma\mu}\phi(\partial_\sigma\phi)T_\nu - 4keg^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)T_{\nu}{}^{\mu a} - 4keg^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)\partial_\nu e^{a\mu} \\
&+ 4keg^{\sigma\mu}\phi(\partial_\sigma\phi)\partial_\rho e^{a\rho} = 0, \tag{2.115}
\end{aligned}$$

Divida a equação 2.115 por $(-4k)$ e substituem-se os dois últimos termos desta equação pela igualdade abaixo análogo aos índices que se apresentam na equação,

$$eg^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)\partial_\nu e^{a\mu} = \partial_\nu [eg^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)e^{a\mu}]. \tag{2.116}$$

Feito isso, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \partial_\lambda (e\phi^2 \Sigma^{a\mu\lambda}) - e\phi^2 (\Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}{}^a - \frac{1}{4} e^{a\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd}) - \frac{3}{2} e e^{a\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\sigma \phi \partial_\nu \phi \\
& + 3e e^{a\nu} g^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi \partial_\nu \phi + e e^{a\mu} g^{\sigma\nu} T_\nu \phi (\partial_\sigma \phi) - e\phi e^{a\sigma} g^{\mu\nu} (T_\nu \partial_\sigma \phi + T_\sigma \partial_\nu \phi) \\
& - e g^{\sigma\nu} \phi (\partial_\sigma \phi) T^{\mu a}{}_\nu - \partial_\rho [e g^{\sigma\mu} \phi (\partial_\sigma \phi) e^{a\rho}] + \partial_\nu [e g^{\sigma\nu} \phi (\partial_\sigma \phi) e^{a\mu}] = 0 \quad (2.117)
\end{aligned}$$

Estas são as equações de campo com respeito ao campo de tetradas $e_{a\mu}$. Note que para $\phi = \text{cte}$ esta equação se reduz à equação do TERG. Este conjunto de equações são apresentadas em [12].

2.5 Teoria de Brans-Dicke

No intuito de generalizar a ação de Einstein para uma ação mais geral, pode-se incluir campos escalares que também afetam a geometria do espaço-tempo. Essas teorias são conhecidas como teorias tensor-escalar, definidas por serem aquelas cuja ação contém além do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ um campo escalar ϕ .

Para uma ação onde expressões de acoplamento não-mínimo como $R\phi$ não se apresentam, diz-se que a ação está escrita no chamado referencial de Einstein, onde a geometria não se mistura com o campo escalar. Caso contrário, este referencial é denominado referencial de Jordan. Embora sejam diferentes na estrutura matemática, esses referenciais se co-relacionam através da transformação conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$, podendo as expressões serem escritas num ou noutro referencial sem perder os conceitos físicos [21].

Uma teoria que se adéqua a estas descrições é a teoria de Brans-Dicke, uma teoria tensor-escalar com base na suposição de que a constante gravitacional de Newton G não seja constante, mas sim um termo dinâmico que dependa de um campo escalar ϕ . Brans e Dicke tomam $G = \frac{1}{\phi}$, substituindo-o na densidade Lagrangiana de Hilbert-Einstein. A proposta da ação de Brans-Dicke com o campo escalar adicionado à ação da matéria S_M é escrita, no referencial de Jordan, como

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int \left(\phi^\circ R - \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) \sqrt{-g} d^4x + S_M. \quad (2.118)$$

O primeiro termo desta ação corresponde a ação de Hilbert-Einstein com G substituído

pelo seu equivalente campo escalar. O segundo termo da ação é o termo cinético para dar a dinâmica do campo escalar e ω um parâmetro a ser definido experimentalmente. Quando $\omega \rightarrow \infty$ a teoria de Einstein é alcançada [68]. Variando a ação com respeito ao campo escalar e ao tensor métrico, obtêm-se as equações de campo desta teoria,

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \frac{8\pi T}{3 + 2\omega} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} {}^\circ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {}^\circ R g_{\mu\nu} &= \frac{8\pi T_{\mu\nu}}{\phi} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi \right) \\ &+ \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho \phi), \end{aligned} \quad (2.120)$$

onde T é o traço do tensor Momento-Energia.

2.5.1 Hoyle-Narlikar

Um caso particular da teoria de Brans Dicke é a teoria conforme de Hoyle-Narlikar na Relatividade Geral, para $\omega = -\frac{3}{2}$ [68]. A expressão da ação é dada por

$$S_{HN} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{6} {}^\circ R \phi^2 + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) \sqrt{-g} d^4x + S_M \quad (2.121)$$

e suas equações de campo para um universo com conteúdo de matéria, são

$$\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{1}{6} R \right) \phi = \frac{T}{\phi} \quad (2.122)$$

$$\left({}^\circ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {}^\circ R g_{\mu\nu} \right) \frac{1}{6} \phi^2 + \frac{1}{6} (4\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) + \frac{1}{3} (g_{\mu\nu} \phi \nabla_\rho \nabla^\rho \phi - \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi) = T_{\mu\nu} \quad (2.123)$$

nesta teoria o traço do tensor Momento-Energia também é nulo, devido a exigência da teoria conforme [68]. Essas duas equações de campo para o caso de Brans-Dicke são independentes entre si, ao contrário de Hoyle-Narlikar. Esta teoria é dinamicamente equivalente ao Teleparalelismo Conforme para $k' = 6$ [12], assim como a TERG e a TRG, mas elas são diferentes na obtenção dos resultados, como por exemplo o cálculo da energia gravitacional e a formulação de tetrada.

Capítulo 3

Momento-energia Gravitacional P^a

Historicamente, a energia associada a uma lei de conservação é útil porque permite que o sistema seja melhor compreendido e que propriedades sejam calculadas. A existência desta lei está sempre associada a certo tipo de simetria, em outras palavras, é associado a invariância da teoria com respeito a determinado tipo de transformação [69]. A lei de conservação está presente na Mecânica Clássica de Partículas, quanto na Teoria Clássica de Campos, e atualmente no trabalho de Maluf [14] há uma forma covariante de estender esta ideia para a Gravitação.

3.1 Conservação da Energia e Teorema de Noether

Seja dado um sistema isolado com N partículas. Este sistema por ser isolado é invariante por translação, assim quando o transladado como um todo para um deslocamento de componentes δx_i , a física não será alterada, mas somente suas coordenadas x_i que serão denotadas por $x_i \rightarrow x_i + \delta x_i$.

A definição da Lagrangiana na Mecânica Clássica é a diferença entre a Energia Cinética e a Energia Potencial

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p, \quad (3.1)$$

sendo \mathcal{E}_c dependente da velocidade, e \mathcal{E}_p dependente da posição, de cada uma das partículas. Como a física deste sistema isolado não é alterada por este deslocamento, então a Energia

Potencial assim como a Energia Cinética são invariantes por esta translação espacial. Pela definição 3.1, obtém-se que a variação da Lagrangiana com respeito a translação espacial é nula

$$\delta\mathcal{L} = 0. \quad (3.2)$$

Pelas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad (3.3)$$

onde \dot{x}_i é a velocidade da respectiva coordenada. Por esta equação 3.3 é imediata a verificação de que ela gera uma lei de conservação,

$$\frac{dp_i}{dt} = 0, \quad (3.4)$$

sendo p_i as componentes do momento linear do sistema. Esta é a lei de conservação do momento linear para um sistema isolado.

Para o caso em que é feita uma translação temporal deste sistema $t \rightarrow t + \delta t$ obtém-se que a variação da Lagrangiana com respeito ao tempo é dada por

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{d\dot{x}_i}{dt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}, \quad (3.5)$$

da equação 3.3 e da igualdade $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = p^i$, encontra-se que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{dp^i}{dt}. \quad (3.6)$$

Assim, substituindo 3.6 em 3.5,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \dot{p}^i \dot{x}_i + p^i \ddot{x}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} &= \frac{d}{dt} (p^i \dot{x}_i - \mathcal{L}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Caso \mathcal{L} tenha simetria de translação temporal, ou seja, não contém o tempo explicitamente, então $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$. Definindo, $\mathcal{H} = p^i \dot{x}_i - \mathcal{L}$, obtém-se

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0,$$

que é a conservação da energia, por \mathcal{H} ser a energia total do sistema.

Estes resultados podem ser obtidos de um resultado mais geral chamado Teorema de Noether, o qual afirma que leis de conservação podem surgir da invariância da Lagrangiana com respeito a algum tipo de transformação aplicado no sistema [69].

Teorema de Noether para campos

Se a Lagrangiana de um campo é invariante com respeito a translações no espaço-tempo, então pode-se mostrar que isso implica uma lei de conservação de acordo com o chamado Teorema de Noether, e a quantidade conservada é chamada tensor Momento-Energia Canônico dada por

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}. \quad (3.8)$$

Segue demonstração.

Dada a Lagrangiana ser função do campo $\phi(x)$ e de sua primeira derivada $\partial_\mu \phi(x)$, sua forma é expressa por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)), \quad (3.9)$$

por uma translação nas coordenadas do espaço-tempo,

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu, \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x') = \phi(x), \end{aligned}$$

o campo $\phi(x)$ não sofre alterações porque a mudança é feita apenas nas coordenadas de x para x' . Ao expandir o campo $\phi'(x')$ em série de Taylor para as primeiras ordens, obtém-se,

$$\phi'(x') = \phi'(x + \epsilon) = \phi'(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi'(x),$$

por aproximação de primeira ordem $\epsilon^\mu \partial_\mu \phi'(x) = \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x)$. Assim a diferença $\phi'(x) - \phi(x)$ é igual a

$$\delta \phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x). \quad (3.10)$$

Ao variar a ação,

$$\delta S = \int \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial_\mu \phi'(x')) d^4 x' - \int \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^4 x, \quad (3.11)$$

onde $d^4 x' = (1 + \partial_\mu \epsilon^\mu) d^4 x$ feita por uma transformação Jacobiana e $\mathcal{L}(\phi'(x'), \partial_\mu \phi'(x')) = (\mathcal{L} + \delta \mathcal{L})$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int [(\mathcal{L} + \delta \mathcal{L})(1 + \partial_\mu \epsilon^\mu) - \mathcal{L}] d^4 x \\ &= \int (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \epsilon^\mu) d^4 x, \end{aligned}$$

o termo de segunda ordem foi desprezado. Pela regra da cadeia,

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \delta \phi, \quad (3.12)$$

onde $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta \phi$. Assim,

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \delta \phi + \mathcal{L} \partial_\mu \epsilon^\mu \right) d^4 x, \quad (3.13)$$

separando os termos da região R e da superfície ∂R da integral, onde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \delta \phi &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right] \delta \phi \\ \mathcal{L} \partial_\mu \epsilon^\mu &= \partial_\mu (\epsilon^\mu \mathcal{L}), \end{aligned}$$

tem-se

$$\delta S = \int_R \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \right] \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi + \epsilon^\mu \mathcal{L} \right] d^4 x,$$

o termo entre colchetes na primeira integral é igual a zero, correspondendo às equações de Euler-Lagrange. Na segunda integral introduza a igualdade $\delta \phi = -\epsilon^\nu \partial_\nu \phi$. Assim,

$$\delta S = \int_{\partial R} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right] (-\epsilon^\nu) d^4 x. \quad (3.14)$$

O termo ϵ^ν na segunda integral é um parâmetro arbitrário e portanto, o termo entre

colchetes desta segunda integral é o tensor Momento-Energia Canônico, definido por

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}.$$

Este procedimento pode ser aplicado com respeito as simetrias da Relatividade Geral para se obter um candidato a pseudo-tensor Momento-Energia da gravidade. Este candidato é conhecido como pseudotensor Momento-Energia de Einstein [70] quando escrito em termos do tensor métrico. Para mais detalhes consultar [5; 71; 72]

3.2 Momento-Energia Gravitacional

Desde a criação da teoria da Relatividade Geral há uma busca incessante para descobrir a expressão matemática que define a energia associada ao campo gravitacional, assim como há energia associada ao campo elétrico. O campo gravitacional é descrito pela conexão que define a geometria do espaço-tempo. Na forma original da construção da Relatividade Geral o campo gravitacional é manifesto pela conexão de Christoffel (${}^\circ\Gamma$), que por sua definição 1.9, não é covariante por transformações de coordenadas, uma vez que não é tensor.

A noção de campo é entendida como a possibilidade da grandeza física poder ser detectada em cada ponto do espaço. A fonte geradora de um campo eletromagnético é uma distribuição de carga, descrita por uma densidade ρ [73]. No contexto Relativístico a fonte geradora do campo gravitacional é o tensor Momento-Energia da matéria, que influencia no comportamento da geometria do espaço-tempo, conforme demonstram as equações de Einstein 1.15. Conclui-se disso que densidade de carga é a fonte geradora de um campo.

A proposta então, desde Einstein, é encontrar um tensor Momento-Energia Gravitacional tal como o da matéria, e que obedeça a lei de conservação local. A importância de obter a expressão para o tensor Momento-Energia Gravitacional se dá para ampliar o conhecimento das grandezas físicas que compõem o Universo, compreendendo seu comportamento para eventuais aplicações. Um exemplo poderia estar relacionado a quantização da teoria gravitacional.

Várias propostas para calcular a energia gravitacional foram sugeridas no decorrer

desses cem anos de Relatividade Geral. A primeira proposta foi feita por Einstein a partir do tensor Momento-Energia Canônico. Entretanto, tanto a expressão de Einstein quanto a maioria das propostas seguintes não são covariantes por transformação de coordenadas, o que lhes impedem de serem descritos por tensores. Essas expressões são denominadas complexo Momento-Energia ou pseudo-tensor Momento-Energia.

Pseudo-tensores e integrais de Komar (dependentes da normalização de vetores de Killing) [74] não são as expressões ideais para descrever grandezas na teoria gravitacional, uma vez que sua validade é questionada por ser difícil atribuir um significado físico a expressões não covariantes. Entretanto, este resultado é esperado em virtude do Princípio de Equivalência, base da Relatividade Geral, o qual não permite que seja detectada sem ambiguidade a presença de um campo gravitacional em um ponto do espaço-tempo [11], uma vez que ele afirma que numa região suficientemente pequena os efeitos causados pelo campo gravitacional não podem ser distinguidos dos efeitos sentidos por um observador acelerado. Como o campo gravitacional está associado a escolha do sistema de coordenadas, isso implica que a energia deste campo também está associada a esta escolha.

Portanto, é necessária uma outra estrutura geométrica para descrever a energia gravitacional de forma covariante, como veremos posteriormente na proposta do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral feita por Maluf [14]. Existe uma outra forma de abordar a energia gravitacional, pelas denominadas quantidades quasilocais definidas não pontualmente, mas em certa região [75]. Elas estão associadas com a escolha de condições de contorno na superfície da região. Os pseudo-tensores convencionais podem ser escritos nesta linguagem por escolha adequada destas condições de contorno [76].

Certas propostas de Momento-Energia Gravitacional são conhecidas como Momento-Energia de Einstein, Landau-Lifshitz, Weinberg, Bergmann-Thomson, Papapetrou, Tolman, Goldberg, ADM (Arnowitt, Deser and Misner), Komar, Bel-Robinson, Moller, Maluf. Abaixo segue a descrição de algumas dessas propostas.

O complexo Momento-Energia de Einstein Θ_a^b é descrito em seu artigo *Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie*¹ [80] na forma,

$$kt^\alpha{}_\sigma = \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\sigma g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\nu\sigma}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}, \quad (3.15)$$

para qualquer sistema de coordenadas em que $\sqrt{-g} = 1$. Em notação contemporânea

¹Com tradução para o Inglês nas referências [77; 78; 79].

[81; 82] a expressão é dada por

$$\Theta^b_a = \frac{1}{16\pi} H^{bc}_{a,c}, \quad (3.16)$$

onde os superpotenciais H^{bc}_a possuem a propriedade de antissimetria nos dois índices contravariantes,

$$H^{bc}_a = -H^{cb}_a, \quad (3.17)$$

igual a

$$H^{bc}_a = \frac{g_{ad}}{\sqrt{-g}} [-g(g^{bd}g^{cc} - g^{cd}g^{bc})], e. \quad (3.18)$$

São utilizados superpotenciais porque eles possuem certas simetrias que garantem conservação, mas eles também não são tensores [83]. O complexo Momento-Energia de Einstein não é simétrico [84], restrito a realizar os cálculos em coordenadas cartesianas ou quase-cartesianas para se obter resultados significativos [82], escrito a partir das primeiras derivadas do tensor métrico no espaço Riemanniano, obedece a lei de conservação local $\frac{\partial \Theta^k_i}{x^k} = 0$ [85].

O complexo Momento-Energia de Landau-Lifshitz L^{ab} , [86; 81], tem a vantagem de ser simétrico, o que significa que gera momento angular em espaço-tempo assintoticamente plano [87], contudo é restrito a ser calculado somente em coordenadas quasi-cartesianas para ter resultados significativos [82; 84], é proposto inicialmente para sistemas isolados na geometria curva, é dependente da escolha de coordenadas e satisfaz a lei de conservação local $\frac{\partial L^{ik}}{x^k} = 0$.

$$L^{ab} = \frac{1}{16\pi} l^{abcd}_{,cd}, \quad (3.19)$$

com o superpotencial, $l^{abcd}_{,cd}$, escrito da forma

$$l^{abcd} = (-g)(g^{ab}g^{cd} - g^{ac}g^{bd}). \quad (3.20)$$

Os complexos de Bergmann-Thomson B^{ab} e Weinberg W^{ik} possuem também o problema da dependência das coordenadas quasi-cartesianas. Com a expressão para Bergmann-Thomson igual a [88; 81],

$$B^{ab} = \frac{1}{16\pi} M^{abc}_{,c}, \quad (3.21)$$

com o superpotencial $M^{abc}{}_{,c}$ da forma,

$$M^{abc} = g^{ad}V_d{}^{bc}, \quad (3.22)$$

e,

$$V_d{}^{bc} = \frac{g_{de}}{\sqrt{-g}} [-g(g^{be}g^{cf} - g^{ce}g^{bf})], f. \quad (3.23)$$

A expressão para Weinberg é dada por [16; 81],

$$W^{ik} = \frac{1}{2k}D^{lik}{}_{,l}, \quad (3.24)$$

onde o superpotencial $D^{lik}{}_{,l}$ tem a forma

$$D^{lik} = \frac{\partial h^a{}_a}{\partial x_l}\eta^{ik} - \frac{\partial h^a{}_a}{\partial x_i}\eta^{lk} - \frac{\partial h^{al}}{\partial x^a}\eta^{ik} + \frac{\partial h^{ai}}{\partial x^a}\eta^{lk} + \frac{\partial h^{lk}}{\partial x_i} - \frac{\partial h^{ik}}{\partial x_l}, \quad (3.25)$$

com,

$$h_{ik} = g_{ik} - \eta_{ik}. \quad (3.26)$$

O complexo Momento-Energia de Møller, $M^b{}_a$, [89; 81]. Independente do sistema de coordenadas, descrito no espaço de tetradas numa teoria de gravidade modificada por Møller, sua definição para o termo da energia gravitacional é o tensor Momento-Energia Canônico escrito em termos dos campos de tetrada, ao contrário da definição do complexo Momento-Energia de Einstein, que é descrito em termos do tensor métrico [90]. Ressalta também que o complexo de Møller não satisfaz o Princípio de Equivalência [83]. Ele é definido por

$$M^\nu{}_\mu = U^{\nu\rho}{}_{\mu,\rho}, \quad (3.27)$$

onde o superpotencial é definido por

$$U^{\nu\beta}{}_\mu = \frac{\sqrt{-g}}{2k}P^{\tau\nu\beta}{}_{\lambda\rho\sigma} [\phi^\rho g^{\sigma\chi}g_{\mu\tau} - \lambda g_{\tau\mu}K^{\chi\rho\sigma} - g_{\tau\mu}(1 - 2\lambda)K^{\sigma\rho\chi}], \quad (3.28)$$

$K^{\chi\rho\sigma}$ é o tensor contorção, ϕ_μ é a base do campo vetorial igual a $\phi_\mu = T^\nu{}_{\nu\mu}$, e

$$P^{\tau\nu\beta}{}_{\lambda\rho\sigma} = \delta^\tau{}_\chi g^{\nu\beta}{}_{\rho\sigma} + \delta^\tau{}_\rho g^{\nu\beta}{}_{\sigma\chi} - \delta^\tau{}_\sigma g^{\nu\beta}{}_{\chi\rho}, \quad (3.29)$$

com $g^{\nu\beta}{}_{\rho\sigma}$ uma quantidade tensorial definida por,

$$g^{\nu\beta}{}_{\rho\sigma} = \delta^\nu{}_\rho \delta^\beta{}_\sigma - \delta^\nu{}_\sigma \delta^\beta{}_\rho. \quad (3.30)$$

O Momento-Energia de Bel-Robinson [91; 92; 93; 94; 11] é um tensor de quatro índices, independente do sistema de coordenadas, é zero se e somente se a curvatura for zero, é totalmente simétrico, $B_{ijkl} = B_{(ijkl)}$ e possui traço nulo, $g^{jl} B_{ijkl} = 0$ [93]. Contudo, Bel-Robinson possui dimensões erradas [11] e garante-se que sua divergência seja zero somente no vácuo [93].

$$B_{\mu\nu\alpha\beta} = C^\rho{}_\mu{}^\sigma{}_\alpha C_{\rho\nu\sigma\beta} + {}^*C^\rho{}_\mu{}^\sigma{}_\alpha {}^*C_{\rho\nu\sigma\beta}, \quad (3.31)$$

onde, C_{ijkl} é o tensor de Weyl apresentado em 2.61 e ${}^*C_{\rho\nu\sigma\beta}$ seu dual.

O Momento-Energia de Maluf, $\tau^{\lambda\mu}$, [14] é um tensor com dois índices, independente do sistema de coordenadas, é obtido através do formalismo do TERG, estruturado na geometria de torção do espaço-tempo, descrito pela conexão de Weitzenböck e dos campos de tetrada. Em sua definição tem derivadas de apenas primeira ordem, é conservado e tem traço nulo. É um tensor Momento-Energia único, que surge de forma natural e sem ambiguidade. Apesar de ser antissimétrico, é possível calcular Momento Angular gravitacional [95] neste contexto. Maluf [95] descreve situação em que a forma teleparalela do momento angular se sobressai em relação a integral de Komar. A expressão teleparalela do tensor Momento-Energia é dada por

$$\tau^{\lambda\mu} = k \left(4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right), \quad (3.32)$$

onde $\Sigma^{bc\lambda}$ é definido em 2.31 e $T_{bc}{}^\mu$ é o tensor torção. Na próxima seção, será feita a demonstração desta expressão.

Como visto, há diversas expressões do Momento-Energia Gravitacional. São elas calculadas para FRW [96; 97], Buracos negros [98; 99], tipos de Bianchi [70], modelos de teorias alternativas [100; 15], ondas gravitacionais [81]. Com tantas propostas e resultados diferentes, isso explica a importância de obter uma expressão do Momento-Energia Gravitacional significativa e única.

3.2.1 Conservação da energia no TERG

O tensor Momento-Energia Gravitacional 3.32 é obtido no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral por natureza da teoria. Ao reescrever a expressão 2.56 a fim de isolar a derivada parcial, obtêm-se

$$\partial_\lambda (e\Sigma^{a\mu\lambda}) = \frac{1}{4k} ee^a{}_\lambda (\tau^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}), \quad (3.33)$$

sendo definido $\tau^{a\mu}$ interpretado como o tensor Momento-Energia do campo gravitacional igual a,

$$\tau^{a\mu} = k (4\Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}{}^a - e^{a\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd}). \quad (3.34)$$

Ao derivar a equação 3.33 em relação à ∂_μ , obtêm-se da antissimetria do tensor $\Sigma^{a\mu\lambda}$ que $\partial_\mu \partial_\lambda (e\Sigma^{a\mu\lambda}) \equiv 0$. Assim, é encontrado 3.35

$$\partial_\mu (e\tau^{a\mu} + eT^{a\mu}) = 0, \quad (3.35)$$

que é uma lei de conservação local para os tensores de Momento-Energia Gravitacional, $\tau^{a\mu}$, e para os tensores dos campos de matéria $T^{a\mu}$. Para mais detalhes consultar [14].

3.2.2 Conservação da Energia no Teleparalelismo Conforme

Da mesma forma que na seção 3.2.1, obtidas as equações de campo do Teleparalelismo Conforme, a partir da equação 3.34

$$\tau^{a\mu} = k (4\Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}{}^a - e^{a\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd}),$$

é definido que $t^{a\mu}$ é igual a,

$$\begin{aligned} t^{a\mu} = & -4k \left\{ -\frac{3}{2} e^{a\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\sigma \phi \partial_\nu \phi + 3e^{a\nu} g^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi \partial_\nu \phi + e^{a\mu} g^{\sigma\nu} T_\nu \phi (\partial_\sigma \phi) \right. \\ & - e^{a\sigma} g^{\mu\nu} \phi (T_\nu \partial_\sigma \phi + T_\sigma \partial_\nu \phi) - g^{\sigma\nu} T^{\mu a}{}_\nu \phi (\partial_\sigma \phi) \\ & \left. - \left(\frac{1}{e} \right) (\partial_\rho [e e^{a\rho} g^{\sigma\mu} \phi (\partial_\sigma \phi)] - \partial_\nu [e e^{a\mu} g^{\sigma\nu} \phi (\partial_\sigma \phi)]) \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Assim, as equações de campo para um universo com fluido perfeito conforme 4.11, podem ser reescritas utilizando a definição 2.55, na forma,

$$\partial_\lambda(e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}) = \frac{1}{4k}e(e^a{}_\nu T^{\mu\nu} + \phi^2 t^{a\mu} + \tau^{a\mu}). \quad (3.37)$$

Derivando-a com respeito a ∂_μ , o lado esquerdo é nulo devido a antissimetria nos dois últimos índices de $\Sigma^{a\mu\lambda}$

$$\partial_\mu\partial_\lambda(e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}) \equiv 0, \quad (3.38)$$

o que gera portanto,

$$\partial_\mu[e(e^a{}_\nu T^{\mu\nu} + \phi^2 t^{a\mu} + \tau^{a\mu})] = 0, \quad (3.39)$$

uma lei de conservação local. Com este resultado, é possível definir um vetor Momento-Energia do Teleparalelismo Conforme, igual a

$$P^a = \int_{\mathcal{V}} e(e^a{}_\nu T^{0\nu} + \phi^2 t^{a0} + \tau^{a0}) d^3x, \quad (3.40)$$

que pode ser reescrito devido 3.37, como

$$P^a = 4k \oint e\phi^2\Sigma^{a0i} dS_i. \quad (3.41)$$

A componente zero nos tensores em 3.40 representa a energia total. A palavra total aqui se refere à soma das contribuições dos campos de matéria, da energia gravitacional e do fator conforme. Ressaltando que esta definição mantém as mesmas características do TERG com respeito às transformações de coordenadas e à escolha do sistema referencial.

Capítulo 4

Cosmologia Conforme Teleparalela

O objetivo desse capítulo é utilizar a teoria Teleparalelismo Conforme para um Universo com conteúdo de fluido, homogêneo e isotrópico, a fim de calcular alguns parâmetros cosmológicos e identificar o conteúdo de Energia gravitacional dentro do raio observável. Ambos objetivos foram alcançados com êxito, sendo que parte dos cálculos desenvolvidos neste capítulo foram publicados, e podem ser consultados nas referências [101], [102].

4.1 Densidade de Lagrangiana para fluido perfeito conforme

Para um Universo com fluido perfeito conforme é adicionada uma densidade de Lagrangiana \mathcal{L}_M , a qual deve ser conformalmente invariante para produzir um tensor Momento-Energia com mesma característica. Dada a expressão \mathcal{L}_M igual a 4.1,

$$\mathcal{L}_M = \left[\frac{1}{2}e(\rho + p)U^\alpha U_\alpha + \frac{1}{2}e(\rho + 3p) \right] \phi^2, \quad (4.1)$$

é verificado se esta expressão é invariante por transformações conformes.

O determinante da tetrada e o campo escalar se transformam conformalmente como 2.67 e 2.85. Já os vetores quadri-velocidade, pressão e densidade como 4.2

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \tilde{\rho} = e^{-2\theta} \rho, & U_\alpha &\rightarrow \tilde{U}_\alpha = e^\theta U_\alpha, \\ p &\rightarrow \tilde{p} = e^{-2\theta} p, & U^\alpha &\rightarrow \tilde{U}^\alpha = e^{-\theta} U^\alpha. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Substitui-se 4.2 em 4.1, e será verificado que esta densidade de Lagrangiana é invariante por transformações conformes.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_M &= \left[\frac{1}{2} \tilde{e}(\tilde{\rho} + \tilde{p}) \tilde{U}^\alpha \tilde{U}_\alpha + \frac{1}{2} \tilde{e}(\tilde{\rho} + 3\tilde{p}) \right] \tilde{\phi}^2 \\
&= \left[\frac{1}{2} e^{4\theta} e (e^{-2\theta} \rho + e^{-2\theta} p) e^{-\theta} U^\alpha e^\theta U_\alpha + \frac{1}{2} e^{4\theta} e (e^{-2\theta} \rho + 3e^{-2\theta} p) \right] e^{-2\theta} \phi^2 \\
&= \mathcal{L}_M.
\end{aligned}$$

Dessa forma, ao variar 4.1 em relação ao campo $\phi(t)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_M}{\delta \phi} &= \left[\frac{1}{2} e(\rho + p) U^\alpha U_\alpha + \frac{1}{2} e(\rho + 3p) \right] 2\phi \\
&= [e(\rho + p)(-1) + e(\rho + 3p)] \phi \\
&= 2ep\phi,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $U^\alpha U_\alpha = -1$. Ao variar $\tilde{\mathcal{L}}_M$ com respeito ao campo de tetrada $e_{a\mu}$ tem-se,

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{\mathcal{L}}_M &= \left[\frac{1}{2} (\delta e)(\rho + p) U^\alpha U_\alpha + \frac{1}{2} e(\rho + p) \delta(e^c_\alpha e_{c\beta}) U^\alpha U^\beta + \frac{1}{2} (\delta e)(\rho + 3p) \right] \phi^2 \\
&= \left[\frac{1}{2} (\delta e)(\rho + p) U^\alpha U_\alpha + \frac{1}{2} e(\rho + p) \delta(e^c_\alpha) e_{c\beta} U^\alpha U^\beta + \frac{1}{2} e(\rho + p) e^c_\alpha \delta(e_{c\beta}) U^\alpha U^\beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\delta e)(\rho + 3p) \right] \phi^2.
\end{aligned}$$

A variação δe está em 2.51 e a variação $\delta(e^c_\alpha)$ é igual a

$$\delta(e^c_\alpha) = \delta(\eta^{cd} e_{d\alpha}) = \eta^{cd} \delta e_{d\alpha}, \tag{4.4}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_M}{\delta e_{a\mu}} &= \left[\frac{1}{2} e e^{d\lambda} \delta^a_d \delta^\mu_\lambda (\rho + p) U^\alpha U_\alpha + \frac{1}{2} e(\rho + p) \eta^{cd} \delta^a_d \delta^\mu_\alpha e_{c\beta} U^\alpha U^\beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} e(\rho + p) e^c_\alpha \delta^a_c \delta^\mu_\beta U^\alpha U^\beta + \frac{1}{2} e e^{d\lambda} \delta^a_d \delta^\mu_\lambda (\rho + 3p) \right] \phi^2 \\
&= \left[\frac{1}{2} e e^{a\mu} (\rho + p) U^\alpha U_\alpha + \frac{1}{2} e(\rho + p) \eta^{ca} e_{c\beta} U^\mu U^\beta + \frac{1}{2} e(\rho + p) e^a_\alpha U^\alpha U^\mu \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} e e^{a\mu} (\rho + 3p) \right] \phi^2 \\
&= [e(\rho + p) e^a_\nu U^\nu U^\mu + e e^{a\mu} p] \phi^2.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

O tensor Momento-Energia foi definido em função da densidade de Lagrangiana em 2.55. Ao isolar este tensor, obtém-se

$$\frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_M}{\delta e_{a\mu}} = e e^a{}_\nu T^{\nu\mu} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} e^a{}_\nu T^{\nu\mu} &= \frac{1}{e} \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_M}{\delta e_{a\mu}} \\ &= \frac{1}{e} \{ [e(\rho + p) e^a{}_\nu U^\nu U^\mu + e e^{a\mu} p] \phi^2 \} \\ &= \{ [(\rho + p) e^a{}_\nu U^\nu U^\mu + g^{\mu\nu} e^a{}_\nu p] \phi^2 \} \\ &= e^a{}_\nu [(\rho + p) U^\nu U^\mu + g^{\mu\nu} p] \phi^2 \\ T^{\mu\nu} &= [(\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}] \phi^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

demonstrando que com esta densidade de Lagrangiana 4.1 é possível gerar a expressão 1.19 com ϕ adicionado.

4.2 Equações de campo com fluido perfeito conforme

A densidade de Lagrangiana a ser considerada para gerar as equações de campo para um Universo com fluido perfeito conforme será a expressão 2.92 com a adição da densidade de Lagrangiana apresentada em 4.1. Sendo ela igual a,

$$\mathcal{L}_{TC+M}(e_{a\mu}, \phi) = k e [-\phi^2 \Sigma^{abc} T_{abc} + 6g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 4g^{\mu\nu} \phi (\partial_\mu + \phi) T_\nu] + \mathcal{L}_M. \quad (4.8)$$

A primeira parte da variação com respeito ao campo escalar $\phi(t)$ da equação 4.8 já foi feita e é apresentada em 2.97. Ao aplicar o Princípio de Mínima Ação $\frac{\delta \mathcal{L}_{TC+M}(e_{a\mu}, \phi)}{\delta \phi} = 0$ tem-se,

$$\begin{aligned} k [-2e\phi \Sigma^{abc} T_{abc} - 12\partial_\nu (e g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) + 4\phi \partial_\mu (e T^\mu)] + \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi} &= \frac{\delta \mathcal{L}_{TC+M}(e_{a\mu}, \phi)}{\delta \phi} \\ k [-2e\phi \Sigma^{abc} T_{abc} - 12\partial_\nu (e g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) + 4\phi \partial_\mu (e T^\mu)] + \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi} &= 0 \\ -12k \partial_\nu (e g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) - 2k\phi [e \Sigma^{abc} T_{abc} - 2\partial_\mu (e T^\mu)] &= -\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi} \\ \partial_\nu (e g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) + \frac{1}{6}\phi [e \Sigma^{abc} T_{abc} - 2\partial_\mu (e T^\mu)] &= \frac{1}{12k} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

O termo entre colchetes é o termo 2.33 negativo e multiplicado pelo determinante da

tetrada. Assim a equação de campo para a variação em $\phi(t)$ 4.9 pode ser reescrita na forma,

$$\partial_\nu(eg^{\mu\nu}\partial_\mu\phi) - \frac{1}{6}{}^\circ Re\phi = \frac{1}{12k} \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta\phi}. \quad (4.10)$$

Da mesma forma o procedimento é feito para a variação com respeito ao campo de tetradas. A primeira parte está em 2.117 que foi dividida por $(-4k)$. Assim obtém-se,

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda(e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}) - e\phi^2(\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda}{}^a - \frac{1}{4}e^{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}) - \frac{3}{2}ee^{a\mu}g^{\sigma\nu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi \\ & + 3ee^{a\nu}g^{\sigma\mu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi + ee^{a\mu}g^{\sigma\nu}T_\nu\phi(\partial_\sigma\phi) - e\phi e^{a\sigma}g^{\mu\nu}(T_\nu\partial_\sigma\phi + T_\sigma\partial_\nu\phi) \\ & - eg^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)T^{\mu a}{}_\nu - \partial_\rho[eg^{\sigma\mu}\phi(\partial_\sigma\phi)e^{a\rho}] + \partial_\nu[eg^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)e^{a\mu}] = \frac{1}{4k} \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta e_{a\mu}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Calculando-se o traço contraindo a equação 4.11 com respeito ao campo de tetrada $e_{a\mu}$.

$$\begin{aligned} & e_{a\mu} \left\{ \partial_\lambda(e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}) - e\phi^2(\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda}{}^a - \frac{1}{4}e^{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}) - \frac{3}{2}ee^{a\mu}g^{\sigma\nu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi \right. \\ & + 3ee^{a\nu}g^{\sigma\mu}\partial_\sigma\phi\partial_\nu\phi + ee^{a\mu}g^{\sigma\nu}T_\nu\phi(\partial_\sigma\phi) - e\phi e^{a\sigma}g^{\mu\nu}(T_\nu\partial_\sigma\phi + T_\sigma\partial_\nu\phi) \\ & \left. - eg^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)T^{\mu a}{}_\nu - \partial_\rho[eg^{\sigma\mu}\phi(\partial_\sigma\phi)e^{a\rho}] + \partial_\nu[eg^{\sigma\nu}\phi(\partial_\sigma\phi)e^{a\mu}] \right\} = e_{a\mu} \left(\frac{1}{4k} \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta e_{a\mu}} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

O cálculo será feito por partes para conhecer como cada termo se contrai. Primeiro termo:

$$e_{a\mu} [\partial_\lambda(e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda})] = \partial_\lambda(e_{a\mu}e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}) - e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}\partial_\lambda(e_{a\mu}). \quad (4.13)$$

O termo 4.13 será subdividido, sendo as partes iguais a 4.14 e 4.15,

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda(e_{a\mu}e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}) &= \partial_\lambda(e\phi^2e_{a\mu}e_b^\mu e_c^\lambda\Sigma^{abc}) \\
&= \partial_\lambda\left\{e\phi^2e_{a\mu}e_b^\mu e_c^\lambda\left[\frac{1}{4}(T^{abc}+T^{bac}-T^{cab})+\frac{1}{2}(\eta^{ac}T^b-\eta^{ab}T^c)\right]\right\} \\
&= \partial_\lambda\left\{e\phi^2\eta_{ab}e_c^\lambda\left[\frac{1}{4}(T^{abc}+T^{bac}-T^{cab})+\frac{1}{2}(\eta^{ac}T^b-\eta^{ab}T^c)\right]\right\} \\
&= \partial_\lambda\left\{e\phi^2e_c^\lambda\left[\frac{1}{4}\left(\cancel{T_a^a}+\cancel{T_a^a}-\cancel{T_a^a}\right)+\frac{1}{2}(\delta_b^cT^b-4T^c)\right]\right\} \\
&= \partial_\lambda(-e\phi^2T^\lambda) \\
&= -\phi^2\partial_\lambda(eT^\lambda)-2e\phi T^\lambda\partial_\lambda\phi.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Note que $\eta_{ab}\eta^{ab}=4$ e $\eta_{ab}\eta^{ac}=\delta_b^c$.

$$\begin{aligned}
e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}\partial_\lambda(e_{a\mu}) &= \frac{1}{2}e\phi^2[\Sigma^{a\mu\lambda}\partial_\lambda(e_{a\mu})+\Sigma^{a\mu\lambda}\partial_\lambda(e_{a\mu})] \\
&= \frac{1}{2}e\phi^2[\Sigma^{a\mu\lambda}\partial_\lambda(e_{a\mu})-\Sigma^{a\lambda\mu}\partial_\lambda(e_{a\mu})] \\
&= \frac{1}{2}e\phi^2[\Sigma^{a\mu\lambda}\partial_\lambda(e_{a\mu})-\Sigma^{a\mu\lambda}\partial_\mu(e_{a\lambda})] \\
&= \frac{1}{2}e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}[\partial_\lambda(e_{a\mu})-\partial_\mu(e_{a\lambda})] \\
&= \frac{1}{2}e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}T_{a\lambda\mu} \\
&= -\frac{1}{2}e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}T_{a\mu\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Assim, 4.13 que é o primeiro termo é igual a

$$e_{a\mu}[\partial_\lambda(e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda})] = -\phi^2\partial_\lambda(eT^\lambda)-2e\phi T^\lambda\partial_\lambda\phi+\frac{1}{2}e\phi^2\Sigma^{a\mu\lambda}T_{a\mu\lambda}. \tag{4.16}$$

Segundo termo:

$$e_{a\mu}(-e\phi^2\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda}^a) = -e\phi^2\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda\mu}. \tag{4.17}$$

Terceiro termo:

$$e_{a\mu}\left(\frac{1}{4}ee^{a\mu}\phi^2\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right) = e\phi^2\Sigma^{bcd}T_{bcd}. \tag{4.18}$$

Note que $e_{a\mu}e^{a\mu}=4$.

Quarto termo:

$$e_{a\mu} \left(-\frac{3}{2} e e^{a\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\sigma \phi \partial_\nu \phi \right) = -6 e g^{\sigma\nu} \partial_\sigma \phi \partial_\nu \phi. \quad (4.19)$$

Quinto termo:

$$\begin{aligned} e_{a\mu} (3 e e^{a\nu} g^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi \partial_\nu \phi) &= 3 e \delta^\nu_\mu g^{\sigma\nu} \partial_\sigma \phi \partial_\nu \phi \\ &= 3 e g^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi \partial_\mu \phi. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Sexto termo:

$$e_{a\mu} (e e^{a\mu} \phi T^\sigma \partial_\sigma \phi) = 4 e \phi T^\sigma \partial_\sigma \phi. \quad (4.21)$$

Sétimo termo:

$$\begin{aligned} e_{a\mu} [-e \phi e^{a\sigma} g^{\mu\nu} (T_\nu \partial_\sigma \phi + T_\sigma \partial_\nu \phi)] &= -e \phi \delta^\sigma_\mu g^{\mu\nu} (T_\nu \partial_\sigma \phi + T_\sigma \partial_\nu \phi) \\ &= -2 e \phi T^\mu \partial_\mu \phi. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Oitavo termo:

$$\begin{aligned} e_{a\mu} [-e g^{\sigma\nu} \phi (\partial_\sigma \phi) T^{\mu a}_\nu] &= e_{a\mu} [-e \phi (\partial_\sigma \phi) T^{\mu a\sigma}] \\ &= -e \phi (\partial_\sigma \phi) T^\sigma. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nono termo:

$$\begin{aligned} e_{a\mu} \{-\partial_\rho [e g^{\sigma\mu} \phi (\partial_\sigma \phi) e^{a\rho}]\} &= -\partial_\rho [e e_{a\mu} g^{\sigma\mu} \phi (\partial_\sigma \phi) e^{a\rho}] + e g^{\sigma\mu} \phi (\partial_\sigma \phi) e^{a\rho} \partial_\rho (e_{a\mu}) \\ &= -\partial_\rho [e \delta^\rho_\mu \phi (\partial_\sigma \phi) e^{a\rho}] + e g^{\sigma\mu} \phi (\partial_\sigma \phi) e^{a\rho} \partial_\rho (e_{a\mu}) \\ &= -\partial_\mu [e g^{\sigma\mu} \phi (\partial_\sigma \phi)] + e g^{\sigma\mu} \phi (\partial_\sigma \phi) e^{a\rho} \partial_\rho (e_{a\mu}) \\ &= -e g^{\sigma\mu} (\partial_\sigma \phi) (\partial_\mu \phi) - \phi \partial_\mu (e g^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi) \\ &\quad + e g^{\sigma\mu} \phi (\partial_\sigma \phi) e^{a\rho} \partial_\rho (e_{a\mu}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Décimo termo:

$$\begin{aligned}
e_{a\mu} \{ \partial_\nu [eg^{\sigma\nu} \phi(\partial_\sigma \phi) e^{a\mu}] \} &= \partial_\nu [ee_{a\mu} g^{\sigma\nu} \phi(\partial_\sigma \phi) e^{a\mu}] - eg^{\sigma\nu} \phi(\partial_\sigma \phi) e^{a\mu} \partial_\nu (e_{a\mu}) \\
&= 4\partial_\nu [eg^{\sigma\nu} \phi(\partial_\sigma \phi)] - eg^{\sigma\nu} \phi(\partial_\sigma \phi) e^{a\mu} \partial_\nu (e_{a\mu}) \\
&= 4eg^{\sigma\nu} (\partial_\sigma \phi) (\partial_\nu \phi) + 4\phi \partial_\nu [eg^{\sigma\nu} (\partial_\sigma \phi)] \\
&\quad - eg^{\sigma\nu} \phi(\partial_\sigma \phi) e^{a\mu} \partial_\nu (e_{a\mu}).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Encontrado o resultado de cada termo, substitui-se (4.16-4.25) na equação 4.12,

$$\begin{aligned}
& -\phi^2 \partial_\lambda (eT^\lambda) - 2e\phi T^\lambda \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} e\phi^2 \Sigma^{a\mu\lambda} T_{a\mu\lambda} - \cancel{e\phi^2 \Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda\mu}} + \cancel{e\phi^2 \Sigma^{bcd} T_{bcd}} \\
& - 6eg^{\sigma\nu} \partial_\sigma \phi \partial_\nu \phi + 3eg^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi \partial_\mu \phi + 4e\phi T^\sigma \partial_\sigma \phi - 2e\phi T^\mu \partial_\mu \phi - e\phi T^\sigma (\partial_\sigma \phi) \\
& - eg^{\sigma\mu} (\partial_\sigma \phi) (\partial_\mu \phi) - \phi \partial_\mu [eg^{\sigma\mu} (\partial_\sigma \phi)] + eg^{\sigma\mu} \phi(\partial_\sigma \phi) e^{a\rho} \partial_\rho (e_{a\mu}) + 4eg^{\sigma\nu} (\partial_\sigma \phi) (\partial_\nu \phi) \\
& + 4\phi \partial_\nu [eg^{\sigma\nu} (\partial_\sigma \phi)] - eg^{\sigma\nu} \phi(\partial_\sigma \phi) e^{a\mu} \partial_\nu (e_{a\mu}) = e_{a\mu} \left(\frac{1}{4k} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{a\mu}} \right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \phi^2 [e\Sigma^{a\mu\lambda} T_{a\mu\lambda} - \partial_\lambda (eT^\lambda)] - \cancel{3eg^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi \partial_\mu \phi} - e\phi T^\sigma \partial_\sigma \phi + \cancel{3eg^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi \partial_\mu \phi} \\
& + 3\phi \partial_\mu [eg^{\sigma\mu} (\partial_\sigma \phi)] - eg^{\sigma\nu} \phi(\partial_\sigma \phi) e^{a\mu} (\partial_\nu e_{a\mu} - \partial_\mu e_{a\nu}) = e_{a\mu} \left(\frac{1}{4k} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{a\mu}} \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
& 3\phi \left\{ \partial_\mu (eg^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi) + \frac{1}{6} \phi [e\Sigma^{a\mu\lambda} T_{a\mu\lambda} - \partial_\lambda (eT^\lambda)] \right\} - e\phi T^\sigma \partial_\sigma \phi - eg^{\sigma\nu} \phi(\partial_\sigma \phi) e^{a\mu} \cancel{T_{a\nu\mu}} \xrightarrow{(-T_{a\mu\nu})} \\
& = e_{a\mu} \left(\frac{1}{4k} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{a\mu}} \right)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$3\phi \left\{ \partial_\mu (eg^{\sigma\mu} \partial_\sigma \phi) + \frac{1}{6} \phi [e\Sigma^{a\mu\lambda} T_{a\mu\lambda} - \partial_\lambda (eT^\lambda)] \right\} = e_{a\mu} \left(\frac{1}{4k} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{a\mu}} \right) \tag{4.29}$$

O termo que está entre chaves é o lado esquerdo da equação 4.9, assim

$$3\phi \left(\frac{1}{12k} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi} \right) = e_{a\mu} \left(\frac{1}{4k} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{a\mu}} \right) \tag{4.30}$$

ou seja, a relação obtida do traço é

$$\phi \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi} = e_{a\mu} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{a\mu}} \quad (4.31)$$

mas o lado direito da igualdade 4.31 é o traço da expressão 2.55. Portanto,

$$\phi \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi} = eT \quad (4.32)$$

onde $T = e_{a\mu} T^{a\mu}$ é o traço do tensor Momento-Energia para os campos de matéria. Porém, a invariância conforme exige que o traço do tensor Momento-Energia seja nulo para a preservação da simetria, ou seja,

$$T_{\mu}{}^{\mu} = 0. \quad (4.33)$$

A demonstração de 4.33 segue a partir da conservação da corrente j_{μ} definida em termos do tensor Momento-Energia $T_{\mu\nu}$ que pode ser consultada em [48].

4.3 Friedmann-Robertson-Walker

Nesta seção serão apresentadas as equações de campo do Teleparalelismo Conforme para o modelo de um Universo com fluido perfeito conforme cujas características sejam a homogeneidade e a isotropia em grandes escalas. Como visto no tópico 1.3 a métrica que se adéqua a este Universo é a métrica de Friedmann-Robertson-Walker apresentada em 1.21.

O primeiro passo para encontrar as soluções destas equações é obter os valores das componentes tensoriais. Os índices latinos serão escritos entre parênteses () para diferenciá-los dos índices gregos, e na métrica FRW o termo $d\phi$ será reescrito como $d\phi'$ para que não haja confusões com o campo escalar $\phi(t)$. Seja a métrica,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{(1 - kr^2)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi'^2 \right].$$

É escolhido um sistema referencial adaptado para um observador estacionário, dado pelo

campo de tetradas 4.35, e com as componentes do tensor métrico iguais a,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{(1-kr^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

As componentes do campo de tetradas são,

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{(1-kr^2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ar & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ar \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

As componentes não-nulas do tensor torção definido em 2.18 são,

$$\begin{aligned} T_{(1)(1)(0)} &= T_{(2)(2)(0)} = T_{(3)(3)(0)} = -\frac{\dot{a}}{a}, \\ T_{(2)(2)(1)} &= T_{(3)(3)(1)} = -\frac{\sqrt{(1-kr^2)}}{ar}, \\ T_{(3)(3)(2)} &= -\frac{\cot \theta}{ar}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para o tensor $T_{b\lambda}{}^a$,

$$T_{b\lambda}{}^a = \eta^{ac} e^f{}_\lambda T_{bfc} \quad (4.37)$$

as componentes não-nulas são,

$$\begin{aligned} T_{(1)0}{}^{(1)} &= T_{(2)0}{}^{(2)} = T_{(3)0}{}^{(3)} = \frac{\dot{a}}{a}, & T_{(1)1}{}^{(0)} &= \frac{\dot{a}}{\sqrt{(1-kr^2)}}, \\ T_{(2)1}{}^{(2)} &= T_{(3)1}{}^{(3)} = \frac{1}{r}, & T_{(2)2}{}^{(0)} &= \dot{a}r, \\ T_{(2)2}{}^{(1)} &= -\sqrt{(1-kr^2)}, & T_{(3)2}{}^{(3)} &= \cot \theta, \\ T_{(3)3}{}^{(0)} &= \dot{a}r \sin \theta, & T_{(3)3}{}^{(1)} &= -\sin \theta \sqrt{(1-kr^2)}. \\ T_{(3)3}{}^{(2)} &= -\cos \theta, \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para o tensor $T^{\mu\alpha\sigma}$,

$$T^{\mu\alpha\sigma} = e_b{}^\mu e_c{}^\sigma T^{bac} \quad (4.39)$$

as componentes não-nulas são,

$$\begin{aligned}
T^{1(1)0} &= \frac{\dot{a}\sqrt{1-kr^2}}{a^2}, & T^{3(1)3} &= T^{3(2)3} = \frac{\cot\theta}{a^3r^3\sin^2\theta}, \\
T^{2(1)2} &= \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3r^3}, & T^{3(3)0} &= \frac{\dot{a}}{a^2r\sin\theta}. \\
T^{2(2)0} &= \frac{\dot{a}}{a^2r},
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Para os tensores T_ν , T^ν e T^a ,

$$T_\nu = e_a^\mu (\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu), \tag{4.41}$$

$$T^\nu = g^{\nu\rho} e_a^\mu (\partial_\mu e^a_\rho - \partial_\rho e^a_\mu), \tag{4.42}$$

$$T^a = e^a_\mu T^\mu = e^{a\mu} T_\mu, \tag{4.43}$$

as componentes não-nulas são,

$$\begin{aligned}
T_0 &= -3\frac{\dot{a}}{a}, & T^0 &= 3\frac{\dot{a}}{a}, & T^{(0)} &= 3\frac{\dot{a}}{a}, \\
T_1 &= -\frac{2}{r}, & T^1 &= -2\frac{(1-kr^2)}{a^2r}, & T^{(1)} &= -2\frac{\sqrt{1-kr^2}}{ar}, \\
T_2 &= -\cot\theta & T^2 &= -\frac{\cot\theta}{a^2r^2} & T^{(2)} &= -\frac{\cot\theta}{ar}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Para o tensor Σ^{abc} , que é antissimétrico nos dois últimos índices, as componentes são,

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(0)(0)(1)} &= -\frac{\sqrt{1-kr^2}}{ar}, \\
\Sigma^{(0)(0)(2)} &= \Sigma^{(1)(2)(1)} = -\frac{1}{2}\frac{\cot\theta}{ar}, \\
\Sigma^{(1)(1)(0)} &= \Sigma^{(2)(2)(0)} = \Sigma^{(3)(3)(0)} = -\frac{\dot{a}}{a}, \\
\Sigma^{(2)(2)(1)} &= \Sigma^{(3)(3)(1)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-kr^2}}{ar}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

O valor do produto $\Sigma^{abc}T_{abc}$ é igual a,

$$\Sigma^{abc}T_{abc} = 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 2\frac{(1-kr^2)}{a^2r^2}. \tag{4.46}$$

Para o tensor $\Sigma^{a\mu\lambda}$

$$\Sigma^{a\mu\lambda} = e_b^\mu e_c^\lambda \Sigma^{abc} \tag{4.47}$$

as componentes não-nulas são,

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(0)01} &= -\frac{(1-kr^2)}{a^2r}, & \Sigma^{(0)02} &= -\frac{1 \cot \theta}{2 a^2r^2}, \\
\Sigma^{(1)10} &= -\frac{\dot{a}\sqrt{1-kr^2}}{a^2}, & \Sigma^{(1)12} &= \frac{1 \cot \theta \sqrt{1-kr^2}}{2 a^3r^2}, \\
\Sigma^{(2)20} &= -\frac{\dot{a}}{a^2r}, & \Sigma^{(2)21} &= \frac{1(1-kr^2)}{2 a^3r^2}, \\
\Sigma^{(3)30} &= -\frac{\dot{a}}{a^2r \sin \theta}, & \Sigma^{(3)31} &= \frac{1(1-kr^2)}{2 a^3r^2 \sin \theta}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

O valor do determinante do campo de tetrada definido em 2.11 é igual a,

$$e = \frac{a^3r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{4.49}$$

O escalar de curvatura 2.33 é igual a

$${}^\circ R = 6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 6 \frac{\ddot{a}}{a} + 6 \frac{k}{a^2}. \tag{4.50}$$

De posse das componentes das quantidades tensoriais calculadas, as equações de campo 4.10 e 4.11 podem ser escritas no formato FRW (Friedmann-Robertson-Walker).

4.3.1 Equação de campo com respeito a $\phi(t)$ para FRW

A equação de campo 4.10 aplicada à métrica de Friedmann-Robertson-Walker para a componente $\mu = 0$ e com a condição 4.33, se torna

$$\begin{aligned}
\partial_0 (eg^{00} \partial_0 \phi) - \frac{1}{6} {}^\circ R e \phi &= 0 \\
\ddot{\phi} + 3\dot{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + \phi \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] &= 0,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

que é a equação de campo em relação ao campo $\phi(t)$. As componentes da soma da derivada parcial são nulas, devido a dependência temporal de ϕ .

4.3.2 Equações de campo com respeito a $e_{a\mu}$ para FRW com fluido perfeito conforme

Para calcular o lado direito da equação 4.11 considera-se $\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{a\mu}}$ igual a 4.6 e reescreve-se o tensor Momento-Energia 4.7 na forma,

$$T^{\mu\nu} = (\bar{\rho} + \bar{p})U^\mu U^\nu + \bar{p}g^{\mu\nu} \quad (4.52)$$

com o vetor quadri-velocidade $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e as variáveis $\bar{\rho}$ e \bar{p} definidas por

$$\bar{\rho} = \rho\phi^2; \quad \bar{p} = p\phi^2. \quad (4.53)$$

As componentes do tensor 4.52 não-nulas são,

$$T^{00} = \bar{\rho}, \quad (4.54)$$

$$T^{11} = \bar{p} \frac{(1 - kr^2)}{a^2}, \quad (4.55)$$

$$T^{22} = \frac{\bar{p}}{a^2 r^2}, \quad (4.56)$$

$$T^{33} = \frac{\bar{p}}{a^2 r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.57)$$

Pelo traço nulo 4.33 oriundo da simetria conforme, a equação 4.52 gera a equação de estado $\bar{\rho} = 3\bar{p}$, correspondente ao fluido de radiação do Universo. Segue demonstração,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= (\bar{\rho} + \bar{p})U^\mu U^\nu + \bar{p}g^{\mu\nu} \\ g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} &= (\bar{\rho} + \bar{p})g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu + \bar{p}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \\ T^\mu{}_\mu &= (\bar{\rho} + \bar{p})(-1) + 4\bar{p} \\ 0 &= 3\bar{p} - \bar{\rho} \\ \bar{\rho} &= 3\bar{p}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Desse modo, pela definição de $\bar{\rho}$ e \bar{p} , a equação de estado $p = \frac{1}{3}\rho$ é obtida nesta teoria, assim como na Relatividade Geral, mas neste caso com $w = \frac{1}{3}$, imposto pela simetria conforme.

Equações para as componentes $a = (0)$ e $\mu = 0$

Para os índices $a = (0)$ e $\mu = 0$, as equações de campo 4.11 aplicadas à métrica de Friedmann-Robertson-Walker se reduzem a

$$\begin{aligned} & \partial_1 (e\phi^2 \Sigma^{(0)01}) + \partial_2 (e\phi^2 \Sigma^{(0)02}) - e\phi^2 \left(\Sigma^{(1)10} T_{(1)1}^{(0)} + \Sigma^{(2)20} T_{(2)2}^{(0)} + \Sigma^{(3)30} T_{(3)3}^{(0)} \right) \\ & + \frac{1}{4} e\phi^2 e^{(0)0} \Sigma^{bcd} T_{bcd} + \frac{3}{2} e e^{(0)0} g^{00} \dot{\phi}^2 + e\phi \dot{\phi} e^{(0)0} T^0 - 2e\phi \dot{\phi} e^{(0)0} g^{00} T_0 = \frac{1}{4k} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{(0)0}}, \\ & - a\phi^2 \sin \theta \sqrt{1 - kr^2} + \frac{ka\phi^2 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}} + \frac{1}{2} \frac{a\phi^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}} + \frac{3}{2} e\phi^2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{e\phi^2 (1 - kr^2)}{a^2 r^2} \\ & + \frac{3}{2} e \dot{\phi}^2 + 3e\phi \dot{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{1}{4k} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{(0)0}}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Multiplica-se em ambos os lados da equação 4.59 o fator $\left(\frac{1}{e} \right)$, com exceção dos três primeiros termos do lado esquerdo desta expressão que serão multiplicados pelo mesmo fator só que na sua forma explícita, ou seja, $\left(\frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a^3 r^2 \sin \theta} \right)$. Assim,

$$\frac{3}{2} \phi^2 \left[\frac{k}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] + \frac{3}{2} \dot{\phi} \left[\dot{\phi} + 2\phi \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \right] = \frac{1}{4ke} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{(0)0}},$$

o termo $\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{(0)0}} = e\bar{\rho}$ e a constante $k = \frac{1}{16\pi}$. Logo, ao substituí-los obtém-se

$$3\phi^2 \left[\frac{k}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] + 3\dot{\phi} \left[\dot{\phi} + 2\phi \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \right] = 8\pi\bar{\rho}, \quad (4.60)$$

que é a equação de campo para as componentes $a = (0)$ e $\mu = 0$ para um universo com fonte de matéria, homogêneo e isotrópico.

Equações para as componentes $a = (1)$ e $\mu = 1$

Para os índices $a = (1)$ e $\mu = 1$, as equações de campo 4.11 aplicadas à métrica de Friedmann-Robertson-Walker se reduzem a

$$\begin{aligned}
& \partial_0 (e\phi^2 \Sigma^{(1)10}) + \partial_2 (e\phi^2 \Sigma^{(1)12}) - e\phi^2 \left(\Sigma^{(1)01} T_{(1)0}^{(1)} + \Sigma^{(2)21} T_{(2)2}^{(1)} + \Sigma^{(3)31} T_{(3)3}^{(1)} \right) \\
& + \frac{1}{4} e\phi^2 e^{(1)1} \Sigma^{bcd} T_{bcd} - \frac{3}{2} e e^{(1)1} g^{00} \dot{\phi}^2 + e\phi \dot{\phi} e^{(1)1} T^0 - e\phi \dot{\phi} T^{1(1)0} + \partial_0 (e g^{00} \phi \dot{\phi} e^{(1)1}) \\
& = \frac{1}{4ke} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{(1)1}}, \\
& - \ddot{a} r^2 \phi^2 \sin \theta - \dot{a}^2 r^2 \phi^2 \sin \theta - 4a \dot{a} \phi \dot{\phi} r^2 \sin \theta - \frac{1}{2} \phi^2 \sin \theta - a^2 \phi^2 r^2 \sin \theta - a^2 \phi \ddot{\phi} r^2 \sin \theta \\
& + \frac{1}{2} e\phi^2 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^3} \right) \sqrt{1 - kr^2} + \frac{1}{2} \frac{e\phi^2 \sqrt{1 - kr^2}}{a^3 r^2} - \frac{1}{2} \frac{ke\phi^2 \sqrt{1 - kr^2}}{a^3} + \frac{3}{2} \frac{e\dot{\phi}^2 \sqrt{1 - kr^2}}{a} \\
& + 2 \frac{e \dot{a} \phi \dot{\phi} \sqrt{1 - kr^2}}{a^2} = \frac{1}{4ke} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{(1)1}}. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Multiplica-se em ambos os lados da equação 4.61 o fator $\left(\frac{1}{e}\right)$, com exceção dos seis primeiros termos do lado esquerdo desta expressão que serão multiplicados por $\left(\frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a^3 r^2 \sin \theta}\right)$. Assim,

$$- \sqrt{1 - kr^2} \left[\ddot{a} \left(\frac{\phi}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}^2 \phi^2}{a^3} + 2 \frac{\phi \dot{\phi} \dot{a}}{a^2} + \frac{\phi \ddot{\phi}}{a} + \frac{1}{2} k \frac{\phi^2}{a^3} - \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{a} \right] = \frac{1}{4ke} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{(1)1}},$$

o termo $\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{(1)1}} = e\bar{p} \frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a}$ e a constante $k = \frac{1}{16\pi}$. Substituem-se esses valores e multiplica-se ambos os lados por 2 para obter,

$$- \phi^2 \left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] - 4\phi \dot{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 2\phi \ddot{\phi} + \phi^2 = 8\pi\bar{p}, \tag{4.62}$$

que é a equação de campo para as componentes $a = (1)$ e $\mu = 1$ para um universo com fonte de matéria, homogêneo e isotrópico. O resultado encontrado nesta equação 4.62 é o mesmo para as componentes $(a = (2); \mu = 2)$ e $(a = (3); \mu = 3)$.

Equações de Campo na Cosmologia Teleparalela Conforme

Conclui-se então que as equações de campo extraídas das equações 4.10 e 4.11 são representadas por apenas três equações 4.51, 4.60 e 4.62 com dependência em termos de $\bar{\rho}$ e \bar{p} . Para retirar essa dependência substituem-se os valores correspondentes destas variáveis de forma a obter

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + \phi \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 0, \quad (4.63)$$

$$3 \left[\frac{k}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] + 3 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi^2} \right) \left[\dot{\phi} + 2\phi \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \right] = 8\pi\rho, \quad (4.64)$$

$$- \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] - 4 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - 2\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 = 8\pi p, \quad (4.65)$$

as equações de Friedmann modificadas. A equação 4.63 será desprezada por não contribuir na resolução destas equações, uma vez que é uma combinação linear das equações 4.64 e 4.65 quando o traço do tensor Momento-Energia é zero.

Outras informações que são extraídas dessa variação da densidade de Lagrangiana Conforme 4.8 são as quantidades energia e pressão do tensor Momento-Energia para um fluido perfeito conforme. Interessante destacar que o papel do campo escalar nesta teoria é ser a fonte geradora do fluido escuro, o qual desempenha características que fazem com que o Universo esteja em expansão acelerada. Assim, a densidade da energia gerada por este fluido escuro denotada ρ_D é identificada na equação 4.64 como sendo,

$$\rho_D = \frac{1}{8\pi} \left[3 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 6 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \right], \quad (4.66)$$

e a pressão do fluido escuro gerada pela presença do campo escalar denominada p_D é obtida da equação 4.65 sendo ela igual a

$$p_D = \frac{1}{8\pi} \left[-2 \left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right) + \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - 4 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \right]. \quad (4.67)$$

Observa-se que não é possível resolver o sistema de equações composto por 4.64 e 4.65, pois temos três variáveis (a, ϕ, ρ) e duas equações. Para solucionar isto, vamos impôr uma

equação de estado similar àquela apresentada na Relatividade Geral, $p = \omega\rho$, sendo ela definida por,

$$p_D = w\rho_D, \quad (4.68)$$

onde w é uma constante adimensional que caracteriza o fluido escuro.

Substitui-se as expressões 4.66 e 4.67 em 4.68 e uma terceira equação é obtida,

$$\left[-2 \left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right) + \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - 4 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \right] = w \left[3 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 6 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \right], \quad (4.69)$$

sendo que para ϕ constante esta equação desaparece e as equações 4.66 e 4.67 se reduzem às equações de Friedmann, mas a imposição do traço zero para o tensor Momento-Energia da matéria na forma da equação 4.63 continua válida.

4.4 Soluções das Equações de Campo do Teleparalelismo Conforme

Na seção anterior foram encontradas as equações de campo para o modelo FRW, no qual o conjunto de equações que compõem o sistema a ser resolvido é definido com uma equação em função da densidade, outra em função da pressão e a terceira em função de w por ser uma equação de estado para fluido escuro. Sejam elas,

$$\begin{cases} 3 \left[\frac{k}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] + 3 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi^2} \right) \left[\dot{\phi} + 2\phi \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \right] = 8\pi\rho, \\ - \left[2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] - 4 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - 2 \left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right) + \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 = 8\pi p, \\ -2 \left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right) + \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - 4 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = w \left[3 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 6 \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \right]. \end{cases} \quad (4.70)$$

Para simplificar, define-se,

$$\alpha = \frac{\dot{a}}{a} \quad \beta = \frac{\dot{\phi}}{\phi} \quad p = \frac{1}{3}\rho \quad (4.71)$$

tornando-as equações diferenciais deste sistema: equações diferenciais de primeira ordem, onde as quantidades a, ϕ, ρ, α e β são dependentes do tempo. Feitas as substituições 4.71 no sistema 4.70, tem-se

$$\begin{cases} 3\alpha^2 + \frac{3k}{a^2} + 3\beta^2 + 6\alpha\beta = 8\pi\rho, \\ -2\dot{\alpha} - 3\alpha^2 - \frac{k}{a^2} - 4\alpha\beta - \beta^2 - 2\dot{\beta} = \frac{8\pi\rho}{3}, \\ -2\dot{\beta} - \beta^2 - 4\alpha\beta = w [3\beta^2 + 6\alpha\beta]. \end{cases} \quad (4.72)$$

Após identificado o sistema, este será resolvido para o vácuo e para fluido perfeito conforme.

4.4.1 Soluções para o vácuo

O sistema 4.72 para o vácuo torna-se igual a

$$\begin{cases} 3\alpha^2 + \frac{3k}{a^2} + 3\beta^2 + 6\alpha\beta = 0, \\ -2\dot{\alpha} - 3\alpha^2 - \frac{k}{a^2} - 4\alpha\beta - \beta^2 - 2\dot{\beta} = 0, \\ -2\dot{\beta} - \beta^2 - 4\alpha\beta = w [3\beta^2 + 6\alpha\beta]. \end{cases} \quad (4.73)$$

Resolvendo as equações do sistema 4.73, será observado que a segunda equação é nula para os casos trabalhados.

Caso $k = 0$

Da primeira equação do sistema 4.73 encontra-se a relação entre β e α , dada por 4.74,

$$\begin{aligned} 3\alpha^2 + 3\beta^2 + 6\alpha\beta &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta &= 0 \\ (\alpha + \beta)^2 &= 0 \\ \beta &= -\alpha, \end{aligned} \quad (4.74)$$

aplica-se a derivada temporal em β e obtém-se

$$\dot{\beta} = -\dot{\alpha}. \quad (4.75)$$

Substitui-se β e $\dot{\beta}$ na segunda equação do sistema em questão, encontra-se que ela é nula

$$\begin{aligned} -2\dot{\alpha} - 3\alpha^2 - 4\alpha\beta - \beta^2 - 2\dot{\beta} &= 0 \\ -2\dot{\alpha} - 3\alpha^2 - 4\alpha(-\alpha) - (-\alpha)^2 + 2(-\dot{\alpha}) &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Substitui-se β e $\dot{\beta}$ na terceira equação do sistema,

$$\begin{aligned} -2\dot{\beta} - \beta^2 - 4\alpha\beta &= w [3\beta^2 + 6\alpha\beta] \\ -2(-\dot{\alpha}) - (-\alpha)^2 - 4\alpha(-\alpha) &= w [3(-\alpha)^2 + 6\alpha(-\alpha)] \\ 2\dot{\alpha} + 3\alpha^2 &= -3w\alpha^2 \\ \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} &= -\frac{3}{2}(1+w), \end{aligned}$$

o termo a direita pode ser reescrito como $\left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right] = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\alpha} \right) &= -\frac{3}{2}(1+w) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\alpha} \right) &= \frac{3}{2}(1+w) \\ \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\alpha} \right) dt &= \int \frac{3}{2}(1+w) dt \\ \frac{1}{\alpha} &= \frac{3}{2}(1+w)t + c_1 \\ \alpha &= \frac{1}{\frac{3}{2}(1+w)t + c_1}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Resolvendo para valores de w específicos.

Para $w = -1$,

$$\alpha = \frac{1}{c_1}, \quad (4.78)$$

como $\alpha = \frac{\dot{a}}{a}$, então,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a} \frac{da}{dt} dt &= \int \frac{1}{c_1} dt \\ \ln a &= \frac{t}{c_1} + c_2 \\ a &= e^{c_2} \exp\left(\frac{t}{c_1}\right).\end{aligned}\tag{4.79}$$

Para $w = 0$,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\frac{3}{2}t + c_1} \\ \int \frac{1}{a} \frac{da}{dt} dt &= \int \frac{1}{\frac{3}{2}t + c_1} dt \\ \ln a &= \int \frac{2}{3} \frac{d}{dt} \left[\ln\left(\frac{3}{2}t + c_1\right) \right] dt \\ \ln a &= \frac{2}{3} \ln\left(\frac{3}{2}t + c_1\right) + c_2 \\ a &= e^{c_2} \left(\frac{3}{2}t + c_1\right)^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}\tag{4.80}$$

Como feito no caso anterior, para $w = 1/3$ tem-se

$$\alpha = \frac{1}{2t + c_1}\tag{4.82}$$

$$a = e^{c_2} (2t + c_1)^{\frac{1}{2}},\tag{4.83}$$

e para $w = 1$

$$\alpha = \frac{1}{3t + c_1}\tag{4.84}$$

$$a = e^{c_2} (3t + c_1)^{\frac{1}{3}}.\tag{4.85}$$

Caso $k = 1$

Da primeira equação do sistema 4.73, obtém-se

$$\begin{aligned} 3\alpha^2 + \frac{3k}{a^2} + 3\beta^2 + 6\alpha\beta &= 0 \\ (\alpha + \beta)^2 &= -\frac{k}{a^2} \end{aligned} \quad (4.86)$$

com este resultado entende-se que k deve ter valores negativos ou zero para que essa igualdade seja satisfeita, ou seja $k \neq 1$. Desse modo, nessa teoria para um Universo no vácuo não há soluções para um Universo fechado.

Caso $k = -1$

Da primeira equação do sistema 4.73, obtém-se,

$$\begin{aligned} 3\alpha^2 + \frac{3k}{a^2} + 3\beta^2 + 6\alpha\beta &= 0 \\ (\alpha + \beta)^2 &= \frac{1}{a^2} \\ \beta &= -\alpha + \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Ao derivar β desta equação encontra-se,

$$\dot{\beta} = -\dot{\alpha} - \frac{\dot{a}}{a^2}. \quad (4.88)$$

Substitui-se β e $\dot{\beta}$ na segunda equação do sistema para $k = -1$, e encontra-se que esta equação é nula

$$\begin{aligned} -2\dot{\alpha} - 3\alpha^2 - \frac{k}{a^2} - 4\alpha\beta - \beta^2 - 2\dot{\beta} &= 0 \\ -2\dot{\alpha} - 3\alpha^2 + \frac{1}{a^2} - 4\alpha\left(-\alpha + \frac{1}{a}\right) - \left(-\alpha + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\left(-\dot{\alpha} - \frac{\dot{a}}{a^2}\right) &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Substitui-se β e $\dot{\beta}$ na terceira equação do sistema para $k = -1$,

$$\begin{aligned}
 -2\dot{\beta} - \beta^2 - 4\alpha\beta &= w [3\beta^2 + 6\alpha\beta] \\
 -2\left(-\dot{\alpha} - \frac{\dot{a}}{a^2}\right) - \left(-\alpha + \frac{1}{a}\right)^2 - 4\alpha\left(-\alpha + \frac{1}{a}\right) &= w \left[3\left(-\alpha + \frac{1}{a}\right)^2 + 6\alpha\left(-\alpha + \frac{1}{a}\right)\right] \\
 2\dot{\alpha} + 3\alpha^2(1+w) - \frac{1}{a^2}(1+3w) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

Para resolver esta equação é necessário escolher o parâmetro de w .

Para $w = -1$, considerando $\dot{\alpha} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$, tem-se

$$\begin{aligned}
 2\dot{\alpha} + \frac{2}{a^2} &= 0 \\
 2\frac{\ddot{a}}{a} - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2}{a^2} &= 0 \\
 a\ddot{a} - \dot{a}^2 + 1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

Para $w = 0$,

$$\begin{aligned}
 2\dot{\alpha} + 3\alpha^2 - \frac{1}{a^2} &= 0 \\
 2\frac{\ddot{a}}{a} - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2} &= 0 \\
 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 - 1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Para $w = 1/3$,

$$\begin{aligned}
 2\dot{\alpha} + 4\alpha^2 - \frac{2}{a^2} &= 0 \\
 2\frac{\ddot{a}}{a} - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{2}{a^2} &= 0 \\
 a\ddot{a} + \dot{a}^2 - 1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Para $w = 1$,

$$\begin{aligned} 2\dot{a} + 6a^2 - \frac{4}{a^2} &= 0 \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{4}{a^2} &= 0 \\ a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - 2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.94}$$

A equação 4.91 é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não-linear. Resolvendo-a analiticamente,

$$a\ddot{a} - \dot{a}^2 = -1, \tag{4.95}$$

o ansatz para sua solução será

$$a(t) = A \sin(c_1 t + c_2),$$

assim,

$$\begin{aligned} \dot{a} &= Ac_1 \cos(c_1 t + c_2), \\ \ddot{a} &= -Ac_1^2 \sin(c_1 t + c_2), \end{aligned}$$

substituindo a, \dot{a} e \ddot{a} em 4.95,

$$\begin{aligned} A \sin(c_1 t + c_2) [-Ac_1^2 \sin(c_1 t + c_2)] - [Ac_1 \cos(c_1 t + c_2)]^2 &= -1 \\ A^2 c_1^2 [\sin^2(c_1 t + c_2) + \cos^2(c_1 t + c_2)] &= 1 \\ A &= \pm c_1^{-1}. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Para a resolução de 4.92,

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 = 1, \tag{4.97}$$

faz-se uma mudança de variável e por meio da regra da cadeia, obtém-se,

$$\begin{aligned} u &= \dot{a}, \\ \dot{u} &= \ddot{a}, \\ \ddot{a} &= u \frac{du}{da}. \end{aligned} \tag{4.98}$$

Substitui-as em 4.97,

$$\begin{aligned} 2au \frac{du}{da} + u^2 &= 1 \\ udu &= -\frac{(u^2 - 1)}{2a} da \\ \int \frac{udu}{(u^2 - 1)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{a} da, \end{aligned} \tag{4.99}$$

esta integral é igual a

$$\int \frac{x}{(x^2 - 1)} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1),$$

assim obtém-se de 4.99,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln(u^2 - 1) + C_1 &= -\frac{1}{2} \ln a \\ e^{2C_1}(u^2 - 1) &= a^{-1} \\ u &= \sqrt{\frac{1}{a} e^{-2C_1} + 1}. \end{aligned}$$

Substitui-se o valor de $u = \dot{a}$,

$$\frac{da}{\sqrt{\frac{1}{a} e^{-2C_1} + 1}} = dt, \tag{4.100}$$

esta raiz quadrada pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a} e^{-2C_1} + 1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + e^{-2C_1}}}.$$

Substitui-se em 4.100 integrando ambos os lados

$$\begin{aligned}\int dt &= \int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + e^{-2C_1}}} da \\ t + C_2 &= \int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + e^{-2C_1}}} da,\end{aligned}$$

faz-se uma mudança de variável para resolver esta integral,

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{a}, \\ da &= 2v dv,\end{aligned}\tag{4.101}$$

então,

$$t + C_2 = 2 \int \frac{v^2}{\sqrt{v^2 + e^{-2C_1}}} dv,$$

esta integral é igual a

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|,$$

logo,

$$t + C_2 = v \sqrt{v^2 + e^{-2C_1}} - e^{-2C_1} \ln \left| v + \sqrt{v^2 + e^{-2C_1}} \right|.$$

Ao substituir $v = \sqrt{a}$ e $v^2 = a$, encontra-se a relação entre o tempo e o fator de escala,

$$t + C_2 = \sqrt{a} \sqrt{a + e^{-2C_1}} - e^{-2C_1} \ln \left| \sqrt{a} + \sqrt{a + e^{-2C_1}} \right|\tag{4.102}$$

Para a resolução de 4.93, tem-se

$$a\ddot{a} + \dot{a}^2 = 1,\tag{4.103}$$

ao definir,

$$\begin{aligned}u &= a^2, \\ \dot{u} &= 2a\dot{a}, \\ \ddot{u} &= 2\dot{a}^2 + 2a\ddot{a},\end{aligned}$$

tem-se que $a\ddot{a} = \frac{1}{2}\ddot{u} - \dot{a}^2$. Substitui-as em 4.103,

$$\ddot{u} = 2, \tag{4.104}$$

integrando-o duas vezes e substituindo o valor de u ,

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 2t + c_1 \\ u &= t^2 + c_1t + c_2 \\ a &= \sqrt{t^2 + c_1t + c_2}.\end{aligned} \tag{4.105}$$

Para a resolução de 4.94, tem-se

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 = 2, \tag{4.106}$$

faz-se uma mudança de variável e por meio da regra da cadeia, obtém-se,

$$\begin{aligned}u &= \dot{a}, \\ \dot{u} &= \ddot{a}, \\ \ddot{a} &= u \frac{du}{da}.\end{aligned} \tag{4.107}$$

Substitui-as em 4.106,

$$\begin{aligned}
 au \frac{du}{da} + 2u^2 &= 2 \\
 udu &= -\frac{2(u^2 - 1)}{a} da \\
 \int \frac{udu}{(u^2 - 1)} &= -2 \int \frac{1}{a} da \\
 \frac{1}{2} \ln(u^2 - 1) + C_1 &= -2 \ln a \\
 e^{2C_1}(u^2 - 1) &= a^{-4} \\
 u &= \sqrt{1 + \frac{e^{2C_1}}{a^4}}.
 \end{aligned}$$

Com $u = \dot{a}$, então

$$\frac{da}{\sqrt{1 + \frac{e^{2C_1}}{a^4}}} = dt, \tag{4.108}$$

esta raiz quadrada pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e^{2C_1}}{a^4}}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + e^{-2C_1}}}.$$

Substitui-se em 4.108 e integra-se ambos os lados,

$$\begin{aligned}
 \int dt &= \int \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + e^{-2C_1}}} da \\
 t + C_2 &= \int \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + e^{-2C_1}}} da.
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

Denominando $F(x) = (a^4 + e^{-2C_1})^{-\frac{1}{2}}$ e expandindo-o, tem-se que

$$\begin{aligned}
 F^1(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right) (a^4 + e^{-2C_1})^{-\frac{3}{2}} \\
 F^2(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) (a^4 + e^{-2C_1})^{-\frac{5}{2}} \\
 F^3(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) (a^4 + e^{-2C_1})^{-\frac{7}{2}} \\
 F^n(x) &= \frac{(-1)^n (2n - 1)!!}{2^n} (a^4 + e^{-2C_1})^{\frac{2n+1}{2}} \\
 F^n(0) &= \frac{(-1)^n (2n - 1)!!}{2^n} e^{-C_1(2n+1)}.
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

A integral 4.109 escrita em termos da série de Taylor, é igual a 4.111,

$$\begin{aligned}
t + C_2 &= \int a^2 \sum_{n=0}^{\infty} F^n(0) \frac{(a^4)^n}{n!} da \\
t + C_2 &= \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n} e^{-C_1(2n+1)} \frac{a^{4n+2}}{n!} da \\
t + C_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (n!)} e^{-C_1(2n+1)} \int a^{4n+2} da \\
t + C_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (n!)} e^{-C_1(2n+1)} \frac{a^{4n+3}}{4n+3}. \tag{4.111}
\end{aligned}$$

Calcule alguns termos deste somatório, a série obtida é igual a,

$$t + C_2 = \frac{a^3}{3} e^{-C_1} - \frac{a^7}{14} e^{-3C_1} + \frac{3a^{11}}{88} e^{-5C_1} - \frac{a^{15}}{48} e^{-7C_1} + \frac{35a^{19}}{2432} e^{-9C_1} - \frac{63a^{23}}{5888} e^{-11C_1} + \dots, \tag{4.112}$$

reescrevendo-a,

$$t + C_2 = \frac{a^3}{3e^{C_1}} \left[1 - \frac{3}{14} \frac{a^4}{e^{2C_1}} + \frac{9}{88} \frac{a^8}{e^{4C_1}} - \frac{1}{16} \frac{a^{12}}{e^{6C_1}} + \frac{105}{2432} \frac{a^{16}}{e^{8C_1}} - \frac{189}{5888} \frac{a^{20}}{e^{10C_1}} + \dots \right]. \tag{4.113}$$

Define-se $\zeta \equiv -\frac{a^4}{e^{2C_1}}$,

$$t + C_2 = \frac{a^3}{3e^{C_1}} \left[1 + \frac{3}{14} \zeta + \frac{9}{88} \zeta^2 + \frac{1}{16} \zeta^3 + \frac{105}{2432} \zeta^4 + \frac{189}{5888} \zeta^5 + \dots \right]. \tag{4.114}$$

A série de uma função hipergeométrica é dada por

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)1 \cdot 2} z^2 + \dots, \tag{4.115}$$

ao compará-la com a série 4.114, verifica-se que para os valores

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{3}{4}; \quad \gamma = \frac{7}{4}, \tag{4.116}$$

ou

$$\alpha = \frac{3}{4}; \quad \beta = \frac{1}{2}; \quad \gamma = \frac{7}{4}; \tag{4.117}$$

quando substituídos em 4.115 a série 4.114 é reproduzida. De tal forma, que se possa

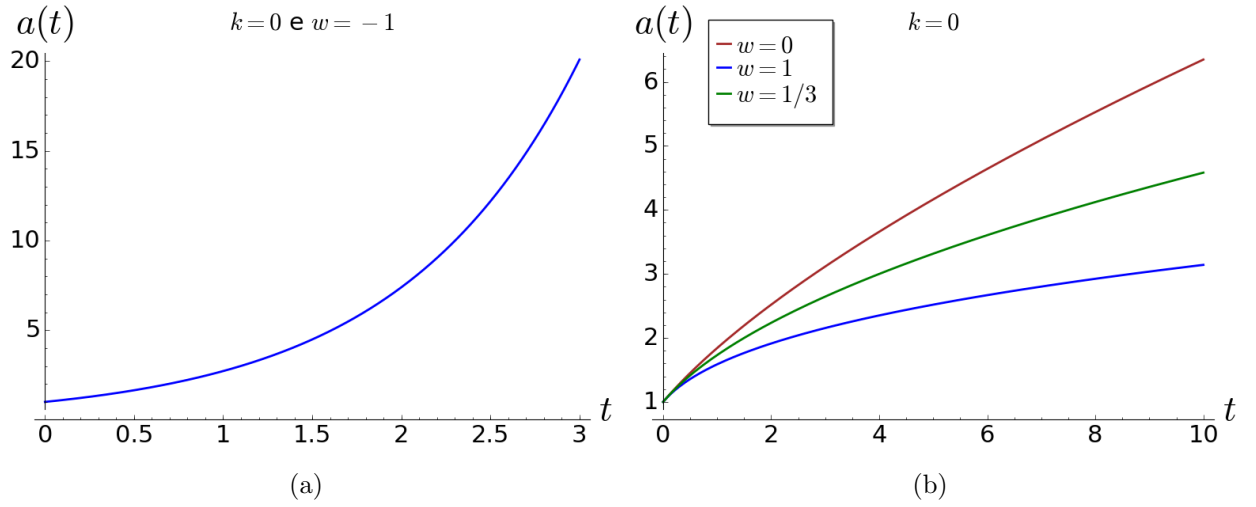


Figura 4.1: Gráficos do fator de escala em função do tempo para um Universo plano no vácuo para diferentes valores de w , com as condições iniciais $a(0) = 1$ e $\dot{a}(0) = 1$.

escrevê-la como,

$$t + C_2 = \frac{a^3}{3e^{C_1}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{7}{4}; -\frac{a^4}{e^{2C_1}}\right), \quad (4.118)$$

ou

$$t + C_2 = \frac{a^3}{3e^{C_1}} {}_2F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}; \frac{7}{4}; -\frac{a^4}{e^{2C_1}}\right), \quad (4.119)$$

dependendo do valor escolhido para α e β . Com estes resultados é possível construir o gráfico do tempo em função do fator de escala escolhendo os valores das constantes C_1 e C_2 .

As soluções das equações 4.95, 4.97, 4.103 e 4.106, estão apresentadas nas Figuras 4.1, 4.2. O resultado obtido para $k = -1$ e $w = 1$, onde este valor de $w = 1$ é uma sugestão proposta neste trabalho para o fluido exótico, é idêntico ao resultado obtido por Silva e Santos [103] no modelo da gravidade modificada de Chern-Simons no contexto da energia escura de Ricci, para o caso da equação de campo temporal G_{00} do caso particular $\alpha = 1$ e $k = 0$, sendo que este α não possui a mesma definição posta neste trabalho. Isto é muito interessante, porque este resultado é um dos resultados obtidos pelo modelo do Gás de Chaplygin Modificado, um fluido exótico utilizado para explicar a aceleração do Universo.

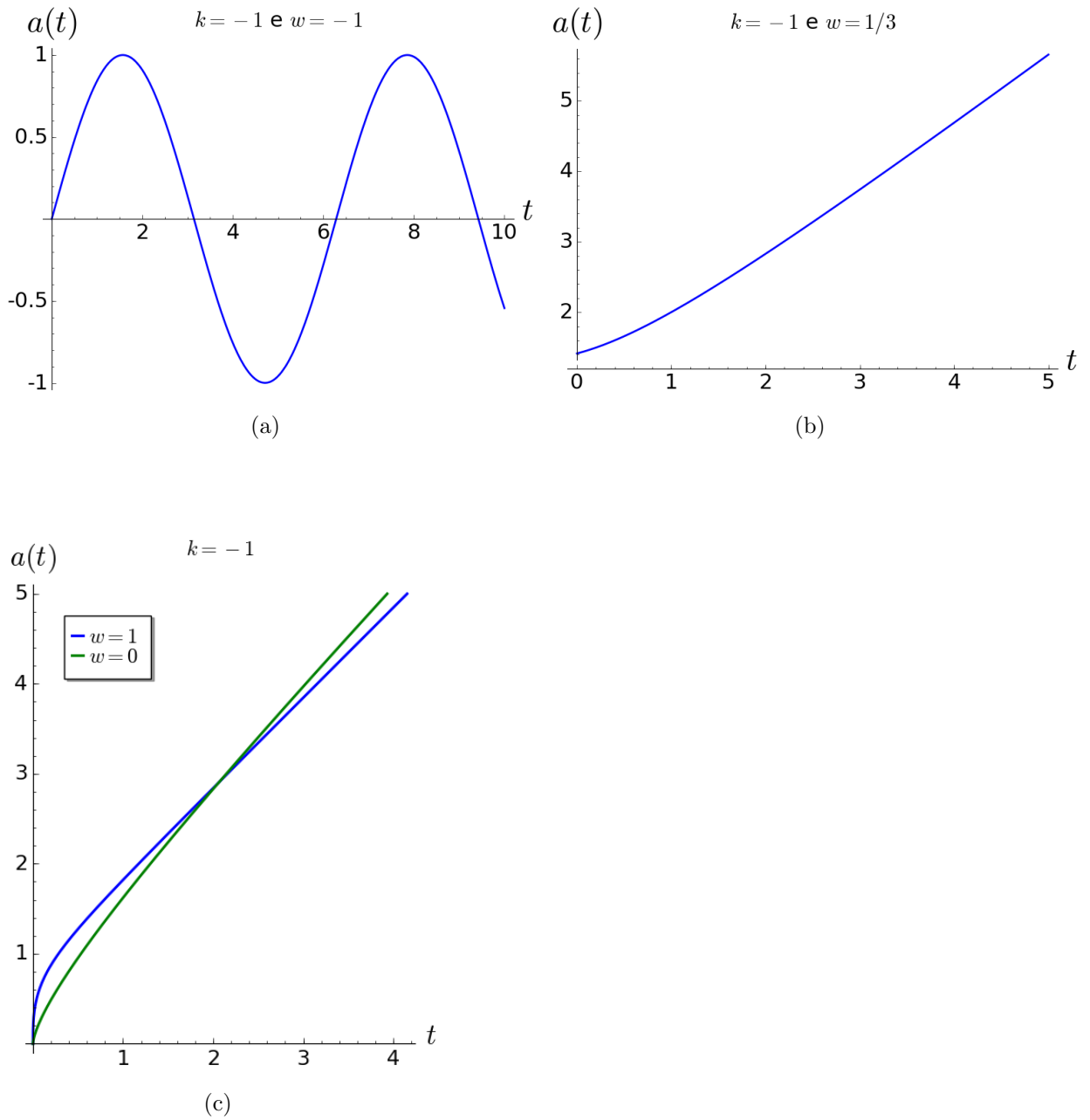


Figura 4.2: Gráficos do fator de escala em função do tempo para um Universo aberto no vácuo para diferentes valores de w , com as condições iniciais: (a) $a(0) = 0$ e $\dot{a}(0) = 1$; (b) $a(0) = 1$ e $\dot{a}(0) = 1$; (c) $C_1 = C_2 = 0$.

4.4.2 Soluções na presença de fluido perfeito conforme

Substitui-se o valor de $(8\pi\rho)$ da primeira equação do sistema 4.72 na segunda equação do mesmo sistema. Isola-se então $\dot{\beta}$ da terceira equação do sistema e substitui-se na segunda equação. Assim, a expressão para $\dot{\alpha}$ surge da segunda equação, e $\dot{\beta}$ da terceira. Com isso, o sistema 4.120 é obtido, com o objetivo de encontrar o fator de escala $a(t)$ e o campo escalar $\phi(t)$. A quantidade $\rho(t)$ pode ser calculada depois de solucionado o sistema, através da primeira equação de 4.72.

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -2\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{k}{a^2} - \alpha\beta + \frac{1}{2}w(3\beta^2 + 6\alpha\beta), \\ \dot{\beta} = -\frac{1}{2}w(3\beta^2 + 6\alpha\beta) - \frac{1}{2}\beta^2 - 2\alpha\beta, \\ \dot{a} = a\alpha, \\ \dot{\phi} = \phi\beta. \end{cases} \quad (4.120)$$

Este sistema 4.120 é resolvido numericamente através do Sage na versão 7.4 via GSL (GNU Scientific Library)¹. O algoritmo utilizado no cálculo foi o método Runge-Kutta Prince-Dormand (8,9) (rk8pd)[105; 106]. Para resolver este sistema foi escolhido um modelo do universo através da escolha do parâmetro da curvatura do espaço-tempo k com os valores $(-1.0, 0.0, +1.0)$ e da constante w com os valores $(-1.0, 0.0, 1./3., +1.0)$. As condições iniciais escolhidas foram: $a(0) = +1.0$, $\dot{a}(0) = +1.0$, $\phi(0) = -1.0$, $\dot{\phi}(0) = +1.0$ e $t \in [0, 1]$. Ressaltando que a evolução do fator de escala $a(t)$ independe da escolha de $\phi(0)$.

As soluções obtidas são apresentadas nas Figuras 4.3, 4.4 e 4.5. Para fim de análise, os gráficos serão limitados até $t = 1$. Neste intervalo é possível distinguir o comportamento obtido por $w = -1$ dos demais valores de w aplicados a quaisquer valores de k , exceto na Figura 4.5, (c), na qual $w = -1$ e $w = 1$ exibem um comportamento diferenciado. Pode-se observar que a densidade do fluido comum na Figura 4.6, (b), é igual a zero para $k = 0$ o que leva a entender que o fato de haver aceleração não-nula conforme Figura 4.5, (b), para todos os valores de w implica que o responsável por este efeito é o campo escalar $\phi(t)$ na Figura 4.3, (d – f).

Entenda-se que o significado de desaceleração no universo corresponde ao valor negativo do parâmetro de desaceleração, $q(t)$, expresso em 1.30 e aceleração corresponde ao

¹“Sage é um software matemático de fonte aberta, gratuito e licenciado sob a GPL(GNU General Public License)”[104].

valor positivo de $q(t)$, pois nele está contida a derivada segunda do fator de escala. O termo expansão refere-se ao valor positivo do parâmetro de Hubble, $H(t)$, definido em 1.29. Caso ele seja positivo mas que decresce em função do tempo, então diz-se que a expansão é desacelerada, caso o parâmetro de Hubble seja positivo e crescente, a expansão é dita acelerada.

Dessa forma nota-se na Figura 4.4, $(d - f)$ que há uma expansão desacelerada para $k = -1, w = 0, 1/3, 1$ e $k = 1, w = -1, 0, 1/3, 1$. Tem-se neste último caso que $H(t)$ para $w = 0, 1/3$ em $t = 1$ é igual a zero. Há universo com expansão acelerada no caso $k = -1, w = 1$, e para $k = 0, w = -1$ o parâmetro de Hubble permanece constante.

O valor de $q(t)$ na Figura 4.5, $(a - c)$, indica desaceleração para um universo aberto, para $k = -1, w = -1$, mantendo uma certa constância para tempos maiores. No caso $k = -1, w = 0$ o universo inicia desacelerado, mas com $t \rightarrow 1$, o universo exibe parâmetro de Hubble constante. Para $k = -1, w = 1/3$, não há desaceleração e para $k = -1, w = 1$ há mudança no regime de aceleração para desaceleração. Em um universo plano $k = 0, w = 0, 1/3, 1$, apresenta-se aceleração constante e $k = 0, w = -1$, desaceleração constante. Para um universo fechado com $k = 1, w = 0, 1/3$ há aceleração e com $k = 1, w = 1$ o universo tem aceleração até um certo ponto, onde começa a desacelerar e $k = 1, w = -1$ o parâmetro de desaceleração é aproximadamente nulo até próximo de $t = 0.5$ quando começa a acelerar.

A correlação entre $q(t)$ e $\rho(t)$ pode ser identificada principalmente para o caso de $k = 0$, pois quando $\rho(t)$ é igual a zero, o parâmetro de desaceleração permanece constante, seja ele positivo ou negativo. Quando $\rho(t)$ é positivo, como no caso $k = 1$, $q(t)$ também é positivo, exceto por $w = 1$ que para t próximo de um, ele segue para o regime negativo. Quando $\rho(t)$ é negativo, $q(t)$ se divide em grupos, $w = -1, 0$ permanecem negativos, $w = 1$ muda do regime positivo para negativo e $w = 1/3$ é igual a zero. Observa-se que ao passo que o módulo de $\rho(t)$ vai diminuindo, $q(t)$ vai se aproximando de zero para os $w = 1, 1/3$. Contudo, é possível observar que mesmo a densidade do fluido comum tendo correlação com $q(t)$, a afirmação da importância do campo escalar sobre a aceleração continua válida.

Se comparados os gráficos do fator de escala $a(t)$, Figura 4.3, $(a - c)$, para o tempo e condições de contorno aqui definidas, com o modelo da Relatividade Geral, percebe-se que há uma pequena contração para modelos $k = 1$. Para os casos de $k = -1, 0$ a curva

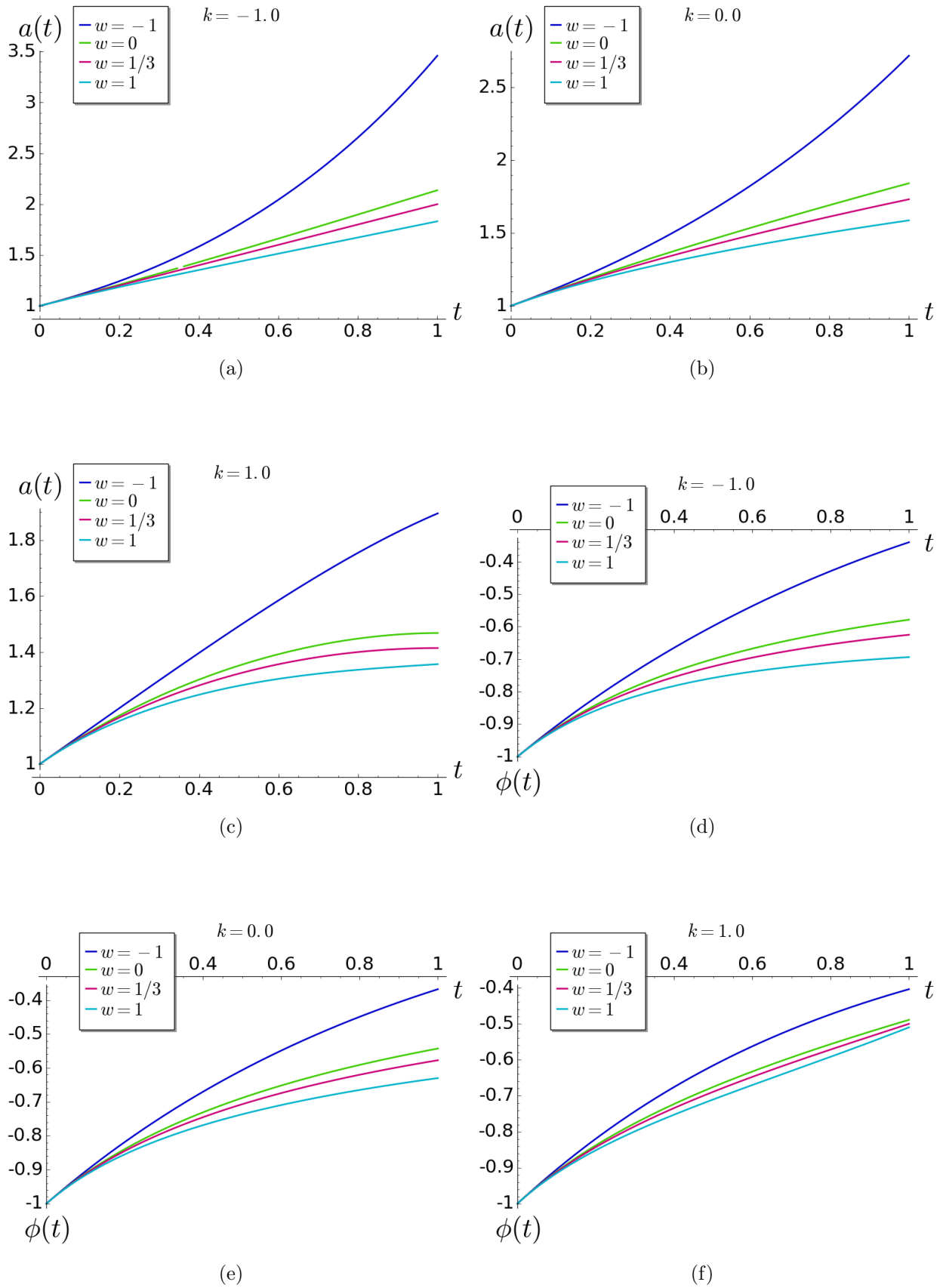


Figura 4.3: Gráficos do fator de escala $a(t)$ e do campo escalar $\phi(t)$ em função do tempo para um Universo aberto, plano ou fechado, ou seja, com o parâmetro de curvatura variando entre $k = -1, 0, 1$.

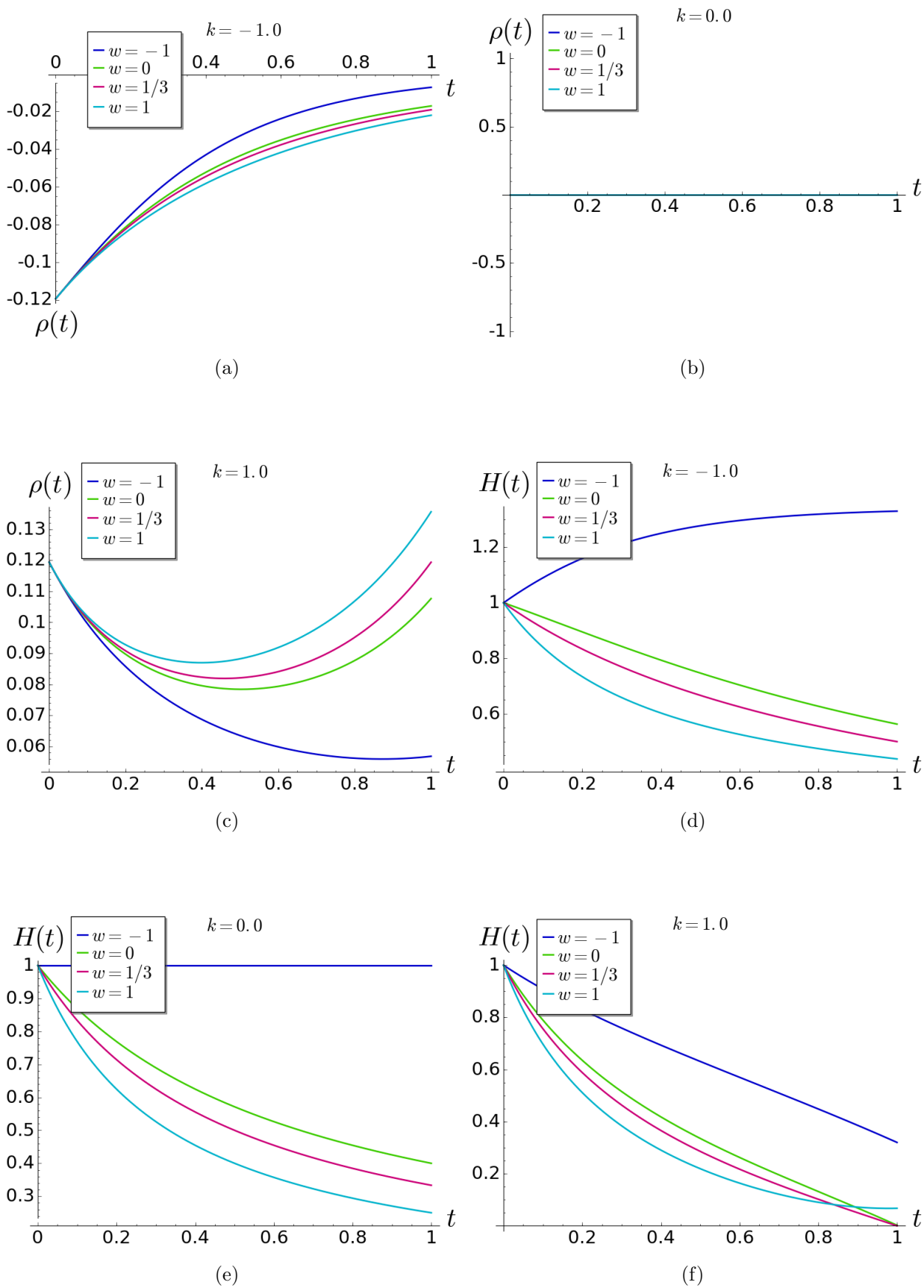
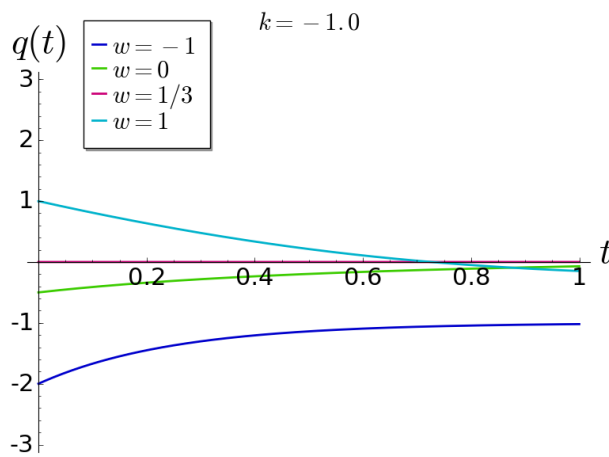
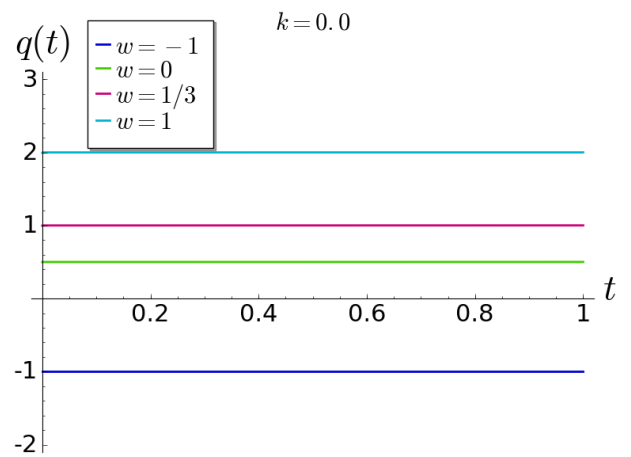


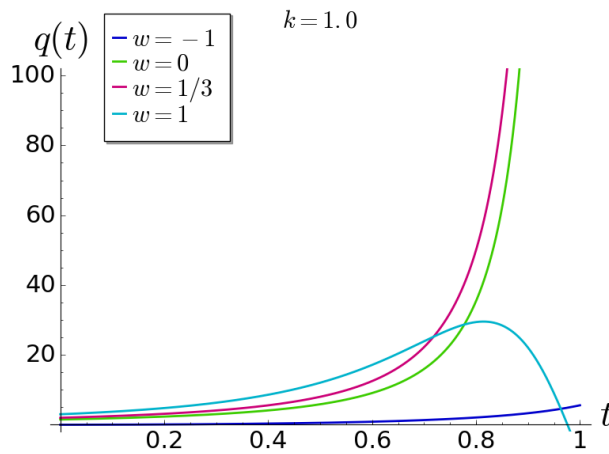
Figura 4.4: Gráficos da densidade de um fluido perfeito conforme $\rho(t)$ e do parâmetro de Hubble $H(t)$ em função do tempo para $k = -1, 0, 1$.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.5: Gráficos do parâmetro de desaceleração $q(t)$ em função do tempo para $k = -1, 0, 1$.

de $w = -1$ se parece com a curva para certas condições iniciais do modelo de De Sitter. Para os demais valores de w , se parece com o modelo de Friedmann.

Equações de campo com um parâmetro para fluido perfeito conforme

Um caso particular surge com o parâmetro de curvatura igual a zero, $k = 0$, no sistema 4.72, para o qual é possível obter uma expressão com dependência em apenas uma variável. Abaixo, a demonstração será feita.

Da primeira equação do sistema 4.72, tem-se

$$\begin{aligned} H^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta &= \frac{8\pi\rho}{3} \\ (H + \beta)^2 &= \varepsilon^2 \\ H &= -\beta + \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.121}$$

onde $H = \alpha = \frac{\dot{a}}{a}$, e $\varepsilon^2 = \frac{8\pi\rho}{3}$. De 4.121 obtém-se a derivada temporal de H , igual a

$$\dot{H} = -\dot{\beta} + \dot{\varepsilon}. \tag{4.122}$$

Na segunda equação do sistema 4.72, substitui-se o valor de H e \dot{H} determinado em 4.121 e 4.122,

$$\begin{aligned} -2(-\dot{\beta} + \dot{\varepsilon}) - 3(-\beta + \varepsilon)^2 - 4\beta(-\beta + \varepsilon) - \beta^2 - 2\dot{\beta} &= \varepsilon^2 \\ -2\dot{\varepsilon} - 3\varepsilon^2 + 2\beta\varepsilon &= \varepsilon^2 \\ \beta &= 2\varepsilon + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{4.123}$$

e a derivada temporal de β ,

$$\dot{\beta} = 2\dot{\varepsilon} + \frac{\ddot{\varepsilon}}{\varepsilon} - \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2. \tag{4.124}$$

Na terceira equação do sistema 4.72, substitui-se o valor de H e isola-se ε ,

$$\begin{aligned}
-2\dot{\beta} - \beta^2 - 4\beta(-\beta + \varepsilon) &= w [3\beta^2 + 6\beta(-\beta + \varepsilon)] \\
-2\dot{\beta} + 3\beta^2(1 + w) - 2\beta\varepsilon(2 + 3w) &= 0 \\
\varepsilon &= -\frac{\dot{\beta}}{\beta(2 + 3w)} + \frac{3\beta(1 + w)}{2(2 + 3w)}. \tag{4.125}
\end{aligned}$$

Agora substitui-se 4.123 e 4.124 em 4.125,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= -\left[\frac{2\dot{\varepsilon} + \frac{\ddot{\varepsilon}}{\varepsilon} - \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2}{\left(2\varepsilon + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)(2 + 3w)} \right] + \left[\frac{\frac{3}{2}\left(2\varepsilon + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)(1 + w)}{(2 + 3w)} \right] \\
\varepsilon &= \frac{-2\dot{\varepsilon} - \frac{\ddot{\varepsilon}}{\varepsilon} + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(2\varepsilon + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2(1 + w)}{\left(2\varepsilon + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)(2 + 3w)} \\
\frac{\ddot{\varepsilon}}{\varepsilon} &= -(2\varepsilon^2 + \dot{\varepsilon})(2 + 3w) - 2\dot{\varepsilon} + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + \left[6\varepsilon^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + 6\dot{\varepsilon}\right](1 + w) \\
\ddot{\varepsilon} &= 2\varepsilon^3 + \varepsilon\dot{\varepsilon}(2 + 3w) + \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\varepsilon} \left(\frac{3w + 5}{2}\right), \tag{4.126}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$2\varepsilon\ddot{\varepsilon} = 4\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2\dot{\varepsilon}(2 + 3w) + \dot{\varepsilon}^2(3w + 5), \tag{4.127}$$

sendo esta a equação de campo para $k = 0$ com dependência em uma variável e na escolha do parâmetro w .

Parâmetros de densidade Ω

Uma forma de se descrever as condições do Universo é através dos seus parâmetros Cosmológicos, um deles é o parâmetro de Densidade, Ω . Aqui investigamos brevemente quais as expressões para este parâmetro na Cosmologia Conforme Teleparalela, seguindo a notação tradicional. Rearranjando a primeira equação do sistema com matéria 4.72,

obtém-se

$$\begin{aligned}
3\alpha^2 &= 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2} - 3\beta^2 - 6\alpha\beta \\
1 &= \frac{8\pi\rho}{3\alpha^2} + \left(-\frac{k}{\alpha^2 a^2}\right) + \left[\frac{(-\beta^2 - 2\alpha\beta)}{\alpha^2}\right] \\
1 &= \Omega_m + \Omega_k + \Omega_{\phi=\Lambda},
\end{aligned}$$

sendo definidos os parâmetros

$$\Omega_m = \frac{8\pi\rho}{3\alpha^2}; \quad \Omega_k = -\frac{k}{\alpha^2 a^2}; \quad \Omega_{\phi=\Lambda} = \left[\frac{(-\beta^2 - 2\alpha\beta)}{\alpha^2}\right];$$

Para um universo com $k \neq 0$, os parâmetros Ω_m e $\Omega_{\phi=\Lambda}$ podem ser escolhidos, então

$$\begin{aligned}
\Omega_k &= 1 - \Omega_m - \Omega_{\phi=\Lambda} \\
\left(-\frac{k}{\alpha^2 a^2}\right) &= 1 - \Omega_m - \Omega_{\phi=\Lambda} \\
\alpha &= \pm \sqrt{\frac{k}{a^2(\Omega_m + \Omega_{\phi=\Lambda} - 1)}}.
\end{aligned}$$

Com esta fórmula é possível escolher entre quem encontrar: a ou α .

Para o caso em que $k = 0$

$$1 = \Omega_m + \Omega_{\phi=\Lambda},$$

onde Ω_m é dado experimentalmente e $\Omega_{\phi=\Lambda}$ é consequência. Substituindo o valor de $\Omega_{\phi=\Lambda}$ encontra-se a equação,

$$\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2\Omega_{\phi=\Lambda} = 0,$$

resolve-se por Bhaskara, e o valor de β obtido é dado por

$$\begin{aligned}
\beta &= -\alpha \pm |\alpha| \sqrt{1 - \Omega_{\phi=\Lambda}} \\
\beta &= -\alpha \pm |\alpha| \sqrt{\Omega_m}.
\end{aligned}$$

Ao substituir os valores dos parâmetros Cosmológicos, podem ser encontrados os valores de α e β com respeito a cada modelo.

4.5 Energia Gravitacional

Uma outra aplicação desta teoria será para encontrar a energia gravitacional para o volume da esfera que contenha o Universo observável. O elemento de linha de FRW tem um horizonte dinâmico conhecido como horizonte trapping ou horizonte aparente [107; 108], o qual fornece o valor do raio aqui adotado para o volume considerado. Segue demonstração.

Dada a métrica FRW em 1.21, pode-se reescrevê-la como

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi'^2), \quad (4.128)$$

onde $R = ar$, $x^a = (t, r)$ e $h_{ab} = \text{diag} \left(-1, \frac{a^2}{1 - kr^2} \right)$. O horizonte aparente é definido por

$$h^{ab} \partial_a R \partial_b R = 0, \quad (4.129)$$

observe que h^{ab} é o tensor inverso de h_{ab} . Resolvendo esta equação,

$$\begin{aligned} h^{ab} \partial_a R \partial_b R &= 0 \\ h^{00} \partial_0 R \partial_0 R + h^{11} \partial_1 R \partial_1 R &= 0 \\ -\dot{a}^2 r^2 + (1 - kr^2) &= 0 \\ r &= \frac{1}{\sqrt{(\dot{a}^2 + k)}}, \end{aligned}$$

ao substituir o valor de $r = \frac{R}{a}$, obtém-se

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}}}. \quad (4.130)$$

Encontrado o valor do raio do universo observável, o cálculo da energia gravitacional será prosseguido, ressaltando que a métrica considerada é a métrica homogênea e isotrópica 1.21, cujas componentes do tensor métrico são dadas em 4.34 e as componentes dos campos de tetrada em 4.35. Para calcular a energia gravitacional, será necessário calcular a componente $\Sigma^{(0)01}$ 4.47 e o determinante da tetrada 4.49. Substituí-los na expressão da

energia definida em 3.41,

$$\begin{aligned} P^a &= 4k \oint e\phi^2 \Sigma^{a0i} dS_i \\ P^{(0)} &= -4k \oint ar\phi^2 \sin\theta \sqrt{1 - kr^2} dS_1, \end{aligned}$$

em coordenadas esféricas $dS_1 = d\theta d\phi'$ e como $\phi \neq \phi'$

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= -4k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi ar\phi^2 \sin\theta \sqrt{1 - kr^2} d\theta d\phi' \\ &= -16k\pi ar\phi^2 \sqrt{1 - kr^2}, \end{aligned}$$

sendo $k = \frac{1}{16\pi}$,

$$P^{(0)} = -a(t)r\phi^2 \sqrt{1 - kr^2}, \quad (4.131)$$

com r sendo o raio R da esfera, dado em 4.130, a energia total do Universo observável $E \equiv P^{(0)}$ é igual a 4.132

$$\begin{aligned} E &= -aR\phi^2 \sqrt{1 - kR^2} \\ &= -\frac{a\phi^2}{\sqrt{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}}}} \\ &= -a\phi^2 \sqrt{\frac{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - k}{\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]^2}} \\ &= -\frac{a\phi^2}{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}} \sqrt{\frac{\dot{a}^2 + k - ka^2}{a^2}} \\ &= -\frac{a^2\phi^2 \sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)}}{(\dot{a}^2 + k)}. \end{aligned} \quad (4.132)$$

A energia da matéria para um fluido perfeito conforme é calculada como

$$P_m^a = \int e e^a_\nu T^{0\nu} d^3x, \quad (4.133)$$

com,

$$T^{a\mu} = e^a_\nu T^{\nu\mu},$$

assim a componente (0)0 é igual a

$$T^{(0)0} = \rho\phi^2, \quad (4.134)$$

com a substituição do determinante da tetrada, das componentes do tensor Momento-Energia e do campo de tetrada, e tomando $d^3x = d\theta d\phi' dr$ na equação 4.133, obtém-se

$$\begin{aligned} P_m^{(0)} &= \int e e^{(0)}_0 T^{00} d^3x \\ P_m^{(0)} &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{a^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}} \rho \phi^2 dr d\theta d\phi' \\ P_m^{(0)} &= 4\pi a^3 \rho \phi^2 \int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{1 - kr^2}} dr. \end{aligned} \quad (4.135)$$

A integral da equação 4.135 para o modelo de universo $k = -1$,

$$\int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{1 + r^2}} dr = \frac{1}{2} \left[R\sqrt{R^2 + 1} - \sinh^{-1}(R) \right].$$

para o modelo de universo $k = 0$,

$$\int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3} R^3,$$

e para o modelo de universo $k = 1$,

$$\int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{1 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \left[\sin^{-1}(R) - R(1 - R^2)^{1/2} \right].$$

Portanto, para $k = -1$,

$$P_{m,k=-1}^{(0)} = 2\pi a^3 \rho \phi^2 \left[R\sqrt{R^2 + 1} - \sinh^{-1}(R) \right], \quad (4.136)$$

para $k = 0$

$$P_{m,k=0}^{(0)} = \frac{4\pi a^3 \rho \phi^2 R^3}{3}, \quad (4.137)$$

para $k = 1$,

$$P_{m,k=1}^{(0)} = 2\pi a^3 \rho \phi^2 \left[\sin^{-1}(R) - R(1 - R^2)^{1/2} \right]. \quad (4.138)$$

Ao substituir o valor do raio 4.130, em 4.136, 4.137 e 4.138, obtém-se

$$E_{m,k=-1} = -2\pi\rho a^3\phi^2 \left[\frac{a}{(\dot{a}^2 - 1)}\sqrt{\dot{a}^2 + a^2 - 1} - \sinh^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{\dot{a}^2 - 1}} \right) \right], \quad (4.139)$$

$$E_{m,k=0} = \frac{4\pi\rho a^3\phi^2}{3H^3}, \quad (4.140)$$

$$E_{m,k=1} = 2\pi\rho a^3\phi^2 \left[\sin^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}} \right) - \frac{a}{(\dot{a}^2 + 1)\sqrt{\dot{a}^2 - a^2 + 1}} \right], \quad (4.141)$$

sendo $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

A energia escura é a diferença entre a energia total do Universo observável e a energia da matéria

$$E_d = E - E_m. \quad (4.142)$$

Assim, para cada parâmetro de curvatura a energia escura será definida com uma equação.

Substituem-se 4.132 e 4.139 em 4.142 para $k = -1$,

$$\begin{aligned} E_{d,k=-1} &= -\frac{a^2\phi^2\sqrt{\dot{a}^2 + a^2 - 1}}{(\dot{a}^2 - 1)} - \frac{2\pi a^4\rho\phi^2}{(\dot{a}^2 - 1)}\sqrt{\dot{a}^2 + a^2 - 1} + 2\pi a^3\rho\phi^2 \sinh^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{\dot{a}^2 - 1}} \right) \\ &= -\frac{a^2\phi^2}{(\dot{a}^2 - 1)}\sqrt{\dot{a}^2 + a^2 - 1} \left[1 + 2\pi a^2\rho - \frac{2\pi a\rho(\dot{a}^2 - 1)}{\sqrt{\dot{a}^2 + a^2 - 1}} \sinh^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{\dot{a}^2 - 1}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Substituem-se 4.132 e 4.140 em 4.142 para $k = -0$,

$$\begin{aligned} E_{d,k=0} &= -\frac{a^2\phi^2\sqrt{\dot{a}^2}}{\dot{a}^2} - \frac{4\pi\rho a^3\phi^2}{3H^3} \\ &= -\frac{a\phi^2}{H} \left(1 + \frac{4\pi\rho a^2}{3H^2} \right). \end{aligned} \quad (4.144)$$

Substituem-se 4.132 e 4.141 em 4.142 para $k = 1$,

$$\begin{aligned} E_{d,k=1} &= -\frac{a^2\phi^2\sqrt{\dot{a}^2 - a^2 + 1}}{(\dot{a}^2 + 1)} + \frac{2\pi a^4\rho\phi^2}{(\dot{a}^2 + 1)}\sqrt{\dot{a}^2 - a^2 + 1} - 2\pi a^3\rho\phi^2 \sin^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}} \right) \\ &= -\frac{a^2\phi^2}{(\dot{a}^2 + 1)}\sqrt{\dot{a}^2 - a^2 + 1} \left[1 - 2\pi a^2\rho + \frac{2\pi a\rho(\dot{a}^2 + 1)}{\sqrt{\dot{a}^2 - a^2 + 1}} \sin^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.145)$$

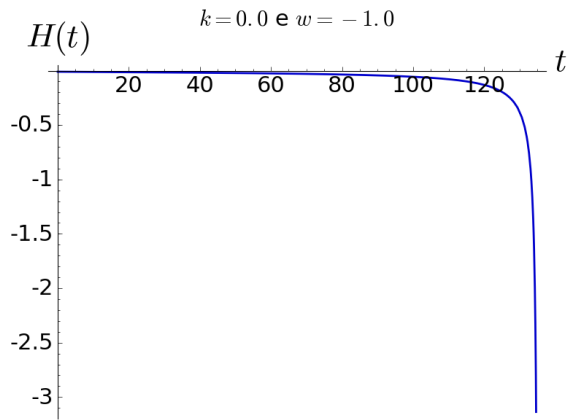
Os cálculos da energia escura foram resolvidos numericamente como feito no sistema 4.120 para o caso de um universo plano, $k = 0$ e $w = -1.0, 0.0, 1./3., +1.0$, com o intervalo de tempo variando para cada parâmetro de curvatura devido a presença de singularidades em pontos diferentes. As condições iniciais adotadas neste contexto foram $\alpha(0) = -0.01$, $\beta(0) = 0.02$, $a(0) = 0.01$ e $\phi(0) = 0.01$. As soluções obtidas com a expressão 4.144 também podem ser obtidas com a equação 4.127 com as condições iniciais $\varepsilon(0) = 0.01$, $\dot{\varepsilon}(0) = 0.0$, $a(0) = 0.01$ e $\phi(0) = 0.01$. As soluções são apresentas nas Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9.

As soluções obtidas correspondem às soluções da energia escura definida pela diferença entre a energia total e a energia da matéria. Dando a teoria Teleparalelismo Conforme um significado a ela, caso seja realmente uma energia gravitacional. Pois, no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral não é possível identificar uma energia escura.

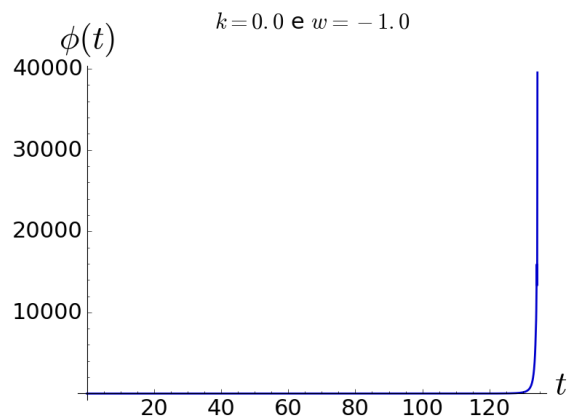
Ao analisar os gráficos percebe-se que há uma tendência para valores de w positivo, conforme visto nas Figuras (e)- (4.7-4.9), da energia não ser monotônica, crescendo até um certo valor máximo, diminuindo em seguida para valores cada vez menores se aproximando de zero, quando o universo sofre um crunch. Para $w = -1$, Figura 4.6-(e), a energia escura permanece sempre positiva crescendo ilimitadamente quando o universo colapsa.

Observa-se a partir dos modelos apresentados que há uma correlação entre o fator de escala e o comportamento da energia. No caso $k = 0, w = -1$, Figura 4.6-(d), $a(t)$ se aproxima de zero suavemente, associado a exibição de crescimento ilimitado por parte da energia escura. Nos demais casos, Figuras (d)-(4.7-4.9), a curva $a(t)$ tende a zero com uma certa inclinação, diferente do caso anterior, enquanto a curva da energia escura sofre uma inflexão antes de se aproximar de zero. Dos casos em que a energia escura não é ilimitada, o maior máximo da energia escura é identificado para quando o crunch acontece mais tarde que os demais.

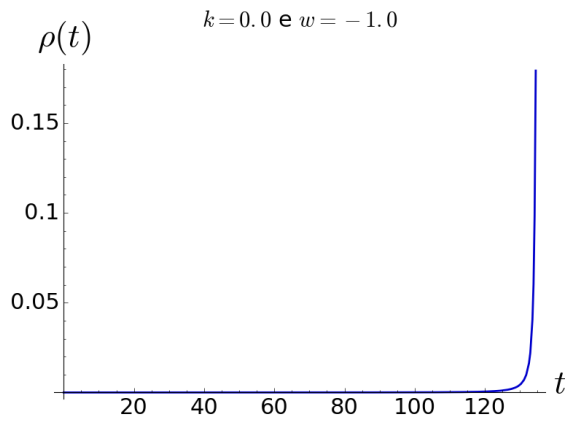
O comportamento do parâmetro de Hubble, do campo escalar e da densidade de um fluido perfeito conforme vão para infinito no modelo de universo $k = 0$ e $w = -1$. Na Figura 4.6-(a) observa-se que quando $a(t)$ sofre o crunch, $H(t)$ vai para menos infinito, sendo que os demais parâmetros, Figura 4.6-((b),(c),(e)), vão para mais infinito. Nos modelos $k = 0$ e $w = 0, 1/3, 1$, Figuras (4.7-4.9), o parâmetro de Hubble e a energia escura crescem negativamente na medida em que o fator de escala se aproxima de zero, enquanto o campo escalar e a densidade de fluido perfeito conforme crescem positivamente.



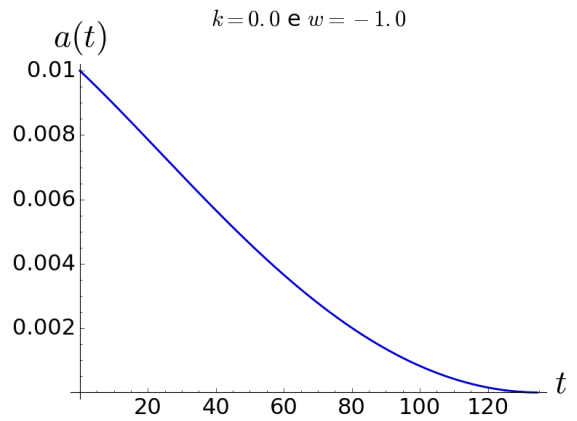
(a)



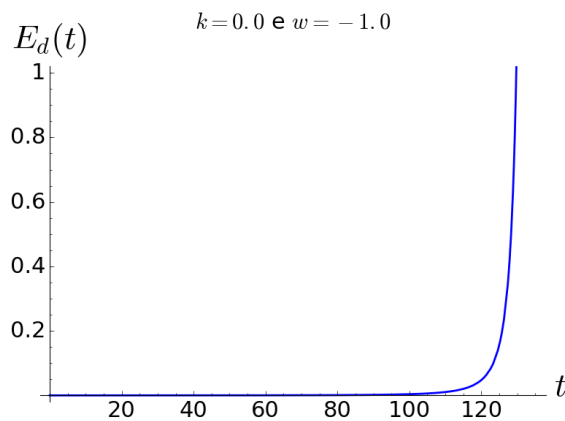
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 4.6: Gráficos em função do tempo (a) do parâmetro de Hubble, (b) do campo escalar, (c) da densidade de um fluido perfeito conforme, (d) do fator de escala, (e) da Energia Escura (E_d), para o modelo de universo $k = 0$ e $w = -1$.

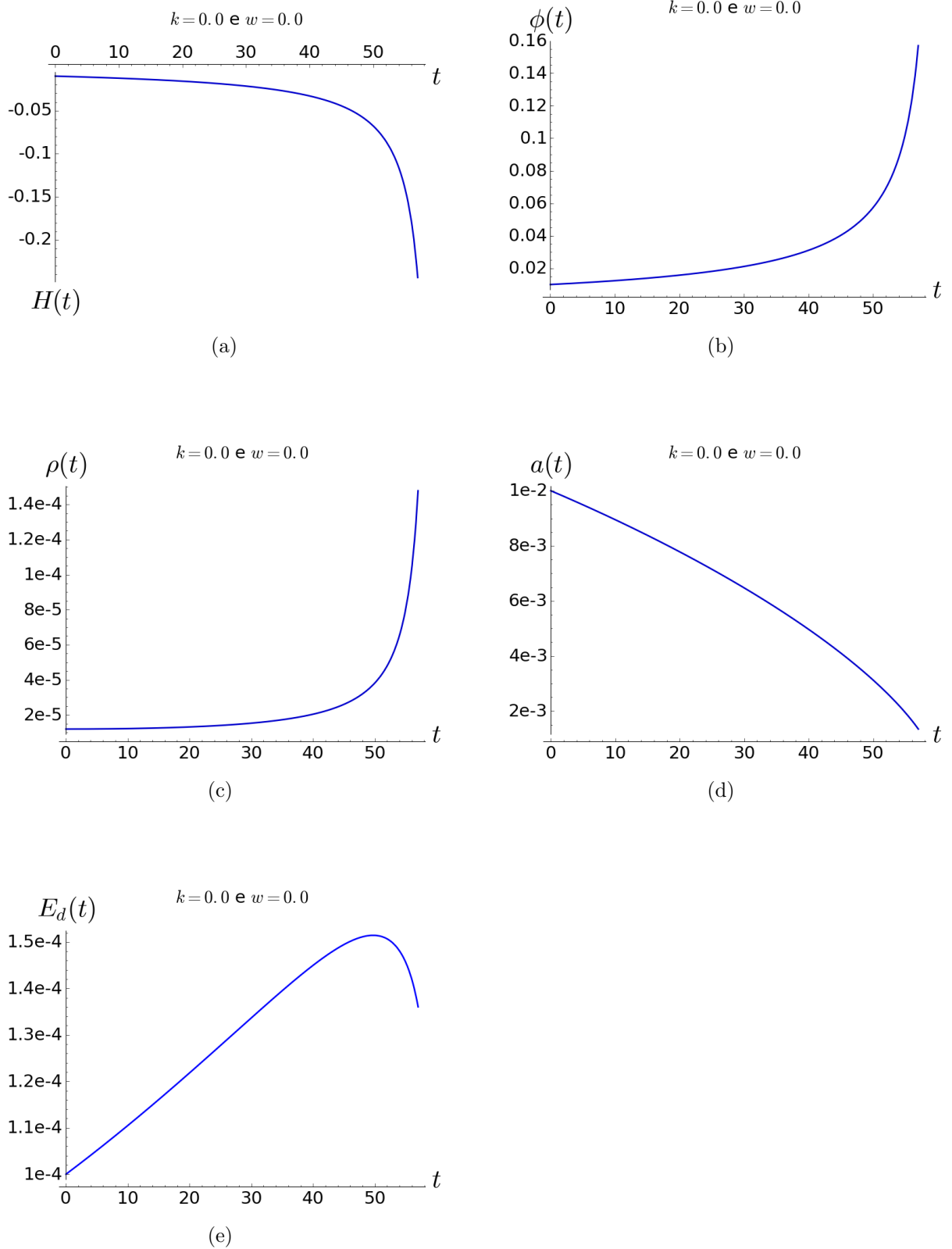


Figura 4.7: Gráficos em função do tempo (a) do parâmetro de Hubble, (b) do campo escalar, (c) da densidade de um fluido perfeito conforme, (d) do fator de escala, (e) da Energia Escura (E_d), para o modelo de universo $k = 0$ e $w = 0$.

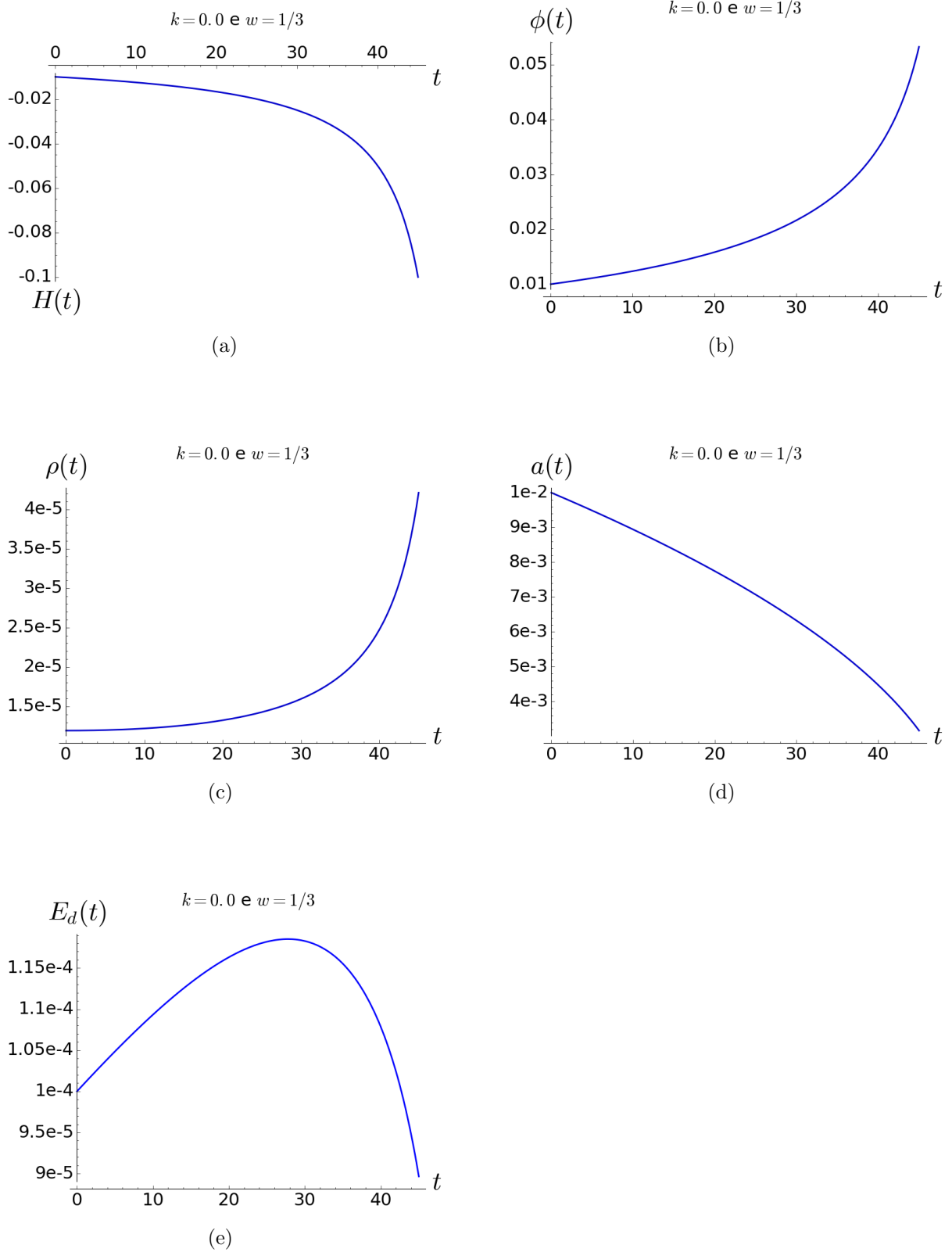


Figura 4.8: Gráficos em função do tempo (a) do parâmetro de Hubble, (b) do campo escalar, (c) da densidade de um fluido perfeito conforme, (d) do fator de escala, (e) da Energia Escura (E_d), para o modelo de universo $k = 0$ e $w = 1/3$.

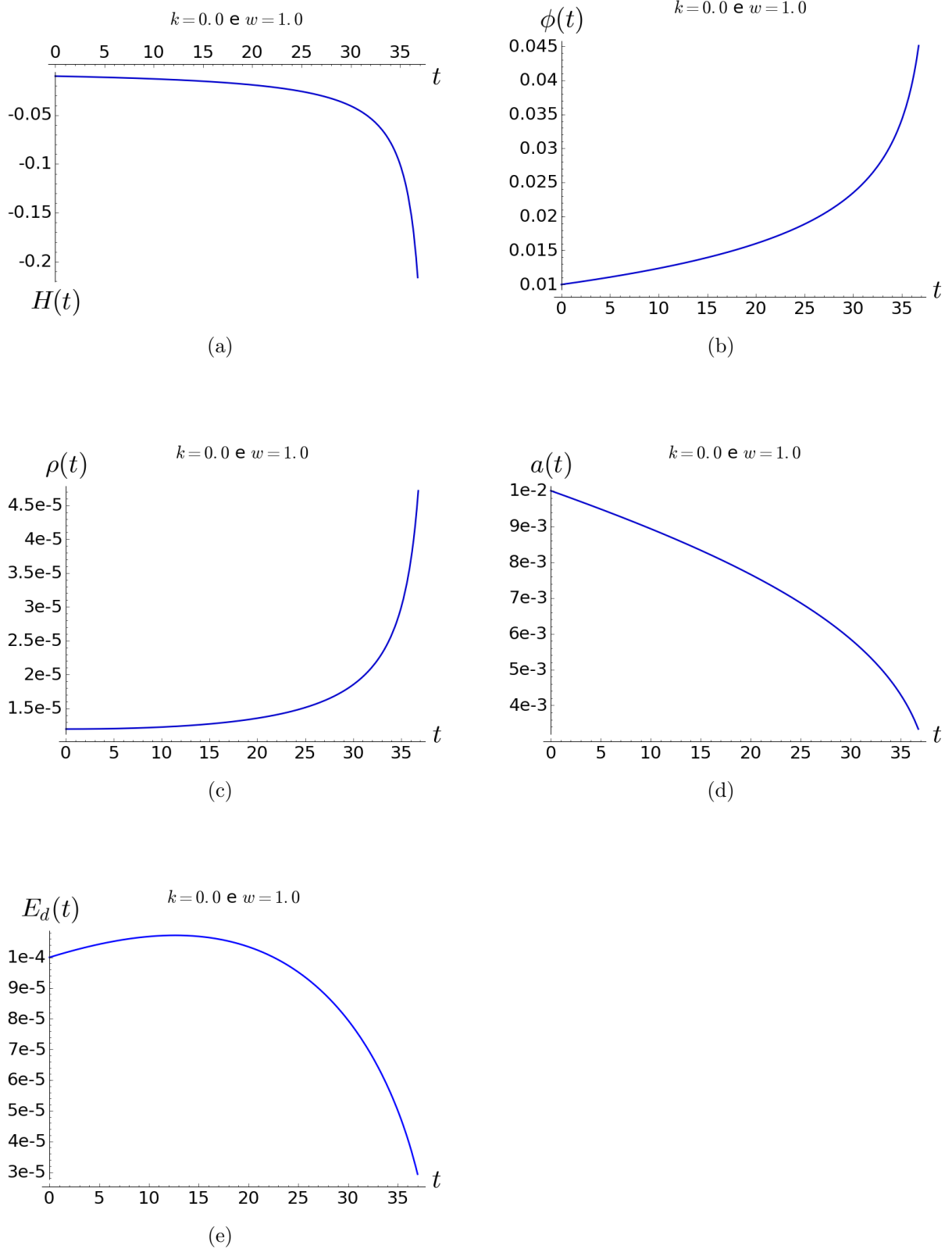


Figura 4.9: Gráficos em função do tempo (a) do parâmetro de Hubble, (b) do campo escalar, (c) da densidade de um fluido perfeito conforme, (d) do fator de escala, (e) da Energia Escura (E_d), para o modelo de universo $k = 0$ e $w = 1$.

Capítulo 5

Conclusão

No desenvolvimento desta tese foram encontradas as soluções das equações de campo da teoria Teleparalelismo Conforme para um universo homogêneo e isotrópico para o vácuo e para fluido perfeito conforme, obtiveram-se expressões para a densidade e pressão de um fluido escuro, expressões para calcular os parâmetros de densidade do universo e foram obtidos valores não-nulos para a energia escura no universo de Friedmann-Robertson-Walker.

A abordagem foi feita através da teoria conforme do Teleparalelismo, que no limite de $\phi = cte$ se reduz a teoria do Teleparalelismo Equivalente a Relatividade Geral, uma teoria alternativa que possibilita reproduzir os resultados da Relatividade Geral, construída a partir da geometria de Weitzenböck e dos campos de tetradas, se destacando por exibir naturalmente uma expressão tensorial para a energia gravitacional, evitando o problema da localizibilidade da energia gravitacional encontrado na Relatividade Geral.

A teoria Teleparalela Conforme é uma teoria relativamente recente desenvolvida por Maluf e que a escolhemos no intuito de averiguar suas possibilidades e consequências para FRW, permeado por um fluido perfeito conforme, com a imposição de uma equação de estado para fluido escuro. Estudamos em particular a energia escura do modelo. Esta teoria é fundamentada por uma transformação conforme nas quantidades envolvidas e adicionada um campo escalar dependente do tempo, a fim de manter as equações de campo invariantes por tais transformações. Neste trabalho, este campo escalar é interpretado como aquele que participa de forma efetiva na aceleração do Universo.

Os cálculos foram realizados tanto para um universo no vácuo quanto para um universo constituído de um fluido perfeito conforme. As equações de campo dessa teoria aplicadas

a Friedmann-Robertson-Walker geram três equações de campo, uma devido a variação da ação sobre o campo escalar $\phi(t)$ e as outras duas devido a variação da ação com respeito a tetrada $e^{a\mu}$ para a componente temporal e as componentes espaciais. No decorrer dos cálculos foi notado que a equação de campo com respeito ao campo escalar é dependente das outras duas, não sendo considerada para fim de cálculo.

Para resolver tais equações foi introduzido uma terceira equação, que semelhante na Relatividade Geral impusemos uma equação de estado relacionando densidade e pressão de um fluido escuro, da forma que $p_D = w\rho_D$. As expressões p_D e ρ_D foram obtidas extraindo termos das equações de campo quando variadas com respeito a tetradas, identificadas como termos de uma densidade e pressão de um fluido escuro. O termo de proporcionalidade w é um parâmetro arbitrário. De modo, que com essa terceira equação foi possível compôr um sistema que viabilizasse a resolução das equações de campo, além de apresentar expressões para a densidade e pressão do fluido escuro em um universo homogêneo e isotrópico.

Das equações de campo para o vácuo foi possível estudar soluções analíticas somente para um universo aberto e plano, para os valores $w = -1, 0, 1/3, 1$; com o intuito de se assemelhar aos fluidos de vácuo, poeira, radiação e do "fluido escuro" (sugestão desta tese). O resultado do caso $k = -1, w = 1$ deve ser ressaltado porque sua solução foi uma função hipergeométrica, também encontrada num caso particular na gravidade modificada de Chern-Simons com a energia escura de Ricci, que através das escolhas dos parâmetros é possível reproduzir os resultados do gás modificado de Chaplygin, um fluido exótico candidato a explicar a expansão do Universo.

Das equações de campo para um fluido comum, as soluções foram obtidas numericamente. Nelas, observa-se que o campo escalar, $\phi(t)$, contribui significativamente para casos em que o universo sofre uma expansão acelerada, devido a nulidade do parâmetro $\rho(t)$ para um universo plano. Há modelos em que o universo sofre expansão e aceleração e expansão e desaceleração.

Para as condições iniciais escolhidas, encontrou-se que valores positivos de energia escura, com dois tipos de comportamento, ou cresce indefinidamente ou sofre um pico antes de tender a zero, dependendo do valor assumido por w . Há uma correlação entre o fator de escala e tanto a forma quanto o tempo que o universo leva para sofrer o crunch.

Para trabalhos futuros pretende-se aplicar o Teleparalelismo Conforme para outros

modelos cosmológicos, calculando a energia escura para estes modelos de universo. Serão estudadas equações de campo desta teoria quando imposta lei de conservação da energia para matéria separadamente da energia gravitacional. Também se espera analisar a solução para um observador diferente, averiguar se existem processos de quantização, estudar um análogo ao tensor de Weyl e investigar soluções locais.

Bibliografia

- [1] A. S. T. Pires, *Evolução das Idéias da Física* (São Paulo, Livraria da Física, 2011).
- [2] A. H. Jaffe, P. A. Ade, A. Balbi, J. Bock, J. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, K. Coble, B. Crill, P. De Bernardis, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3475 (2001).
- [3] G. Efstathiou, J. Bond, and S. White, Mon. Notices Royal Astron. Soc. **258**, 1P (1992).
- [4] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
- [5] S. Carroll, *Spacetime and Geometry, an introduction to General Relativity* (San Francisco, Addison Wesley, 2004).
- [6] T. Padmanabhan, Current Science **88** (2005).
- [7] F. Zwicky, Astrophys. J **86**, 217 (1937).
- [8] M. C. B. Abdalla, *O discreto charme das partículas elementares*. (São Paulo, Unesp, 2006).
- [9] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. Knop, P. Nugent, P. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. Groom, *et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
- [10] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, *et al.*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).
- [11] M. D. Roberts, Gen. Relativ. Gravit. **20**, 775 (1988).

- [12] J. Maluf and F. Faria, Phys. Rev. D **85**, 027502 (2012).
- [13] H.-J. Schmidt, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **4**, 209 (2007).
- [14] J. Maluf, Ann. Phys. (Leipzig) **14**, 723 (2005).
- [15] S. Ulhoa, J. da Rocha Neto, and J. Maluf, International Journal of Modern Physics D **19**, 1925 (2010).
- [16] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology* (New York, John Wiley & Sons, 1972).
- [17] http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1921/.
(Acesso em 31/03/2017).
- [18] A. Einstein, Science **91**, 487 (1940).
- [19] Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis, and E. N. Saridakis, Rep. Prog. Phys. **79**, 106901 (2016).
- [20] C. M. Will, Living Rev. Rel. **17**, 4 (2014), <http://www.livingreviews.org/lrr-2014-4>.
- [21] M. Roos, *Introduction to cosmology* (New York, John Wiley & Sons, 2015).
- [22] http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2017/.
(Acesso em 04/10/2017).
- [23] S. G. Turyshev, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **58**, 207 (2008).
- [24] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (New York, Oxford University Press, 1992).
- [25] R. M. Wald, *General Relativity* (Chicago, The University of Chicago Press, 1984).
- [26] D. McMahon, *Relativity demystified* (New York, McGraw-Hill Education, 2006).
- [27] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985).
- [28] H. V. Peiris, Cambridge, Institute of Astronomy, University of Cambridge .
- [29] A. Friedmann, Z. Phys. **10**, 377 (1922).

- [30] B. Terzić, “Lecture notes on astrophysics,” http://nicadd.niu.edu/~bterzic/PHYS652/PHYS652_notes.pdf.
- [31] E. Hubble, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **15**, 168 (1929).
- [32] http://hubblesite.org/news_release/news/2016-17/107-illustrations/. (Acesso em 09/04/2017).
- [33] J. Maldacena, *AIP Conference Proceedings CONF-981170*, **484**, 51 (1999).
- [34] E. Cartan, A. Einstein, and R. Debever, *Élie Cartan-Albert Einstein: letters on absolute parallelism, 1929-1932* (Princeton University Press, 1979).
- [35] H. E. Salzer, Archive for History of Exact Sciences **12**, 89 (1974).
- [36] A. Unzicker and T. Case, [arXiv:physics/0503046[physics.hist-ph]], (2005).
- [37] M. Israelit and N. Rosen, Found. Phys. **15**, 365 (1985).
- [38] M. Jamil, D. Momeni, and R. Myrzakulov, Eur. Phys. J. C **72**, 2122 (2012).
- [39] B. Mashhoon, Phys. Lett. A **145**, 147 (1990).
- [40] J. Maluf, M. V. Veiga, and J. da Rocha-Neto, Gen. Relativ. Gravit. **39**, 227 (2007).
- [41] M. Blau, “Lecture notes on general relativity,” (2016), <http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>.
- [42] Y. Zhang, H. Li, Y. Gong, and Z.-H. Zhu, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2011**, 015 (2011).
- [43] S. C. Ulhoa, Physicae **8** (2009).
- [44] L. Bel, [arXiv:0805.0846[gr-qc]], (2008).
- [45] J. W. Maluf, J. Math. Phys. **35**, 335 (1994).
- [46] R. M. Wald, *General relativity* (Chicago, University of Chicago press, 1984).
- [47] V. Faraoni, E. Gunzig, and P. Nardone, [arXiv:gr-qc/9811047], (1998).
- [48] R. Blumenhagen and E. Plauschinn, *Introduction to Conformal Field Theory: With Applications to String Theory* (Berlin Heidelberg, Springer, 2009).

- [49] Ø. Grøn and S. Hervik, *Einstein's general theory of relativity: with modern applications in cosmology* (Springer Science & Business Media, 2007).
- [50] P. Zhao, "Riemannian geometry and general relativity," http://www.damtp.cam.ac.uk/user/pz229/Teaching_files/GR.pdf. (Acesso em 25/04/2017.).
- [51] M. Atiyah, *Biographical Memoirs* **82**, 320 (2003).
- [52] H. F. Goenner, *Living Rev. Rel.* **7**, 2 (2004).
- [53] N. Rosen, *Found. of Phys.* **12**, 213 (1982).
- [54] W. O. Straub, "Weyl's theory of the combined gravitational-electromagnetic field," <http://www.weylmann.com/weyltheory.pdf>.
- [55] E. Scholz, [arXiv:1703.03187[math.HO]], (2017).
- [56] N. Wu, [arXiv:hep-th/0109145], (2001).
- [57] O. Babelon, F. Schaposnik, and C. Viallet, *Phys. Lett. B* **177**, 385 (1986).
- [58] H. Cheng, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2182 (1988).
- [59] S.-Y. Xu, I. Belopolski, N. Alidoust, M. Neupane, G. Bian, C. Zhang, R. Sankar, G. Chang, Z. Yuan, C.-C. Lee, *et al.*, *Science* **349**, 613 (2015).
- [60] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, *Phys. Lett. B* **130**, 389 (1983).
- [61] M. El Naschie, *Chaos, Solitons & Fractals* **41**, 2635 (2009).
- [62] D. H. Perkins, D. H. Perkins, D. H. Perkins, G.-B. Physicien, D. H. Perkins, and G. B. Physicist, *Introduction to high energy physics*, Vol. 2 (Massachusetts, Addison-Wesley Reading, 1987).
- [63] J. Sultana, D. Kazanas, and J. L. Said, *Phys. Rev. D* **86**, 084008 (2012).
- [64] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [65] D. Elizondo and G. Yepes, [arXiv:astro-ph/9312064], (1993).
- [66] D. Kazanas and P. D. Mannheim, *strophys. J. Suppl. Ser.* **76**, 431 (1991).

- [67] J. T. Wheeler, Phys. Rev. D **90**, 025027 (2014).
- [68] D. B. Blaschke and M. P. Dabrowski, Entropy **14**, 1978 (2012).
- [69] J. R. Taylor, *Mecânica clássica* (Bookman Editora, 2013).
- [70] N. Banerjee and S. Sen, Pramana **49**, 609 (1997).
- [71] L. H. Ryder, *Quantum field theory* (Cambridge, Cambridge university press, 1996).
- [72] <http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/b6/psfiles/Chapter-7-conslaw.pdf>. (Acesso em 09/10/2017).
- [73] R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, .
- [74] A. Komar, Phys. Rev. **129**, 1873 (1963).
- [75] S. A. Hayward, Phys. Rev. D **49**, 831 (1994).
- [76] C.-C. Chang, J. M. Nester, and C.-M. Chen, Phys. Rev. Lett. **83**, 1897 (1999).
- [77] A. Einstein and H. Minkowski, University of Calcutta , 89 (1920).
- [78] A. Einstein, in *The Meaning of Relativity* (Springer, 1922) pp. 54–75.
- [79] A. Kox, M. J. Klein, and R. Schulmann, “The collected papers of albert einstein; volume 6 the berlin years: Writings 1914-1917,” (1997).
- [80] A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig) **354**, 769 (1916).
- [81] M. Sharif and K. Nazir, Commun. Theor. Phys. **50**, 664 (2008).
- [82] P. Halpern and J. Roberts, Int. Sch. Res. Notices **2015** (2015).
- [83] L. L. So, J. M. Nester, and H. Chen, Class. Quantum Gravity **26**, 085004 (2009).
- [84] J. Aguirregabiria, A. Chamorro, and K. Virbhadra, Gen. Relativ. Gravit. **28**, 1393 (1996).
- [85] P. Sahoo, K. Mahanta, D. Goit, A. Sinha, S. Xulu, U. Das, A. Prasad, and R. Prasad, Chin. Phys. Lett. **32**, 020402 (2015).

- [86] L. Landau and E. Lifshitz, “The classical theory of fields, cours of theoretic physics, vol. 2, 4th revised english edition,” (1994).
- [87] K. Virbhadra, Phys. Lett. A **157**, 195 (1991).
- [88] P. G. Bergmann and R. Thomson, Phys. Rev. **89**, 400 (1953).
- [89] C. Møller, Ann. Phys **4**, 347 (1958).
- [90] F. Mikhail, M. Wanas, A. Hindawi, and E. Lashin, nt. J. Theor. Phys. **32**, 1627 (1993).
- [91] L. Bel, Cah. Phys. **16**, 59 (1962).
- [92] L. Bel, Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste **2**, 1 (1959).
- [93] B. Saha, V. Rikhvitsky, and M. Visinescu, Mod. Phys. Lett. A **21**, 847 (2006).
- [94] J. M. Senovilla, [arXiv:gr-qc/9901019], (1999).
- [95] J. Maluf, J. da Rocha-Neto, T. Toribio, and K. Castello-Branco, Phys. Rev. D **65**, 124001 (2002).
- [96] N. Rosen, Gen. Relativ. Gravit. **26**, 319 (1994).
- [97] V. Johri, D. Kalligas, G. Singh, and C. Everitt, Gen. Relativ. Gravit. **27**, 313 (1995).
- [98] K. Virbhadra, Phys. Rev. D **41**, 1086 (1990).
- [99] I. Radinschi, I. Yang, *et al.*, [arXiv:gr-qc/0702105], (2007).
- [100] D. Guarrera and A. Hariton, Phys. Rev. D **76**, 044011 (2007).
- [101] J. Silva, A. Santos, and S. Ulhoa, Eur. Phys. J. C **76**, 167 (2016).
- [102] J. da Silva and S. Ulhoa, Mod. Phys. Lett. A **32**, 1750113 (2017).
- [103] J. Silva and A. Santos, Eur. Phys. J. C **73**, 2500 (2013).
- [104] <http://www.sagemath.org/>.
- [105] P. Prince and J. Dormand, J. of Computational and Applied Maths. **7**, 67 (1981).

- [106] C. Li and V. Alexiades, Proceedings of Neural, Parallel & Scientific Computations **4**, 241 (2010).
- [107] S. Mitra, S. Saha, and S. Chakraborty, Phys. Lett. B **734**, 173 (2014).
- [108] R.-G. Cai, L.-M. Cao, and Y.-P. Hu, Class. Quantum Gravity **26**, 155018 (2009).