



Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Pós-Graduação em Matemática
Programa de Mestrado Profissional de Matemática em
Rede Nacional



A GEOMETRIA ANALÍTICA COMO UM MODELO PARA A GEOMETRIA EUCLIDIANA

por

Wellington Fernandes de Sousa

Brasília-DF, 2017

Wellington Fernandes de Sousa

A geometria analítica como modelo para a geometria euclidiana.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

Mestre.

Orientador: Nilton Moura Barroso Neto

Brasília-DF
2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fg Fernandes de Sousa, Wellington
A Geometria Analítica como um modelo para a
Geometria Euclidiana / Wellington Fernandes de Sousa;
orientador Nilton Moura Barroso Neto. -- Brasília,
2017.
69 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. Geometria Euclidiana. 2. Geometria Analítica.
3. Plano cartesiano. 4. Axiomas de Euclides. 5.
Axiomas de Hilbert. I. Moura Barroso Neto, Nilton,
orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

A GEOMETRIA ANALÍTICA
COMO UM MODELO PARA A GEOMETRIA EUCLIDIANA

por

Wellington Fernandes de Sousa *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 24 de julho de 2017.


Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Nilton Moura Barroso Neto (Orientador)
Departamento de Matemática (MAT/UnB)



Prof. Dr. Guy Grebot (Membro)
Departamento de matemática (MAT/UnB)



Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva (Membro)
Departamento de matemática (MAT/UnB)

* O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Welington Fernandes de Sousa graduou-se em Licenciatura Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás - PUC-GO no período de 2005 a 2008. Durante a graduação foi bolsista do Programa Federal Universidade Para Todos - PROUNI. Em 2011 cursou e concluiu a especialização em Educação Inclusiva pela Faculdade UNISABER, e desde de 2012 é professor efetivo de matemática na Secretaria de Educação do Distrito Federal.

Dedico este trabalho a minha filha Amanda Arruda de Sousa e a minha esposa Adriane Martins Arruda.

Primeiramente agradeço a Deus por tornar tudo possível. Agradeço a minha família pelo apoio e compreensão, em especial a minha esposa, minha filha e aos meus pais. Agradeço também a todos os meus colegas e professores que auxiliaram-me no decorrer deste curso de Mestrado, especialmente ao meu orientador o professor Nilton Moura Barroso Neto. Também faço um agradecimento especial ao grupo de professores do Colégio Estadual Dom Emanuel que durante minha educação básica despertaram-me o interesse pelos estudos.

Agradeço ainda à Secretaria de Educação do Distrito Federal por proporcionar-me dedicação integral ao curso concedendo-me afastamento remunerado de minhas atividades. E por fim agradeço à CAPES pelo suporte financeiro concedido.

Lista de Figuras

1.1	Triângulo equilátero	6
1.2	Congruência de triângulos	6
1.3	Ângulo externo de um triângulo	7
1.4	Retas paralelas	9
1.5	Independência do axioma P	10
1.6	Independência do axioma I2	11
1.7	Independência do axioma I3	11
1.8	Independência do axioma I1	11
1.9	Axioma de <i>Pasch</i>	12
1.10	Ângulo BAC	13
1.11	Separação do plano	13
1.12	Separação da reta	14
1.13	Congruência de segmentos	14
1.14	Congruência da soma de segmentos	15
1.15	Congruência de ângulos	15
1.16	Congruência LAL de triângulos	15
1.17	Axioma de Arquimedes	16
1.18	Círculo	17
1.19	Triângulo equilátero	17
2.1	Retas verticais paralelas	22
2.2	Retas oblíquas paralelas	22
2.3	Uma reta dada por dois pontos	23
2.4	Dois pontos de uma reta	23
2.5	Três pontos não colineares	24
2.6	Retas paralelas em \mathbb{K}^2	24
2.7	Interposição de pontos	27
2.8	Translação dos eixos cartesianos	28
2.9	Mudança de unidade das coordenadas cartesianas	29
2.10	Deslocando pontos horizontalmente	29
2.11	(i) Axioma de <i>Pasch</i> em \mathbb{K}^2	30
2.12	(ii) Axioma de <i>Pasch</i> em \mathbb{K}^2	30
2.13	(iii) Axioma de <i>Pasch</i> em \mathbb{K}^2	31
2.14	(i) Congruência de segmentos em \mathbb{K}^2	33
2.15	(ii) Congruência de segmentos em \mathbb{K}^2	33
2.16	Congruência da soma de segmentos em \mathbb{K}^2	34

2.17	Congruência de ângulos em \mathbb{K}^2	37
2.18	Axioma de Arquimedes em \mathbb{K}^2	38
3.1	ERM: translação:	41
3.2	EMR: rotação	43
3.3	Congruência <i>LAL</i> de triângulos em \mathbb{K}^2	44
3.4	(i) Intersecção de reta e círculo	45
3.5	(ii) Intersecção de reta e círculo	46
3.6	(i) Intersecção de círculos	47
3.7	(ii) Intersecção de círculos	47
3.8	Axioma de Dedekind implica intersecção de reta e círculo	50
3.9	<i>Lema:</i> (i) intersecção de círculos	51
3.10	<i>Lema:</i> (ii) intersecção de círculos	52
3.11	<i>Lema:</i> (iii) intersecção de círculos	52
3.12	Axioma de Dedekind implica a intersecção de círculos	53

RESUMO.

Este trabalho mostra, com ênfase na geometria plana, o modelo dedutivo formulado por Euclides de Alexandria pelo qual ele constrói e organiza todo o conhecimento geométrico conhecido até então. Este modelo euclidiano, chamado axiomático, com o passar dos anos revelou falhas em demonstrações de algumas proposições que são citadas e comentadas neste trabalho. As tentativas para corrigir as falhas e formalizar o modelo axiomático de Euclides, levou a um novo modelo axiomático mais formal, que corrige as falhas cometidas por Euclides e traz uma linguagem mais coerente com a proposta da matemática moderna. Tal modelo foi publicado por David Hilbert em seu trabalho *Grundlagen der Geometrie*, e também está presente neste trabalho.

Após mostrar como a geometria euclidiana plana foi formulada em função de seus axiomas, o trabalho chega ao seu ponto principal: mostrar que a geometria euclidiana plana pode ser demonstrada na geometria sobre corpos (geometria analítica). E para isso, este trabalho disponibiliza a demonstração de todos os axiomas de Hilbert, para a geometria euclidiana plana, em um plano cartesiano sobre um corpo. Veremos que não haverá necessidade de trabalharmos sobre o corpo dos números reais para que esta geometria euclidiana plana seja demonstrada pela geometria analítica.

Além disso o trabalho traz um pouco das características e propriedades de corpos e suas extensões à medida que as demonstrações se aprofundam. Chegaremos à conclusão de que todos os axiomas da geometria euclidiana plana podem ser demonstrados na geometria analítica, sobre um corpo ordenado com extensão às raízes quadradas de elementos positivos.

PALAVRAS-CHAVE: geometria euclidiana, geometria analítica, corpo, plano cartesiano, axioma, Euclides, Hilbert.

ABSTRACT.

This work shows, with emphasis on plane geometry, the deductive model formulated by Euclid of Alexandria by which he constructed and organized all known geometric knowledge until then. This Euclidean model, called axiomatic, over the years revealed flaws in demonstrations of some propositions that are cited and commented on in this work. The attempts to correct the failures and formalizing the axiomatic model of Euclid led to a new more formal axiomatic model that corrects Euclid's failures which is more and uses a language more consistent to proposal of modern mathematics. Such a model was published by David Hilbert in his work *Grundlagen der Geometrie*, and is also present in this work.

After showing how Euclidean geometry is formulated in terms of its axioms, the work reaches its main point: to show that Euclidean plane geometry can be demonstrated in geometry over fields (analytic geometry). And for this, we provide the demonstration of all axioms of Hilbert, for Euclidean plane geometry, in a Cartesian plane over a field. We will see that there will be no need to work on the field of real numbers for this Euclidean plane geometry to be demonstrated by analytic geometry.

In addition the work brings some of the characteristics and properties of fields and their extensions as the demonstrations deepen. We will arrive at the conclusion that all the axioms of Euclidean plane geometry can be demonstrated in analytical geometry, on an ordered field with extension to the square roots of positive elements.

KEYWORDS: Euclidean geometry, analytic geometry, field, Cartesian plane, axiom, Euclid, Hilbert.

Sumário

Introdução	1
1 A Geometria Euclidiana	3
1.1 Os Elementos	3
1.2 <i>Grundlagen der Geometrie</i>	8
2 A Geometria Analítica. Parte 1	19
2.1 Definições iniciais	19
2.2 Incidência e Paralelas	22
2.3 Interposição	24
2.4 Congruência de Segmentos	31
2.5 Congruência de Ângulos	34
2.6 Axioma de Arquimedes	37
3 A Geometria Analítica. Parte 2	39
3.1 Movimentos Rígidos e o axioma LAL	39
3.2 O axioma de intersecção de círculos	44
3.3 O axioma de Dedekind	48
Conclusão	54

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é mostrar, através de uma linguagem clara e simples, que podemos construir toda a geometria euclidiana plana em um plano cartesiano sobre um corpo. Isso mostrará que a geometria sobre corpos, comumente conhecida como geometria analítica, é um modelo para a geometria axiomática elaborada por Euclides de Alexandria e, posteriormente, reformulada por David Hilbert.

A geometria euclidiana, do ponto de vista axiomático, dificilmente é vista por alunos da educação básica. Não é raro escolas que deixam tal conteúdo para o fim de ano letivo prejudicando sua compreensão pelos alunos, uma vez que neste momento nem sempre há tempo para ministrar tais conteúdos de forma adequada. Isso acarreta na dificuldade de abstração, frequentemente encontrada nos jovens que chegam à universidade.

A geometria analítica é mais frequente ao cotidiano dos alunos da educação básica, principalmente no ensino médio. Proporcionar aos professores da rede básica de educação uma compreensão da geometria analítica como ferramenta para o ensino da geometria euclidiana é de fundamental importância. Este trabalho objetiva a disposição de um material de estudo e pesquisa a professores e alunos interessados em compreender mais a geometria axiomática de Euclides sob o ponto de vista algébrico da geometria sobre corpos. Além disso, este trabalho busca proporcionar uma maior compreensão aos leitores acerca do método axiomático criado por Euclides e reformulado por David Hilbert, descrevendo o processo pelo qual eles constroem toda a geometria plana em seus trabalhos.

Este trabalho proporcionará, aos leitores, ver que certas demonstrações complexas ou impossíveis na geometria axiomática tornam-se simples ou possíveis na geometria sobre corpos. Isso decorre da dificuldade de se trabalhar com unidades puramente geométricas na geometria euclidiana, enquanto que na geometria analítica trabalhamos com unidades numéricas, fato que poderá amenizar os problemas de abstração e interesse dos alunos.

O trabalho visa ainda possibilitar ao leitor uma rápida compreensão acerca da teoria de corpos e suas propriedades. Aqui os leitores verão que não necessitamos de um corpo ordenado e completo, como o conjunto dos números reais, para construir a geometria euclidiana plana em um plano cartesiano. Para isso, basta um corpo ordenado que inclui raízes quadradas de elementos positivos.

Esperamos com este trabalho que os leitores possam entender a beleza na construção da geometria e sua importância para a compreensão do mundo em que vivemos. Desde os primórdios o ser humano faz uso de imagens para retratar seu cotidiano, compreender o processo pelo qual podemos construir e estudar essas imagens é indispensável para nosso crescimento intelectual.

O trabalho está organizado em três capítulos, dos quais o primeiro descreve o modelo axi-

omático formulado por Euclides e, posteriormente reformulado por Hilbert, para a construção lógica da geometria euclidiana plana. O segundo capítulo apresenta a geometria sobre corpos e as demonstrações dos primeiros axiomas de Hilbert sobre essa geometria. E o terceiro capítulo traz as demonstrações dos demais axiomas de Hilbert na geometria sobre corpos e a conclusão do trabalho.

Sobre a geometria euclidiana, presente no capítulo 1, fazemos algumas considerações sobre as noções comuns, algumas definições e algumas proposições do livro I de Euclides (o primeiro de uma coleção de 12 livros conhecidos como *Os Elementos*). Tratamos com ênfase as proposições em que as demonstrações de Euclides eram falhas. Também apresentamos o modelo axiomático de Hilbert para a geometria euclidiana, descrevemos seus axiomas, definições, algumas proposições e mostramos como esse modelo corrigiu as falhas cometidas por Euclides.

Com destaque à geometria sobre corpos ou geometria analítica, como é mais conhecida, no capítulo 2 iniciamos a construção da geometria euclidiana em um plano cartesiano sobre um corpo. Para isso fazemos algumas definições iniciais, tais como corpo, plano cartesiano sobre um corpo, ponto, reta, corpo ordenado, etc. Ainda neste capítulo, trazemos as demonstrações dos primeiros axiomas de Hilbert: demonstramos os axiomas de incidência e das paralelas em um plano cartesiano sobre um corpo abstrato qualquer; demonstramos os axiomas de ordem e arquimediano em um plano cartesiano sobre um corpo ordenado; e demonstramos os axiomas de congruência de segmentos e de ângulos em um plano cartesiano sobre um corpo ordenado pitagórico.

Enfim, no capítulo 3, trazemos as demonstrações do axioma de intersecção de círculos de Hilbert em um plano cartesiano sobre um corpo ordenado com extensão às raízes quadradas de elementos positivos, e do axioma de Dedekind que mostra a continuidade da reta real. Neste capítulo, tratamos ainda da noção de movimentos rígidos sobre o plano cartesiano, necessária para demonstrarmos a congruência *LAL* (lado-ângulo-lado) de triângulos e por fim trazemos a conclusão do trabalho reafirmando que a geometria analítica é um modelo para a geometria euclidiana.

Este trabalho traz algumas proposições e demonstrações do livro I dos *Elementos* de Euclides, as quais estão denotadas, por exemplo, como: **Proposição I.13** - Proposição 13 do livro I dos *Elementos* de Euclides.

Capítulo 1

A Geometria Euclidiana

1.1 Os Elementos

Cerca de 300 anos antes de Cristo, Euclides de Alexandria buscou organizar e ampliar o conhecimento geométrico existente até aquele momento. Euclides criou uma estrutura lógica e coerente em que cada resultado era deduzido a partir de um pequeno número de premissas – postulados e noções comuns ou axiomas – ou outros resultados previamente demonstrados. Tais premissas dispensavam demonstrações, uma vez que eram consideradas evidentes. Euclides propõe esse método, conhecido como método axiomático, em seu famoso trabalho *Os Elementos*, monumental obra composta por 13 livros sobre Geometria, Teoria de Números e Álgebra Geométrica que por milhares de anos foi, e ainda é, uma das grandes contribuições dos gregos para a Matemática. Os detalhes históricos e maiores informações sobre a vida e obra de Euclides podem ser encontrados em [3] e [1].

O método axiomático proposto por Euclides está intimamente relacionado às suas premissas e definições, das quais são deduzidas de maneira rigorosa e inequívoca, os resultados de sua geometria. Conforme veremos, ao longo de seu trabalho Euclides cometeu alguns erros lógicos, assumindo tacitamente fatos não declarados em seu conjunto de axiomas. Um sistema axiomático completo e rigoroso para a geometria de Euclides foi elaborado somente muitos anos depois pelo eminente matemático alemão David Hilbert e ainda teremos a oportunidade de falar sobre ele mais à frente neste capítulo.

Pelo momento, fiquemos com Euclides e vejamos como está estruturada sua obra. Euclides começa seu trabalho listando uma série de definições. Para termos uma ideia sobre como Euclides pensava a geometria, citamos abaixo algumas delas

DEFINIÇÕES

D1 Um ponto é algo que não tem partes;

D2 Uma linha é um comprimento sem largura;

D10 Quando uma linha reta intercepta uma segunda linha reta e forma ângulos adjacentes iguais, cada um desses ângulos é um ângulo reto;

- D15** Um círculo é uma figura plana limitada por uma linha tal que todas as linhas retas (raio) que a interceptam e partem de um ponto (centro) no interior da figura são iguais;
- D19** Uma figura retilínea é uma figura limitada por linhas retas; triângulos são limitados por três linhas retas; e quadriláteros são limitados por quatro linhas retas;
- D23** Linhas retas paralelas são linhas retas tais que, estando num mesmo plano e sendo prolongadas indefinidamente em ambas as direções, não se interceptam;

Além das definições, Euclides toma como base de seu trabalho dez premissas, das quais cinco são enunciadas como postulados da geometria e cinco são enunciadas como noções comuns. Cada uma delas independente das demais, ou seja, qualquer uma das premissas não pode ser demonstrada a partir das outras.

Atualmente as palavras *axioma* e *postulado* assumiram o mesmo significado e são usadas indistintamente. Entretanto, na Grécia da Antiguidade, essas palavras tinham usos claramente diferentes. A palavra *postulado* era usada para referir-se a uma afirmação que se postula, àquilo que te peço que aceites como bases ou fundamentos para *uma certa teoria específica*: a geometria, no caso. Por outro lado, a palavra *axioma* era utilizada para referir-se a fatos de caráter geral e muito mais amplo, que fazem parte do senso comum, por assim dizer; as noções comuns de Euclides encaixam-se nessa segunda classe de afirmações e, por esse motivo, também podemos nos referir a elas como axiomas ao longo deste trabalho. Vejamos os axiomas conforme foram enunciados por Euclides de acordo com [4], página 98

POSTULADOS

- P1** É possível traçar uma reta passando por dois pontos dados;
- P2** É possível prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;
- P3** É possível traçar um círculo com centro em qualquer ponto e com qualquer raio;
- P4** Todos os ângulos retos são iguais;
- P5** Se uma linha reta intercepta duas outras linhas retas e determina, de um mesmo lado, ângulos internos cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, encontrar-se-ão no lado em que estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos;

Os primeiros três postulados de Euclides nos ensinam a usar a régua e o compasso: o primeiro afirma que podemos traçar uma reta por dois pontos dados, o segundo afirma que podemos utilizar a régua para prolongar um segmento dado e a terceira diz que podemos traçar um círculo se forem dados o seu centro e o seu raio.

Vale notar que a régua euclidiana não possui nenhum tipo de marcação (na língua inglesa há uma palavra mais precisa para esse tipo de instrumento: *straightedge*; algo como borda lisa ou borda reta); isso significa que não podemos usar a régua euclidiana para transportar distâncias, uso corriqueiro da régua em situações práticas. A princípio, o compasso euclidiano também não pode ser usado para transportar distâncias para diferentes regiões do plano,

por esse motivo costumamos dizer que o compasso euclidiano colapsa ou fecha-se quando é levantado do papel. Tal característica pode parecer uma desvantagem considerável do compasso euclidiano em comparação com o compasso usual, entretanto as duas ferramentas revelam-se equivalentes, pois essa propriedade é demonstrada como a terceira proposição do livro I dos *Elementos*. Aqui observa-se uma importante característica do método de Euclides: a economia. Deve-se postular apenas o indispensável, todo o resto deve-se demonstrar.

Historicamente, entretanto, certamente o quinto postulado é aquele que merece o maior destaque. Como já dissemos, à época, acreditava-se que um postulado deveria transmitir uma ideia evidente, sobre a qual pouco ou nenhum debate deveria existir. Exatamente o contrário deu-se neste caso. O enunciado do quinto postulado é muito mais complexo e transmite uma ideia muito mais elaborada que os demais; tudo isso corroborou para questões sobre a sua independência em relação aos demais, isto é, a questão de verificar se ele poderia ou não ser demonstrado a partir dos quatro primeiros postulados. Os primeiros a investigar esse problema acreditavam que sim e seus trabalhos sobre o tema os levaram ao que seria mais tarde conhecido como as *geometrias não-euclidianas*. O leitor pode encontrar maiores informações sobre o tema em [7].

NOÇÕES COMUNS OU AXIOMAS

- A1** Objetos que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si;
- A2** Se a iguais são adicionados iguais, os totais serão iguais;
- A3** Se de iguais subtraímos iguais, os restos serão iguais;
- A4** Se um objeto coincide com outro objeto então esses objetos são iguais;
- A5** O todo é maior que a parte;

Todos os resultados dos *Elementos* são demonstrados por dedução lógica do que foi exposto anteriormente. Dessa forma, a primeira proposição é provada apenas com definições e premissas, enquanto que as proposições posteriores podem ser provadas fazendo uso também dos resultados de proposições anteriores. Vejamos, como exemplo, a demonstração dada por Euclides para a sua primeira proposição

Proposição I.1. *Em uma linha reta finita construir um triângulo equilátero;*

Dem. Sejam A e B as extremidades do segmento dado. Com centro em A , construa um círculo de raio AB , e com centro em B construa outro círculo de raio AB , de acordo com **P.3**, veja a figura 1.1 na página 6. Seja C o ponto de intersecção dos dois círculos. Dados A , B e C temos os segmento AC e BC , pelo postulado **P1**. Como consequência da definição **D15** temos que $AB = AC$ e $AB = BC$. Por fim, usando **A1** temos AC é igual a BC . Assim construímos o triângulo $\triangle ABC$ tal que $AB = AC = BC$; por definição, um triângulo equilátero. □

Tudo aparenta estar correto no argumento acima, porém uma análise mais atenta revela uma falha lógica importante. Em nenhum momento Euclides afirma que dois círculos, ou

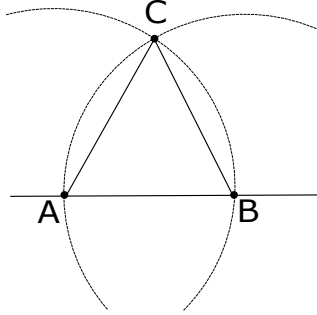


Figura 1.1: Triângulo equilátero

um círculo e uma linha reta, interceptam-se. E, em caso de intersecção, como dá-se? Isso nos mostra que, já nas suas primeiras proposições, Euclides faz uso de informações não apresentadas em suas premissas, postulados ou proposições anteriores, configurando falha em suas demonstrações.

Passemos agora a outra importante proposição do livro I dos *Elementos*:

Proposição I.4. *Se dois triângulos têm dois lados iguais respectivamente, e tem o ângulo formado por esses lados iguais também iguais, então eles terão a mesma base, os ângulos restantes serão iguais entre si e os triângulos serão iguais.*

Dem. Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ com lados $AB = DE$, $AC = DF$ e com ângulos $\angle BAC = \angle EDF$, de vértices A e D respectivamente, veja figura 1.2 na página 6. Se movermos o triângulo ABC sobre o plano até que o ponto A coincida com o ponto D e o lado AB repouse sobre o lado DE , como o ângulo BAC é igual ao ângulo EDF , veremos o lado AC repousar sobre o lado DF , logo o ponto C coincidirá com F , pois $AC = DF$. Por **A4**, os triângulos serão iguais. \square

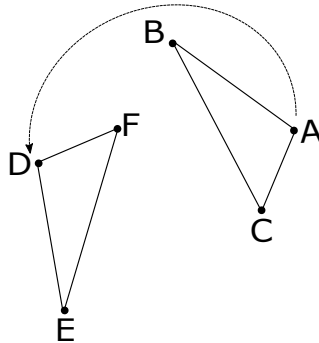


Figura 1.2: Congruência de triângulos

Novamente Euclides comete falha na demonstração visto que usa um método não explicitado anteriormente. Nada em seus postulados, noções comuns, definições ou proposições anteriores garante que podemos mover uma figura sobre o plano. Esse método, que chamamos de superposição, também é usado na demonstração da proposição 8 de seu primeiro livro, que diz que dois triângulos com dois lados iguais respectivamente, e as bases também

iguais, terão os ângulos formados pelos lados iguais também iguais. Provavelmente o método da superposição usado por Euclides na demonstração dessa proposição explica a misteriosa noção comum **A4**: objetos que coincidem são aqueles que podem ser superpostos.

Proposição I.16. *Se um dos lados de um triângulo for prolongado, o ângulo externo formado é maior do que qualquer um dos ângulos internos opostos.*

Dem. No triângulo ABC , consideremos o ângulo ABC de vértice B , formado pelos lados AB e BC e o ângulo BCD de vértice C , formado pelo lado BC e o prolongamento CD do lado AC do triângulo. Devemos mostrar que o ângulo BCD é maior que o ângulo ABC .

Divida o lado BC ao meio marcando E como ponto médio de BC (proposição I.10). Usando o postulado **P1**, construa uma linha reta AE e corte desta linha reta uma linha reta finita $EF = AE$ (proposição I.3), veja figura 1.3 na página 7. A proposição I.15 garante que $\angle AEB = \angle CEF$. Logo, pela proposição I.4, o triângulo ABE é igual ao triângulo FCE o que implica em $\angle ECF = \angle ABE$. Como o ângulo BCD é maior que o ângulo ECF , segue que o ângulo BCD também é maior que o ângulo ABE , que é igual ao ângulo ABC .

Da mesma forma, pode-se mostrar que o ângulo BCD é maior que o ângulo BAC . \square

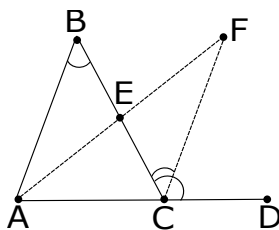


Figura 1.3: Ângulo externo de um triângulo

Como no caso das proposições anteriores, Euclides comete uma falha lógica ao descon siderar o fato de não podermos ter a certeza absoluta de que a linha reta EF realmente se encontra no interior do ângulo BCD , ou que o ponto E realmente está entre os pontos B e C . Tudo que nos leva a essa conclusão é o desenho feito no papel, mas para o rigor do sistema dedutivo isso não basta. Essa mesma falha ocorre nas demonstrações das proposições 17 e 18 deste primeiro livro dos Elementos de Euclides.

Segundo [7], o conteúdo publicado no livro I dos Elementos de Euclides pode ser dividido em três partes:

- 1ª parte - Proposições de 1 a 26, relativas a triângulos e congruências;
- 2ª parte - Proposições de 27 a 34, retratando linhas retas paralelas e suas aplicações;
- 3ª parte - Proposições de 35 a 48, referentes à teoria de área.

Toda a primeira parte do Livro I é feita sem a necessidade de uso do quinto postulado de Euclides, conhecido como "Postulado das Paralelas". Usando o quinto postulado de Euclides, pode-se provar que por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta paralela à reta dada. Tal afirmação conhecida como "Axioma de Playfair", atribuída ao matemático inglês John

Playfair (1748-1819), é uma proposição de Euclides, porém muitos autores (especialmente os mais modernos) usam o axioma de Playfair como sucedâneo do postulado original.

O quinto postulado de Euclides sempre foi o centro de muitos debates no passar dos anos. Muitos estudiosos duvidavam da independência dele em relação aos demais postulados. Será possível prová-lo a partir dos outros? A resposta a essa pergunta é não e na próxima seção veremos uma demonstração desse fato. Ele realmente era necessário e independente dos demais postulados. Para ver isso, entretanto, introduziremos um sistema de axiomas mais rigoroso para a Geometria Euclidiana elaborado pelo matemático alemão David Hilbert em seu trabalho conhecido como "*Grundlagen der Geometrie*" (1899), que corrige as falhas apontadas até aqui no trabalho de Euclides.

1.2 *Grundlagen der Geometrie*

As falhas lógicas apontadas na seção anterior deixam claro que o sistema axiomático da Geometria Euclidiana precisa ser reestruturado. O exemplo mais conhecido para um novo sistema de axiomas para a geometria foi proposto por David Hilbert, matemático alemão do século XIX, em seu trabalho "*Grundlagen der Geometrie*"(1898-1899). Não podemos também deixar de citar Moritz Pasch (1882), que formalizou a noção de ordem, e Oswald Veblen (1902) que definiu um sistema de axiomas baseado em apenas dois termos indefinidos: ponto e ordem, pois ambos também tiveram expressiva contribuição para o estudo da geometria de hoje.

Neste ponto do trabalho, vamos estudar como foi elaborado o sistema axiomático criado por Hilbert e como nesse sistema as falhas de Euclides foram corrigidas.

Um sistema axiomático consiste de um certo número de termos indefinidos e de alguns postulados ou axiomas. Para o funcionamento do sistema devemos assumir que dispomos, pelo menos, de uma linguagem, da lógica e da teoria de conjuntos.

O sistema axiomático proposto por Hilbert considera três conjuntos e cinco relações, como termos indefinidos. A saber:

- Conjunto \mathcal{E} , cujos elementos são chamados de pontos;
- Conjunto \mathcal{R} , cujos elementos são chamados de retas;

Relembramos que uma relação entre os conjuntos A e B é um subconjunto $R \subset A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ ¹. Se $(a, b) \in R$ dizemos que a e b estão relacionados. Há uma relação entre os conjuntos \mathcal{E} e \mathcal{R} , que chamamos de *sobre*. Quando um ponto A está sobre a reta r diremos também que r passa por A ou que A pertence a r ($A \in r$). Essa relação é, também, um conceito primitivo da Geometria Euclidiana

AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

¹E possível definir a noção de par ordenado apenas em termos da teoria de conjuntos. De fato, a propriedade que define um par ordenado é a seguinte: se $(a, b) = (c, d)$, então $a = c$ e $b = d$. Definindo

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

podemos demonstrar que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

A partir desse ponto, Hilbert estabelece um conjunto de premissas que dão as propriedades da relação “sobre”, chamadas de axiomas de incidência.

- I1** Por quaisquer dois pontos distintos A e B , passa uma única reta r ;
- I2** Toda reta contém pelo menos dois pontos;
- I3** Existem três pontos não-colineares, ou seja três pontos que não estão sobre a mesma reta.

Para Hilbert, um conjunto de pontos \mathcal{E} , juntamente com um subconjunto das partes de \mathcal{E} , cujos elementos são chamados de retas, satisfazendo os axiomas **I1**, **I2** e **I3**, formam o que ele define como Geometria de Incidência. De acordo com Hartshorne [7], já é possível demonstrar muitos resultados interessantes com esse modesto número de axiomas. Como exemplo a prova do fato, usado por Euclides na demonstração da proposição 4 de seu primeiro livro, de que duas retas distintas podem ter no máximo um ponto em comum.

Para demonstrar tal fato basta supor que duas retas distintas r e s possuam em comum os pontos distintos A e B . De acordo com o axioma **I1** há uma única reta contendo os pontos A e B , então r é igual a s . Uma demonstração bem simples, porém muito importante para demonstrar mais a frente a separação da reta por um ponto.

AXIOMA DAS PARALELAS

- P** Dados uma reta r e um ponto P que não está sobre r . Então há no máximo uma reta no plano, determinado por r e P , que passa em P e não intersepta r . (Ver figura 1.4 na página 9)

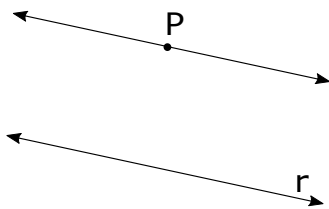


Figura 1.4: Retas paralelas

Note que esse axioma das paralelas formulado por Hilbert, veja [8], é bem mais simples, claro e conciso do que o quinto postulado enunciado por Euclides.

Dizemos que o sistema de axiomas é **consistente** se uma afirmação e a sua negação, não podem ser provadas a partir desse sistema. Além disso, um axioma é **independente** se ele não pode ser demonstrado a partir dos demais axiomas do sistema. Um **modelo** \mathcal{V} para um sistema de axiomas \mathcal{W} é um novo sistema de axiomas onde os conceitos primitivos de \mathcal{W} podem ser definidos e os axiomas de \mathcal{W} serão teoremas em \mathcal{V} . Por fim, esses sistemas serão ditos isomórficos se existir uma função injetiva (correspondência um para um) entre seus elementos que preservem as suas relações.

Como exemplo, imagine o modelo da geometria de incidência formado pelo conjunto de pontos $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ e o conjunto das retas como o conjunto dos subconjuntos de \mathbb{R}^2 da forma $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$ em que a, b, c são números reais e a e b não são simultaneamente nulos. Um outro modelo é dado pelo conjunto de pontos $\{A, B, C\}$ e pelo conjunto de retas $\{\{A, B\}, \{AC\}, \{BC\}\}$. Sobre o primeiro modelo, provaremos no próximo capítulo que valem nele os axiomas de incidência da Geometria Euclidiana; em relação ao segundo, as propriedades podem ser verificadas diretamente. Observe que esses dois modelos são sistemas não-isomórficos pelo simples fato de que os conjuntos dos sistemas possuem cardinalidades distintas, ou seja, não há função injetiva entre os elementos de um e do outro sistema. Isso fica claro pois o primeiro sistema possui uma quantidade infinita de retas, enquanto que o segundo modelo possui apenas três retas.

Modelos de um sistema de axiomas podem ser usados para demonstrar a independência dos axiomas em relação aos demais. De fato, se podemos construir um modelo para um conjunto de axiomas no qual todos, exceto um deles, são válidos, então certamente esse axioma é independente dos demais. A título de curiosidade provamos abaixo a seguinte proposição sobre a independência dos axiomas de incidência e das paralelas.

Proposição 1. *Os axiomas **I1**, **I2**, **I3** e **P** são independentes.*

Dem. Conforme explicado acima, precisamos construir modelos onde valem cada um dos axiomas listados acima, exceto um deles.

Considere, por exemplo, o seguinte modelo dado por

$$\mathcal{E} = \{A, B, C, D, E\},$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, E\}, \{E, A\}, \{A, D\}, \{A, C\}, \{B, E\}, \{B, D\}, \{C, E\}\},$$

e representado na figura 1.5 na página 10.

Dada a reta $\{A, B\}$, pelo ponto C passam as retas $\{CD\}$ e $\{C, E\}$, ambas paralelas a $\{A, B\}$. Isso significa que o axioma das paralelas não vale nesse modelo. É imediato verificar que todos os outros axiomas são satisfeitos e isso implica que **P** é independente de **I1**, **I2** e **I3**.

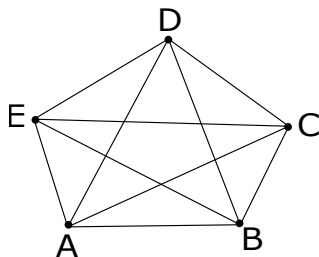


Figura 1.5: Independência do axioma **P**

Agora considere o modelo tal que

$$\mathcal{E} = \{A, B, C\},$$

$$\mathcal{R} = \{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{C, B\}\},$$

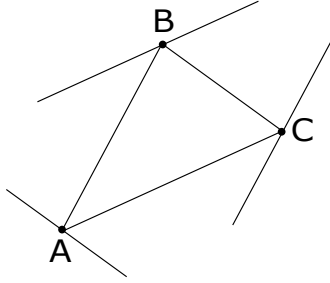


Figura 1.6: Independência do axioma **I2**

representado na figura 1.6 na página 11.

Neste caso valem os axiomas **P**, **I1** e **I3**, mas não vale **I2**, pois existem retas que têm um único ponto. Concluimos que **I2** é independente dos demais.

Se $\mathcal{E} = \{A, B\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}\}$ então valem **I1**, **I2** e **P**, mas não vale **I3**. Então **I3** é independente dos demais. Ver figura 1.7 na página 11.

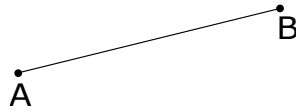


Figura 1.7: Independência do axioma **I3**

Por fim, para mostrar que **I1** é independente dos demais, basta tomar um conjunto de três pontos e nenhuma reta, isto é, $\mathcal{E} = \{A, B, C\}$ e $\mathcal{R} = \emptyset$, veja figura 1.8 na página 11. De fato, os axiomas **P**, **I2** e **I3** são satisfeitos trivialmente pois não existem retas no modelo considerado e o axioma **I1** não vale pois não existe reta passando pelos pontos A e B . Isso garante que **I1** é independente dos demais. \square

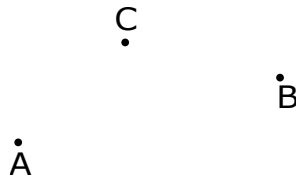


Figura 1.8: Independência do axioma **I1**

Agora Hilbert nos apresenta cinco axiomas chamados de axiomas de ordem ou axiomas de interposição. São assim chamados porque apresentam uma ideia precisa de interposição (quando um ponto está ou não entre dois outros pontos). Porém, verificou-se mais tarde, que um dentre os cinco axiomas originalmente propostos por Hilbert não era independente dos demais. Listaremos a seguir apenas os quatro axiomas independentes.

AXIOMAS DE ORDEM

Os quatro axiomas de ordem, prescrevem as propriedades de uma relação ternária $\mathcal{R} \subset \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ denominada "entre". Se $(A, B, C) \in \mathcal{R}$ dizemos que B está entre A e C e escrevemos $A - B - C$.

- O1** Se B está entre A e C então A, B e C são pontos distintos sobre uma reta e também B está entre C e A .
- O2** Para quaisquer dois pontos distintos A e C , existe um ponto B tal que B está entre A e C e um ponto D tal que C está entre A e D .
- O3** Dados três pontos em uma reta, um, e somente um deles, está entre os outros dois;
- O5** (*Pasch*) Dados A, B e C , três pontos não-colineares, e uma reta r que não passa por nenhum deles, se r passa por um ponto D entre A e B , então r passa por um único outro ponto ou entre A e C ou entre B e C . (Ver figura 1.9 na página 12)

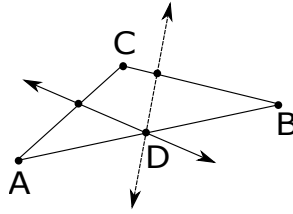


Figura 1.9: Axioma de *Pasch*

Os axiomas de ordem são importantes pois estabelecem a existência, em uma reta, de outros pontos distintos dos dois pontos que determinam a reta e conseqüentemente estabelece um “ordenamento” desses pontos. Além disso, deixa claro que uma reta ao interceptar um lado do triângulo fora do vértice também interceptará um único outro lado deste triângulo.

A partir destes axiomas Hilbert define alguns elementos geométricos necessários para o avanço de seu trabalho. Até agora ainda não sabemos o que é um segmento de reta, um triângulo, um semiplano, uma semirreta ou raio, e nem um ângulo. Aqui seguem algumas de suas definições.

Se A e B são pontos distintos, definimos o **segmento AB** como o conjunto de todos os pontos entre A e B , incluindo os pontos A e B , isto é,

$$AB = \{P \in \mathcal{E} : A - P - B\} \cup \{A, B\}.$$

Se A, B e C são três pontos não-colineares, definimos o **triângulo $\triangle ABC$** como a união dos três segmentos AB, AC e BC . Cada um desses pontos é um **vértice** do triângulo e cada um dos segmentos é um **lado** de $\triangle ABC$.

Se $C - A - B$, definimos o **raio de vértice A passando por B** como o conjunto

$$\overrightarrow{AB} = \{P \in \mathcal{E} : C - A - P\} \cup \{A\}$$

Dados dois raios $r = \overrightarrow{AB}$ e $s = \overrightarrow{AC}$ define-se o **ângulo de vértice A** como o conjunto $\angle BAC = \angle CAB = \{r, s\}$, veja figura 1.10 na página 13. Note que segundo a definição de ângulo de Hilbert não existe ângulo “nulo” (0°) e nem ângulo “raso” (180°), o qual Euclides chamava de dois ângulos retos.

Estas definições, juntamente com os axiomas listados até aqui permitem deduzir os teoremas de separação do plano e da reta que enunciamos a seguir.

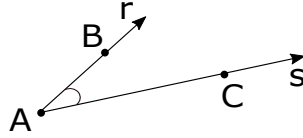


Figura 1.10: Ângulo BAC

Proposição 2 (teorema de separação do plano). *Dada uma reta r então $\mathcal{E} \setminus r = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ em que \mathcal{A} e \mathcal{B} são conjuntos não-vazios e disjuntos tais que*

- (i) *Se A e A' são pontos do \mathcal{A} , o segmento AA' está contido em \mathcal{A} e não intercepta r .*
- (ii) *Se B e B' são pontos de \mathcal{B} , o segmento BB' está contido em \mathcal{B} e não intercepta r .*
- (iii) *Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, então o segmento AB intercepta r em exatamente um ponto.*

Dizemos que um subconjunto $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ é **convexo** se dados A e B em \mathcal{E}' o segmento AB está contido em \mathcal{E}' . Com essa definição podemos interpretar a proposição acima da seguinte forma: uma reta r divide o plano em duas regiões não-vazias, disjuntas e convexas \mathcal{A} e \mathcal{B} tais que se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ então o segmento AB intercepta r . Os conjuntos \mathcal{A} e \mathcal{B} são **semiplanos** de vértice r ; dizemos ainda que \mathcal{A} e \mathcal{B} são **semiplanos opostos**. (Ver figura 1.11 na página 13)

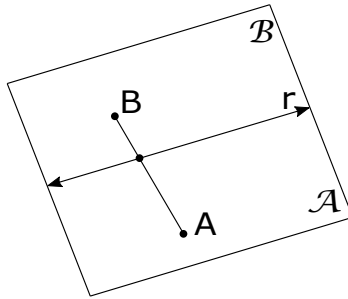


Figura 1.11: Separação do plano

Com o teorema de separação do plano podemos demonstrar o teorema de separação da reta

Proposição 3 (teorema de separação da reta). *Dada um ponto P sobre a reta r então $r \setminus \{P\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ em que \mathcal{A} e \mathcal{B} são conjuntos não-vazios e disjuntos tais que*

- (i) *Se A e A' são pontos de \mathcal{A} , o segmento AA' está contido em \mathcal{A} e não contém P .*
- (ii) *Se B e B' são pontos de \mathcal{B} , o segmento BB' está contido em \mathcal{B} e não contém P .*
- (iii) *Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, então o ponto P está sobre o segmento AB .*

Dem. Seja $Q \in \mathcal{E}$ que não está sobre r e considere a reta s passando por P e Q , como mostra a figura 1.12 na página 14. Pela proposição 2, a reta s divide $\mathcal{E} \setminus s$ em duas regiões

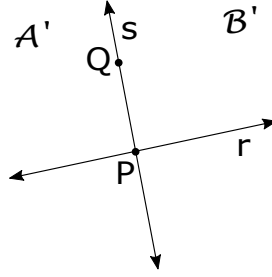


Figura 1.12: Separação da reta

não-vazias, disjuntas e convexas \mathcal{A}' e \mathcal{B}' . É imediato verificar que $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cap r$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cap r$ são os conjuntos prometidos no enunciado da proposição. \square

Dado o ponto P sobre a reta r , cada um dos conjuntos \mathcal{A} e \mathcal{B} dados pela proposição 3 é um **raio de vértice P** ; esses raios são ditos **opostos** entre si. É possível demonstrar que os conjuntos \mathcal{A} e \mathcal{B} também são semirretas de vértice P .

As definições e resultados acima permitem adicionar mais um grupo de axiomas para a Geometria Euclidiana: os axiomas de congruência. Esses axiomas prescrevem as propriedades de duas novas relações, nas classes dos segmentos e ângulos, respectivamente. Cada uma dessas relações será chamada de “congruente a”. Se dois segmentos ou ângulos são congruentes escrevemos $AB \cong CD$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, respectivamente. O que Hilbert chama de congruência, Euclides chamava de igualdade.

AXIOMAS DE CONGRUÊNCIA

C1 Dado um segmento AB e um raio de vértice C , existe um único ponto D sobre o raio tal que AB é congruente a CD . (Ver figura 1.13 na página 14)

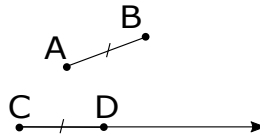


Figura 1.13: Congruência de segmentos

C2 Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$ então $CD \cong EF$. Todo segmento é congruente a si mesmo.

C3 Dados $A - B - C$ e $D - E - F$, se $AB \cong DE$ e $BC \cong EF$, então $AC \cong DF$. (Ver figura 1.14 na página 15)

C4 Dado um ângulo $\angle BAC$ e um raio \overrightarrow{DF} , existe um único raio \overrightarrow{DE} em um dos semiplanos da reta \overleftrightarrow{DF} , tal que $\angle BAC \cong \angle EDF$. (Ver figura 1.15 na página 15)

C5 Dados três ângulos α, β e γ , se $\alpha \cong \beta$ e $\alpha \cong \gamma$, então $\beta \cong \gamma$. Todo ângulo é congruente a si mesmo.

²A existência desse ponto pode ser verificada a partir dos axiomas de incidência da Geometria Euclidiana

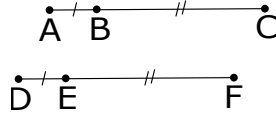


Figura 1.14: Congruência da soma de segmentos

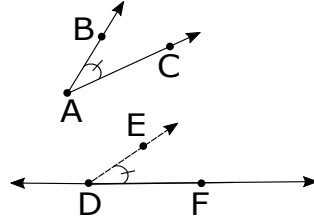


Figura 1.15: Congruência de ângulos

C6 (LAL) Dados os triângulos ABC e DEF , se $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $BC \cong EF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle ACB \cong \angle DFE$. (Ver figura 1.16 na página 15)

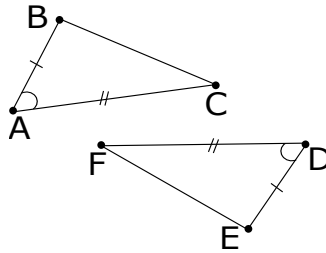


Figura 1.16: Congruência LAL de triângulos

Vale observar que os axiomas de congruência de Hilbert fazem das relações de congruência de segmentos e ângulos uma relação de equivalência. Isso significa que essas relações têm as seguintes propriedades: (i) $A \cong A$ (simetria), (ii) se $A \cong B$, então $B \cong A$ (reflexividade) e (iii) se $A \cong B$ e $B \cong C$, então $A \cong C$ (transitividade). Entre outras coisas, esse fato permite demonstrar as noções comuns de Euclides como teorema da Geometria, estabelecer uma noção de ordem no conjunto dos ângulos e segmentos e construir um corpo ordenado.

Até agora já vimos o mínimo necessário para o estudo da geometria. Os axiomas de incidência, das paralelas, de ordem e de congruência nos permitem definir um plano em que esse mínimo de geometria pode ser construída, chamado plano de Euclides.

Definição 1. *O plano de Euclides é um conjunto dado de pontos um conjunto retas e as relações sobre, a relação entre e as relações de congruente a que satisfazem os axiomas de incidência, das paralelas, de ordem e de congruência.*

Este plano de Euclides nos permite mostrar todos resultados das proposições de 1 a 28, exceto a 1 e a 22, do livro I de Euclides. As proposições 1 e 22 necessitam de um axioma específicos para tratá-las, pois elas dependem das propriedades de intersecção de círculos e retas.

Vejamos os últimos axiomas do sistema axiomático de Hilbert.

AXIOMA DE ARQUIMEDES

A Dados dois segmentos AB e CD , existe na reta \overleftrightarrow{AB} uma sequência de pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ tais que os segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ são congruentes a CD e $A - B - A_n$. (Veja figura 1.17 na página 16)

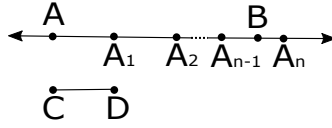


Figura 1.17: Axioma de Arquimedes

O Axioma de Arquimedes foi alvo de grandes debates sobre os fundamentos da geometria. Esse axioma é utilizado, essencialmente, para o cálculo do volume da pirâmide. Em 1900, em sua famosa conferência no Congresso Internacional de Matemática, em Paris, Hilbert sugeriu 23 problemas que deveriam ser resolvidos para o avanço e progresso da matemática da época. Um desses problemas, o terceiro problema de Hilbert, questionava sobre a necessidade do axioma de Arquimedes para o cálculo do volume da pirâmide. Esse foi o primeiro problema a ser resolvido; a solução veio apenas três anos depois pelos trabalhos de Max Dehn (1878-1952), ex-aluno de Hilbert. Dehn provou que o tetraedro regular e o cubo regular de mesmo volume não são equicompostos, isto é, não podemos cortar um desses objetos em um número finito de “pedaços” e juntá-los novamente de modo a construir o outro. Desse fato segue que não podemos prescindir do axioma de Arquimedes para calcular o volume da pirâmide. Para mais detalhes o leitor curioso pode consultar [7].

Antes de enunciarmos o axioma de intersecção de círculos precisamos definir o que é um círculo, pois já nos referimos a ele mas não definimos o que seja.

Definição 2. *Dados os pontos O e A , o círculo Γ é o conjunto de todos os pontos B tal que $OA \cong OB$. Dizemos que O é o centro do círculo e OA é o raio. O ponto P é interior ao círculo se $OP < OA$ e exterior se $OP > OA$. Uma reta r é tangente a Γ se r e Γ possuem um único ponto em comum; um outro círculo Δ é tangente a Γ se possuem um único ponto em comum.*

Vale destacar que um círculo Γ não é um conjunto vazio visto que toda reta passando por O possui dois pontos B e B' , em raios opostos de vértice O , tais que $OB \cong OA \cong OB'$, como mostra a figura 1.18 na página 17. Note também que a definição de tangência de círculos e retas de Hilbert é diferente da definição dada por Euclides. Euclides diz ser tangentes dois círculos que se tocam mas não se cortam, porém não deixava claro o que significa “cortar”.

AXIOMA DE INTERSECÇÃO DE CÍRCULOS

E Dados dois círculos Γ e Δ , se Δ contém pelo menos um ponto no interior de Γ e pelo menos um ponto no exterior de Γ , então Δ e Γ se interceptam.

A partir do axioma **E** podemos mostrar também a propriedade de intersecção de reta e círculo:

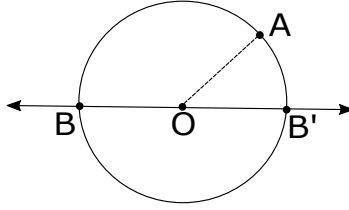


Figura 1.18: Círculo

I Dados um círculo Γ e uma reta r , se r tem um ponto no interior de Γ , então r e Γ interceptam-se.

Ressaltamos que em ambos os casos (intersecção de círculos e intersecção de reta e círculo) pode ser mostrado que a intersecção dá-se em exatamente dois pontos. Para mais detalhes o leitor pode consultar a referência [7].

Veremos posteriormente que, na geometria sobre corpos (Geometria Analítica), a propriedade de intersecção de círculos é equivalente à propriedade de intersecção de reta e círculo.

Com o axioma **E**, corrigimos os erros cometidos por Euclides nas demonstrações das proposições que necessitavam de intersecção de círculos, caso das proposições 1 e 22 do primeiro livro dos *Elementos*. Acrescentando o axioma de intersecção de círculos **E** ao plano de Euclides chegamos a uma moderna formulação das bases axiomáticas da geometria dos Elementos de Euclides. Nesse ambiente podemos demonstrar todos os teoremas de Geometria Euclidiana Plana dos *Elementos*. Como exemplo, vejamos a demonstração da proposição 1.I

Proposição I.1 (Bis). *Dado um segmento AB , construir um triângulo equilátero de lado AB .*

Dem. Começamos exatamente como Euclides. Considere os círculos Γ e Δ de centros em A e B e raios AB e BA , respectivamente como na figura 1.19, na página 17. Seja B' o ponto de Δ no raio de vértice B oposto ao raio \overrightarrow{BA} . O círculo Γ possui um ponto de Δ no seu interior e um segundo ponto de Δ no seu exterior, quais sejam, A e B' , respectivamente. O restante da demonstração segue exatamente como foi proposta por Euclides. \square

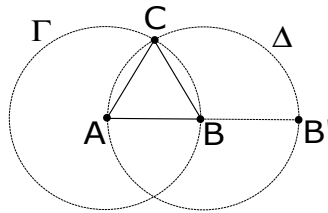


Figura 1.19: Triângulo equilátero

Para finalizar essa seção enunciamos um axioma de grande importância teórica, porém de pequena relevância histórica no desenvolvimento da Geometria Euclidiana. Esse axioma não fez parte do arcabouço teórico da geometria formulado por Hilbert.

D Suponha os pontos de uma reta r divididos em dois subconjuntos \mathcal{A} e \mathcal{B} , não-vazios, de maneira que nenhum ponto de \mathcal{A} está entre dois pontos de \mathcal{B} , e nenhum ponto de \mathcal{B}

está entre dois pontos de \mathcal{A} . Então existe um único ponto P tal que para algum ponto $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, ou $A = P$ ou $B = P$ ou $A - P - B$.

Este axioma é conhecido como axioma de Dedekind, pois é equivalente à noção de cortes de Dedekind formulada no século XIX. Esse axioma implica os axiomas A e E , e nesse caso, conforme veremos nos próximos capítulos, o plano Euclidiano é isomórfico a um plano cartesiano sobre os números reais (\mathbb{R}^2). Isso quer dizer que toda a geometria do plano euclidiano pode ser construída em um plano cartesiano sobre os números reais. Veremos que o conjunto dos números reais, um corpo ordenado e completo, é mais do que precisamos exigir do corpo \mathbb{K} para obter um plano cartesiano $\mathbb{K} \times \mathbb{K} = \mathbb{K}^2$ isomórfico ao plano euclidiano.

Capítulo 2

A Geometria Analítica. Parte 1

A geometria de Euclides prescinde da noção de número. Inicialmente álgebra e geometria eram tratadas como disciplinas distintas com pouca ou nenhuma conexão. Com o grande desenvolvimento da álgebra durante o período renascentista, entretanto, ganhou força a ideia de estender o conceito numérico aos objetos geométricos.

O grande salto nesse casamento de geometria e álgebra, talvez o passo isolado mais importante já dado na história da matemática, foi dado pelo matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650), que mostrou em seu trabalho *La Géométrie* (anexo de seu maior trabalho filosófico *Le Discours de la Méthode*) como construir a soma, a diferença, o produto, o quociente e a raiz quadrada de segmentos dado um segmento unitário. Isso possibilitou a aplicação de operações algébricas aos segmentos e a elaboração de equações algébricas que representavam, em última análise, relações entre objetos geométricos. O método de Descartes é incrivelmente poderoso e simples: representa-se os pontos como pontos de um plano; dessa forma as retas e outros entes geométricos podem ser definidos como conjuntos de pontos que satisfazem certa equação algébrica e as relações entre esses objetos refletem-se nas propriedades algébricas das suas equações. Nascia ali uma nova disciplina que conhecemos hoje como geometria analítica.

Note que a noção de número é subjacente ao método de Descartes. Conforme veremos, a geometria analítica será construída sobre uma plataforma lógica dada pela noção algébrica de um corpo. As noções geométricas de ponto, reta, ordem e congruência serão definidas em termos das propriedades de corpo, formulando portanto um modelo para a geometria axiomática.

2.1 Definições iniciais

Dizemos que um sistema de axiomas \mathcal{U} é um modelo para um sistema de axiomas \mathcal{W} se os conceitos primitivos de \mathcal{W} podem ser *definidos* em \mathcal{U} e os axiomas de \mathcal{W} podem ser *demonstrados* em \mathcal{U} . Dessa forma todo teorema em \mathcal{W} encontra um correlato em \mathcal{U} e vice-versa. Como vimos no capítulo anterior o sistema de axiomas de Hilbert é baseado nas noções indefinidas de ponto, reta, ordem e congruências de segmentos e ângulos. Para construir um modelo dessa geometria euclidiana escrito sobre outra estrutura matemática devemos verificar que suas noções indefinidas estão nesse novo modelo e então provar os

axiomas dentro dessa nova estrutura.

Definiremos a estrutura algébrica de um corpo, e usando essa noção obteremos um modelo de geometria euclidiana. É bom frisar que diferentes corpos determinam diferentes geometrias, portanto focaremos nas propriedades de corpo necessárias para mostrar cada axioma de Hilbert e como são independentes.

Um **corpo** é um conjunto não-vazio \mathbb{K} em que as operações de adição (+) e multiplicação (\cdot) estão definidas e são fechadas em \mathbb{K} , ou seja, para cada $a \in \mathbb{K}$ e $b \in \mathbb{K}$ tem-se que $a+b \in \mathbb{K}$ e $ab \in \mathbb{K}$. Além disso, dados a, b e c em \mathbb{K} as seguintes propriedades devem ser verificadas:

- (i) $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (ii) $a + b = b + a$
- (iii) Existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $a + 0 = a$
- (iv) Existe $-a \in \mathbb{K}$ tal que $a + (-a) = 0$
- (v) $(a.b).c = a.(b.c)$
- (vi) $a.b = b.a$
- (vii) Existe $1 \in \mathbb{K}$ tal que $1.a = a$
- (viii) Se $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a.a^{-1} = 1$.
- (ix) $a.(b + c) = a.b + a.c$.

Os exemplos mais conhecidos de corpos são os conjuntos dos números racionais \mathbb{Q} , dos números reais \mathbb{R} e dos números complexos \mathbb{C} . Por outro lado, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ não é um corpo, pois há números inteiros que não possuem inverso multiplicativo em \mathbb{Z} .

Podemos obter novos exemplos de corpos considerando conjuntos da forma

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\},$$

para $n \in \mathbb{N}$. O elemento $\overline{k} \in \mathbb{Z}_n$, $0 \leq k \leq n-1$, é o conjunto de todos os números inteiros que deixam resto k na divisão por n . Assim, em $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ por exemplo, $\overline{0}$ é o conjunto de todos os números inteiros pares (resto 0 da divisão por 2) e $\overline{1}$ é o conjunto de todos os números inteiros ímpares (resto 1 na divisão por 2).

Se definimos a soma e o produto nesses conjuntos como

$$\begin{aligned}\overline{a} + \overline{b} &= \overline{a + b}, \\ \overline{a} \cdot \overline{b} &= \overline{a \cdot b},\end{aligned}$$

uma rápida checagem das propriedades (i)-(ix) poderia induzir o leitor incauto a concluir que, munido das operações acima, os conjuntos \mathbb{Z}_n são corpos para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso não é verdade! Para ver isso, note que em $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ temos

$$\begin{aligned}\overline{2} \cdot \overline{0} &= \overline{0}, \\ \overline{2} \cdot \overline{1} &= \overline{2}, \\ \overline{2} \cdot \overline{2} &= \overline{0}, \\ \overline{2} \cdot \overline{3} &= \overline{2}.\end{aligned}$$

Assim, o elemento $\bar{2}$ não tem inverso multiplicativo em \mathbb{Z}_4 ! Pode-se verificar, mas não faremos isso aqui, que \mathbb{Z}_p é um corpo se, e somente se, p é um número primo. Portanto, $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$, etc. são corpos ao passo que $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_9$, etc. não o são. Para maiores detalhes sobre esses corpos o leitor pode consultar [9], página 180.

Dizemos que um corpo \mathbb{K} tem característica n se

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}} = 0.$$

Se não existe número natural com a propriedade acima dizemos que \mathbb{K} tem característica 0. Claramente \mathbb{Z}_p tem característica p . Por outro lado \mathbb{Q} e \mathbb{R} têm característica 0, conforme veremos em breve.

Para construir a geometria euclidiana em uma perspectiva algébrica precisamos definir inicialmente o plano cartesiano formado de pares ordenados de números.

Definição 3. O conjunto $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K} = \{(x, y) : x \in \mathbb{K} \text{ e } y \in \mathbb{K}\}$ é chamado de plano cartesiano sobre o corpo \mathbb{K} .

Cada elemento $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ é um ponto e uma reta é um conjunto da forma

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : ax + by + c = 0\}$$

em que a e b não são simultaneamente nulos. Se $b = 0$ a reta r escreve-se como $x = a$ e dizemos que r é vertical; se $b \neq 0$ então podemos escrever a equação de r como $y = mx + n$ e dizemos que a reta é oblíqua e tem inclinação m (ou coeficiente angular m). É conveniente acrescentarmos um ponto ao nosso corpo obtendo $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ e definir que a inclinação de uma reta vertical é ∞ . Outra particularidade ocorre quando temos o coeficiente angular m igual zero, neste caso a reta r é horizontal.

Com essas noções podemos definir a noção de retas paralelas em \mathbb{K}^2 . Dizemos que duas retas são **paralelas** se têm a mesma inclinação e nenhum ponto em comum. Assim, duas retas são paralelas se são ambas verticais distintas (inclinação ∞) ou têm equações do tipo $y = mx + n$ e $y = m'x + n'$ com $m = m'$ e $n \neq n'$. Dessa definição derivamos imediatamente o seguinte resultado fundamental: *se duas retas são paralelas a uma terceira reta, então elas devem ser paralelas entre si*. De fato, todas as retas envolvidas devem, nesse caso, ter a mesma inclinação. Outro resultado sobre retas paralelas que podemos provar é o seguinte:

Proposição 4. *Dois retas são paralelas se, e somente se, elas não tem pontos em comum.*

Dem. Sejam r e s retas paralelas. Então ambas devem ser verticais ou oblíquas. No primeiro caso $r = \{(a, y) : y \in \mathbb{K}\}$ e $s = \{(a', y) : y \in \mathbb{K}\}$ com $a \neq a'$, logo não têm pontos em comum (veja figura 2.1 na página 22).

Agora tome r e s com equações da forma $y = mx + n$ e $y = m'x + n'$, respectivamente. Sendo r e s paralelas, temos $m = m'$ e $n \neq n'$ (veja figura 2.2 na página 22). Dessa forma o sistema

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = m'x + n' \end{cases}$$

não tem solução, uma vez que

$$x = \frac{n - n'}{m' - m},$$

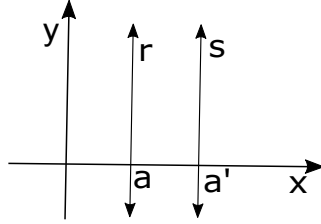


Figura 2.1: Retas verticais paralelas

não pode ser determinado para $m = m'$ e $n \neq n'$. Portanto r e s não tem pontos em comum se são paralelas.

Reciprocamente, suponha que r e s não têm pontos em comum. Pelo que vimos acima devem ser da forma $r = \{(a, y) : y \in \mathbb{K}\}$ e $s = \{(a', y) : y \in \mathbb{K}\}$, no caso de retas verticais, ou ter equações $y = mx + n$ e $y = m'x + n'$ com $m = m'$ e $n \neq n'$, no caso de retas oblíquas. Em qualquer caso, são retas paralelas por definição. \square

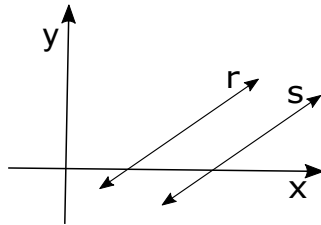


Figura 2.2: Retas oblíquas paralelas

Relembramos o leitor que no modelo proposto, a geometria analítica, os axiomas da geometria euclidiana *plana* serão demonstrados como proposições. Nas próximas seções enunciaremos e demonstraremos todos os axiomas propostos por Hilbert como proposições. Veremos, paulatinamente, quais propriedades algébricas devemos acrescentar ao nosso corpo para que todos os axiomas possam ser demonstrados.

2.2 Incidência e Paralelas

Dada a definição de plano cartesiano sobre um corpo abstrato qualquer, juntamente com a definição de ponto, reta e reta paralela neste plano, já podemos provar todos os axiomas de incidência de Hilbert e o axioma das paralelas.

Proposição 5. *Se \mathbb{K} é um corpo qualquer, o plano cartesiano \mathbb{K}^2 satisfaz os axiomas de incidência de Hilbert **I1**, **I2**, **I3** e **P**.*

Dem. O axioma **I1** segue da fórmula da reta passando por dois pontos dados, muito utilizada na geometria analítica. De fato, sejam $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in \mathbb{K}^2$ pontos distintos. Se $x_1 = x_2 = d$ então a reta vertical

$$r = \{(d, y) : y \in \mathbb{K}\} \tag{*}$$

passa por A e B . Por outro lado, se $x_1 \neq x_2$ então a reta

$$r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{K}^2 : y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \right\} \quad (**)$$

é uma reta oblíqua que passa por A e B (veja figura 2.3 na página 23).

Agora seja $ax + by + c = 0$ a reta que passa por A e B . Se $x_1 = x_2 = d$ temos que

$$\begin{cases} ad + by_1 + c = 0 \\ ad + by_2 + c = 0 \end{cases},$$

de onde vem que $by_1 - by_2 = b(y_1 - y_2) = 0$, ou seja, $b = 0$. Isso implica que a reta em questão tem equação

$$x = -\frac{c}{a} = d.$$

e coincide com (*). Agora, caso $x_1 \neq x_2$, certamente $b \neq 0$ e a reta se reescreve como $y = mx + n$. É fácil mostrar que a solução do sistema

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases},$$

é dada por

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad \text{e} \quad n = y_a - \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} x_a,$$

ou seja a reta em consideração coincide com (**).

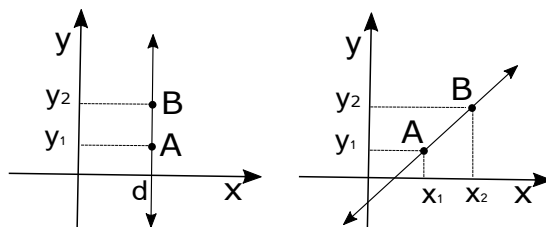


Figura 2.3: Uma reta dada por dois pontos

Para verificar **I2** basta tomar os pontos $(a, 1)$ e $(a, 0)$ se a reta for do tipo $\{(a, y) : y \in \mathbb{K}\}$ ou os pontos $(0, n)$ e $(1, m + n)$ se a reta for da forma $\{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : y = mx + n\}$ (ver figura 2.4 na página 23).

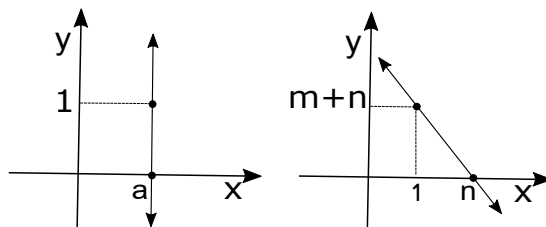


Figura 2.4: Dois pontos de uma reta

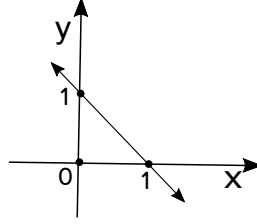


Figura 2.5: Três pontos não colineares

Em relação ao axioma **I3** devemos demonstrar apenas que há três pontos não alinhados em \mathbb{K}^2 . Para ver isso, basta observar que os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ não são colineares pois $(1, 0)$ e $(0, 1)$ estão sobre a reta $y = -x + 1$ mas $(0, 0)$ não está sobre ela (ver figura 2.5 na página 24).

Por fim o axioma **P**. Dados uma reta r e um ponto $P = (x_0, y_0)$, com $P \notin r$; devemos encontrar uma reta r' passando por P e paralela à reta r . Como P não está sobre r , então, caso r seja do tipo $\{(a, y) : y \in \mathbb{K}\}$, a reta procurada é $\{(x_0, y), y \in \mathbb{K}\}$. Por fim, se $r = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : y = mx + n\}$, pela proposição 4, devemos ter $r' = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : y = mx + n'\}$. Como r' passa por P temos $y_0 = mx_0 + n'$, isto é, $n' = y_0 - mx_0$. Concluimos que r' tem equação

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Note que essa é a conhecida equação de uma reta com inclinação m passando pelo ponto (x_0, y_0) (veja figura 2.6 na página 24).

Suponha que exista uma outra reta $r'' = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : y = mx + n''\}$ paralela a r em P . Então teremos $y_0 = mx_0 + n''$, ou seja, $n'' = y_0 - mx_0$, que resulta em $r' = r'' = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : y = y_0 - m(x - x_0)\}$. Dessa forma conclui-se que existe no máximo uma reta r' , passando por P , paralela a r . \square

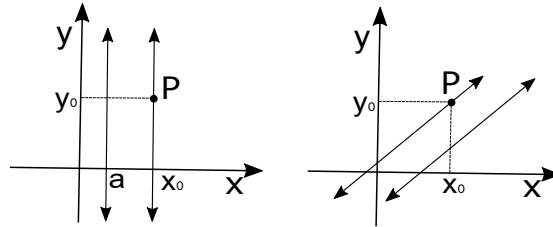


Figura 2.6: Retas paralelas em \mathbb{K}^2

2.3 Interposição

Para que uma definição de interposição seja possível devemos impor alguma estrutura adicional ao corpo. Supondo que tenhamos a noção de interposição em nosso plano cartesiano sobre um corpo \mathbb{K} , então poderemos tomar todos os elementos do eixo x que estão do mesmo lado de 1, em relação à origem 0, em um subconjunto; e todos os outros elementos do eixo x , que não estão do mesmo lado de 1, em relação a origem, em outro subconjunto. Dessa

forma poderemos definir a noção de elemento positivo de \mathbb{K} . Isso nos leva ao conceito de um corpo ordenado.

Definição 4. Um corpo \mathbb{K} é ordenado se podemos encontrar um subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathbb{K}$, cujos elementos são chamados de positivos, satisfazendo o seguinte:

- (i) Se $a \in \mathcal{P}$ e $b \in \mathcal{P}$, então $a + b \in \mathcal{P}$ e $ab \in \mathcal{P}$;
- (ii) Dado $a \in \mathbb{K}$, uma, e somente uma, das seguintes afirmações ocorre: $a \in \mathcal{P}$, $a = 0$, $-a \in \mathcal{P}$.

A existência do subconjunto \mathcal{P} permite definir uma ordem em \mathbb{K} da seguinte forma: escrevemos $a < b$ ($b > a$) se $b - a \in \mathcal{P}$ e dizemos que a é menor do que b (b é maior do que a). Dizemos ainda que $a \leq b$ ($b \geq a$) se $a = b$ ou $a < b$ ($a = b$ ou $b > a$). Usando essa definição podemos demonstrar facilmente todas as propriedades usuais de ordem. Para ilustrar, vamos mostrar que se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$. De fato, temos que $b - a \in \mathcal{P}$ e $c - b \in \mathcal{P}$, então $(c - b) + (b - a) = c - a \in \mathcal{P}$, ou seja, $a < c$. Outras propriedades podem ser demonstradas de maneira análoga e deixamos essa tarefa para o leitor diligente.

Se \mathbb{K} e \mathbb{F} são corpos, uma aplicação bijetiva $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$ é um **isomorfismo** se preserva as operações de \mathbb{K} e \mathbb{F} , isto é, se $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e $f(ab) = f(a)f(b)$; neste caso dizemos que \mathbb{K} e \mathbb{F} são **isomórficos**. Ainda, dizemos de $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ é um **subcorpo** de \mathbb{K} se, restritas à \mathbb{K}' , as operações de \mathbb{K} fazem de \mathbb{K}' um corpo; por exemplo, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é um subcorpo do corpo dos números reais. Mais informações e exemplos podem ser encontrados em [9].

Com as definições acima podemos enunciar o principal resultado sobre corpos ordenados:

Proposição 6. Em um corpo ordenado \mathbb{K} podemos destacar as seguintes propriedades:

- (i) $1 \in \mathcal{P}$, isto é, 1 é um elemento positivo.
- (ii) \mathbb{K} tem característica 0.
- (iii) Existe um subcorpo $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ isomórfico ao corpo \mathbb{Q} . Além disso, esse subcorpo \mathbb{K}' é o menor subcorpo de \mathbb{K} que contém 1.

Dem. (i) Se $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ então temos que $a \in \mathcal{P}$ ou $-a \in \mathcal{P}$. No primeiro caso $a^2 = a \cdot a \in \mathcal{P}$ e no segundo $a^2 = (-a)(-a) \in \mathcal{P}$, ou seja, mostramos que para todo elemento não nulo $a \in \mathcal{P}$ vale que $a^2 \in \mathcal{P}$. Assim, vem que $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 \in \mathcal{P}$.

Para verificar (ii) basta notar que, como $1 \in \mathcal{P}$, então $1 + 1 \in \mathcal{P}$, $1 + 1 + 1 \in \mathcal{P}$, etc. Isso implica que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}} \neq 0,$$

ou seja, \mathbb{K} tem característica zero.

Para demonstrar (iii) vamos construir um isomorfismo $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{K}$ e teremos o subcorpo prometido como a imagem desse isomorfismo, isto é, $\mathbb{K}' = f(\mathbb{Q})$. Para isso começamos definindo f para os elementos de \mathbb{Z} . Em primeiro lugar pomos $f(0) = 0$ e então, se $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}}.$$

Ainda $f(-n) = -f(n)$. Com essas definições pode-se verificar facilmente que

$$\begin{aligned} f(n+m) &= f(m) + f(n), \\ f(nm) &= f(n)f(m). \end{aligned}$$

Agora, para $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ definimos

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)(f(n))^{-1}.$$

Com essa definição vale

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right) &= f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{m'}{n'}\right), \\ f\left(\frac{m}{n} \frac{m'}{n'}\right) &= f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(\frac{m'}{n'}\right). \end{aligned}$$

Temos, portanto, o isomorfismo entre \mathbb{Q} e $\mathbb{K}' = f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{K}$. É imediato verificar que \mathbb{K}' é o menor subcorpo de \mathbb{K} que contém a identidade multiplicativa. \square

Os corpos \mathbb{Q} e \mathbb{R} são ordenados. Entretanto, o corpo dos números complexos \mathbb{C} não é ordenado, pois $i^2 = -1$ e $-1 \notin \mathcal{P}$. Os corpos \mathbb{Z}_p também não são ordenados, pois têm característica p .

Podemos encontrar mais exemplos de corpos ordenados fazendo extensões de \mathbb{Q} em \mathbb{R} e tomando a ordem induzida de \mathbb{R} . Por exemplo, dado $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definimos

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$$

com operações definidas por

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) &= (a + a') + (b + b')\sqrt{2}, \\ (a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) &= (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Não é difícil mostrar que, munido dessas operações, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um subcorpo dos reais \mathbb{R} . O conjunto \mathcal{P}' dos números positivos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é definido como $\mathcal{P} \cap \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ou seja, é simplesmente o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ que são positivos em \mathbb{R} .

Daqui em diante sempre que \mathbb{K} um corpo ordenado, é possível supor, a menos de um isomorfismo, que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$; na realidade nos referimos ao subcorpo de \mathbb{K} isomórfico a \mathbb{Q} dado pelo item (iii) da proposição 6. Com a noção de um corpo ordenado podemos então definir a interposição de pontos no plano cartesiano \mathbb{K}^2 e demonstrar mais axiomas da geometria euclidiana propostos por Hilbert.

Definição 5. *Dados $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ três pontos sobre a reta $y = mx + n$ (veja figura 2.7 na página 27), dizemos que B está entre A e C ou B está entre C e A e escrevemos $A - B - C$ se*

$$a_1 < b_1 < c_1 \text{ ou } a_1 > b_1 > c_1.$$

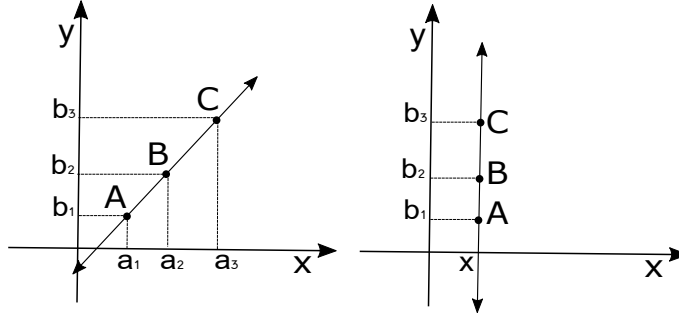


Figura 2.7: Interposição de pontos

Se a reta que passa pelos pontos for vertical, $x = a_1 = b_1 = c_1$, usamos a segunda coordenada, isto é,

$$a_2 < b_2 < c_2 \text{ ou } a_2 > b_2 > c_2.$$

Proposição 7. Se \mathbb{K}^2 é um plano cartesiano sobre o corpo ordenado \mathbb{K} , com as noções de interposição de pontos, então podemos demonstrar os axiomas de ordem da geometria euclidiana **O1**, **O2** e **O3**, propostos por Hilbert.

Dem. A demonstração do axioma **O1** é consequência imediata da definição de interposição de pontos no plano cartesiano. Observe que a definição somente determina a interposição de pontos que estão sobre uma mesma reta, logo se B está entre A e C então, *a priori*, A , B e C estão sobre uma mesma reta.

O axioma **O2** segue do fato de que \mathbb{K} é um corpo ordenado, dados $b < d$, existem a, c , e e em \mathbb{K} tais que $a < b < c < d < e$. Para ver isso basta tomar $a = b - 1$, $c = \frac{1}{2}(b + d)$ e $e = d + 1$.

Por fim, a demonstração do axioma **O3** decorre do fato de que dados três elementos distintos a, b e c de um corpo ordenado, então uma, e somente uma, das possibilidades ocorre:

$$a < b < c \text{ ou } a < c < b \text{ ou } b < a < c \text{ ou } b < c < a \text{ ou } c < a < b \text{ ou } c < b < a,$$

e isso conclui a demonstração da proposição. \square

Para facilitar a demonstração do axioma de ordem **O5**, faremos uso de uma ferramenta interessante no plano cartesiano. A conexão entre as propriedades algébricas de um corpo e as propriedades de incidência no plano cartesiano nos permite a realização de mudança linear de coordenadas do plano cartesiano. Dessa forma, podemos descrever a geometria no plano cartesiano usando ou o velho sistema de coordenadas ou o novo sistema de coordenadas.

Para o próximo resultado, lembramos que duas retas são concorrentes se possuem um único ponto em comum.

Proposição 8 (Mudança de Coordenadas). A aplicação $f: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$, definida como

$$f(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f),$$

em que $ae \neq bd$, leva as retas $r = \{(x, 0) : x \in \mathbb{K}\}$ e $s = \{(0, y) : y \in \mathbb{K}\}$ sobre retas r' e s' , concorrentes em (c, f) .

Dem. Temos que

$$f(x, 0) = (ax + c, dx + f).$$

Assim, se $x' = ax + c$ temos que $x = \frac{x'-c}{a}$, se $a \neq 0$ ou $x' = c$, se $a = 0$. Escrevendo $y' = dx + f$ vemos que a reta $r = \{(x, 0) : x \in \mathbb{K}\}$ é levada sobre a reta

$$r' = \begin{cases} \{(x', y') \in \mathbb{K}^2 : y' = \frac{d}{a}x' + f - \frac{dc}{a}\}, & \text{se } a \neq 0 \text{ e } d \neq 0 \\ \{(x', f) \in \mathbb{K}^2 : x' = ax + c\}, & \text{se } a \neq 0 \text{ e } d = 0 \\ \{(c, y') \in \mathbb{K}^2 : y' = dx + f\}, & \text{se } a = 0 \text{ e } d \neq 0 \end{cases}.$$

Note que a condição $ae \neq bd$ não permite que $a = d = 0$. Analogamente, como

$$f(0, y) = (by + d, ey + f),$$

a reta $s = \{(0, y) : y \in \mathbb{K}\}$ é levada sobre

$$s' = \begin{cases} \{(x', y') \in \mathbb{K}^2 : y' = \frac{e}{b}x' + f - \frac{ec}{b}\}, & \text{se } b \neq 0 \text{ e } e \neq 0 \\ \{(x', f) \in \mathbb{K}^2 : x' = by + c\}, & \text{se } b \neq 0 \text{ e } e = 0 \\ \{(c, y') \in \mathbb{K}^2 : y' = ey + f\}, & \text{se } b = 0 \text{ e } e \neq 0 \end{cases}.$$

Combinando todas as possibilidades de r' e s' respeitando-se a condição $ae \neq bd$, concluímos o resultado. \square

As retas $r = \{(x, 0) : x \in \mathbb{K}\}$ e $s = \{(0, y) : y \in \mathbb{K}\}$ são chamadas de sistema de coordenadas ou eixos cartesianos de \mathbb{K}^2 . É instrutivo notar que a aplicação f pode ser obtida como a composição de aplicações mais simples de \mathbb{K}^2 . Assim tomando $a \neq 0$ e $b \neq 0$, inicialmente, podemos considerar a mudança de coordenadas linear $T: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ da forma

$$T(x, y) = (\underbrace{x + a}_{x'}, \underbrace{y + b}_{y'}).$$

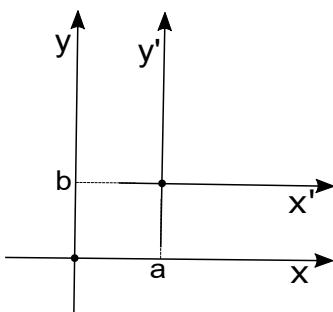


Figura 2.8: Translação dos eixos cartesianos

Geometricamente, essa aplicação move os eixos cartesianos horizontalmente e verticalmente até que a origem $(0, 0)$ repouse sobre o ponto (a, b) (veja figura 2.8 na página 28), que será a origem do novo sistema de coordenadas. Ela é chamada de translação pelo ponto (a, b) . Em seguida, podemos fazer uma transformação $G: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ da forma

$$G(x, y) = (ax, by)$$

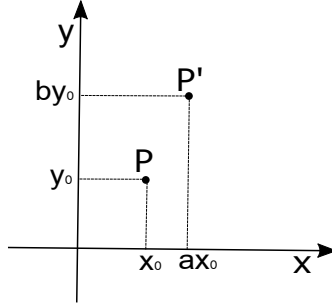


Figura 2.9: Mudança de unidade das coordenadas cartesianas

que move as coordenadas x e y dos eixos cartesianos para as coordenadas ax e by , respectivamente sobre os mesmos eixos cartesianos (veja figura 2.9 na página 29). Podemos dizer que esta segunda mudança altera a unidade das coordenadas sobre os eixos, deslocando pontos para outros pontos do sistema cartesiano. E finalmente podemos fazer uma transformação $H: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ da forma

$$H(x, y) = (x + ay, y)$$

que mantém o eixo r fixo mas substitui o eixo s por uma linha não paralela a s (ver figura

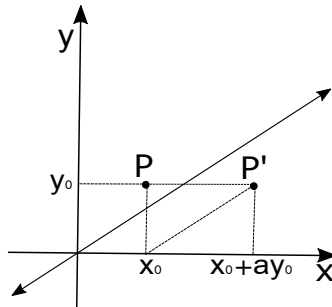


Figura 2.10: Deslocando pontos horizontalmente

2.10 na página 29). Esta transformação desloca os pontos horizontalmente em ay unidades. O eixo de coordenadas x pode também ser movido com esta transformação, para isso basta trocar os papéis de x e y , e neste caso os pontos se deslocarão verticalmente em ax unidades. A composição dessas transformações move os eixos cartesianos e as unidades das coordenadas cartesianas originais para quaisquer outros eixos e unidades cartesianas desejados.

Agora já podemos prosseguir com as demonstrações dos axiomas da geometria euclidiana propostos por Hilbert.

Proposição 9. *Se \mathbb{K}^2 é um plano cartesiano sobre o corpo ordenado \mathbb{K} , com as noções de interposição de pontos, podemos demonstrar o axioma de ordem **O5** proposto por Hilbert.*

Dem. Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ e consideremos inicialmente o caso em que a reta r é da forma $x = d$, isto é, r é uma reta vertical. Seja $D = (d, y_0)$ tal que $A - D - B$. Por definição temos

$$a_1 < d < b_1 \quad \text{ou} \quad b_1 < d < a_1.$$

Suponha que vale $a_1 < d < b_1$ (ver figura 2.11 na página 30). Se $b_1 = c_1$ temos que $a_1 < d < c_1$, logo r intercepta a reta \overleftrightarrow{AC} mas claramente não intercepta a reta vertical $\overleftrightarrow{BC} = \{(b_1, y) : y \in \mathbb{K}\}$. Se $a_1 = c_1$, o mesmo tipo de raciocínio mostra que r intercepta \overleftrightarrow{BC} mas não intercepta \overleftrightarrow{AC} .

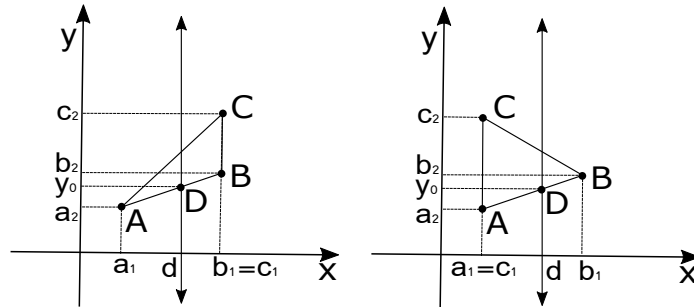


Figura 2.11: (i) Axioma de *Pasch* em \mathbb{K}^2

Passamos agora ao caso em que c_1 é diferente de a_1 e b_1 (ver figura 2.12 na página 30). Podemos ter $a_1 < b_1 < c_1$, $c_1 < a_1 < b_1$ ou $a_1 < c_1 < b_1$. Considere que $a_1 < b_1 < c_1$; nas outras configurações a demonstração é análoga. Como $d \neq c_1$, pois a reta não passa pelos pontos dados, devemos ter $c_1 < d$ ou $c_1 > d$. Se $c_1 < d$ temos que

$$c_1 < d < b_1,$$

logo r intercepta a reta \overleftrightarrow{BC} , mas como $a_1 < d$ e $c_1 < d$, a reta r não intercepta \overleftrightarrow{AC} . Da mesma forma, se $c_1 > d$ temos que

$$a_1 < d < c_1,$$

logo r intercepta a reta \overleftrightarrow{AC} , mas como $b_1 > d$ e $c_1 > d$, a reta r não intercepta \overleftrightarrow{BC} . Isso prova o resultado no caso em que r é uma reta vertical.

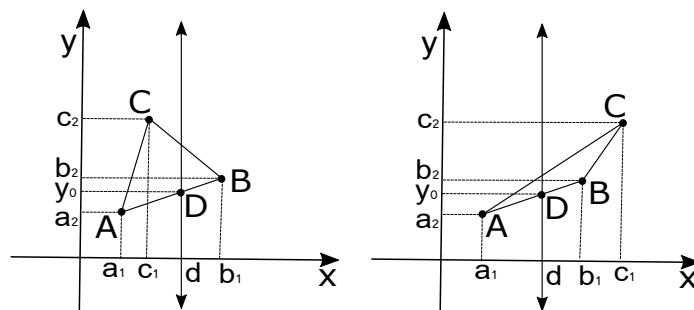


Figura 2.12: (ii) Axioma de *Pasch* em \mathbb{K}^2

O caso em que a reta é horizontal segue os mesmos passos acima, substituindo-se as primeiras pelas segundas coordenadas dos pontos.

Finalmente, se r é da forma $ax + by + c = 0$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a mudança de coordenadas linear

$$\begin{cases} x = x' - y' \\ y = \frac{a}{b}y' \end{cases}$$

leva a reta dada em uma reta vertical (veja figura 2.3 na página 31). Como essa mudança de coordenadas não altera a propriedade de interposição de pontos o teorema está demonstrado. \square

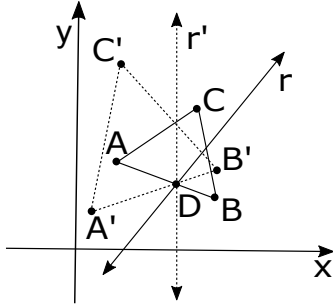


Figura 2.13: (iii) Axioma de *Pasch* em \mathbb{K}^2

A seguir definiremos e discutiremos as noções de congruências de segmentos e ângulos. Mostraremos que os axiomas de congruência de Hilbert também podem ser provados no plano cartesiano.

2.4 Congruência de Segmentos

Como fizemos em Geometria Euclidiana, usaremos a noção de interposição para definir o segmento de extremidades A e B

$$AB = \{P \in \mathbb{K}^2 : A - P - B\} \cup \{A, B\}.$$

Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. O leitor diligente poderá mostrar que

$$AB = \left\{ (x, y) \in \mathbb{K}^2 : y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2 \right\},$$

se $x_1 < x_2$ (o caso $x_1 > x_2$ é análogo) e

$$AB = \{(x_1, y) \in \mathbb{K}^2 : y_1 \leq y \leq y_2\},$$

se $x_1 = x_2$ e $y_1 < y_2$. O caso $y_1 > y_2$ é semelhante.

Se $C - A - B$ então o raio \overrightarrow{AB} , de vértice A , é definido como

$$\overrightarrow{AB} = \{P \in \mathbb{K}^2 : C - A - P\} \cup \{A\}.$$

Da mesma forma pode-se verificar que

$$\overrightarrow{AB} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{K}^2 : y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x \geq x_1 \right\}.$$

Se $x_1 = x_2$ devemos ter

$$AB = \{(x_1, y) \in \mathbb{K}^2 : y \geq y_1\}.$$

Dado o segmento AB definimos

$$\text{dist}_{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

e dizemos que este segmento é congruente ao segmento CD se $\text{dist}_{AB}^2 = \text{dist}_{CD}^2$.

Resistimos à tentação de definir congruência de segmentos a partir de expressões do tipo $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ pois em um corpo ordenado qualquer o número positivo $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ pode não ter uma raiz quadrada nesse corpo. Veja o exemplo de $2 \in \mathbb{Q}$.

O plano cartesiano sobre um corpo ordenado possibilita demonstrar todos os axiomas de congruência de segmentos de Hilbert, exceto o primeiro. A demonstração do axioma **C1** não fica totalmente garantida sem uma condição extra sobre o corpo ordenado. Tome como exemplo o caso do corpo ordenado dos números racionais: \mathbb{Q} . Se $A = C = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$, então temos que $\text{dist}_{AB}^2 = 2$. Se existe um ponto $D = (d, 0)$ no raio $\{(x, 0) : x \geq 0\}$ de vértice C tal que $AB \sim CD$, então $d^2 = \text{dist}_{CD}^2 = \text{dist}_{AB}^2 = 2$. Isso implica que d é uma raiz quadrada de 2, logo o ponto D não é um elemento de \mathbb{Q}^2 .

O exemplo acima poderia nos levar a considerar que a validade do axioma **C1** fica condicionada à existência de raízes quadradas de números positivos em \mathbb{K} . Ocorre, entretanto, que uma hipótese mais fraca é suficiente:

Definição 6. Dizemos que um corpo ordenado \mathbb{K} é **pitagórico** se para todo $a \in \mathbb{K}$ existe $d \in \mathbb{K}$ tal que $d^2 = 1 + a^2$, isto é, $1 + a^2$ tem raiz quadrada em \mathbb{K} .

Veremos na próxima proposição que o axioma **C1** vale quando garantimos que o corpo em questão é pitagórico.

Proposição 10. O plano cartesiano \mathbb{K}^2 , sobre um corpo ordenado \mathbb{K} , satisfaz o axioma de congruência de segmentos **C1** se, e somente se, \mathbb{K} é um corpo pitagórico.

Dem. Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ pontos sobre a reta $y = mx + n$. Suponha, sem perda de generalidade, que $b_1 = a_1 + h$ para algum $h > 0$. Temos então que

$$\text{dist}_{AB}^2 = (a_1 + h - a_1)^2 + (m(a_1 + h) + n - ma_1 - n)^2 = h^2(1 + m^2).$$

Agora, dado o ponto $C = (c_1, c_2)$ sobre a reta $y = m'x + n'$, queremos encontrar um ponto $D = (d_1, d_2) = (c_1 + h', m'(c_1 + h') + n')$ sobre essa reta tal que $\text{dist}_{AB}^2 = \text{dist}_{CD}^2$ (veja figura 2.14 na página 33), isto é, queremos encontrar h' satisfazendo

$$h^2(1 + m^2) = \text{dist}_{AB}^2 = \text{dist}_{CD}^2 = h'^2(1 + m'^2)$$

Se o corpo é pitagórico temos

$$h' = h \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{1 + m'^2}}.$$

Reciprocamente, suponha que vale o axioma **C1**. Dado $a \in \mathbb{K}$, tomando $O = (0, 0)$ e $A = (1, a)$, como mostra a figura 2.15 na página 33, deve existir um ponto B no raio $\{(x, 0) \in \mathbb{K}^2 : x \geq 0\}$, de coordenadas $(b, 0)$, tal que

$$b^2 = \text{dist}_{OB}^2 = \text{dist}_{OA}^2 = 1 + a^2,$$

ou seja, b é a raiz quadrada de $1 + a^2$. O caso de retas verticais é semelhante. \square

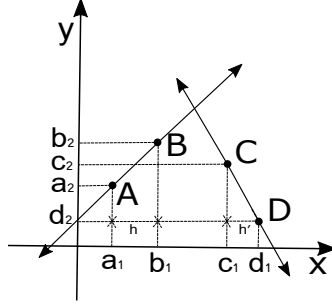


Figura 2.14: (i) Congruência de segmentos em \mathbb{K}^2

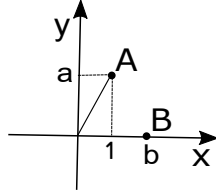


Figura 2.15: (ii) Congruência de segmentos em \mathbb{K}^2

A demonstração do axioma de congruência de segmentos **C2** não necessita da condição extra citada na proposição anterior, visto que nela trabalharemos com segmentos já existentes, comparando-os. Já a demonstração do axioma **C3** a condição de o corpo ser pitagórico é exigida apenas quando trabalhamos com pontos que não estão sobre retas paralelas.

Proposição 11. *O plano cartesiano \mathbb{K}^2 sobre um corpo ordenado \mathbb{K} satisfaz os axiomas de congruência de segmentos **C2** e **C3**.*

Dem. O axioma **C2** determina a transitividade da congruência de segmentos e segue imediatamente da definição de congruência de segmentos. Se AB é congruente a CD e congruente a EF então

$$\text{dist}_{CD}^2 = \text{dist}_{AB}^2 = \text{dist}_{EF}^2,$$

ou seja, CD é congruente a EF .

Passemos ao axioma **C3**. Sejam $A - B - C$ e $D - E - F$ tais que AB é congruente a DE e BC é congruente a EF . Como apenas questões sobre congruência de segmentos estão em jogo, vamos demonstrar aqui apenas o caso em que as retas que passam por esses pontos têm a mesma inclinação (caso em que não necessitamos de um corpo pitagórico) como mostrado na figura 2.16, na página 34. Supondo que

$$A = (a_1, ma_1 + n), \quad B = (a_1 + h, m(a_1 + h) + n), \quad C = (a_1 + h + k, m(a_1 + h + k) + n),$$

em que $h > 0$ e $k > 0$, como no caso da proposição 10 temos

$$\text{dist}_{AB}^2 = h^2(1 + m^2), \quad \text{dist}_{BC}^2 = k^2(1 + m^2), \quad \text{dist}_{AC}^2 = (k + h)^2(1 + m^2).$$

Se

$$D = (d_1, md_1 + n'), \quad E = (d_1 + h', m(d_1 + h') + n'), \quad F = (d_1 + h' + k', m(d_1 + h' + k') + n'),$$

temos também que

$$\text{dist}_{DE}^2 = h'^2(1 + m^2), \quad \text{dist}_{EF}^2 = k'^2(1 + m^2), \quad \text{dist}_{DF}^2 = (k' + h')^2(1 + m^2),$$

Como, por hipótese, $\text{dist}_{AB}^2 = \text{dist}_{DE}^2$ e $\text{dist}_{BC}^2 = \text{dist}_{EF}^2$ concluímos que

$$h^2(1 + m^2) = h'^2(1 + m^2),$$

ou seja,

$$h^2 = h'^2,$$

ou seja,

$$h^2 - h'^2 = 0,$$

ou seja,

$$(h - h')(h + h') = 0,$$

ou seja, $h = h'$ ou $h = -h'$. Analogamente $k = k'$ ou $k = -k'$. Note que as relações de interposição $A - B - C$ e $D - E - F$ não permitem que h' e k' tenham sinais trocados. Isso significa que $h = h'$ e $k = k'$ ou $h = -h'$ e $k = -k'$. Em qualquer caso temos que

$$\text{dist}_{AC}^2 = (k + h)^2(1 + m^2) = (k' + h')^2(1 + m^2) = \text{dist}_{DF}^2,$$

isto é, AC é congruente a DF , como queríamos demonstrar. □

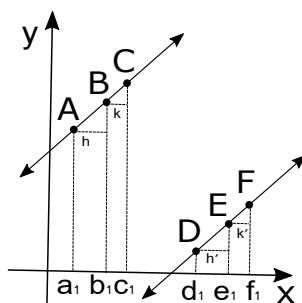


Figura 2.16: Congruência da soma de segmentos em \mathbb{K}^2

2.5 Congruência de Ângulos

Antes de começarmos a demonstração dos axiomas de congruência de ângulos, devemos relembrar e definir alguns elementos: raio (semirreta), de acordo com definição anterior, é um subconjunto de uma reta e consiste de um ponto sobre a reta (origem) juntamente com todos os pontos que estão sobre a reta à direita deste ponto ou à esquerda deste ponto. Um ângulo é a união de dois raios de mesma origem e não sobre a mesma reta. Com a noção de interposição podemos definir o **interior do ângulo** $\angle ABC$ como a intersecção do semiplano determinado pela reta \overleftrightarrow{BC} que contém o ponto A e o semiplano determinado pela reta \overleftrightarrow{AB} que contém o ponto C . Dizemos que um ângulo α está no interior de um ângulo β

se:(i) ambos os raios que determinam α estão no interior do ângulo β ; (ii) um dos raios que determinam α está sobre um dos raios que determinam β e o outro raio de α está no interior de β .

O ângulo formado pelos raios de inclinação m e m' é **reto** se m e m' são elementos de \mathbb{K} e $mm' = -1$ ou as inclinações dos raios são 0 e ∞ (esse último é o caso em que uma reta é horizontal e a outra vertical). Chamamos de **agudo** o ângulo que está contido no interior de um ângulo reto e **obtuso** o ângulo que contém um ângulo reto em seu interior.

Definiremos a congruência de ângulos através de uma função tangente. Se \mathbb{K} é um corpo ordenado, dado um ângulo α em \mathbb{K}^2 , definiremos $\tan \alpha$ como um elemento do corpo estendido $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Para definir essa função inspiraremos-nos na noção de tangente da trigonometria, entretanto, como estamos em um corpo ordenado abstrato, não assumiremos qualquer propriedade dessa função até que ela tenha sido demonstrada.

Definição 7. Se \mathbb{K} é um corpo ordenado e α é um ângulo formado pelos raios de inclinação m e m' no plano cartesiano \mathbb{K}^2 , definimos a tangente de α como o elemento de $(\mathbb{K} \cup \{\infty\}) \setminus \{0\}$ dado por

$$\tan \alpha = \begin{cases} \infty, & \text{se } \alpha \text{ é reto} \\ \frac{1}{|m|}, & \text{se as inclinações são } m \in \mathbb{K} \text{ e } \infty \text{ e } \alpha \text{ é agudo} \\ -\frac{1}{|m|}, & \text{se as inclinações são } m \in \mathbb{K} \text{ e } \infty \text{ e } \alpha \text{ é obtuso} \\ \left| \frac{m'-m}{1+mm'} \right|, & \text{se } m \in \mathbb{K}, m' \in \mathbb{K} \text{ e } \alpha \text{ é agudo} \\ -\left| \frac{m'-m}{1+mm'} \right|, & \text{se } m \in \mathbb{K}, m' \in \mathbb{K} \text{ e } \alpha \text{ é obtuso} \end{cases}.$$

A estranheza da definição acima deve-se ao fato de que a expressão $\frac{m-m'}{1+mm'}$ não é capaz de distinguir um ângulo do seu suplemento; também temos que lidar com o elemento ∞ . Vale notar que o valor que a função tangente assume é um elemento do corpo \mathbb{K} se o ângulo for agudo ou obtuso e ∞ se o ângulo é reto. Faça alguns desenhos e convença-se que essa definição está de acordo com a noção usual de tangente da trigonometria.

Dizemos que dois ângulos em um plano cartesiano \mathbb{K}^2 são congruentes se eles possuem a mesma tangente. Com essa definição demonstraremos os axiomas de congruência de ângulos.

Proposição 12. Se \mathbb{K} é um corpo ordenado, no plano cartesiano \mathbb{K}^2 valem os axiomas **C4** e **C5**.

Dem. O axioma **C5** é evidente. Para demonstrar o axioma **C4** suponha que tenham sido dados um ângulo α e um raio r de inclinação m . Se A é um ponto sobre o raio dado, devemos encontrar em cada um dos semiplanos que ele determina um segundo raio r' de vértice A com inclinação m' tal que α é congruente a $\beta = \{r, r'\}$,

$$\tan \alpha = \tan \beta.$$

As escolhas para m' a partir de m e α estão descritas na tabela 2.1. Convidamos o leitor para convencer-se das escolhas para m' descritas na tabela (faça alguns desenhos!). Faremos aqui apenas a análise do caso em que $m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $\tan \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0, \frac{1}{m}, -\frac{1}{m}\}$. Neste caso devemos resolver a seguinte equação,

$$\tan \alpha = \pm \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|.$$

m		$\tan \alpha$		m'	
∞		∞		0 (raios opostos)	
		$\mathbb{K} \setminus \{0\}$		$\pm \frac{1}{\tan \alpha}$	
\mathbb{K}	0	∞		∞ (raios opostos)	
		$\mathbb{K} \setminus \{0\}$		$\pm \tan \alpha$	
	$\mathbb{K} \setminus \{0\}$	∞		$-\frac{1}{m}$ (raios opostos)	
		$\mathbb{K} \setminus \{0\}$	$\pm \frac{1}{m}$		∞ ou $\frac{m^2 - 1}{2m}$
			$\neq \frac{1}{m}, \neq -\frac{1}{m}$		$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - m \tan \alpha}$ ou $\frac{1 - \tan \alpha}{1 + m \tan \alpha}$

Tabela 2.1: Possíveis escolhas para m'

Temos que

$$\tan \alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'} \quad \text{ou} \quad \tan \alpha = -\frac{m - m'}{1 + mm'}$$

No primeiro caso

$$(1 + mm') \tan \alpha = m - m',$$

ou seja,

$$mm' \tan \alpha + m' = m - \tan \alpha,$$

ou seja,

$$m'(1 + m \tan \alpha) = m - \tan \alpha,$$

ou seja,

$$m' = \frac{m - \tan \alpha}{1 + m \tan \alpha}.$$

No outro caso obtemos

$$m' = \frac{m + \tan \alpha}{1 - m \tan \alpha}.$$

Cada uma dessas soluções corresponde a raios em lados opostos do raio dado (veja figura 2.17 na página 37). Vale observar que a condição sobre o valor da tangente garante que não temos 0 no denominador. \square

A demonstração do axioma de congruência **C6**, que trata da congruência lado-ângulo-lado, será feita no próximo capítulo onde também discutiremos as noções de movimentos rígidos, o método de superposição de Euclides e a demonstração do axioma de intersecção de círculos e o axioma de Dedekind.

Para terminar esse capítulo faremos a demonstração do axioma de Arquimedes.

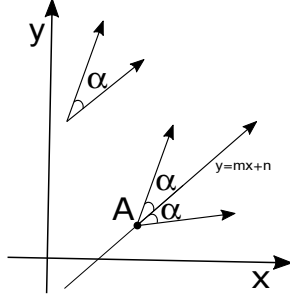


Figura 2.17: Congruência de ângulos em \mathbb{K}^2

2.6 Axioma de Arquimedes

Dizemos que um corpo ordenado é arquimediano se, dado $a \in \mathbb{K}$, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > a$. Atribui-se a Arquimedes a famosa divisa: "Dê-me um ponto de apoio e eu moverei o mundo". No dito encontra-se tacitamente a noção de um corpo arquimediano: Arquimedes formulou a lei das alavancas e sabia que seu peso poderia mover outro peso muito maior se lhe fosse dado um ponto de apoio, pois nesse caso poderia multiplicar sua distância até o fulcro um número inteiro de vezes para ter vantagem mecânica.

Proposição 13. *Dado um corpo ordenado \mathbb{K} , o plano cartesiano \mathbb{K}^2 satisfaz o axioma de Arquimedes se, e somente se, o corpo \mathbb{K} é arquimediano*

Dem. Seja $a \in \mathbb{K}$. Suponha que $a > 0$, caso contrário $1 > a$. Considere o segmento de extremidades $A = (0, 0)$ e $B = (a, 0)$ AB . Seja CD um segmento unitário, isto é, um segmento tal que $\text{dist}_{CD}^2 = 1$. Pelo axioma de Arquimedes podemos encontrar uma sequência finita de pontos $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ tais que $A_{i-1}A_i \sim CD$ para $1 \leq i \leq n$ e $A - B - A_n$ (veja figura 2.18 na página 38).

Escreva $A_i = (h_i, 0)$, em que $h_i > 0$. Neste caso temos

$$1 = \text{dist}_{CD}^2 = \text{dist}_{A_0A_1}^2 = h_1^2,$$

ou seja, $h_1 = 1$. Da mesma forma

$$(h_i - h_{i-1})^2 = \text{dist}_{A_{i-1}A_i}^2 = \text{dist}_{CD}^2 = 1$$

de onde $h_i = h_{i-1} + 1$. Como $h_1 = 1$, obtemos $h_n = n$. Finalmente como $A - B - A_n$ temos que

$$0 < a < n$$

como queríamos demonstrar. A recíproca é deixada para o leitor. \square

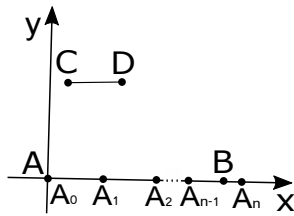


Figura 2.18: Axioma de Arquimedes em \mathbb{K}^2

Capítulo 3

A Geometria Analítica. Parte 2

Neste capítulo daremos continuidade às demonstrações dos axiomas de Hilbert em um plano cartesiano sobre um corpo ordenado.

Iniciaremos com a definição de movimento rígido e, em seguida, mostraremos que existem três movimentos rígidos em um plano cartesiano sobre um corpo ordenado pitagórico. Tais movimentos nos auxiliarão na demonstração do axioma de congruência **C6** no plano cartesiano. Nossa demonstração será bem à moda de Euclides, depois de mostrarmos que ela faz sentido. Em seguida demonstraremos o axioma de intersecção de círculos, e posteriormente, o axioma de Dedekind **D**. Veremos ainda, como o axioma de Dedekind implica a propriedade de intersecção de círculos **E** e a propriedade de intersecção de de reta e círculo **I**.

3.1 Movimentos Rígidos e o axioma LAL

Para demonstrar o axioma **C6**, caso de congruência de triângulos lado-ângulo-lado, usaremos o método de superposição de Euclides, isto é, mostraremos que podemos “deslizar” um triângulo pelo plano até que ele se sobreponha ao outro. Antes disso, entretanto, mostraremos que tal método faz sentido. Para isso, precisamos da noção de movimento rígido que passamos a definir.

Definição 8. Se \mathbb{K}^2 é o plano cartesiano sobre um corpo ordenado pitagórico \mathbb{K} , definimos um movimento rígido como uma aplicação $\varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ tal que:

- (i) φ é uma correspondência injetiva e sobrejetiva.
- (ii) φ leva retas a retas.
- (iii) Se $A - B - C$, então $\varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(C)$.
- (iv) Para quaisquer dois pontos A e B , temos $AB \cong \varphi(A)\varphi(B)$.
- (v) Para qualquer ângulo α , temos $\angle\alpha \cong \angle\varphi(\alpha)$.

Por exemplo, a transformação identidade $I: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ definida como $I(P) = P$ é, trivialmente, um movimento rígido. Note que, por definição, φ preserva as estruturas geométricas em nossa geometria. Além disso, se φ e ψ são dois movimentos rígidos quaisquer, então a

sua composição $\varphi\psi(A) = \varphi(\psi(A))$ é um outro movimento rígido. Dessa forma o conjunto G de todos os movimentos rígidos, com a operação de composição de funções, forma um grupo com unidade I .

Ainda não é evidente que existem outros movimentos rígidos além da aplicação identidade, entretanto mostraremos a seguir que, se \mathbb{K} é um corpo ordenado pitagórico, há movimentos rígidos suficientes em \mathbb{K}^2 para justificar o método da superposição de Euclides e demonstrar o axioma **C6**.

Proposição 14 (EMR - Existência de Movimentos Rígidos). *Seja \mathbb{K}^2 o plano cartesiano sobre um corpo ordenado pitagórico \mathbb{K} . Vale o seguinte:*

- (i) *Para quaisquer dois pontos $A, A' \in \mathbb{K}^2$, existe um movimento rígido $\varphi \in G$ tal que $\varphi(A) = A'$.*
- (ii) *Para quaisquer três pontos O, A, A' , existe um movimento rígido $\psi \in G$ tal que $\psi(O) = O$ e ψ leva o raio \overrightarrow{OA} para o raio $\overrightarrow{OA'}$;*
- (iii) *Para qualquer reta r , existe um movimento rígido $\sigma \in G$ tal que, para todo $P \in r$, $\sigma(P) = P$ e σ inverte os semiplanos determinados por r .*

Dem. Considere o ponto $A = (a, b)$ e uma transformação $\varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$, chamada translação, dada por

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b. \end{cases}$$

Claramente φ é uma correspondência injetiva e sobrejetiva, pois tem uma inversa

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b. \end{cases}$$

Assim a transformação φ leva todos os pontos de uma reta $y = mx + n$ sobre os pontos que satisfazem a equação $y' + b = m(x' + a) + n$ (veja figura 3.1 na página 41). Isso mostra que φ leva retas em retas. Como as inclinações dessas retas são iguais, temos que a transformação φ preserva ângulos. Também, φ preserva a interposição de pontos, visto que essa interposição é devida à noção de desigualdades em \mathbb{K} que é preservada em casos de adição de constantes, como acontece ao determinarmos as novas coordenadas x' e y' .

Finalmente vamos verificar que φ preserva a congruência de segmentos definida pela função dist^2 . Para isso vamos aplicar a transformação φ nos pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ e analisar a função dist^2 .

Sabemos que $\text{dist}_{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, e que $\varphi(A) = (x_1 - a, y_1 - b)$ e $\varphi(B) = (x_2 - a, y_2 - b)$. Portanto

$$\text{dist}_{\varphi(A)\varphi(B)}^2 = (x_2 - a - x_1 + a)^2 + (y_2 - b - y_1 + b)^2,$$

ou seja

$$\text{dist}_{\varphi(A)\varphi(B)}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \text{dist}_{AB}^2.$$

Com isso mostramos que a transformação φ preserva a congruência de segmentos.

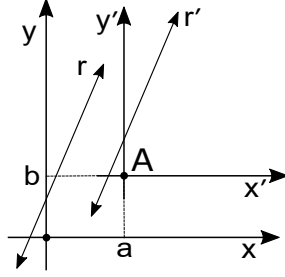


Figura 3.1: **ERM**: translação:

Além disso tomando dois pontos quaisquer $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ em \mathbb{K}^2 e fazendo $a = x_2 - x_1$ e $b = y_2 - y_1$ sempre teremos $\varphi(B) = A$. Isso demonstra o item (i) de **EMR**.

Para provar o item (ii), consideraremos uma rotação $\psi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ definida por

$$\begin{cases} x' = cx - sy \\ y' = sx + cy, \end{cases}$$

em que $c, s \in \mathbb{K}$ e $c^2 + s^2 = 1$ (“s” de seno e “c” de cosseno, claro). Também, ψ é uma correspondência injetiva e sobrejetiva, já que o inverso dessa transformação é dada por

$$\begin{cases} x = cx' + sy' \\ y = -sx' + cy'. \end{cases}$$

A aplicação ψ leva uma reta $y = mx + n$, com inclinação m , a uma nova reta dada por

$$-sx' + cy' = m(cx' + sy') + n,$$

ou seja,

$$y'(c - ms) = (mc + s)x' + n,$$

ou seja,

$$y' = \frac{mc + s}{c - ms}x' + \frac{n}{c - ms}$$

que tem inclinação

$$m' = \frac{mc + s}{c - ms}.$$

Se $c = m = 0$, definimos $m' = \infty$. Também não é difícil mostrar que ψ ou preserva ou inverte as desigualdades dos elementos de \mathbb{K} . Para isso o leitor interessado pode tomar três pontos distintos e colineares, submetê-los à transformação ψ e observar suas respectivas coordenadas, então verá que a interposição dos pontos é preservada.

Agora vamos mostrar que ψ preserva os ângulos. Vimos que a congruência de ângulos é determinada por suas tangentes. Portanto, dadas as retas com inclinações m_1 e m_2 e aplicando a transformação ψ obteremos retas com inclinações $m'_1 = \frac{m_1c + s}{c - m_1s}$ e $m'_2 = \frac{m_2c + s}{c - m_2s}$ que formam um ângulo cuja tangente é dada por

$$\frac{m'_1 - m'_2}{1 + m'_1m'_2} = \frac{\frac{cm_1 + s}{c - sm_1} - \frac{cm_2 + s}{c - sm_2}}{1 + \frac{cm_1 + s}{c - sm_1} \cdot \frac{cm_2 + s}{c - sm_2}}$$

que após desenvolvimento dos cálculos fica

$$\frac{m'_1 - m'_2}{1 + m'_1 m'_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Portanto a tangente do ângulo entre as retas de inclinações m'_1 e m'_2 é a mesma que a tangente do ângulo entre as retas de inclinações m_1 e m_2 . Dessa forma ψ preserva os ângulos.

Finalmente, observe que se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, temos que $\psi(A) = (cx_1 - sy_1, sx_1 + cy_1)$ e $\psi(B) = (cx_2 - sy_2, sx_2 + cy_2)$. Assim

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\psi(A)\psi(B)}^2 &= (c(x_1 - x_2) - s(y_1 - y_2))^2 + (s(x_1 - x_2) - c(y_1 - y_2))^2 \\ &= c^2(x_1 - x_2)^2 - 2cs(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + s^2(y_1 - y_2)^2 \\ &\quad + s^2(x_1 - x_2)^2 + 2sc(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + c^2(y_1 - y_2)^2 \\ &= (c^2 + s^2)(x_1 - x_2)^2 + (s^2 + c^2)(y_1 - y_2)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= \text{dist}_{AB}^2. \end{aligned}$$

O que vimos acima garante que ψ é um movimento rígido. Agora vamos mostrar que dados três pontos O , A e A' , existe um movimento ψ que deixa O fixo e leva o raio \overrightarrow{OA} ao raio $\overrightarrow{OA'}$, de acordo com o item (ii) de **EMR**.

Usando uma translação podemos reduzir ao caso em que $O = (0, 0)$. Tomando $r = \{(x, mx) : x \in \mathbb{K}\}$ e $t = \{(x, m'x) : x \in \mathbb{K}\}$ como retas que passam por A e A' respectivamente, existe uma rotação que deixa O fixo e leva r para t . Para determinarmos essa rotação basta encontrar c e s em \mathbb{K} , com $c^2 + s^2 = 1$, tal que

$$m' = \frac{mc + s}{c - ms},$$

da qual obtemos

$$s = \frac{m' - m}{1 + mm'}c.$$

Fazendo $k = \frac{m' - m}{1 + mm'}$, podemos resolver o sistema

$$\begin{cases} s = kc \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases},$$

para obter $c = \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ no corpo pitagórico \mathbb{K} . Com isso teremos duas rotações, uma para cada semiplano determinado por r , sendo que uma delas leva o raio \overrightarrow{OA} ao raio $\overrightarrow{OA'}$, como queríamos (ver figura 3.2 na página 43).

Para completar a prova de **EMR** vamos verificar o item (iii). Dada uma reta r , usamos a translação φ de um ponto de r para o ponto $O = (0, 0)$, assim $O \in r'$. Podemos tomar algum outro ponto $A \in r'$ e aplicar uma rotação ψ que deixa O fixo e leva o raio \overrightarrow{OA} para o raio $OX = \{(x, 0) : x \geq 0, x \in \mathbb{K}\}$ sobre o eixo x . Assim podemos definir uma reflexão σ no eixo x dada por

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases},$$

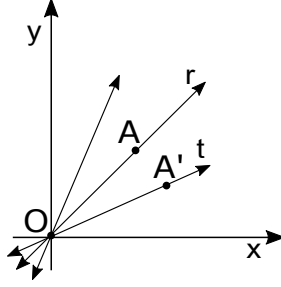


Figura 3.2: **EMR**: rotação

que claramente é um movimento rígido que deixa os pontos sobre o eixo x fixados e inverte seus semiplanos. Agora basta tomar a composição $\theta = \varphi^{-1}\psi^{-1}\sigma\psi\varphi$ e teremos a reflexão na reta r , como requerido. \square

Esses três tipos de movimentos rígidos nos permitem mover os elementos geométricos sobre o plano cartesiano mantendo sua estrutura geométrica como forma e tamanho. Eles tornam o método de superposição de Euclides possível na geometria sobre corpos. Dessa forma podemos provar o axioma **C6** de Hilbert.

Proposição 15. *Se \mathbb{K} é um corpo ordenado pitagórico, então sobre \mathbb{K}^2 vale o axioma **C6** (congruência LAL de triângulos).*

Dem. Já sabemos que vale **EMR** em \mathbb{K}^2 . Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos tais que $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Daí, mostraremos que esses triângulos são congruentes, ou seja, $BC \cong B'C'$ e os ângulos em B e C são congruentes aos ângulos em B' e C' , respectivamente.

Pela proposição 14, existe um movimento rígido $\varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ tal que $\varphi(A) = A'$. Seja $\varphi(B) = B''$. Dessa forma, pela propriedade de um movimento rígido temos que $AB \cong A'B''$. Como por hipótese $AB \cong A'B'$, então, por transitividade, $A'B' \cong A'B''$.

Se B' e B'' estão sobre o mesmo raio de origem A' , tome $\psi = I$. Caso contrário, seja ψ o movimento rígido tal que $\psi(A') = A'$ e leva o raio $\overrightarrow{A'B''}$ sobre o raio $\overrightarrow{A'B'}$. Por construção, temos que $\psi(B'')$ está sobre o raio $\overrightarrow{A'B'}$; de $A'B'' \cong A'B'$ e como ψ que preserva a relação de congruência, concluímos que $\psi(B'') = B'$. Até agora temos um movimento rígido $\psi\varphi$ tal que $\psi\varphi(A) = \psi(\varphi(A)) = \psi(A') = A'$ e $\psi\varphi(B) = \psi(\varphi(B)) = \psi(B'') = B'$.

Seja $C''' = \psi\varphi(C)$ (ver figura 3.3 na página 44). Mais uma vez, se C' e C''' estão no mesmo semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tome $\sigma = I$; caso contrário, seja σ a reflexão pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, dada por (iii) da proposição 14. Em qualquer caso, se definimos $\sigma(C''') = C''''$ temos que

$$\begin{aligned}\sigma\psi\varphi(A) &= \sigma\left(\psi(\varphi(A))\right) = \sigma(A') = A' \\ \sigma\psi\varphi(B) &= \sigma\left(\psi(\varphi(B))\right) = \sigma(B') = B' \\ \sigma\psi\varphi(C) &= \sigma\left(\psi(\varphi(C))\right) = \sigma(C''') = C''''\end{aligned}$$

Além disso, sabemos que C'''' está no mesmo semiplano que C' .

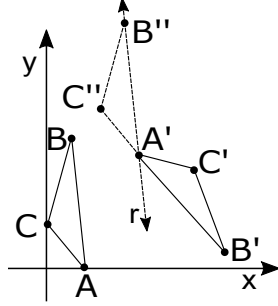


Figura 3.3: Congruência LAL de triângulos em \mathbb{K}^2

Como, por hipótese, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e pelas propriedades de um movimento rígido $\angle BAC \cong \angle B'A'C'''$, temos que $\angle B'A'C' \cong \angle B'A'C'''$. Por **C4** podemos garantir que C' e C''' estão no mesmo raio de vértice A' . Mas $A'C' \cong AC$, por hipótese, e $A'C''' \cong AC$, pelas propriedades de um movimento rígido, de onde vem que $A'C' \cong A'C'''$. Por **C1** obtemos $C''' = C'$.

Construímos, portanto, o movimento rígido $\sigma\psi\varphi$ tal que $\sigma\psi\varphi(A) = A'$, $\sigma\psi\varphi(B) = B'$ e $\sigma\psi\varphi(C) = C'$. Daí segue que $BC \cong B'C'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ e $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$, como queríamos demonstrar. \square

A prova deste último axioma de congruência pode parecer complexa, mas tendo em mente que os movimentos rígidos são funções do plano cartesiano que mapeiam os pontos preservando as propriedades de interposição de pontos e de congruência, é intuitiva a possibilidade de deslocar, girar em torno de um ponto, ou refletir as estruturas rígidas do plano cartesiano sobre ele mesmo.

3.2 O axioma de intersecção de círculos

Como visto anteriormente, o círculo de centro O e raio OR é definido como o conjunto de pontos P tais que $OP \cong OR$. A definição de distância no plano cartesiano, dada pela congruência de segmentos, permite escrever a equação algébrica de um círculo. De fato, temos que

$$\Gamma(O, R) = \{P \in \mathbb{K}^2 : PO \cong OQ\} = \{P \in \mathbb{K}^2 : \text{dist}_{PO}^2 = \text{dist}_{OQ}^2\},$$

ou seja, se $P = (x, y)$, $O = (a, b)$ e $R = (c, d)$ então

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2 = R^2. \quad (***)$$

Note que $R^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2$ é um número positivo de \mathbb{K} , mas não podemos garantir que $R \in \mathbb{K}$, pois, à princípio, não sabemos se os elementos positivos de \mathbb{K} têm raízes quadradas em \mathbb{K} . Aproveitamos o ensejo e definimos que um corpo ordenado \mathbb{K} é **euclidiano** se todo elemento positivo de \mathbb{K} tem raiz quadrada em \mathbb{K} , isto é, dado $a \in \mathcal{P}$ com $\mathcal{P} \subset \mathbb{K}$, existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $b^2 = a$. Note que se b é uma raiz quadrada de a , ou seja, se $b^2 = a$ então

$$(-b)^2 = (-b)(-b) = b^2 = a,$$

logo $-b$ também é uma raiz quadrada de a . Concluimos que, se $a \neq 0$, esse elemento possui duas raízes quadradas em um corpo euclidiano, uma positiva e outra negativa; a positiva será denotada por \sqrt{a} e a negativa por $-\sqrt{a}$.

Desenvolvendo os quadrados em $(***)$ encontramos a equação geral do círculo

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

com $A, B, C \in \mathbb{K}$.

Veremos a seguir que é necessário e suficiente termos um corpo euclidiano para que o axioma de intersecção de círculos **E** seja satisfeito em nossa geometria.

Proposição 16. *Seja \mathbb{K} é um corpo ordenado pitagórico. Vale o axioma **I** em \mathbb{K}^2 se, e somente se, \mathbb{K} é euclidiano.*

Dem. Vejamos inicialmente que vale **I** em \mathbb{K}^2 se \mathbb{K} é um corpo euclidiano. Para isso, supomos que o círculo Γ e a reta r são tais que r tem um ponto no interior de Γ e buscamos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ ax + by + c = 0. \end{cases}$$

De acordo com a seção anterior, pela aplicação de movimentos rígidos adequados (translação seguida de rotação), podemos considerar, sem perda de generalidade, o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = q, \end{cases}$$

em que $q > 0$, ou seja, podemos considerar a intersecção de um círculo com centro na origem e uma reta vertical $x = q$ (veja figura 3.4 na página 45). Como \mathbb{K} é euclidiano, temos que $R \in \mathbb{K}$. Observe ainda que, se $q \leq R$, então não há pontos de r no interior de Γ ; de fato se $R = q$ temos que a reta r é tangente ao círculo Γ e se $q > R$ todos os pontos de r estão no exterior de Γ , c.f. [7], capítulo 2, página 104. Assim devemos ter $0 < q < R$.

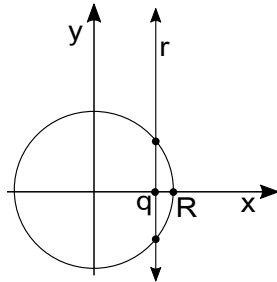


Figura 3.4: (i) Intersecção de reta e círculo

Substituindo a segunda equação na primeira vem $y^2 = R^2 - q^2$ e, como $q < R$, o número $R^2 - q^2$ é positivo, logo tem raízes quadradas em \mathbb{K} . Os pontos $(q, \sqrt{R^2 - q^2})$ e $(q, -\sqrt{R^2 - q^2})$ são as soluções procuradas.

Reciprocamente, seja $q \in \mathbb{K}$ um elemento positivo; desejamos mostrar que existe a raiz quadrada de q em \mathbb{K} se vale **I**. Para isso, considere o ponto $A = (q + 1, 0)$ e seja $M = (\frac{q+1}{2}, 0)$

o ponto médio do segmento OA , em que $O = (0, 0)$ é a origem. Considere o círculo centrado em A de raio $\frac{q+1}{2}$; a reta $x = q$ tem um ponto no interior do círculo, logo deve interceptá-lo em dois pontos B e C por **I** (veja figura 3.5 na página 46). Usando propriedades básicas de geometria euclidiana é fácil mostrar que em \mathbb{K}^2 temos $B = (q, \sqrt{q})$ e $C = (q, -\sqrt{q})$. \square

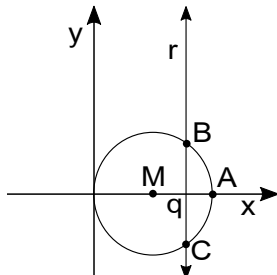


Figura 3.5: (ii) Intersecção de reta e círculo

Não é difícil mostrar em geometria euclidiana que **E** implica **I**, c.f. [7], capítulo 2, página 108; desconhece-se, entretanto uma demonstração do fato que **I**, implica **E**. O teorema a seguir mostra que a demonstração desse fato em geometria analítica é uma tarefa relativamente simples.

Proposição 17. *Se \mathbb{K} é um corpo ordenado euclidiano, então as propriedades **I** e **E** são equivalentes*

Dem. Vejamos inicialmente que **I** implica **E**. Para isso tomamos o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0. \end{cases}$$

Sem perda de generalidade podemos estudar o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - 2a)^2 + y^2 = R'^2, \end{cases}$$

em que $a > 0$ (ver figura 3.6 na página 47). Para que os círculos satisfaçam as hipóteses de **E**, isto é, para que Γ' tenha pelo menos um ponto no interior de Γ e pelo menos um ponto no exterior de Γ devemos ter

$$|R - 2a| < R'. \quad (*)$$

De fato, se $|R - 2a| = R'$ então os círculos são tangentes, nesse caso todos os pontos de um, exceto o ponto comum, são interiores ou exteriores ao outro círculo; se, por outro lado $|R - 2a| > R'$ todos os pontos de um círculo estão no interior ou no exterior do outro. Para mais detalhes o leitor deve consultar [7], capítulo 2, página 104.

Subtraindo as equações do sistema acima obtemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = \frac{R^2 - R'^2 + 4a^2}{4a}. \end{cases}$$

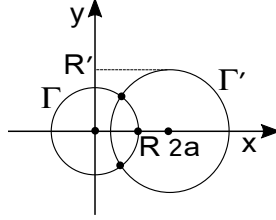


Figura 3.6: (i) Intersecção de círculos

Agora, usando a condição (*), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{R^2 - R'^2 + 4a^2}{4a} &= \frac{R^2 - 4aR + 4a^2 - R'^2 + 4aR}{4a} \\ &= \frac{(R - 2a)^2 - R'^2 + 4aR}{4a} \\ &\leq \frac{R'^2 - R'^2 + 4aR}{4a} \\ &= R. \end{aligned}$$

Dessa forma, substituindo a segunda equação na primeira, vemos que precisamos apenas calcular a raiz quadrada de um número positivo para encontrar as duas soluções procuradas do sistema.

Por fim, para mostrar que **E** implica **I** podemos considerar o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = a, \end{cases}$$

em que $0 < a < R$ (ver figura 3.7 na página 47). Multiplicando a segunda equação por $4a$ obtemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ 4ax - 4a^2 = 0. \end{cases}$$

Subtraindo vem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - 2a)^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$$

Agora é fácil ver que a condição $0 < a < R$, isto é, a hipótese de que a reta tem um ponto

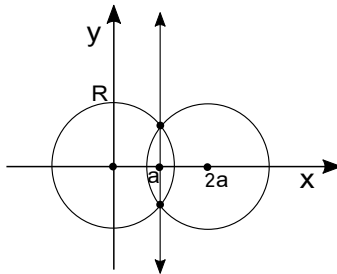


Figura 3.7: (ii) Intersecção de círculos

no interior do círculo, implica que os círculos do último sistema satisfazem as hipóteses

de **E** ($|R - 2a| < R$). Isso significa que esse sistema tem duas soluções, como queríamos demonstrar. \square

Com isso concluímos que um plano cartesiano \mathbb{K}^2 , satisfaz o axioma **E** de intersecção de círculos, desde que \mathbb{K} seja um corpo euclidiano, e que o axioma **E** é equivalente à propriedade **I** de intersecção de reta e círculo.

3.3 O axioma de Dedekind

Qual a propriedade que distingue os corpos ordenados \mathbb{Q} e \mathbb{R} ? Para responder essa pergunta necessitamos da noção de corpo ordenado *completo*. Uma **separação** de um corpo ordenado \mathbb{K} é um par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de subconjuntos não-vazios e disjuntos tais que $\mathbb{K} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e dados $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ temos que $a < b$. Um corpo ordenado \mathbb{K} é **completo** se, dada uma separação $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, existe um único elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que dados $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ temos que ou $a = \alpha$, ou $b = \alpha$ ou $a < \alpha < b$. Geometricamente, se pensarmos que os pontos de \mathbb{K} formam uma reta, a propriedade acima significa que essa reta não tem buracos, isto é, em qualquer ponto que a dividimos encontramos um elemento de \mathbb{K} .

Proposição 18. *O plano cartesiano \mathbb{K}^2 satisfaz o axioma de Dedekind **D** se, e somente se, o corpo \mathbb{K} é um corpo ordenado completo.*

Dem. Para facilitar a compreensão tomaremos a reta $r = \{(x, 0) : x \in \mathbb{K}\}$. Dessa forma todos os pontos de r são determinados unicamente por sua coordenada x . Tome pontos $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$ sobre r com $a < b$. Sendo \mathbb{K} um corpo ordenado, existe $C = (c, 0)$ tal que $a < c < b$, ou seja, C está entre A e B . Considere ainda os subconjuntos da reta $\mathcal{A} = \{(x, 0) \in \mathbb{K}^2 : x \leq c\}$ e $\mathcal{B} = \{(x, 0) \in \mathbb{K}^2 : x > c\}$ e, associados a esses, os subconjuntos de \mathbb{K} dados por $\tilde{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{K} : x \leq c\}$ e $\tilde{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{K} : x > c\}$. Note que \mathcal{A} e \mathcal{B} satisfazem as hipóteses de **D** e $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ é uma separação de \mathbb{K} .

Se vale o axioma **D** em \mathbb{K}^2 temos que existe $P = (\alpha, 0) \in r$ tal que ou $P = A$, ou $P = B$ ou $A - P - B$; em outras palavras, ou $a = \alpha$, ou $b = \alpha$ ou $a < \alpha < b$, isto é \mathbb{K} é um corpo ordenado completo. Reciprocamente, se \mathbb{K} é completo, temos que existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que ou $a = \alpha$, ou $b = \alpha$ ou $a < \alpha < b$; garantimos assim a existência do ponto $P = (\alpha, 0)$ sobre r tal que ou $A = P$, ou $B = P$ ou $A - P - B$, como queríamos demonstrar. \square

Até o momento nada garante que exista um corpo completo e poderíamos estar operando no vácuo. A existência de tal estrutura algébrica foi estabelecida apenas no final do século XIX, pelo matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916), que mostrou como construir um corpo ordenado completo a partir do conjunto dos números racionais \mathbb{Q} introduzindo a sua famosa técnica dos *cortes de Dedekind*; tal corpo foi batizado como *conjunto dos números reais* e denotado por \mathbb{R} . Pode-se verificar que, a menos de isomorfismos, \mathbb{R} é o único corpo ordenado completo.

Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos elementos obtidos pela aplicação das operações $+$, $-$, \cdot , \div e $\sqrt{\quad}$ aos elementos de \mathbb{Q} ; vamos mostrar que o subconjunto \mathbb{K} , assim construído, é um subcorpo ordenado euclidiano de \mathbb{R} . Para ver isso, note inicialmente que \mathbb{K} é um subcorpo de \mathbb{R} , pois a soma e o produto de elementos de \mathbb{K} , ou seja, obtidos pela aplicação das operações de um corpo e a extração de raiz quadrada em \mathbb{Q} , são ainda elementos de \mathbb{K} ; esse corpo é

ordenado, porque podemos escolher os elementos positivos de \mathbb{K} como $P \cap \mathbb{K}$, em que P é o conjunto dos elementos positivos de \mathbb{R} (ordem induzida de \mathbb{R}); por fim, é claro que o corpo é euclidiano, uma vez que a raiz quadrada de qualquer elemento positivo de \mathbb{K} ainda será um elemento desse conjunto.

Um típico elemento de \mathbb{K} é da forma $x = \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$. Reescrevendo-o como $x - \sqrt{2} = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ e elevando ao quadrado obtemos

$$(x - \sqrt{2})^2 = 3 + \sqrt{2},$$

ou seja

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3 + \sqrt{2},$$

ou seja,

$$x^2 - 1 = (2x + 1)\sqrt{2},$$

ou seja

$$(x^2 - 1)^2 = 2(2x + 1)^2,$$

ou seja,

$$x^4 - 10x^2 - 8x - 1 = 0.$$

Vemos que x é a raiz de uma equação algébrica com coeficientes em \mathbb{Z} . Dizemos que um número é **algébrico** se ele é raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, isto é, se ele satisfaz uma equação do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

em que a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 são números inteiros, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$.

O que vimos acima permite dizer que todos os elementos do corpo $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ são algébricos. Os números reais que não são algébricos chamam-se **transcendentais**. Por exemplo, π , e e $2^{\sqrt{2}}$ são números transcendentais. É possível mostrar, mas não faremos aqui, que o conjunto dos números algébricos forma uma pequena parte do conjunto dos números reais. Consequentemente, o conjunto dos números euclidianos forma uma parcela ainda menor de números reais. Maiores informações e uma prova da transcendentalidade do número e podem ser encontrados em [10].

Desfaz-se e esclarece-se aqui um grande mito: durante nossos primeiros anos na escola somos levados a acreditar que a reta euclidiana é contínua e não tem “buracos”, mas o que ocorre na realidade é algo bem diferente disso. Todos os axiomas de Hilbert para a geometria euclidiana são válidos em um plano cartesiano sobre um corpo ordenado euclidiano \mathbb{K} e esses números formam uma pequeníssima parte da reta real como vimos acima.

Como \mathbb{R} é um corpo ordenado euclidiano, já devíamos suspeitar do resultado abaixo

Proposição 19 (D implica I). *Com o axioma de Dedekind, é possível mostrar que se uma reta possui um ponto no interior e um ponto no exterior de um círculo então ela possui dois pontos em comum com o círculo.*

Dem.

Seja Γ um círculo de centro O e raio r . Sem perda de generalidade, vamos supor que a reta s não passa por O , caso contrário, teria exatamente dois pontos em comum com Γ

por **C1**. Assim sendo, seja O' o pé da perpendicular à s passando por O (ver figura 3.8 na página 50). No que se segue, usaremos os seguintes fatos: (i) $[OO'] < [OQ]$ para todo $Q \in s^1$ (consequência das proposições I.16 e I.19); (ii) dados $O' - Q - R$ sobre s temos que $[OO'] < [OQ] < [OR]$ (segue do teorema de Pitágoras I.47); (iii) também devemos ter em mente que qualquer lado de um triângulo é menor do que a soma dos outros dois lados (desigualdade triangular I.20).

Por hipótese, existe um ponto A no interior de Γ . Por (ii), também existe um ponto B no exterior de Γ ; por definição temos $[OA] < r$ e $[OB] > r$ e por (i) $[OO'] < [OA] < r$, ou seja, O' está no interior de Γ . Agora divida o conjunto de pontos da reta s em duas partes: $\mathcal{A} = \{H \in s : [OH] < r\}$ e $\mathcal{B} = \{K \in s : [OK] \geq r\}$

Sejam $O' - Q - R$. Por (ii) segue que se Q está no exterior de Γ , então R está no exterior de Γ e se R está no interior de Γ , então Q também está no interior de Γ . Isso significa que nenhum ponto de \mathcal{A} está entre dois pontos de \mathcal{B} e vice-versa. Se vale o axioma de Dedekind, deve existir um ponto P tal que ou $P = A$ ou $P = B$ ou $A - P - B$, isto é, ou $[OP] < r$, ou $[OP] > r$ ou $[OP] = r$. Vamos mostrar a seguir que não ocorrem as duas primeira opções; seguirá que $[OP] = r$, logo P é um ponto comum entre o círculo e o raio $\overrightarrow{O'A}$.

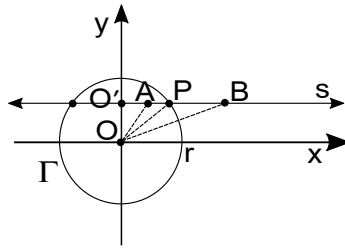


Figura 3.8: Axioma de Dedekind implica intersecção de reta e círculo

Suponha $[OP] < r$, então existe um segmento de comprimento σ , tal que $\sigma < r - [OP]$, c.f. proposição V.10 em [6]. Considere um ponto A' tal que $O' - P - A'$ e $[PA'] = \sigma$. Então pela desigualdade triangular $[OA'] < [OP] + [PA']$. Mas, $[OP] + [PA'] = [OP] + \sigma < r - \sigma + \sigma = r$, ou seja, $[OA'] < r$. Um absurdo, pois isso significa que existe $A' \in \mathcal{A}$ com $P - A' - B$. Uma prova similar mostra que $[OP] > r$ também não pode ocorrer. Assim, só nos resta $[OP] = r$.

Encontrado um ponto de intersecção, provemos a existência do segundo. Para isso, considere o ponto Q no raio oposto à $\overrightarrow{O'A}$ tal que $[O'P] = [O'Q]$. Neste caso os triângulos $\triangle OO'P$ e $\triangle OO'Q$ são congruentes por lado-ângulo-lado. Isso significa que $[OQ] = [OP] = r$, ou seja Q é outro ponto de intersecção de s e Γ . O leitor diligente pode verificar que Γ e s não têm outros pontos em comum. \square

Antes de demonstrarmos que **D** implica **E**, provemos seguinte lema:

Lema 1. *Sejam Γ e Γ' dois círculos de centros O , O' e raios r , r' , respectivamente. que se interceptam. Se Γ e Γ' interceptam-se, então a reta OO' encontra o círculo Γ em dois pontos A e B dos quais um é interior a Γ' e o outro exterior a Γ' .*

¹O comprimento do segmento AB será denotado por $[AB]$. É possível definir rigorosamente o que é o comprimento de um segmento em geometria euclidiana. Em geometria analítica, dado um corpo ordenado euclidiano, $[AB] = \text{dist}_{AB}$.

Dem. Toda reta passando por O intercepta Γ em dois pontos, por **C1**; sejam A e B esses pontos. Tomado um deles, digamos A , por **O3** apenas uma das seguintes alternativas deve ocorrer: $A - O - O'$, $O' - A - O$ ou $O - O' - A$.

Suponha que $A - O - O'$, como na figura 3.9 na página 51, então

$$[AO'] = [AO] + [OO'] = r + [OO']. \quad (*)$$

Tomando um ponto Y sobre Γ , segue no triângulo $\triangle OO'Y$ que $[O'Y] < [OY] + [OO']$. Desde que $r' < [O'Y]$ e $[OY] = r$ temos

$$r' < [O'Y] < [OY] + [OO'],$$

ou seja,

$$r' < r + [OO'].$$

Dessa forma segue de (*) que $[AO'] > r'$, e portanto A está no exterior de Γ' .

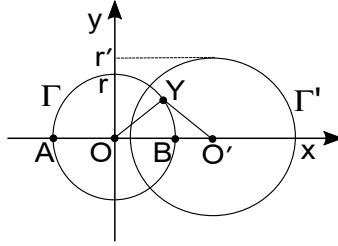


Figura 3.9: *Lema*:(i) intersecção de círculos

Suponha agora $O' - A - O$, como na figura 3.10 na página 52, então

$$[OO'] = [OA] + [AO'] = r + [AO']. \quad (**)$$

Tomando um ponto X sobre Γ , segue no triângulo $\triangle OO'X$ que $[OO'] < [OX] + [O'X]$. Desde que $[OX] = r$ e $[O'X] < r'$ temos

$$[OO'] < [OX] + [O'X] < r + r',$$

ou seja

$$[OO'] < r + r'.$$

Dessa forma segue de (**) que $[AO'] < r'$, e portanto A está no interior de Γ' .

Por último, suponha que $O - O' - A$, como na figura 3.11 na página 52, então

$$r = [OA] = [OO'] + [O'A]. \quad (***)$$

Tomando um ponto X sobre Γ , segue no triângulo $\triangle OO'X$ que $[OX] < [OO'] + [O'X]$, isto é, $r < [OO'] + [O'X]$. Desde que $[OX] = r$ e $[O'X] < r'$ temos

$$r < [OO'] + [O'X] < [OO'] + r',$$

ou seja,

$$r < [OO'] + r'.$$

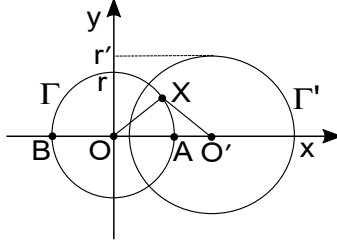


Figura 3.10: *Lema*:(ii) intersecção de círculos

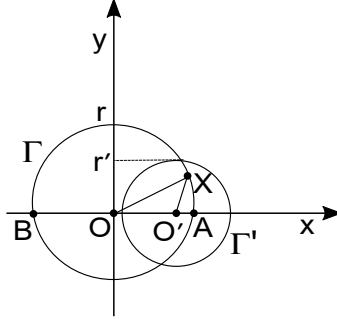


Figura 3.11: *Lema*: (iii) intersecção de círculos

Assim, de (***) segue que $[O'A] < r'$, e portanto A está no interior de Γ' .

Vale observar que enquanto um dos pontos está no exterior (interior) de Γ' , o outro ponto está no interior (exterior) de Γ . Com isso concluímos a demonstração do lema. \square

Agora já podemos iniciar a demonstração de que **D** implica **E** e prosseguir para a conclusão desse trabalho.

Proposição 20 (D implica E). *Com o axioma de Dedekind, é possível mostrar que se um círculo Γ possui um ponto A no interior de Γ' e um ponto B no exterior de Γ' , então Γ e Γ' se interceptam em dois pontos.*

Dem. Tomamos dois círculos Γ e Γ' , com centros O e O' e raios r e r' , respectivamente. Na intersecção da reta OO' com o círculo Γ marque os pontos A e B , de forma que A está no interior de Γ' e B no exterior de Γ' , pelo lema 1 (ver figura 3.12 na página 53).

Os pontos A e B dividem Γ em dois semicírculos. Considere um desses semicírculos descrito como um ponto que se move de A para B em sentido anti-horário. Sobre esse semicírculo marcaremos os pontos distintos P e Q de forma que P precede Q , ou seja, de forma que teremos o semicírculo $APQB$ (nessa ordem em sentido anti-horário). Comparando os triângulos $\triangle OO'P$ e $\triangle OO'Q$, observamos que o lado OO' é comum, o lado OP é congruente ao lado OQ e o ângulo $\angle POO'$ é menor que o ângulo $\angle QOO'$. Dessa forma temos $[O'P] < [O'Q]$.

Agora, considerando o semicírculo $APQB$ como dividido em duas partes por Γ' temos (i) pontos do semicírculo $APQB$ interiores a Γ' e (ii) pontos do semicírculo $APQB$ exteriores a Γ' . Temos, portanto, a condição necessária para aplicar **D**. Dessa forma, existe um ponto M separando essas duas partes.

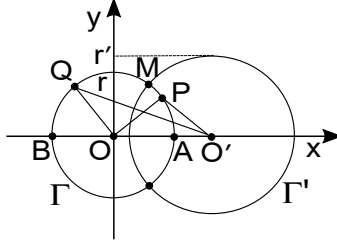


Figura 3.12: Axioma de Dedekind implica a intersecção de círculos

Vamos mostrar que $[O'M] = r'$, ou seja, que M também pertence a Γ' . Suponha $[O'M] < r'$. Se σ é a diferença entre r' e $[O'M]$ ($\sigma = r' - [O'M]$) tomaremos um ponto N sobre o semicírculo $AMPQB$, tal que N é exterior a Γ' e $[MN] < \sigma$, então no triângulo $\triangle O'MN$ temos

$$[O'N] < [O'M] + [MN] < [O'M] + \sigma,$$

e portanto $[O'N] < r'$, ou seja, N está no interior de Γ' o que é um absurdo. De forma similar mostra-se que $O'M$ não pode ser maior do que r' , restando apenas $O'M = r'$.

Assim temos M como intersecção de Γ e Γ' . O outro ponto de intersecção é dado pelo simétrico de M em relação à reta OO' e pode ser facilmente determinada pelo mesmo processo ao considerarmos o outro semicírculo de Γ . \square

Podemos ver que um plano que satisfaz o axioma de Dedekind também satisfaz o axioma de intersecção de círculos e a propriedade de intersecção de reta e círculo.

Conclusão

A Geometria Euclidiana, inicialmente construída por Euclides e posteriormente reelaborada por Hilbert, é essencial para o estudo das geometrias modernas. Ela foi construída a partir da busca pela compreensão do mundo em que vivemos e seu estudo deu origem às diversas geometrias de hoje. Com o passar dos anos, o uso cada vez maior de números em nosso cotidiano, as formulações das noções de corpos e as descobertas algébricas impulsionaram o estudo da geometria sobre corpos, atualmente conhecida como geometria analítica, em que os elementos puramente geométricos da geometria euclidiana são representados por fórmulas algébricas em um corpo.

A representação de toda a geometria euclidiana sobre um corpo foi objeto de estudo de muitos matemáticos e geômetras ao longo do tempo. A partir da elaboração do plano cartesiano, proposto por Descartes, as indagações acerca da representação geométrica sobre corpos começaram a gerar resultados. Este trabalho mostrou que todos os axiomas da geometria euclidiana plana podem ser demonstrados na geometria sobre corpos.

Inicialmente concluímos que a geometria de incidência (assim chamada por Hilbert), que trata de ponto, reta e suas intersecções, pode ser representada facilmente pela geometria analítica usando apenas um corpo abstrato qualquer. Neste caso vimos que dependendo do corpo usado algumas intersecções de retas não existem, como exemplo as retas $\{(x, x) : x \in \mathbb{Z}_2\}$ e $\{(x, y) : x \neq y, x \in \mathbb{Z}_2, y \in \mathbb{Z}_2\}$ não se interceptam.

Já a demonstração dos axiomas de interposição de Hilbert exige que o corpo, sobre o qual a geometria analítica é sustentada, seja ordenado, isto é, necessitamos que o corpo possua um subconjunto de elementos chamados de positivos para que a noção de maior ou menor, entre os elementos, seja definida.

A demonstração dos axiomas de congruência de segmentos e ângulos dadas por Hilbert é plenamente satisfeita por um plano sobre um corpo pitagórico, ou seja, um corpo ordenado que inclui as raízes quadradas do tipo $\sqrt{1 + a^2}$ em seus elementos, sendo a também um de seus elementos. Isso ressalta que os elementos de um corpo pitagórico são soluções de equações polinomiais quadráticas, visto que $x = \sqrt{1 + a^2}$ é uma solução da equação $x^2 - a^2 - 1 = 0$. Vimos ainda que a demonstração da congruência de triângulos, dada pelo axioma **C6**, fez uso da noção de movimentos rígidos sobre o plano cartesiano. A prova da existência deste tipo de movimento no plano cartesiano confirma o método da superposição usada por Euclides. Mostramos que existem três movimentos rígidos possíveis no plano sobre um corpo pitagórico: translação, rotação e reflexão. Concluímos que o corpo pitagórico possibilita a construção de toda a geometria plana axiomática de Hilbert em um plano cartesiano.

A demonstração do axioma de intersecção de círculos no plano cartesiano exigiu um corpo euclidiano. Vimos que um corpo ordenado é euclidiano se possui raízes quadradas de seus

elementos positivos, ou seja, existe nele elementos do tipo \sqrt{a} em que a é um de seus elementos positivos. Dessa forma podemos dizer que um corpo euclidiano é formado por soluções de equações polinomiais quádricas, visto que elementos $x = \sqrt{1 + \sqrt{a}}$ são soluções de equações da forma $x^2 = 1 + \sqrt{a}$ que acarreta em $x^4 - 2x^2 + 1 - a = 0$, para todo a positivo no corpo. Mostramos que a intersecção de círculos no plano sobre um corpo euclidiano é equivalente a intersecção de reta e círculo. Vimos que podemos representar geometricamente a raiz quadrada de um número positivo valendo-se da propriedade de intersecção de reta e círculo.

Além disso vimos que até mesmo os axiomas adicionais de Dedekind e de Arquimedes podem ser satisfeitos nessa geometria, mostrando que uma reta é contínua e que sempre podemos exceder o comprimento de qualquer segmento de reta com n repetições de um outro segmento.

Provamos que a geometria analítica é capaz de satisfazer todos os axiomas da geometria euclidiana plana. Isso nos leva a concluir que a geometria analítica é um modelo para a geometria euclidiana. Constatamos ainda que o conjunto dos números reais, frequentemente usado como o corpo sobre o qual construímos o plano cartesiano da geometria analítica, é mais do que precisamos nesse modelo para representarmos toda a geometria euclidiana plana.

A busca incessante pela compreensão do mundo em que vivemos sempre esteve, e está, diretamente ligada a construção e estudo das geometrias existentes. A geometria construída por Euclides, apesar dos erros, é considerada um dos maiores feitos para o estudo das geometrias modernas. Foi a partir do seu trabalho que a geometria tornou-se mais popular e mais acessível. Espero que este trabalho cumpra um papel semelhante popularizando os conceitos da geometria e atraindo leitores ao seu estudo.

Referências Bibliográficas

- [1] COURANT, R., ROBBINS, H. E STEWART I. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford University Press. 1996.
- [2] DELGADO, JORGE. *Geometria analítica*. Rio de Janeiro: SBM. 2013.
- [3] EVES, H. *An Introduction to the History of Mathematics*. Holt, Rinehart e Winston. 4ª edição. 1976.
- [4] EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução do grego de Irineu Bicudo. Editora Unesp. 2009.
- [5] NETO, ANTONIO CAMINHA MUNIZ. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM. 2013.
- [6] HEATH, THOMAS L.. *The thirteen books of Euclid's Elements* (vol.1). Dover Publications. 1956.
- [7] HARTSHORNE, ROBIN. *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer. 2000.
- [8] HILBERT, DAVID. *Foundations of Geometry (Grundlagen der Geometrie)*. Open Court. La Salle - Illinois.
- [9] MONTEIRO, J. *Elementos de Álgebra*. Elementos de Matemática – Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Ao Livro Técnico S.A. 1969.
- [10] SPIVAK, M. *Calculus*. Publish or Perish. 4ª edição. 2008.