Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Introdução aos Espaços de Sobolev Fracionários

por

Wilson Enrique Murillo Cantero

Brasília
2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Introdução aos Espaços de Sobolev Fracionários

por

Wilson Enrique Murillo Cantero †

sob orientação de

Prof. Dr. Luís Henrique de Miranda

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, PPGMat–UnB, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†O autor contou com apoio financeiro Capes e CNPq durante a realização deste trabalho.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Introdução aos Espaços de Sobolev Fracionários

por

Wilson Enrique Murillo Cantero †

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, PPGMat – UnB, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de

Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Examinada e aprovada por:

Prof. Dr. Luís Henrique de Miranda (Orientador)

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto- DM/UFSCar

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro- MAT/UnB

Brasília, 20 de Dezembro de 2017

† O autor contou com apoio financeiro Capes e CNPq durante a realização deste trabalho.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Introdução aos Espaços de Sobolev Fracionários

por

Wilson Enrique Murillo Cantero*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 20 de dezembro de 2017.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Luis Henrique de Miranda MAT/UnB (Orientador)

Ricardo Ruviaro

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro – MAT/UnB (Membro)

Adilson Presoto

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto - UFSCar (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mi

Murillo Cantero, Wilson Enrique
Uma Introdução aos Espaços de Sobolev Fracionários / Wilson Enrique Murillo Cantero; orientador Luís Henrique de Miranda. -- Brasília, 2017.
118 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. Espaços de Sobolev Fracionários. 2. seminorma de Gagliardo. 3. Domínios de Extensão. 4. Imersões Contínuas, Compactas. 5. Regularidade de Hölder . I. de Miranda, Luís Henrique, orient. II. Título.

Agradecimentos

Nesta página muito especial deste trabalho, gostaria de agradecer a algumas pessoas, dentre as muitas que me ajudaram a realizá-lo.

A Deus, pelo dom da vida, por ser meu guia e fortaleza.

A todos os meus familiares, que contribuíram de maneira significativa para minha educação ao longo da minha vida como também por acompanhar-me neste processo de minha formação. A Lizeth Díaz Uribe, por sua compreensão, carinho, pelo incentivo a continuar no mestrado e por compreender minha ausência.

Ao meu orientador Prof. Luís Henrique de Miranda, uma pessoa que admiro e respeito, um profissional no qual me espelho desde quando o conheci nas aulas de Introdução a Análise, ministradas por ele em 2016. O agradeço por se dispor a me ajudar quando estava numa etapa complicada do mestrado. Pela amizade e tão sempre valiosas sugestões para realizar o presente trabalho. Tenho muito orgulho de ter sido orientado por alguém tão qualificado.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto e Prof. Dr. Ricardo Ruviaro, por terem aceitado participar da banca examinadora.

Aos meus amigos que fiz no Departamento de Matemática da UnB durante esta etapa. Especialmente aqueles que estiveram ao meu lado nos momentos mais difíceis e me ajudaram para superá-os.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática da UnB, principalmente, aos porteiros da sala de estudo do mestrado.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UnB que contribuíram para minha formação.

À UnB, pela infraestrutura e recursos oferecidos para a realização deste trabalho.

Ao CNpq pelo apoio financeiro durante o período de mestrado.

Meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que de uma ou outra forma estiveram ao meu lado ao longo desta etapa.

Dedicatória

Para minhas avós Rosa María Pinzon e Ana Basquez. Por seus sábios conselhos e apoio para minha educação.

"Se não puder voar, corra.

Se não puder correr, ande.

Se não puder andar, rasteje,

mas continue em frente

de qualquer jeito".

Martin Luther King

Resumo

Neste trabalho apresentamos os Espaços de Sobolev Fracionários através da definição de seminorma de Gagliardo. Temos como objetivo introduzir as principais ferramentas básicas destes espaços para se investigar as equações diferenciáveis parciais. Dessa forma, mostraremos resultados de sua geometria como também algumas propriedades típicas destes espaços, como as imersões, domínios de extensões, prolongamentos, entre outros.

Palavras-chave: Espaços de Sobolev Fracionários, seminorma de Gagliardo, Domínio de Extensão, Prolongamento, Imersões.

Abstract

In this work we present the Fractional Sobolev Spaces given by the definition of Gagliardo Seminorm. We will introduce the main basic tools of these spaces to investigate partial differential equations. In this way, we will show results of its geometry as well as some typical properties of these spaces, such as Imbeddings, Extensions Domains, Operador of Extensions, among others.

Keywords: Fractional Sobolev Spaces, Gagliardo seminorm, extensions domains, operador of extensions, Imbeddings.

Notações

$[u]_{B^{s,p,\theta}(\Omega)}$	seminorma de u no espaço de Besov $B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$;
$[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$	seminorma de Gagliardo de u em $W^{s,p}(\Omega)$;
ω_{N-1}	volume da bola unitaria $(N-1)$ dimensional;
$[u]_{p,\lambda}$	norma de u no espaço de campanato $L^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)$;
$\blacksquare$	fim de uma demostração;
Ω	subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$;
$\rightharpoonup$	convergência fraca;
$B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$	espaços de Besov;
$B^{s,p}(\mathbb{R}^N)$	espaços de Besov quando $p = \theta$;
$C^{0,1}$	um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ é de classe $C^{0,1}$;
$C^{0,\alpha}(\Omega)$	espaço das funções Hölder contínuas de expoente α;
$C^k(\Omega)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω;
$C_0(\Omega)$	funções contínuas de suporte compacto em Ω;
$C_0^\infty(\Omega)$	funções continuamente diferenciáveis para todo $k \geq 0$ e com suporte compacto em Ω;
$L^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)$	espaços de Campanato;
$med(A)$	medida de Lebesgue de um conjunto A;
$q.t.p.$	para quase todo ponto;
$supp(f)$	suporte da função f;
$W^{m,p}(\Omega)$	espaços de Sobolev inteiros;
$W^{s,p}$	espaços de Sobolev Fracionários.

Conteúdo

Introdução

Os espaços de Sobolev nas últimas décadas deixarem um ótimo legado na teoria moderna das Equações em Derivadas Parciais de tal forma que atualmente são uma ferramenta imprescindível para o estudo das mesmas. Por conta dos inúmeros modelos procedentes da física e das engenharias que poderiam ser investigadas através de Equações Diferencias Parciais e por causa do apelo simplificador dos Espaços de Sobolev a estas houve um crescente interesse de matemáticos sobre estes espaços.

Estes espaços se originaram pela necessidade de se resolver problemas de minimização no século XX. Em particular, o problema clássico de minimizar a integral variacional do principio de Dirichlet, foi um dos primeiros problemas da época que evidenciou a necessidade de se definir uma nova classe de funções especiais para garantir a existência de suas soluções. Muitos matemáticos importantes como Weierstrass, G. C. Evans ou L. Tonelli contribuíram para a solução deste problema (ver [16]).

A meados da década de 1930, o matemático russo Sergei Lvovich Sobolev começou os estudos das soluções fracas para as equações hiperbólicas e a minimização de certas integrais variacionais. Durante esse período se originou o que se conhece atualmente como os Espaços de Sobolev, denotado por $W^{m,p}$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $1 \leq p \leq +\infty$. A partir desse momento, este novo conceito se converte rapidamente em uma área completa da Análise Funcional e a noção da função generalizada passou ser uns dos principais estudos da época (para mais detalhes veja [16]).

Depois de fundamentados, estes espaços com certas propriedades elementares de sua geometria e seu dual, obtém-se as propriedades básicas para o estudo das Equações Diferenciáveis Parciais lineares ou não lineares e alguns problemas da física.

No estudo deste novo espaço $W^{m,p}$, naturalmente como qualquer outro conceito importante da matemática, surge o interesse em se generalizações, no caso, é natural se investigar estes espaços quando o índice de regularidade m deixa de ser um inteiro e passa ser um número real. Assim, estamos pensando em obter derivadas fracionárias.

Como ficou claro depois de um tempo, certos modelos importantes ligados majoritariamente a fenômenos de difusão não linear, isto é, Equações Diferenciais Parciais com algum termo do tipo p-Laplaciano, tem um apelo natural em conceitos de derivadas de ordem não inteiro.

Atualmente existem várias formas de obter este tipo de derivadas, por exemplo através dos espaços de Besov, técnicas de interpolação ou usando o potencial de Riesz, Bessel que depende da Transformada de Fourier (veja [13] e [17]).

Neste texto, a ideia é apresentar está generalização de tal forma que seja o mais conveniente e natural possível escolher os argumentos mais adequados para que seja esta uma exposição autossuficiente. Concordando com os autores do artigo [7], para conseguir que isto seja possível, é necessário definir os espaços $W^{s,p}$, com técnicas diretas, sem uso de interpolação, pois estas ferramentas são rigorosas e consequentemente não vamos obter uma exposição adequada para qualquer leitor curioso.

Claramente ao tentar apresentar estes espaços com todas as condições que pretendemos, poderíamos perder muitas características importantes destes espaços, de modo que iremos a concentrar no caso $0 < s < 1$. Assim, para o leitor mais interessado, recomendamos consultar todos os excelentes livros sobre o tema (ver [1], [17] e [13]).

Os espaços de Sobolev Fracionários, ainda que seja um tópico clássico da Análise Funcional, possuem um número impressionante de aplicações em diferentes disciplinas como em problemas da física. Por exemplo na Otimização [18], Finanças [11], Deslocamento de Cristais [2], Leis de Conservação [3], Limites Ultra-relativistas da Mecânica Quântica [10], Superfícies Mínimas [5], Problemas não Elípticos [8], Teoria do Potencial de Gradiente [14], entre outros. Desse modo, por sua quantidade de aplicações, consideramos importante fazer um texto sobre os Espaços de Sobolev Fracionários, de modo que seja o mais básico e prático possível para que qualquer pessoa interessada aproveite ao máximo este conceito e suas aplicações.

Os espaços de Sobolev Fracionários são adequados para se investigar soluções de certas equações diferenciáveis parciais como por exemplo

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

o p-Laplaciano, ou a equação

$$\begin{cases} -\triangle^s u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

para o Laplaciano Fracionário. Para mais detalhes ver [15] e [6] respectivamente.

Neste texto, de acordo com [7], definimos o espaço de Sobolev Fracionário $W^{s,p}$ por meio da seminorma de Gagliardo, onde $s \in (0,1)$. Nesse sentido, dizemos que uma função $u \in L^p(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto pertence ao espaço $W^{s,p}(\Omega)$ se satisfaz $\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s+\frac{N}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega)$.

O termo dado por

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}},$$

será a seminorma de Gagliardo. Com essa definição, estudaremos algumas de suas propriedades básicas geométricas como também propriedades clássicas destes espaços.

O nosso objetivo é introduzir os resultados básicos sobre os espaços $W^{s,p}(\Omega)$, de uma forma direita. Nos concentraremos no essencial para se investigar Equações Diferencias Parciais de ordem dois, isto é, vamos tratar as imersões contínuas e compactas nas propriedades de prolongamento ou extensão, bem como na sua dependência da regularidade da fronteira $\partial\Omega$. Nossas principais inspirações foram os textos [7] e [13], onde o leitor poderá encontrar outros detalhes sobre o tema.

No Capítulo 1 apresentamos os conceitos e resultados preliminares sobre os espaços de Sobolev inteiros, Campanato, Besov e alguns teoremas que serão de muita ajuda para o que nós pretendemos neste trabalho. Este capítulo está inspirado no excelente livro de Leoni [13].

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo dos Espaços de Sobolev Fracionários $W^{s,p}$ junto com alguns resultados típicos destes espaços. Na Seção 2.2 apresentamos as propriedades que estão relacionadas com os domínios de extensão no Espaço de Sobolev Fracionário. Na seção 2.3, observaremos algumas estimativas obtidas neste espaço, estas implicaram sobre quais condições uma função de $W^{s,p}$ pertence a um espaço de L^q. Na Seção 2.4 é dedicada ao estudo das imersões compactas em $W^{s,p}$. Na seção 2.5 observaremos sobre quais condições uma função em $W^{s,p}$ é Hölder Contínua. Finalmente, na Seção 2.6 apresentamos alguns contra-exemplos com relação as imersões apresentadas neste texto.

Capítulo 1

Resultados Clássicos e Espaços de Sobolev Inteiros

O objetivo principal desta seção é apresentar os resultados que dão suporte a teoria desenvolvida no Capítulo 2.

Na Seção 1.1 começaremos definindo Distribuições da maneira tradicional para que possamos definir os Espaços Sobolev no caso inteiro. Além disso, observaremos algumas propriedades clássicas destes espaços, como Domínios e Operadores de Extensão em $W^{1,p}$, com suas respectivas provas. Porém, no texto não entraremos em detalhes de outras propriedades clássicas destes espaços, tais como imersões contínuas, compactas, regularidade, desigualdades, entre outras. Para mais informação, consultar o livro de Leoni [13].

Na Seção 1.2, mostraremos alguns tópicos importantes que serão de muita ajuda no texto, tais como os Espaços de Campanato 1.2.2 e Besov 1.2.5. Para concluir com esta seção, mencionaremos alguns teoremas que serão fundamentais para as demostrações que serão apresentadas no Capítulo 2.

1.1 Espaços de Sobolev Inteiros

No que segue, consideraremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto não vazio. Começamos esta seção definindo o Espaço das Distribuições em Ω de forma breve para assim podermos definir os Espaços de Sobolev.

Definição 1.1.1 *Considere* $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$. *Dizemos que:*

(a) $\phi_n \longrightarrow 0$ *se satisfaz que:*

(i) Existe um compacto $K \subset \Omega$ *tal que supp(*ϕ_n*)* $\subset K$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$, *temos* $D^\alpha \phi_n \longrightarrow 0$, *uniformemente em* K.

(b) Dizemos que $\phi_n \longrightarrow \phi$ *desde que* $(\phi_n - \phi) \longrightarrow 0$.

O Espaço das funções em $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção da convergência definida acima é chamado de Espaço das Funções Teste, denotado por $D(\Omega)$.

Definição 1.1.2 *Dizemos que* $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma distribuição sempre que:*

(a) T *é um operador linear;*

(b) T *é contínuo no zero em* $D(\Omega)$, *isto é, se* $\phi_n \longrightarrow 0$ *em* $D(\Omega)$, *então* $T(\phi_n) \longrightarrow 0$.

O conjunto de todas as distribuições definidas sobre Ω é denotado por $D'(\Omega)$.

Exemplo 1.1.3 *Seja* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função em* $L^1_{loc}(\Omega)$. *Defina* $T_u : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, *por*

$$T_u(\phi) := \int_\Omega u(x)\phi(x)dx,$$

para toda $\phi \in D(\Omega)$. *Então,* T_u *é uma Distribuição.*

Para provar isso, veja que T_u *é um operador linear pela linearidade da integral. Agora, se* $\{\phi_n\} \subset D(\Omega)$ *é tal que* $\phi_n \longrightarrow 0$, *em* $D(\Omega)$ *então, existe um compacto* $K \subseteq \Omega$ *tal que supp(*ϕ_n*)* $\subseteq K$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $D^\alpha \phi_n \longrightarrow 0$, *uniformemente em* K, *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^N$. *Desse modo, note que*

$$|T_u(\phi_n)| = \left| \int_\Omega u(x)\phi_n(x)dx \right| \leq \int_K |u(x)|\,|\phi_n(x)|\,dx \leq \sup_{x\in K} |\phi_n(x)| \int_K |u(x)|\,dx.$$

Provando dessa forma que $T_u(\phi_n) \longrightarrow 0$, *pois em particular para o multi-índice* $\alpha = 0 \in \mathbb{N}^N$ *temos que* $D^0\phi_n = \phi_n \longrightarrow 0$, *uniformemente em* K.

Observe que se u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $T_u(\phi) = T_v(\phi)$ para toda $\phi \in D(\Omega)$, então

$$\int_\Omega (u(x) - v(x))\phi(x)dx = 0,$$

para toda $\phi \in D(\Omega)$. Logo, pelo Corolário 4.2.2 do livro de Brezis [4], obtemos que $u = v$ q.t.p. em Ω. Assim, para uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ identificarmos a distribuição T_u como u e dizemos que a distribuição u está em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Exemplo 1.1.4 *Considere $x_0 \in \Omega$. Definimos $\delta_{x_0} : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, como sendo*

$$\delta_{x_0}(\phi) := \phi(x_0), \text{ para toda } \phi \in D(\Omega).$$

Então, δ_{x_0} é uma Distribuição chamada Delta de Dirac.

Claramente δ_{x_0} é um operador linear. Por outro lado, se $\phi_n \longrightarrow 0$ em $D(\Omega)$, então observe que

$$|\delta_{x_0}(\phi_n)| = |\phi_n(x_0)| \leq \sup_{x \in K} |\phi_n(x)|,$$

onde K é dado pela Definição 1.1.1. Dessa forma obtemos que $\delta_{x_0}(\phi_n) \longrightarrow 0$, pois novamente pela Definição 1.1.1, em (ii) sabemos que $D^0\phi_n = \phi_n \longrightarrow 0$ uniformemente em K.

Podemos provar que nem sempre uma Distribuição $T \in D'(\Omega)$ é dada por uma função em $L^1_{loc}(\Omega)$ definida como no Exemplo 1.1.3. De fato, a Distribuição Delta Dirac δ_{x_0} dada em 1.1.4 é um contra exemplo. Para provar isso, suponha por contradição que exista $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que para toda $\phi \in D(\Omega)$,

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0) = T_u(\phi) = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx. \tag{1.1}$$

Em particular, veja que dado $\phi \in D(\Omega)$, tomando $\psi(x) = \phi(x) \|x - x_0\|^2$ temos que $\psi \in D(\Omega)$ e por (1.1) obtemos que

$$\int_\Omega u(x)\psi(x)dx = \int_\Omega u(x)\phi(x) \|x - x_0\|^2 dx = \psi(x_0) = 0,$$

Logo obtemos que $u = 0$ q.t.p. em Ω (novamente pelo Corolário 4.2.4) o que implica em $\delta_{x_0} = 0$. Dessa forma, $\phi(x_0) = 0$ para toda $\phi \in D(\Omega)$ o qual é absurdo.

Este fato motiva a definição dos espaços de Sobolev. Mas para isso, precisamos de mais uma definição.

Definição 1.1.5 *Considere $T \in D'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Define-se a Derivada de ordem α de T por*

$$D^\alpha T(\phi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \text{ para toda } \phi \in D(\Omega).$$

Observe que de acordo com a Definição 1.1.5, podemos provar que a Derivada da Distribuição é de fato uma Distribuição.

Usando o conceito de Distribuição e de Derivada Distribucional, estamos prontos para definir os Espaços de Sobolev.

Definição 1.1.6 *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e seja $1 \leq p \leq +\infty$. O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que sua primeira Derivada da Distribuição pertence a L^p. Isto é, para cada $j = 1, \ldots, N$ existe uma função $g_j \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega g_j \phi dx,$$

para toda $\phi \in D(\Omega)$. A função g_j é chamada de Derivada Fraca Distribucional de u com respeito a x_j e é denotada por $\frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Em termos das Distribuições, a Definição 1.1.6 nos diz que $\frac{\partial T_u}{\partial x_j} = T_{g_j}$ para todo $j = 1, \ldots, N$.

Proposição 1.1.7 *O Espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é de Banach, munido das normas*

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^p_{L^p(\Omega)},$$

para $1 \leq p < \infty$ e

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \max \left\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, \ldots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\},$$

para $p = \infty$.

Demonstração: Ver Leoni [13] página 280. ■

O próximo resultado garante sobre quais condições uma função pertence ao Espaço de Sobolev. Este resultado será usado na Seção 2.6.

Proposição 1.1.8 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado,* $x_0 \in \Omega$ *e* $1 \leq p < \infty$. *Se* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \setminus \{x_0\}$ *é tal que o gradiente* ∇u *está em* $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *no sentido tradicional, então* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Ver Leoni [13] Exercício 10.4. Página 280. ■

Definição 1.1.9 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto. Dizemos que uma função* $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *é Hölder contínua com expoente* $\alpha > 0$, *se existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$|F(x) - F(y)| \leq C\,|x - y|^{\alpha},$$

para todo $x, y \in \Omega$. *Definimos* $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *como sendo o espaço de todas as funções limitadas que são Hölder contínuas com expoente* α.

No caso $0 < \alpha \leq 1$, o conjunto $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um Espaço de Banach com a norma dada por

$$\|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} |F(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|^{\alpha}}.$$

Um dos pontos que norteiam vários resultados em Espaços de Sobolev, em geral, é a questão da regularidade da fronteira. Para deixar claro, que tipo de regularidade vamos usar e para conveniência do leitor, mostraremos a definição de fronteira regular abaixo.

Definição 1.1.10 *A fronteira* $\partial\Omega$ *é dita localmente Lipschitz, se para cada* $x_0 \in \partial\Omega$, *existem uma vizinhança* A *de* x_0 *com coordenada local* $y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$, *onde* $y = 0$ *sobre* $x = x_0$, *uma função Lipschitz* $f : \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e um* $r > 0$ *tais que*

$$\Omega \cap A = \{(y', y_N) \in \Omega \cap A :\ y' \in Q_{N-1}(0, r),\ y_N > f(y')\}. \tag{1.2}$$

A fronteira $\partial\Omega$ é dita Uniformemente Lipschitz se existem ε, $L > 0$, $M \in \mathbb{N}$ e uma cobertura finita contável de abertos $\{\Omega_n\}$ de $\partial\Omega$ tais que

(i) $x \in \partial\Omega$, então $B(x, \varepsilon) \subset \Omega_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$;

(ii) Nenhum ponto do $\mathbb{R}^N$ está contido em mais do que M dos conjuntos Ω_n's;

(iii) Para cada n, existem uma coordenada local $y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ e uma função de Lipschitz $f : \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $Lip(f) \leq L$, tal que

$$\Omega_n \cap \Omega = \Omega_n \cap \left\{(y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : \ y_N > f(y')\right\}.$$

Graças à Definição 1.1.9 podemos mostrar que existe outra forma equivalente para definir Fronteira Uniformemente Lipschitz. De fato, a Definição 1.1.10 é equivalente a dizer que Ω é de classe $C^{0,1}$ no seguinte sentido: Existe $M > 0$ tal que para cada $x_0 \in \partial\Omega$, existe uma bola $B = B_r(x_0)$, $r > 0$ e um isomorfismo $T : Q \longrightarrow B$, tais que

(i) $T \in C^{0,1}(\overline{Q})$ e $T^{-1} \in C^{0,1}(\overline{B})$;

(ii) $T(Q_+) = B \cap \Omega$ e $T(Q_0) = B \cap \partial\Omega$;

(iii) $\|T\|_{C^{0,1}(\overline{Q})} + \|T^{-1}\|_{C^{0,1}(\overline{B})} \leq M$,

onde

$Q := \left\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |x'| < 1 \text{ e } |x_N| < 1\right\}$;

$Q_+ := \left\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |x'| < 1 \text{ e } 0 < x_N < 1\right\}$ e

$Q_0 := \{x \in Q : x_N = 0\}$.

As seguintes duas subseções tratarão das propriedades dos Espaços de Sobolev inteiros para Domínios de Extensão e Prolongamento. As outras propriedades clássicas de estes espaços, tais como imersões contínuas ou compactas, densidade, regularidade e desigualdades, podem ser consultadas no livro de Leoni [13].

1.1.1 Domínios de Extensão em $W^{1,p}(\Omega)$

O objetivo desta subseção é mostrar as principais propriedades obtidas nos Espaços de Sobolev inteiros para Domínios de Extensão, com suas respectivas provas obtidas de [13].

Definição 1.1.11 *Seja $1 \leq p < \infty$. Dizemos que Ω é um Domínio de Extensão para $W^{1,p}(\Omega)$ se existe um operador linear e contínuo*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

com a propriedade que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $P(u)(x) = u(x)$ q.t.p. em Ω.

Com a Definição 1.1.11 podemos provar muitas imersões nos espaços $W^{1,p}(\Omega)$, as quais vão depender se $1 \leq p < N$, $p = N$ ou $p > N$. Neste texto, por simplicidade de exposição, somente vamos fazer as imersões no caso $1 \leq p < N$.

Proposição 1.1.12 *Sejam $1 \leq p < N$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um Domínio de Extensão para o Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Então, existe uma constante $C = C(p, N, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

para todo $p \leq q \leq \frac{Np}{N-p}$ e todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Desde que Ω é um Domínio de Extensão para $W^{1,p}(\Omega)$, então pela continuidade de P existe uma constante $C_1 = C_1(p, N, \Omega) > 0$ tal que

$$\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \tag{1.3}$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Por outro lado, sabemos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $p \leq q \leq \frac{Np}{N-p}$ (por [13] ver página 312). Assim, desde que $P(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\|P(u)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \tag{1.4}$$

para alguma $C_2 = C_2(p, N) > 0$. Agora, usando o fato que $P(u)(x) = u(x)$, q.t.p. em

Ω e juntando 1.3 com 1.4, temos

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|P(u)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq C_2 \|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C_2C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &= C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},\end{aligned}$$

como queríamos. ∎

O seguinte resultado garante que o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está compactamente imerso no espaço $L^q(\Omega)$, para qualquer $q \in [1, p^*)$, onde $p^* := \frac{Np}{N-p}$, o qual é chamado expoente crítico de Sobolev. Mas para esta imersão, obrigatoriamente devemos ter $1 \leq p < N$ e que Ω seja um Domínio de Extensão.

Teorema 1.1.13 *Sejam $1 \leq p < N$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um Domínio de Extensão para $W^{1,p}(\Omega)$ com medida finita. Seja $\{u_n\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada. Então, existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ e uma função $u \in L^{p^*}(\Omega)$ tal que $u_{n_k} \longrightarrow u$, em $L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < p^*$.*

Para demostrar o Teorema 1.1.13, precisamos dos seguintes resultados auxiliares.

Lema 1.1.14 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Então para todo $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ obtemos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+h) - u(x)|^p \, dx \leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p \, dx. \tag{1.5}$$

Demonstração: Ver Leoni [13], página 320. ∎

Lema 1.1.15 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ considere o molificador usual dado por*

$$\varphi_k(x) := k^N \varphi(kx),$$

onde $x \in \mathbb{R}^N$ e φ está definido em [13](ver pág. 553). Então, existe uma constante

$C = C(p, N) > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u * \varphi_k(x) - u(x)|^p \, dx \leq \frac{C}{k^p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p \, dx. \tag{1.6}$$

Demonstração: Ver Leoni [13], página 321. ■

Com os dois lemas acima, estamos prontos para a demonstração do teorema.

Demonstração do Teorema 1.1.13: Desde que Ω é um Domínio de Extensão do espaço $W^{1,p}(\Omega)$, podemos estender cada u_n para uma função em $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que esta sequência agora vai ser limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Logo, desde que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in [p, p^*]$ (ver [13], pág. 312), então em particular temos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Agora, desde que $1 < p^* < \infty$, pela reflexibilidade do espaço L^{p^*}, temos que existe uma subsequência u_{n_k} de u_n tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Afirmamos que $u_{n_k} \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$.

De fato, por simplicidade, para cada $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, denotamos $v^k := v * \varphi_k$. Sendo assim, desde que $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e pelo Lema 1.1.15 note que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^k - u_n\right|^p dx \leq \frac{C}{k^p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \, dx \leq \frac{C}{k^p}.$$

O que implica em

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^k - u_n\right|^p dx = 0. \tag{1.7}$$

Agora, pela Desigualdade de Minkowski, obtemos

$$\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\|u_n^k - u_n\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|u_n^k - u^k\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|u^k - u\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Fixe um $\varepsilon > 0$. Note que usando o Teorema 1.2.7 e a igualdade obtida em (1.7), obtemos que existe um $\overline{k} = \overline{k}(\varepsilon)$ tal que para todo $k \geq \overline{k}$ e $n \in \mathbb{N}$ o primeiro e terceiro termos da desigualdade acima são limitados por ε. Assim, segue-se que

$$\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\|u_n^k - u^k\right\|_{L^p(\Omega)} + 2\varepsilon,$$

para todo $k \geq \overline{k}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Sendo assim, observe que para completar a demonstração da afirmação, é suficiente provar que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| u_n^k - u^k \right\|_{L^p(\Omega)} = 0. \tag{1.8}$$

Para isso, veja que sendo $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, segue-se que para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$u_n^{\overline{k}} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_{\overline{k}}(x-y) u_n(y) dy \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_{\overline{k}}(x-y) u(y) dy = u^{\overline{k}},$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Porém, veja que usando a Desigualdade de Hölder, o fato que $supp(\varphi_{\overline{k}}) \subset \overline{B(0,1/\overline{k})}$ e que a integral de $\varphi_{\overline{k}}$ sobre $\mathbb{R}^N$ é igual a um, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left| u_n^{\overline{k}} - u^{\overline{k}} \right|^p &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_{\overline{k}}(x-y) \left| u_n(x) - u(y) \right|^p dy \\
&\leq C(N) \overline{k}^N \int_{B(0,1/\overline{k})} \left| u_n(x+h) - u(x+h) \right|^p dh \\
&\leq C \overline{k}^N,
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $n \in \mathbb{N}$. Desde que Ω possui medida finita, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 1.2.10 e assim obter (1.8). Portanto, segue a afirmação, isto é, $u_n \longrightarrow u$, em $L^p(\Omega)$. Desde que $\{u_{n_k}\}$ é limitada em L^{p^*}, pelo Teorema da Convergência de Vitali 1.2.11 obtemos que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*)$. ■

1.1.2 Prolongamentos em $W^{1,p}(\Omega)$

Nesta subseção mostraremos sobre quais condições um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ pode ser um Domínio de Extensão para $W^{1,p}(\Omega)$, pois é bem sabido que em geral, nem todo aberto do $\mathbb{R}^N$ satisfaz esta propriedade.

Definição 1.1.16 *Seja $E \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz contínua se*

$$Lip(E, f) := \sup_{x,y \in E \ ,x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} < \infty.$$

O próximo resultado mostra uma classe de subconjuntos em $\mathbb{R}^N$ se comportam como Domínios de Extensão.

Proposição 1.1.17 *Seja $f : \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz e considere*

$$\Omega := \left\{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : \; x_N > f(x')\right\}. \tag{1.9}$$

Então, para todo $1 \leq p \leq \infty$ existe $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, um operador linear e contínuo, tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $P(u) = u$, q.t.p. em Ω, e além disso,

$$\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 2\,\|u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{1.10}$$

$$\|\nabla P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})} \leq (2 + Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f))\,\|\nabla P(u)\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})}. \tag{1.11}$$

Demonstração: Provaremos o caso no qual $1 \leq p < \infty$. Considere a transformação $\psi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, tal que $\psi(z', z_N) = (z', z_N + f(z'))$. Observe que ψ é invertível com inversa dada por $\psi^{-1}(x', x_N) = (x', x_N - f(x'))$. Mais ainda, veja que para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
|\psi(x) - \psi(y)| &= |(y' - z', f(y') - f(z') - z_N + y_N)| \\
&= \sqrt{|y' - z'|^2 + |f(y') - f(z') - z_N + y_N|^2} \\
&\leq \sqrt{|y' - z'|^2 + [|f(y') - f(z')| + |y_N - z_N|]^2} \\
&\leq \sqrt{|y' - z'|^2 + [(Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f))\,|y' - z'| + |y_N - z_N|]^2} \\
&\leq \sqrt{|y' - z'|^2 + 2\,(Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f))^2\,|y' - z'|^2 + |y_N - z_N|^2} \\
&\leq \sqrt{(2 + 2\,(Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f))^2)\,|y - z|^2} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{1 + (Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f))^2}\,|y - z| \\
&\leq C\,|y - z|.
\end{aligned}$$

Desse modo, ψ (e analogamente ψ^{-1}) é Lipschitz contínua. Agora, desde que f é Lipschitz, então é diferenciável q.t.p. $z' \in \mathbb{R}^{N-1}$ (veja [13], pág. 343). Assim, para qualquer $z' \in \mathbb{R}^{N-1}$ e todo $z \in \mathbb{R}$, temos

$$\nabla\psi(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial z_1}(z) & \frac{\partial\psi_1}{\partial z_2}(z) & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial z_N}(z) \\ . & . & . & . \\ : & : & : & : \\ \frac{\partial\psi_N}{\partial z_1}(z) & \frac{\partial\psi_N}{\partial z_2}(z) & \dots & \frac{\partial\psi_N}{\partial z_N}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ I_{N-1} & & & : \\ & & & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z_1}(z) & \frac{\partial f}{\partial z_2}(z) & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

o qual implica em $\det \nabla\psi(z) = 1$. Observe também que $\psi(\mathbb{R}^N_+) = \Omega$, pois se $z \in \mathbb{R}^N_+$, temos que $\psi(z) = (z', z_N + f(z'))$ e claramente $z_N + f(z') > f(z')$. Dessa forma obtemos que $\psi(z) \in \Omega$. Analogamente obtemos a reciproca.

Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e defina $w(z) := u(\psi(z)) = u(z', z_N + f(z'))$, para $z \in \mathbb{R}^N_+$.

Note que $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ e é satisfeita a Fórmula da Regra da Cadeia para as derivadas parciais (veja [13], Teorema 11.51, pág. 346). Além disso, a função dada por

$$\overline{w}(x) = \begin{cases} w(z), & se\ z_N > 0 \\ w(z', -z_N), & se\ z_N < 0, \end{cases}$$

está em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (ver [13], exercício 10.37 pág. 296) e novamente a Regra da Cadeia para as derivadas parciais é satisfeita. Sendo assim, defina $v : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \left(\overline{w}\left(\psi^{-1}(x)\right)\right) = \begin{cases} u(x), & se\ x_N > f(x') \\ u(x', 2f(x') - x_N), & se\ x_N < f(x'). \end{cases} \tag{1.12}$$

Novamente, obtemos que $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (ver [13], Teorema 11.51, pág. 346) e é satisfeita a Regra da Cadeia. Agora, como $\det \nabla\psi = \det \nabla\psi^{-1}$, então (por [13], Teorema 8.21, pág. 296) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}} |v(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}} |u(x', 2f(x') - x_N)|^p \, dx = \int_{\Omega} |u(y)|^p \, dy. \tag{1.13}$$

Mais ainda, para todo $j = 1, \dots, N$ e quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$,

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x', 2f(x') - x_N) + \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', 2f(x') - x_N)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x').$$

Assim, usando o Teorema de Mudança de Variáveis, integrando sobre $E = \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ e usando o fato que f é Lipschitz, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^p(E)} &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^p(E)} + \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x') \right| \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^p(E)} \\
&= \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^p(E)} + \left| \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x' + te_j) - f(x')}{|(x' + te_j) - x'|} \right| \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^p(E)} \\
&\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^p(E)} + Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f) \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^p(E)} \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^p(E)} + Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f) \|\nabla u\|_{L^p(E)} \\
&= \big(1 + Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f)\big) \|\nabla u\|_{L^p(E)} \\
&= \big(1 + Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f)\big) \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}} |\nabla u(x', 2f(x') - x_N)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \big(1 + Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f)\big) \left(\int_{\Omega} |\nabla u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Similarmente, desde que para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$,

$$\frac{\partial v}{\partial x_N} = -\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', 2f(x') - x_N),$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x) \right|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', 2f(x') - x_N) \right|^p dx = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(y) \right|^p dy.$$

Portanto, o operador $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $P(u) := v$, onde a função v é dada por (1.12) é um operador contínuo. Além disso, pela definição de v temos que $P(u) = u$ q.t.p. em Ω.

Por outro lado, veja que escrevendo $\mathbb{R}^N = \big(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}\big) \cup \Omega$ por (1.13), temos

$$\begin{aligned}
\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \int_{\left(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}\right) \cup \Omega} |v(x)|^p \, dx &= \int_{\Omega} |u(y)|^p \, dy + \int_{\Omega} |u(y)|^p \, dy \\
&= 2 \|u\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Analogamente, escrevendo $\mathbb{R}^N = \left(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}\right) \cup \Omega$ e por (1.14), temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})} &= \int_{\left(\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}\right)\cup\Omega} |\nabla v(y)|^p \, dy \\
&= \int_{\Omega} |\nabla v(y)|^p \, dy + \int_{\Omega} |\nabla v(y)|^p \, dy \\
&\leq \left(1 + Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f)\right) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})} \\
&= \left(2 + Lip(\mathbb{R}^{N-1}, f)\right) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})},
\end{aligned}$$

provando o que queríamos mostrar. ■

O próximo resultado, prova que todo conjunto aberto com fronteira Uniformemente Lipschitz é um Domínio de Extensão para $W^{1,p}$, onde $1 \leq p \leq \infty$. Como na prova da Proposição 1.1.17, o caso $p = \infty$ não será feito. Porém, para a prova deste resultado, precisaremos do seguinte lema.

Lema 1.1.18 *Sejam $w_n : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, +\infty]$ uma sequência de funções Lebesgue mensuráveis e seja*

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Suponha que existe um inteiro $M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^N$ no máximo M termos de $w_n(x)$ são iguais a zero. Então, para cada $1 \leq p < \infty$, temos

$$\|w\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq M^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração: Ver Leoni [13], Exercício 12.14, página 355. ■

Teorema 1.1.19 *Considere Ω Uniformemente Lipschitz e limitado. Então, para cada $1 \leq p \leq \infty$, existe $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, um operador linear e contínuo, tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $P(u) = u$, q.t.p. em Ω, satisfaz*

$$\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq (1 + 2M) \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

e além disso,

$$\|\nabla P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})} \leq C\left(1+M(1+L)\right)\times\left(\frac{1}{\varepsilon}\|u\|_{L^p(\Omega)}+\|\nabla u\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)}\right).$$

Demonstração: Provaremos o caso $1 \leq p < \infty$. Para qualquer $E \subset \mathbb{R}^N$ e $r > 0$, definimos

$$E^r := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \; B(x,r) \subset E\right\}.$$

Note que $E^r \subset E$ e sendo Ω Uniformemente Lipschitz, pela condição (i) da Definição 1.1.10, temos que $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} \Omega_n^{\varepsilon}$.

Defina a sequência de funções

$$\phi_n := \varphi_{\varepsilon/4} * \chi_{\Omega_n^{3\varepsilon/4}}, \tag{1.15}$$

onde $\varphi_{\varepsilon/4}$ é o molificador usual (ver [13], pág. 553). Então, veja que

$$supp(\phi_n) \subset supp(\varphi_{\varepsilon/4}) + supp(\chi_{\Omega_n^{3\varepsilon/4}}) = \overline{B(0,\varepsilon/4)} + \Omega_n^{3\varepsilon/4}.$$

Dessa forma, obtemos que

$$supp(\phi_n) \subset \Omega_n \;\; e \;\; \phi_n = 1 \; em \; \Omega_n^{\varepsilon/2}. \tag{1.16}$$

Por outro lado, note que $\nabla\phi_n = \nabla\varphi_{\varepsilon/4} * \chi_{\Omega_n^{3\epsilon/4}}$. Assim, para todo $x \in \Omega_n$ fazendo uma mudança de variáveis no modulo $|\nabla\psi_n(x)|$, veja que

$$\begin{aligned}|\nabla\phi_n(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\varphi_{\varepsilon/4}(x-y)\right|\left|\chi_{\Omega_n^{3\varepsilon/4}}(y)\right|dy \leq \int_{\mathbb{R}^N}&\left|\nabla\varphi_{\varepsilon/4}(x-y)\right|dy\\ \int_{\mathbb{R}^N}&\left|\nabla\varphi_{\varepsilon/4}(z)\right|\frac{\varepsilon^N}{\varepsilon^{N+1}}dz\\ \leq& \frac{C}{\varepsilon}.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Agora, considere os seguintes três conjuntos abertos

$$\Omega_0 := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \; dis(x,\Omega) < \frac{\varepsilon}{4}\right\},$$

$$\Omega_+ := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \ dis(x, \partial\Omega) < \frac{3\varepsilon}{4} \right\}, \tag{1.18}$$

$$\Omega_- := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \ dis(x, \partial\Omega) > \frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

e defina as funções

$$\phi_0 := \varphi_{\varepsilon/4} * \chi_{\Omega_0}, \quad \phi_\pm := \varphi_{\varepsilon/4} * \chi_{\Omega_\pm}. \tag{1.19}$$

Então, de (1.18) e (1.19) temos que $\phi_0 = 1$ em $\overline{\Omega}$, $\phi_+(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $dis(x, \partial\Omega) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Por outro lado, $\phi_-(x) = 1$, se $x \in \Omega$ e $dis(x, \partial\Omega) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Mais ainda, os suportes de ϕ_0, ϕ_+, e ϕ_- estão contidos, respectivamente, em uma $\frac{\varepsilon}{2}$ vizinhança de Ω, em uma ε vizinhança da $\partial\Omega$ e em Ω. Finalmente, argumentando analogamente a (1.17), obtemos que

$$\|\nabla \phi_0\|_\infty \ \text{e} \ \|\nabla \phi_\pm\|_\infty \leq \frac{C}{\varepsilon}. \tag{1.20}$$

Observe que

$$\begin{aligned} supp(\phi_0) = supp(\varphi_{\varepsilon/4} * \chi_{\Omega_0}) &\subset supp(\varphi_{\varepsilon/4}) + supp(\chi_{\Omega_0}) \\ &= \overline{B(0, \varepsilon/4)} + \Omega_0 \\ &\subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \ \phi_+(x) + \phi_-(x) \geq 1 \right\}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

e desse modo ficam bem definidas as funções

$$\psi_+ := \phi_0 \frac{\phi_+}{\phi_+ + \phi_-} \quad \text{e} \quad \psi_- := \phi_0 \frac{\phi_-}{\phi_+ + \phi_-}. \tag{1.22}$$

Sendo assim, veja que por (1.21) obtemos que as derivadas de $\psi_\pm$ são limitadas por $\frac{C}{\varepsilon}$. Além disso, note que $\psi_+ + \psi_- = 1$ em $\overline{\Omega}$ e $\psi_+ = \psi_- = 0$, fora de uma $\frac{\varepsilon}{2}$ vizinhança de Ω.

Agora temos as condições necessárias para definir o Operador Extensão. Com efeito, dada uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, por (1.16) temos que

$$supp(\phi_n u) \subset supp(\phi_n) \cap supp(u) \subset supp(\phi_n) \subset \Omega_n,$$

para cada n. Agora, pela condição (i) na Definição 1.1.10 e pela Proposição 1.1.17 aplicada para $\Omega_n \cap \Omega$, podemos estender $\phi_n u$ para uma função $v_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\phi_n u\|_{L^p(\Omega_n \cap \Omega)}, \tag{1.23}$$

$$\|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})} \leq \|\nabla \phi_n u\|_{L^p(\Omega_n \cap \Omega;\mathbb{R}^{N\times N})}.$$

Com abuso de notação, definamos o operador $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$P(u)(x) := \psi_+(x)\frac{\sum_n \phi_n(x)v_n(x)}{\sum_k \phi_k^2(x)} + \psi_-(x)u(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.24}$$

Note que se $x \in \mathbb{R}^N$ é tal que $dis(x, \partial\Omega) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, então existe um n tal que $x \in \Omega_n^{\varepsilon/2}$ e $\phi_n(x) = 1$ por (1.16). Em particular, desde que todas as funções ϕ_n são não negativas, se $x \in supp(\psi_+)$, então

$$\sum_n \phi_n(x) \geq 1. \tag{1.25}$$

Desse modo, o lado direito de (1.24) está bem definido, sendo zero quando $\psi_+ = 0$. Similarmente, desde que $supp(\psi_-) \subset supp(\phi_-) \subset \Omega$, temos que $\psi_- u$ está bem definido, valendo zero fora de Ω.

Provemos que o operador P é contínuo. De fato, pelo anterior, note que se $x \in \Omega$, então $v_n(x) = \phi_n(x)u(x)$. Logo, por 1.22 e a definição de P, obtemos

$$P(u)(x) = \psi_+(x)\frac{\sum_n \phi_n(x)\phi_n(x)u(x)}{\sum_k \phi_k^2(x)} + \psi_-(x)u(x) = \psi_+(x)u(x) + \psi_-(x)u(x) = u(x).$$

Agora, observe que pela condição (ii) da Definição 1.1.10 do Lema 1.1.18, por

(1.25), o fato que $0 \leq \psi_\pm, \phi_n \leq 1$, e finalmente por (1.23), nessa ordem, obtemos

$$\begin{aligned}
\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \left\| \psi_+ \frac{\sum_n \phi_n v_n}{\sum_k \phi_k^2} + \psi_- u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \left\| \psi_+ \frac{\sum_n \phi_n v_n}{\sum_k \phi_k^2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\psi_- u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq M^{1/p'} \left(\sum_n \int_{\Omega_n} |v_n|^p \, dx \right)^{1/p} + \|u|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq 2M^{1/p'} \left(\int_{\Omega_n} |u|^p \sum_n |\phi_n|^p \, dx \right)^{1/p} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \\
&(1+2M) \|u\|_{L^p(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Agora, para estimar $\|\nabla P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N\times N})}$, usamos o fato que os conjuntos $\{\Omega_n\}$ são localmente finitos e mais o fato que para cada ponto $x \in \mathbb{R}^N$ qualquer vizinhança limitada intersecta somente um número finito dos Ω_n's. Desse modo, obtemos que

$$\begin{aligned}
\nabla P(u) &= \nabla \psi_+ \frac{\sum_n \phi_n v_n}{\sum_k \phi_k^2} + \psi_+ \nabla \left(\frac{\sum_n \phi_n v_n}{\sum_k \phi_k^2} \right) + u \nabla \psi_- + \psi_- \nabla u \\
&= \nabla \psi_+ \frac{\sum_n \phi_n v_n}{\sum_k \phi_k^2} + \psi_+ \frac{\sum_n (v_n \nabla \phi_n + \phi_n \nabla v_n)}{\sum_k \phi_k^2} \\
&- 2\psi_- \frac{(\sum_n v_n \phi_n)(\sum_i \phi_i \nabla \phi_i)}{(\sum_k \phi_k^2)^2} + u \nabla \psi_- + \psi_- \nabla u.
\end{aligned}$$

Usando (1.23), (1.24), (1.25), a condição (ii) na Definição 1.1.10, o Lema 1.1.18, o fato que $0 \leq \phi_\pm, \psi_\pm \leq 1$, $|\nabla \phi_n| \leq \frac{C}{\varepsilon}$ e também que

$$\left| \sum_i \phi_i \nabla \phi_i \right| \leq M \frac{C}{\varepsilon}, \quad \sum_n |\phi_n|^p \leq M, \quad \sum_n |\nabla \phi_n|^p \leq M \left(\frac{C}{\varepsilon} \right)^p, \tag{1.26}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N\times N})} \leq C M^{1/p'} &\left(\sum_n \int_{\Omega_n} \frac{1}{\varepsilon^p} |v_n|^p + |\nabla v_n|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{L^p(\Omega)} \\
&+ C \|\nabla u\|_{W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^{N\times N})} .
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\|\nabla P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})} &\leq CM^{1/p'}\left(1+Lip(\mathbb{R}^{N-1},f)\right)\left(\sum_n \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^p}|\phi_n u|^p + |\nabla(\phi_n u)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &+\frac{C}{\varepsilon}\|u\|_{L^p(\Omega)} + C\|\nabla u\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})}\\ &\leq C\left(1+M(1+Lip(\mathbb{R}^{N-1},f))\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})}\right).\end{aligned}$$

Para concluir a demostração, é suficiente observar que sendo cada Ω_n localmente finito numa vizinhança para cada ponto, a soma em (1.24) é finita, por [13] (ver Teorema 10.35, página 293) e a estimativa anterior, concluímos que $P(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

1.2 Alguns Tópicos Importantes

Introduziremos uma miscelânea de resultados e definições de modo a tornar o texto autossuficiente.

1.2.1 Espaços de Campanato

Os Espaços de Campanato são espaços de Banach, definidos para estender a noção de função de oscilação limitada. Estes espaços também são usados na teoria das Equações Diferenciais Parciais.

Nesta Subseção 1.2.1 seguiremos as notas do livro de Enrico Giusti (ver [12]).

Denotamos por $Q(x,R)$ o cubo de $\mathbb{R}^N$ com lados paralelos aos planos coordenados, com centro em x e de lado $2R$, isto é,

$$Q(x,R) = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \max_{1\leq j\leq N} |x_j - y_j| < R \right\}.$$

No caso que seja suficientemente claro, denotamos simplesmente por Q_R.

Definição 1.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado , $1 \leq p \leq +\infty$ e $\lambda \geq 0$. Definimos o espaço de Morrey denotado por $L^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ como o espaço das funções $u \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)$*

tais que

$$\|u\|_{p,\lambda}^p := \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \rho > 0}} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p \, dx < +\infty, \tag{1.27}$$

onde $\Omega(x_0, \rho) = \Omega \cap Q(x_0, \rho)$.

Quando mantivermos fixado x_0, denotaremos por

$$\Omega_\rho = \Omega(x_0, \rho).$$

Por outra parte, podemos definir o valor médio de u em $\Omega \cap Q(x_0, \rho)$ como sendo

$$u_{x_0,\rho} := \frac{1}{med\,(\Omega \cap Q(x_0, \rho))} \int_{\Omega(x_0,\rho)} u(x)dx. \tag{1.28}$$

No caso em que precisemos do valor médio de u com relação a um aberto $V \subset \mathbb{R}^N$ qualquer, escreveremos simplesmente por

$$u_V := \frac{1}{med\,(V)} \int_V u(x)dx. \tag{1.29}$$

Assim, temos a seguinte definição.

Definição 1.2.2 *Definimos o espaço de Campanato denotado por* $L^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *como sendo o espaço das funções* $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *tais que*

$$[u]_{p,\lambda}^p := \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \rho > 0}} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u - u_{x_0,\rho}|^p \, dx < +\infty. \tag{1.30}$$

Para fazer uso do resultado que queremos mostrar para regularidade de Lipschitz, precisamos de mais uma definição.

Definição 1.2.3 *Dizemos que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *não tem picos externos, se existe uma constante* $C > 0$ *tal que para cada* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *e cada* $0 < \rho < diam(\Omega)$*, temos que*

$$med\,(Q(x_0, \rho))\, C \leq med\,(\Omega \cap Q(x_0, \rho))\,. \tag{1.31}$$

Observe que um conjunto aberto limitado, Lipschitz contínuo não tem nenhum pico externo ou interno. Além disso, se Ω não tem picos externos a norma dada por

$$\left(\sup_{\substack{x_0\in\Omega\\ \rho>0}} med(\Omega\cap Q(x_0,\rho))^{-\lambda/N}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|u|^p\,dx\right)^{1/p},$$

é equivalente á norma dada em 1.30. Para mostrar isso, é suficiente trocar $\rho^{-\lambda}$ por $med(\Omega\cap Q(x_0,\rho))^{-\lambda/N}$ na definição dada em 1.2.2.

O seguinte lema será o resultado principal desta seção. Este lema prova duas estimativas nos Espaços de Campanato para um $\tau>0$ dado. Este resultado será usado na Seção 2.5.

Lema 1.2.4 *Suponha que Ω não tenha picos externos, considere $u\in L^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ e defina $\tau:=\frac{\lambda-N}{Np}$. Então, Para cada $x_0\in\overline{\Omega}$ e cada ρ e R números reais tais que $0<\rho<R<diam(\Omega)$, temos que*

$$|u_{x_0,R}-u_{x_0,\rho}|\leq C[u]_{\rho,\lambda}\left[med(\Omega\cap Q(x_0,\rho))\right]^{\tau}\ \textit{sempre que}\ \ \tau<0, \tag{1.32}$$

e também temos que

$$|u_{x_0,R}-u_{x_0,\rho}|\leq C[u]_{\rho,\lambda}\left[med(\Omega\cap Q(x_0,R))\right]^{\tau}\ \textit{sempre que}\ \ \tau>0. \tag{1.33}$$

Demonstração: Considere r,t números reais tais que $\rho\leq r<t\leq R$. Note que para cada $x_0\in\overline{\Omega}$ e t fixo, temos que $\Omega_r\subseteq\Omega_t$. Além disso, veja que

$$\begin{aligned}
|u_{x_0,r}-u_{x_0,t}| &= \left|\frac{1}{med(\Omega_r)}\int_{\Omega_r}(u(x)-u_{x_0,t})\,dx\right|\\
&\leq \frac{1}{med(\Omega_r)}\int_{\Omega_r}|u(x)-u_{x_0,t}|\,dx\\
&\leq \frac{1}{med(\Omega_r)^{1/p}}\left[\int_{\Omega_r}|u(x)-u_{x_0,t}|^p\,dx\right]^{1/p}\\
&= \frac{1}{med(\Omega_r)^{1/p}}\left(\frac{med(\Omega_t)^{-\lambda/pN}}{med(\Omega_t)^{-\lambda/pN}}\right)\left[\int_{\Omega_t}|u(x)-u_{x_0,t}|^p\,dx\right]^{1/p}\\
&\leq \left(\frac{med(\Omega_t)^{\lambda/pN}}{med(\Omega_r)^{1/p}}\right)\left[\sup_{\substack{x_0\in\Omega\\ t>0}} med(\Omega_t)^{-\lambda/pN}\int_{\Omega_t}|u(x)-u_{x_0,t}|^p\,dx\right]^{1/p}\\
&= med(\Omega_t)^{\lambda/pN}med(\Omega_r)^{-1/p}[u]_{p,\lambda},
\end{aligned} \tag{1.34}$$

onde a última igualdade segue pelo fato das normas ser equivalentes.

Por outro lado, desde que Ω não tem picos externos, para cada $x_0 \in \overline{\Omega}$ e cada $0 < b < diam(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$med(Q(x_0, b))C \leq med(\Omega \cap Q(x_0, b)).$$

Em particular, note que para $0 < \frac{t}{r} < diam(\Omega)$ temos

$$med(Q(x_0, t/r))C \leq med(\Omega \cap Q(x_0, t/r)) = med(\Omega_{t/r}).$$

Isto é,

$$\left(\frac{t}{r}\right)^N Cmed(\Omega_r) \leq med(\Omega_t).$$

Em consequência disso, segue-se que

$$\left(\frac{t}{r}\right)^N Cmed(\Omega_r) \leq med(\Omega_t) \leq \left(\frac{t}{r}\right)^N C^{-1}med(\Omega_r). \tag{1.35}$$

Assim, juntando (1.34) e (1.35) obtemos que

$$\begin{aligned}
|u_{x_0,r} - u_{x_0,t}| &\leq med(\Omega_t)^{\lambda/pN} med(\Omega_r)^{-1/p}[u]_{p,\lambda} \\
&\leq \left[\left(\frac{t}{r}\right)^N C^{-1}med(\Omega_r)\right]^{\lambda/pN} med(\Omega_r)^{-1/p}[u]_{p,\lambda} \\
&= \left(\frac{t}{r}\right)^{\frac{\lambda}{p}} C^{\frac{-\lambda}{pN}} med(\Omega_r)^{\frac{\lambda-N}{Np}}[u]_{p,\lambda} \\
&= C_0\left(\frac{t}{r}\right)^{\frac{\lambda}{p}} med(\Omega_r)^{\tau}[u]_{p,\lambda}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Agora, considerando $r_j = R2^{-j}$ e definindo $\Omega_j = \Omega_{r_j}$ então, escrevendo (1.36) tomando $r = r_j$, $t = r_{j-1}$ e somando sobre j até um k, veja que

$$\begin{aligned}
\left|u_{x_0,r_j} - u_{x_0,r_{j-1}}\right| \leq C_0\left(\frac{r_{j-1}}{r_j}\right)^{\frac{\lambda}{p}} med(\Omega_j)^{\tau}[u]_{p,\lambda} &= C_0\left(\frac{R2^{-(j-1)}}{R2^{-j}}\right)^{\frac{\lambda}{p}} med(\Omega_j)^{\tau}[u]_{p,\lambda} \\
&= C_1 med(\Omega_j)^{\tau}[u]_{p,\lambda}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{k}\left|u_{x_0,r_j}-u_{x_0,r_{j-1}}\right| \leq \sum_{j=1}^{k} C_1 med(\Omega_j)^{\tau}[u]_{p,\lambda} = C_1[u]_{p,\lambda}\sum_{j=1}^{k} med(\Omega_j)^{\tau}.$$

Porém, usando somas Telescópicas e tomando $r_0 = R2^0 = R$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\left|u_{x_0,r_j}-u_{x_0,r_{j-1}}\right| &= |u_{x_0,r_k}-u_{x_0,r_0}| = |u_{x_0,r_k}-u_{x_0,R}| \\ &\leq C_1[u]_{p,\lambda}\sum_{j=1}^{k} med(\Omega_j)^{\tau}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Por outro lado, usando a mesma notação dos r_j e Ω_{r_j} em (1.35) veja que para todo $j = 1, 2, \ \dots \ , k$, temos

$$2^N C med(\Omega_j) \leq med(\Omega_{j-1}) \leq 2^N C^{-1} med(\Omega_j). \tag{1.38}$$

Daí, note que sendo

$$2^N C med(\Omega_j) \leq med(\Omega_{j-1}),$$

temos que

$$med(\Omega_j) \leq \frac{1}{2^N C} med(\Omega_{j-1}).$$

Logo, desde que o resultado é satisfeito para todo $j = 1, 2, \ \dots \ , k$, então segue-se que

$$med(\Omega_{j-1}) \leq \frac{1}{2^N C} med(\Omega_{j-2}),$$

Em consequência, temos que

$$\begin{aligned} med(\Omega_j) \leq \left(\frac{1}{2^N C}\right)\left(\frac{1}{2^N C}\right) med(\Omega_{j-2}) &= \left(\frac{1}{2^{2N} C^2}\right) med(\Omega_{j-2}) \\ &\leq \left(\frac{1}{2^{2N} C}\right) med(\Omega_{j-2}). \end{aligned}$$

Novamente desde que (1.38) é satisfeita para cada $j = 1, 2, \ ... \ , k$, segue-se

$$med(\Omega_{j-2}) \leq \frac{1}{2^N C} med(\Omega_{j-3}).$$

Logo,

$$med(\Omega_j) \leq \frac{1}{2^{3N} C} med(\Omega_{j-3}).$$

Assim, repetindo o mesmo argumento, obtemos finalmente que

$$med(\Omega_j) \leq \frac{1}{2^{jN} C} med(\Omega_R). \tag{1.39}$$

Porém, note que usando a desigualdade $med(\Omega_{j-1}) \leq 2^N C^{-1} med(\Omega_j)$ dada por (1.38), e repetindo o mesmo argumento de (1.39) obtemos que

$$2^{k-j} C med(\Omega_k) \leq med(\Omega_j). \tag{1.40}$$

Logo, juntando (1.39) e (1.40) obtemos que

$$2^{k-j} C med(\Omega_k) \leq med(\Omega_j) \leq 2^{-jN} C^{-1} med(\Omega_R). \tag{1.41}$$

Assim, lembrando a estimativa dada em (1.37) e a desigualdade obtida em (1.41), obtemos duas situações diferentes para os valores de τ. De fato, observe que se $\tau < 0$, por (1.41),

$$\begin{aligned} |u_{x_0,r_k} - u_{x_0,R}| &\leq C_1 [u]_{p,\lambda} \sum_{j=1}^{k} med(\Omega_j)^\tau \leq C_1 [u]_{p,\lambda} \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} C med(\Omega_k)^\tau \\ &\leq C_1 [u]_{p,\lambda} med(\Omega_k)^\tau. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Agora, se $\tau > 0$, novamente por (1.41), temos

$$\begin{aligned} |u_{x_0,r_k} - u_{x_0,R}| &\leq C_1 [u]_{p,\lambda} \sum_{j=1}^{k} med(\Omega_j)^\tau \leq C_1 [u]_{p,\lambda} \sum_{j=1}^{k} \left(2^{-jN} C^{-1} med(\Omega_R)\right)^\tau \\ &\leq C_1 [u]_{p,\lambda} med(\Omega_R)^\tau. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Finalmente, tomando um k de tal forma que $r_k \leq \rho \leq r_{k-1} < r_0 = R$, por (1.36), e pelas desigualdades obtidas em (1.42) e (1.43) temos que

$$|u_{x_0,r_k} - u_{x_0,\rho}| \leq C_1[u]_{p,\lambda} med(\Omega_k)^\tau, \quad \text{sempre que} \quad \tau < 0,$$

e também que,

$$|u_{x_0,r_k} - u_{x_0,\rho}| \leq C_1[u]_{p,\lambda} med(\Omega_\rho)^\tau, \quad \text{sempre que} \quad \tau > 0.$$

Sendo assim, veja que usando a desigualdade triangular da seguinte forma

$$|u_{x_0,R} - u_{x_0,\rho}| \leq |u_{x_0,R} - u_{x_0,r_k}| + |u_{x_0,r_k} - u_{x_0,\rho}|\,,$$

e mais o fato de que $r_k \leq \rho \leq r_{k-1} < r_0 = R$, que implicam que as estimativas obtidas anteriormente para as diferenças dos módulos de cada valor médio de u com relação a ρ, r_k e R são satisfeitas, obtemos o resultado. ■

1.2.2 Espaços de Besov

Em Matemática, os Espaços de Besov, os quais foram chamados dessa forma pelo matemático russo Oleg Vladimirovich Besov, são espaços de Banach os quais fornecem muitas propriedades interessantes. Particularmente, estes espaços são usados para generalizar os espaços das funções de Sobolev e para o estudo da regularidade de soluções de Equações Diferencias Parciais.

O Espaço de Besov é um subespaço de L^1_{loc} que depende de três variáveis. A saber, $1 \leq p$, $\theta \leq +\infty$ e $0 < s < 1$. Ressaltemos que o índice p corresponde a integrabilidade das funções, s de diferenciabilidade e θ é um índice de interpolação. No caso em que $\theta = p$ observaremos que a norma dada no espaço de Besov (ver 1.2.5 pág. 36) é equivalente à norma do Espaço de Sobolev Fracionário que definiremos no Capítulo 2.

Neste texto, não entraremos em detalhes com relação as propriedades destes espaços. Para o leitor mais interessado, recomendamos consultar [13] ou [17].

Dada uma função $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, para cada $h \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ ... N$ e $x \in \mathbb{R}^N$ definimos

$$\triangle_i^h u(x) := u(x + he_i) - u(x) = u(x_i', x_i + h) - u(x_i', x_i), \tag{1.44}$$

onde e_i é o vetor $i - esimo$ da base canônica de $\mathbb{R}^N$. Se $N = 1$, então escreveremos $\triangle^h u = \triangle_i^h u$.

Definição 1.2.5 *Sejam $1 \leq p,\ \theta \leq +\infty$ e $0 < s < 1$. Uma função $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ pertence ao espaço de Besov, denotado por $B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$ se*

$$\|u\|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} := \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + [u]_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} < \ \infty, \tag{1.45}$$

onde

$$[u]_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} := \sum_{i=1}^N \left(\int_0^\infty \left\| \triangle_i^h u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^\theta \frac{dh}{h^{1+s\theta}} \right)^{1/\theta}, \tag{1.46}$$

se $\theta < \infty$. Para $\theta = +\infty$, definimos

$$[u]_{B^{s,p,\infty}(\mathbb{R}^N)} := \sum_{i=1}^N \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \left\| \triangle_i^h u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.47}$$

Quando $\theta = p$, escreveremos

$$B^{s,p}(\mathbb{R}^N) := B^{s,p,p}(\mathbb{R}^N).$$

O próximo resultado, o qual enunciaremos para conveniência do leitor, será usado para mostrar que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso nos Espaços de Sobolev Fracionários. Isto será feito na Seção 2.2.

Proposição 1.2.6 *Sejam $0 < s < 1$, $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq \theta < \infty$. Então, o Espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Ver [13], página 417. ■

1.2.3 Teoremas Básicos

Nesta subseção, apresentamos alguns dos teoremas que consideramos mais importantes para abordar o capítulo principal deste texto, teoremas que serão citados no texto com muita frequência. Nosso intuito, mais uma vez é o de facilitar a leitor do texto incluindo todos os pré-requisitos básicos na presente dissertação.

O primeiro teorema é um resultado que implica a convergência de funções testes dadas no Capítulo 1.

Teorema 1.2.7 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto e $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ uma função não negativa, tal que supp$(\varphi) \subseteq B(0,1)$ e a integral de φ sobre $\mathbb{R}^N$ é igual a um. Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, temos*

(i) Se $u \in C(\Omega)$, então $u_\varepsilon \longrightarrow u$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω, onde u_ε é o molificador usual de u;

(ii) Para cada $x \in \Omega$, $u_\varepsilon(x) \longrightarrow u(x)$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$;

(iii) Se $1 \leq p \leq +\infty$, então para todo $\varepsilon > 0$,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

e também que,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \longrightarrow \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, onde $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : dis(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

(iv) Se $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, então

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon - u|^p \, dx \right)^{1/p} = 0.$$

Demonstração: Ver [13], página 553. ■

O próximo resultado é a desigualdade de Jensen. Esta importante ferramenta para estimar integrais será usada com frequência ao longo do texto, especialmente na Seção 2.1.

Teorema 1.2.8 (Desigualdade de Jensen) *Seja V um espaço de Banach e considere $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em alguma vizinhança de um ponto em V. Então, f é convexa se, e somente se, para cada espaço de medida (X, M, μ), onde X tem pelo menos dois pontos diferentes e $\mu(X) = 1$ e para cada função $g \in L^1((X, M, \mu); V)$, temos*

$$f\left(\int_X g d\mu\right) \leq \int_X f \circ g d\mu. \tag{1.48}$$

Demonstração: Ver [13] pág. 518. ■

O seguinte teorema é bem conhecido pelos especialistas na teoria de integração.

Teorema 1.2.9 (Lema de Fatou) *Seja (X, M, μ) um espaço de medida.*

(i) Se $u_n : X \longrightarrow [0, \infty)$ é uma sequência de funções mensuráveis, então

$$\int_X \liminf_{n \longrightarrow \infty} u_n d\mu \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \int_X u_n d\mu;$$

(ii) Se $u_n : X \longrightarrow [0, \infty)$ é uma sequência de funções mensuráveis tais que $u_n \leq v$, para alguma função mensurável $v : X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que $\int_X v d\mu < \infty$, então

$$\int_X \limsup_{n \longrightarrow \infty} u_n d\mu \geq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \int_X u_n d\mu.$$

Demonstração: ver [13] pág. 516. ■

O próximo teorema é um dos resultados mais importantes na teoria de integração, deixado como legado pelo Matemático Henri Lebesgue em sua teoria de integração.

Teorema 1.2.10 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (X, M, μ) um espaço de medida e $u_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x) = u(x),$$

μ-q.t.p. $x \in X$. Se existe uma função integrável g tal que

$$|u(x)| \leq g(x),$$

μ-q.t.p. $x \in X$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, então u é Lebesgue integrável e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_X u_n d\mu = \int_X u d\mu. \tag{1.49}$$

Demonstração: Ver [13] pág. 518. ■

O seguinte teorema é novamente um resultado de convergência e geralmente é aplicado como alternativa ao Teorema 1.2.10.

Teorema 1.2.11 (Teorema da Convergência de Vitali) *Seja (X, M, μ) um espaço de medida, $1 \leq p < \infty$ e $u_n, u \in L^p(X)$. Então, $u_n \longrightarrow u$, em $L^p(X)$, se e somente, se*

(i) Existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ e uma função integrável tais que $\{u_{n_k}\}$ converge para v uniformemente q.t.p em X e $|u_{n_k}(x)|^p \leq v(x)$ q.t.p $x \in X$ e todo $k \in \mathbb{N}$;

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |u|^p \, d\mu \leq \varepsilon,$$

para cada $E \subset X$ com $\mu(E) \leq \delta$;

(iii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $E \subset X$ com $E \in M$ tal que $\mu(E) < \infty$ e

$$\int_{X \setminus E} |u_n| \, d\mu \leq \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [13], página 535. ■

O próximo resultado é conhecido como o Teorema da Diferenciação de Lebesgue e generaliza uma consequência básica do Teorema Fundamental do Cálculo. Este resultado será usado na Seção 2.5 onde provaremos a Regularidade de Hölder nos Espaços de Sobolev Fracionários.

Teorema 1.2.12 (Teorema da Diferenciação de Lebesgue) *Seja $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow [0, \infty)$ uma medida de Radon e seja $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente integrável. Então, existe um conjunto de Borel $M \subset \mathbb{R}^N$, com $\mu(M) = 0$, tal que $\mathbb{R}^N \setminus M \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ u(x) \in \mathbb{R}\right\}$ e para cada $x \in \mathbb{R}^N \setminus M$,*

$$\lim_{r \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\mu\left(\overline{B(x,r)}\right)} \int_{\overline{B(x,r)}} |u(x) - u(y)| \, d\mu(y) = 0.$$

Demonstração: ver [13] pág. 540. ■

O último teorema desta seção é talvez o resultado mais usado neste texto, especialmente é usado na Seção 2.1. Este é uma espécie de versão curvilínea do Teorema de Fubini.

Teorema 1.2.13 (Fórmula de Coárea) *Seja $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua e suponha que para quase todo $r \in \mathbb{R}$ o conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = r\right\}$ seja um hiperplano $(N-1)$ dimensional, suave em $\mathbb{R}^N$. Se $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e integrável, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \, |Du| \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\{u(x)=r\}} f dS \right) dr.$$

Demonstração: ver Evans [9], página 629. ■

Capítulo 2

Espaços de Sobolev Fracionários

Inicialmente, define-se os espaços de Sobolev Fracionários como sendo um subespaço de L^p, onde como no caso inteiro, este novo espaço vai depender de duas variáveis. A saber $1 \leq p < \infty$ e $0 < s < 1$. Em seguida, mostraremos que este espaço é normado e desse modo observaremos algumas propriedades geométricas, como por exemplo a densidade, reflexibilidade, separabilidade, entre outras. Tudo isto será feito na Seção 2.1.

Na Seção 2.2 apresentamos os resultados que estão relacionados com os Domínios de Extensão nos Espaços de Sobolev Fracionários. Mostraremos que como no caso inteiro, o aberto deve ser regular para que existam os operadores de extensões.

Na Seção 2.3, observaremos algumas estimativas obtidas neste espaço. Estas, implicarão sobre quais condições uma função do espaço de Sobolev Fracionário pertence a outro espaço de L^q.

Na Seção 2.4 mostramos sobre quais condições as imersões apresentadas na Seção 2.3 são compactas.

Finalmente, na Seção 2.5 mostraremos as condições para que uma função no espaço de Sobolev Fracionário seja Hölder contínua e na seção 2.6 apresentamos alguns contra exemplos para mostrar o papel da regularidade dos domínios nas imersões apresentadas neste texto.

2.1 Propriedades Básicas

Definição 2.1.1 *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto. Dizemos que uma função $u \in L^p(\Omega)$ pertence ao* ***espaço de Sobolev Fracionário*** *denotado por $W^{s,p}(\Omega)$ se satisfaz que $\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega)$.*

Por outro lado, definindo o termo

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1}$$

o qual é chamado de **Seminorma de Gagliardo de** u, podemos mostrar que o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma dada por:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

A saber, o primeiro teorema desta seção prova que $W^{s,p}$ é Banach com a norma dada em (2.2).

Teorema 2.1.2 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto, $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$. Então, o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é de Banach com a norma dada em (2.2).*

Demonstração: Inicialmente, vejamos que (2.2) é uma norma. De fato, note que $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)} \geq 0$, pois sabemos que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} \geq 0$ desde que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é a norma de L^p. Além disso, como $\dfrac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \geq 0$, então isto implica em que a seminorma de Gagliardo (2.1) é maior ou igual a zero. Analogamente, usando o fato que $\|\cdot\|_{L^p}$ é a norma do espaço L^p mostramos que $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$ se, e somente se, $u = 0$ pois observe que se $\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$, então a soma em (2.2) é igual a zero. Logo, sendo cada termo não negativo, pelo mostrado anteriormente, isto implica que cada uns deles é zero. Assim, como $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é a norma de L^p, segue que $u = 0$. Reciprocamente, se $u = 0$, então $|u(x)-u(y)|^p = 0$ e dessa forma a seminorma de Gagliardo (2.1) é zero. Claramente, a norma de L^p é zero se $u = 0$. Logo, (2.2) é zero.

Para mostrar que $\|tu\|_{W^{s,p}(\Omega)} = |t| \, \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, veja que

$$\|tu\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \|tu\|^p_{L^p(\Omega)} + [tu]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = |t|^p \, \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [tu]^p_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Mas,

$$[tu]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|tu(x) - tu(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = |t|^p \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy$$
$$= |t|^p \, [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|tu\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \|tu\|^p_{L^p(\Omega)} + [tu]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= |t|^p \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + |t|^p \, [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \\
&= |t|^p \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \right) \\
&= |t|^p \|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Resta mostrar que $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ satisfaz a Desigualdade Triangular para concluir que (2.2), é norma. Isto é, para qualquer $u, v \in W^{s,p}(\Omega)$, temos

$$\|u + v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)} .$$

Note que sendo L^p, com $1 \leq p \leq +\infty$ um espaço normado, então em particular L^p satisfaz a desigualdade triangular. Agora, como 2.2 é uma soma entre a norma de L^p e a seminorma de Gagliardo, então é suficiente mostrar que a seminorma de Gagliardo satisfaz a Desigualdade Triangular.

Para provar que a seminorma de Gagliardo satisfaz a Desigualdade Triangular, considere $U(x,y) := \dfrac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N/p+s}}$ e $V(x,y) := \dfrac{v(x) - v(y)}{|x-y|^{N/p+s}}$. Então, note que

$$\begin{aligned}
[u+v]_{W^{s,p}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|(u+v)(x) - (u+v)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_\Omega \int_\Omega \left| \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N/p+s}} + \frac{v(x) - v(y)}{|x-y|^{N/p+s}} \right|^p dxdy \right)^{1/p} \\
&= \|U + V\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} \\
&\leq \|U\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} + \|V\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} .
\end{aligned}$$

Mas, note que

$$\|U\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} = \left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)^{1/p} = [u]_{W^{s,p}(\Omega)},$$

e também que

$$\|V\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} = \left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)^{1/p} = [v]_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Portanto, segue que $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço normado com a norma dada em (2.2).

Agora, mostremos que $W^{s,p}(\Omega)$ é Banach. Consideremos uma sequência de Cauchy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $W^{s,p}(\Omega)$. Então, note que pela Definição 2.1.1 em particular, temos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. De igual forma, definindo a sequência $v_n(x,y) := \dfrac{|u_n(x)-u_n(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}$ com $(x,y)\in\Omega\times\Omega$, obtemos que $\{v_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega\times\Omega)$. Assim, sendo L^p Banach para todo $1\leq p\leq+\infty$, existem $u\in L^p(\Omega)$, $v\in L^p(\Omega\times\Omega)$, tais que $u_n\longrightarrow u$, em $L^p(\Omega)$ e $v_n\longrightarrow v$ em $L^p(\Omega\times\Omega)$, quando $n\longrightarrow+\infty$.

Observe que tomando $w(x,y) := \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}$, com $x\neq y$, em $\Omega\times\Omega$ e provando que $v=w$, segue-se o resultado.

Para mostrar isso, lembremos que toda sequência convergente em L^p, é convergente em medida pelo Teorema 1.2.11 dado nos preliminares. Assim, obtemos que a menos de subsequências, $u_n\longrightarrow u$, *q.t.p.* em Ω. Isto implica que, a menos de subsequências, $v_n\longrightarrow w$, *q.t.p.* em $\Omega\times\Omega$.

Porém, desde que $v_n\longrightarrow v$, em $L^p(\Omega\times\Omega)$ então, a menos de subsequências, $v_n\longrightarrow v$ *q.t.p.* em $\Omega\times\Omega$. Segue-se que $v=w$, *q.t.p.* em $\Omega\times\Omega$, mostrando desta forma que $W^{s,p}(\Omega)$, é um espaço de Banach. ■

Das propriedades geométricas dos espaços L^p, sabemos que eles são reflexivos para $1<p<\infty$ e são separáveis para $1\leq p<+\infty$. De acordo com a Definição 2.1.1 sendo os Espaços de Sobolev Fracionários subconjuntos de L^p, temos que $W^{s,p}$ também satisfaz estas duas propriedades geométricas. O seguinte teorema prova está afirmação.

Teorema 2.1.3 *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $s\in(0,1)$. Então, o Espaço* *de Sobolev Fracionário $W^{s,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < +\infty$ e é separável para $1 \leq p < +\infty$.*

Demonstração: Primeiramente, mostremos que $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo. Para isto, lembre que os subespaços fechados dotados pela norma induzida de um espaço reflexivo são reflexivos. Agora, sendo L^p Banach e considerando $E = L^p(\Omega)\times L^p(\Omega\times\Omega)$, temos que E é um espaço de Banach.

Defina $T : W^{s,p}(\Omega) \longmapsto E$ com $T(u) = (u, v)$, onde $v(x,y) = \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}$. Então, note que T é uma isometria sobre sua imagem e também que $T(W^{s,p}(\Omega))$ é um subespaço fechado de E. Logo, segue-se que $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo.

Para mostrar que $W^{s,p}(\Omega)$ é separável, é suficiente lembrar que todo subespaço fechado de um espaço separável é separável. Desse modo, sendo L^p separável com $1 \leq p < +\infty$, isto implica em que E é um espaço separável. Assim, pela isometria sendo $T(W^{s,p}(\Omega))$ um subespaço de um espaço separável, obtemos que $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço separável. ■

Uma pergunta habitual nos Espaços de Sobolev Fracionários é o que acontece entre os espaços $W^{s,p}$ e $W^{t,p}$ quando $s \leq t$, com $s, t \in (0,1)$. A seguinte proposição prova que neste caso obtemos uma imersão contínua.

Proposição 2.1.4 *Sejam $p \in [1,+\infty)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto e considere $s, t \in (0,1)$ tais que $s \leq t$. Então, o espaço $W^{t,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $W^{s,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Considere $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função tal que $u \in W^{t,p}(\Omega)$. Mostremos que existe uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{t,p}(\Omega)}\,. \tag{2.3}$$

Primeiro, note que

$$\begin{aligned}
[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\
&= \int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy + \int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\
&:= \mathcal{I} + \mathcal{II}.
\end{aligned}$$

Para $\mathcal{II}$, note que sendo $s \leq t$, tomando $x, y \in \Omega$ tais que $|x-y| < 1$, obtemos que

$$\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \leq \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+tp}}.$$

Logo, isto implica em

$$\begin{aligned}
\mathcal{II} = \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\leq \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+tp}} dxdy \\
&\leq \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+tp}} dxdy \\
&= [u]^p_{W^{t,p}(\Omega)}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Agora, lembrando o Teorema 1.2.13 dado nos preliminares, podemos encontrar uma estimativa para $\mathcal{I}$. Com efeito, veja que fazendo a mudança de variável $z = x - y$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\leq \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \int_{\{|z|\geq 1\}} \frac{1}{|z|^{N+sp}} dz \\
&\leq \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \int_1^{+\infty} \int_{\{|z|=r\}} \frac{1}{r^{N+sp}} dSdr \\
&\leq \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \omega_{N-1} \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{N+sp}} r^{N-1} dr \\
&= \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \omega_{N-1} \frac{1}{sp} \\
&= \mathcal{C}(s,p,N) \int_\Omega |u(x)|^p \, dx. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Assim, desde que para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, sabemos que $|u(x)-u(y)|^p \leq 2^{p-1}\left(|u(x)|^p + |u(y)|^p\right)$, por (2.5) obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} = \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\leq 2^{p-1} \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{(|u(x)|^p + |u(y)|^p)}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&= 2^p \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&\leq \mathcal{C}(s,p,N) \int_\Omega |u(x)|^p \, dx. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Desse modo, juntando (2.4) e (2.6) obtemos

$$\begin{aligned}[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \mathcal{I} + \mathcal{II} \\ &\leq \mathcal{C}(s,p,N) \int_\Omega |u(x)|^p \, dx + [u]^p_{W^{t,p}(\Omega)} \\ &= \mathcal{C}(s,p,N) \, \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{t,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{L^P(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &\leq (\mathcal{C}(s,p,N) + 1) \, \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{t,p}(\Omega)} \\ &\leq \mathcal{C}\prime(s,p,N) \, \|u\|_{W^{t,p}(\Omega)} .\end{aligned}$$

O que prova (2.3) e assim segue-se o resultado. ■

Podemos mostrar que a Proposição 2.1.4 também é satisfeita no caso $t = 1$. Porém, para obter este resultado é preciso a regularidade de Ω dada na Definição 1.1.10. A seguinte proposição prova este resultado.

Proposição 2.1.5 *Sejam $p \in [1, +\infty)$, $s \in (0,1)$ e Ω um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada. Então, o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $W^{s,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Mostremos que existe uma constante $C(s,p,N) \geq 1$ tal que

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} . \tag{2.7}$$

Note que, de forma análoga à prova anterior, podemos escrever a seminorma de Gagliardo de u como sendo

$$\begin{aligned}[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &= \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy + \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy.\end{aligned}$$

Além disso, repetindo as mesmas contas que na Proposição 2.1.4 e por (2.5) sabemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &\leq 2^p\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}}\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\ &\leq \mathcal{C}_{\prime}(s,p,N)\int_{\Omega}|u(x)|^p\,dx\\ &= \mathcal{C}_{\prime}(s,p,N)\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por outro lado, desde que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e mais o fato que Ω é de classe $C^{0,1}$, temos pela extensão dada no Teorema 1.1.19 que existe uma função $\hat{u}:\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$ tal que $\hat{u}=u$ em Ω e além disso, $\|\hat{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\leq \mathcal{C}_2\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, para alguma constante $C_2\geq 0$. Sendo assim, note que fazendo a mudança de variável $z=y-x$ e integrando com relação a $B_1(0)\supseteq \Omega\cap B_1(0)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &= \int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|z|<1\}}\frac{|u(x+z)-u(x)|^p}{|z|^{N+sp}}dzdx\\ &\leq \int_{\Omega}\int_{B_1(0)}\frac{|u(x+z)-u(x)|^p}{|z|^{N+sp}}dzdx\\ &= \int_{\Omega}\int_{B_1(0)}\left(\frac{|u(x+z)-u(x)|}{|z|}\right)^p\frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}}dzdx\\ &:= \int_{\Omega}A_1(x)dx \end{aligned} \tag{2.9}$$

Agora, observe que tomando $F(t)=u(x+tz)$ onde $0\leq t\leq 1$, obtemos que F é composta de funções diferenciáveis e dessa forma temos que $F'(t)=\nabla u(x+tz)z$, com $0<t<1$, é contínua e integrável. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue-se que

$$\int_0^1 \nabla u(x+tz)zdt = \int_0^1 F'(t)dt = F(1)-F(0) = u(x+z)-u(x). \tag{2.10}$$

Agora, aplicando (2.10) para A_1 e além disso usando a Desigualdade de Jensen

1.2.8, desde que a função $|\nabla u(x+tz)|$ é convexa, temos

$$
\begin{aligned}
A_1(x) &= \int_{B_1(0)} \left(\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)z|}{|z|} dt \right)^p \frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}} dz \\
&\leq \int_{B_1(0)} \int_0^1 \left(\frac{|\nabla u(x+tz)z|}{|z|} \right)^p dt \frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}} dz \\
&= \int_{B_1(0)} \int_0^1 \frac{|\nabla \hat{u}(x+tz)|^p}{|z|^{N+(s-1)p}} dt. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Mais ainda, juntando (2.11), (2.9) e usando o Teorema de Fubini (ver [13], pág. 521), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\leq \int_\Omega \int_{B_1(0)} \left(\frac{|u(x+tz)-u(x)|}{|z|} \right)^p \frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}} dzdx \\
&\leq \int_\Omega \int_{B_1(0)} \int_0^1 \frac{|\nabla \hat{u}(x+tz)|^p}{|z|^{N+(s-1)p}} dtdzdx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \int_{B_1(0)} \int_0^1 \frac{|\nabla \hat{u}(x+tz)|^p}{|z|^{N+(s-1)p}} dtdzdx \\
&= \int_{B_1(0)} \int_0^1 \frac{\|\nabla \hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}}{|z|^{N+(s-1)p}} dtdz \\
&= C_3(s,p,N) \, \|\nabla \hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \\
&\leq C_4(s,p,N) \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Assim, de (2.8) e da estimativa anterior, segue-se (2.7) pois veja que

$$
\begin{aligned}
[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &\leq \mathcal{C}_{\prime}(s,p,N) \, \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&\leq \mathcal{C}_{\prime}(s,p,N) \, \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + C_4(s,p,N) \, \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq C_5(s,p,N) \, \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &\leq \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + C_6(s,p,N) \, \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq (1 + C_5(s,p,N)) \, \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&= C(s,p,N) \, \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} ,
\end{aligned}
$$

como queríamos. ■

No caso $s > 1$ não inteiro, escrevemos $s = k + \sigma$, onde k é um inteiro e $\sigma \in (0,1)$. Neste caso, o espaço de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ consiste na classe das funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tais que as derivadas distribucionais $D^\alpha u$ com $|\alpha| = k$, pertencem ao espaço $W^{\sigma,p}(\Omega)$.

Definição 2.1.6 *Sejam $p \in [1, +\infty)$ e $s > 1$ um número não inteiro tal que $s = k + \sigma$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $\sigma \in (0,1)$. Então, definimos o espaço de Sobolev Fracionário por*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \quad ; |\alpha| = k \right\}, \tag{2.12}$$

o qual é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{W^{k,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.13}$$

Quando o espaço de Sobolev Fracionário está definido para um $s > 1$ e sobre um domínio regular, podemos obter uma inclusão contínua entre os espaços de Sobolev Fracionários sempre que $t > s$. De fato, isto é o que estabelece o seguinte corolário.

Corolário 2.1.7 *Sejam s, t números não inteiros tais que $s, t > 1$ e $p \in [1, +\infty)$. Se $t \geq s$ e Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e de classe $C^{0,1}$, então*

$$W^{t,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega),$$

onde a inclusão é contínua.

Demonstração: Consideremos $u \in W^{t,p}(\Omega)$. Mostremos que $u \in W^{s,p}(\Omega)$ de acordo com a definição dada em 2.1.6. Para isso, tome $s = k + \sigma$ e $t = r + \omega$, com k, r números inteiros e $\sigma, \omega \in (0,1)$.

Desde que $u \in W^{t,p}(\Omega)$, temos pela definição dada em 2.1.6 que $u \in W^{r,p}(\Omega)$ e também que $D^\alpha u \in W^{\omega,p}(\Omega)$, com $|\alpha| = r$.

Note que sendo $t \geq s$, podemos ter que $k = r$ ou que $r \geq k + 1$. Suponha que $k = r$. Então claramente obtemos que $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Mais ainda, desde que $t \geq s$ e $k = r$, então segue-se que $\omega \geq \sigma$. Logo, como $D^\alpha u \in W^{\omega,p}(\Omega)$ com $|\alpha| = r = k$, pela

Proposição 2.1.4 o espaço $W^{\omega,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $W^{\sigma,p}(\Omega)$, mostrando desta forma que $D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ com $|\alpha| = k$. Logo, segue-se pela Definição 2.1.6 que $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Agora, suponha que $r \geq k + 1$. Neste caso vale lembrar a definição do espaço de Sobolev inteiro para mais de uma derivada no sentido da Distribuição. Com efeito, considere $m \in \mathbb{Z}_+$, então, o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido pelo conjunto

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad , |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha u \in L^p$ no sentido distribucional.

De acordo com está definição, é claro que se $n \geq m$ onde $n, m \in \mathbb{Z}_+$, então temos que $W^{n,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$. Logo, segue-se que $W^{r,p}(\Omega) \subseteq W^{k+1,p}(\Omega)$. Agora, desde que $u \in W^{t,p}(\Omega)$, novamente pela Definição 2.1.6, temos que em particular $u \in W^{r,p}(\Omega)$, o que implica $W^{t,p}(\Omega) \subseteq W^{r,p}(\Omega)$. Assim,

$$W^{t,p}(\Omega) \subseteq W^{r,p}(\Omega) \subseteq W^{k+1,p}(\Omega). \tag{2.14}$$

Se conseguimos provar que $W^{k+1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$, por 2.14 segue o resultado. De fato, sendo Ω um domínio de classe $C^{0,1}$, então pela Proposição 2.1.5 temos em particular que $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{\sigma,p}(\Omega)$ desde que $\sigma \in (0, 1)$. Desse modo, se $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ em particular $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Por outro lado, sabemos que $D^\alpha u \in W^{1,p}(\Omega)$ sempre que $|\alpha| \leq k$, desde que $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$. Logo segue-se que $D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ sempre que $|\alpha| \leq k$ pela inclusão acima. Em particular, $D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$, para $|\alpha| = k$. Isto é, $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

A prova da continuidade da inclusão é análoga a vista na Proposição 2.1.4. ■

O próximo resultado garante a densidade das funções suaves nos espaços de Sobolev Fracionários. Neste caso, faremos uso dos espaços de Besov $B^{s,p,\theta}$, onde $s \in (0, 1)$ e $1 \leq p, \theta \leq +\infty$, dado na Seção 1.2.5. Além disso, vale a pena lembrar que quando $p = \theta$, escrevemos os espaços de Besov como sendo $B^{s,p}$.

Teorema 2.1.8 *Para qualquer $s > 0$, o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ para todo $1 \leq p < +\infty$.*

Demonstração: Para provar o Teorema 2.1.8, mostraremos que a norma do Espaço de Besov 1.2.5 no caso $B^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ onde $0 < s < 1$ e $1 \leq p < \infty$ é equivalente à norma de Sobolev Fracionário dada em (2.2). Desta forma, obtemos o resultado da densidade pela Proposição 1.2.6 enunciada nos preliminares.

Basta provar que as seminormas são equivalentes. Primeiramente, mostraremos que existe uma constante $C > 0$ tal que para toda $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, satisfaz

$$[u]_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.15}$$

Considere $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, $x_1', y_1' \in \mathbb{R}^{N-1}$ e $h > 0$. Então, veja que

$$\begin{aligned} \left|\triangle_1^h u(x)\right|^p &= |u(x_1+h,x_1') - u(x_1,x_1')|^p \\ &\leq 2^{p-1}\left|u(x_1+h,x_1') - u(x_1+\frac{1}{2}h,y_1')\right|^p \\ &+ 2^{p-1}\left|u(x_1+\frac{1}{2}h,y_1') - u(x_1,x_1')\right|^p. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora, integrando (2.16) com relação a y_1' sobre a bola centrada em x_1' com raio $1/2h$ de $\mathbb{R}^{N-1}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \left|\triangle_1^h u(x)\right|^p \leq \frac{C}{h^{N-1}} &\int_{B_{N-1}(x_1',h/2)} |u(x_1+h,x_1') - u(x_1+h/2,y_1')|^p \, dy_1' \\ + \frac{C}{h^{N-1}} &\int_{B_{N-1}(x_1',h/2)} |u(x_1+h/2,y_1') - u(x_1,x_1')|^p \, dy_1'. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|\triangle_1^h u(x)\right|^p}{h^{1+sp}} dxdh \leq\; & C\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_1',h/2)} \frac{\left|u(x_1+h,x_1') - u(x_1+\frac{1}{2}h,y_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dy_1'dxdh \\ & + C\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_1',h/2)} \frac{\left|u(x_1+\frac{1}{2}h,y_1') - u(x_1,x_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dy_1'dxdh \\ & := C(\mathbb{I} + \mathbb{III}), \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde

$$\mathbb{I} := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{N-1}(x_1',h/2)} \frac{\left|u(x_1+h,x_1') - u(x_1+\frac{1}{2}h,y_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dy_1'dxdh,$$

e

$$\mathbb{III} := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{N-1}(x_1',h/2)} \frac{\left|u(x_1+\frac{1}{2}h, y_1') - u(x_1, x_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dy_1' dx dh.$$

Sendo assim, para limitar $\mathbb{I}$ de (2.17), consideremos a mudança de variável $z_1 = x_1 + h$ e utilizando o Teorema de Tonelli (ver [13], página 521), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{I} &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{N-1}(x_1',h/2)} \frac{\left|u(x_1+h, x_1') - u(x_1+\frac{1}{2}h, y_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dy_1' dx dh \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^\infty \int_{B_{N-1}(x_1',h/2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|u(x_1+h, x_1') - u(x_1+\frac{1}{2}h, y_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dx_1 dy_1' dh dx_1' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^\infty \int_{B_{N-1}(x_1',h/2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|u(z_1, x_1') - u(z_1-\frac{1}{2}h, y_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dz_1 dy_1' dh dx_1' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{2\left|x_1'-y_1'\right|}^\infty \frac{\left|u(z_1, x_1') - u(z_1-\frac{1}{2}h, y_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dh dy_1' dz_1 dx_1' \\
&= C \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-\infty}^{z_1-\left|x_1'-y_1'\right|} \frac{|u(z_1, x_1') - u(y_1, y_1')|^p}{|z_1-y_1|^{sp+N}} dy_1 dy_1' dz_1 dx_1', \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade, usamos a mudança de variável $y_1 = z_1 - h/2$ e mais o fato que os conjuntos definidos por $A = \left\{(h, y_1') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} : y_1' \in B_{N-1}(x_1', h/2) \ e \ h > 0\right\}$ e $B = \left\{(h, y_1') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} : y_1' \in \mathbb{R}^{N-1} \ e \ 2\left|x_1' - y_1'\right| < h < +\infty\right\}$ são iguais. Com efeito, se $(h, y_1') \in A$, então $|y_1' - x_1'| < |h/2|$ o que implica em $2\left|y_1' - x_1'\right| < |h|$. Isto é, $(h, y_1') \in B$. Agora, se $(h, y_1') \in B$, então $|x_1' - y_1'| < h$ o que implica $|y_1' - x_1'| < |h|/2$. De modo que $(h, y_1') \in A$.

Agora, desde que $z_1 - y_1 \geq |x_1' - y_1'|$, temos que $|(z_1, x_1') - (y_1, y_1')| \leq \sqrt{2}\,(z_1 - y_1)$. Assim, usando esta estimativa em (2.18), obtemos finalmente que

$$\begin{aligned}
\mathbb{I} &\leq C \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-\infty}^{z_1-\left|x_1'-y_1'\right|} \frac{|u(z_1, x_1') - u(y_1, y_1')|^p}{\left|(z_1, x_1') - (y_1, y_1')\right|^{sp+N}} dy_1 dy_1' dz_1 dx_1' \\
&= C \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dx dy < +\infty. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Analogamente limitamos $\mathbb{III}$ de (2.17). Com efeito, considerando a mudança de variável

$y_1 = x_1 + h/2$ e usando a igualdade dos conjuntos A e B, note que

$$\begin{aligned}
\mathbb{III} &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{N-1}(x_1', h/2)} \frac{\left|u(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1') - u(x_1, x_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dy_1' dx dh \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^\infty \int_{B_{N-1}(x_1', h/2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|u(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1') - u(x_1, x_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dx_1 dy_1' dh dx_1' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^\infty \int_{B_{N-1}(x_1', h/2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|u(y_1, y_1') - u(y_1 - \frac{1}{2}h, x_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dy_1 dy_1' dh dx_1' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{2\left|x_1' - y_1'\right|}^\infty \frac{\left|u(y_1, y_1') - u(y_1 - \frac{1}{2}h, x_1')\right|^p}{h^{sp+N}} dh dy_1 dy_1 dx_1' \\
&= C \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-\infty}^{y_1 - \left|x_1' - y_1'\right|} \frac{|u(y_1, y_1') - u(z_1, x_1')|^p}{\left|z_1 - y_1\right|^{sp+N}} dz_1 dy_1 dy_1 dx_1',
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a mudança de variável $z_1 = y_1 - h/2$. Agora, desde que $-\infty \leq z_1 \leq y_1 - |x_1' - y_1'|$ novamente obtemos que $y_1 - z_1 \geq |x_1' - y_1'|$ e dessa forma $|(y_1, y_1') - (z_1, x_1')| \leq \sqrt{2}(z_1 - y_1)$.

Desse modo, repetindo as mesmas contas que em (2.19) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{III} &= C \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-\infty}^{y_1 - \left|x_1' - y_1'\right|} \frac{|u(y_1, y_1') - u(z_1, x_1')|^p}{\left|z_1 - y_1\right|^{sp+N}} dz_1 dy_1 dy_1 dx_1' \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{\left|x - y\right|^{N+sp}} dx dy < +\infty.
\end{aligned}$$

Claramente, é possível obter desigualdades similares obtemos para $\triangle_i^h u$ com $i = 2, 3, \ldots, N$. Dessa forma, mostramos (2.15).

Agora, mostremos que existe $C > 0$ tal que

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C[u]_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)}, \tag{2.20}$$

para toda $u \in B^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. De fato, considere $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ e note que

$$\begin{aligned}
u(x) - u(y) = {} & [u(x_1, x_2, \ldots, x_N) - u(y_1, x_2, \ldots, x_N)] \\
& + \ldots + [u(y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}, x_N) - u(y_1, y_2, \ldots, y_N)].
\end{aligned}$$

Logo, segue-se que

$$|u(x)-u(y)|^p \leq C(|u(x_1,x_2,\ ...\ ,x_N)-u(y_1,x_2,\ ...\ ,x_N)|^p$$
$$+\ ...\ +|u(y_1,y_2,\ ...\ ,y_{N-1},x_N)-u(y_1,y_2,\ ...\ ,y_N)|^p),$$

onde $C=C(p)>0$.

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{sp+N}}dxdy \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x_1,x_2,\ ...\ ,x_N)-u(y_1,x_2,\ ...\ ,x_N)|^p}{|x-y|^{sp+N}}dxdy +\ ... \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y_1,y_2,\ ...\ ,y_{N-1},x_N)-u(y_1,y_2,\ ...\ ,y_N)|^p}{|x-y|^{sp+N}}dxdy \\
&= C\left(\sum_{j=k}^{N} J_k\right). \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Considere $y_1=x_1+h$ e $z=(x_1+h,y_2,\ ...\ ,y_N)$, onde $h\in\mathbb{R}$. Note que sendo

$$J_1=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x_1,x_2,\ ...\ ,x_N)-u(y_1,x_2,\ ...\ ,x_N)|^p}{|x-y|^{sp+N}}dxdy,$$

então, usando o Teorema de Fubini de forma adequada com respeito a J_1, obtemos

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x_1,x_2,\ ...\ ,x_N)-u(y_1,x_2,\ ...\ ,x_N)|^p}{|x-y|^{sp+N}}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x_1,x_2,\ ...\ ,x_N)-u(x_1+h,x_2,\ ...\ ,x_N)|^p}{|x-y|^{sp+N}}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x_1,x_2,\ ...\ ,x_N)-u(x_1+h,x_2,\ ...\ ,x_N)|^p}{\left(|h|^2+|x_2-y_2|^2+\ ...\ +|x_N-y_N|^2\right)^{\frac{sp+N}{2}}}dhdy_2...dy_Ndx \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_0^{+\infty} \frac{|u(x_1,x_2,\ ...\ ,x_N)-u(x_1+h,x_2,\ ...\ ,x_N)|^p}{\left(|h|^2+|x_2-y_2|^2+\ ...\ +|x_N-y_N|^2\right)^{\frac{sp+N}{2}}}dhdy_2...dy_Ndx.
\end{aligned}$$

Entretanto, observe que fazendo $z=(x_2-y_2,\ ...\ ,x_N-y_N)\in\mathbb{R}^{N-1}$ e usando a

Formula da Coárea 1.2.13 veja que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{\left(|h|^2+|x_2-y_2|^2+\ \dots\ +|x_N-y_N|^2\right)^{\frac{sp+N}{2}}} dy_2 \dots dy_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{\left(|h|^2+|z|^2\right)^{\frac{sp+N}{2}}} dz \\
&= C\int_0^{+\infty} \frac{t^{N-2}}{\left(|h|^2+t^2\right)^{\frac{sp+N}{2}}} dt \\
&\leq C\frac{1}{|h|^{sp+N-(N-1)}} \\
&= \frac{C}{|h|^{sp+1}}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Desse modo, usando a estimativa anterior (2.22) em J_1 e mais o Teorema de Tonelli, obtemos

$$\begin{aligned}
J_1 &= 2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_0^{+\infty} \frac{|u(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_N)-u(x_1+h,x_2,\ \dots\ ,x_N)|^p}{\left(|h|^2+|x_2-y_2|^2+\ \dots\ +|x_N-y_N|^2\right)^{\frac{sp+N}{2}}} dh dy_2 \dots dy_N dx \\
&= 2\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|u(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_N)-u(x_1+h,x_2,\ \dots\ ,x_N)|^p}{\left(|h|^2+|x_2-y_2|^2+\ \dots\ +|x_N-y_N|^2\right)^{\frac{sp+N}{2}}} dy_2 \dots dy_N dx dh \\
&\leq C\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_N)-u(x_1+h,x_2,\ \dots\ ,x_N)|^p}{|h|^{sp+1}} dx dh \\
&\leq C[u]^p_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, mostramos que $J_k \leq C[u]^p_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$ para $k = 2, 3,\ \dots\ , N$. Dessa forma, de (2.21) segue-se (2.20) pois

$$[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\left(\sum_{j=k}^{N} J_k\right) \leq C_0[u]^p_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Em consequência de (2.20) e (2.15) obtemos que as seminormas são equivalentes. Assim, pela Proposição 1.2.6 dada nos preliminares segue-se o resultado. ■

Quando $s < 0$ e $p \in (1, +\infty)$, como no caso dos espaços de Sobolev Inteiros, definimos $W^{s,p}(\Omega)$como sendo o espaço dual de $W_0^{-s,q}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Com esta última definição, damos por concluído esta primeira seção de propriedades básicas dos espaços de Sobolev Fracionários, a qual deixa o caminho aberto para começar a estabelecer outras propriedades clássicas destes, como por exemplo, as relações de regularidade entre estes espaços, Prolongamentos, as imersões contínuas e compactas.

2.2 Prolongamento

Nesta seção apresentaremos condições para as quais dada qualquer função em $W^{s,p}$ definida num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, pode ser estendida para uma função em $W^{s,p}$ definida sobre $\mathbb{R}^N$. Como é bem conhecido, quando $s \in \mathbb{Z}$, estas condições dependem da regularidade de Ω, pois sabemos que nem todo aberto de $\mathbb{R}^N$ é um Domínio de Extensão. No caso fracionário, vamos ver que acontece a mesma coisa, porém, precisaremos de alguns lemas para sua demostração. Antes disso, faremos uma definição formal de um domínio de extensão para os espaços de Sobolev Fracionários.

Definição 2.2.1 *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$. Dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, é um **Domínio de Extensão para** $W^{s,p}(\Omega)$ se existe uma constante positiva $C = C(s,p,N,\Omega)$, tal que para cada função $u \in W^{s,p}(\Omega)$, existe $\hat{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, com $u(x) = \hat{u}(x)$, para quase todo $x \in \Omega$ e $\|\hat{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.*

Continuando, apresentamos nosso primeiro lema, o qual mostra que uma função u em $W^{s,p}(\Omega)$, tal que não é nula para algum compacto contido em Ω, está no espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.2.2 *Considere $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$. Sejam Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ e u uma função em $W^{s,p}(\Omega)$. Se existir um compacto K de $\mathbb{R}^N$, tal que $K \subseteq \Omega$, e além disso, $u \equiv 0$ em $\Omega \setminus K$, então a função $\overline{u}$ definida por*

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x), & se\ x \in \Omega, \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

está em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e existe uma constante apropriada, $C = C(s,p,N,K,\Omega) > 0$, tal que $\|\overline{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.

Demonstração: Primeiramente, veja que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pois note que

$$\|\overline{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}(x)|^p \, dx = \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty,$$

desde que $u \in L^p(\Omega)$, pela Definição 2.1.1.

Para mostrar que a seminorma de Gagliardo 2.1 de $\overline{u}$ sobre $\mathbb{R}^N$ é finita, veja que escrevendo $\mathbb{R}^N = \Omega \cup \Omega^c$, usando a Definição 2.1 e mais ainda, a aditividade da integral, temos

$$\begin{aligned}
[\overline{u}]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_\Omega \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dy + \int_{\Omega^c} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dy \right) dx \\
&= \int_{\Omega \cup \Omega^c} \left(\int_\Omega \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dy + \int_{\Omega^c} \frac{|\overline{u}(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dy \right) dx \\
&= \int_{\Omega \cup \Omega^c} \int_\Omega \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx + \int_{\Omega \cup \Omega^c} \int_{\Omega^c} \frac{|\overline{u}(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx \\
&= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx + 2 \int_\Omega \int_{\Omega^c} \frac{|\overline{u}(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx \\
&= [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + 2 \int_\Omega \int_{\Omega^c} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx
\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde (2.24) segue-se aplicando o Teorema de Fubini (ver [13], página 521), pois note que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \cup \Omega^c} \int_\Omega \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy + \int_\Omega \int_{\Omega^c} \frac{|\overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&= [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + \int_\Omega \int_{\Omega^c} \frac{|\overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy,
\end{aligned}$$

e além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \cup \Omega^c} \int_{\Omega^c} \frac{|\overline{u}(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx &= \int_{\Omega^c} \int_\Omega \frac{|\overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx + \int_{\Omega^c} \int_{\Omega^c} \frac{|\overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx \\
&= \int_{\Omega^c} \int_\Omega \frac{|\overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx.
\end{aligned}$$

Agora, veja que $[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}$ é finito desde que $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Assim, resta mostrar que a integral dupla do lado direito de (2.24) é finita. Para isso, observe que para cada

$y \in \mathbb{R}^N \setminus K$ e para todo $x \in K$, temos

$$\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+ps}} = \mathcal{X}_K(x)\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \leq \mathcal{X}_K(x)\,|u(x)|^p\,\frac{1}{\inf|x-y|^{N+ps}}.$$

Além disso, como $\inf|x-y|^{N+ps} \geq dis(y,\partial K)^{N+ps}$, então aplicando novamente o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_{\Omega^c}\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dydx \leq \int_\Omega\int_{\Omega^c}\frac{|u(x)|^p}{dis(y,\partial K)^{N+ps}}dydx &= \int_{\Omega^c}\frac{dy}{dis(y,\partial K)^{N+ps}}\int_\Omega|u(x)|^p\,dx\\ &= \int_{\Omega^c}\frac{1}{dis(y,\partial K)^{N+ps}}dy\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\\ &= C\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\,, \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde esta última integral em (2.25) é finita desde que $dis(\partial\Omega,\partial K) > 0$ e $N+ps > N$. Além disso, $C = C(s,p,N,K,\Omega) > 0$.

Finalmente, juntando (2.24) e (2.25), obtemos que

$$\begin{aligned}\|\overline{u}\|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} &= \|\overline{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + [\overline{u}]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + 2\int_\Omega\int_{\Omega^c}\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dydx\\ &\leq \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + 2C(s,p,N,K,\Omega)\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\\ &\leq C_1(s,p,N,K,\Omega)\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}\right)\\ &= C_1(s,p,N,K,\Omega)\,\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)}\,,\end{aligned}$$

o que prova o lema. ■

O próximo lema está relacionado com os conjuntos abertos que são simétricos em $\mathbb{R}^N$ com respeito a uma coordenada. Provaremos uma estimativa envolvendo este tipo de conjuntos nos espaços de Sobolev Fracionários.

Lema 2.2.3 *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$ e considere Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ tal que é simétrico com respeito à coordenada x_N. Seja $u \in W^{s,p}(\Omega)$ e defina*

$\Omega_+ = \{x \in \Omega : x_N > 0\}$, $\Omega_- = \{x \in \Omega : x_N \leq 0\}$. *Se*

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x', x_N), & se\ x \geq 0, \\ u(x', -x_N), & se\ x < 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

então, $\overline{u} \in W^{s,p}(\Omega)$ *e*

$$\|\overline{u}\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq 4 \|u\|_{W^{s,p}(\Omega_+)} .$$

Demonstração: Observe pela simetria de Ω e pelas definições de $\Omega_\pm$ e $\overline{u}$ que

$$\begin{aligned} \|\overline{u}\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |\overline{u}(x)|^p \, dx &= \int_{\Omega_+} |u(x', x_N)|^p \, dx + \int_{\Omega_-} |u(x', -x_N)|^p \, dx \\ &= 2 \int_{\Omega_+} |u(x', x_N)|^p \, dx = 2 \|u\|^p_{L^p(\Omega_+)} . \end{aligned} \tag{2.27}$$

Por outra parte, escrevendo $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$, então veja que

$$\begin{aligned} [\overline{u}]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &= \int_\Omega \left(\int_{\Omega_+} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dx + \int_{\Omega_-} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dx \right) dy \\ &= \int_\Omega \int_{\Omega_+} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy + \int_\Omega \int_{\Omega_-} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Agora, note que usando a definição de $\overline{u}$ na primeira integral dupla de (2.28) e o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega_+} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &= \int_{\Omega_+} \int_{\Omega_+} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy + \int_{\Omega_+} \int_{\Omega_-} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &= [u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)} + \int_{\Omega_+} \int_{\Omega_+} \frac{|u(x', x_N) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &= 2[u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Argumentando analogamente com a segunda integral dupla de (2.28) obtemos

$$\int_\Omega \int_{\Omega_-} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = 2[u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)}. \tag{2.30}$$

Finalmente juntando (2.27), (2.28) e (2.29) segue que

$$
\begin{aligned}
\|\overline{u}\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \|\overline{u}\|^p_{L^p(\Omega)} + [\overline{u}]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= 2\,\|u\|^p_{L^p(\Omega_+)} + 4[u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)} \\
&\leq 4\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega_+)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)}\right) \\
&= 4\,\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega_+)},
\end{aligned}
$$

como queríamos. ■

Veremos um último lema técnico antes da prova do resultado principal desta seção.

Lema 2.2.4 *Sejam $a \in (1,0)$, $p \in [1,+\infty)$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Se $\psi \in C^{0,1}(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, então $\psi u \in W^{s,p}(\Omega)$, para cada $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Além disso, existe uma constante $C = C(s,p,N,\Omega)$ positiva tal que*

$$
\|\psi u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}. \tag{2.31}
$$

Demonstração: Primeiramente, note que por hipótese sendo $0 \leq \psi \leq 1$, obtemos que $\psi u \in L^p(\Omega)$. de fato

$$
\|\psi u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |\psi(x)u(x)|^p\,dx \leq \int_\Omega |u(x)|^p\,dx = \|u\|^p_{L^p(\Omega)},
$$

o qual é finito desde que $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Por outro lado, note que fazendo

$$
\begin{aligned}
\frac{|\psi(x)u(x) - \psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} &= \frac{|\psi(x)u(x) - \psi(y)u(y) + \psi(x)u(y) - \psi(x)u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \\
&\leq 2^{p-1}\frac{|\psi(x)u(x) - \psi(x)u(y)|^p + |\psi(x)u(y) - \psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \\
&= 2^{p-1}\frac{|\psi(x)|^p\,|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} + 2^{p-1}\frac{|u(y)|^p\,|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}},
\end{aligned}
$$

obtemos que

$$
\begin{aligned}
[\psi u]_{W^{s,p}(\Omega)} &= \int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(x)-\psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&= \int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(x)-\psi(y)u(y)+\psi(x)u(y)-\psi(x)u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&\leq \int_\Omega\int_\Omega 2^{p-1}\frac{|\psi(x)u(x)-\psi(x)u(y)|^p+|\psi(x)u(y)-\psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&= 2^{p-1}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)|^p\,|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy+\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(y)|^p\,|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)\\
&\leq 2^{p-1}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy+\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(y)|^p\,|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)\\
&= 2^{p-1}[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}+2^{p-1}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(y)|^p\,|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy. \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

Resta limitar a integral dupla em (2.32), pois a seminorma de Gagliardo de u em Ω é finita, dado que por hipótese $u\in W^{s,p}(\Omega)$. Para mostrar isso, escreva

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(y)|^p\,|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &= \int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(y)|^p\,|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&+ \int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|>1\}} \frac{|u(y)|^p\,|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&:= A_1+A_2. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Note que sendo $\psi\in C^{0,1}$, então , existe $C_1>0$ tal que para todo $x,y\in\Omega$ satisfaz $|\psi(x)-\psi(y)|\leq C_1\,|x-y|$. Logo usando isto fato em A_1 e aplicando a Fórmula de Coárea (ver Teorema 1.2.13) segue-se que

$$
\begin{aligned}
A_1 = \int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(y)|^p\,|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &\leq C_1^p\int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(y)|^p\,|x-y|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&= C_1^p\int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{N+p(s-1)}}dxdy\\
&= C_1^p\int_\Omega |u(y)|^p\int_0^1\int_{\{|x-y|=r\}}\frac{1}{r^{N+p(s-1)}}dSdrdy\\
&= C_1^p\int_\Omega |u(y)|^p\int_0^1 w_{N-1}\frac{r^{N-1}}{r^{N+p(s-1)}}drdy\\
&= C_1^p\frac{1}{p(s-1)}w_{N-1}\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\\
&= C_2(s,p,N,\Omega)\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)}. \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Para limitar A_2 em (2.33), novamente usando o fato que $|\psi(x)| \leq 1$ e a Fórmula de Coárea (ver 1.2.13), temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|>1\}} \frac{|u(y)|^p\,|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\leq \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|>1\}} \frac{|u(y)|^p\,2^{p-1}\left(|\psi(x)|^p+|\psi(y)|^p\right)}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&\leq 2^p \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|>1\}} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&= 2^p \int_\Omega |u(y)|^p \int_1^{+\infty} \int_{\{|x-y|=r\}} \frac{1}{r^{N+sp}} dSdrdy \\
&= 2^p \int_\Omega |u(y)|^p \int_1^{+\infty} w_{N-1} \frac{r^{N-1}}{r^{N+sp}} drdy \\
&= 2^p \frac{1}{sp} w_{N-1} \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \\
&= C_3(s,p,N,\Omega) \|u\|^p_{L^p(\Omega)}. \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

Assim , juntando (2.32),(2.34) e (2.35), obtemos

$$
\begin{aligned}
[\psi u]_{W^{s,p}(\Omega)} \leq 2^{p-1}[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + 2^{p-1}(A_1+A_2) &\leq 2^{p-1}[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + 2^{p-1}((C_2+C_3)\|u\|^p_{L^p(\Omega)}) \\
&\leq C_4([u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + \||u\|^p_{L^p(\Omega)}) \\
&= C_4 \|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Por fim, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\|\psi u\|^p_{W^{s,p}(\Omega} = \|\psi u\|^p_{L^p(\Omega)} + [\psi u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &\leq \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + C_4 \|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} \\
&\leq C_5 \|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

o que prova Lema 2.2.4. ■

Finalmente, com os três lemas anteriores estamos prontos para a demostração do teorema principal desta seção. Como veremos, obtemos um prolongamento do espaço de Sobolev Fracionário $W^{s,p}(\Omega)$, quando Ω for um domínio de Lipschitz com fronteira limitada.

Teorema 2.2.5 *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$. Se Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ tal que é de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada. Então, Ω é um Domínio de Extensão para $W^{s,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Provemos que para cada $u \in W^{s,p}(\Omega)$, existe uma $\overline{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u \equiv \overline{u}$ em Ω e além disso, $\|\overline{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$, onde $C = C(s,p,N,\Omega)$.

Por hipótese, sabemos que $\partial\Omega$ é limitada. Logo, segue-se que ela é compacta. Sendo assim, existem um número finito de bolas abertas B_j contidas em $\mathbb{R}^N$, tais que $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^k B_j$. Veja que podemos escrever $\mathbb{R}^N = \bigcup_{j=1}^k B_j \cup (\partial\Omega)^c$. Mais ainda, aproveitando esta cobertura, existe uma Partição da Unidade relativa a ela. Assim, existem $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_k$ funções suaves tais que: $supp(\psi_0) \subset (\partial\Omega)^c$, $supp(\psi_j) \subset B_j$ para cada $j \in \{1,2,...,k\}$, $0 \leq \psi_j \leq 1$ para todo $j = 0,1,...,k$ e $\sum_{j=0}^k \psi_j = 1$.

Note que $u = \sum_{j=0}^k \psi_j u$, desde que $\sum_{j=0}^k \psi_j = 1$. Por outra parte, desde que $supp(\psi_0) \subset (\partial\Omega)^c$ e $0 \leq \psi_0 \leq 1$, é claro que $\psi_0 \in C^{0,1}(\Omega)$. Assim, usando o Lema 2.2.4 temos que $\psi_0 u \in W^{s,p}(\Omega)$. Mais ainda, o mesmo lema garante que existe uma constante C_1 positiva tal que,

$$\|\psi_0 u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}. \tag{2.36}$$

Agora, defina a seguinte extensão:

$$\widetilde{\psi_0 u}(x) = \begin{cases} \psi_0 u(x), & \text{se } x \in \Omega, \\ 0, & \text{se } x \in (\Omega)^c. \end{cases}$$

Então veja que $\psi_0 u \equiv 0$, numa vizinhança da $\partial\Omega$, pois $supp(\psi_0) \subset (\partial\Omega)^c$ onde $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^k B_j$ e dita união é aberta. Dessa forma, desde que $\psi_0 u \in W^{s,p}(\Omega)$ então, pelo Lema 2.2.2, obtemos que $\widetilde{\psi_0 u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, existe uma constante não negativa C_2 tal que

$$\left\|\widetilde{\psi_0 u}\right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|\psi_0 u\|_{W^{s,p}(\Omega)}. \tag{2.37}$$

Logo, juntando (2.36) e (2.37), segue-se que

$$\left\|\widetilde{\psi_0 u}\right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|\psi_0 u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C_1 C_2 \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \tag{2.38}$$

onde $C = C(s,p,N,\Omega)$.

Por outra parte, por hipótese sabemos que o domínio é regular. Assim, para cada $j \in \{1,...,k\}$ considere $T_j : Q \longrightarrow B_j$ o isomorfismo de classe $C^{0,1}$ e defina o operador $v_j : Q_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $v_j(y) = u(T_j(y))$ para cada $y \in Q_+$. Note que $T_j(Q_+) = \Omega \cap B_j$ pela definição de T_j estar em $C^{0,1}$.

Afirmação: $v_j \in W^{s,p}(Q_+)$.

De fato, é suficiente mostrar que a seminorma de Gagliardo dada em (2.1) é finita para v_j em Q_+. Mas para mostrar isso, veja que sendo T_j um isomorfismo e Hölder Contínua, isto é $C^{0,1}$, existe uma constante não negativa M, tal que $|T_j(x) - T_j(y)| \leq M\,|x-y|$, para todo $x, y \in Q$. isto é, $\frac{1}{|T_j^{-1}(x) - T_j^{-1}(y)|} \leq \frac{M}{|x-y|}$. Logo, usando este fato e além disso fazendo uma mudança de variável dada por $x = T_j(\bar{x})$, onde $\bar{x} \in Q_+$, veja que

$$
\begin{aligned}
[v_j]^p_{W^{s,p}(Q_+)} &= \int_{Q_+}\int_{Q_+} \frac{|v_j(\bar{x}) - v_j(\bar{y})|^p}{|\bar{x}-\bar{y}|^{N+sp}} d\bar{x}d\bar{y} \\
&= \int_{Q_+}\int_{Q_+} \frac{|u(T_j(\bar{x})) - u(T_j(\bar{y}))|^p}{|\bar{x}-\bar{y}|^{N+sp}} d\bar{x}d\bar{y} \\
&= \int_{\Omega\cap B_j}\int_{\Omega\cap B_j} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{\left|T_j^{-1}(x) - T_j^{-1}(y)\right|^{N+sp}} \left|\det(T_j^{-1})\right| dxdy \\
&\leq M\left|\det(T_j^{-1})\right| \int_{\Omega\cap B_j}\int_{\Omega\cap B_j} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&\leq M\left|\det(T_j^{-1})\right| \int_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&= M\left|\det(T_j^{-1})\right| [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}. \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

Segue-se afirmação.

Por outro lado, note que sendo Q um cubo, temos que ele é simétrico. Mas pelo que acabamos de ver $v_j \in W^{s,p}(Q_+)$. Logo, do Lema 2.2.3 podemos estender v_j para a uma função $\bar{v_j} \in W^{s,p}(Q)$ tal que $\|\bar{v_j}\|_{W^{s,p}(Q)} \leq 4\,\|v_j\|_{W^{s,p}(Q_+)}$.

Seja $w_j(x) = \bar{v_j}(T_j^{-1}(x))$ com $x \in B_j$. Novamente, desde que T_j é um isomorfismo, bi-Lipschitz, mostramos que $w_j \in W^{s,p}(B_j)$. Note que $w_j \equiv u$ sobre $\Omega \cap B_j$, pois note que neste caso, temos

$$
w_j(x) = \bar{v_j}(T_j^{-1}(x)) = v_j(T_j^{-1}(x)) = u(T_j(T_j^{-1}(x))) = u(x).
$$

Consequentemente, temos que $\psi_j w_j \equiv \psi_j u$, em $\Omega \cap B_j$. Mais ainda, pela definição de $\psi_j w_j$, temos que ele tem suporte compacto sobre B_j e analogamente ao caso de $\psi_0 u$, podemos considerar uma extensão $\widetilde{\psi_j w_j}$ em $\mathbb{R}^N$ de tal forma que $\widetilde{\psi_j w_j} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Logo, pelo Lema 2.2.2, temos que $\left\|\widetilde{\psi_j w_j}\right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_3 \left\|\psi_j w_j\right\|_{W^{s,p}(B_j)}$ para alguma constante $C_3 > 0$. Mais ainda pelo Lema 2.2.4 temos que $\left\|\psi_j w_j\right\|_{W^{s,p}(B_j)} \leq C_4 \left\|w_j\right\|_{W^{s,p}(B_j)}$ para algum $C_4 > 0$. Por outro lado, desde $w_j \equiv \bar{v_j}$, em $B_j \subset Q$, então segue-se pelas propriedades da integral que $C_4 \left\|w_j\right\|_{W^{s,p}(B_j)} \leq C_4 \left\|\bar{v_j}\right\|_{W^{s,p}(Q)}$. Daí, novamente pelo Lema 2.2.3 como já mostramos, sabemos que $C_4 \left\|\bar{v_j}\right\|_{W^{s,p}(Q)} \leq 4C_4 \left\|v_j\right\|_{W^{s,p}(Q_+)}$. Por último, usando a definição de v_j, desde que $T(Q_+) = B_j \cap \Omega$ e por (2.39) obtemos que $\left\|v_j\right\|_{W^{s,p}(Q_+)} \leq C_5 \left\|u\right\|_{W^{s,p}(B_j \cap \Omega)}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{\psi_j w_j}\right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} &\leq C_3 \left\|\psi_j w_j\right\|_{W^{s,p}(B_j)} \\
&\leq C_3 C_4 \left\|w_j\right\|_{W^{s,p}(B_j)} \leq C_3 C_4 \left\|\bar{v_j}\right\|_{W^{s,p}(Q)} \\
&\leq 4C_3 C_4 \left\|v_j\right\|_{W^{s,p}(Q)} \\
&\leq 4C_3 C_4 C_5 \left\|u\right\|_{W^{s,p}(B_j \cap \Omega)} = C_6 \left\|u\right\|_{W^{s,p}(B_j \cap \Omega)}, \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

onde C_6 é uma constante positiva que depende de s, p, N, e Ω.

Finalmente, considere

$$\overline{u} = \widetilde{\psi_0 u} + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\psi_j w_j}.$$

Então, note que $\overline{u}$ é uma extensão de u sobre todo $\mathbb{R}^N$. Pela construção, veja que $\overline{u} \equiv u$ sobre Ω. Além disso, juntando (2.38), (2.40) e usando a Desigualdade Triangular com a norma de $W^{s,p}(\Omega)$, segue-se que $\left\|\widetilde{u}\right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_7 \left\|u\right\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ com $C_7 = C(s,p,N,\Omega) > 0$. ■

2.3 Desigualdades de Sobolev Fracionárias

A ideia desta seção é mostrar sobre quais condições é possível obter imersões contínuas no espaço de Sobolev Fracionário $W^{s,p}(\Omega)$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$. Como no caso inteiro, estas imersões estão estritamente relacionadas com a dimensão N do domínio e mais ainda com os números reais s, p onde $p \in [1, +\infty)$ e $s \in (0, 1)$. Neste caso, observaremos que estas imersões contínuas se apresentam quando $sp < N$, $sp > N$ e $sp = N$. Porém, nesta seção não abordaremos o caso $sp > N$. Isto será feito na Seção 2.5.

Para mostrar que existem estas imersões contínuas, precisaremos de alguns resultados preliminares. O primeiro deles, é um resultado que relaciona a medida finita de conjuntos mensuráveis em $\mathbb{R}^N$ com uma função singular.

Lema 2.3.1 *Sejam $p \in [1, +\infty)$, $s \in (0, 1)$ e $E \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto mensurável, com medida finita. Se $x \in \mathbb{R}^N$ é fixo, então existe uma constante $C > 0$, com $C = C(s, p, N)$ tal que*

$$med(E)^{-sp/N} C \leq \int_{E^c} \frac{1}{|x - y|^{N+ps}} dy.$$

Demonstração: Considere w_N como sendo o volume da bola unitária e defina $\rho := \left(\frac{med(E)}{w_N} \right)^{1/N}$, o qual está bem definido pois E possui medida finita.

Note que considerando $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, temos que $E^c \cap B_\rho(x) = B_\rho(x) \setminus E \cap B_\rho(x)$ e como estes conjuntos são Lebesgue mensuráveis, temos $med(E^c \cap B_\rho(x)) = med(B_\rho(x)) - med(E \cap B_\rho(x))$.

Mais ainda, veja que

$$\begin{aligned} med(B_\rho(x)) = \int_{\{|y-x| \leq \rho\}} 1 dy = \int_{\left\{ \left| \frac{y-x}{\rho} \right| \leq 1 \right\}} 1 dy = \rho^N \int_{\{|z| \leq 1\}} 1 dz \\ = \rho^N w_N \\ = \left(\left(\frac{med(E)}{w_N} \right)^{1/N} \right)^N w_N \\ = med(E). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} med(E^c \cap B_\rho(x)) &= med(B_\rho(x)) - med(E \cap B_\rho(x)) \\ &= med(E) - med(E \cap B_\rho(x)) \\ &= med(E \cap B_\rho(x))^c), \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde (2.41) segue-se da igualdade $E \setminus E \cap B_\rho(x) = E \cap B_\rho(x)^c$.

Desse modo, escrevendo $E^c = E^c \cap B_\rho(x) \cup E^c \cap B_\rho(x)$, como união disjunta, usando o fato que $|y-x| \leq \rho$ e por (2.41) obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{E^c} \frac{1}{|x-y|^{N+ps}} dy &= \int_{E^c \cap B_\rho(x)} \frac{1}{|x-y|^{N+ps}} dy + \int_{E^c \cap B_\rho(x)^c} \frac{1}{|x-y|^{N+ps}} dy \\ &\geq \int_{E^c \cap B_\rho(x)} \frac{1}{\rho^{N+ps}} dy + \int_{E^c \cap B_\rho(x)^c} \frac{1}{|x-y|^{N+ps}} dy \\ &= \frac{med(E^c \cap B_\rho(x))}{\rho^{N+ps}} + \int_{E^c \cap B_\rho(x)^c} \frac{1}{|x-y|^{N+ps}} dy \\ &= \frac{med(E \cap B_\rho(x))^c)}{\rho^{N+ps}} + \int_{E^c \cap B_\rho(x)^c} \frac{1}{|x-y|^{N+ps}} dy \\ &\geq \int_{E \cap B_\rho(x))^c} \frac{1}{|y-x|^{N+ps}} dy + \int_{E^c \cap B_\rho(x)^c} \frac{1}{|x-y|^{N+ps}} dy \\ &= \int_{B_\rho(x))^c} \frac{1}{|y-x|^{N+ps}} dy. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Para calcular (2.42), uma vez mais como na seção anterior, usando a Fórmula de Coárea (ver Teorema 1.2.13), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x))^c} \frac{1}{|y-x|^{N+ps}} dy = \int_{\{|y-x| \geq \rho\}} \frac{1}{|y-x|^{N+ps}} dy &= \int_\rho^{+\infty} \int_{\{|y-x|=r\}} \frac{1}{r^{N+ps}} dS dr \\ &= \int_\rho^{+\infty} w_{N-1} \frac{r^{N-1}}{r^{N+ps}} dr \\ &= \frac{w_{N-1}}{sp} \frac{1}{\rho^{sp}} \\ &= \frac{w_{N-1}}{sp} \left(\frac{med(E)}{w_N} \right)^{-sp/N} \\ &= C(s,p,N) \left(med(E) \right)^{-sp/N}, \end{aligned}$$

onde $C(s,p,N) = \dfrac{w_{N-1}}{sp} \dfrac{1}{w_N^{-sp/N}}$. ■

O próximo resultado é técnico e garante uma estimativa essencial para a prova das Imersões Fracionárias.

Lema 2.3.2 *Sejam $p \in [1, +\infty)$, $s \in (0,1)$ tais que $sp < N$. Considere $K \in \mathbb{Z}$ e a_n uma sequência limitada, decrescente, não negativa tal que $a_n = 0$ para todo $n \geq K$. Se fixamos $T > 1$, então existe uma constante apropriada $C = C(s,p,N,T) > 0$ tal que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{1/\beta} T^n \leq C \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ a_n\neq 0}} a_{n+1} a_n^{-1/\alpha} T^n,$$

onde $\beta = \frac{N}{N-sp}$ e $\alpha = \frac{N}{sp}$.

Demonstração: Por hipótese, sendo a_n uma sequência decrescente não negativa, limitada, com $a_n = 0$ para todo $n \geq K$ para algum $K \in \mathbb{Z}$, temos que as séries

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{1/\beta} T^n, \ \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ a_n\neq 0}} a_{n+1} a_n^{-1/\alpha} T^n,$$

são convergentes.

Mais ainda, novamente usando o fato que a_n é decrescente e não negativa, veja que se $a_n = 0$, então isto implica que $a_{n+1} = 0$. Assim, obtemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{1/\beta} T^n = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ a_n\neq 0}} a_n^{1/\beta} T^n.$$

Dessa forma, temos que

$$\frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{1/\beta} T^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n+1}^{1/\beta} T^n = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ a_n\neq 0}} a_{n+1}^{1/\beta} T^n = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ a_n\neq 0}} (a_n^{1/\alpha\beta} a_n^{-1/\alpha\beta})(a_{n+1}^{1/\beta} T^{n(1/\alpha+1/\beta)}).$$

Agora, veja que α e β são expoentes conjugados e além disso, sendo $sp < N$ temos que $\alpha > 1$. Logo podemos utilizar a Desigualdade de Hölder para a soma. Desse modo, usando esta desigualdade e as propriedades da soma, note que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{1/\beta}T^n &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} (a_n^{1/\alpha\beta}T^{n/\alpha})(a_{n+1}^{1/\beta}a_n^{-1/\alpha\beta}T^{n/\beta})\\
&\leq \left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} \left(a_n^{1/\alpha\beta}T^{n/\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} \left(a_{n+1}^{1/\beta}a_n^{-1/\alpha\beta}T^{n/\beta}\right)^{\beta}\right)^{1/\beta}\\
&= \left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} a_n^{1/\beta}T^n\right)^{1/\alpha}\left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} a_{n+1}a_n^{-1/\alpha}T^n\right)^{1/\beta}.
\end{aligned} \tag{2.43}
$$

Desde que as séries são convergentes, segue-se o resultado, pois note que sendo $sp < N$ e $\beta = \frac{N}{N-sp}$, então temos que $\frac{1}{\beta} < 1$. Logo, por (2.43) segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{1/\beta}T^n &\leq T\left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} a_n^{1/\beta}T^n\right)^{1/\alpha}\left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} a_{n+1}a_n^{-1/\alpha}T^n\right)^{1/\beta}\\
&\leq T\left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} a_n^{1/\beta}T^n\right)^{1/\alpha}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} a_{n+1}a_n^{-1/\alpha}T^n\\
&= C(s,p,N,T)\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} a_{n+1}a_n^{-1/\alpha}T^n,
\end{aligned}
$$

provando o que queríamos. ■

O seguinte lema é um resultado técnico e será usado na demostração do teorema principal desta seção.

Lema 2.3.3 *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp < N$. Considere $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, com suporte compacto e para cada $n \in \mathbb{Z}$ defina $a_n := med(\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > 2^n\})$. Então, existe uma constante $C = C(s,p,N) > 0$ tal que*

$$
C\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} a_{n+1}a_n^{-1/\alpha}2^{pn} \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \tag{2.44}
$$

onde $\alpha = \frac{N}{sp}$.

Demonstração: Sem perda de geralidade, podemos supor que $f \geq 0$ pois no caso contrario, trocando f por $|f|$, desde que $|\,|f(x)| - |f(y)|\,| \leq |f(x) - f(y)|$, obtemos o resultado para f.

Defina para cada $n \in \mathbb{Z}$, $A_n := \left\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > 2^n\right\}$. Assim, temos que $a_n = med(A_n)$ e desde que $2^n \leq 2^{n+1}$, então segue que $A_{n+1} \subseteq A_n$. Logo, isto implica que a_n é uma sequência decrescente. Isto é, $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Agora, para cada $n \in \mathbb{Z}$, considere

$$D_n = \left\{x \in \mathbb{R}^N : 2^n < |f(x)| \leq 2^{n+1}\right\} = A_n \setminus A_{n+1} \ \text{ e } \ d_n = med(D_n).$$

Então, desde que f tem suporte compacto por hipótese, isto implica que A_n e D_n são limitados e nulos quando n é muito grande. Além disso, note que os D_n's são disjuntos tais que

$$\bigcup_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \leq n}} D_l = (A_{n+1})^c, \tag{2.45}$$

e também que

$$\bigcup_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \geq n}} D_l = A_n. \tag{2.46}$$

Logo, como os D_n's são disjuntos, por (2.46) obtemos que

$$a_n = med(A_n) = med\left(\bigcup_{l \geq n} D_l\right) = \sum_{l \geq n} med(D_l) = \sum_{l \geq n} d_l. \tag{2.47}$$

Desse modo, de (2.45) e por (2.47), temos que

$$d_n = med(D_n) = med(A_n \setminus A_{n+1}) = med(A_n) - \sum_{l \geq n} med(D_l). \tag{2.48}$$

Agora, note que a série dada em (2.47) é convergente, pois sabemos que a_n é decrescente e limitada. Analogamente, temos que a série em (2.48) é convergente. Em consequência, obtemos que a série dada por

$$S := \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}} 2^{pl} a_{l-1}^{-1/\alpha} dl, \tag{2.49}$$

é convergente.

Veja que para cada $l \in \mathbb{Z}$, obtemos $D_l = A_l \setminus A_{l+1} \subseteq A_l \subseteq A_{l-1}$. Logo, segue-se que $d_l = med(D_l) \leq med(A_{l-1}) = a_{l-1}$. Isto implica em que $a_{i-1}^{-1/\alpha} dl \leq a_{i-1}^{-1/\alpha} a_{l-1}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, a inclusão

$$\left\{(i,l) \in \mathbb{Z} : a_{i-1} \neq 0 \quad \text{e} \quad a_{i-1}^{-1/\alpha} dl \neq 0\right\} \subseteq \left\{(i,l) \in \mathbb{Z} : a_{i-1} \neq 0\right\}, \tag{2.50}$$

é valida.

Por outra parte, de (2.50) e usando o fato que a sequência a_n é decrescente, note que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geq i+1}} 2^{pi} a_{i-1}^{-1/\alpha} dl &= \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}, l\geq i+1\\ a_{i-1}^{-1/\alpha} dl\neq 0}} 2^{pi} a_{i-1}^{-1/\alpha} dl \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}, l\geq i+1\\ a_{l-1}\neq 0}} 2^{pi} a_{i-1}^{-1/\alpha} dl \\
&= \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}} \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i\leq l-1}} 2^{pi} a_{i-1}^{-1/\alpha} dl \\
&\leq \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}} \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i\leq l-1}} 2^{pi} a_{l-1}^{-1/\alpha} dl \\
&= \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{p(l-1-n)} a_{l-1}^{-1/\alpha} dl,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

onde (2.51), segue-se do domínio de i dado na somatória, pois neste caso, veja que

$i \in \{l-1, l-2, l-3, \ ...\} = \{(l-1)-0, (l-1)-1, (l-1)-2, \ ...\}$. Isto é, $i = (l-1) - k \ ; \ k = 0, 1, 2, \ ...$

Mais ainda, observe que pela convergência da Série Geométrica, podemos limitar

(2.51). De fato, veja que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{p(l-1-n)}a_{l-1}^{-1/\alpha}dl &= \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-p(1+n)}2^{pl}a_{l-1}^{-1/\alpha}dl\\ &\leq \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}} 2^{pl}a_{l-1}^{-1/\alpha}dl = S.\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos que

$$\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geq i+1}} 2^{pi}a_{i-1}^{-1/\alpha}dl \leq \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}} 2^{pl}a_{l-1}^{-1/\alpha}dl = S < +\infty. \tag{2.52}$$

Agora, fixe $i \in \mathbb{Z}$ e $x \in D_i$. Então, segue-se que $2^i < |f(x)| \leq 2^{i+1}$. Além disso, para cada $j \in \mathbb{Z}$ com $j \leq i-2$ e $y \in D_j$, temos que $2^j < |f(x)| \leq 2^{j+1}$ e $2^j < 2^{i-1}$. Logo, $|f(x) - f(y)| \geq |\,|f(x)| - |f(y)|\,| \geq 2^i - 2^{j+1} \geq 2^i - 2^{i-1} = 2^{i-1}$.

Desse forma, lembrando a igualdade entre conjuntos dada em (2.45) e pelas propriedades da integral, veja que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq i-2}}\int_{D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &\geq \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq i-2}}\int_{D_j}\frac{2^{p(i-1)}}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\ &= 2^{p(i-1)}\int_{\bigcup_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leq i-2}} D_l}\frac{1}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\ &= 2^{p(i-1)}\int_{(A_{i-1})^c}\frac{1}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\ &= 2^{p(i-1)}\int_{\{|f(x)|\leq 2^{i-1}\}}\frac{1}{|x-y|^{N+sp}}dxdy.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Observe que o conjunto $(A_{i-1})^c = \{x \in \mathbb{Z} : |f(x)| \leq 2^{i-1}\}$, é um conjunto mensurável com medida finita, onde $med(A_{i-1}) = a_{i-1}$. Então, para $x \in D_j \subset \mathbb{R}^N$ fixo, em (2.53) pelo Lema 2.3.1 segue-se que existe uma constante $C_0 = C_0(s,p,N) > 0$ tal que

$$med(A_{i-1})^{-1/\alpha}C_0 \leq \int_{\{|f(x)|\leq 2^{i-1}\}}\frac{1}{|x-y|^{N+sp}}dxdy.$$

Logo, usando esta estimativa em (2.53), obtemos que

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq i-2}} \int_{D_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \geq 2^{p(i-1)} C_0 a_{i-1}^{-1/\alpha} = 2^{pi} C_1 a_{i-1}^{-1/\alpha}. \tag{2.54}$$

Analogamente, podemos encontrar uma estimativa integrando sobre $D_j \times D_i$. Com efeito, observe que aplicando o Teorema de Fubini (ver [13], pág. 521) e usando (2.54), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq i-2}} \int_{D_j\times D_i} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &= \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq i-2}} \int_{D_i}\int_{D_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx \\
&\geq 2^{pi} C_1 a_{i-1}^{-1/\alpha} med(D_i) \\
&= 2^{pi} C_1 a_{i-1}^{-1/\alpha} d_i.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Porém, por (2.48) sabemos que $d_i = a_i - \sum\limits_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geq i+1}} d_l$.

Assim, usando esta igualdade em (2.55) obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq i-2}} \int_{D_j\times D_i} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\geq 2^{pi} C_1 a_{i-1}^{-1/\alpha} d_i \\
&= 2^{pi} C_1 a_{i-1}^{-1/\alpha} \left(a_i - \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geq i+1}} d_l \right) \\
&= C_1 \left(2^{pi} a_{i-1}^{-1/\alpha} a_i - \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geq i+1}} 2^{pi} a_{i-1}^{-1/\alpha} d_l \right).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Por outra parte, lembrando a definição do S dada em (2.49), a estimativa dada em (2.55) e mais ainda, somando com respeito a $i \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq i-2}} \int_{D_j\times D_i} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\geq \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi} C_1 a_{i-1}^{-1/\alpha} d_i \\
&= C_1 \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi} a_{i-1}^{-1/\alpha} d_i \\
&= C_1 S.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Finalmente, juntando (2.57), (2.56) e (2.52), obtemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq i-2}}\int_{D_j\times D_i}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&\geq C_1\left(\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}2^{pi}a_{i-1}^{-1/\alpha}a_i-\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geq i+1}}2^{pi}a_{i-1}^{-1/\alpha}d_l\right)\\
&\geq C_1\left(\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}2^{pi}a_{i-1}^{-1/\alpha}a_i-S\right)\\
&= C_1\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}2^{pi}a_{i-1}^{-1/\alpha}a_i-C_1S\\
&\geq C_1\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}2^{pi}a_{i-1}^{-1/\alpha}a_i-\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq i-2}}\int_{D_j\times D_i}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$C_1\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}2^{pi-1}a_{i-1}^{-1/\alpha}a_i\leq\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq i-2}}\int_{D_j\times D_i}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy. \tag{2.58}$$

Observe que de (2.58) segue-se o resultado, pois se escrevemos $\mathbb{R}^N=A_l\cup(A_l)^c$, de (2.45) e (2.46) temos que $\mathbb{R}^N=\bigcup_{l\in\mathbb{Z}}D_l$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy&=\int_{\bigcup\limits_{i,j\in\mathbb{Z}}D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy,
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j<i}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy+\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i<j}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy.
\end{aligned}$$

Dessa forma, observe que pela simetria e por (2.58) temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j<i}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy+\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i<j}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&=2\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j<i}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&\geq 2\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j<i-2}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\
&\geq 2C_1\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}2^{pi-1}a_{i-1}^{-1/\alpha}a_i\\
&=C\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}2^{pi-1}a_{i-1}^{-1/\alpha}a_i=C\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}}a_{n+1}a_n^{-1/\alpha}2^{pn}.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\geq C\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}}a_{n+1}a_n^{-1/\alpha}2^{pn},
$$

como queríamos. ■

O próximo lema é muito importante para demostrar o teorema principal desta seção. No lema definiremos uma sequência de funções mensuráveis e sobre esta será feita a demostração do teorema.

Lema 2.3.4 *Sejam $f:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$, uma função mensurável e para cada $n\in\mathbb{N}$ seja $f_n(x)=\max\{\min\{f(x),-n\}\}$. Se $q\in[1,+\infty)$, então*

$$
\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}=\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\,. \tag{2.59}
$$

Demonstração: Considere as funções $|f|$ e $|f|_n$, onde esta última é a função obtida pelo corte de $|f|$ no máximo até n. Sendo assim, segue-se pela definição de $|f|_n$ que

$$
\lim_{n\to+\infty}|f|_n=|f|\,. \tag{2.60}
$$

Além disso, novamente pela definição de f_n, temos que $|f|_n = |f_n|$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, veja que $|f_n|$ é não negativa e mensurável, pois por hipótese f é mensurável. Dessa forma, aplicando o Lema de Fatou 1.2.9 e por (2.60), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|_n^q\right)^{\frac{1}{q}} &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} |f|_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

A desigualdade contraria segue-se do fato que $|f|_n \leq |f|$, para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Finalmente estamos prontos para o primeiro teorema desta seção. Neste caso, provaremos que o espaço de Sobolev Fracionário $W^{s,p}$, está continuamente imerso num espaço de L^q para um q específico. Antes disso, faremos uma definição.

Definição 2.3.5 *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp < N$. Então, definimos $p^* := \dfrac{Np}{N-sp}$, como sendo o* ***Expoente Fracionário Crítico de Sobolev****.*

Por simplicidade, restringimos ao caso em que p^* é finito.

Teorema 2.3.6 *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp < N$. Então, existe uma constante positiva $C = C(s,p,N)$ tal que para cada função $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, mensurável com suporte compacto, temos que*

$$
\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^p \leq c \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy, \tag{2.61}
$$

onde p^* é o Expoente Fracionário Crítico de Sobolev.

Em particular, o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in [p, p^*]$.

Demonstração: Primeiramente, note que se o lado direito de (2.61) for infinito, então o resultado segue-se. Sendo assim, suponhamos que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy < +\infty. \tag{2.62}
$$

Por outra parte, note que lembrando a definição de f_n dada no Lema 2.3.4, temos que $f_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda, veja que juntando (2.62), o Lema 2.3.4 e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 1.2.10, obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy. \tag{2.63}$$

Assim, por essa igualdade é suficiente mostrar que o resultado é satisfeito para f_n, onde $n \in \mathbb{N}$. Para isso, considere para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $A_n = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > 2^n\right\}$ e $a_n = med(A_n)$, igual como no Lema 2.3.3. Então, novamente por (2.45), (2.46) e considerando o fato que os conjuntos D_n's são disjuntos, temos que

$$\begin{aligned}\|f_n\|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)|^{p^*}dx = \int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} D_n} |f_n(x)|^{p^*}dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{D_n} |f_n(x)|^{p^*}dx \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{A_n\setminus A_{n-1}} \left(2^{n+1}\right)^{p^*}dx \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{A_n} \left(2^{n+1}\right)^{p^*}dx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(2^{n+1}\right)^{p^*} a_n \\ &= 2^{p^*}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(2^{np^*}\right) a_n. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Logo, elevando ambos lados de (2.64) por $\frac{p}{p^*}$, onde pela definição do p^*, temos que $\frac{p}{p^*} = N - \frac{sp}{N} < 1$, segue que

$$\begin{aligned}\|f_n\|^{p}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le 2^p\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(2^{np^*}\right) a_n\right)^{p/p^*} &\le 2^p \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(2^{np^*}a_n\right)^{p/p^*} \\ &= 2^p \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} a_n^{p/p^*}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Por outro lado, tomando $T = 2^p > 1$ e desde que $p \in [1, +\infty)$, com $sp < N$, então pelo Lema 2.3.2, temos que existe uma constante $C_0 = C_0(s,p,N,T) > 0$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{1/\beta}T^n \le C_0 \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a_n\neq 0}} a_{n+1}a_n^{-1/\alpha}T^n,$$

onde $\beta = \frac{N}{N-sp}$ e $\alpha = \frac{N}{sp}$.

Logo, usando esta ultima estimativa em (2.65), temos que

$$\begin{aligned}\|f_n\|^p_{L^{p*}(\mathbb{R}^N)} \leq 2^p \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} a_n^{p/p*} &= T \sum_{n\in\mathbb{Z}} T^n a_n^{1/\beta} \\ &\leq TC_0 \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ a_n\neq 0}} a_{n+1} a_n^{-1/\alpha} T^n \\ &= C_1 \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ a_n\neq 0}} a_{n+1} a_n^{-1/\alpha} 2^{pn}, \end{aligned} \tag{2.66}$$

onde $C_1 := TC_0 = 2^p C_0(s,p,N)$.

Finalmente, usando o fato que $f_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto, pelo Lema 2.3.3 segue-se que existe uma constante $C_2 = C_2(s,p,N) > 0$ tal que

$$C_2 \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ a_n\neq 0}} a_{n+1} a_n^{-1/\alpha} 2^{pn} \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy. \tag{2.67}$$

Dessa forma, juntando (2.66) e (2.67), segue-se que

$$\begin{aligned}\|f_n\|^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ a_n\neq 0}} a_{n+1} a_n^{-1/\alpha} 2^{pn} &\leq C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &= C \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy.\end{aligned}$$

Logo, pela igualdade obtida em (2.63), conseguimos o que se pretendia provar.

Mas por outro lado, resta mostrar que o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in [p, p^*]$.

Seja $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Então pela definição do espaço $W^{s,p}$, temos que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda, pelo que foi mostrado anteriormente, em particular $f \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Seja $q \in (p, p^*)$ e considere um $\theta \in (0,1)$, tal que $q = p\theta + (1-\theta)p^*$. Então, pela Desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $\frac{1}{\theta}$ e $\frac{1}{1-\theta}$ e usando a estimativa dada pelo

Teorema 2.3.6, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^q \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^{p\theta} \, |f(x)|^{(1-\theta)p^*} \, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \, dx \right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^{p^*} \, dx \right)^{1-\theta} \\
&\leq \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^{p\theta} \, C \, \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^{(1-\theta)p^*} \\
&= C \, \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^{p\theta+(1-\theta)p^*} \\
&= C \, \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^q \, ,
\end{aligned}
$$

mostrando a continuidade da inclusão. ■

Nosso próximo resultado é novamente uma imersão contínua para os Espaços de Sobolev Fracionários. Mas neste caso é para um conjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$. Porém, este não pode ser qualquer aberto de $\mathbb{R}^N$. Como no caso inteiro, este aberto deve ser um Domínio de Extensão. Assim, a constante que vai existir pela imersão contínua também vai depender de Ω. Por outro lado, precisando que nosso domínio seja de extensão, faremos uso da seção anterior, isto é, a Seção 2.2.

Teorema 2.3.7 *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1, +\infty)$ tais que $sp < N$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um Domínio de Extensão para $W^{s,p}$. Então o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para qualquer $q \in [p, p^*]$.*

Além disso, se Ω é limitado, então o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*]$.

Demonstração: Seja $f \in W^{s,p}(\Omega)$. Então por hipótese, sendo Ω um Domínio de Extensão, segue pela Definição 2.2.1 que existem $C_1 = C_1(s,p,N,\Omega) > 0$ e uma função $\overline{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\overline{f} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\overline{f} \equiv f$ q.t.p. em Ω e além disso,

$$
\left\| \overline{f} \right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \, \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \, . \tag{2.68}
$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.3.6, sabemos que o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso no espaço $L^q(\mathbb{R}^N)$, para qualquer $q \in [p, p^*]$. Isto implica que existe uma constante não negativa $C_2 = C_2(s, p, N)$, tal que

$$\left\|\overline{f}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \left\|\overline{f}\right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.69}$$

Dessa forma, juntando (2.68), (2.69) e mais o resultado no qual $\overline{f} \equiv f$ q.t.p. em Ω, obtemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(\Omega)} = \left\|\overline{f}\right\|_{L^q(\Omega)} \leq \left\|\overline{f}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \left\|\overline{f}\right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} &\leq C_2 C_1 \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \\ &= C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.70}$$

onde $C = C(s, p, N, \Omega) = C_2 C_1 > 0$.

Logo, segue-se a imersão para qualquer $q \in [p, p^*]$

Agora, suponha que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, seja um subconjunto limitado. Então, isto implica que $med(\Omega) < +\infty$. Provemos que dada $f \in W^{s,p}(\Omega)$, para qualquer $q \in [1, p^*]$, existe uma constante $\overline{C} > 0$, tal que

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \overline{C} \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Com efeito, desde que $f \in W^{s,p}(\Omega)$, então pela desigualdade (2.70), tomando $q = p^*$, existe uma constante $C_4 = C_4(s, p, N, \Omega) > 0$ tal que

$$\|f\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_4 \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}. \tag{2.71}$$

Agora, considere $1 \leq q < p^*$. Então, pela Desigualdade de Hölder, tomando $\frac{p^*}{q}$ e $\frac{p^*}{p^*-q}$ como expoentes conjugados, veja que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_\Omega |f(x)|^q |1| \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{p^*} dx\right)^{q/p^*} \left(\int_\Omega 1 dx\right)^{p^*-q/p^*} \\ &= \|f\|_{L^{p^*}(\Omega)}^q (med(\Omega))^{p^*-q/p^*}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p*}(\Omega)} (med(\Omega))^{1/q-1/p^*}. \tag{2.72}$$

Desse modo e juntando as estimativas (2.71) e (2.72), obtemos que

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|f\|_{L^{p^*}(\Omega)} (med(\Omega))^{1/q-1/p^*}\\ &\leq C_4 \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} (med(\Omega))^{1/q-1/p^*}\\ &= \overline{C}\, \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)},\end{aligned}$$

onde $\overline{C} = C_4 (med(\Omega))^{1/q-1/p^*}$ e além disso $\overline{C} = \overline{C}(s,p,q,N,\Omega)$, pela Definição 2.3.5 e desde que $C_4 = C_4(s,p,N,\Omega)$. ■

No caso $sp = N$, note que sendo $p^* = \frac{Np}{N-sp}$, veja que quando $sp \longrightarrow N$, então temos que $p* \longrightarrow +\infty$. Assim, pelos Teoremas 2.3.6 e 2.3.7, estaríamos tentados a pensar que o espaço $W^{s,p}$ está continuamente imerso em L^q para qualquer $q \in [p, +\infty)$. De fato, isto é verdadeiro e será demostrado nos próximos dois teoremas. Porém, para suas demostrações precisaremos da inclusão dada na Proposição 2.1.4.

Teorema 2.3.8 *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp = N$. Então, existe uma constante $C = C(s,p,N) > 0$ tal que para cada função $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, mensurável com suporte compacto, temos que*

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)},$$

para qualquer $q \in [p,+\infty)$. Isto é, o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso no espaço $L^q(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Seja $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e considere $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $s_\varepsilon := s - \varepsilon > 0$ e também que $p_\varepsilon^* := \frac{Np}{N - s_\varepsilon p} > q > p$. Então, veja sendo $sp = N$ por hipótese, temos que $s_\varepsilon p < N$. Assim, para qualquer $q \in [p, p_\varepsilon^*]$ pelo Teorema 2.3.6, existe uma constante não negativa C_1 tal que

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|f\|_{W^{s_\varepsilon,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.73}$$

Além disso, note que sendo $s_\varepsilon = s-\varepsilon$, obtemos que $s_\varepsilon \leq s$. Mais ainda, lembrando a Proposição 2.1.4, então segue-se que existe uma constante não negativa $C_2 \geq 1$ tal que

$$\|f\|_{W^{s_\varepsilon,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} . \tag{2.74}$$

Desse modo, juntando (2.73), (2.74) e tomando $C := C_1C_2$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|f\|_{W^{s_\varepsilon,p}(\mathbb{R}^N)} &\leq C_1C_2 \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &= C \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} , \end{aligned} \tag{2.75}$$

para todo $q \in [p, p^*_\varepsilon]$ e para todo $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno.

Resta mostrar que (2.75) é satisfeita para qualquer $q \in [p, +\infty)$. De fato, note que sendo $p^* \leq p^*_\varepsilon$, como a estimativa em (2.75) é valida para todo $\varepsilon > 0$, então fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, temos que $sp \longrightarrow N$ e isto implica que $p^* \longrightarrow +\infty$. Assim, $p^*_\varepsilon \longrightarrow +\infty$ e portanto (2.75) é satisfeita para todo $q \in [p, +\infty)$. ■

O próximo resultado prova a imersão contínua dada no Teorema 2.3.8, para um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Domínio de Extensão.

Teorema 2.3.9 *Sejam $s \in (0,1)$ e $1 \leq p < +\infty$, tais que $sp = N$. Considere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um Domínio de Extensão para o espaço $W^{s,p}(\Omega)$. Então, existe uma constante positiva $C = C(s,p,N,\Omega)$ tal que para toda $f \in W^{s,p}(\Omega)$, temos que*

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} ,$$

para qualquer $q \in [p, +\infty)$. Ou seja, o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$. Além disso, se Ω for limitado, então $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, +\infty)$.

Demonstração: A demostração deste Teorema 2.3.9 é igual que a prova do Teorema (2.3.8) anterior, só que em lugar de usar o Teorema 2.3.6 na demostração, usamos o Teorema 2.3.7. De fato, considerando novamente $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tomando s_ε e p^*_ε como no Teorema 2.3.8 então, sabemos que $s_\varepsilon p < N$. Logo, sendo Ω um

Domínio de Extensão, pelo Teorema 2.3.7 sabemos que existe uma constante $C_3 > 0$ tal que para cada $f \in W^{s_\epsilon,p}(\Omega)$, satisfaz

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C_3 \|f\|_{W^{s_\varepsilon,p}(\Omega)}, \tag{2.76}$$

para qualquer $q \in [p, p_\varepsilon^*]$.

Porém, pela Proposição 2.1.4, desde que $s_\varepsilon \leq s$, existe uma constante $C_4 > 0$, tal que

$$\|f\|_{W^{s_\varepsilon,p}(\Omega)} \leq C_4 \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}. \tag{2.77}$$

Logo, juntando (2.76), (2.77) e tomando $C = C_3 C_4$, segue-se que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C_3 \|f\|_{W^{s_\varepsilon,p}(\Omega)} &\leq C_3 C_4 \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \\ &= C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.78}$$

para todo $q \in [p, p_\varepsilon^*]$ e para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Novamente, fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, segue-se que $p_\varepsilon^* \longrightarrow +\infty$ e portanto (2.78) é satisfeita para todo $q \in [p, +\infty)$.

Para $1 \leq q \leq p$, observe que sendo Ω limitado, para cada $f \in W^{s,p}(\Omega)$, temos que $f \in L^p(\Omega)$. Logo, pela Desigualdade de Hölder tomando $\frac{p}{q}$ e $\frac{p}{p-q}$ como expoentes conjugados, obtemos que $f \in L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q \leq p$. Assim, segue-se o resultado.

■

Damos por finalizado esta seção das desigualdades de Sobolev Fracionárias, as quais implicaram nas imersões contínuas. Pode-se observar que a parte mais complicado da presente seção são as demostrações dos lemas, pois estas são muito técnicas. Na próxima seção, provaremos alguns teoremas que implicam imersões compactas, complementando desse modo as imersões apresentadas na presente seção.

2.4 Imersões Compactas

Nesta seção provaremos duas imersões compactas nos Espaço de Sobolev Fracionários $W^{s,p}(\Omega)$ em domínios limitados. Primeiramente, mostraremos que dado um Domínio de Extensão limitado, para $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ então, o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^q(\Omega)$ para qualquer $q \in [1,p]$. Por outro lado, provaremos que o Teorema 2.3.7 no caso Ω limitado é de fato uma imersão compacta, mas neste caso, vai ser para qualquer $q \in [1,p^*)$. Sendo assim, restaria mostrar que o operador identidade $Id : W^{s,p}(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos para todo $q \in [1,p^*)$. Ou equivalentemente, mostrar que cada conjunto limitado do espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é pré-compacto. Vale a pena dizer que da mesma forma que na seção anterior, estas demostrações são muito técnicas, dessa forma iremos escrever todos os detalhes possíveis.

Teorema 2.4.1 *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um Domínio de Extensão limitado para $W^{s,p}(\Omega)$. Se $\mathfrak{B}$ é um subconjunto limitado do espaço $W^{s,p}(\Omega)$, então para qualquer $q \in [1,p]$, o conjunto $\mathfrak{B}$ é pré-compacto em $L^q(\Omega)$. Isto é, $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso no espaço $L^q(\Omega)$.*

Demonstração: Primeiramente, veja que $W^{s,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ e para qualquer $f \in W^{s,p}(\Omega)$, temos que $\|f\|^q_{L^q(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. De fato, desde que $f \in W^{s,p}(\Omega)$, em particular temos que $f \in L^p(\Omega)$. Daí, desde que Ω é um domínio limitado, então temos que $med(\Omega) < +\infty$. Assim, tomando $\frac{p}{q}$ e $\frac{p}{p-q}$ como expoentes conjugados, pela Desigualdade de Hölder, segue-se que

$$\begin{aligned}
\|f\|^q_{L^q(\Omega)} = \int_\Omega |f|^q \, 1dx \leq \| \, |f|^q \|_{L^{p/q}(\Omega)} \|1\|_{L^{p/p-q}(\Omega)} &= \|f\|^q_{L^p(\Omega)} \, med(\Omega)^{p-q/p} \\
&\leq \|f\|^q_{L^p(\Omega)} \, med(\Omega)^{p-q/p} \\
&\leq med(\Omega)^{p-q/p} \, \|f\|^q_{W^{s,p}(\Omega)} \\
&= C \, \|f\|^q_{W^{s,p}(\Omega)} \, .
\end{aligned}$$

Resta mostrar que $\mathfrak{B}$ é um subconjunto pré-compacto em $L^q(\Omega)$. De fato, note que sendo $\mathfrak{B}$ um subconjunto limitado em $W^{s,p}(\Omega)$, então temos que

$$\sup_{f\in\mathfrak{B}}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy<+\infty. \tag{2.79}$$

Por outro lado, sabemos que $L^q(\Omega)$ é um espaço de Banach e além disso, sabemos que em todo espaço de Banach, as noções dos conjuntos pré-compactos e totalmente limitados são equivalentes. Assim, como queremos mostrar que $\mathfrak{B}$ é pré-compacto em $L^q(\Omega)$, então basta provar que $\mathfrak{B}$ é totalmente limitado em $L^q(\Omega)$, isto é, para qualquer $\varepsilon\in(0,1)$ existem $\beta_1,\beta_2,\ \dots\ ,\beta_M\in L^q(\Omega)$, tais que para qualquer $f\in\mathfrak{B}$, existe um $j\in\{1,2,\ \dots\ ,M\}$ tal que

$$\|f-\beta_j\|_{L^q(\Omega)}\leq\varepsilon. \tag{2.80}$$

Veja que por hipótese, temos que $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ é um Domínio de Extensão limitado para $W^{s,p}(\Omega)$. Logo, por (2.2.1) existem $C>0$ e uma função $\overline{f}\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tais que $f\equiv\overline{f}$ q.t.p. em Ω. Além disso, temos que $\left\|\overline{f}\right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}\leq C\left\|f\right\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.

Note que sendo $p\in[1,+\infty)$, $q\in[1,p]$ e Ω ser um domínio limitado, então temos que $\overline{f}\in L^q(\Omega)$. De fato, usando novamente a Desigualdade de Hölder com os mesmos expoentes conjugados $\frac{p}{q}$ e $\frac{p}{p-q}$, segue-se que

$$\left\|\overline{f}\right\|^q_{L^q(\Omega)}=\int_{\Omega}\left|\overline{f}\right|^q|1|\,dx\leq\left\|\ \left|\overline{f}\right|^q\right\|_{L^{p/q}(\Omega)}\|1\|_{L^{p/p-q}(\Omega)}=\|f\|^q_{L^p(\Omega)}\,med(\Omega)^{p-q/p}<+\infty.$$

Em particular, considerando um cubo $\Omega\subset Q$, temos que $\overline{f}\in L^q(Q)$ para todo $q\in[1,p]$. Agora, defina

$$C_1:=1+\sup_{f\in\mathfrak{B}}\left\|\overline{f}\right\|_{L^q(Q)}+\sup_{f\in\mathfrak{B}}\int_{Q}\int_{Q}\frac{\left|\overline{f}(x)-\overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy,$$

no qual esta bem definido desde que $\overline{f}\in L^q(Q)$ e por (2.79).

Por outra parte, para qualquer $\varepsilon\in(0,1)$, defina os números reais não negativos $\rho=\rho(\varepsilon)$ e $\eta=\eta(\varepsilon)$, dados por

$$\rho:=\left(\frac{\varepsilon}{2C_1^{1/q}N^{\lambda}}\right)^{1/s}\ \text{ e }\ \eta:=\frac{\varepsilon\rho^{N/q}}{2},$$

onde $\lambda := \dfrac{N+sp}{2p}$.

Agora, desde que Ω é limitado, podemos considerar uma coleção de cubos disjuntos $Q_1, Q_2, \ ... \ , Q_n \subset \mathbb{R}^N$ de lado ρ, tais que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} Q_j := Q$$

Dessa forma, para cada $x \in \Omega$, existe um único $j_x \in \{1, 2, \ ... \ , n\}$ tal que $x \in Q_{j_x}$. Logo, para cada $f \in \mathfrak{B}$, considere

$$P(f)(x) := \frac{1}{med(Q_{j_x})} \int_{Q_{j_x}} \overline{f}(y)dy,$$

onde $\overline{f}$ é dada pela extensão.

Note que $P(f+g) = P(f) + P(g)$, para todo $f, g \in \mathfrak{B}$. Para provar isso, veja que é suficiente mostrar que $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$. Com efeito, desde que $f, g \in \mathfrak{B}$, em particular, obtemos que $f + g \in W^{s,p}(\Omega)$. Logo, pela Definição 2.2.1, segue-se que $\overline{f+g} \equiv f + g$, q.t.p. em Ω. Além disso, temos que existe $C > 0$, tal que

$$\left\| \overline{f+g} \right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\| f + g \right\|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Daí, note que para quase todo $x \in \Omega$, temos que $(\overline{f+g})(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \overline{f}(x) + \overline{g}(x)$, isto é, $\overline{f+g} \equiv \overline{f} + \overline{g}$, q.t.p. em Ω.

Desse modo, resta mostrar que $\left\| \overline{f} + \overline{g} \right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\| f + g \right\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. Porém, este resultado é satisfeito desde que $\left\| \overline{f} \right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\| f \right\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ e $\left\| \overline{g} \right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\| g \right\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. Portanto, obtemos a linearidade do operador P.

Por outro lado, veja que $P(f)$ é uma contante finita que depende de f e j, pois note que $P(f) \leq \| \ \overline{f} \ \|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}$. Assim, denotando por $P(f) := q_j(f)$, em qualquer Q_j para $j \in \{1, 2, \ ... n\}$, podemos definir

$$R(f) := \rho^{N/q} \left(q_1(f), q_2(f), \ ... \ , q_n(f) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Note que pela linearidade de P, consegue-se verificar que $R(f+g) = R(f) + R(g)$, onde $f, g \in \mathfrak{B}$.

Agora, desde que $R(f) \in \mathbb{R}^n$, considerando a $q-norma$ no espaço $\mathbb{R}^n$, dada por $\|v\|_q = \left(\sum_{j=1}^n |v_j|^q\right)^{1/q}$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, obtemos que $\|R(f)\|_q^q = \sum_{j=1}^n \left|\rho^{N/q} q_j(f)\right|^q$. Logo, segue-se que

$$
\begin{aligned}
\|P(f)\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_\Omega |P(f)(x)|^q \, dx &= \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{n} \Omega \cap Q_j} |P(f)(x)|^q \, dx \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega \cap Q_j} |P(f)(x)|^q \, dx \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega \cap Q_j} |q_j(f)|^q \, dx \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_{Q_j} |q_j(f)|^q \, dx \\
&= \sum_{j=1}^n |q_j(f)|^q \, med(Q_j). \qquad (2.81)
\end{aligned}
$$

Porém, sabemos que Q_j é um cubo de lado ρ, portanto, temos que $med(Q_j) = \rho^N$. Mais ainda, para ε suficientemente pequeno, temos que $\rho^N \leq 1$. Desse modo, usando isto em (2.81), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|P(f)\|_{L^q(\Omega)}^q \leq \sum_{j=1}^n |q_j(f)|^q \, med(Q_j) &= \rho^N \sum_{j=1}^n |q_j(f)|^q \\
&= \sum_{j=1}^n \left|\rho^{N/q} q_j(f)\right|^q \\
&= \|R(f)\|_q^q \\
&\leq \frac{\|R(f)\|_q^q}{\rho^N}. \qquad (2.82)
\end{aligned}
$$

Note que pela definição de $R(f)$ e da $q-norma$ em $\mathbb{R}^n$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|R(f)\|_q^q = \rho^N \sum_{j=1}^n |q_j(f)|^q &= \rho^N \sum_{j=1}^n \left| \frac{1}{med(Q_j)} \int_{Q_j} \overline{f}(y) dy \right|^q \\
&= \frac{\rho^N}{\rho^{Nq}} \sum_{j=1}^n \left| \int_{Q_j} \overline{f}(y) dy \right|^q
\end{aligned}
$$

Por outro lado, note que sendo a função $h(z) = z^q$ com $q > 1$, convexa, então podemos usar a Desigualdade de Jensen (ver Teorema 1.2.8). Mais ainda desde que

$\frac{\rho^N}{\rho^{Nq}} \leq 1$, então note que

$$\begin{aligned}
\|R(f)\|_q^q = \frac{\rho^N}{\rho^{Nq}} \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{Q_j} \overline{f}(y)dy \right|^q \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{Q_j} \left|\overline{f}(y)\right|^q dy &= \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_j} \left|\overline{f}(y)\right|^q dy \\
&= \left\|\overline{f}\right\|_{L^q(\hat{Q})}^q \\
&\leq \sup_{f \in \mathfrak{B}} \left\|\overline{f}\right\|_{L^q(\hat{Q})}^q \\
&\leq C_1
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos que

$$\sup_{f \in \mathfrak{B}} \|R(f)\|_q^q \leq C_1.$$

Mostrando desse modo que, o conjunto $R(\mathfrak{B})$ é limitado em R^n, com respeito a $q - norma$ em $\mathbb{R}^n$ que é equivalente à norma *euclidiana* de $\mathbb{R}^n$. Logo, como a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é finita, obtemos que $R(\mathfrak{B})$ é totalmente limitado. Portanto, existem $b_1, b_2, \, ... \, , b_M \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$R(\mathfrak{B}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} B_\eta(b_i), \tag{2.83}$$

onde B_η são as bolas de R^n com respeito à $q - norma$.

Agora, para cada $i \in \{1, 2, \, ... \, , M\}$, tome $b_i := (b_{i,1}, \, ... \, , b_{i,n}) \in R^n$. Então, como para cada $x \in \Omega$ existe um único $j(x) = j_x \in \{1, 2, \, ... \, , n\}$ tal que $x \in Q_{j_x}$, então podemos definir

$$\beta_i(x) := \rho^{-N/q} b_{i,j(x)}.$$

Note que β_i é constante sobre Q_j, pois veja que para qualquer $x \in Q_{j_x}$, temos

$$P(\beta_i)(x) = \frac{1}{med(Q_{j_x})} \int_{Q_{j_x}} \rho^{-N/q} b_{i,j(x)} dy = \rho^{-N/q} b_{i,j(x)} = \beta_i(x).$$

Isto é,

$$q_j(\beta_i) = \beta_i = \rho^{-N/q} b_{i,j}. \tag{2.84}$$

Observe que de (2.84) e pela definição de $R(\cdot)$, estas implicam que

$$\begin{aligned} R(\beta_i) = \rho^{N/q}(q_1(\beta_i), \ \dots, q_n(\beta_i)) &= \rho^{N/q}(\beta_i, \ \dots, \beta_i) \\ &= \rho^{N/q}\left(\rho^{-N/q} \cdot b_{i,1}, \ \dots, \rho^{-N/q} \cdot b_{i,n}\right) \\ &= (b_{i,1}, \ \dots, b_{i,n}) \\ &= b_i. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Mais ainda, note que para cada $f \in \mathfrak{B}$, usando o fato que $\Omega \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_j$, união disjunta, e desde que para toda função F integrável sabemos que

$$\left|\int F(x)dx\right| \leq \int |F(x)| \, dx,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \|f - P(f)\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_j \cap \Omega} |f(x) - P(f)(x)|^q \, dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{Q_j \cap \Omega} |f(x) - P(f)(x)|^q \, dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{Q_j \cap \Omega} \left| f(x) - \frac{1}{med(Q_j)} \int_{Q_j} \overline{f}(y)dy \right|^q dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{med(Q_j)^q} \int_{Q_j \cap \Omega} \left| f(x) med(Q_j) - \int_{Q_j} \overline{f}(y)dy \right|^q dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{med(Q_j)^q} \int_{Q_j \cap \Omega} \left| \int_{Q_j} f(x)dy - \int_{Q_j} \overline{f}(y)dy \right|^q dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{med(Q_j)^q} \int_{Q_j \cap \Omega} \left| \int_{Q_j} \left(f(x) - \overline{f}(y)\right) dy \right|^q dx \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{med(Q_j)^q} \int_{Q_j \cap \Omega} \left(\int_{Q_j} \left|f(x) - \overline{f}(y)\right| dy \right)^q dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\rho^{Nq}} \int_{Q_j \cap \Omega} \left(\int_{Q_j} \left|f(x) - \overline{f}(y)\right| dy \right)^q dx. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Agora, fixando um $j \in \{1, 2, \ \dots, n\}$, aplicando a Desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados p e $\frac{p}{p-1}$, para todo $x, y \in Q_j$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^{Nq}}\left(\int_{Q_j}\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|dy\right)^q &\leq \frac{1}{\rho^{Nq}}\|\ |1|\ \|^q_{L^{p/p-1}(Q_j)}\left\|f(x)-\overline{f}\right\|^q_{L^p(Q_j)}\\
&= \frac{1}{\rho^{Nq}}med(Q_j)^{q(p-1/p)}\left(\int_{Q_j}\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|^p dy\right)^{q/p}\\
&= \frac{1}{\rho^{Nq}}\rho^{Nq(p-1)/p}\left(\int_{Q_j}\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|^p dy\right)^{q/p}\\
&= \frac{1}{\rho^{Nq/p}}\left(\int_{Q_j}\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|^p dy\right)^{q/p}\\
&= \frac{1}{\rho^{Nq/p}}|x-y|^{\frac{q}{p}(N+sp)}\left(\int_{Q_j}\frac{\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}}dy\right)^{q/p}\\
&\leq \frac{1}{\rho^{Nq/p}}\rho^{\frac{q}{p}(N+sp)}\left(\int_{Q_j}\frac{\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}}dy\right)^{q/p}\\
&= \rho^{sq}\left(\int_{Q_j}\frac{\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}}dy\right)^{q/p}\\
&\leq \rho^{sq}N^{q\lambda}\left(\int_{Q_j}\frac{\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}}dy\right)^{q/p}, \qquad (2.87)
\end{aligned}$$

onde a desigualdade em (2.87), segue-se do fato que $N^{q\lambda} = N^{\frac{q}{2p}(N+ps)} > 0$, afinal definimos $\lambda := \frac{N+sp}{2p}$.

Logo, juntando (2.86), (2.87) note que

$$\begin{aligned}
\|f-P(f)\|^q_{L^q(\Omega)} &\leq \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\rho^{Nq}}\int_{Q_j\cap\Omega}\left(\int_{Q_j}\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|dy\right)^q dx.\\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{Q_j\cap\Omega}\left[\frac{1}{\rho^{Nq}}\left(\int_{Q_j}\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|dy\right)^q\right]dx\\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\int_{Q_j\cap\Omega}\rho^{sq}N^{q\lambda}\left(\int_{Q_j}\frac{\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}}dy\right)^{\frac{q}{p}}dx\\
&= \rho^{sq}N^{q\lambda}\int_{\bigcup\limits_{j=1}^{n}Q_j\cap\Omega}\left(\int_{Q_j}\frac{\left|f(x)-\overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}}dy\right)^{\frac{q}{p}}dx
\end{aligned}$$

Mais ainda, usando a Desigualdade de Jensen, pois a função $t(z) = z^{q/p}$, é côncava para $\frac{q}{p} \leq 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|f - P(f)\|^q_{L^q(\Omega)} &\leq \rho^{sq} N^{q\lambda} \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_j \cap \Omega} \left(\int_{Q_j} \frac{\left|f(x) - \overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}} dy \right)^{\frac{q}{p}} dx \\
&\leq \rho^{sq} N^{q\lambda} \int_Q \left(\int_Q \frac{\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}} dy \right)^{\frac{q}{p}} dx \\
&\leq \rho^{sq} N^{q\lambda} \int_Q \int_Q \left(\frac{\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}} \right)^{\frac{q}{p}} dy dx \\
&\leq \rho^{sq} N^{q\lambda} \int_Q \int_Q \frac{\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}} dy dx \\
&\leq \rho^{sq} N^{q\lambda} \sup_{f \in \mathfrak{B}} \int_Q \int_Q \frac{\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}} dy dx \\
&\leq \rho^{sq} N^{q\lambda} C_1, \qquad (2.88)
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade (2.88) segue-se pela definição de C_1.

Agora, lembrando que $\lambda := \frac{N+sp}{2p}$ e também que $\rho := \left(\frac{\varepsilon}{2C_1^{1/q} N^\lambda} \right)^{1/s}$, substituindo em (2.88), teremos que

$$
\begin{aligned}
\|f - P(f)\|^q_{L^q(\Omega)} \leq \rho^{sq} N^{q\lambda} C_1 &= \left(\left(\frac{\varepsilon}{2C_1^{1/q} N^\lambda} \right)^{1/s} \right)^{sq} N^{q\lambda} C_1 \\
&= \frac{\varepsilon^q}{2^q}. \qquad (2.89)
\end{aligned}
$$

Consequentemente, observe que usando (2.82), (2.84) e (2.89), temos que para cada $i \in \{1, 2, \; ... \; , M\}$,

$$
\begin{aligned}
\|f - \beta_i\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|f - P(f)\|_{L^q(\Omega)} + \|P(\beta_i) - \beta_i\|_{L^q(\Omega)} + \|P(f - \beta_i)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\|R(f - \beta_i)\|_{L^q(\Omega)}}{\rho^{N/q}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|R(f - \beta_i)\|_{L^q(\Omega)}}{\rho^{N/q}}. \qquad (2.90)
\end{aligned}
$$

Agora, dado que $f \in \mathfrak{B}$, lembrando (2.83), (2.85), e tomando $i \in \{1, 2, \; ... \; , M\}$ tal que $R(f) \in B_\eta(b_i)$, então de (2.90), (2.85) e desde que $\eta := \frac{\varepsilon \rho^{N/q}}{2}$, obtemos finalmente que

$$\begin{aligned}\|f-\beta_i\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\|R(f-\beta_i)\|_{L^q(\Omega)}}{\rho^{N/q}} &= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\|R(f)-R(\beta_i)\|_{L^q(\Omega)}}{\rho^{N/q}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\|R(f)-b_i\|_{L^q(\Omega)}}{\rho^{N/q}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\eta}{\rho^{N/q}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon\rho^{N/q}}{2\rho^{N/q}} \\ &= \varepsilon. \qquad (2.91)\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos (2.80) e assim o conjunto $\mathfrak{B}$ é pré-compacto. Portanto, $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso no espaço $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,p]$. ■

Como consequência do teorema anterior, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.4.2 *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp < N$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um Domínio de Extensão limitado para $W^{s,p}(\Omega)$, então para qualquer $q \in [1,p^*)$, temos que $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso no espaço $L^q(\Omega)$.*

Demonstração: Observe que se $q \in [1,p]$, então a imersão compacta segue-se pelo Teorema 2.4.1.

Seja $q \in (p,p^*)$, onde p^* é o Expoente Crítico Fracionário de Sobolev. Então veja que pelo Teorema 2.3.7, já temos a imersão contínua do espaço $W^{s,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$. Assim, resta mostrar que o operador identidade $Id : W^{s,p}(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos. Como no Teorema 2.4.1, considere $\mathfrak{B}$ um subconjunto limitado do $W^{s,p}(\Omega)$ e a coleção dos números reais não negativos B_i com $i \in \{1,2\dots,M\}$, dados neste teorema. Provemos que $\mathfrak{B}$ é pré-compacto. De fato, desde que $q \in (p,p^*)$, então escolhendo um $\theta \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{q}=\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{p^*}$, podemos usar a Desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $\frac{p}{\theta q}$ e $\frac{p^*}{(1-\theta)q}$. Assim, note que

$$\begin{aligned}
\|f-\beta_i\|_{L^q(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f(x)-\beta_i(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)-\beta_i(x)|^{\theta q}\,|f(x)-B_i(x)|^{(1-\theta)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\left(\int_\Omega |f(x)-\beta_i(x)|^p\,dx\right)^{\theta q/p}\left(\int_\Omega |f(x)-\beta_i(x)|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{(1-\theta)q}{p^*}}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)-\beta_i(x)|^p\,dx\right)^{\theta/p}\left(\int_\Omega |f(x)-\beta_i(x)|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1-\theta}{p^*}} \\
&= \|f-\beta_i\|^{\theta}_{L^p(\Omega)}\,\|f-\beta_i\|^{1-\theta}_{L^{p^*}(\Omega)}\,. \qquad (2.92)
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que $sp<N$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ é um Domínio de Extensão para $W^{s,p}(\Omega)$ e desde que $q\in[p,p^*]$, então pelo Teorema 2.3.7 teremos que $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso no espaço $L^q(\Omega)$. Logo, existe uma constante $C=C(s,p,N,\Omega)>0$ tal que para cada $f\in W^{s,p}(\Omega)$,

$$\|f\|_{L^q(\Omega)}\leq C\,\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}\,.$$

Em particular, para $q=p^*$ segue-se que

$$\|f\|_{L^{p^*}(\Omega)}\leq C\,\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}\,. \qquad (2.93)$$

Desse modo, desde que $f\in\mathfrak{B}$, por (2.91) tomando $q=p$, sabemos que para cada $i\in\{1,2,\ \dots\ ,M\}$ temos que $\|f-\beta_i\|_{L^p(\Omega)}\leq\varepsilon$. Logo, usando este fato em (2.92) e junto com (2.93), obtemos finalmente que

$$\begin{aligned}
\|f-\beta_i\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|f-\beta_i\|^{1-\theta}_{L^{p^*}(\Omega)}\,\|f-\beta_i\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \\
&\leq C\,\|f-\beta_i\|^{1-\theta}_{W^{s,p}(\Omega)}\,\|f-\beta_i\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \\
&\leq C\,\|f-\beta_i\|^{1-\theta}_{W^{s,p}(\Omega)}\,\varepsilon^{\theta} \\
&\leq \overline{C}\varepsilon^{\theta},
\end{aligned}$$

onde, $\overline{C}$ é uma constante positiva tal que $C\,\|f-\beta_i\|^{1-\theta}_{W^{s,p}(\Omega)}\leq\overline{C}$, onde esta constante $\overline{C}$ existe pois $f-\beta_i\in\mathfrak{B}$ e o conjunto $\mathfrak{B}$ é limitado em $W^{s,p}(\Omega)$ por hipótese. Mostrando assim que o conjunto $\mathfrak{B}$ é pré-compacto em $L^q(\Omega)$, para qualquer $q \in [p, p^*)$. ■

Dessa forma finalizamos esta seção das imersões compactas. Porém, é importante observar que no caso $s = 1$, com $p < N$ o Corolário 2.4.2 é igual ao resultado no caso clássico, isto é, no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Mais ainda, também podemos observar que está faltando a imersão compacta para o caso onde $q = p^*$.

Na próxima seção mostraremos uma propriedade dos espaços $W^{s,p}(\Omega)$ para qualquer domínio Lipschitz. Nesta seção, será de suma importância os conceitos dados nos espaços do Campanato dados em 1.2.2.

2.5 Regularidade de Hölder

Nesta seção mostraremos sobre quais condições uma função no espaço de Sobolev Fracionário é Hölder contínua. Para isso, precisaremos dos espaços de Campanato conforme a Seção 1.2.2. A saber, o Lema 1.2.4 dado nessa seção proporcionará as ferramentas para demostrar o teorema principal desta seção. Vale a pena dizer que no próximo resultado usaremos a definição de un conjunto sem picos externos dada nos Espaços de Campanato.

Teorema 2.5.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um Domínio de Extensão para $W^{s,p}(\Omega)$ sem picos externos e considere $p \in [1, +\infty)$, $s \in (0,1)$ tais que $sp > N$. Então, existe $C = C(s, p, N, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.94}$$

para qualquer $f \in W^{s,p}(\Omega)$, onde $\alpha = \frac{sp-N}{p}$.

Demonstração: No que segue, denotaremos por C uma constante positiva, possivelmente diferente em cada etapa da demostração.

Primeiramente, note que estando $f \in W^{s,p}(\Omega)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx \leq C.$$

Por outro lado, sendo Ω um Domínio de Extensão, podemos estender f para uma função $\overline{f}:\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\left\|\overline{f}\right\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\left\|f\right\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.

Agora, considerando $V \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, mensurável e $\overline{f}_V$, o valor médio de $\overline{f}$ com relação a V, note que para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^N$, obtemos que

$$\begin{aligned}\left|\xi - \overline{f}_V\right|^p = \frac{1}{med(V)^p}\left|\int_V \left(\xi - \overline{f}(x)\right)dx\right|^p &\leq \frac{1}{med(V)^p}\int_V \left|\xi - \overline{f}(x)\right|^p dx\\ &\leq \frac{1}{med(V)}\int_V \left|\xi - \overline{f}(x)\right|^p dx.\end{aligned}$$

Desse modo, tomando $x_0 \in \Omega$, sabemos que existe um $r > 0$ tal que $V := B_r(x_0) \subset \Omega$. Assim, considerando $\xi = \overline{f}(x)$ e integrando sobre $B_r(x_0)$, obtemos que

$$\int_{B_r}\left|\overline{f}(x) - \overline{f}_{B_r}\right|^p dx \leq \frac{1}{med(B_r)}\int_{B_r}\int_{B_r}\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|^p dxdy.$$

Observe que se $x, y \in B_r(x_0)$, temos que $|x-y| \leq |x-x_0| + |x_0 - y| < 2r$. Em consequência,

$$\begin{aligned}\int_{B_r}\left|\overline{f}(x) - \overline{f}_{B_r}\right|^p dx &\leq \frac{1}{med(B_r)}\int_{B_r}\int_{B_r}\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|^p dxdy\\ &= \frac{|x-y|^{N+ps}}{med(B_r)}\int_{B_r}\int_{B_r}\frac{\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\ &\leq \frac{(2r)^{N+ps}}{med(B_r)}\int_{B_r}\int_{B_r}\frac{\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\ &\leq \frac{(2r)^{N+ps}}{med(B_r)}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\\ &\leq \frac{(2r)^{N+ps}}{med(B_r)}\left\|\overline{f}\right\|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq \frac{(2r)^{N+ps}}{med(B_r)}C\left\|f\right\|^p_{W^{s,p}(\Omega)}\\ &= \frac{(2r)^{N+ps}}{(r)^N med(B_1)}C\left\|f\right\|^p_{W^{s,p}(\Omega)}\\ &= \frac{2^{N+ps}r^{sp}C\left\|f\right\|^p_{W^{s,p}(\Omega)}}{med(B_1)}.\end{aligned} \tag{2.95}$$

Por outro lado, observe que sendo $B(r, x_0) \subset \Omega$ e por (2.95), obtemos que

$$\begin{aligned}[f]_{ps}^p = \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ r>0}} r^{-sp} \int_{\Omega(x_0,r)} |f - f_{x_0,r}|^p \, dx &= \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ r>0}} r^{-sp} \int_{B_r} |f - f_r|^p \, dx \\ &\leq C \, \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \, , \end{aligned} \tag{2.96}$$

o que prova que $f \in L^{p,sp}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Desse modo, veja que tomando $\tau = \frac{sp-N}{Np}$, o qual é positivo desde que por hipótese $sp > N$, então pelo Lema 1.2.4, para cada ρ e R números reais tais que $0 < \rho < R < diam(\Omega)$ e cada $x_0 \in \overline{\Omega}$, temos que

$$|f_{x_0,R} - f_{x_0,\rho}| \leq C[f]_{\rho,sp} \left[med(\Omega \cap Q(x_0, R))\right]^{\frac{sp-N}{Np}} . \tag{2.97}$$

Além disso, note que pelo Teorema da diferenciação de Lebesgue (ver Teorema 1.2.12) obtemos que para quase todo $x \in \Omega$,

$$\lim_{R \longrightarrow 0} \frac{1}{med(\Omega \cap B_R(x))} \int_{\Omega \cap B_R(x)} f(y) dy = f(x). \tag{2.98}$$

Dessa forma, podemos mostrar que f é uma função Hölder contínua de expoente $\alpha = \frac{sp-N}{p}$. Com efeito, para qualquer $x, y \in \Omega$, tomando $R = |x - y|$, escreva

$$|f(x) - f(y)| \leq \left|f(x) - \overline{f}_{x,2R}\right| + \left|\overline{f}_{x,2R} - \overline{f}_{y,2R}\right| + \left|\overline{f}_{y,2R} - f(x)\right| .$$

Dessa forma, veja que por (2.97) e (2.98) podemos estimar o primeiro e terceiro termo do lado direito da desigualdade acima. De fato, fazendo $\rho \longrightarrow 0$ e tomando R igual a $2R$, para qualquer $x \in \Omega$, observe que

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \overline{f}_{x,2R}\right| = \lim_{\rho \longrightarrow 0} \left|\overline{f}_{x,\rho} - \overline{f}_{x,2R}\right| &\leq C[f]_{\rho,sp} \left[med(\Omega \cap Q(x, 2R))\right]^{\frac{sp-N}{Np}} \\ &\leq C[f]_{\rho,sp} \left[med(B_{2R}(x))\right]^{\frac{sp-N}{Np}} \\ &\leq C[f]_{\rho,sp} \left[(2R)^N\right]^{\frac{sp-N}{Np}} \left[med(B_1(x))\right]^{\frac{sp-N}{Np}} \\ &= \left[C 2^{\frac{sp-N}{p}} \left[med(B_1(x))\right]^{\frac{sp-N}{Np}}\right] [f]_{\rho,sp} R^{\frac{sp-N}{p}} \\ &= C(s,p,N)[f]_{\rho,sp} R^{\frac{sp-N}{p}} . \end{aligned} \tag{2.99}$$

Por outro lado, fazendo

$$\left|\overline{f}_{x,2R} - \overline{f}_{y,2R}\right| \leq \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right| + \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{y,2R}\right|,$$

e integrando com relação a $z \in B$, onde $B := B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$, temos que

$$\begin{aligned} med(B)\left|\overline{f}_{x,2R} - \overline{f}_{y,2R}\right| &\leq \int_B \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right| dz + \int_B \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{y,2R}\right| dz \\ &\leq \int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right| dz + \int_{B_{2R}(y)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{y,2R}\right| dz. \end{aligned}$$

Mais ainda, desde que $x, y \in \Omega$ e $R = |x-y|$, temos que

$$B_R(x) \cup B_R(y) \subseteq B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y),$$

o que implica em

$$med(B_R(x)) \leq med(B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)) = med(B) \ \text{ e } \ med(B_R(y)) \leq med(B).$$

Desse modo, obtemos que

$$\begin{aligned} \left|\overline{f}_{x,2R} - \hat{f}_{y,2R}\right| &\leq \frac{1}{med(B)}\left[\int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right| dz + \int_{B_{2R}(y)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{y,2R}\right| dz\right] \\ &\leq \frac{1}{med(B_R(x))}\int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right| dz \\ &+ \frac{1}{med(B_R(y))}\int_{B_{2R}(y)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{y,2R}\right| dz. \end{aligned}$$

Sendo assim, note que usando a Desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados p e $\frac{p}{p-1}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{med(B_R(x))}\int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right| 1dz &\leq \left(\int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\|1\|_{L^{p/p-1}(B_{2R}(x))}}{med(B_R(x))} \\ &= \left(\int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \frac{[med(B_{2R}(x))]^{\frac{p-1}{p}}}{med(B_R(x))} \\ &:= I. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Daí, multiplicando e dividindo (2.100) por $(2R)^s$ e usando a definição de $[f]_{p,sp}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
I &= \left(\int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \frac{[med(B_{2R}(x))]^{\frac{p-1}{p}}}{med(B_R(x))} \\
&= (2R)^s \left((2R)^{-sp} \int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \frac{[med(B_{2R}(x))]^{\frac{p-1}{p}}}{med(B_R(x))} \\
&\leq (2R)^s [f]_{p,sp} \frac{[med(B_{2R}(x))]^{\frac{p-1}{p}}}{med(B_R(x))} \\
&= (2R)^s [f]_{p,sp} \frac{\left[(2R)^N med(B_1)\right]^{\frac{p-1}{p}}}{(R)^N med(B_1)} \\
&= C(s,p,N)[f]_{p,sp} R^{\frac{sp-N}{p}}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{1}{med(B_R(x))} \int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right| dz \leq C(s,p,N)[f]_{p,sp} R^{\frac{sp-N}{p}}. \tag{2.101}$$

Analogamente, mostramos que

$$\frac{1}{med(B_R(y))} \int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right| dz \leq C[f]_{p,sp} R^{\frac{sp-N}{p}}. \tag{2.102}$$

Portanto, juntando (2.101), (2.102), conseguimos que

$$\begin{aligned}
\left|\overline{f}_{x,2R} - \overline{f}_{y,2R}\right| &\leq \frac{1}{med(B_R(x))} \int_{B_{2R}(x)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{x,2R}\right| dz \\
&\quad + \frac{1}{med(B_R(y))} \int_{B_{2R}(y)} \left|\overline{f}(z) - \overline{f}_{y,2R}\right| dz \\
&\leq C(s,p,N)[f]_{p,sp} R^{\frac{sp-N}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Assim, pelas estimativas (2.99), (2.103), lembrando que $R = |x-y|$, obtemos que

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq \left|f(x) - \overline{f}_{x,2R}\right| + \left|\overline{f}_{x,2R} - \overline{f}_{y,2R}\right| + \left|\overline{f}_{y,2R} - f(x)\right| \\
&\leq C[f]_{p,sp} R^{\frac{sp-N}{p}} \\
&= C[f]_{p,sp} |x-y|^{\frac{sp-N}{p}},
\end{aligned} \tag{2.104}$$

mostrando deste modo que f é Hölder contínua com expoente $\alpha = \frac{sp-N}{p}$. Isto é, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Agora, tomando $R_0 < diam(\Omega)$, possivelmente infinito, usando a estimativa (2.99) e Desigualdade de Hölder, para cada $x \in \Omega$,

$$|f(x)| \leq \left|f(x) - \overline{f}_{x,R_0}\right| + \left|\overline{f}_{x,R_0}\right| \leq C[f]_{p,sp}\left[med(B_{R_0(x)})\right]^{\alpha} + \left|\overline{f}_{x,R_0}\right|.$$

Porém, note que

$$\begin{aligned}
\left|\overline{f}_{x,R_0}\right| &\leq \frac{1}{med(B_{R_0}(x))}\int_{B_{R_0}(x)} |f(x)|\,dx \\
&\leq \frac{1}{med(B_{R_0}(x))}\|f\|_{L^p(B_{R_0}(x))}\|1\|_{L^{p-1/p}(B_{R_0}(x))} \\
&= \frac{1}{med(B_{R_0}(x))}\|f\|_{L^p(B_{R_0}(x))}\left[med(B_{R_0}(x))\right]^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \frac{1}{\left[med(B_{R_0(x)})\right]^{1/p}}\|f\|_{L^p(B_{R_0}(x))} \\
&\leq \frac{1}{\left[med(B_{R_0(x)})\right]^{1/p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo, segue-se que

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq C[f]_{p,sp}\left[med(B_{R_0(x)})\right]^{\alpha} + \left|\overline{f}_{x,R_0}\right| \\
&\leq C[f]_{p,sp}\left[med(B_{R_0(x)})\right]^{\alpha} + \frac{1}{\left[med(B_{R_0(x)})\right]^{1/p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Finalmente, por (2.96), (2.104) e (2.105), obtemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x,y\in\Omega}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\leq C[f]_{p,sp}\left[med(B_{R_0(x)})\right]^{\alpha} + \frac{1}{\left[med(B_{R_0(x)})\right]^{1/p}}\|f\|_{L^p(\Omega)} + \sup_{x,y\in\Omega}\frac{C[f]_{p,sp}|x-y|^{\alpha}}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\leq C\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + [f]_{p,sp}\right) \\
&\leq C\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + [f]_{W^{s,p}(\Omega)}\right) \\
&= C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

■

2.6 Alguns Contra-exemplos

Nesta última seção, apresentamos dois exemplos para mostrar a necessidade da regularidade do aberto Ω em dois resultados apresentados no texto. O primeiro deles está relacionado com a Proposição 2.1.5. Este caso, provaremos que a regularidade do domínio Ω é uma condição necessitaria para a validade da imersão. Dessa forma, provaremos por meio deste exemplo que sem a hipóteses de regularidade da fronteira, a imersão dada pela Proposição 2.1.5 pode falhar. Nosso segundo exemplo envolve o Teorema 2.4.1. Como no primeiro, vamos remover a condição da regularidade do domínio para mostrar desse modo que a imersão compacta também pode falhar. É importante dizer que por simplicidade de exposição, nos próximos dois exemplos, não provaremos que os domínios dados em cada um deles, de fato não são domínios de Lipschitz.

Exemplo 2.6.1 *Considere $s \in (0,1)$. Vamos a construir uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u \notin W^{s,p}(\Omega)$, onde Ω não seja um Domínio Lipschitz. Para isso, tome $p \in (1/s, +\infty)$ e daí, fixe $k > \frac{p+1}{sp-1}$.*

Observe que $k > 1$. Assim, considere o conjunto

$$A := \left\{(x_1, x_2) : \quad x_1 \leq 0 \ e \ |x_2| \leq |x_1|^k \right\}.$$

Desse modo, considere as coordenadas polares sobre $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Isto é, $\rho = \rho(x) \in (0, +\infty)$ e $\theta = \theta(x) \in (-\pi, \pi)$, para cada $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$.

Defina a função $u(x) := \rho(x)\theta(x)$ sobre $\Omega := (\mathbb{R}^2 \setminus A \cap B_1)$, onde $B_1 = B(0,1)$. Então, podemos mostrar que Ω não é um Domínio de Classe $C^{0,1}$ e além disso, $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus W^{s,p}(\Omega)$.

Primeiramente, provemos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Para mostrar isso, usaremos a Proposição 1.1.8. Dessa forma, provemos que $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^2)$ no sentido usual. De fato, note que

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\rho(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{x_1}{\rho}.$$

Analogamente, obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\rho(x_1,x_2)=\frac{x_2}{\rho}.$$

Por outro lado, veja que pelas relações das coordenadas polares e as derivadas do ρ, obtidas acima, segue que

$$\begin{aligned}
1=\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1)=\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho\cos\theta)&=\frac{\partial}{\partial x_1}\rho\cos\theta+\frac{\partial}{\partial x_1}\cos\theta\rho\\
&=\frac{\partial}{\partial x_1}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta\frac{\partial}{\partial x_1}\theta\\
&=\frac{\partial}{\partial x_1}\rho\cos\theta-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\theta\\
&=\frac{x_1}{\rho}\cos\theta-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\theta\\
&=\frac{x_1^2}{\rho^2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\theta\\
&=1-\frac{x_2^2}{\rho^2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\theta.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\theta(x_1,x_2)=-\frac{x_2}{\rho^2}.$$

Da mesma forma, podemos mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\theta(x_1,x_2)=\frac{x_1}{\rho^2}.$$

Desse modo, juntando estas igualdades obtidas das derivadas com respeito a ρ e θ, veja que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}u=\frac{\partial}{\partial x_1}\rho\theta=\frac{\partial}{\partial x_1}\rho\theta+\frac{\partial}{\partial x_1}\theta\rho&=\frac{x_1}{\rho}\theta-\rho\frac{x_2}{\rho^2}\\
&=\rho^{-1}\left(x_1\theta-x_2\right).
\end{aligned}$$

Analogamente, note que

$$\frac{\partial}{\partial x_2}u = \frac{\partial}{\partial x_2}\rho\theta = \frac{\partial}{\partial x_2}\rho\theta + \frac{\partial}{\partial x_2}\theta\rho = \frac{x_2}{\rho}\theta + \rho\frac{x_1}{\rho^2}$$
$$= \rho^{-1}\left(x_2\theta + x_1\right).$$

Logo, como $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$, *teremos*

$$\begin{aligned}
|\nabla u|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 \\
&= \rho^{-2}\left(x_1\theta - x_2\right)^2 + \rho^{-2}\left(x_2\theta + x_1\right)^2 \\
&= \rho^{-2}\left[x_1^2 + x_2^2 + \theta^2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right] \\
&= \rho^{-2}\left[\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(\theta^2 + 1\right)\right] \\
&= \theta^2 + 1 \\
&\leq \pi^2 + 1.
\end{aligned}$$

Portanto, desde que Ω *é finito e pela estimativa acima, obtemos por fim que* $\nabla u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^2)$. *Logo, pela Proposição 1.1.8 dada nos preliminares, segue-se que* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Resta mostrar que $u \notin W^{s,p}(\Omega)$. *Para isso, provaremos que a seminorma de Gagliardo dada em 2.1 não é finita.*

Lembrando que $k > \frac{p+1}{sp-1}$, *tome* $r \in (0,1)$ *fixo e suficientemente pequeno. Defina para cada* $j \in \mathbb{N}$, $r_{j+1} := r_j - r_j^k$, *onde* $r_0 := r$. *Então, veja que por indução podemos provar que* (r_j) *é uma sequência estritamente decrescente* $r_{j+1} < r_j$ *e* $r_j > 0$. *Em consequência,* $r_j \in (0,r) \subset (0,1)$. *Assim, podemos definir*

$$l = \lim_{j\to+\infty} r_j \in [0,1]$$

Dessa forma, obtemos pela definição do r *que*

$$l = \lim_{j\to+\infty} r_{j+1} = \lim_{j\to+\infty} r_j - r_j^k = l - l^k.$$

Isto implica em que $l = 0$.

Mais ainda, note que pela fórmula da Série Telescópica, segue-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty} r_j^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} r_j^k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} r_j - r_{j+1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} r_0 - r_{n+1} \\
&= r_0 - \lim_{n\to+\infty} r_{n+1} \\
&= r_0 - l \\
&= r. \qquad (2.106)
\end{aligned}$$

Agora, considere o subconjunto do $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, definido da seguinte forma

$$D_j := \left\{(x,y) : \ x_1, y_1 \in (-r_j, r_{j+1}), \ x_2 \in (|x_1|^k, 2|x_1|^k) \ e \ -y_2 \in (|y_1|^k, 2|y_1|^k)\right\}.$$

Desse modo, veja que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j &\subseteq \left\{(x,y) : \ x_1, y_1 \in (-r, 0), \ x_2 \in (|x_1|^k, 2|x_1|^k) \ e \ -y_2 \in (|y_1|^k, 2|y_1|^k)\right\} \\
&\subseteq \Omega \times \Omega, \qquad (2.107)
\end{aligned}$$

onde dita união é disjunta.

De essa forma, note que

$$r_{j+1} = r_j - r_j^k = r_j\left(1 - r_j^{k-1}\right) \geq r_j\left(1 - r^{k-1}\right) \geq \frac{r_j}{2}.$$

Assim, em particular para $(x,y) \in D_j \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, pela definição dos D_j's temos que $x_1 \in (-r_j, r_{j+1})$ e também que $x_2 \in (|x_1|^k, 2|x_1|^k)$. Dessa maneira,

$$-r_j < x_1 < r_{j+1} = r_j - r_j^k \leq r_j.$$

Isto é,

$$|x_1| \leq r_j \leq 2r_{j+1}.$$

Por outro lado, argumentando-se como na prova de que $2r_{j+1} \leq 2|y_1|$, *temos que*

$$|x_1| \leq 2r_{j+1} \leq 2|y_1|.$$

Pelo mesmo raciocínio, podemos provar que

$$|y_1| \leq 2|x_1|.$$

Por outro lado, note que se $(x, y) \in D_j$, *então em particular, sabemos que* $x_1 \in (-r_j r_{j+1})$. *Logo,* $x_1 + r_j \geq 0$. *Mais ainda, já que* $2r_{j+1} \leq 2|y_1|$, *então isto implica em que* $-y_1 - r_j \geq 0$. *Em consequência, juntando estas duas desigualdades não negativas, conseguimos que* $r_{j+1} - r_j \leq x_1 - y_1$. *Do mesmo modo provamos que* $x_1 - y_1 \leq r_j - r_{j+1}$, *desde que* $2r_{j+1} \leq 2y_1$ *e que* $x_1 \in (-r_j, r_{j+1})$. *Assim, obtemos que*

$$|x_1 - y_1| \leq r_j - r_{j+1}.$$

Porém, veja que a desigualdade anterior implica em que $|x_1 - y_1| \leq 2^k |x_1|$. *De fato, observe que*

$$|x_1 - y_1| \leq r_j - r_{j+1} = r_j^k \leq 2^k r_{j+1}^k \leq 2^k |x_1|.$$

Por outra parte, usando novamente a definição do conjunto D_j, *note que*

$$\begin{aligned} |x_2 - y_2| \leq |x_2| + |y_2| \leq 2|x_1|^k + 2|y_1|^k &= 2\left(|x_1|^k + |y_1|^k\right) \\ &= 2\left(2|x_1|^k + 2^k|x_1|^k\right) \\ &= 2^{k+2}|x_1|^k. \end{aligned}$$

Como consequência, se $(x, y) \in D_j$, *então veja que considerando a norma do supremo, a qual é equivalente à norma usual em* $\mathbb{R}^2$, *obtemos que*

$$|x - y| = \sup\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \leq 2^{k+3}|x_1|^k. \tag{2.108}$$

Agora, note também que para cada $x, y \in D_j$, *temos que* $\theta(x) \geq \pi/2$ *e tam-*

bém que $\theta(x) \leq -\pi/2$. *Para mostrar isso, veja que* $x_1 \in (-r, 0)$ *e além disso* $x_2 \in (|x_1|^k, 2|x_1|^k)$. *Assim, segue-se que* $\theta(x) \geq \pi/2$. *Analogamente, desde que* $y_1 \in (-r, 0)$ *e também que* $-y_2 \in (|y_1|^k, 2|y_1|^k)$ *segue-se que* $\theta(x) \leq -\pi/2$.

Desse modo, obtemos que

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) = \rho(x)\theta(x) - \rho(y)\theta(y) &\geq \rho(x)\theta(x) + \rho(y)\frac{\pi}{2} \\ &\geq \rho(x)\theta(x) \\ &= \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\frac{\pi}{2} \\ &\geq |x_1|\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Logo, usando este fato e por (2.108), *segue-se que para todo* $(x, y) \in D_j$, *temos*

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{2+sp}} \geq |x_1|^p \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \frac{1}{\left|2^{k+3}|x_1|^k\right|^{2+sp}} &= |x_1|^{p-k(2+sp)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \frac{1}{2^{k+3(2+sp)}} \\ &= C|x_1|^{p-k(2+sp)}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Finalmente, aplicando o Teorema de Fubini sobre $D_j \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *e por* (2.109), *obtemos*

$$\begin{aligned} \iint_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{2+sp}} dxdy &\geq \iint_{D_j} C|x_1|^{p-k(2+sp)} dxdy \\ &= \int_{-2|y_1|^k}^{-|y_1|^k} \int_{|x_1|^k}^{2|x_1|^k} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} C|x_1|^{p-k(2+sp)} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ &= C \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} |x_1|^{p-k(2+sp)} |x_1|^k |y_1|^k dx_1 dy_1 \\ &\geq C \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} |x_1|^{p-k(2+sp)} |x_1|^k 2^k |x_1|^k dx_1 dy_1 \\ &= C2^{-k} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} |x_1|^{p-ksp} dx_1 dy_1 \\ &\geq C2^{-k} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} r_j^{p-ksp} dy_1 dx_1. \end{aligned}$$

Mas, note que

$$\begin{aligned} C2^{-k}\int_{-r_j}^{-r_{j+1}}\int_{-r_j}^{-r_{j+1}} r_j^{p-ksp}dy_1dx_1 &= \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} C2^{-k}r_j^{p-ksp}dx_1\,(-r_{j+1}+r_j) \\ &= \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} C2^{-k}r_j^{p-ksp}dx_1\left(-(r_j-r_j^k)+r_j\right) \\ &= C2^{-k}r^{-\alpha}r_j^k, \end{aligned}$$

onde $\alpha := k(sp-1)-p$.

Portanto, segue-se que

$$\iint_{D_j}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2+sp}}dxdy \geq C2^{-k}r^{-\alpha}r_j^k. \tag{2.110}$$

Observe-se que sendo $k > \frac{p+1}{sp-1}$, *obtemos que* $\alpha > 1$. *Logo, usando* (2.106), (2.107) *e mais o fato que os* D_j*'s são disjuntos para cada* $j \in \mathbb{N}$, *na estimativa obtida em* (2.110), *finalmente obtemos que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2+sp}}dxdy \geq \iint_{\bigcup\limits_{j=0}^{+\infty} D_j}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2+sp}}dxdy &= \sum_{j=0}^{+\infty}\iint_{D_j}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2+sp}}dxdy \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} C2^{-k}r^{-\alpha}r_j^k \\ &= C2^{-k}r^{-\alpha}\sum_{j=0}^{+\infty} r_j^k \\ &= C2^{-k}r^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Assim, desde que $\alpha > 1$, *temos* $1-\alpha < 0$ *e portanto,tomando* r *suficientemente pequeno, obtemos que* $[u]_{W^{s,p}(\Omega)} \to +\infty$, *mostrando que* $u \notin W^{s,p}(\Omega)$.

No próximo exemplo, tomaremos uma sequência de funções limitadas em $W^{s,p}(\Omega)$ para um domínio no Lipschitz Ω e mostraremos que não existe nenhuma subsequência convergente em $L^q(\Omega)$, mostrando desse modo que no Teorema 2.4.1, a condição da regularidade do domínio é necessária. Para mostrar isso, tomaremos $p = q = N = 2$, com a finalidade de simplificar as contas.

Exemplo 2.6.2 *Para cada* $k \in \mathbb{N}$, *defina* $a_k := \frac{1}{C^k}$, *para uma constante* $C > 10$, *e* *considere o conjunto* $\Omega := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, *onde* $B_k := B_{a_k^2}(a_k)$.

Observe que $a_k \to 0$, *quando* $k \to +\infty$ *e além disso,* $a_k - a_k^2 > a_{k+1} + a_{k+1}^2$. *Dessa forma, podemos mostrar que* Ω *é união de bolas disjuntas, limitado e é um domínio não Lipschitz.*

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, *defina a função* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *da seguinte forma*

$$f_n(x) = \begin{cases} \pi^{-1/2} a_n^{-2}, & x \in B_n, \\ 0, & x \in \Omega \setminus B_n. \end{cases}$$

Observe que não podemos extrair uma subsequência de f_n *que seja convergente em* $L^2(\Omega)$, *pois note para qualquer* $x \in \Omega$ *fixo, temos que*

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega |f_n(x)|^2 \, dx = \int_{B_n} \left|\pi^{-1/2} a_n^{-2}\right|^2 dx &= \int_{B_n} \pi^{-1} a_n^{-4} dx \\ &= \pi^{-1} a_n^{-4} med(B_{a_n^2}(a_n)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Agora, usando o fato que os B_n*'s são disjuntos na seminorma de Gagliardo 2.1 para* f_n *em* Ω, *veja que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f_n(x) - f_n(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}} dxdy &= \int_{\Omega \setminus B_n} \int_{B_n} \frac{|f_n(x)|^2}{|x-y|^{2+2s}} dxdy + \int_{\Omega \setminus B_n} \int_{B_n} \frac{|f_n(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}} dydx \\ &= 2 \int_{\Omega \setminus B_n} \int_{B_n} \frac{|f_n(x)|^2}{|x-y|^{2+2s}} dxdy \\ &= \int_{\Omega \setminus B_n} \int_{B_n} \frac{\pi^{-1} a_n^{-4}}{|x-y|^{2+2s}} dxdy \\ &= \int_{\bigcup_{k \neq n} B_k} \int_{B_n} \frac{\pi^{-1} a_n^{-4}}{|x-y|^{2+2s}} dxdy \\ &= 2\pi^{-1} \sum_{k \neq n} \int_{B_k} \int_{B_n} \frac{a_n^{-4}}{|x-y|^{2+2s}} dxdy. \end{aligned} \tag{2.111}$$

Agora, veja que pela escolha dos $\{a_k\}$, *temos*

$$\left|a_n^2 + a_k^2\right| = a_n^2 + a_k^2 \leq \frac{|a_n - a_k|}{2}, \tag{2.112}$$

pois note que da desigualdade $2(C^n - C^k) \leq C^{2n} + C^{2k}$*, implica em que* $a_n^2 + a_k^2 \leq \frac{1}{2}(a_n - a_k)$*. Analogamente, podemos provar que* $\frac{1}{2}(a_n - a_k) \leq -(a_n^2 + a_k^2)$ *e assim segue-se* (2.112).

Observe que considerando $x \in B_n$ *e* $y \in B_k$*, por* (2.112)*, temos que*

$$\begin{aligned} |x-y| \geq \left|a_n - a_n^2 - (a_k + a_k^2)\right| &= \left|a_n - a_k - (a_n^2 + a_k^2)\right| \\ &\geq |a_n - a_k| - \left|a_n^2 + a_k^2\right| \\ &\geq |a_n - a_k| - \frac{|a_n - a_k|}{2} \\ &= \frac{|a_n - a_k|}{2}. \end{aligned} \tag{2.113}$$

Em consequência da estimativa (2.113)*, note que*

$$\begin{aligned} \int_{B_k}\int_{B_n} \frac{a_n^{-4}}{|x-y|^{2+2s}}dxdy &\leq 2^{2+2s}\int_{B_k}\int_{B_n} \frac{a_n^{-4}}{|a_n - a_k|^{2+2s}}dxdy \\ &= 2^{2+2s}\frac{a_n^{-4}}{|a_n - a_k|^{2+2s}} med(B_{a_n^2}(a_n)) med(B_{a_k^2}(a_k)) \\ &= 2^{2+2s}\pi^2\frac{a_k^4}{|a_n - a_k|^{2+2s}}. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Mais ainda, veja que para $m \geq j+1$*, temos*

$$a_j - a_m \geq a_j - a_{j+1} = \frac{1}{C^j} - \frac{1}{C^{j+1}} = \frac{1}{C^j}\left(1 - \frac{1}{C}\right) \geq \frac{a_j}{2}.$$

Isto é, para todo $m \geq j+1$,

$$\frac{1}{a_j - a_m} \leq \frac{2}{a_j}. \tag{2.115}$$

Sendo assim, veja que juntando com (2.111) *e* (2.114)*, obtemos que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f_n(x) - f_n(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}}dxdy &= 2\pi^{-1}\sum_{k\neq n}\int_{B_k}\int_{B_n}\frac{a_n^{-4}}{|x-y|^{2+2s}}dxdy \\ &\leq 2\pi^{-1}\sum_{k\neq n} 2^{2+2s}\pi^2\frac{a_k^4}{|a_n - a_k|^{2+2s}}. \end{aligned}$$

Mas note que por (2.115), *obtemos que*

$$
\begin{aligned}
2\pi^{-1}\sum_{k\neq n} 2^{2+2s}\pi^2 \frac{a_k^4}{|a_n - a_k|^{2+2s}} &= 2^{3+2s}\pi \sum_{k\neq n} \frac{a_k^4}{|a_n - a_k|^{2+2s}} \\
&= 2^{3+2s}\pi \left(\sum_{k<n} \frac{a_k^4}{(a_k - a_n)^{2+2s}} + \sum_{n<k} \frac{a_k^4}{(a_n - a_k)^{2+2s}} \right) \\
&\leq 2^{5+2s}\pi \left(\sum_{k<n} \frac{a_k^4}{a_k^{2+2s}} + \sum_{n<k} \frac{a_k^4}{a_n^{2+2s}} \right) \\
&\leq 2^{6+2s}\pi \left(\sum_{k\neq n} a_k^{2-2s} \right) \\
&= 2^{6+2s}\pi \sum_{k\neq n} \left(\frac{1}{C^{2-2s}} \right)^k .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f_n(x) - f_n(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}} dxdy \leq 2^{6+2s}\pi \sum_{k\neq n} \left(\frac{1}{C^{2-2s}} \right)^k < +\infty.$$

Segue-se que $\{f_n\} \in W^{s,2}(\Omega)$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Dessa forma, concluímos que* $\{f_n\}$ *está em* $W^{s,2}(\Omega)$. *Porém,* $\{f_n\}$ *não possui nenhuma subsequência convergente em* $L^q(\Omega)$.

Bibliografia

[1] Robert A Adams and John JF Fournier, *Sobolev spaces*, vol. 140, Academic press, 2003.

[2] Piotr Biler, Grzegorz Karch, and Régis Monneau, *Nonlinear diffusion of dislocation density and self-similar solutions*, Communications in Mathematical Physics **294** (2010), no. 1, 145–168.

[3] Piotr Biler, Grzegorz Karch, and Wojbor A Woyczyński, *Critical nonlinearity exponent and self-similar asymptotics for lévy conservation laws*, Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, vol. 18, Elsevier, 2001, pp. 613–637.

[4] Haim Brezis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Springer Science & Business Media, 2010.

[5] Luis Caffarelli, J-M Roquejoffre, and Ovidiu Savin, *Nonlocal minimal surfaces*, Communications on Pure and Applied Mathematics **63** (2010), no. 9, 1111–1144.

[6] Maria Colombo and Giuseppe Mingione, *Calderón–zygmund estimates and non-uniformly elliptic operators*, Journal of Functional Analysis **270** (2016), no. 4, 1416–1478.

[7] Eleonora Di Nezza, Giampiero Palatucci, and Enrico Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional sobolev spaces*, Bulletin des Sciences Mathématiques **136** (2012), no. 5, 521–573.

[8] Luca Esposito, Francesco Leonetti, and Giuseppe Mingione, *Sharp regularity for functionals with (p, q) growth*, Journal of Differential Equations **204** (2004), no. 1, 5–55.

[9] Lawrence C Evans, *Partial differential equations and monge-kantorovich mass transfer*, Current developments in mathematics **1997** (1997), no. 1, 65–126.

[10] Charles Fefferman and Rafael de la Llave, *Relativistic stability of matter-i*, Revista Matematica Iberoamericana **2** (1986), no. 2, 119–213.

[11] Gianluca Fusai, Daniele Marazzina, and Marina Marena, *Pricing discretely monitored asian options by maturity randomization*, SIAM Journal on Financial Mathematics **2** (2011), no. 1, 383–403.

[12] Enrico Giusti, *Direct methods in the calculus of variations*, World Scientific, 2003.

[13] Giovanni Leoni, *A first course in sobolev spaces*, vol. 105, American Mathematical Society Providence, RI, 2009.

[14] Giuseppe Mingione, *Gradient potential estimates*, Journal of the European Mathematical Society **13** (2010), no. 2, 459–486.

[15] Sunra Mosconi and Marco Squassina, *Recent progresses in the theory of nonlinear nonlocal problems*, arXiv preprint arXiv:1610.00025 (2016).

[16] Joachim Naumann, *Remarks on the prehistory of sobolev spaces*, (2002).

[17] Thomas Runst and Winfried Sickel, *Sobolev spaces of fractional order, nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations*, vol. 3, Walter de Gruyter, 1996.

[18] Yannick Sire and Enrico Valdinoci, *Fractional laplacian phase transitions and boundary reactions: a geometric inequality and a symmetry result*, Journal of Functional Analysis **256** (2009), no. 6, 1842–1864.