



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

Uma Classe de Hipersuperfícies em  
 $S^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

por

**Alancoc dos Santos Alencar**

sob orientação de

**Prof. Dr. João Paulo dos Santos**

Brasília

2018

Alancoc dos Santos Alencar

# Uma Classe de Hipersuperfícies em $S^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Brasília

2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

dAL368c dos Santos Alencar, Alancoc  
Uma Classe de Hipersuperfícies em  $S^n \times R$  e  $H^n \times R$  /  
Alancoc dos Santos Alencar; orientador João Paulo dos  
Santos. -- Brasília, 2018.  
106 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --  
Universidade de Brasília, 2018.

1. Hipersuperfícies em  $S^n \times R$  e  $H^n \times R$ . 2. Fibrado  
normal plano. 3. Hipersuperfícies de ângulo constante. 4.  
Hipersuperfícies de curvatura média constante. I. dos  
Santos, João Paulo, orient. II. Título.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Uma classe de hipersuperfícies em $S^n \times \mathbb{R}$ e $H^n \times \mathbb{R}$

por

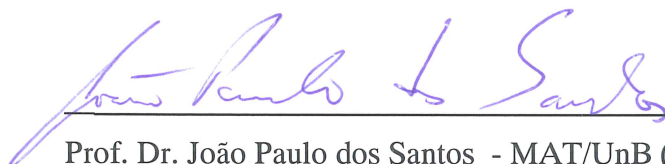
**Alancoc dos Santos Alencar \***

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*


**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 22 de fevereiro de 2018.

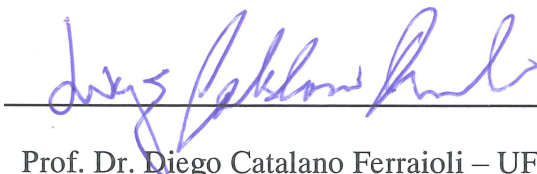
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB (Orientador)



Profa. Dr. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues – MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli – UFBA (Membro)

\* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, sou grato a Deus pelo dom da vida.

À minha família, que sempre me apoiou em todas as decisões que tomei ao longo da minha vida e que, apesar de estar a quase 2 mil quilômetros de distância de mim, consegue se fazer "perto".

À Suely de Oliveira, por ter me acolhido quando cheguei em Brasília. Sou grato pela forma como fui recebido e por tudo que fez por mim, o mundo precisa de mais pessoas assim.

A todos os funcionários da E. E. F. M. André Cartaxo, em especial ao professor Cleiton Amauri e à professora Jaqueline Fernandes pelos conselhos os quais me fizeram escolher ser um Matemático.

A todos os funcionários da Universidade Regional do Cariri (URCA), em especial ao professor Flávio França e à professora Valéria Alencar pelas oportunidades a mim concedidas e por todos os ensinamentos que me foram passados, serei sempre grato.

Aos meus amigos caririenses. Em especial a Emidio Neto, Franciery Chaves, Jackson Furtado, Maria Silva, Paulo Rodrigues, Pedro Neto e Roberto Carlos. Sou grato por suas amizades e pelas incontáveis horas de estudo compartilhadas.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática da UnB. Em especial, aos porteiros das salas de mestrado: Dona Claudia, Dona Maria, seu Manoel e seu Milton, pela paciência e por prezar por nossa segurança.

A todos os meus amigos do departamento de matemática da UnB, os quais me ajudaram incontáveis vezes: Alex, Andrés, Baiano (Weninson), Daniel, Edna, Edwin, Elaine, Fábio, Filipe, Guillermo, Gustavo, Herlisvaldo, Ingrid, Irving, John Freddy, Karla, Marcos, Marta, Mateus, Messi (Wilson), Nathália, Paulo, Quintino, Wállef, Welinton e Yuri. Em especial, à Christe e ao Fabian pela companhia nas madrugadas de estudo no MAT/UnB e pelas muitas risadas compartilhadas.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Paulo dos Santos por toda a disposição em me ajudar, pela amizade, paciência e pelas valiosas sugestões. O senhor é uma pessoa que admiro e respeito, um profissional qualificado.

Aos membros da banca, por aceitarem prontamente o convite para avaliação deste trabalho.

À UnB, pela infraestrutura e recursos oferecidos para a realização deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Peço desculpas àqueles que injusta e involuntariamente tenham sido omitidos.

Meus sinceros agradecimentos a todos.

# Dedicatória

Aos meus pais, Francisco e Raimunda.

Aos meus irmãos, Abraão e Ana Paula.

*"Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos."*

**Isaac Newton**



# Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma descrição completa das hipersuperfícies dos espaços produto  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  que possuem fibrado normal plano quando as consideramos como subvariedades de codimensão 2 do espaço Euclidiano  $\mathbb{E}^{n+2} \supset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  ou do espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^{n+2} \supset \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . Mostramos que uma hipersuperfície satisfaz tal propriedade se, e somente se, a componente tangente do campo de vetores unitários tangentes ao segundo fator  $\mathbb{R}$  é uma direção principal. Apresentamos uma caracterização para esta classe de hipersuperfícies em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ) através de uma família de hipersuperfícies paralelas em  $\mathbb{S}^n$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n$ ) e uma função real diferenciável. Como aplicação, mostramos que as hipersuperfícies dessa classe que possuem curvatura média constante correspondem ao caso em que a família de hipersuperfícies paralelas associada a elas é isoparamétrica em  $\mathbb{S}^n$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n$ ) e a função diferenciável é determinada em termos da função curvatura média de tal família. Além disso, classificamos as hipersuperfícies em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  com a propriedade de que o ângulo entre seu campo de vetores normais unitários e o campo de vetores unitários tangentes ao segundo fator  $\mathbb{R}$  é constante.

**Palavras-chave:** Hipersuperfícies em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ; Fibrado normal plano; Hipersuperfícies de ângulo constante; Hipersuperfícies de curvatura média constante.

# Abstract

In this work, we present a complete description of all hypersurfaces of the product spaces  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  with flat normal bundle when we consider them as submanifolds of codimension 2 in the Euclidean space  $\mathbb{E}^{n+2} \supset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  or in the Lorentz space  $\mathbb{L}^{n+2} \supset \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . We show that a hypersurface satisfies such property if and only if the tangent component of the unit vector field tangent to the second factor  $\mathbb{R}$  is a principal direction. We present a characterization of this class of hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  (respectively,  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ) by means of a family of parallel hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n$  (respectively,  $\mathbb{H}^n$ ) and a real differentiable function. As an application, we show that constant mean curvature hypersurfaces in this class correspond to the case in which the family of parallel hypersurfaces associated to them is isoparametric in  $\mathbb{S}^n$  (respectively,  $\mathbb{H}^n$ ) and the differentiable function is determined in terms of the mean curvature function of such a family. Moreover, we classify hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  with the property that the angle between its unit normal vector field and the unit vector field tangent to the second factor  $\mathbb{R}$  is constant.

**Keywords:** Hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ; Flat normal bundle; Constant angle hypersurfaces; Constant mean curvature hypersurfaces.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1 Curvatura . . . . .	14
1.2 Imersões Isométricas . . . . .	16
1.3 Os Espaços $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ . . . . .	20
1.4 Variedade Produto . . . . .	24
1.5 Os Espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . . . . .	27
1.6 Imersões Isométricas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . . . . .	31
<b>2 A Classe <math>\mathcal{A}</math></b>	<b>52</b>
2.1 Classificação . . . . .	52
2.2 Apontamentos . . . . .	77
2.2.1 Regularidade . . . . .	77
2.2.2 Alguns Resultados Complementares . . . . .	82
<b>3 Aplicações</b>	<b>89</b>
3.1 Hipersuperfícies da Classe $\mathcal{A}$ com Ângulo Constante . . . . .	90
3.2 Hipersuperfícies da Classe $\mathcal{A}$ com Curvatura Média Constante . . . . .	92
<b>Conclusão</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>104</b>

# Introdução

O objetivo central deste trabalho é descrever completamente todas as hipersuperfícies dos espaços produto  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  que possuem fibrado normal plano quando consideradas como subvariedades de codimensão 2 do espaço euclidiano  $\mathbb{E}^{n+2} \supset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  ou do Espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^{n+2} \supset \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$  denotam a esfera unitária e o espaço hiperbólico de dimensão  $n$ , respectivamente.

Seja  $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ) uma hipersuperfície orientada com campo normal unitário  $\eta$ . Denotando por  $\partial_t$  o campo de vetores unitários tangentes ao segundo fator  $\mathbb{R}$  e por  $\mathcal{T}$  a projeção de  $\partial_t$  sobre o fibrado tangente de  $f$ , podemos escrever

$$\partial_t = \mathcal{T} + \nu\eta, \tag{1}$$

onde  $\nu$  denota a função ângulo entre  $\partial_t$  e  $\eta$ . Mostraremos que a hipersuperfície  $f$ , vista como subvariedade de  $\mathbb{E}^{n+2}$  (respectivamente,  $\mathbb{L}^{n+2}$ ), possui fibrado normal plano se, e somente se, o campo  $\mathcal{T}$  é uma direção principal de  $f$ .

Em [15], Tojeiro e Mendonça denominam de **classe**  $\mathcal{A}$  a classe das hipersuperfícies de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  que possuem o campo  $\mathcal{T}$  como uma de suas direções principais. Ao longo deste texto também utilizaremos esta denominação. Sendo assim, apresentaremos uma caracterização das hipersuperfícies pertencentes à classe  $\mathcal{A}$  em termos de hipersuperfícies paralelas de  $\mathbb{S}^n$  (ou  $\mathbb{H}^n$ ) e de uma função real com derivada positiva. Os resultados acima citados, bem como as aplicações presentes no capítulo 3 deste trabalho, foram obtidos por Tojeiro em [22], que é nossa principal referência.

Naturalmente, podemos nos perguntar se exigir que uma hipersuperfície dos espaços produto possua  $\mathcal{T}$  como direção principal torna a classe  $\mathcal{A}$  uma classe demasiada

restrita. Em [18], dos Santos e Novais listam uma série de trabalhos que mostram que tal propriedade não é artificial e possui propriedades geométricas interessantes. Por exemplo, em [14], Tojeiro e Manfio mostram que todas as hipersuperfícies de curvatura seccional constante pertencem a classe  $\mathcal{A}$ , com  $n \geq 3$ . Além disso, em [8], Dillen, Fastenakels e Veken mostram que todas as hipersuperfícies de rotação dos espaços produto também estão em tal classe.

Ainda, em [10], Dillen, Fastenakels, Veken e Vrancken provaram que a classe  $\mathcal{A}$  contém todas as hipersuperfícies em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com função ângulo  $\nu$  constante. Dillen e Munteanu mostraram o mesmo resultado em [11], mas considerando agora o espaço produto  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Por último, em [22], Tojeiro generaliza tais resultados mostrando que a classe  $\mathcal{A}$  contém todas as hipersuperfícies de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e de  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  que possuem função ângulo  $\nu$  constante.

Os espaços produto  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  têm sido muito estudados e se tornaram alvo de interesse de diversos geômetras ao longo dos últimos anos. Além dos trabalhos já citados, merecem destaque também [3], [24], [16], [12], [9], [2] e [5]. Além disso, em [1], Aledo, Espinar e Gálvez classificam todas as superfícies completas de curvatura Gaussiana constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Já em [7], Daniel aponta uma condição necessária e suficiente, em termos da primeira e segunda formas fundamentais e do campo  $\mathcal{T}$ , para que seja possível uma imersão isométrica de uma variedade  $\mathcal{M}^n$  de dimensão  $n$  nos espaços produto  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  além de estudar propriedades de superfícies mínimas em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Em [13], Espinar estuda, nos espaços  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , as superfícies de revolução, superfícies de curvatura média constante, superfícies de curvatura Gaussiana constante, superfícies com curvatura extrínseca positiva e superfícies de curvatura extrínseca constante positiva.

Descreveremos agora a estrutura deste trabalho. O capítulo 1 é dividido em seis seções onde faremos um breve resumo dos conceitos básicos de Geometria Riemanniana com foco naqueles que serão mais relevantes para a construção dos capítulos posteriores. Além disso, estabeleceremos a notação que será utilizada durante todo o texto. Inicialmente, abordaremos a curvatura e as imersões isométricas. Posteriormente, descreveremos os espaços  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . Por último, faremos um breve estudo sobre as imersões isométricas nos espaços produto e mostraremos diversas propriedades do campo  $\mathcal{T}$  que serão necessárias nos capítulos 2 e 3.

No primeira seção do capítulo 2 descreveremos completamente a classe  $\mathcal{A}$  através de dois resultados. O primeiro deles se refere a equivalência já citada: uma hipersuperfície  $f$  de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  possui fibrado normal plano quando vista como subvariedade de codimensão 2 do Espaço Euclidiano  $\mathbb{E}^{n+2} \supset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  ou do Espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^{n+2} \supset \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  se, e somente se,  $f$  pertence a classe  $\mathcal{A}$ . O segundo resultado deixará claro que uma hipersuperfície em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ) pertencente a classe  $\mathcal{A}$  é construída através de uma família de hipersuperfícies paralelas em  $\mathbb{S}^n$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n$ ) e uma função real diferenciável com derivada positiva ao longo de todo o seu domínio. Na segunda seção, estudaremos condições sobre as quais podemos garantir a regularidade de uma hipersuperfície da classe  $\mathcal{A}$  além de algumas outras propriedades de maior ênfase geométrica relativas a esta classe.

O capítulo 3 é dividido em duas seções e é destinado exclusivamente para aplicações oriundas dos resultados obtidos no capítulo 2. Na primeira seção, classificaremos as hipersuperfícies em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  ou em  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  com a propriedade de que a função ângulo  $\nu$  dada em (1) é constante. Veremos que uma hipersuperfície da classe  $\mathcal{A}$ , cuja função real diferenciável associada a ela é linear, satisfaz tal propriedade. Na segunda seção, mostraremos que as hipersuperfícies em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ) pertencentes a classe  $\mathcal{A}$  que possuem curvatura média constante correspondem ao caso em que a família de paralelas associada a elas é isoparamétrica em  $\mathbb{S}^n$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n$ ) e a função real diferenciável é determinada em termos da função curvatura média de tal família de paralelas.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, ao longo de suas seis seções, fixaremos a notação e estabeleceremos uma base para o texto, apresentando as definições e resultados que serão utilizados na construção dos próximos capítulos.

Inicialmente, apresentaremos a curvatura e a curvatura seccional de uma variedade Riemanniana. Depois disso, na seção 1.2, discutiremos as imersões isométricas em espaços quaisquer, onde abordaremos diversos conceitos importantes de uma imersão: segunda forma fundamental; curvatura normal e as equações de Gauss, Ricci e Codazzi. Na seção posterior formalizaremos os espaços  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$  e abordaremos as hipersuperfícies paralelas em tais espaços.

Na seção 1.4 apresentaremos a definição de variedade produto e descreveremos seus aspectos mais relevantes: espaço tangente, métrica Riemanniana, conexão e curvatura. Após isso, repetiremos o que foi feito na seção 1.4, mas agora nos restringiremos aos espaços de nosso interesse:  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . Por fim, trataremos das imersões isométricas em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ , aplicando os conceitos desenvolvidos na seção 1.2 e obtendo, a partir de tais conceitos, propriedades relativas ao campo  $\mathcal{T}$  que nos serão primordiais para os capítulos posteriores.

### 1.1 Curvatura

As definições e as demonstrações dos resultados listados nesta seção podem ser encontrados em [4].

**Definição 1.1.1** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $\nabla$  sua conexão de Levi-Civita. A curvatura  $R$  de  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall Z \in \mathcal{X}(M).$$

A definição acima é pouco intuitiva em uma primeira leitura. Os resultados adiante nos diz razões pelas quais a curvatura é definida dessa maneira.

**Proposição 1.1.2** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana,  $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g \in D(M)$ . Então, a curvatura  $R$  de  $M$  satisfaz as seguintes propriedades:*

(i)  *$R$  é bilinear, isto é,*

$$(a) \quad R(fX + gY, Z) = fR(X, Z) + gR(Y, Z).$$

$$(b) \quad R(X, fZ + gW) = fR(X, Z) + gR(X, W).$$

(ii)  *$R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  é linear, isto é,*

$$(a) \quad R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W.$$

$$(b) \quad R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z.$$

(iii) *se denotarmos, por exemplo,  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = (X, Y, Z, W)$ , então*

$$(a) \quad (X, Y, Z, W) + (Y, Z, X, W) + (Z, X, Y, W) = 0.$$

$$(b) \quad (X, Y, Z, W) = -(Y, X, Z, W).$$

$$(c) \quad (X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z).$$

$$(d) \quad (X, Y, Z, W) = (Z, W, X, Y).$$

**Proposição 1.1.3** *Sejam  $M$  variedade Riemanniana com métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $p \in M$   $\sigma \subset T_p M$  e um subespaço bidimensional de  $T_p M$ . Dados  $x, y \in \sigma$  vetores linearmente independentes, a função  $k$  definida em  $T_p M \times T_p M$  dada por*

$$k(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|^2} = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2},$$

não depende da escolha dos vetores  $x, y \in \sigma$ , onde

$$|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2.$$

**Definição 1.1.4** *Sejam  $M$  variedade Riemanniana com métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $p \in M$  e  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bidimensional de  $T_p M$ . Dados  $x, y \in \sigma$  vetores linearmente independentes, o número*

$$k(p, \sigma) = k(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|^2} = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2},$$

é chamado *curvatura seccional de  $M$  no ponto  $p$  em  $\sigma$* .



**Lema 1.1.5** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão maior do que ou igual a 2, munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam  $R, R' : V \times V \times V \rightarrow V$  aplicações trilineares satisfazendo*

- (a)  $(x, y, z, w) + (y, z, x, w) + (z, x, y, w) = 0$ ;
- (b)  $(x, y, z, w)' + (y, z, x, w)' + (z, x, y, w)' = 0$ ;
- (c)  $(x, y, z, w) = -(y, x, z, w)$  e  $(x, y, z, w)' = -(y, x, z, w)'$ ;
- (d)  $(x, y, z, w) = -(x, y, w, z)$  e  $(x, y, z, w)' = -(x, y, w, z)'$ ;
- (e)  $(x, y, z, w) = (z, w, x, y)$  e  $(x, y, z, w)' = (z, w, x, y)'$ ,

onde  $(x, y, x, y) = \langle R(x, y)x, y \rangle$  e  $(x, y, x, y)' = \langle R'(x, y)x, y \rangle$ . Sejam agora  $x, y \in V$  dois vetores linearmente independentes e considere os números

$$k(\sigma) = k(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} \text{ e } k'(\sigma) = k'(x, y) = \frac{(x, y, x, y)'}{|x \wedge y|^2},$$

com  $\sigma$  subespaço bidimensional de  $V$  gerado por  $x$  e  $y$ . Se para todo  $\sigma$  vale que  $k(\sigma) = k'(\sigma)$ , então  $R = R'$ .

**Lema 1.1.6** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana de curvatura  $R$  e  $p \in M$ . Considere uma aplicação trilinear  $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$  satisfazendo*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo  $X, Y, W, Z \in T_p M$ . Então,  $M$  tem curvatura seccional constante igual a  $k_0$  se, e só se,  $R = k_0 R'$ .

## 1.2 Imersões Isométricas

As definições e as demonstrações omitidas nesta seção podem ser encontrados novamente em [4] (ver capítulo 6).

Seja  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{k=n+m}$  uma imersão de uma variedade diferenciável  $M$ , de dimensão  $n$ , em uma variedade Riemanniana  $\bar{M}$ , de dimensão  $k = n + m$ , isto é,  $f$  é diferenciável e  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \bar{M}$  é injetiva, para todo  $p \in M$ . A imersão  $f$  induz uma métrica em  $M$  dada por

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad (1.1)$$

para todos  $u, v \in T_p M$ . Neste caso, dizemos que  $f$  é uma **imersão isométrica**, com codimensão  $m = k - n$ .

Localmente,  $f$  é um mergulho, isto é, dado  $p \in M$ , existe  $U$  vizinhança de  $p$  para a qual  $f|_U : U \rightarrow f(U) \subset \bar{M}$  é uma subvariedade de  $\bar{M}$ .

Como  $f(U)$  é subvariedade, podemos estender campos de vetores ao ambiente. Isto é, se  $X$  é um campo tangente em  $f(U)$ , então existe um único campo  $\bar{X}$  em  $V$ , onde  $f(U) \subset V$ , com  $V$  vizinhança de  $f(p)$ , tal que  $V \subset \bar{M}$  e  $\bar{X} = X$  em  $f(U)$ .

De agora em diante, como forma de simplificar notação, identificaremos  $p$  com  $f(p)$ ,  $U$  com  $f(U)$  e  $v \in T_p M$  com  $df_p(v) \in T_{f(p)} f(M)$ .

Como  $T_p U \approx T_p M$ , onde  $T_p U$  é um subespaço de  $T_p \bar{M}$ , a métrica de  $\bar{M}$  decompõe  $T_p \bar{M}$  na soma direta

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp, \quad (1.2)$$

onde  $(T_p M)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p M$  em  $T_p \bar{M}$ . Assim, dado  $v \in T_p \bar{M}$ , podemos escrever

$$v = v^T + v^\perp, \quad (1.3)$$

onde  $v^T \in T_p M$  e  $v^\perp \in (T_p M)^\perp$ .

Sendo  $f$  imersão isométrica, denotando por  $\bar{\nabla}$  a conexão Riemanniana de  $\bar{M}$  e sendo  $\bar{X}, \bar{Y}$  extensões locais de  $X$  e  $Y$ , podemos definir

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T. \quad (1.4)$$

Mostra-se que esta é a conexão Riemanniana de  $M$  associada a métrica induzida pela imersão  $f$ .

Dado  $p \in M$ , consideremos a aplicação  $B : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$  definida por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y. \quad (1.5)$$

**Proposição 1.2.1** *A aplicação  $B$  definida acima não depende das extensões  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  escolhidas. Além disso,  $B$  é bilinear e simétrica.*

Da bilinearidade de  $B$ , escrevendo em um sistema de coordenadas, conseguimos mostrar que  $B(X, Y)(p)$  depende apenas de  $X(p)$  e de  $Y(p)$ .

Dado  $\eta \in (T_p M)^\perp$ , usando a Proposição 1.2.1, concluímos que a aplicação  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M$$

é também uma aplicação bilinear e simétrica.

**Definição 1.2.2** A forma quadrática  $II_\eta : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  associada à  $H_\eta$  e definida por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x) = \langle B(x, x), \eta \rangle, \quad x \in T_pM,$$

é chamada **segunda forma fundamental** de  $f$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ .

Associada à  $H_\eta$  existe um operador autoadjunto  $A_\eta$ , definido em  $T_pM$ , satisfazendo

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad (1.6)$$

ao qual chamaremos de **operador forma** da imersão  $f$  associado ao campo  $\eta$ .

**Proposição 1.2.3** Seja  $N$  uma extensão local de  $\eta$ , isto é,  $N$  é um campo normal definido numa vizinhança  $V$  de  $p$ ,  $V \subset U$ , com  $N(p) = \eta$ . Então,

$$A_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Usaremos a Proposição 1.2.3 na construção da próxima definição.

Dado  $X \in \mathcal{X}(M)$ , pela decomposição dada em (1.3), podemos escrever

$$\bar{\nabla}_X \eta = (\bar{\nabla}_X \eta)^T + (\bar{\nabla}_X \eta)^\perp,$$

onde  $(\bar{\nabla}_X \eta)^\perp$  denota a componente de  $\bar{\nabla}_X \eta$  em  $(T_pM)^\perp$ . Assim,

$$\bar{\nabla}_X \eta = -A_\eta(X) + (\bar{\nabla}_X \eta)^\perp.$$

**Definição 1.2.4** A conexão afim dada por

$$\nabla_X^\perp \eta = (\bar{\nabla}_X \eta)^\perp = \bar{\nabla}_X \eta + A_\eta(X),$$

é chamada **conexão normal** da imersão  $f$ .

Pode-se verificar que a conexão normal  $\nabla^\perp$  satisfaz as propriedades usuais de conexão afim, isto é, é linear em  $X$ , aditiva em  $\eta$  e

$$\nabla_X^\perp (g\eta) = g\nabla_X^\perp \eta + X(g)\eta,$$

para toda  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável.

Denotando por  $R$  a curvatura da subvariedade  $M \subset \bar{M}$ , sabemos que  $R$  está definida no fibrado tangente da imersão  $f$ . Podemos definir também uma curvatura  $R^\perp$  no fibrado normal de  $f$  através de  $\nabla^\perp$ , como veremos adiante.

**Definição 1.2.5** A curvatura normal  $R^\perp$  da imersão  $f$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , uma aplicação  $R^\perp(X, Y) : \mathcal{X}(M)^\perp \rightarrow \mathcal{X}(M)^\perp$  dada por

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta,$$

onde  $\eta \in \mathcal{X}(M)^\perp$ , o fibrado normal de  $f$ .

A proposição adiante estabelece equações que relacionam a geometria do fibrado tangente com a geometria do fibrado normal da imersão. No que se segue, denotaremos por  $\bar{R}$  a curvatura do espaço ambiente  $\bar{M}$  e por  $A_\eta$  e  $A_\xi$  os operadores forma associados aos campos normais  $\eta$  e  $\xi \in \mathcal{X}(M)^\perp$ .

**Proposição 1.2.6** Sejam  $X, Y, Z$  e  $W \in \mathcal{X}(M)$ . Então, valem as seguintes equações:

(a) *Equação de Gauss*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle B(Y, W), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle.$$

(b) *Equação de Ricci*

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \xi \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle = \langle (A_\eta \circ A_\xi - A_\xi \circ A_\eta)(X), Y \rangle.$$

(c) *Equação de Codazzi*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = \bar{\nabla}_Y B(X, Z, \eta) - \bar{\nabla}_X B(Y, Z, \eta).$$

**Definição 1.2.7** Dizemos que o fibrado normal de  $f$  é **plano** se  $R^\perp \equiv 0$ .

**Proposição 1.2.8** Suponha que o espaço ambiente  $\bar{M}$  tem curvatura seccional constante  $k_0$ . Então, a imersão  $f$  tem fibrado normal plano se, e somente se,  $A_\eta$  e  $A_\xi$  comutam com respeito à composição, isto é,  $A_\eta \circ A_\xi = A_\xi \circ A_\eta$ .

**Demonstração:** Dados  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , como  $\bar{M}$  tem curvatura seccional constante  $k_0$ , segue do Lema 1.1.6 que

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \xi \rangle = k_0 \langle R'(X, Y, \eta), \xi \rangle = k_0 [\langle X, \eta \rangle \langle Y, \xi \rangle - \langle Y, \eta \rangle \langle X, \xi \rangle] = 0.$$

Assim, a equação de Ricci se torna

$$\langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle = -\langle (A_\eta \circ A_\xi - A_\xi \circ A_\eta)(X), Y \rangle.$$

Logo, a imersão  $f$  tem fibrado normal plano se, e somente se,  $A_\eta$  e  $A_\xi$  forem tais que  $A_\eta \circ A_\xi = A_\xi \circ A_\eta$ . ■

**Definição 1.2.9** No caso particular em que a codimensão de  $f$  é 1, isto é,  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ , dizemos que  $f(M) \subset \bar{M}$  é uma **hipersuperfície**. Ainda, se existir um campo de vetores normais  $\eta \in [\mathcal{X}(M)]^\perp$ ,  $|\eta| = 1$ , definido sobre toda a  $M$ , dizemos que  $f$  é uma **hipersuperfície orientável**.

Neste caso, dado  $p \in M$ , como o operador forma  $A_\eta$  associado a  $\eta$  é autoadjunto, existe uma base ortonormal de  $T_p M$ ,  $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , formada por autovetores de  $A_\eta$ . Tais autovetores são chamados de **direções principais** e os autovalores associados,  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , são chamados de **curvaturas principais** da hipersuperfície  $f$ . O número

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p) + \dots + k_n(p)}{n}$$

é chamado de **curvatura média** de  $f$  no ponto  $p$ .

### 1.3 Os Espaços $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$

A principal referência desta seção é [21].

O **Espaço Euclidiano** de dimensão  $m$ , o qual denotaremos por  $\mathbb{E}^m$ , é formado quando munimos o  $\mathbb{R}^m$  com a métrica usual

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{E}} = \sum_{i=1}^m u_i v_i,$$

onde  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ .

O **Espaço de Lorentz** (ou **Lorentziano**) de dimensão  $m$ , que denotaremos por  $\mathbb{L}^m$ , é formado quando munimos o  $\mathbb{R}^m$  com a métrica dada por

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{L}} = -u_1 v_1 + \sum_{i=2}^m u_i v_i,$$

onde  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ .

Quando for preciso fazer menção de um resultado válido em  $\mathbb{E}^m$  e em  $\mathbb{L}^m$  ao mesmo tempo, usaremos a notação  $\langle, \rangle$  para indicar a métrica de ambos os espaços.

#### A Esfera

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{E}^{n+1}$$

e o **Espaço Hiperbólico**

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1} : -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -1, x_1 > 0\} \subset \mathbb{L}^{n+1}$$

serão consideradas como subvariedades de  $\mathbb{E}^{n+1}$  e  $\mathbb{L}^{n+1}$ , respectivamente, com a métrica induzida por tais espaços ambientes.

Para simplificar notação, denotaremos

$$\mathbb{Q}_\varepsilon^n = \begin{cases} \mathbb{S}^n, & \text{se } \varepsilon = 1, \\ \mathbb{E}^n, & \text{se } \varepsilon = 0, \\ \mathbb{H}^n, & \text{se } \varepsilon = -1. \end{cases} \quad (1.7)$$

**Definição 1.3.1** *Seja  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  uma hipersuperfície orientada, com campo normal unitário  $N$ . A hipersuperfície paralela a  $g(M)$  a uma distância  $|s|$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , é a aplicação  $g_s : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  tal que para cada ponto  $x \in M$ , o ponto  $g_s(x)$  é obtido ao transladar o ponto  $g(x)$  uma distância  $|s|$  ao longo da geodésica em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  partindo de  $g(x)$  com vetor tangente  $N(g(x))$  nesse ponto.*

Quando  $\varepsilon = 0$ , temos que  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n = \mathbb{E}^n$  e, então, podemos escrever  $g_s$  da seguinte maneira

$$g_s(x) = g(x) + sN(g(x)).$$

Para  $\varepsilon = 1$ , temos que  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n = \mathbb{S}^n$  e

$$g_s(x) = \cos(s)g(x) + \sin(s)N(g(x)).$$

Por último, se  $\varepsilon = -1$ , então  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n = \mathbb{H}^n$  e

$$g_s(x) = \cosh(s)g(x) + \sinh(s)N(g(x)).$$

De um modo geral, considerando as funções diferenciáveis

$$C_\varepsilon(s) = \begin{cases} \cos s, & \text{se } \varepsilon = 1, \\ 1, & \text{se } \varepsilon = 0, \\ \cosh s, & \text{se } \varepsilon = -1, \end{cases} \quad \text{e } S_\varepsilon(s) = \begin{cases} \sin s, & \text{se } \varepsilon = 1, \\ s, & \text{se } \varepsilon = 0, \\ \sinh s, & \text{se } \varepsilon = -1, \end{cases} \quad (1.8)$$

podemos escrever  $g_s$  da seguinte maneira

$$g_s(x) = C_\varepsilon(s)g(x) + S_\varepsilon(s)N(g(x)), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

As funções  $C_\varepsilon(s)$  e  $S_\varepsilon(s)$  satisfazem as seguintes propriedades:

(i)  $C'_\varepsilon(s) = -\varepsilon S_\varepsilon(s)$ ;

(ii)  $S'_\varepsilon(s) = C_\varepsilon(s)$ ;

$$(iii) \quad C_\varepsilon^2(s) + \varepsilon S_\varepsilon^2(s) = 1.$$

Denotaremos o vetor normal unitário de  $g_s$  para um ponto  $x \in M$  por  $N_s(x)$ .

**Lema 1.3.2** *O campo normal unitário de  $g_s(M)$  é dado por, a menos de sinal,*

$$N_s(x) = -\varepsilon S_\varepsilon(s)g(x) + C_\varepsilon(s)N(g(x)).$$

**Demonstração:** Primeiro mostraremos que  $N_s$  define um campo normal a  $g_s$ . Seja  $x \in M$  e  $v \in T_x M$ . Identificando  $N(g(x))$  com  $N(x)$  e  $dN_{g(x)}(dg_x(v))$  com  $dN_x(v)$ , pela equação (1.9), temos que

$$d(g_s)_x(v) = C_\varepsilon(s)dg_x(v) + S_\varepsilon(s)dN_x(v).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle d(g_s)_x(v), N_s(x) \rangle &= \langle C_\varepsilon(s)dg_x(v) + S_\varepsilon(s)dN_x(v), -\varepsilon S_\varepsilon(s)g(x) + C_\varepsilon(s)N(x) \rangle \\ &= -\varepsilon C_\varepsilon(s)S_\varepsilon(s)\langle dg_x(v), g(x) \rangle + C_\varepsilon^2(s)\langle dg_x(v), N(x) \rangle \\ &\quad - \varepsilon S_\varepsilon^2(s)\langle dN_x(v), g(x) \rangle + C_\varepsilon(s)S_\varepsilon(s)\langle dN_x(v), N(x) \rangle. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Como  $N$  é unitário, derivando a expressão

$$1 = |N(x)|^2 = \langle N(x), N(x) \rangle,$$

obtemos que  $\langle dN_x(v), N(x) \rangle = 0$ . Além disso, temos que  $dg_x(v) \in T_{g(x)}g(M)$ , dessa forma  $\langle dg_x(v), N(x) \rangle = 0$ . Logo, a equação (1.10) se torna

$$\begin{aligned} \langle d(g_s)_x(v), N_s(x) \rangle &= \langle C_\varepsilon(s)dg_x(v) + S_\varepsilon(s)dN_x(v), -\varepsilon S_\varepsilon(s)g(x) + C_\varepsilon(s)N(x) \rangle \\ &= -\varepsilon C_\varepsilon(s)S_\varepsilon(s)\langle dg_x(v), g(x) \rangle - \varepsilon S_\varepsilon^2(s)\langle dN_x(v), g(x) \rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Agora, analisaremos (1.11) de acordo com o valor de  $\varepsilon$ :

- se  $\varepsilon = 0$ , o resultado segue;
- se  $\varepsilon = \pm 1$ , então  $g(M) \subset \mathbb{S}^n = \mathbb{Q}_1^n$  ou  $g(M) \subset \mathbb{H}^n = \mathbb{Q}_{-1}^n$ . Dessa forma,  $\langle dg_x(v), g(x) \rangle = 0$  e, então,  $\langle dN_x(v), g(x) \rangle = 0$ . Assim, pela equação (1.11), o resultado segue.

Resta mostrar que  $N_s(x)$  é unitário. Note que

$$\begin{aligned}
 |N_s(x)|^2 &= \langle N_s(x), N_s(x) \rangle \\
 &= \langle -\varepsilon S_\varepsilon(s)g(x) + C_\varepsilon(s)N(x), -\varepsilon S_\varepsilon(s)g(x) + C_\varepsilon(s)N(x) \rangle \\
 &= \varepsilon^2 S_\varepsilon^2(s) \langle g(x), g(x) \rangle - 2\varepsilon C_\varepsilon(s)S_\varepsilon(s) \langle g(x), N(x) \rangle + C_\varepsilon^2(s) \langle N(x), N(x) \rangle. \\
 &= \varepsilon^2 S_\varepsilon^2(s) \langle g(x), g(x) \rangle - 2\varepsilon C_\varepsilon(s)S_\varepsilon(s) \langle g(x), N(x) \rangle + C_\varepsilon^2(s). \tag{1.12}
 \end{aligned}$$

Novamente, vamos analisar a equação (1.12) de acordo com o valor de  $\varepsilon$ :

- se  $\varepsilon = 0$ , temos que  $C_\varepsilon = 1$  e, então, o resultado segue;
- se  $\varepsilon = 1$ , então  $g(M) \subset \mathbb{S}^n = \mathbb{Q}_1^n$  e, dessa forma, vale que  $\langle g(x), g(x) \rangle = 1$  e  $\langle g(x), N(x) \rangle = 0$ . Donde segue que

$$|N_s(x)| = S_\varepsilon^2(s) + C_\varepsilon^2(s) = \sin^2 s + \cos^2 s = 1;$$

- se  $\varepsilon = -1$ , então  $g(M) \subset \mathbb{H}^n = \mathbb{Q}_{-1}^n$  e, dessa forma, vale que  $\langle g(x), g(x) \rangle = -1$  e  $\langle g(x), N(x) \rangle = 0$ . Assim,

$$|N_s(x)| = -S_\varepsilon^2(s) + C_\varepsilon^2(s) = -\sinh^2 s + \cosh^2 s = 1.$$

Em todos os casos,  $|N_s(x)| = 1$ , como queríamos. ■

**Definição 1.3.3** Quando todas as curvaturas principais  $k_i$  de  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , com  $1 \leq i \leq n-1$ , não dependem do ponto  $x \in M$  dizemos que  $g$  é uma **hipersuperfície isoparamétrica**.

Denotaremos por  $H_s(x)$  a curvatura média da hipersuperfície paralela  $g_s$  no ponto  $x \in M$ . Vamos agora enunciar um lema que foi mostrado pela primeira vez por Cartan [6].

**Lema 1.3.4** A hipersuperfície  $g$  é isoparamétrica se, e somente se,  $H_s(x)$  não depende do ponto  $x \in M$ .

Uma demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [21].



## 1.4 Variedade Produto

Como referência para as demonstrações omitidas nesta seção, o leitor pode consultar [17] e [19], que foram os textos base na construção deste tópico.

Sejam  $M^m$  e  $N^n$  duas variedades Riemannianas com métricas  $\langle, \rangle_M$  e  $\langle, \rangle_N$ , respectivamente. O produto cartesiano

$$M \times N = \{(p, q) : p \in M \text{ e } q \in N\}$$

é uma variedade diferenciável de dimensão  $m + n$  à qual chamaremos de **variedade produto**.

Os subconjuntos

$$M_q = M \times \{q\} = \{(r, q) : r \in M\} \text{ e } N_p = \{p\} \times N = \{(p, s) : s \in N\}$$

são subvariedades de  $M \times N$ . Sejam  $\pi : M \times N \rightarrow M$  e  $\sigma : M \times N \rightarrow N$  definidas por  $\pi(p, q) = p$  e  $\sigma(p, q) = q$ ,  $(p, q) \in M \times N$ , as chamadas **projeções naturais**. As aplicações  $\tilde{\pi} = \pi|_{M_q}$  e  $\tilde{\sigma} = \sigma|_{N_p}$  são difeomorfismos. Os espaços tangentes  $T_{(p,q)}M \simeq T_{(p,q)}M_q$  e  $T_{(p,q)}N \simeq T_{(p,q)}N_p$  são subespaços de  $T_{(p,q)}(M \times N)$ .

O próximo lema nos diz como é formado o espaço tangente da variedade produto.

**Lema 1.4.1**  $T_{(p,q)}(M \times N)$  é soma direta de seus subespaços  $T_{(p,q)}M$  e  $T_{(p,q)}N$ , isto é, dado  $w \in T_{(p,q)}(M \times N)$ , existem únicos  $w_1 \in T_{(p,q)}M$  e  $w_2 \in T_{(p,q)}N$  tais que  $w = w_1 + w_2$ .

**Demonstração:** Sejam  $u \in T_{(p,q)}M \simeq T_{(p,q)}M_q$  e  $v \in T_{(p,q)}N \simeq T_{(p,q)}N_p$ . Note que a restrição  $\pi|_{N_p} : N_p \rightarrow \{p\}$  é uma função constante. Assim,  $d\pi_{(p,q)}(v) = 0$ . Analogamente,  $d\sigma_{(p,q)}(u) = 0$ . Por outro lado, como  $\tilde{\pi}$  e  $\tilde{\sigma}$  são difeomorfismos, temos que  $d\tilde{\pi}_{(p,q)}$  e  $d\tilde{\sigma}_{(p,q)}$  são isomorfismos. Assim, concluímos que  $T_{(p,q)}M \cap T_{(p,q)}N = \{0\}$ . Logo, como  $T_{(p,q)}M$  e  $T_{(p,q)}N$  são subespaços de  $T_{(p,q)}(M \times N)$  com interseção trivial e satisfazendo

$$\dim[T_{(p,q)}M] + \dim[T_{(p,q)}N] = \dim[T_{(p,q)}(M \times N)],$$

o resultado segue. ■

As componentes  $w_1 \in T_{(p,q)}M$  e  $w_2 \in T_{(p,q)}N$  de um vetor  $w \in T_{(p,q)}(M \times N)$  são dadas por  $w_1 = d\pi_{(p,q)}(w)$  e  $w_2 = d\sigma_{(p,q)}(w)$ . Assim, podemos escrever

$$w = d\pi_{(p,q)}(w) + d\sigma_{(p,q)}(w). \quad (1.13)$$

Dados  $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$ , podemos definir uma métrica Riemanniana  $\langle, \rangle_{M \times N}$  em  $M \times N$  como se segue

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_{(p,q)}(u), d\pi_{(p,q)}(v) \rangle_{p,M} + \langle d\sigma_{(p,q)}(u), d\sigma_{(p,q)}(v) \rangle_{q,N}.$$

Sejam  $u \in T_{(p,q)}M$  e  $v \in T_{(p,q)}N$ . Vimos na demonstração do Lema 1.4.1 que  $d\pi_{(p,q)}(v) = 0$  e  $d\sigma_{(p,q)}(u) = 0$ . Assim,

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_{(p,q)}(u), 0 \rangle_{p,M} + \langle 0, d\sigma_{(p,q)}(v) \rangle_{q,N} = 0,$$

donde concluimos que  $T_{(p,q)}M = [T_{(p,q)}N]^\perp$ , isto é,  $T_{(p,q)}M$  e  $T_{(p,q)}N$  são complementos ortogonais um do outro em  $T_{(p,q)}(M \times N)$ .

Descreveremos agora as variedades produto da forma  $M \times \mathbb{R}$ , isto é, o caso  $N = \mathbb{R}$ . Chamaremos  $M$  de **base** e a reta real  $\mathbb{R}$  de **fibra**. Utilizaremos a mesma notação que usamos para o caso geral de variedades produto. Assim,  $\langle, \rangle_M$  e  $\langle, \rangle_{\mathbb{R}}$  denotam as métricas Riemannianas de  $M$  e de  $\mathbb{R}$ , respectivamente.

Sejam  $t \in \mathbb{R}$  e  $x, y \in T_t\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ . Consideraremos aqui

$$\langle x, y \rangle_{t,\mathbb{R}} = xy,$$

onde  $xy$  denota o produto de números reais.

Dado  $(p, r) \in M \times \mathbb{R}$ , podemos escrever  $d\pi_{(p,r)} : T_{(p,r)}(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow T_pM$  e  $d\sigma_{(p,r)} : T_{(p,r)}(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ . Assim, dados  $u, v \in T_{(p,r)}(M \times \mathbb{R})$ , a métrica Riemanniana de  $M \times \mathbb{R}$  é dada por

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{(p,r)} &= \langle d\pi_{(p,r)}(u), d\pi_{(p,r)}(v) \rangle_p + \langle d\sigma_{(p,r)}(u), d\sigma_{(p,r)}(v) \rangle_r \\ &= \langle d\pi_{(p,r)}(u), d\pi_{(p,r)}(v) \rangle_p + [d\sigma_{(p,r)}(u)][d\sigma_{(p,r)}(v)]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Seja  $X \in \mathcal{X}(M \times \mathbb{R})$ . Por (1.13), podemos escrever

$$X = X_M + X_{\mathbb{R}},$$

onde sabemos que as componentes  $X_M = d\pi(X)$  e  $X_{\mathbb{R}} = d\sigma(X)$  são ortogonais. Dizemos que o campo  $X$  é **vertical** se  $X_M = 0$  e dizemos que  $X$  é **horizontal** se  $X_{\mathbb{R}} = 0$ .

Considere outro campo  $Y \in \mathcal{X}(M \times \mathbb{R})$  com  $Y = Y_M + Y_{\mathbb{R}}$ . Para todo  $(p, r) \in M \times \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} \langle X(p, r), Y(p, r) \rangle_{(p,r)} &= \langle d\pi_{(p,r)}(X(p, r)), d\pi_{(p,r)}(Y(p, r)) \rangle_p \\ &+ [d\sigma_{(p,r)}(X(p, r))][d\sigma_{(p,r)}(Y(p, r))], \end{aligned}$$

assim, omitindo o ponto  $(p, r)$  para simplificar a notação,

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_{(p,r)} &= \langle d\pi(X), d\pi(Y) \rangle_p + [d\sigma(X)][d\sigma(Y)] \\ &= \langle X_M, Y_M \rangle_p + X_{\mathbb{R}}Y_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Denotaremos por  $\nabla^1$ ,  $\nabla^2$  e  $\bar{\nabla}$  as conexões Riemannianas de  $M$ ,  $\mathbb{R}$  e  $M \times \mathbb{R}$ , respectivamente.

**Proposição 1.4.2** *Sejam  $X, Y \in \mathcal{X}(M \times \mathbb{R})$  campos horizontais e  $U, V \in \mathcal{X}(M \times \mathbb{R})$  campos verticais. Então,*

- (i)  $\bar{\nabla}_X Y$  é um campo horizontal e  $(\bar{\nabla}_X Y)_M = \nabla_{X_M}^1 Y_M$ .
- (ii)  $\bar{\nabla}_U V$  é um campo vertical e  $(\bar{\nabla}_U V)_{\mathbb{R}} = \nabla_{U_{\mathbb{R}}}^2 V_{\mathbb{R}}$ .
- (iii)  $\bar{\nabla}_U X = \bar{\nabla}_X U = 0$ .

O Próximo corolário nos mostra que  $\bar{\nabla}$  é construída em função de  $\nabla^1$  e  $\nabla^2$ .

**Corolário 1.4.3** *Sejam  $X, Y \in \mathcal{X}(M \times \mathbb{R})$ . Então, a conexão Riemanniana de  $M \times \mathbb{R}$  é dada por*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_{X_M}^1 Y_M + \nabla_{X_{\mathbb{R}}}^2 Y_{\mathbb{R}}.$$

Denotaremos por  $R_1$ ,  $R_2$  e  $\bar{R}$  as curvaturas de  $M$ ,  $\mathbb{R}$  e  $M \times \mathbb{R}$ , respectivamente.

**Proposição 1.4.4** *Sejam  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M \times \mathbb{R})$  campos horizontais e  $U, V$  e  $W \in \mathcal{X}(M \times \mathbb{R})$  campos verticais. Então,*

- (i)  $\bar{R}(X, Y)Z$  é um campo horizontal e  $[\bar{R}(X, Y)Z]_M = R_1(X_M, Y_M)Z_M$ .
- (ii)  $\bar{R}(U, V)W$  é um campo horizontal e  $[\bar{R}(U, V)W]_{\mathbb{R}} = R_2(U_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})W_{\mathbb{R}}$ .
- (iii)  $\bar{R}$  se anula para qualquer outra escolha dos campos  $X, Y, Z, U, V$  e  $W$ .

Com o corolário acima em mãos, podemos finalmente descrever a curvatura  $\bar{R}$  de  $M \times \mathbb{R}$ .

**Corolário 1.4.5** *Sejam  $X, Y$  e  $Z \in \mathcal{X}(M \times \mathbb{R})$ . Então, a curvatura  $\bar{R}$  de  $M \times \mathbb{R}$  é dada por*

$$\bar{R}(X, Y)Z = R_1(X_M, Y_M)Z_M.$$

## 1.5 Os Espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Defina a variedade produto  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  de tal forma que para  $\varepsilon = 1$  escrevemos

$$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{E}^{n+2} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{E}^{n+2}$$

e, para  $\varepsilon = -1$ ,

$$\mathbb{H}^n \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2} : -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -1, x_1 > 0\} \subset \mathbb{L}^{n+2}.$$

A partir de agora, estaremos interessados em descrever variedades produto do tipo  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ , com  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Observe que, para  $\varepsilon = 0$ , temos o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Considere agora uma aplicação  $\xi$  definida em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , cuja imagem é subconjunto de  $\mathbb{E}^{n+2}$ , se  $\varepsilon = 1$ , ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ , se  $\varepsilon = -1$ , de tal forma que, dado  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,

$$\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, 0). \quad (1.15)$$

Dessa forma, lembrando que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota a métrica de  $\mathbb{E}^{n+2}$  ou de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , temos que

$$\begin{aligned} \langle \xi(p), \xi(p) \rangle &= \langle (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, 0), (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, 0) \rangle \\ &= \varepsilon(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 + \dots + (x_{n+1}(t))^2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

**Proposição 1.5.1** *A aplicação  $\xi$  é um campo de vetores normais a  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Sejam  $p = (x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  e  $v \in T_p(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$ . Considere a curva diferenciável  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  dada por

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n+2}(t))$$

de tal forma que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ . Como  $\gamma(t) \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ , da definição de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  temos que

$$\varepsilon(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 + \dots + (x_{n+1}(t))^2 = \varepsilon.$$

Assim, derivando a expressão acima com respeito a  $t$  em ambos os lados, temos

$$2\varepsilon x_1(t)x_1'(t) + 2x_2(t)x_2'(t) + \dots + 2x_{n+1}(t)x_{n+1}'(t) = 0.$$

Agora, somando zero em ambos os lados da igualdade acima, podemos escrever

$$2\varepsilon x_1(t)x_1'(t) + 2x_2(t)x_2'(t) + \dots + 2x_{n+1}(t)x_{n+1}'(t) + 2 \cdot 0 \cdot x_{n+2}'(t) = 0,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\langle (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n+1}(t), 0), (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_{n+1}'(t), x_{n+2}'(t)) \rangle = 0$$

Em particular, para  $t = 0$ , temos que

$$\langle (x_1(0), x_2(0), \dots, x_{n+1}(0), 0), (x_1'(0), x_2'(0), \dots, x_{n+1}'(0), x_{n+2}'(0)) \rangle = 0.$$

Donde segue que

$$\langle \xi(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = 0,$$

ou ainda,

$$\langle \xi(p), v \rangle = 0,$$

isto é,  $\xi(p)$  é um vetor normal a  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  no ponto  $p$ , como queríamos. ■

$\tilde{\nabla}$  denotará a conexão de  $\mathbb{E}^{n+2}$  ou  $\mathbb{L}^{n+2}$  que é a derivada usual. Como já havíamos preestabelecido,  $\bar{\nabla}$  denota a conexão da variedade produto  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ . A proposição seguinte caracteriza  $\bar{\nabla}$  nos mostrando como  $\bar{\nabla}$  depende da conexão do espaço,  $\tilde{\nabla}$ , e do vetor normal  $\xi$ .

**Proposição 1.5.2** *Sejam  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$ . Então,*

$$\bar{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \varepsilon \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle \xi.$$

**Demonstração:** Inicialmente, da igualdade (1.2), o espaço tangente de  $\mathbb{E}^{n+2}$  e  $\mathbb{L}^{n+2}$  pode ser escrito na soma direta

$$T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}) \oplus [T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})]^\perp.$$

Então, para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$ , como  $B(X, Y)$  e  $\xi \in [T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})]^\perp$ , concluímos que existe  $c \in \mathbb{R}$  para o qual  $B(X, Y) = c\xi$ .

Por outro lado, da definição de  $B$  temos que  $B(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_X Y$ .

Logo,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + c\xi, \quad (1.16)$$

donde temos que, tomando o produto interno por  $\xi$  em ambos os lados da igualdade acima,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X Y + c\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, \xi \rangle + c\langle \xi, \xi \rangle \\ &= c\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Como  $\langle Y, \xi \rangle = 0$ , usando a compatibilidade de  $\tilde{\nabla}$  com a métrica  $\langle, \rangle$  dos espaços  $\mathbb{E}^{n+2}$  e  $\mathbb{L}^{n+2}$ , temos que

$$0 = X\langle Y, \xi \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X \xi \rangle.$$

Assim, obtemos que  $\langle \tilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle = -\langle Y, \tilde{\nabla}_X \xi \rangle$ . Dessa forma, da equação (1.17), podemos escrever

$$c = -\frac{1}{\varepsilon} \langle Y, \tilde{\nabla}_X \xi \rangle,$$

que é equivalente a

$$c = -\varepsilon \langle Y, \tilde{\nabla}_X \xi \rangle, \quad (1.18)$$

pois  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Logo, substituindo (1.18) em (1.16), temos

$$\tilde{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \varepsilon \langle Y, \tilde{\nabla}_X \xi \rangle \xi. \quad (1.19)$$

Sendo  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$  coordenadas de  $\mathbb{E}^{n+2}$  ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ , temos que o conjunto dos campos coordenados  $\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n+2}} \right\}$  forma uma base do espaço tangente a tais espaços. Com o objetivo de simplificar a notação, escrevemos  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+2$ . Como  $T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$  é subespaço dos espaços tangentes a  $\mathbb{E}^{n+2}$  ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ , concluímos que  $\beta$  também o gera. Assim, existem  $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$  funções diferenciáveis definidas em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  para as quais

$$X = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \partial_i = a_{n+2} \cdot \partial_{n+2} + \sum_{i=1}^{n+1} a_i \partial_i \quad (1.20)$$

Note que

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X \xi &= \tilde{\nabla}_{(\sum_{i=1}^{n+2} a_i \partial_i)} \xi = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \tilde{\nabla}_{\partial_i} \xi \\ &= \sum_{i=1}^{n+2} a_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, 0),\end{aligned}$$

isto é,  $\tilde{\nabla}_X \xi$  coincide com a componente  $X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}$  na base  $\beta$ , ou ainda,

$$\tilde{\nabla}_X \xi = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, 0) = (X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n})|_\beta.$$

Logo, substituindo a igualdade acima em (1.19), temos

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X Y &= \bar{\nabla}_X Y - \varepsilon \langle Y, \tilde{\nabla}_X \xi \rangle \xi \\ &= \bar{\nabla}_X Y - \varepsilon \langle Y, X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle \xi \\ &= \bar{\nabla}_X Y - \varepsilon \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + Y_{\mathbb{R}}, X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle \xi \\ &= \bar{\nabla}_X Y - \varepsilon \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle \xi - \varepsilon \langle Y_{\mathbb{R}}, X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle \xi \\ &= \bar{\nabla}_X Y - \varepsilon \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle \xi \\ &= \bar{\nabla}_X Y - \varepsilon \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle \xi.\end{aligned}$$

Donde finalmente obtemos que

$$\bar{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \varepsilon \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle \xi,$$

como queríamos. ■

Lembrando que  $X = X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + X_{\mathbb{R}}$ , por (1.20) podemos escrever

$$X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \partial_i \quad \text{e} \quad X_{\mathbb{R}} = a_{n+2} \cdot \partial_{n+2}.$$

A partir de agora, denotaremos  $\partial_{n+2} = \partial_t$  e  $a_{n+2} = a$  como forma de distinguir melhor os campos que fazem parte da componente  $X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}$  do campo que faz parte da componente  $X_{\mathbb{R}}$ . Dessa forma,

$$X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \partial_i \quad \text{e} \quad X_{\mathbb{R}} = a \partial_t. \quad (1.21)$$

De agora em diante,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{P}}$  denotará a métrica do espaço produto  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$ . Já conhecemos a conexão de  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$ , agora vamos descrever sua curvatura  $\bar{R}$ . De acordo com o Corolário 1.4.5, temos que

$$\bar{R}(X, Y)Z = R_1(X_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, Y_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n})Z_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n},$$

onde  $R_1$  denota a curvatura de  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ .

Por outro lado, sabemos que  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$  possui curvatura seccional constante igual a  $\varepsilon$ . Assim, pelo Lema 1.1.6, vale a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} R_1(X_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, Y_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n})Z_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} &= \varepsilon \cdot R'(X_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, Y_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n})Z_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} \\ &= \varepsilon \cdot [\langle X_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, Z_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} \rangle_{\mathcal{P}} Y_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} - \langle Y_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, Z_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} \rangle_{\mathcal{P}} X_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}]. \end{aligned}$$

Segue que

$$\bar{R}(X, Y)Z = \varepsilon \cdot [\langle X_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, Z_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} \rangle_{\mathcal{P}} Y_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} - \langle Y_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, Z_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} \rangle_{\mathcal{P}} X_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}]. \quad (1.22)$$

Dessa forma, dado  $W \in \mathcal{X}(\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R})$ , temos que

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} = \varepsilon \cdot [\langle X_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, Z_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, W_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, Z_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} \rangle_{\mathcal{P}} \langle X_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n}, W_{\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n} \rangle_{\mathcal{P}}].$$

## 1.6 Imersões Isométricas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Para o início desta seção, utilizamos como referência [17] novamente.

Seja  $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$  uma hipersuperfície orientada, com campo normal unitário  $\eta$ . Vimos, em (1.2), que podemos escrever o espaço tangente de  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$  da seguinte maneira

$$T(\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}) = T\mathcal{M} \oplus (T\mathcal{M})^{\perp}.$$

Como  $\partial_t \in T(\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R})$ , ele possui uma componente em  $T\mathcal{M}$  dada por  $df(\mathcal{T})$ , onde  $\mathcal{T} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , e possui uma componente no espaço  $(T\mathcal{M})^{\perp}$ , à qual podemos escrever como sendo  $\lambda\eta$ , onde  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Em outras palavras,

$$\partial_t = df(\mathcal{T}) + \lambda\eta. \quad (1.23)$$



Vamos identificar  $df(\mathcal{T})$  com  $\mathcal{T}$  exceto em situações em que tal identificação possa gerar confusão por parte do leitor. Note que

$$\begin{aligned} \langle \partial_t, \eta \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle \mathcal{T} + \lambda\eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle \mathcal{T}, \eta \rangle_{\mathcal{P}} + \lambda \langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Consideremos  $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  o ângulo entre os campos de vetores  $\partial_t$  e  $\eta$ . Chamaríamos  $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\nu = \cos \theta$  de **função ângulo**. Dessa forma

$$\lambda = \langle \partial_t, \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \cos \theta = \nu.$$

Em vista disso, podemos reescrever (1.23) da seguinte maneira

$$\partial_t = \mathcal{T} + \nu\eta. \tag{1.24}$$

Na proposição seguinte, vamos descrever as equações de Gauss e Codazzi da hipersuperfície  $f$ . Denotaremos por  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita de  $\mathcal{M}$  associada a métrica induzida pela imersão  $f$  e por  $R$  a curvatura de  $\mathcal{M}$ . Além disso, o operador forma associado ao vetor normal unitário  $\eta$  de  $f$  será denotado apenas por  $A$ .

**Proposição 1.6.1** *Sejam  $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ . Então valem as seguintes equações:*

(a) *Equação de Gauss*

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} &= \varepsilon \cdot [\langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, W \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, Z \rangle_{\mathcal{P}} \\ &+ \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle W, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, Z \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle W, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} \\ &+ \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Z, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Z, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, W \rangle_{\mathcal{P}}] \\ &+ \langle A(X), Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle A(Y), W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle A(X), W \rangle_{\mathcal{P}} \langle A(Y), Z \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

(b) *Equação de Codazzi*

$$\nabla_X A(Y) - \nabla_Y A(X) - A([X, Y]) = \varepsilon \nu [\langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} X - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} Y].$$

**Demonstração:**

(a) Como  $B(X, Y) \in (T\mathcal{M})^\perp$ , existe um número  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $B(Y, W) = c\eta$ . Dessa forma,  $c = \langle B(Y, W), \eta \rangle_{\mathcal{P}}$ . Por outro lado, de (1.6), podemos escrever

$$\langle B(Y, W), \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \langle A(Y), W \rangle_{\mathcal{P}} = \langle Y, A(W) \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Segue que  $c = \langle A(Y), W \rangle_{\mathcal{P}}$ . Concluimos que

$$B(Y, W) = c\eta = \langle A(Y), W \rangle_{\mathcal{P}}\eta. \quad (1.25)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} B(X, Z) &= \langle A(X), Z \rangle_{\mathcal{P}}\eta, \\ B(X, W) &= \langle A(X), W \rangle_{\mathcal{P}}\eta, \\ B(Y, Z) &= \langle A(Y), Z \rangle_{\mathcal{P}}\eta. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Agora, lembre que, pela Proposição 1.2.6, a equação de Gauss para uma imersão isométrica qualquer é dada por

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} = \langle R(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle B(Y, W), B(X, Z) \rangle_{\mathcal{P}} + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Substituindo (1.25) e (1.26) na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle \langle A(Y), W \rangle_{\mathcal{P}}\eta, \langle A(X), Z \rangle_{\mathcal{P}}\eta \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\quad + \langle \langle A(X), W \rangle_{\mathcal{P}}\eta, \langle A(Y), Z \rangle_{\mathcal{P}}\eta \rangle_{\mathcal{P}}. \\ &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle A(Y), W \rangle_{\mathcal{P}}\langle A(X), Z \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\quad + \langle A(X), W \rangle_{\mathcal{P}}\langle A(Y), Z \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Que é equivalente a

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} + \langle A(Y), W \rangle_{\mathcal{P}}\langle A(X), Z \rangle_{\mathcal{P}} - \langle A(X), W \rangle_{\mathcal{P}}\langle A(Y), Z \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Por (1.22), sabemos que

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} = \varepsilon \cdot [\langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}}].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} &= \varepsilon \cdot [\langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}}] \\ &\quad + \langle A(Y), W \rangle_{\mathcal{P}}\langle A(X), Z \rangle_{\mathcal{P}} - \langle A(X), W \rangle_{\mathcal{P}}\langle A(Y), Z \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Lembrando que, por (1.21), podemos escrever  $X = X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + a\partial_t$ , temos

$$\langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + a\partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + a\langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = a.$$

Por outro lado, por (1.24), sabemos que  $\partial_t = \mathcal{T} + \nu\eta$ . Assim,

$$\langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = \langle X, \mathcal{T} + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} = \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} + \nu \langle X, \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Donde concluímos que  $a = \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}}$  e podemos então escrever

$$X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} = X - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t.$$

Analogamente,

$$Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} = Y - \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t,$$

$$Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} = Z - \langle Z, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t,$$

$$W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} = W - \langle W, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle X - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t, Z - \langle Z, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle Z, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \partial_t, Z \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\quad + \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Z, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Z, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\quad + \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Z, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} = \langle Y, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, W \rangle_{\mathcal{P}},$$

$$\langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} = \langle Y, Z \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}},$$

$$\langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} = \langle X, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, W \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} &= [\langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}}] \\ &\quad \cdot [\langle Y, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, W \rangle_{\mathcal{P}}] \\ &= \langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, W \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\quad - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, W \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\quad + \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, W \rangle_{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} &= [\langle Y, Z \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}}] \\
&\cdot [\langle X, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, W \rangle_{\mathcal{P}}] \\
&= \langle Y, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, W \rangle_{\mathcal{P}} \\
&- \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, W \rangle_{\mathcal{P}} \\
&+ \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, W \rangle_{\mathcal{P}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Z_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, W_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, W \rangle_{\mathcal{P}} \\
&- \langle Y, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, W \rangle_{\mathcal{P}} \\
&+ \langle Y, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, W \rangle_{\mathcal{P}} \\
&+ \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, W \rangle_{\mathcal{P}} \\
&- \langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, W \rangle_{\mathcal{P}} \\
&- \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle \mathcal{T}, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, W \rangle_{\mathcal{P}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a equação (1.27) se torna

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)Z, W \rangle_{\mathcal{P}} &= \varepsilon \cdot [\langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, W \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, Z \rangle_{\mathcal{P}} \\
&+ \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle W, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, Z \rangle_{\mathcal{P}} - \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle W, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, Z \rangle_{\mathcal{P}} \\
&+ \langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Z, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Z, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, W \rangle_{\mathcal{P}}] \\
&+ \langle A(X), Z \rangle_{\mathcal{P}} \langle A(Y), W \rangle_{\mathcal{P}} - \langle A(X), W \rangle_{\mathcal{P}} \langle A(Y), Z \rangle_{\mathcal{P}},
\end{aligned}$$

como queríamos.

(b) Agora vamos obter a equação de Codazzi. Para isso, inicialmente, segue da compatibilidade de  $\bar{\nabla}$  com  $\langle, \rangle_{\mathcal{P}}$  e pelo fato de que  $\eta$  é unitário, temos que

$$0 = Z \langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}} = 2 \langle \bar{\nabla}_Z \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Assim,  $\bar{\nabla}_Z \eta$  não possui componente normal, isto é,  $\nabla_Z^\perp \eta = 0$ . Dessa forma, como  $\bar{\nabla}_Z \eta = \nabla_Z^\perp \eta - A(Z)$ , concluímos que  $\bar{\nabla}_Z \eta = -A(Z)$ . Logo, da definição de

curvatura, podemos escrever

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\eta &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \eta - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \eta + \bar{\nabla}_{[X, Y]}\eta \\ &= \bar{\nabla}_Y(-A(X)) - \bar{\nabla}_X(-A(Y)) - A([X, Y]) \\ &= \bar{\nabla}_X(A(Y)) - \bar{\nabla}_Y(A(X)) - A([X, Y]).\end{aligned}\quad (1.28)$$

Agora, como  $B(X, A(Y)) = \bar{\nabla}_X(A(Y)) - \nabla_X(A(Y))$  e  $B(X, A(Y)) \in \mathcal{X}(f(\mathcal{M}))^\perp$ , temos que existe  $c \in \mathbb{R}$  para o qual

$$\bar{\nabla}_X(A(Y)) - \nabla_X(A(Y)) = c\eta.$$

De forma que  $c = \langle \bar{\nabla}_X(A(Y)), \eta \rangle_{\mathcal{P}}$ . Logo,

$$\bar{\nabla}_X(A(Y)) = \nabla_X(A(Y)) + \langle \bar{\nabla}_X(A(Y)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} \eta.$$

Analogamente,

$$\bar{\nabla}_Y(A(X)) = \nabla_Y(A(X)) + \langle \bar{\nabla}_Y(A(X)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} \eta.$$

Assim, fazendo a diferença entre as duas últimas equações, temos

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X(A(Y)) - \bar{\nabla}_Y(A(X)) &= \nabla_X(A(Y)) + \langle \bar{\nabla}_X(A(Y)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} \eta \\ &\quad - \nabla_Y(A(X)) - \langle \bar{\nabla}_Y(A(X)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} \eta \\ &= \nabla_X(A(Y)) - \nabla_Y(A(X)) \\ &\quad + [\langle \bar{\nabla}_X(A(Y)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} - \langle \bar{\nabla}_Y(A(X)), \eta \rangle_{\mathcal{P}}] \eta.\end{aligned}\quad (1.29)$$

Por outro lado, novamente pela compatibilidade de  $\bar{\nabla}$  com  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{P}}$ , note que

$$\begin{aligned}0 &= X\langle A(Y), \eta \rangle_{\mathcal{P}} - Y\langle A(X), \eta \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle \bar{\nabla}_X(A(Y)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} + \langle A(Y), \bar{\nabla}_X \eta \rangle_{\mathcal{P}} - \langle \bar{\nabla}_Y(A(X)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} - \langle A(X), \bar{\nabla}_Y \eta \rangle_{\mathcal{P}}.\end{aligned}$$

Donde segue que

$$\langle \bar{\nabla}_X(A(Y)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} - \langle \bar{\nabla}_Y(A(X)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \langle A(X), \bar{\nabla}_Y \eta \rangle_{\mathcal{P}} - \langle A(Y), \bar{\nabla}_X \eta \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Como vimos,  $\bar{\nabla}_Y \eta = -A(Y)$  e  $\bar{\nabla}_X \eta = -A(X)$ . Logo,

$$\langle \bar{\nabla}_X(A(Y)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} - \langle \bar{\nabla}_Y(A(X)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} = -\langle A(X), A(Y) \rangle_{\mathcal{P}} + \langle A(Y), A(X) \rangle_{\mathcal{P}} = 0.$$

Dessa forma, a equação (1.29) se torna

$$\bar{\nabla}_X(A(Y)) - \bar{\nabla}_Y(A(X)) = \nabla_X(A(Y)) - \nabla_Y(A(X)),$$

e, assim, podemos reescrever (1.28) da seguinte maneira

$$\bar{R}(X, Y)\eta = \nabla_X(A(Y)) - \nabla_Y(A(X)) - A([X, Y]). \quad (1.30)$$

Vamos agora encontrar outra expressão para  $\bar{R}(X, Y)\eta$ . Pelo Lema 1.1.6, vale que

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)\eta &= R_1(X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n})\eta_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \\ &= \varepsilon[\langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, \eta_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} - \langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, \eta_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Como  $X = X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t$  e  $\eta = \eta_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t$ , temos

$$\begin{aligned} \langle X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, \eta_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle X - \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t, \eta - \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle X, \eta \rangle_{\mathcal{P}} - 2\langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= -2\langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= -\langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

De forma análoga,

$$\langle Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}, \eta_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \rangle_{\mathcal{P}} = -\langle Y, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}. \quad (1.33)$$

Substituindo (1.32) e (1.33) em (1.31), temos que

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)\eta &= \varepsilon[-\langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} Y_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + \langle Y, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}] \\ &= \varepsilon[-\langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} (Y - \langle Y, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t) + \langle Y, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} (X - \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t)] \\ &= \varepsilon[-\langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} Y + \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle Y, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t \\ &\quad + \langle Y, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} X - \langle Y, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t] \\ &= \varepsilon[\langle Y, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} X - \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} Y]. \end{aligned}$$

Assim, como  $\partial_t = \mathcal{T} + \nu\eta$ , temos que

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)\eta &= \varepsilon[\langle Y, \mathcal{T} + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \mathcal{T} + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} X - \langle X, \mathcal{T} + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} \langle \eta, \mathcal{T} + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} Y] \\ &= \varepsilon\{[\langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} + \nu\langle Y, \eta \rangle_{\mathcal{P}}][\langle \eta, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} + \nu\langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}}]X \\ &\quad - [\langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} + \nu\langle X, \eta \rangle_{\mathcal{P}}][\langle \eta, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} + \nu\langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}}]Y\} \\ &= \varepsilon[\nu\langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} X - \nu\langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} Y] \\ &= \varepsilon\nu[\langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} X - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} Y]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Finalmente, por (1.30) e por (1.34) concluimos que

$$\nabla_X(A(Y)) - \nabla_Y(A(X)) - A([X, Y]) = \varepsilon\nu[\langle Y, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} X - \langle X, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} Y],$$

como queríamos. ■

A proposição seguinte será muito importante na demonstração de resultados que aparecerão ao longo do texto.

**Proposição 1.6.2** *O campo  $\partial_t$  é um campo paralelo em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Seja  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$ . Denotando por  $\nabla^1$  e  $\nabla^2$  as conexões de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e  $\mathbb{R}$ , respectivamente, e usando o Corolário 1.4.3, temos que

$$\bar{\nabla}_X \partial_t = \nabla_{X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}}^1 (\partial_t)_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + \nabla_{X_{\mathbb{R}}}^2 (\partial_t)_{\mathbb{R}} = \nabla_{X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}}^1 0 + \nabla_{X_{\mathbb{R}}}^2 \partial_t = \nabla_{X_{\mathbb{R}}}^2 \partial_t.$$

Como  $X_{\mathbb{R}} = \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t$ , concluimos que

$$\bar{\nabla}_X \partial_t = \nabla_{\langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t}^2 \partial_t = \langle X, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \nabla_{\partial_t}^2 \partial_t = 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Veremos agora a primeira consequência da proposição acima. Encontraremos duas igualdades que serão muito utilizadas.

**Proposição 1.6.3** *Dado  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , vale que*

$$\nabla_X \mathcal{T} = \nu A(X) \quad e \quad X(\nu) = -\langle \mathcal{T}, A(X) \rangle_{\mathcal{P}}.$$

**Demonstração:** Seja  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ . Temos

$$0 = \bar{\nabla}_X \partial_t = \bar{\nabla}_X (\mathcal{T} + \nu\eta) = \bar{\nabla}_X \mathcal{T} + \bar{\nabla}_X \nu\eta = \bar{\nabla}_X \mathcal{T} + \nu \bar{\nabla}_X \eta + X(\nu)\eta. \quad (1.35)$$

Agora, como  $B(X, \mathcal{T}) = \bar{\nabla}_X \mathcal{T} - \nabla_X \mathcal{T}$  com  $B(X, \mathcal{T}) \in \mathcal{X}(\mathcal{M})^\perp$ , temos que existe  $c \in \mathbb{R}$  para o qual

$$\bar{\nabla}_X \mathcal{T} - \nabla_X \mathcal{T} = c\eta. \quad (1.36)$$

Como  $\nabla_X \mathcal{T} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , decorre que  $c = \langle \bar{\nabla}_X \mathcal{T}, \eta \rangle_{\mathcal{P}}$ . Além disso, de  $\langle \mathcal{T}, \eta \rangle_{\mathcal{P}} = 0$ , usando a compatibilidade de  $\bar{\nabla}$  com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{P}}$ , podemos escrever

$$0 = X \langle \mathcal{T}, \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \langle \bar{\nabla}_X \mathcal{T}, \eta \rangle_{\mathcal{P}} + \langle \mathcal{T}, \bar{\nabla}_X \eta \rangle_{\mathcal{P}},$$

donde segue que  $\langle \bar{\nabla}_X \mathcal{T}, \eta \rangle_p = -\langle \mathcal{T}, \bar{\nabla}_X \eta \rangle_p$ . Com essas informações, obtemos

$$c = \langle \bar{\nabla}_X \mathcal{T}, \eta \rangle_p = -\langle \mathcal{T}, \bar{\nabla}_X \eta \rangle_p.$$

Sabemos da demonstração do item (b) da Proposição 1.6.1 que  $-\bar{\nabla}_X \eta = A(X)$ . Dessa forma, concluimos que  $c = \langle \mathcal{T}, A(X) \rangle_p$ , e, assim, podemos reescrever (1.36) da seguinte maneira

$$\bar{\nabla}_X \mathcal{T} = \nabla_X \mathcal{T} + \langle \mathcal{T}, A(X) \rangle_p \eta. \quad (1.37)$$

Por fim, substituindo (1.37) em (1.35), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\nabla}_X \mathcal{T} + \nu \bar{\nabla}_X \eta + X(\nu) \eta \\ &= \nabla_X \mathcal{T} + \langle \mathcal{T}, A(X) \rangle_p \eta - \nu A(X) + X(\nu) \eta \\ &= [\nabla_X \mathcal{T} - \nu A(X)] + [\langle \mathcal{T}, A(X) \rangle_p + X(\nu)] \eta. \end{aligned}$$

onde  $\nabla_X \mathcal{T} - \nu A(X)$  é composta apenas por campos tangentes, enquanto que a componente  $[\langle \mathcal{T}, A(X) \rangle_p + X(\nu)] \eta$  está na direção normal. Portanto, vale que

$$\nabla_X \mathcal{T} - \nu A(X) = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathcal{T}, A(X) \rangle_p + X(\nu) = 0,$$

que é equivalente a

$$\nabla_X \mathcal{T} = \nu A(X) \quad \text{e} \quad X(\nu) = -\langle \mathcal{T}, A(X) \rangle_p, \quad (1.38)$$

como queríamos. ■

Para os próximos resultados, utilizamos [22], que é a principal referência deste trabalho.

Denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  a métrica induzida pela hipersuperfície  $f$  da variedade Riemanniana  $\mathcal{M}^n$ .

**Definição 1.6.4** *Seja  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável. O campo  $\text{grad} \varphi : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  dado por*

$$\langle \text{grad} \varphi(p), v \rangle_{\mathcal{M}} = d\varphi_p(v),$$

$p \in \mathcal{M}$ ,  $v \in T_p \mathcal{M}$ , é chamado de **gradiente** de  $\varphi$ .

O lema a seguir nos fornece uma importante propriedade do campo  $\mathcal{T}$ .



**Lema 1.6.5** *Considere a função  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$h(p) = \langle f, \partial_t \rangle_p(p),$$

*$p \in \mathcal{M}$ .  $h$  é chamada **função altura** da hipersuperfície  $f$ . Então,*

$$\text{grad}(h) = \mathcal{T}.$$

**Demonstração:** Dados  $p \in \mathcal{M}$  e  $v \in T_p\mathcal{M}$ , da definição de gradiente temos que

$$\langle \text{grad}h(p), v \rangle_{\mathcal{M}} = dh_p(v). \quad (1.39)$$

Vamos agora expressar  $dh_p(v)$  de uma outra maneira. Seja  $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Dessa forma, temos

$$dh_p(v) = \frac{d}{d\tau}[(h \circ \alpha)(\tau)]\Big|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau}[h(\alpha(\tau))]\Big|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau}[\langle f(\alpha(\tau)), \partial_t \rangle_p]\Big|_{\tau=0}.$$

Usando primeiro a compatibilidade de  $\bar{\nabla}$  com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  e depois a Proposição 1.6.2, temos

$$\begin{aligned} dh_p(v) &= \left\langle \frac{d}{d\tau}[f(\alpha(\tau))]\Big|_{\tau=0}, \partial_t(p) \right\rangle_p \\ &= \langle df_{\alpha(0)}(\alpha'(0)), \partial_t(p) \rangle_p \\ &= \langle df_p(v), \partial_t(p) \rangle_p. \end{aligned}$$

Como  $\partial_t = df(\mathcal{T}) + \nu\eta$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  é a métrica induzida por  $f$ , a igualdade acima se torna

$$\begin{aligned} dh_p(v) &= \langle df_p(v), df_p(\mathcal{T}(p)) + \nu(p)\eta(p) \rangle_p \\ &= \langle df_p(v), df_p(\mathcal{T}(p)) \rangle_p + \nu(p)\langle df_p(v), \eta(p) \rangle_p \\ &= \langle df_p(\mathcal{T}(p)), df_p(v) \rangle_p \\ &= \langle \mathcal{T}(p), v \rangle_{\mathcal{M}}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Finalmente, por (1.39) e por (1.40), temos

$$\langle \text{grad}h(p), v \rangle_{\mathcal{M}} = \langle \mathcal{T}(p), v \rangle_{\mathcal{M}}.$$

Dessa forma, como  $v \in T_p\mathcal{M}$  é qualquer, concluímos que

$$\text{grad}h(p) = \mathcal{T}(p),$$

como queríamos mostrar. ■

Para os próximos resultados precisaremos do conceito de distribuição sobre uma variedade diferenciável. A referência utilizada nas definições seguintes foi [20].

**Definição 1.6.6** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Uma **distribuição**  $D^r$  sobre  $M$ ,  $r \leq n$ , é uma aplicação que associa a cada ponto  $p \in M$  um subespaço  $r$ -dimensional  $D^r(p)$  de  $T_pM$ .*

**Definição 1.6.7** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável e seja  $D^r$  uma distribuição sobre  $M$ . Dizemos que  $\bar{M} \subset M$  é uma **variedade integral** da distribuição  $D^r$  se  $T_p\bar{M}$  é um subespaço de  $D^r(p)$  para todo  $p \in \bar{M}$ . Dizemos que  $D^r$  é **integrável** se para cada  $p \in M$  existe uma variedade integral  $\bar{M}$  de  $D^r$  tal que  $D^r(p) = T_p\bar{M}$ .*

**Definição 1.6.8** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável e seja  $D^r$  uma distribuição sobre  $M$ . Dizemos que  $D^r$  é **involutiva** desde que, para todo par  $X, Y \in D^r$ , tem-se  $[X, Y] \in D^r$ .*

O próximo resultado é conhecido como **Teorema de Frobenius** e será primordial na demonstração do Lema 1.6.10.

**Teorema 1.6.9** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável e seja  $D^r$  uma distribuição sobre  $M$ . Então,  $D^r$  é integrável se, e somente se, é involutiva.*

Uma demonstração para o Teorema 1.6.9 pode ser encontrada em [25].

Dado  $p \in \mathcal{M}$ , considere o subespaço de  $T_p\mathcal{M}$  dado por

$$\{\mathcal{T}(p)\}^\perp = \{v \in T_p\mathcal{M} : \langle v, \mathcal{T}(p) \rangle_{\mathcal{M}} = 0\}.$$

A aplicação  $D$  que associa a cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  o subespaço  $\{\mathcal{T}(p)\}^\perp$ , é uma distribuição sobre  $\mathcal{M}$ .  $D$  é chamada **distribuição ortogonal**.

Denote por  $\{\mathcal{T}(p)\}$  o conjunto dos vetores  $\mathcal{T}(p)$ ,  $p \in \mathcal{M}$ .  $\{\mathcal{T}(p)\}$  e  $\{\mathcal{T}(p)\}^\perp$  são o complemento ortogonal um do outro com relação a  $T_p\mathcal{M}$ , isto é,

$$T_p\mathcal{M} = \{\mathcal{T}(p)\} \oplus \{\mathcal{T}(p)\}^\perp. \quad (1.41)$$

Note também que, como  $T_p\mathcal{M}$  e  $\{\mathcal{T}(p)\}$  tem dimensões  $n$  e 1, respectivamente, o subespaço  $\{\mathcal{T}(p)\}^\perp$  tem dimensão  $n - 1$ .

Demonstraremos agora um resultado que é uma consequência do Lema 1.6.5.

**Lema 1.6.10**  $D$  é integrável.

**Demonstração:** Pelo Teorema de Frobenius, basta mostrarmos que  $D$  é involutiva. Para isso, sejam  $X$  e  $Y$  campos diferenciáveis de vetores que associam a cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  um vetor em  $\{\mathcal{T}(p)\}^\perp$ . Desta forma, dado  $p \in \mathcal{M}$ , temos que

$$\langle \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}}(p) = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathcal{T}, Y \rangle_{\mathcal{M}}(p) = 0. \quad (1.42)$$

Agora, para o campo  $X$ , da definição de gradiente, obtemos que

$$[X(p)](h) = dh_p(X(p)) = \langle \text{grad}h, X \rangle_{\mathcal{M}}(p). \quad (1.43)$$

No Lema 1.6.5 vimos que  $\text{grad}h = \mathcal{T}$ . Logo, por (1.42) e por (1.43) concluímos que

$$[X(p)](h) = \langle \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}}(p) = 0.$$

Analogamente, para o campo  $Y$ , temos que

$$[Y(p)](h) = \langle \mathcal{T}, Y \rangle_{\mathcal{M}}(p) = 0.$$

Por outro lado, utilizando novamente que  $\text{grad}h = \mathcal{T}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle [X, Y], \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}(p) &= \langle [X, Y], \text{grad}h \rangle_{\mathcal{M}}(p) \\ &= dh_p([X, Y](p)) \\ &= [X, Y](p)(h) \\ &= [X(p)]([Y(p)](h)) - [Y(p)]([X(p)](h)). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Donde concluímos que

$$\langle [X, Y], \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}(p) = [X(p)](0) - [Y(p)](0) = 0. \quad (1.45)$$

Portanto,  $[X, Y](p) \in \{\mathcal{T}(p)\}^\perp$ , isto é, a distribuição  $D$  é involutiva. ■

**Definição 1.6.11** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva diferenciável em  $\mathcal{M}$ . Dizemos que  $\gamma$  é uma **pré-geodésica** de  $\mathcal{M}$  se sua reparametrização pelo comprimento de arco é uma geodésica de  $\mathcal{M}$ .

**Lema 1.6.12** Assuma que  $|\mathcal{T}|$  é constante ao longo de  $D$ . Então, as curvas integrais do campo  $\mathcal{T}$  são pré-geodésicas de  $\mathcal{M}$ .

**Demonstração:** Primeiro, vamos mostrar que se  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , então

$$\langle \nabla_X \mathcal{T}, Y \rangle_{\mathcal{M}} = \langle \nabla_Y \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}}. \quad (1.46)$$

Como  $\mathcal{T} = \text{grad}h$ , temos que

$$[Y(p)](h) = \langle \mathcal{T}, Y \rangle_{\mathcal{M}}(p).$$

Dessa forma, podemos escrever

$$[X(p)]([Y(p)](h)) = [X(p)](\langle \mathcal{T}, Y \rangle_{\mathcal{M}}(p)).$$

Que, por sua vez, é o mesmo que

$$[X(p)]([Y(p)](h)) = \langle \nabla_{X(p)} \mathcal{T}, Y \rangle_{\mathcal{M}}(p) + \langle \mathcal{T}, \nabla_{X(p)} Y \rangle_{\mathcal{M}}(p).$$

Analogamente,

$$[Y(p)]([X(p)](h)) = \langle \nabla_{Y(p)} \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}}(p) + \langle \mathcal{T}, \nabla_{Y(p)} X \rangle_{\mathcal{M}}(p).$$

Logo, fazendo a diferença entre as duas últimas equações e usando a definição de colchete, obtemos que

$$\begin{aligned} [X, Y](p)(h) &= [X(p)]([Y(p)](h)) - [Y(p)]([X(p)](h)) \\ &= \langle \nabla_{X(p)} \mathcal{T}, Y \rangle_{\mathcal{M}}(p) + \langle \mathcal{T}, \nabla_{X(p)} Y \rangle_{\mathcal{M}}(p) \\ &\quad - \langle \nabla_{Y(p)} \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}}(p) - \langle \mathcal{T}, \nabla_{Y(p)} X \rangle_{\mathcal{M}}(p) \\ &= \langle \nabla_{X(p)} \mathcal{T}, Y \rangle_{\mathcal{M}}(p) - \langle \nabla_{Y(p)} \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}}(p) \\ &\quad + \langle \mathcal{T}, \nabla_{X(p)} Y - \nabla_{Y(p)} X \rangle_{\mathcal{M}}(p). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Usando a simetria de  $\nabla$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}, \nabla_{X(p)} Y - \nabla_{Y(p)} X \rangle_{\mathcal{M}}(p) &= \langle \mathcal{T}, [X, Y] \rangle_{\mathcal{M}}(p) \\ &= \langle \text{grad}h, [X, Y] \rangle_{\mathcal{M}}(p) \\ &= dh_p([X, Y](p)) \\ &= [X, Y](p)(h). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Por fim, substituindo (1.48) em (1.47), obtém-se que

$$[X, Y](p)(h) = \langle \nabla_{X(p)} \mathcal{T}, Y \rangle_{\mathcal{M}}(p) - \langle \nabla_{Y(p)} \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}}(p) + [X, Y](p)(h),$$

de onde concluímos que

$$\langle \nabla_{X(p)} \mathcal{T}, Y \rangle_{\mathcal{M}}(p) = \langle \nabla_{Y(p)} \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}}(p),$$

como queríamos.

Assim, escolhendo  $X$  um campo diferenciável de vetores que associa a cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  um vetor em  $\{\mathcal{T}(p)\}^\perp$  e tomando  $Y = \mathcal{T}$ , a equação que obtivemos acima nos fornece que

$$\langle \nabla_{X(p)} \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}(p) = \langle \nabla_{\mathcal{T}(p)} \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}}(p). \quad (1.49)$$

Como  $|\mathcal{T}|^2$  é constante ao longo de  $D$  e  $X$  é um campo em  $D$ , concluímos que  $[X(p)](|\mathcal{T}|^2) = 0$ . Então, usando novamente a compatibilidade de  $\nabla$  com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= [X(p)](|\mathcal{T}|^2) \\ &= [X(p)](\langle \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}(p)) \\ &= \langle \nabla_{X(p)} \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}(p) + \langle \mathcal{T}, \nabla_{X(p)} \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}(p) \\ &= 2\langle \nabla_{X(p)} \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}(p). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Segue de (1.49) e de (1.50) que

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}(p)} \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}}(p) = 0.$$

Como  $p \in \mathcal{M}$  é qualquer, concluímos que

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T}, X \rangle_{\mathcal{M}} = 0,$$

para todo campo  $X \in D = \{\mathcal{T}\}^\perp$ . Dessa forma, existe uma função  $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = \zeta \mathcal{T}. \quad (1.51)$$

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva integral do campo  $\mathcal{T}$ , isto é,  $\mathcal{T}(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ . Considere também o comprimento de arco da curva  $\gamma$

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(\tau)| d\tau.$$

Denote por  $\beta$  a reparametrização de  $\gamma$  pelo comprimento de arco, isto é,  $\beta$  é tal que  $\gamma(t) = \beta(s(t))$ . Dessa forma,

$$\gamma'(t) = s'(t) \frac{d\beta}{ds}(s(t)) = s'(t) \beta'(s(t)).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vale que  $s'(t) = |\gamma'(t)|$ . Logo,

$$\beta'(s(t)) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|},$$

donde  $|\beta'(s)| = 1$ . Queremos mostrar que  $\beta$  é uma geodésica de  $\mathcal{M}$ , isto é,

$$\nabla_{\beta'} \beta' = \frac{D\beta'}{ds} = 0, \quad (1.52)$$

onde  $\frac{D\beta'}{ds}$  denota a derivada covariante do campo  $\beta'$ .

Note que  $\beta'(s) = \frac{\mathcal{T}(\beta(s))}{|\mathcal{T}(\beta(s))|}$ . Assim,  $\beta$  é uma curva integral do campo  $\hat{\mathcal{T}} = \frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|}$ , isto é,

$$\hat{\mathcal{T}}(\beta(s)) = \beta'(s) = \frac{\mathcal{T}(\beta(s))}{|\mathcal{T}(\beta(s))|}.$$

Portanto, omitindo o ponto  $\beta(s) \in \mathcal{M}$  por uma questão de notação, concluímos que mostrar (1.52) é equivalente a mostrar que  $\nabla_{\hat{\mathcal{T}}} \hat{\mathcal{T}} = 0$ .

Agora, usando as propriedades de conexão, obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{\mathcal{T}}} \hat{\mathcal{T}} &= \nabla_{\frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|}} \frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|} \\ &= \frac{1}{|\mathcal{T}|} \nabla_{\mathcal{T}} \frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|} \\ &= \frac{1}{|\mathcal{T}|} \left[ \frac{1}{|\mathcal{T}|} \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} + \mathcal{T} \left( \frac{1}{|\mathcal{T}|} \right) \mathcal{T} \right] \\ &= \frac{1}{|\mathcal{T}|} \left[ \frac{1}{|\mathcal{T}|} \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} - \frac{\mathcal{T}(|\mathcal{T}|)}{|\mathcal{T}|^2} \mathcal{T} \right], \end{aligned}$$

que, por (1.51), é equivalente a

$$\nabla_{\hat{\mathcal{T}}} \hat{\mathcal{T}} = \frac{1}{|\mathcal{T}|} \left[ \frac{\zeta}{|\mathcal{T}|} \mathcal{T} - \frac{\mathcal{T}(|\mathcal{T}|)}{|\mathcal{T}|^2} \mathcal{T} \right]. \quad (1.53)$$

Pela compatibilidade de  $\nabla$  com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  e novamente por (1.51), temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) &= \mathcal{T}(\langle \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}^{1/2}) \\
 &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}^{-1/2} \cdot \mathcal{T} \langle \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}} \\
 &= \frac{1}{2} |\mathcal{T}|^{-1} \cdot 2 \langle \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}} \\
 &= \frac{\langle \zeta \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}}{|\mathcal{T}|} \\
 &= \zeta \frac{\langle \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}}{|\mathcal{T}|} \\
 &= \zeta |\mathcal{T}|.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, (1.53) se torna

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\hat{\tau}} \hat{\mathcal{T}} &= \frac{1}{|\mathcal{T}|} \left[ \frac{\zeta}{|\mathcal{T}|} \mathcal{T} - \frac{\zeta |\mathcal{T}|}{|\mathcal{T}|^2} \mathcal{T} \right] \\
 &= \frac{1}{|\mathcal{T}|} \left[ \frac{\zeta}{|\mathcal{T}|} \mathcal{T} - \frac{\zeta}{|\mathcal{T}|} \mathcal{T} \right] \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

**Observação 1.6.13** *Enunciar o Lema 1.6.12 dessa maneira tem como objetivo o aproveitamento da notação já estabelecida, mas na demonstração nota-se que podemos substituir  $\mathcal{M}$  por uma variedade Riemanniana qualquer  $N$ , não necessariamente imersa em  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$ , e, além disso, o campo  $\mathcal{T}$  pode ser substituído por um campo qualquer  $X \in \mathcal{X}(N)$ , desde que  $X$  seja gradiente de uma função diferenciável definida em  $N$ , também não necessariamente a função altura  $h$ , e satisfaça a hipótese de  $|X|$  ser constante ao longo da distribuição ortogonal  $D$  que associa a cada ponto  $p \in N$  o subespaço  $\{X(p)\}^{\perp}$  de  $T_p N$ .*

Vimos na Proposição 1.5.1 que  $\xi$  define um campo de vetores normais ao espaço produto  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$  (ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ ). Dessa forma, como sabemos que  $T\mathcal{M}$  é subespaço de  $T(\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R})$ , olhando para  $\mathcal{M} \subset \mathbb{E}^{n+2}$  (ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ ), concluímos que a restrição de  $\xi$  a  $\mathcal{M}$  também define um campo de vetores normais a hipersuperfície  $f$ . Dessa forma, faz sentido falar do operador forma associado a  $\xi$ , o qual denotaremos por  $A_{\xi}$ .

Os dois próximos resultados nos fornecem propriedades importantes que descrevem o comportamento de  $A_{\xi}$ .

**Proposição 1.6.14** *Vale que*

$$A_\xi(\mathcal{T}) = -\nu^2 \mathcal{T} \quad e \quad A_\xi(X) = -X,$$

para todo  $X \in \{\mathcal{T}\}^\perp$ .

**Demonstração:** De fato, da Proposição 1.2.3, dado  $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , temos que

$$A_\xi(Y) = -(\tilde{\nabla}_Y \xi)^T = -[d\xi(Y)]^T. \quad (1.54)$$

Dado  $x \in \mathcal{M}$ , considere  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva tal que

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_{n+2}(s)),$$

onde  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma'(0) = Y(x)$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} d\xi_x(Y(x)) &= d\xi_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) \\ &= \frac{d}{ds} [(\xi \circ \gamma)(s)]|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} [\xi(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_{n+2}(s))]|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} [(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_{n+1}(s), 0)]|_{s=0} \\ &= (\gamma'_1(0), \gamma'_2(0), \dots, \gamma'_{n+1}(0), 0) \\ &= (\gamma'_1(0), \gamma'_2(0), \dots, \gamma'_{n+1}(0), \gamma'_{n+2}(0)) - (0, \dots, 0, \gamma'_{n+2}(0)) \\ &= \gamma'(0) - (0, \dots, 0, \gamma'_{n+2}(0)) \\ &= Y(x) - (0, \dots, 0, \gamma'_{n+2}(0)). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Agora, como  $Y(x) = \gamma'(0) \in T_x \mathcal{M} \subset T_x(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$ , pela equação (1.13), temos que

$$(Y(x))_{\mathbb{R}} = d\sigma_x(Y(x)) = d\sigma_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = (0, \dots, 0, \gamma'_{n+2}(0)).$$

Assim, por (1.21), podemos escrever

$$(0, \dots, 0, \gamma'_{n+2}(0)) = (Y(x))_{\mathbb{R}} = \langle Y(x), \partial_t(x) \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t(x). \quad (1.56)$$

Dessa forma, das equações (1.55) e (1.56), temos

$$d\xi_x(Y(x)) = Y(x) - \langle Y(x), \partial_t(x) \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t(x).$$



Como  $\partial_t(x) = \mathcal{T}(x) + \nu(x)\eta(x)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 d\xi_x(Y(x)) &= Y(x) - \langle Y(x), \mathcal{T}(x) + \nu(x)\eta(x) \rangle_{\mathcal{P}} [\mathcal{T}(x) + \nu(x)\eta(x)] \\
 &= Y(x) - [\langle Y(x), \mathcal{T}(x) \rangle_{\mathcal{P}} + \nu(x)\langle Y(x), \eta(x) \rangle_{\mathcal{P}}] [\mathcal{T}(x) + \nu(x)\eta(x)] \\
 &= Y(x) - \langle Y(x), \mathcal{T}(x) \rangle_{\mathcal{P}} [\mathcal{T}(x) + \nu(x)\eta(x)] \\
 &= Y(x) - \langle Y(x), \mathcal{T}(x) \rangle_{\mathcal{P}} \mathcal{T}(x) - \nu(x)\langle Y(x), \mathcal{T}(x) \rangle_{\mathcal{P}} \eta(x). \tag{1.57}
 \end{aligned}$$

Logo, substituindo (1.57) em (1.54),

$$\begin{aligned}
 A_{\xi}(Y(x)) &= -[d\xi(Y)]^T \\
 &= -[Y(x) - \langle Y(x), \mathcal{T}(x) \rangle_{\mathcal{P}} \mathcal{T}(x) - \nu(x)\langle Y(x), \mathcal{T}(x) \rangle_{\mathcal{P}} \eta(x)]^T \\
 &= \langle Y(x), \mathcal{T}(x) \rangle_{\mathcal{P}} \mathcal{T}(x) - Y(x). \tag{1.58}
 \end{aligned}$$

Assim, como  $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  é qualquer, tomando  $Y = \mathcal{T}$  a equação (1.58) se torna

$$A_{\xi}(\mathcal{T}(x)) = \langle \mathcal{T}(x), \mathcal{T}(x) \rangle_{\mathcal{P}} \mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(x) = (|\mathcal{T}(x)|^2 - 1)\mathcal{T}(x). \tag{1.59}$$

Note que

$$\begin{aligned}
 1 = |\partial_t(x)|^2 &= \langle \partial_t(x), \partial_t(x) \rangle_{\mathcal{P}} \\
 &= \langle \mathcal{T}(x) + \nu(x)\eta(x), \mathcal{T}(x) + \nu(x)\eta(x) \rangle_{\mathcal{P}} \\
 &= \langle \mathcal{T}(x), \mathcal{T}(x) \rangle_{\mathcal{P}} + 2\nu(x)\langle \mathcal{T}(x), \eta(x) \rangle_{\mathcal{P}} + \nu^2(x)\langle \eta(x), \eta(x) \rangle_{\mathcal{P}} \\
 &= |\mathcal{T}(x)|^2 + \nu^2(x). \tag{1.60}
 \end{aligned}$$

Portanto, substituindo (1.60) em (1.59), concluímos que

$$A_{\xi}(\mathcal{T}(x)) = -\nu^2(x)\mathcal{T}(x),$$

e, assim, obtivemos a primeira igualdade que queríamos.

Por fim, tomando  $Y \in \{\mathcal{T}\}^{\perp}$  em (1.58), obtemos

$$A_{\xi}(Y(x)) = -Y(x),$$

que é a segunda igualdade pretendida. ■

Para a demonstração dos dois próximos resultados, utilizamos [23] para melhor entender os conceitos empregados.

**Lema 1.6.15** *Sejam  $x \in \mathcal{M}$  e  $w \in T_x \mathcal{M}$  autovetor de  $A_\xi$ . Se  $\mathcal{T}$  nunca se anula, então  $w$  é um múltiplo de  $\mathcal{T}(x)$  ou  $w \in \{\mathcal{T}(x)\}^\perp$ .*

**Demonstração:** De fato, suponha por absurdo que  $w$  possua componente na direção  $\mathcal{T}(x)$  e em  $\{\mathcal{T}(x)\}^\perp$ . Seja

$$\bar{\beta} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = \mathcal{T}(x)\},$$

uma base de  $T_x \mathcal{M}$  formada por vetores ortogonais.

Dessa forma, omitindo o ponto  $x$  para simplificar notação, existem  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n = \lambda \in \mathbb{R}$  tais que

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \lambda_n v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i = \lambda \mathcal{T} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i, \quad (1.61)$$

onde  $\lambda \neq 0$  e existe ao menos um índice  $k$  para o qual  $\lambda_k \neq 0$ , com  $1 \leq k \leq n-1$ .

Assim, aplicando  $A_\xi$  em ambos os lados de (1.61) e usando a Proposição 1.6.14, temos

$$A_\xi(w) = -\lambda \nu^2 \mathcal{T} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i = -\lambda \nu^2 \mathcal{T} - \lambda_k v_k - \sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} \lambda_i v_i. \quad (1.62)$$

Por outro lado, como  $w$  é autovetor de  $A_\xi$ , existe  $r \in \mathbb{R}$  para o qual  $A_\xi(w) = rw$ . Logo, por (1.61), obtemos

$$A_\xi(w) = r\lambda \mathcal{T} + r \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i = r\lambda \mathcal{T} + r\lambda_k v_k + \sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} r\lambda_i v_i. \quad (1.63)$$

Assim, de (1.62) e (1.63), concluímos que

$$r\lambda \mathcal{T} + r\lambda_k v_k + \sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} r\lambda_i v_i = -\lambda \nu^2 \mathcal{T} - \lambda_k v_k - \sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} \lambda_i v_i,$$

que é equivalente a

$$(r\lambda + \lambda \nu^2) \mathcal{T} + (r\lambda_k + \lambda_k) v_k + \sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} (r\lambda_i + \lambda_i) v_i = 0. \quad (1.64)$$

Agora, como  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = \mathcal{T}$  são vetores linearmente independentes, de (1.64) concluímos que

$$r\lambda + \lambda \nu^2 = 0 \quad \text{e} \quad r\lambda_k + \lambda_k = 0.$$

Da equação da direita, como  $\lambda_k \neq 0$ , temos que  $r = -1$ . Substituindo  $r = -1$  na equação da esquerda e lembrando que  $\lambda \neq 0$ , obtemos que  $\nu^2 = 1$ . Então, como  $|\mathcal{T}|^2 + \nu^2 = 1$ , temos que  $\mathcal{T} = 0$ , gerando-se assim uma contradição, pois por hipótese  $\mathcal{T}$  nunca se anula. ■

Vamos ao último lema das preliminares que é, essencialmente, um resultado de Álgebra Linear e que, apesar de parecer "isolado", será fundamental na demonstração do primeiro resultado do capítulo 2.

**Lema 1.6.16** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ . Sejam  $T, L : V \rightarrow V$  dois operadores autoadjuntos. Então,  $T \circ L = L \circ T$  se, e somente se, os autoespaços de  $L$  são invariantes por  $T$ .*

**Demonstração:** Suponha, inicialmente, que  $T \circ L(v) = L \circ T(v)$ , para todo  $v \in V$ . Queremos mostrar que os autoespaços de  $L$  são invariantes por  $T$ . Para isso, dado  $\lambda$  um autovalor de  $L$  e  $W_\lambda$  seu respectivo autoespaço, basta concluir que  $T(W_\lambda) \subset W_\lambda$ . Seja, então,  $v \in W_\lambda$ . Temos que  $L(v) = \lambda v$  e, assim,

$$T(L(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v). \quad (1.65)$$

Por outro lado, por hipótese, temos que  $T(L(v)) = L(T(v))$ . Dessa forma, por (1.65), concluímos que

$$L(T(v)) = \lambda T(v),$$

isto é,  $T(v) \in W_\lambda$ , como queríamos.

Agora, suponha que os autoespaços de  $L$  são invariantes por  $T$ . Queremos mostrar que  $T \circ L(v) = L \circ T(v)$ , para todo  $v \in V$ . Como  $L$  é um operador autoadjunto, existe uma base ortonormal de  $V$  formada por autovetores de  $L$  à qual denotaremos por  $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Assim, como  $L$  e  $T$  são lineares, basta mostrarmos que

$$T \circ L(e_j) = L \circ T(e_j),$$

para todo  $j$  com  $1 \leq j \leq n$ . Fixe  $k$  um índice qualquer com  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  e denote por  $\lambda_k$  o autovalor que tem  $e_k$  e  $V_{\lambda_k}$  como autovetor e como autoespaço associado, respectivamente, isto é,  $L(e_k) = \lambda_k e_k$  e

$$V_{\lambda_k} = \{w \in V : L(w) = \lambda_k w\}.$$

Como  $e_k \in V_{\lambda_k}$  e, por hipótese,  $V_{\lambda_k}$  é invariante por  $T$ , temos que  $T(e_k) \in V_{\lambda_k}$ , isto é, existe um  $w_0 \in V_{\lambda_k}$  tal que  $T(e_k) = w_0$ . Além disso, visto que  $w_0 \in V_{\lambda_k}$ , temos também  $L(w_0) = \lambda_k w_0$ . Segue que

$$T \circ L(e_k) = T(L(e_k)) = T(\lambda_k e_k) = \lambda_k T(e_k) = \lambda_k w_0.$$

Por outro lado,

$$L \circ T(e_k) = L(T(e_k)) = L(w_0) = \lambda_k w_0.$$

Donde concluímos que  $T \circ L(e_k) = L \circ T(e_k)$ . Como  $k$  é um índice qualquer, o resultado segue. ■

# Capítulo 2

## A Classe $\mathcal{A}$

Neste capítulo descreveremos completamente as hipersuperfícies de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  que possuem fibrado normal plano quando consideradas como subvariedades de codimensão 2 do Espaço Euclidiano  $\mathbb{E}^{n+2} \supset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  ou do Espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^{n+2} \supset \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ .

Em verdade, como veremos logo no primeiro resultado, uma hipersuperfície  $f$  dos espaços produto satisfaz tal propriedade se, e somente se, o campo  $\mathcal{T}$  é uma de suas direções principais. O objetivo é, então, apontar condições sobre as quais podemos garantir que uma hipersuperfície de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  está na classe  $\mathcal{A}$ .

Por último, demonstraremos um teorema estabelecendo que uma hipersuperfície que está na classe  $\mathcal{A}$  é construída através de uma família de hipersuperfícies paralelas em  $\mathbb{S}^n$  ou em  $\mathbb{H}^n$  e uma função real diferenciável com derivada positiva em todo o seu domínio.

### 2.1 Classificação

Os resultados e as respectivas demonstrações deste capítulo podem ser encontrados em [22], à qual é nossa principal referência.

**Teorema 2.1.1** *Seja  $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$  (ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ ),  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , uma hipersuperfície. Suponha que  $\mathcal{T}(x) \neq 0$ , para todo  $x \in \mathcal{M}$ . Então,  $f$  possui fibrado normal plano em  $x$ , considerando  $f$  uma imersão isométrica em  $\mathbb{E}^{n+2}$  (ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ ), se, e somente se,  $\mathcal{T}$  é uma direção principal de  $f$  em  $x$ .*

**Demonstração:** Note inicialmente que a codimensão da imersão  $f : \mathcal{M}^n \longrightarrow \mathbb{E}^{n+2}$  (ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ ) é 2. Assim, existem apenas dois campos de vetores normais unitários os quais já conhecemos,  $\eta$  e  $\xi$ . Sabemos que  $\mathbb{E}^{n+2}$  e  $\mathbb{L}^{n+2}$  são espaços de curvatura seccional nula. Logo, dado  $x \in \mathcal{M}$ , pela Proposição 1.2.8, basta mostrarmos que  $\mathcal{T}$  é uma direção principal de  $f$  em  $x$  se, e somente se,  $A \circ A_\xi(X) = A_\xi \circ A(X)$ , para todo  $X \in T_x\mathcal{M}$ .

Suponha inicialmente que  $A \circ A_\xi = A_\xi \circ A$ . Vamos omitir o ponto  $x$  para simplificar notação. Como  $A(\mathcal{T}) \in T\mathcal{M}$ , utilizando a base ortogonal  $\bar{\beta} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = \mathcal{T}\}$  construída na demonstração do Lema 1.6.15, temos que existem  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$  tais que

$$A(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_n v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i = \alpha \mathcal{T} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i. \quad (2.1)$$

Aplicando  $A_\xi$  em ambos os lados de (2.1), obtemos

$$A_\xi(A(\mathcal{T})) = A_\xi \left( \alpha \mathcal{T} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \right) = \alpha A_\xi(\mathcal{T}) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A_\xi(v_i). \quad (2.2)$$

Lembre-se que, da Proposição 1.6.14,

$$A_\xi(\mathcal{T}) = -\nu^2 \mathcal{T} \quad \text{e} \quad A_\xi(X) = -X, \quad \forall X \in \{\mathcal{T}\}^\perp. \quad (2.3)$$

Assim, como  $v_i \in \{\mathcal{T}\}^\perp$ , para todo  $i$  com  $1 \leq i \leq n-1$ , temos que (2.2) se torna

$$A_\xi(A(\mathcal{T})) = -\alpha \nu^2 \mathcal{T} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i. \quad (2.4)$$

Por hipótese,  $A_\xi(A(\mathcal{T})) = A(A_\xi(\mathcal{T}))$ . Logo, novamente por (2.3),

$$A_\xi(A(\mathcal{T})) = A(-\nu^2 \mathcal{T}) = -\nu^2 A(\mathcal{T}). \quad (2.5)$$

Juntando (2.4) e (2.5), obtemos que

$$-\nu^2 A(\mathcal{T}) = -\alpha \nu^2 \mathcal{T} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i.$$

Por (2.1), a equação acima é equivalente a

$$-\nu^2 \left[ \alpha \mathcal{T} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \right] = -\alpha \nu^2 \mathcal{T} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i.$$

Donde segue que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i - \nu^2 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i = 0,$$

isto é,

$$(1 - \nu^2) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i = 0. \quad (2.6)$$

Por hipótese  $\mathcal{T}$  nunca se anula. Na demonstração da Proposição 1.6.14 obtivemos que  $|\mathcal{T}|^2 + \nu^2 = 1$ . Assim,  $1 - \nu^2 = |\mathcal{T}|^2 \neq 0$ . Donde segue que, por (2.6),

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i = 0.$$

Portanto, por (2.1), obtemos

$$A(\mathcal{T}) = \alpha \mathcal{T},$$

isto é,  $\mathcal{T}$  é direção principal de  $\mathcal{M}$  no ponto  $x$  como queríamos.

Suponhamos agora que  $\mathcal{T}$  é direção principal associada ao operador forma  $A$ , isto é, dado  $x \in \mathcal{M}$  vale que  $A(\mathcal{T}(x)) = \alpha \mathcal{T}(x)$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Novamente, vamos omitir o ponto  $x$  para simplificar notação.

Queremos mostrar que  $A \circ A_\xi(X) = A_\xi \circ A(X)$ . Pelo Lema 1.6.16, basta mostrarmos que os autoespaços de  $A_\xi$  são invariantes por  $A$ . Para isso, seja  $w \in T\mathcal{M}$  um autovetor associado à  $A_\xi$ . Como, por hipótese,  $\mathcal{T}$  nunca se anula, pelo Lema 1.6.15, temos que  $w = \beta \mathcal{T}$ , para algum  $\beta \in \mathbb{R}$ , ou  $w \in \{\mathcal{T}\}^\perp$ .

Se  $w = \beta \mathcal{T}$ , então usando (2.3), temos que

$$A_\xi(w) = A_\xi(\beta \mathcal{T}) = \beta A_\xi(\mathcal{T}) = -\beta \nu^2 \mathcal{T} = -\nu^2 w, \quad (2.7)$$

isto é,  $w \in V_{-\nu^2}$ , onde  $V_{-\nu^2}$  denota o autoespaço associado ao autovalor  $-\nu^2$  de  $A_\xi$ . Vamos então mostrar que  $A(w) \in V_{-\nu^2}$ . Como por hipótese  $A(\mathcal{T}) = \alpha \mathcal{T}$ , obtemos

$$A(w) = A(\beta \mathcal{T}) = \beta A(\mathcal{T}) = \alpha \beta \mathcal{T} = \alpha w. \quad (2.8)$$

Assim, por (2.7) e (2.8), temos

$$A_\xi(A(w)) = A_\xi(\alpha w) = \alpha A_\xi(w) = -\alpha \nu^2 w = -\nu^2(\alpha w) = -\nu^2 A(w).$$

Dessa forma,  $A(w) \in V_{-\nu^2}$ , como queríamos.

Por fim, se  $w \in \{\mathcal{T}\}^\perp$ , então novamente por (2.3) temos que  $A_\xi(w) = -w$ , isto é,  $w \in V_{-1}$ , onde  $V_{-1}$  denota o autoespaço associado ao autovalor  $-1$  de  $A_\xi$ . Basta então

mostrar que  $A(w) \in V_{-1}$ . Como  $A$  é autoadjunto e, por hipótese,  $A(\mathcal{T}) = \alpha\mathcal{T}$ , temos que

$$\langle A(w), \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} = \langle w, A(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}} = \langle w, \alpha\mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} = \alpha \langle w, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} = 0.$$

Assim,  $A(w) \in \{\mathcal{T}\}^{\perp}$  e, então, por (2.3) concluímos que  $A_{\xi}(A(w)) = -A(w)$ , isto é,  $A(w) \in V_{-1}$ . ■

Sejam  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$  uma hipersuperfície orientada, com campo normal unitário  $N$ , e seja  $g_s : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , a hipersuperfície paralela a  $g(M)$ . Lembre-se que, por (1.9),

$$g_s(x) = C_{\varepsilon}(s)g(x) + S_{\varepsilon}(s)N(g(x)), \quad (2.9)$$

e, pelo Lema 1.3.2, o vetor normal unitário de  $g_s(M)$  é dado por

$$N_s(x) = -\varepsilon S_{\varepsilon}(s)g(x) + C_{\varepsilon}(s)N(g(x)). \quad (2.10)$$

Defina a hipersuperfície  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$  por

$$f(x, s) = g_s(x) + a(s)\partial_t, \quad (2.11)$$

com  $(x, s) \in M^{n-1} \times I$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto e  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável com derivada positiva.

Veremos agora algumas propriedades relativas a hipersuperfície  $f$  que serão fundamentais na demonstração do próximo teorema.

Antes disso, vamos estabelecer a notação que será utilizada. Seja  $(x, s) \in M^{n-1} \times I$  e  $v \in T_{(x,s)}(M^{n-1} \times I)$ . Identificaremos  $N(g(x))$  com  $N(x)$  e denotaremos o campo coordenado  $\frac{\partial}{\partial s}$  do intervalo  $I$  por  $\partial_s$ . Omitiremos os pontos  $(x, s)$  e  $f(x, s)$  para simplificar notação, exceto em casos em que ocultar tais pontos possam causar algum tipo de confusão.

**Propriedade 2.1.2** *Vale que*

$$df(\partial_s) = N_s(x) + a'(s)\partial_t.$$



**Demonstração:** De fato, por (2.9) e por (2.11), temos

$$\begin{aligned}
 df(\partial_s) &= \frac{\partial f}{\partial s} \\
 &= \frac{\partial}{\partial s}[g_s(x) + a(s)\partial_t] \\
 &= \frac{\partial}{\partial s}[C_\varepsilon(s)g(x) + S_\varepsilon(s)N(x) + a(s)\partial_t] \\
 &= C'_\varepsilon(s)g(x) + S'_\varepsilon(s)N(x) + a'(s)\partial_t.
 \end{aligned}$$

Mas, por (1.8), temos que  $C'_\varepsilon(s) = -\varepsilon S_\varepsilon(s)$  e  $S'_\varepsilon(s) = C_\varepsilon(s)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 df(\partial_s) &= -\varepsilon S_\varepsilon(s)g(x) + C_\varepsilon(s)N(x) + a'(s)\partial_t \\
 &= N_s(x) + a'(s)\partial_t,
 \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Para a próxima propriedade, note que, como  $M \times I$  é uma variedade produto, pelo Lema 1.4.1 podemos escrever

$$T_{(x,s)}(M^{n-1} \times I) = T_x M^{n-1} \oplus T_s I.$$

Assim, denote por  $v_M$  e por  $v_I$  as componentes de  $v$  em  $T_x M^{n-1}$  e em  $T_s I$ , respectivamente, isto é,  $v = v_M + v_I$ . Como o campo  $\partial_s$  é base de  $T_s I \cong I$ , existe um número  $c$ , que depende do ponto  $(x, s)$ , para o qual  $v_I = c\partial_s$ . Donde concluímos que

$$v = v_M + c\partial_s. \quad (2.12)$$

**Propriedade 2.1.3** *Nessas condições, vale que*

$$df(v) = (dg_s)_x(v_M) + cN_s(x) + ca'(s)\partial_t.$$

**Demonstração:** Por (2.12), temos

$$\begin{aligned}
 df(v) &= df(v_M + c\partial_s) \\
 &= df(v_M) + df(c\partial_s) \\
 &= (dg_s)_x(v_M) + c \cdot df(\partial_s).
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Assim, pela Propriedade 2.1.2, temos que

$$\begin{aligned}
 df(v) &= (dg_s)_x(v_M) + c[N_s(x) + a'(s)\partial_t] \\
 &= (dg_s)_x(v_M) + cN_s(x) + ca'(s)\partial_t,
 \end{aligned}$$

como queríamos. ■

**Propriedade 2.1.4** *Podemos escrever*

$$T_{f(x,s)}f(M^{n-1} \times I) = d(g_s)_x(T_x M^{n-1}) \oplus c(x,s)df_{(x,s)}(\partial_s).$$

**Demonstração:** Por (2.13), basta mostrarmos que

$$\langle (dg_s)_x(v_M), cdf(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} = 0.$$

Segue da Propriedade 2.1.2 que

$$\begin{aligned} \langle (dg_s)_x(v_M), cdf(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle (dg_s)_x(v_M), c[N_s(x) + a'(s)\partial_t] \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle (dg_s)_x(v_M), cN_s(x) + ca'(s)\partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= c\langle (dg_s)_x(v_M), N_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} + ca'(s)\langle (dg_s)_x(v_M), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

De agora em diante vamos identificar  $df(\partial_s)$  com  $\partial_s$ .

**Propriedade 2.1.5** *O campo  $\eta$  definido em  $M^{n-1} \times I$  por*

$$\eta(x,s) = -\frac{a'(s)}{b(s)}N_s(x) + \frac{1}{b(s)}\partial_t,$$

onde  $b(s) = \sqrt{1 + (a'(s))^2}$ , é o campo de vetores normal unitário da hipersuperfície  $f$ .

**Demonstração:** Primeiro verificaremos que  $\eta$  define um campo unitário.

De fato, note que

$$\begin{aligned} \langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}} &= \left\langle -\frac{a'(s)}{b(s)}N_s(x) + \frac{1}{b(s)}\partial_t, -\frac{a'(s)}{b(s)}N_s(x) + \frac{1}{b(s)}\partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \frac{(a'(s))^2}{b^2(s)}\langle N_s(x), N_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} - 2\frac{a'(s)}{b^2(s)}\langle N_s(x), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + \frac{1}{b^2(s)}\langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Como  $N_s(x) \in T_{g_s(x)}\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e  $\partial_t$  é um campo tangente na componente real  $\mathbb{R}$ , concluimos que  $N_s(x)$  e  $\partial_t$  são ortonormais. Segue que

$$\langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \frac{(a'(s))^2}{b^2(s)} + \frac{1}{b^2(s)} = \frac{(a'(s))^2 + 1}{b^2(s)} = 1.$$

Agora mostraremos que  $\eta$  define um campo normal a  $f$ .

Para isso, seja  $v \in T_{(x,s)}(M^{n-1} \times I)$ . Usando a Propriedade 2.1.3, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \eta, df(v) \rangle_{\mathcal{P}} &= \left\langle -\frac{a'(s)}{b(s)}N_s(x) + \frac{1}{b(s)}\partial_t, (dg_s)_x(v_M) + cN_s(x) + ca'(s)\partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \\
&= -\frac{a'(s)}{b(s)}\langle N_s(x), (dg_s)_x(v_M) \rangle_{\mathcal{P}} - c\frac{a'(s)}{b(s)}\langle N_s(x), N_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} \\
&\quad - c\frac{(a'(s))^2}{b(s)}\langle N_s(x), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + \frac{1}{b(s)}\langle \partial_t, (dg_s)_x(v_M) \rangle_{\mathcal{P}} \\
&\quad + \frac{c}{b(s)}\langle \partial_t, N_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} + c\frac{a'(s)}{b(s)}\langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Novamente, como  $N_s(x) \in T_{g_s(x)}\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$  e  $\partial_t$  é um campo tangente na componente real  $\mathbb{R}$ , concluímos que  $N_s(x)$  e  $\partial_t$  são ortonormais. Pelo mesmo argumento,  $(dg_s)_x(v_M)$  e  $\partial_t$  são também ortogonais. Além disso,  $(dg_s)_x(v_M)$  e  $N_s(x)$  são os vetores tangente e normal a hipersuperfície  $g_s(M)$  no ponto  $g_s(x)$ , respectivamente, isto é, eles são ortogonais. Dessa forma, a equação (2.14) é equivalente a

$$\langle \eta, df(v) \rangle_{\mathcal{P}} = -c\frac{a'(s)}{b(s)} + c\frac{a'(s)}{b(s)} = 0.$$

Como  $v \in T_{(x,s)}(M^{n-1} \times I)$  é qualquer,  $\eta$  define um campo de vetores ortogonais a hipersuperfície  $f$  e isso conclui a demonstração da propriedade.  $\blacksquare$

**Propriedade 2.1.6** *Vale que*

$$\nu(x, s) = \frac{1}{b(s)}.$$

**Demonstração:** Usando a Propriedade 2.1.5, temos

$$\begin{aligned}
\langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} &= \left\langle -\frac{a'(s)}{b(s)}N_s(x) + \frac{1}{b(s)}\partial_t, \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \\
&= -\frac{a'(s)}{b(s)}\langle N_s(x), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + \frac{1}{b(s)}\langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\
&= \frac{1}{b(s)}. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\partial_t = \mathcal{T} + \nu\eta$ , podemos escrever também

$$\begin{aligned}
\langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle \eta, \mathcal{T} + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} \\
&= \langle \eta, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} + \nu\langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}} \\
&= \nu. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Concluimos então de (2.15) e (2.16) que

$$\nu = \langle \eta, \partial_t \rangle_P = \frac{1}{b(s)}, \quad (2.17)$$

como desejado. ■

Demonstradas as propriedades necessárias, vamos ao principal resultado deste capítulo.

**Teorema 2.1.7** *A aplicação  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  dada por (2.11), define, em pontos regulares, uma hipersuperfície que tem o campo  $\mathcal{T}$  como uma de suas direções principais. Por outro lado, qualquer hipersuperfície  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , com função ângulo  $\nu$  que não se anula em nenhum ponto e que possui o campo  $\mathcal{T}$  como uma de suas direções principais é dada localmente por (2.11).*

**Demonstração:** Primeiro, suponha que  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  é dada por (2.11). Vamos mostrar que o campo  $\mathcal{T}$  é uma de suas direções principais.

Inicialmente, vamos mostrar que o campo  $\partial_s$  é uma direção principal de  $f$ . Lembre que  $\tilde{\nabla}$  denota a conexão de  $\mathbb{E}^{n+2}$  ou de  $\mathbb{L}^{n+2}$  que, por sua vez, coincide com a derivada usual. Neste caso, dado  $(x, s) \in M^{n-1} \times I$ , usando a Propriedade 2.1.5, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta &= d\eta(\partial_s) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial s} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left[ -\frac{a'(s)}{b(s)} N_s(x) + \frac{1}{b(s)} \partial_t \right] \\ &= -\frac{a'(s)}{b(s)} \frac{\partial}{\partial s} (N_s(x)) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right) N_s(x) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{b(s)} \right) \partial_t. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por (2.10), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (N_s(x)) &= \frac{\partial}{\partial s} [-\varepsilon S_\varepsilon(s)g(x) + C_\varepsilon(s)N(x)] \\ &= -\varepsilon S'_\varepsilon(s)g(x) + C'_\varepsilon(s)N(x) \\ &= -\varepsilon \left[ S'_\varepsilon(s)g(x) - \frac{1}{\varepsilon} C'_\varepsilon(s)N(x) \right]. \end{aligned}$$

Usando que  $C'_\varepsilon(s) = -\varepsilon S_\varepsilon(s)$  e  $S'_\varepsilon(s) = C_\varepsilon(s)$ , segue de (2.9) que a equação acima é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (N_s(x)) &= -\varepsilon \left[ C_\varepsilon(s)g(x) - \frac{1}{\varepsilon} \cdot (-\varepsilon S_\varepsilon(s))N(x) \right] \\ &= -\varepsilon [C_\varepsilon(s)g(x) + S_\varepsilon(s)N(x)] \\ &= -\varepsilon g_s(x). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dessa forma, substituindo a equação (2.19) na equação (2.18), obtemos que

$$\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right) N_s(x) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{b(s)} \right) \partial_t + \varepsilon \frac{a'(s)}{b(s)} g_s(x). \quad (2.20)$$

Seja agora  $v \in T_{(x,s)}(M^{n-1} \times I)$  um vetor tal que  $v = v_M$ , isto é,  $v_I = 0$ . Nesse caso, sabemos que  $df(v) = (dg_s)_x(v)$ . Assim, usando (2.20), temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta, (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}} &= \left\langle -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right) N_s(x) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{b(s)} \right) \partial_t + \varepsilon \frac{a'(s)}{b(s)} g_s(x), (dg_s)_x(v) \right\rangle_{\mathcal{P}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right) \langle N_s(x), (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{b(s)} \right) \langle \partial_t, (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\quad + \varepsilon \frac{a'(s)}{b(s)} \langle g_s(x), (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como já vimos,  $(dg_s)_x(v)$  e  $N_s(x)$  são ortogonais. Além disso, como  $(dg_s)_x(v) \in T_{g_s(x)}g_s(M) \subset T_{g_s(x)}\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e  $\partial_t$  é um campo tangente na componente real  $\mathbb{R}$ , concluímos que  $(dg_s)_x(v)$  e  $\partial_t$  são também ortogonais. Assim, a equação (2.21) se torna

$$\langle \tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta, (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}} = \varepsilon \frac{a'(s)}{b(s)} \langle g_s(x), (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}}. \quad (2.22)$$

Afirmamos que

$$\langle \tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta, (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}} = 0. \quad (2.23)$$

De fato, se  $\varepsilon = 0$  a afirmação é trivial.

Se  $\varepsilon = 1$  ou  $\varepsilon = -1$ , então  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  é a esfera  $\mathbb{S}^n$  ou o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , respectivamente. Nesse caso, temos  $\langle g_s(x), g_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} = 1$  ou  $\langle g_s(x), g_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} = -1$ , para  $\varepsilon = 1$  ou  $\varepsilon = -1$ , também respectivamente. Derivando tais expressões em ambos os lados, obtemos que  $\langle g_s(x), (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}} = 0$  em qualquer caso. Isso demonstra a afirmação.

Como  $\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta$  possui uma componente em  $T_{f(x,s)}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$  e outra componente em  $[T_{f(x,s)}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})]^\perp$ , podemos escrever

$$\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta = (\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta)^T + (\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta)^\perp.$$

Se  $\bar{\nabla}$  denota a conexão Riemanniana de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ , a igualdade acima é equivalente a

$$\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta = \bar{\nabla}_{\partial_s} \eta + (\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta)^\perp. \quad (2.24)$$

Dessa forma, substituindo (2.24) em (2.23), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_s} \eta + (\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta)^\perp, (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_s} \eta, (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Novamente,  $\bar{\nabla}_{\partial_s} \eta$  possui uma componente no fibrado tangente e outra componente no fibrado normal de  $f$ , isto é,

$$\bar{\nabla}_{\partial_s} \eta = (\bar{\nabla}_{\partial_s} \eta)^T + (\bar{\nabla}_{\partial_s} \eta)^\perp.$$

Pela Proposição 1.2.3, vale que

$$(\bar{\nabla}_{\partial_s} \eta)^T = -A_\eta(\partial_s) = -A(\partial_s),$$

em que  $A$  denota o operador forma associado ao vetor normal unitário  $\eta$ . Assim, concluímos que

$$\bar{\nabla}_{\partial_s} \eta = -A(\partial_s) + (\bar{\nabla}_{\partial_s} \eta)^\perp. \quad (2.26)$$

Logo, substituindo (2.26) em (2.25), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle -A(\partial_s) + (\bar{\nabla}_{\partial_s} \eta)^\perp, (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= -\langle A(\partial_s), (dg_s)_x(v) \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

É fato que  $A(\partial_s) \in T_{f(x,s)}f(M^{n-1} \times I)$ . Da equação (2.27), temos que  $A(\partial_s)$  não possui componente em  $d(g_s)_x(T_x M^{n-1})$ . Assim, da Propriedade 2.1.4, concluímos que

$$A(\partial_s) = c\partial_s. \quad (2.28)$$

Isto é, o campo  $\partial_s$  é uma direção principal da hipersuperfície  $f$  cuja curvatura principal associada é  $c$ .

Usando as Propriedades 2.1.5 e 2.1.6, temos

$$\begin{aligned} df(\mathcal{T}) &= \partial_t - \nu\eta \\ &= \partial_t - \frac{1}{b(s)} \cdot \left[ -\frac{a'(s)}{b(s)} N_s(x) + \frac{1}{b(s)} \partial_t \right] \\ &= \partial_t + \frac{a'(s)}{b^2(s)} N_s(x) - \frac{1}{b^2(s)} \partial_t \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{b^2(s)} \right] \partial_t + \frac{a'(s)}{b^2(s)} N_s(x) \\ &= \left[ \frac{b^2(s) - 1}{b^2(s)} \right] \partial_t + \frac{a'(s)}{b^2(s)} N_s(x). \end{aligned}$$

Como  $b(s) = \sqrt{1 + (a'(s))^2}$ , usando a Propriedade 2.1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
 df(\mathcal{T}) &= \left[ \frac{(a'(s))^2}{b^2(s)} \right] \partial_t + \frac{a'(s)}{b^2(s)} N_s(x) \\
 &= \frac{a'(s)}{b^2(s)} [a'(s) \partial_t + N_s(x)] \\
 &= \frac{a'(s)}{b^2(s)} df(\partial_s) \\
 &= df \left( \frac{a'(s)}{b^2(s)} \partial_s \right). \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

Sendo  $f$  imersão, temos que a diferencial  $df$  é injetiva. Assim, por (2.29) concluímos que

$$\mathcal{T} = \frac{a'(s)}{b^2(s)} \partial_s. \tag{2.30}$$

Por hipótese  $a'(s) > 0$ . Logo, podemos reescrever (2.30) da seguinte maneira

$$\partial_s = \frac{b^2(s)}{a'(s)} \mathcal{T}. \tag{2.31}$$

Finalmente, primeiro aplicando  $A$  em ambos os lados de (2.30) e depois usando, nesta ordem, a equação (2.28) e a equação (2.31), obtemos

$$A(\mathcal{T}) = A \left( \frac{a'(s)}{b^2(s)} \partial_s \right) = \frac{a'(s)}{b^2(s)} A(\partial_s) = c \frac{a'(s)}{b^2(s)} \partial_s = c \frac{a'(s)}{b^2(s)} \frac{b^2(s)}{a'(s)} \mathcal{T} = c \mathcal{T}.$$

Isso mostra que  $\mathcal{T}$  é uma direção principal de  $f$  com curvatura principal associada dada por  $c$ , como queríamos demonstrar.

Vamos então mostrar a segunda parte do teorema.

Seja  $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , uma hipersuperfície com função ângulo  $\nu$  que não se anula em nenhum ponto e que possui o campo  $\mathcal{T}$  como uma de suas direções principais. Queremos mostrar que a variedade Riemanniana  $\mathcal{M}^n$  é um produto do tipo  $M^{n-1} \times I$  e a hipersuperfície  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  é dada por (2.11).

Pelo Lema 1.6.5, temos que  $grad h = \mathcal{T}$ . Dessa forma, usando o Lema 1.6.10, concluímos que a distribuição ortogonal é integrável. Logo, para cada  $p \in \mathcal{M}$ , existe uma variedade integral  $\bar{M}$  tal que  $T_p \bar{M} = D(p)$ . Assim, existe um difeomorfismo local  $\psi : M \times I \rightarrow \mathcal{M}$ , onde  $I$  é um intervalo aberto contendo 0, de tal modo que:

- (i) fixado  $x \in M$  qualquer, a aplicação  $\psi(x, \cdot) = \psi_x : I \rightarrow \mathcal{M}$  é uma curva integral do campo  $\mathcal{T}$ .

(ii) fixado  $s \in I$  qualquer, a aplicação  $\psi(\cdot, s) = \psi_s : M \longrightarrow \mathcal{M}$  nos fornece o conjunto das variedades integrais da distribuição  $D = \{\mathcal{T}\}^\perp$ , isto é, para cada  $s$  fixado, a imagem  $\psi_s(M) = \bar{M}$  é uma variedade integral de  $D$ . Ou ainda, dado  $p \in \mathcal{M}$ , existe  $x \in M$  tal que  $\psi_s(x) = p$  e  $T_{\psi_s(x)}\bar{M} = T_p\bar{M} = D(p)$ . De agora em diante, identificaremos  $M$  com  $\bar{M}$  para simplificar notação.

Seja  $(x, s) \in M \times I$  e  $p \in \mathcal{M}$  tal que  $\psi(x, s) = p$ . Lembre-se que, do Lema 1.4.1, podemos escrever

$$T_{(x,s)}(M \times I) = T_x M \oplus T_s I$$

Considere  $v \in T_{(x,s)}(M \times I)$  de tal forma que  $v$  só possui componente em  $T_x M$ , isto é,  $v = v_M$ . Nesse caso, pelo item (ii) acima, vale que

$$d\psi_{(x,s)}(v) = d(\psi_s)_x(v_M) \in T_p \bar{M} = \{\mathcal{T}(p)\}^\perp. \quad (2.32)$$

Defina a aplicação  $F := f \circ \psi : M \times I \longrightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ .

**Afirmção 2.1.8**  $\langle F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} : M \times I \longrightarrow \mathbb{R}$  depende apenas de  $s \in I$ .

De fato, dados  $q = (x, s) \in M \times I$  e  $X \in \mathcal{X}(M)$ , temos

$$X(q)\langle F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = \langle \bar{\nabla}_{X(q)} F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + \langle F, \bar{\nabla}_{X(q)} \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}. \quad (2.33)$$

Pela Proposição 1.6.2, sabemos que  $\partial_t$  é um campo paralelo em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ , isto é, vale que  $\bar{\nabla}_{X(q)} \partial_t = 0$ . Então, (2.33) se torna

$$X(q)\langle F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = \langle \bar{\nabla}_{X(q)} F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}. \quad (2.34)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X(q)} F &= (\tilde{\nabla}_{X(q)} F)^T + (\tilde{\nabla}_{X(q)} F)^\perp \\ &= \bar{\nabla}_{X(q)} F + (\tilde{\nabla}_{X(q)} F)^\perp. \end{aligned}$$

Assim, como  $\langle (\tilde{\nabla}_{X(q)} F)^\perp, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = 0$ , podemos reescrever (2.34) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} X(q)\langle F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle \bar{\nabla}_{X(q)} F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + \langle (\tilde{\nabla}_{X(q)} F)^\perp, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle \bar{\nabla}_{X(q)} F + (\tilde{\nabla}_{X(q)} F)^\perp, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle \tilde{\nabla}_{X(q)} F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$



Como  $\tilde{\nabla}$  coincide com a derivada usual, obtemos que (2.35) é equivalente a

$$\begin{aligned}
 X(q)\langle F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle dF(X), df(\mathcal{T}) + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} \\
 &= \langle d(f \circ \psi)(X), df(\mathcal{T}) + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} \\
 &= \langle df(d\psi(X)), df(\mathcal{T}) + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} \\
 &= \langle df(d\psi(X)), df(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}} + \nu \langle df(d\psi(X)), \eta \rangle_{\mathcal{P}} \\
 &= \langle df(d\psi(X)), df(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}}.
 \end{aligned}$$

Sendo  $f$  é imersão isométrica, a igualdade acima se torna

$$X(q)\langle F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = \langle d\psi(X), \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (2.36)$$

Por fim, como  $X \in \mathcal{X}(M)$ , isto é,  $X(q) \in T_x M$ , denotando  $\psi(q) = p$ , obtemos de (2.32) que  $d\psi_q(X(q)) \in \{\mathcal{T}(p)\}^{\perp}$ . Logo, (2.36) se torna

$$X(q)\langle F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = 0.$$

Segue que  $\langle F, \partial_t \rangle$  é constante ao longo de  $M$ , isto é, depende apenas de  $s \in I$ . Com isso demonstramos a afirmação 2.1.8.

Podemos então escrever

$$\rho(s) = \langle F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}(q), \quad (2.37)$$

onde  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $q = (x, s)$ ,  $x \in M$  um ponto qualquer. Note também que  $\rho$  é uma aplicação diferenciável.

Lembre-se da projeção natural  $\pi : \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$  definida por  $\pi(p, r) = p$ , para todo  $(p, r) \in \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$ . Fixe  $x \in M$  qualquer. Pelo item (i),  $\psi_x = \gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  é uma curva integral do campo  $\mathcal{T}$ . Dessa forma, considerando a aplicação

$$F(x, \cdot) = F_x = f \circ \psi_x = f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}, \quad (2.38)$$

podemos definir a curva

$$\alpha := \pi \circ F_x = \pi \circ f \circ \psi_x = \pi \circ f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n. \quad (2.39)$$

**Afirmação 2.1.9**  $\alpha$  é uma pré-geodésica de  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ .

De fato, primeiro mostraremos que a curva  $\gamma$  é uma pré-geodésica de  $\mathcal{M}$ .

Pelo Lema 1.6.5, temos que  $\mathcal{T} = \text{grad}h$ . Logo, pelo Lema 1.6.12, se mostrarmos que  $|\mathcal{T}|$  é constante ao longo da distribuição ortogonal  $D = \{\mathcal{T}\}^\perp$ , concluímos que suas curvas integrais são pré-geodésicas de  $\mathcal{M}$ .

Seja  $X$  um campo em  $D = \{\mathcal{T}\}^\perp$ . Pela equação (1.38), temos  $\nabla_X \mathcal{T} = \nu A(X)$ . Assim,

$$X(|\mathcal{T}|^2) = X\langle \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_p = 2\langle \nabla_X \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_p = 2\nu\langle A(X), \mathcal{T} \rangle_p.$$

Sendo  $A$  é autoadjunto, obtemos

$$X(|\mathcal{T}|^2) = 2\nu\langle X, A(\mathcal{T}) \rangle_p. \quad (2.40)$$

Por fim, sabemos por hipótese que  $\mathcal{T}$  é direção principal da hipersuperfície  $f$ , isto é, existe um número  $c$  tal que  $A(\mathcal{T}) = c\mathcal{T}$ . Dessa forma, (2.40) se torna

$$X(|\mathcal{T}|^2) = 2\nu\langle X, c\mathcal{T} \rangle_p = 2c\nu\langle X, \mathcal{T} \rangle_p = 0.$$

Concluímos que  $|\mathcal{T}|^2$  é constante ao longo de  $D = \{\mathcal{T}\}^\perp$ . Consequentemente,  $|\mathcal{T}|$  também é constante em  $D$ . Mostramos então que  $\gamma$  é pré-geodésica de  $\mathcal{M}$ , como queríamos.

Ainda, como  $|\mathcal{T}|^2 + \nu^2 = 1$ , temos que  $\nu$  também é constante em  $D = \{\mathcal{T}\}^\perp$ .

O próximo passo na demonstração da Afirmação 2.1.9 é calcular o vetor tangente  $\alpha'(s)$ . Note que, pela regra da cadeia, como  $\alpha = \pi \circ f \circ \gamma$ , temos que

$$\alpha'(s) = d\pi(df(\gamma'(s))).$$

Como  $v = df(\gamma'(s)) \in T_{f(\gamma(s))}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$ , podemos escrever  $v = v_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + v_{\mathbb{R}}$ , onde  $v_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}$  e  $v_{\mathbb{R}}$  são as componentes de  $v$  nos espaços tangentes a  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e a  $\mathbb{R}$ , respectivamente. Logo,

$$\alpha'(s) = d\pi(v) = v_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}. \quad (2.41)$$

Por outro lado, sabemos que  $T_{f(\gamma(s))}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{E}^{n+2}$  (ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ ), assim podemos escrever o vetor  $v$  usando as coordenadas de  $\mathbb{E}^{n+2}$  (ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ ) da seguinte maneira

$$v = df(\gamma'(s)) = (v_1(s), v_2(s), \dots, v_{n+1}(s), v_{n+2}(s)), \quad (2.42)$$

onde  $v_{\mathbb{Q}^n} = (v_1(s), v_2(s), \dots, v_{n+1}(s), 0)$  e  $v_{\mathbb{R}} = (0, 0, \dots, 0, v_{n+2}(s))$ . Logo, de (2.41) e (2.42), segue que

$$\alpha'(s) = v_{\mathbb{Q}^n} = v - v_{\mathbb{R}} = v - \langle v, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t. \quad (2.43)$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\alpha'(s)|^2 &= \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle v - \langle v, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t, v - \langle v, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle v, v \rangle_{\mathcal{P}} - 2\langle v, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle v, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + \langle v, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle v, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle v, v \rangle_{\mathcal{P}} - 2\langle v, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}^2 + \langle v, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}^2 \\ &= \langle v, v \rangle_{\mathcal{P}} - \langle v, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Como  $\gamma$  é uma curva integral do campo  $\mathcal{T}$ , temos que  $v = df(\gamma'(s)) = df(\mathcal{T})$  e, assim, usando que  $\partial_t = df(\mathcal{T}) + \nu\eta$ , concluímos que (2.44) é equivalente a

$$\begin{aligned} |\alpha'(s)|^2 &= \langle df(\mathcal{T}), df(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}} - \langle df(\mathcal{T}), df(\mathcal{T}) + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}}^2 \\ &= \langle df(\mathcal{T}), df(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}} - [\langle df(\mathcal{T}), df(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}} + \nu \langle df(\mathcal{T}), \eta \rangle_{\mathcal{P}}]^2 \\ &= \langle df(\mathcal{T}), df(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}} - \langle df(\mathcal{T}), df(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}}^2 \\ &= |df(\mathcal{T})|^2 - |df(\mathcal{T})|^4 \\ &= |df(\mathcal{T})|^2(1 - |df(\mathcal{T})|^2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Como  $f$  é imersão isométrica, temos que  $|df(\mathcal{T})|^2 = |\mathcal{T}|^2$ . Além disso,  $|\mathcal{T}|^2 + \nu^2 = 1$ . Assim, (2.45) é equivalente a

$$|\alpha'(s)|^2 = \nu^2 |\mathcal{T}|^2, \quad (2.46)$$

ou ainda

$$|\alpha'(s)| = \nu |\mathcal{T}|. \quad (2.47)$$

O comprimento de arco da curva  $\alpha$  é a função

$$l(s) = \int_0^s |\alpha'(u)| du. \quad (2.48)$$

Denote por  $\hat{\beta}$  a reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco, isto é,  $\alpha(s) = \hat{\beta}(l(s))$ . Temos que

$$\hat{\beta}'(l(s)) = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|},$$

donde  $|\hat{\beta}'(l)| = 1$ .

Queremos mostrar que  $\alpha$  é uma pré-geodésica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , isto é, queremos mostrar que  $\hat{\beta}$  é uma geodésica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Assim, denotando a conexão de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  por  $\nabla^1$ , temos que mostrar que  $\nabla_{\hat{\beta}'}^1 \hat{\beta}' = 0$ .

Como podemos identificar  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  com  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \{0\} \subset \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ , podemos também pensar em  $\hat{\beta}$  como uma curva em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  que não possui componente na fibra  $\mathbb{R}$ . Dessa forma, temos que  $(\hat{\beta})'_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} = \hat{\beta}'$ , isto é,  $(\hat{\beta})'_{\mathbb{R}} = 0$ . Assim, se  $\nabla^2$  denota a conexão da fibra  $\mathbb{R}$ , do Corolário 1.4.3, temos que

$$\bar{\nabla}_{\hat{\beta}'} \hat{\beta}' = \nabla_{(\hat{\beta})'_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}}^1 (\hat{\beta})'_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + \nabla_{(\hat{\beta})'_{\mathbb{R}}}^2 (\hat{\beta})'_{\mathbb{R}} = \nabla_{\hat{\beta}'}^1 \hat{\beta}'.$$

Como  $\bar{\nabla}_{\hat{\beta}'} \hat{\beta}' = (\tilde{\nabla}_{\hat{\beta}'} \hat{\beta}')^T$ , vamos mostrar que

$$(\tilde{\nabla}_{\hat{\beta}'} \hat{\beta}')^T = 0. \quad (2.49)$$

Para isso, inicialmente, vamos calcular  $\tilde{\nabla}_{\hat{\beta}'} \hat{\beta}'$ . Temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\hat{\beta}'} \hat{\beta}' &= \tilde{\nabla}_{\frac{\alpha'}{|\alpha'|}} \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \\ &= \frac{1}{|\alpha'|} \tilde{\nabla}_{\alpha'} \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \\ &= \frac{1}{|\alpha'|} \tilde{\nabla}_{(\mathcal{T} - \langle \mathcal{T}, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t)} \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \\ &= \frac{1}{|\alpha'|} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} \frac{\alpha'}{|\alpha'|} - \frac{1}{|\alpha'|} \langle \mathcal{T}, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \tilde{\nabla}_{\partial_t} \frac{\alpha'}{|\alpha'|}. \end{aligned}$$

Como  $\hat{\beta}' = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}$  não possui componente na fibra  $\mathbb{R}$ , concluímos que sua derivada na direção  $\partial_t$  é nula, isto é,  $\tilde{\nabla}_{\partial_t} \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = 0$ . Assim, a igualdade acima se torna

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\hat{\beta}'} \hat{\beta}' &= \frac{1}{|\alpha'|} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \\ &= \frac{1}{\nu|\mathcal{T}|} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} \left\{ \frac{1}{\nu|\mathcal{T}|} [df(\mathcal{T}) - \langle df(\mathcal{T}), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t] \right\} \\ &= \frac{1}{\nu|\mathcal{T}|} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} \left[ \frac{1}{\nu|\mathcal{T}|} df(\mathcal{T}) - \frac{1}{\nu|\mathcal{T}|} \langle df(\mathcal{T}), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t \right] \\ &= \frac{1}{\nu|\mathcal{T}|} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} \left[ df \left( \nu^{-1} \frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|} \right) - \left\langle df \left( \nu^{-1} \frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|} \right), \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \partial_t \right] \\ &= \nu^{-1} |\mathcal{T}|^{-1} \left\{ \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} \left[ df \left( \nu^{-1} \frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|} \right) \right] - \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} \left[ \left\langle df \left( \nu^{-1} \frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|} \right), \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \partial_t \right] \right\} \quad (2.50) \end{aligned}$$

Denotando  $\hat{\mathcal{T}} = \frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|}$ , temos que (2.50) é equivalente a

$$\tilde{\nabla}_{\hat{\beta}'} \hat{\beta}' = \nu^{-1} |\mathcal{T}|^{-1} \{ \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} [df(\nu^{-1} \hat{\mathcal{T}})] - \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} [\langle df(\nu^{-1} \hat{\mathcal{T}}), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t] \}. \quad (2.51)$$

Logo, mostrar que vale (2.49) é equivalente a mostrar que

$$\{ \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} [df(\nu^{-1} \hat{\mathcal{T}})] - \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} [\langle df(\nu^{-1} \hat{\mathcal{T}}), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t] \}^T = 0. \quad (2.52)$$

Analisaremos cada uma das parcelas em (2.52) separadamente.

Temos que

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} [df(\nu^{-1} \hat{\mathcal{T}})] = \nu^{-1} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} [df(\hat{\mathcal{T}})] + \mathcal{T}(\nu^{-1}) df(\hat{\mathcal{T}}). \quad (2.53)$$

Agora note que

$$\mathcal{T}(\nu^{-1}) = -\frac{1}{\nu^2} \mathcal{T}(\nu) = -\nu^{-2} \mathcal{T}(\nu). \quad (2.54)$$

Da equação (1.38), temos que  $\nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = \nu A(\mathcal{T})$ . Logo, vale que

$$\mathcal{T}(|\mathcal{T}|^2) = 2 \langle \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} = 2 \langle \nu A(\mathcal{T}), \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} = 2\nu \langle A(\mathcal{T}), \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Novamente por (1.38), temos que  $\mathcal{T}(\nu) = -\langle A(\mathcal{T}), \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}}$ , donde concluimos que a igualdade acima é equivalente a

$$\mathcal{T}(|\mathcal{T}|^2) = -2\nu \mathcal{T}(\nu). \quad (2.55)$$

Segue de (2.54) e de (2.55) que

$$\mathcal{T}(\nu^{-1}) = \frac{1}{2} \nu^{-3} \mathcal{T}(|\mathcal{T}|^2) = \frac{1}{2} \nu^{-3} \cdot 2 |\mathcal{T}| \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) = \nu^{-3} |\mathcal{T}| \mathcal{T}(|\mathcal{T}|). \quad (2.56)$$

No que segue, vamos considerar  $f$  como uma imersão isométrica em  $\mathbb{E}^{n+2}$  (ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ ).

Como já vimos,  $|\mathcal{T}|$  é constante ao longo de  $\{\mathcal{T}\}^{\perp}$  e, como consequência deste fato, usando o Lema 1.6.12 concluimos que as curvas integrais de  $\mathcal{T}$  são pré-geodésicas de  $\mathcal{M}$ , isto é, vale que  $\nabla_{\hat{\mathcal{T}}} \hat{\mathcal{T}} = 0$ . Assim,

$$0 = \nabla_{\hat{\mathcal{T}}} \hat{\mathcal{T}} = \nabla_{\frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|}} \hat{\mathcal{T}} = \frac{1}{|\mathcal{T}|} \nabla_{\mathcal{T}} \hat{\mathcal{T}},$$

donde vale que  $\nabla_{\mathcal{T}} \hat{\mathcal{T}} = 0$ . Logo, considerando a segunda forma fundamental de  $f$ ,

$$B : T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \longrightarrow (T\mathcal{M})^{\perp},$$

temos

$$B(\mathcal{T}, \hat{\mathcal{T}}) = \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} df(\hat{\mathcal{T}}) - \nabla_{\mathcal{T}} \hat{\mathcal{T}} = \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} df(\hat{\mathcal{T}}).$$

Isto é,  $\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} df(\hat{\mathcal{T}}) \in (T\mathcal{M})^{\perp}$ . Denotemos por  $\zeta$  o campo de vetores em  $\mathbb{E}^{n+2}$ , se  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ , ou em  $\mathbb{L}^{n+2}$ , se  $\varepsilon = -1$ , de forma que  $\zeta$  é o campo normal ao espaço produto  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$ . Note que, quando  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , vale que  $\zeta = \xi$ , onde  $\xi$  é o campo definido em (1.15). Por outro lado, se  $\varepsilon = 0$ , então  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n = \mathbb{E}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ , donde  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{E}^n \times \mathbb{E} \subset \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{E} \approx \mathbb{E}^{n+2}$ . Assim, podemos definir  $\zeta = e_{n+1}$ , onde  $e_{n+1}$  denota o vetor de  $\mathbb{E}^{n+2}$  com a  $(n+1)$ -ésima coordenada igual a 1 e as outras  $n+1$  coordenadas nulas.

A restrição de  $\zeta$  a  $\mathcal{M}$  também é ortogonal a hipersuperfície  $f$ . Dessa forma, o conjunto de vetores ortogonais  $\{\eta, \zeta\}$  é base de  $(T\mathcal{M})^{\perp}$ . Logo, existem funções  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  para as quais

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} df(\hat{\mathcal{T}}) = \lambda_1 \eta + \lambda_2 \zeta. \quad (2.57)$$

Assim,

$$\langle \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} df(\hat{\mathcal{T}}), \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \langle \lambda_1 \eta + \lambda_2 \zeta, \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \lambda_1 \langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}} + \lambda_2 \langle \zeta, \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \lambda_1.$$

Por outro lado, usando a definição do operador  $A$  dada em (1.6), obtemos que

$$\langle \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} df(\hat{\mathcal{T}}), \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \langle B(\mathcal{T}, \hat{\mathcal{T}}), \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \langle A(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Concluimos então que  $\lambda_1 = \langle A(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}}$ . De forma análoga, vale que  $\lambda_2 = c \langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}}$ , onde  $A_{\zeta}$  denota o operador forma associado ao vetor  $\zeta$  e

$$c = c(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{se } \varepsilon \in \{-1, 1\}, \\ 1, & \text{se } \varepsilon = 0. \end{cases}.$$

Portanto, através de (2.57) podemos escrever

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} df(\hat{\mathcal{T}}) = \langle A(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} \eta + c \langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} \zeta. \quad (2.58)$$

Observe agora que, como  $\nabla_{\mathcal{T}} \hat{\mathcal{T}} = 0$ , temos

$$T \langle \hat{\mathcal{T}}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} = \langle \nabla_{\mathcal{T}} \hat{\mathcal{T}}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} + \langle \hat{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} = \langle \hat{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Por outro lado,

$$T \langle \hat{\mathcal{T}}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} = T \left\langle \frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|}, \mathcal{T} \right\rangle_{\mathcal{P}} = \mathcal{T} \left( \frac{1}{|\mathcal{T}|} \langle \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} \right) = \mathcal{T} \left( \frac{1}{|\mathcal{T}|} |\mathcal{T}|^2 \right) = \mathcal{T} (|\mathcal{T}|).$$

Dessa forma, juntando as duas últimas igualdades, concluímos que

$$\mathcal{T}(|\mathcal{T}|) = \langle \hat{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}}. \quad (2.59)$$

Da equação (1.38), sabemos que  $\nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = \nu A(\mathcal{T})$ . Assim, como por hipótese  $\nu$  nunca se anula, temos que  $A(\mathcal{T}) = \frac{1}{\nu} \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T}$ . Então, por (2.59), temos

$$\langle A(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} = \left\langle \frac{1}{\nu} \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T}, \hat{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{P}} = \frac{1}{\nu} \langle \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T}, \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} = \frac{1}{\nu} \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) = \nu^{-1} \mathcal{T}(|\mathcal{T}|). \quad (2.60)$$

Portanto, usando (2.60) em (2.58), podemos escrever

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} df(\hat{\mathcal{T}}) = \nu^{-1} \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) \eta + c \langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} \zeta. \quad (2.61)$$

Substituindo (2.61) e (2.56) em (2.53), obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} [df(\nu^{-1} \hat{\mathcal{T}})] &= \nu^{-1} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} [df(\hat{\mathcal{T}})] + \mathcal{T}(\nu^{-1}) df(\hat{\mathcal{T}}) \\ &= \nu^{-1} [\nu^{-1} \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) \eta + c \langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} \zeta] + \nu^{-3} |\mathcal{T}| \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) df(\hat{\mathcal{T}}) \\ &= \nu^{-2} \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) \eta + c \nu^{-1} \langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} \zeta + \nu^{-3} |\mathcal{T}| \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) df(\hat{\mathcal{T}}) \\ &= \nu^{-3} \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) [|\mathcal{T}| df(\hat{\mathcal{T}}) + \nu \eta] + c \nu^{-1} \langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} \zeta \\ &= \nu^{-3} \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) \left[ |\mathcal{T}| df \left( \frac{\mathcal{T}}{|\mathcal{T}|} \right) + \nu \eta \right] + c \nu^{-1} \langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} \zeta \\ &= \nu^{-3} \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) [df(\mathcal{T}) + \nu \eta] + c \nu^{-1} \langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} \zeta. \end{aligned}$$

Como  $\partial_t = df(\mathcal{T}) + \nu \eta$ , temos

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} [df(\nu^{-1} \hat{\mathcal{T}})] = \nu^{-3} \mathcal{T}(|\mathcal{T}|) \partial_t + c \nu^{-1} \langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{P}} \zeta. \quad (2.62)$$

Agora vamos calcular a segunda componente  $\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} [\langle df(\nu^{-1} \hat{\mathcal{T}}), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \partial_t]$  de (2.52).

Podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle df(\nu^{-1} \hat{\mathcal{T}}), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} &= \left\langle df \left( \frac{1}{\nu |\mathcal{T}|} \mathcal{T} \right), \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \frac{1}{\nu |\mathcal{T}|} \langle df(\mathcal{T}), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \frac{1}{\nu |\mathcal{T}|} \langle \partial_t - \nu \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \frac{1}{\nu |\mathcal{T}|} [\langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} - \nu \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}] \\ &= \frac{1}{\nu |\mathcal{T}|} [1 - \nu \langle \eta, df(\mathcal{T}) + \nu \eta \rangle_{\mathcal{P}}] \\ &= \frac{1}{\nu |\mathcal{T}|} [1 - \nu \langle \eta, df(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}} - \nu^2 \langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}}] \\ &= \frac{1}{\nu |\mathcal{T}|} (1 - \nu^2). \end{aligned}$$

Por sua vez, como  $\nu^2 + |\mathcal{T}|^2 = 1$ , a igualdade acima é equivalente a

$$\langle df(\nu^{-1}\hat{\mathcal{T}}), \partial_t \rangle_p = \nu^{-1} \frac{|\mathcal{T}|^2}{|\mathcal{T}|} = \nu^{-1} |\mathcal{T}|. \quad (2.63)$$

Além disso, usando (2.56), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\nu^{-1}|\mathcal{T}|) &= \nu^{-1}\mathcal{T}(|\mathcal{T}|) + |\mathcal{T}|\mathcal{T}(\nu^{-1}) \\ &= \nu^{-1}\mathcal{T}(|\mathcal{T}|) + |\mathcal{T}| \cdot \nu^{-3}|\mathcal{T}|\mathcal{T}(|\mathcal{T}|) \\ &= \nu^{-1}\mathcal{T}(|\mathcal{T}|) + \nu^{-3}|\mathcal{T}|^2\mathcal{T}(|\mathcal{T}|) \\ &= \nu^{-3}\mathcal{T}(|\mathcal{T}|)[|\mathcal{T}|^2 + \nu^2] \\ &= \nu^{-3}\mathcal{T}(|\mathcal{T}|). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Logo, por (2.63) e por (2.64), concluímos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}[\langle df(\nu^{-1}\hat{\mathcal{T}}), \partial_t \rangle_p \partial_t] &= \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}(\nu^{-1}|\mathcal{T}|\partial_t) \\ &= \nu^{-1}|\mathcal{T}|\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\partial_t + \mathcal{T}(\nu^{-1}|\mathcal{T}|)\partial_t \\ &= \nu^{-3}\mathcal{T}(|\mathcal{T}|)\partial_t. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Por fim, através de (2.62) e de (2.65), obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}[df(\nu^{-1}\hat{\mathcal{T}})] - \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}[\langle df(\nu^{-1}\hat{\mathcal{T}}), \partial_t \rangle_p \partial_t] &= \nu^{-3}\mathcal{T}(|\mathcal{T}|)\partial_t + c\nu^{-1}\langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_p \zeta - \nu^{-3}\mathcal{T}(|\mathcal{T}|)\partial_t \\ &= c\nu^{-1}\langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_p \zeta. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Como  $\zeta$  é campo de vetores normais a  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$ , da igualdade acima concluímos que

$$\{\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}[df(\nu^{-1}\hat{\mathcal{T}})] - \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}[\langle df(\nu^{-1}\hat{\mathcal{T}}), \partial_t \rangle_p \partial_t]\}^T = [c\nu^{-1}\langle A_{\zeta}(\mathcal{T}), \hat{\mathcal{T}} \rangle_p \zeta]^T = 0,$$

que é a igualdade (2.52). Isso mostra a Afirmação 2.1.9, isto é,  $\alpha$  é uma pré-geodésica de  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ .

Agora, vamos ao passo final da demonstração do Teorema.

Uma vez que  $\mathcal{T}$  e  $\nu$  são constantes ao longo da distribuição ortogonal  $D = \{\mathcal{T}\}^{\perp}$ , existe uma função suave  $r : I \rightarrow \mathbb{R}$  de tal modo que

$$r = (|\mathcal{T}| \cdot \nu) \circ \psi = (|\mathcal{T}| \circ \psi) \cdot (\nu \circ \psi).$$

Donde, dado  $(x, s) \in \mathbb{M}^{n-1} \times I$ , temos

$$r(s) = |\mathcal{T}|(\psi(x, s)) \cdot \nu(\psi(x, s)).$$



Defina  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\varphi(s) = \int_0^s r(\tau) d\tau. \quad (2.67)$$

Usando que  $|\alpha'| = |\mathcal{T}|\nu$  (como vimos em (2.47)), a igualdade acima se torna

$$\varphi'(s) = r(s) = |\mathcal{T}|(\psi(\cdot, s)) \cdot \nu(\psi(\cdot, s)) = |\alpha'(s)|. \quad (2.68)$$

Concluimos, então, de (2.67) e de (2.68), que  $\varphi$  é o comprimento de arco de  $\alpha$ .

Lembre-se que, pela Afirmação 2.1.8, a função  $\rho$  dada por  $\rho = \langle F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}$  depende apenas de  $s$ , isto é,  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim, se  $\varphi(I) = J$ , escrevendo  $\varphi(s) = z \in J$ , definimos a função  $a : J \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$a(z) = a(\varphi(s)) = \rho(s) = (\rho \circ \varphi^{-1})(z).$$

Definimos ainda  $\bar{\psi} : M^{n-1} \times J \rightarrow \mathcal{M}$ , por

$$\bar{\psi}(x, z) = \psi(x, \varphi^{-1}(z)) = \psi(x, s).$$

A aplicação

$$f \circ \bar{\psi} : M^{n-1} \times J \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$$

é tal que, dado  $(x, z) \in M^{n-1} \times J$ ,

$$(f \circ \bar{\psi})(x, z) = (f \circ \psi)(x, \varphi^{-1}(z)) = (f \circ \psi)(x, s) \quad (2.69)$$

Denote por  $G^2$ , definida em  $M^{n-1} \times J$ , a componente de  $(f \circ \bar{\psi})(x, z)$  em  $\mathbb{R}$ , isto é,  $G^2(x, z) = (\sigma \circ f \circ \bar{\psi})(x, z)$ . Comparar  $(\sigma \circ f \circ \bar{\psi})(x, z)$  nada mais é do que olhar para  $F(x, s) = (f \circ \bar{\psi})(x, z)$  como um vetor posição em  $\mathbb{E}^{n+2}$  (ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ ) e projetá-lo sobre a fibra  $\mathbb{R}$ . Assim, temos

$$G^2(x, z) = Proj_{\partial_t} F(x, s) = \frac{\langle F(x, s), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}}{\langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}} \partial_t = \rho(s) \partial_t = a(z) \partial_t. \quad (2.70)$$

Agora, denotando por  $G^1(x, z)$ , com  $G^1 : M^{n-1} \times J \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ , a componente de  $(f \circ \bar{\psi})(x, z)$  em  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ , isto é,  $G^1(x, z) = (\pi \circ f \circ \bar{\psi})(x, z)$ , podemos escrever

$$F(x, s) = (f \circ \bar{\psi})(x, z) = G^1(x, z) + G^2(x, z) = G^1(x, z) + a(z) \partial_t. \quad (2.71)$$

Seja  $x = x_0 \in M^{n-1}$  fixado. Da definição de  $\alpha$  dada em (2.39), usando (2.69) temos que

$$\hat{\beta}(z) = \alpha(s) = (\pi \circ f \circ \bar{\psi})(x_0, z) = G^1(x_0, z). \quad (2.72)$$

Pela Afirmação 2.1.9 sabemos que  $\alpha$  é pré-geodésica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e, então, como  $\hat{\beta}$  é a reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco  $z = \varphi(s)$ , concluímos que a curva  $\hat{\beta}(z) = G^1(x_0, z)$  é geodésica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

Fixe  $s = 0$ . Considere a restrição de  $F$  dada por

$$F(., 0) = F_0 = f \circ \psi_0 : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}. \quad (2.73)$$

Defina a hipersuperfície  $g : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  por  $g = \pi \circ F_0$ . Seja  $g_z : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  a família de hipersuperfícies paralelas a  $g$ ,  $z \in J$ . Denotando por  $N(x_0)$  o vetor normal a hipersuperfície  $g$  em  $g(x_0)$ , vamos mostrar que é válida a afirmação abaixo.

**Afirmação 2.1.10**  $\hat{\beta}(z)$  é a geodésica em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  partindo de  $g(x_0)$  com vetor tangente  $N(x_0)$  nesse ponto. Isto é,

$$\hat{\beta}(z) = g_z(x_0).$$

De fato, da unicidade da geodésica dadas condições iniciais e da definição de hipersuperfícies paralelas dada em 1.3.1, basta mostrarmos que  $\hat{\beta}(0) = g(x_0)$  e que  $\hat{\beta}'(0) = N(x_0)$ .

Como  $g = \pi \circ F_0$ , temos

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(0) &= G^1(x_0, 0) \\ &= (\pi \circ f \circ \bar{\psi})(x_0, 0) \\ &= (\pi \circ f \circ \psi)(x_0, \varphi^{-1}(0)) \\ &= (\pi \circ f \circ \psi)(x_0, 0) \\ &= (\pi \circ F_0)(x_0) \\ &= g(x_0). \end{aligned}$$

Resta mostrar que  $\hat{\beta}'(0) = N(x_0)$ . Para isso, dado  $w \in T_{x_0}M$ , basta mostrarmos que

$$\langle dg_{x_0}(w), \hat{\beta}'(0) \rangle_{\mathcal{P}} = 0. \quad (2.74)$$

Inicialmente, como

$$T_{x_0}M^{n-1} \approx T_{(x_0,0)}(M^{n-1} \times \{0\}) \subset T_{(x_0,0)}(M^{n-1} \times J),$$

podemos identificar o vetor  $w \in T_{x_0}M^{n-1}$  com o vetor  $(w, 0) \in T_{(x_0,0)}(M^{n-1} \times J)$ . Assim, notando que

$$g(x) = (\pi \circ F)(x, 0) = (\pi \circ f \circ \psi)(x, 0) = (\pi \circ f \circ \bar{\psi})(x, 0) = G^1(x, 0)$$

obtemos

$$dg_{x_0}(w) = dG^1_{(x_0,0)}(w, 0). \quad (2.75)$$

Agora, seja  $\theta(\tau) = (x(\tau), 0)$  uma curva em  $M^{n-1} \times J$  tal que

$$\theta(0) = (x(0), 0) = (x_0, 0) \quad \text{e} \quad \theta'(0) = (x'(0), 0) = (w, 0).$$

Note que, usando (2.71),

$$\begin{aligned} dF_{(x_0,0)}(w, 0) &= \frac{d}{d\tau}[(F \circ \theta)(\tau)]|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau}[F(x(\tau), 0)]|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau}[G^1(x(\tau), 0) + a(0)\partial_t]|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau}[G^1(x(\tau), 0)]|_{\tau=0} + \frac{d}{d\tau}[a(0)\partial_t]|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau}[G^1(x(\tau), 0)]|_{\tau=0} \\ &= dG^1_{(x_0,0)}(w, 0). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Por (2.75) e (2.76), concluimos que

$$dg_{x_0}(w) = dG^1_{(x_0,0)}(w, 0) = dF_{(x_0,0)}(w, 0). \quad (2.77)$$

Novamente por (2.71) e notando que  $\hat{\beta}'(0) = (G^1)'(x_0, 0)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s}(x_0, 0) &= \frac{\partial}{\partial s}[F(x_0, s)]|_{s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}[G^1(x_0, \varphi(s)) + a(\varphi(s))\partial_t]|_{s=0} \\ &= \varphi'(0)(G^1)'(x_0, \varphi(0)) + \varphi'(0)a(\varphi(0))\partial_t \\ &= |\alpha'(0)|((G^1)'(x_0, 0) + |\alpha'(0)|a(0)\partial_t) \\ &= |\alpha'(0)|[(G^1)'(x_0, 0) + a(0)\partial_t] \\ &= |\alpha'(0)|[\hat{\beta}'(0) + a(0)\partial_t]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Logo, juntando (2.77) e (2.78), temos

$$\begin{aligned}
 \left\langle dF_{(x_0,0)}(w,0), \frac{\partial F}{\partial s}(x_0,0) \right\rangle_{\mathcal{P}} &= \langle dg_{x_0}(w), |\alpha'(0)|[\hat{\beta}'(0) + a(0)\partial_t] \rangle_{\mathcal{P}} \\
 &= |\alpha'(0)| \langle dg_{x_0}(w), \hat{\beta}'(0) \rangle_{\mathcal{P}} + a(0)|\alpha'(0)| \langle dg_{x_0}(w), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\
 &= |\alpha'(0)| \langle dg_{x_0}(w), \hat{\beta}'(0) \rangle_{\mathcal{P}}.
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

Por outro lado, como  $F(x, s) = (f \circ \psi)(x, s)$ , fixando  $s = 0$ , pela regra da cadeia podemos escrever

$$dF_{(x_0,0)}(w,0) = d(f \circ \psi)_{(x_0,0)}(w,0) = df_{\psi(x_0,0)} \circ d\psi_{(x_0,0)}(w,0), \tag{2.80}$$

e, da mesma forma, mas agora com  $x_0$  fixado,

$$\frac{\partial F}{\partial s}(x_0,0) = \frac{\partial}{\partial s}[F(x_0,s)]|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}[(f \circ \psi)(x_0,s)]|_{s=0} = df_{\psi(x_0,0)} \circ \psi'(x_0,0). \tag{2.81}$$

Assim, por (2.80) e (2.81), usando o fato de que  $f$  é imersão isométrica, temos

$$\begin{aligned}
 \left\langle dF_{(x_0,0)}(w,0), \frac{\partial F}{\partial s}(x_0,0) \right\rangle_{\mathcal{P}} &= \langle df_{\psi(x_0,0)} \circ d\psi_{(x_0,0)}(w,0), df_{\psi(x_0,0)} \circ \psi'(x_0,0) \rangle_{\mathcal{P}} \\
 &= \langle d\psi_{(x_0,0)}(w,0), \psi'(x_0,0) \rangle_{\mathcal{M}}.
 \end{aligned}$$

Para  $s = 0$  fixo, pelo item (ii),  $\psi(x_0,0) = \psi_0(x_0)$  é ponto de uma variedade integral da distribuição  $D = \{\mathcal{T}\}^\perp$ , assim  $d\psi_{(x_0,0)}(w,0)$  e  $\mathcal{T}$  são ortogonais. Mas para  $x_0$  fixo, pelo item (i), temos que  $\psi_{x_0} = \gamma$  é uma curva integral do campo  $\mathcal{T}$ , isto é,  $\psi'_{x_0}(0) = \psi'(x_0,0) = \gamma'(0) = \mathcal{T}(\gamma(0))$ . Dessa forma,  $d\psi_{(x_0,0)}(w,0)$  e  $\psi'(x_0,0)$  são ortogonais, isto é,

$$\left\langle dF_{(x_0,0)}(w,0), \frac{\partial F}{\partial s}(x_0,0) \right\rangle_{\mathcal{P}} = 0. \tag{2.82}$$

Portanto, por (2.79) e (2.82), concluímos que

$$\langle dg_{x_0}(w), \hat{\beta}'(0) \rangle_{\mathcal{P}} = 0,$$

que é a igualdade em (2.74). Demonstramos então a Afirmação 2.1.10.

Finalmente, usando a Afirmação 2.1.10 em (2.71), concluímos que

$$(f \circ \bar{\psi})(x, z) = g_z(x_0) + a(z)\partial_t. \tag{2.83}$$

Como  $x_0 \in M^{n-1}$  é qualquer, temos que (2.83) é válida para todo  $x \in M^{n-1}$ . Assim, denotando  $f \circ \bar{\psi}$  apenas por  $f$ , (2.83) se torna

$$f(x, z) = g_z(x) + a(z)\partial_t,$$

para todo  $(x, z) \in M^{n-1} \times J$ .

Por fim, resta mostrar que  $a'(z) > 0$ , para todo  $z \in J$ . Sabemos que

$$a(z) = a(\varphi(s)) = \rho(s) = \langle F(x, s), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Dessa forma, omitindo o ponto  $(x, s)$  para simplificar notação, temos

$$\frac{\partial}{\partial s}[a(\varphi(s))] = \frac{\partial}{\partial s} \langle F, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}},$$

que é equivalente a

$$\varphi'(s)a'(\varphi(s)) = \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} F, \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} + \left\langle F, \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}}.$$

Donde, lembrando que o campo  $\partial_t$  é paralelo em  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$  (veja Proposição 1.6.2), obtemos

$$\begin{aligned} |\alpha'(s)|a'(z) &= \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} F, \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \left\langle \left[ \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} F \right]^T + \left[ \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} F \right]^{\perp}, \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \left\langle \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} F, \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \left\langle dF \left( \frac{\partial}{\partial s} \right), \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Como  $F(x, s) = (f \circ \psi)(x, s)$ , temos do item (ii) que

$$\frac{\partial F}{\partial s} = df(\psi'_x(s)) = df(\mathcal{T}). \tag{2.85}$$

Assim, substituindo (2.85) em (2.84), obtemos

$$|\alpha'(s)|a'(z) = \langle df(\mathcal{T}), df(\mathcal{T}) + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} = \langle df(\mathcal{T}), df(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}} = |df(\mathcal{T})|^2 = |\mathcal{T}|^2.$$

Como por hipótese  $\mathcal{T}$  é direção principal de  $f$ , temos que  $\mathcal{T}$  nunca se anula e, então, concluímos que  $a'(z) > 0$ , para todo  $z \in J$ . Com isso finalizamos a demonstração do Teorema. ■

## 2.2 Apontamentos

Ao longo desta seção, discutiremos algumas propriedades relevantes sobre a hipersuperfície  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  dada por (2.11).

Inicialmente, na primeira subseção, estudaremos a regularidade de  $f$ . No teorema 2.1.7, vimos que  $f$  define, em pontos regulares, uma hipersuperfície pertencente a classe  $\mathcal{A}$ . Iremos encontrar condições sobre as quais um ponto  $(x, s) \in M^{n-1} \times I$  é um ponto regular de  $f$ .

Por fim, a segunda subseção tem como objetivo mostrar que o conhecimento das propriedades geométricas de  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  nos permite obter uma boa descrição acerca das propriedades geométricas de  $f$ .

### 2.2.1 Regularidade

Seja  $(x, s) \in M^{n-1} \times I$ . Sabemos que  $f$  é regular em  $(x, s)$  desde que  $df_{(x,s)}(v) \neq 0$ , para todo  $v \in T_{(x,s)}(M^{n-1} \times I)$  com  $v \neq 0$ .

Vimos na propriedade 2.1.3 que

$$df_{(x,s)}(v) = d(g_s)_x(v_M) + c \cdot df_{(x,s)}(\partial_s),$$

em que  $v = v_M + v_I$ , onde  $v_M$  e  $v_I$  são as componentes de  $v$  em  $T_x M^{n-1}$  e em  $T_s I$ , respectivamente; e  $c \in \mathbb{R}$  é tal que  $v_I = c\partial_s$ . Assim, para analisar a regularidade de  $f$  em  $(x, s)$ , basta analisarmos a diferencial  $df_{(x,s)}$  nas direções  $v_M$  e  $\partial_s$ .

Se  $v = v_I$ , então  $df_{(x,s)}(v) = cdf_{(x,s)}(\partial_s)$ , onde  $c \neq 0$ . Pela propriedade 2.1.2, vale que

$$df_{(x,s)}(\partial_s) = N_s(x) + a'(s)\partial_t.$$

Logo, como  $N_s$  e  $\partial_t$  são campos ortonormais e, além disso,  $a'(s) > 0$ , concluímos que  $df_{(x,s)}(v) = cdf_{(x,s)}(\partial_s) \neq 0$ .

Por outro lado, se  $v = v_M$ , isto é, se  $c = 0$ , então  $df_{(x,s)}(v) = d(g_s)_x(v_M)$ . Portanto, analisar a regularidade de  $f$  em  $(x, s)$  é equivalente a analisar a regularidade de  $g_s$  no ponto  $x$ . Isto é, nosso objetivo a partir de agora é encontrar condições para as quais  $d(g_s)_x(v_M) \neq 0$  com  $v_M \neq 0$ .

Denotaremos por  $A_{N_s}$  o operador forma associado ao vetor normal  $N_s$  de  $g_s$ . Nesse caso, sabemos que existe uma base ortonormal de  $T_x M$  formada por autovetores

de  $A_{N_s}$  os quais são as direções principais da hipersuperfície  $g_s$  em  $x$ . Como  $d(g_s)_x$  é linear, basta então analisarmos seu comportamento numa direção principal qualquer de  $g_s$ . Para isso, precisaremos de alguns resultados prévios os quais discutiremos agora.

Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  as  $m$  curvaturas principais distintas de  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , com  $m \leq n - 1$ , para as quais:

- quando  $\varepsilon = 0$ ,  $\lambda_i \neq 0$ ; e
- quando  $\varepsilon = -1$ ,  $|\lambda_i| > 1$ .

Quando  $\varepsilon = 1$ , não faremos nenhuma restrição. Usando as propriedades de domínio e imagem das funções cotangente e cotangente hiperbólica, podemos escrever

$$\lambda_i = \begin{cases} \cot \theta_i, & 0 < \theta_i < \pi, \text{ se } \varepsilon = 1, \\ 1/\theta_i, & \theta_i \neq 0, \text{ se } \varepsilon = 0, \\ \coth \theta_i, & \theta_i \neq 0, \text{ se } \varepsilon = -1, \end{cases} \quad (2.86)$$

onde os  $\theta_i$ 's :  $M^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  são escolhidos de tal forma que compõem uma sequência crescente, isto é, as curvaturas principais  $\lambda_i$ , definidas na igualdade acima, estão ordenadas de forma decrescente.

Seja  $X \in \mathcal{X}(M^{n-1})$  tal que  $X(x)$  é uma direção principal cuja curvatura principal associada é  $\lambda_i(x)$  para algum  $i$  com  $1 \leq i \leq m$ , isto é, omitindo o ponto  $x \in M^{n-1}$ ,

$$A_N(X) = \lambda_i X, \quad (2.87)$$

onde  $A_N : T_x M \rightarrow T_x M$  denota o operador forma associado ao campo de vetores normais unitários  $N$  da hipersuperfície  $g$ .

**Proposição 2.2.1** *Vale que*

$$dN_x(X) = -\lambda_i X.$$

**Demonstração:** Como  $|N| = 1$ , denotando por  $\nabla^1$  a conexão de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , obtemos que

$$2\langle \nabla_X^1 N, N \rangle = 0.$$

Assim,  $\nabla_X^1 N$  não possui componente na direção  $N$ . Portanto, por (2.87), temos

$$\nabla_X^1 N = (\nabla_X^1 N)^T = -A_N(X) = -\lambda_i X.$$

Vamos agora encontrar uma outra forma de escrever  $\nabla_X^1 N$ . Quando  $\varepsilon = 1$ , temos que  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ . Dessa forma, o vetor posição  $g$  de  $\mathbb{E}^{n+1}$  é um campo de vetores normais unitários de  $\mathbb{S}^n$ . Assim, sendo  $N \in \mathcal{X}(\mathbb{S}^n)$ , vale que  $\langle g(x), N(x) \rangle = 0$ . Logo,

$$\langle dg_x(X), N(x) \rangle + \langle g(x), dN_x(X) \rangle = 0.$$

Que equivale a  $\langle g(x), dN_x(X) \rangle = 0$ . Dessa forma,  $dN_x(X)$  não possui componente na direção  $g(x)$ .

Quando  $\varepsilon = 0$ , temos  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n = \mathbb{E}^n$ . Como estamos considerando  $\mathbb{E}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$  através da identificação  $\mathbb{E}^n \approx E^n \times \{0\}$ , segue que o campo constante  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ , onde o 1 está na  $(n+1)$ -ésima entrada, é um campo unitário de vetores normais a  $\mathbb{E}^n$ . Assim, sendo  $N \in \mathcal{X}(\mathbb{E}^n)$ , vale que  $\langle e_{n+1}, N(x) \rangle = 0$ . Logo,

$$\langle d(e_{n+1})_x(X), N(x) \rangle + \langle e_{n+1}, dN_x(X) \rangle = 0.$$

Que equivale a  $\langle e_{n+1}, dN_x(X) \rangle = 0$ , pois sendo  $e_{n+1}$  constante temos que  $de_{n+1}$  é identicamente nulo. Dessa forma,  $dN_x(X)$  não possui componente na direção  $e_{n+1}$ .

O caso  $\varepsilon = -1$  é análogo ao caso  $\varepsilon = 1$ .

Portanto, em todos os casos, podemos escrever

$$dN_x(X) = [dN_x(X)]^T = \nabla_X^1 N.$$

Assim, (2.88) é equivalente a

$$dN_x(X) = \nabla_X^1 N = -\lambda_i X.$$

Isso demonstra a Proposição 2.2.1. ■

Como  $g, g_s : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , de maneira completamente análoga ao que fizemos na Proposição 2.2.1 mostra-se que

$$A_{N_s}(X) = -d(N_s)_x(X). \quad (2.88)$$

Sabendo disso, podemos demonstrar a Proposição seguinte.

**Proposição 2.2.2** *O campo  $X$  é direção principal da hipersuperfície  $g_s$  no ponto  $x \in M^{n-1}$ .*



**Demonstração:** Pelo Lema 1.3.2 sabemos que

$$N_s(x) = -\varepsilon S_\varepsilon(s)g(x) + C_\varepsilon(s)N(g(x)).$$

Dessa forma, derivando a expressão acima em ambos os lados e considerando a identificação  $dg_x(X) \approx X$ , temos

$$d(N_s)_x(X) = -\varepsilon S_\varepsilon(s)X + C_\varepsilon(s)dN_x(X),$$

donde, usando a Proposição 2.2.1 e a equação (2.88), obtemos que

$$A_{N_s}(X) = -d(N_s)_x(X) = \varepsilon S_\varepsilon(s)X + \lambda_i C_\varepsilon(s)X = [\varepsilon S_\varepsilon(s) + \lambda_i C_\varepsilon(s)]X.$$

Isto é,  $X$  é direção principal de  $g_s$  em  $x$  cuja curvatura principal associada é o número  $\varepsilon S_\varepsilon(s) + \lambda_i C_\varepsilon(s)$ . O que prova a Proposição 2.2.2. ■

Sendo  $X$  uma direção principal qualquer de  $g$  em  $x \in M^{n-1}$ , a Proposição 2.2.2 nos diz que as direções principais de  $g$  e  $g_s$  coincidem. Assim, voltando ao nosso maior interesse, analisar a regularidade de  $f$  em  $(x, s)$  é equivalente a encontrar condições para as quais  $d(g_s)_x(X) \neq 0$ . Vamos então calcular  $d(g_s)_x(X)$ .

Por (1.9), lembre que

$$g_s(x) = C_\varepsilon(s)g(x) + S_\varepsilon(s)N(g(x)).$$

Assim, derivando a expressão acima em ambos os lados e considerando novamente a identificação  $dg_x(X) \approx X$ , temos

$$d(g_s)_x(X) = C_\varepsilon(s)X + S_\varepsilon(s)dN_x(X),$$

donde usando a Proposição 2.2.1, obtemos que

$$d(g_s)_x(X) = C_\varepsilon(s)X - \lambda_i S_\varepsilon(s)X = [C_\varepsilon(s) - \lambda_i S_\varepsilon(s)]X. \quad (2.89)$$

Vamos agora calcular  $d(g_s)_x(X)$  usando (2.89) de acordo com o valor de  $\varepsilon$ .

- Se  $\varepsilon = 0$ , então por (1.8) vale que  $C_\varepsilon(s) = 1$  e  $S_\varepsilon(s) = s$  e, ainda, por (2.86) temos  $\lambda_i = 1/\theta_i$ . Logo,

$$d(g_s)_x(X) = \left(1 - \frac{s}{\theta_i}\right)X = \frac{\theta_i - s}{\theta_i}X.$$

- Se  $\varepsilon = 1$ , então por (1.8) vale que  $C_\varepsilon(s) = \cos s$  e  $S_\varepsilon(s) = \sin s$  e, ainda, por (2.86) temos  $\lambda_i = \cot \theta_i$ . Segue que

$$\begin{aligned} d(g_s)_x(X) &= (\cos s - \cot \theta_i \sin s)X \\ &= \left( \cos s - \sin s \frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_i} \right) X \\ &= \left( \frac{\sin \theta_i \cos s - \sin s \cos \theta_i}{\sin \theta_i} \right) X \\ &= \frac{\sin(\theta_i - s)}{\sin \theta_i} X. \end{aligned}$$

- Se  $\varepsilon = -1$ , então por (1.8) vale que  $C_\varepsilon(s) = \cosh s$  e  $S_\varepsilon(s) = \sinh s$  e, ainda, por (2.86) temos  $\lambda_i = \coth \theta_i$ . Assim,

$$\begin{aligned} d(g_s)_x(X) &= (\cosh s - \coth \theta_i \sinh s)X \\ &= \left( \cosh s - \sinh s \frac{\cosh \theta_i}{\sinh \theta_i} \right) X \\ &= \left( \frac{\sinh \theta_i \cosh s - \sinh s \cosh \theta_i}{\sinh \theta_i} \right) X \\ &= \frac{\sinh(\theta_i - s)}{\sinh \theta_i} X. \end{aligned}$$

Donde, de forma resumida, podemos escrever

$$d(g_s)_x(X) = \begin{cases} \frac{\sin(\theta_i - s)}{\sin \theta_i} X, & \text{se } \varepsilon = 1, \\ \frac{\theta_i - s}{\theta_i} X, & \text{se } \varepsilon = 0, \\ \frac{\sinh(\theta_i - s)}{\sinh \theta_i} X, & \text{se } \varepsilon = -1. \end{cases} \quad (2.90)$$

Assim, quando  $\varepsilon = 0$ , temos que  $d(g_s)_x(X) \neq 0$  se, e somente se,  $\theta_i(x) \neq s$ . Por (2.86) sabemos que  $\theta_i \neq 0$ . Considere então  $\theta_+$  o menor dos  $\theta_i$ 's tais que  $\theta_i > 0$  e  $\theta_-$  o maior dos  $\theta_i$ 's tais que  $\theta_i < 0$ . Nesse caso,  $I = (\theta_-(x), \theta_+(x))$  é o maior intervalo possível no qual, dado  $s \in I$ ,  $d(g_s)_x(X) \neq 0$ .

Para o caso  $\varepsilon = -1$ , novamente temos que  $d(g_s)_x(X) \neq 0$  se, e somente se,  $\theta_i(x) \neq s$ . Além disso, por (2.86) sabemos que  $\theta_i \neq 0$ . Considere  $\theta_+$  o menor dos  $\theta_i$ 's positivos tais que  $\coth \theta_i > 1$  e seja  $\theta_-$  o maior dos  $\theta_i$ 's negativos tais que  $\coth \theta_i < -1$ . Nesse caso,  $I = (\theta_-(x), \theta_+(x))$  é o maior intervalo possível no qual, dado  $s \in I$ ,  $d(g_s)_x(X) \neq 0$ .

Por sua vez, quando  $\varepsilon = 1$ , vale que  $d(g_s)_x(X) \neq 0$  se, e somente se,  $\theta_i(x) - s \neq \alpha\pi$ , onde  $\alpha$  é um número inteiro qualquer, isto é,  $s \not\equiv \theta_i(x) \pmod{\pi}$ . Por (2.86) vale que

$0 < \theta_i < \pi$  para todo  $i$  com  $1 \leq i \leq m$ . Além disso, sabemos que os  $\theta_i$ 's são escolhidos de tal forma que compõem uma sequência crescente. Podemos então escrever

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m < \pi. \quad (2.91)$$

Dessa forma, obtemos que  $s < \theta_1$ . De fato, do contrário, isto é, se  $s \geq \theta_1$ , então  $s$  poderia assumir o valor de algum dos  $\theta_i$ 's. Mas isso não pode ocorrer visto que  $\theta_i(x) - s \neq \alpha\pi$  para qualquer  $\alpha$  inteiro, em particular para  $\alpha = 0$ . Por outro lado, ainda por (2.91), temos que

$$\theta_1 - \pi < \theta_2 - \pi < \dots < \theta_m - \pi < 0.$$

Assim,  $s > \theta_m - \pi$ . De fato, do contrário, isto é, se  $s \leq \theta_m - \pi$ , então  $s$  poderia assumir o valor de algum dos  $\theta_i - \pi$ , com  $1 \leq i \leq m$ . Mas isso não pode ocorrer visto que  $\theta_i(x) - s \neq \alpha\pi$  para qualquer  $\alpha$  inteiro, em particular para  $\alpha = 1$ . Logo,  $I = (\theta_m(x) - \pi, \theta_1(x))$  é o maior intervalo possível no qual, dado  $s \in I$ ,  $d(g_s)_x(X) \neq 0$ .

Defina então o conjunto

$$U = \begin{cases} \{(x, s) \in M^{n-1} \times \mathbb{R} : s \in (\theta_-(x), \theta_+(x))\}, & \text{se } \varepsilon \in \{-1, 0\}, \\ \{(x, s) \in M^{n-1} \times \mathbb{R} : s \in (\theta_m(x) - \pi, \theta_1(x))\}, & \text{se } \varepsilon = 1. \end{cases}$$

Em todo caso, se  $V \subset M^{n-1}$  é um subconjunto aberto tal que  $V \times I \subset U$ , então  $g_s$  é regular em  $V$  para todo  $s \in I$ . Portanto, concluímos que  $f$  é regular em  $V \times I$ , isto é,  $f$  define uma imersão em  $V \times I$ . Em particular, se  $g$  é isoparamétrica, ou seja, as curvaturas principais de  $g$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , não dependem do ponto  $x \in M^{n-1}$ , então podemos tomar  $V = M^{n-1}$ , isto é,  $g_s$  é regular em  $M^{n-1}$  e, assim,  $f$  é uma imersão em  $M^{n-1} \times I$ .

Vamos agora tratar de alguns resultados que possuem um enfoque mais geométrico acerca de hipersuperfícies pertencentes a classe  $\mathcal{A}$ .

### 2.2.2 Alguns Resultados Complementares

Seja  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  definida assim como em (2.11). Considere, inicialmente  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Como  $g(M) \subset \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , através da identificação  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \approx \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \{0\}$ , podemos escrever  $g(M) \subset \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ .

A partir de agora, veremos a aplicação  $g$  como uma imersão isométrica em  $\mathbb{E}^{n+2}$ , se  $\varepsilon = 1$ , ou em  $\mathbb{L}^{n+2}$ , se  $\varepsilon = -1$ . Nesse caso, a codimensão de  $g$  é 3. Assim, o espaço

normal de  $g$  em um ponto qualquer  $x \in M^{n-1}$  é um espaço vetorial de dimensão 3 Riemanniano se  $\varepsilon = 1$ , ou Lorentziano se  $\varepsilon = -1$ .

O vetor  $N(x)$  é normal a  $g(M) \subset \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  em  $g(x)$ . Por sua vez, o vetor posição  $g(x)$  define um vetor normal a  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  no ponto  $g(x)$  e, assim,  $g(x)$  também é normal a  $g(M)$  em  $g(x)$ . Ainda, o campo unitário constante  $\partial_t$  tangente a fibra  $\mathbb{R}$  do produto  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  é normal a base  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e, então, também é normal a  $g(M)$  em  $g(x)$ . Como esses três vetores são ortogonais entre si, o espaço normal de  $g$  em  $x$  é gerado por  $\{N(x), g(x), \partial_t\}$ .

Denotaremos por  $\nabla^\perp$  a conexão normal da imersão  $g : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{E}^{n+2}$  (ou  $\mathbb{L}^{n+2}$ ).

**Proposição 2.2.3** *Os campos  $N$ ,  $g$  e  $\partial_t$  são paralelos na conexão normal da imersão  $g$ .*

**Demonstração:** Seja  $X \in \mathcal{X}(M^{n-1})$ . Como a conexão  $\tilde{\nabla}$  dos espaços  $\mathbb{E}^{n+2}$  e  $\mathbb{L}^{n+2}$  coincidem com a derivada usual, usando a Definição 1.2.4 e o fato de que  $\partial_t$  é um campo constante, temos

$$\nabla_X^\perp \partial_t = (\tilde{\nabla}_X \partial_t)^\perp = [d\partial_t(X)]^\perp = 0.$$

Donde concluímos que  $\partial_t$  é campo paralelo na conexão normal de  $g$ .

Para o campo de vetores posição  $g$ , note que  $dg(X) = [dg(X)]^T$ . Assim,

$$\nabla_X^\perp g = (\tilde{\nabla}_X g)^\perp = [dg(X)]^\perp = 0.$$

Portanto, o campo de vetores posição  $g$  é campo paralelo na conexão normal de  $g$ .

Por fim, resta apenas o campo  $N$ . De início, como  $\langle N, N \rangle = |N|^2 = 1$ , temos que

$$0 = X\langle N, N \rangle = 2\langle dN(X), N \rangle.$$

Isto é,  $dN(X)$  não possui componente na direção  $N$ . Ainda, como  $\langle N, \partial_t \rangle = 0$ , obtemos que

$$0 = X\langle N, \partial_t \rangle = \langle dN(X), \partial_t \rangle + \langle N, d\partial_t(X) \rangle = \langle dN(X), \partial_t \rangle.$$

Assim,  $dN(X)$  também não possui componente na direção  $\partial_t$ . Por último, como  $\langle N, g \rangle = 0$ , podemos escrever

$$0 = X\langle N, g \rangle = \langle dN(X), g \rangle + \langle N, dg(X) \rangle = \langle dN(X), g \rangle.$$

Novamente,  $dN(X)$  também não possui componente na direção  $g$ . Concluimos que  $dN(X)$  não possui componente em nenhuma das direções normais. Dessa forma,

$$\nabla_X^\perp N = (\tilde{\nabla}_X N)^\perp = [dN(X)]^\perp = 0.$$

Com isso, segue que  $N$  é campo paralelo na conexão normal de  $g$ , como queríamos mostrar. ■

Sabemos que  $f$  é dada por

$$f(x, s) = g_s(x) + a(s)\partial_t,$$

com  $(x, s) \in M^{n-1} \times I$ , onde  $g_s(x) = C_\varepsilon(s)g(x) + S_\varepsilon(s)N(x)$ . Assim,

$$f(x, s) = C_\varepsilon(s)g(x) + S_\varepsilon(s)N(x) + a(s)\partial_t.$$

Agora, dado  $x_0 \in M^{n-1}$  fixado mas qualquer, podemos considerar

$$\alpha_{x_0}(s) = f(x_0, s) = C_\varepsilon(s)g(x_0) + S_\varepsilon(s)N(x_0) + a(s)\partial_t \quad (2.92)$$

como sendo uma curva em um cilindro da forma  $\mathbb{Q}_\varepsilon^1 \times \mathbb{R}$  com eixo dado por  $\partial_t$  e altura  $a(s)$ , de tal forma que  $\alpha_{x_0}$  está contida no espaço normal da hipersuperfície  $g$  no ponto  $g(x_0)$ .

**Proposição 2.2.4** *A curva  $\alpha_{x_0}$  define um campo paralelo na conexão normal  $\nabla^\perp$  da imersão  $g$ .*

**Demonstração:** De fato, dado  $X \in \mathcal{X}(M^{n-1})$ , como  $X$  não depende de  $s$ , temos que

$$X(C_\varepsilon) = X(S_\varepsilon) = X(a) = 0.$$

Logo, através da definição de  $\alpha_{x_0}$  em (2.92) e da Proposição 2.2.3, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp \alpha_{x_0} &= \nabla_X^\perp [C_\varepsilon g + S_\varepsilon N + a\partial_t] \\ &= C_\varepsilon \nabla_X^\perp g + X(C_\varepsilon) + S_\varepsilon \nabla_X^\perp N + X(S_\varepsilon) + a \nabla_X^\perp \partial_t + X(a) \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Como consequência temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.2.5** *A hipersuperfície  $f$  definida assim como em (2.11) é gerada através do transporte paralelo da curva  $\alpha_{x_0}$  na conexão normal  $\nabla^\perp$  de  $g$ .*

**Demonstração:** Seja  $s_0 \in I$  fixado mas qualquer. Para  $\varepsilon = 1$  (respectivamente,  $\varepsilon = -1$ ), temos que  $v = f(x_0, s_0) \in T_v\mathbb{E}^{n+2} \approx \mathbb{E}^{n+2}$  (respectivamente,  $T_v\mathbb{L}^{n+2} \approx \mathbb{L}^{n+2}$ ). Assim, existe um único campo de vetores paralelo  $W$  de  $\mathbb{E}^{n+2}$  (respectivamente,  $\mathbb{L}^{n+2}$ ) definido em  $I$  ao longo da curva  $\alpha_{x_0}$  para o qual  $W(s_0) = v = f(x_0, s_0)$ .

Mas, pela Proposição 2.2.4, temos que  $\alpha_{x_0}$  é um campo paralelo e, além disso, da definição de  $\alpha_{x_0}$  vale que  $\alpha_{x_0}(s_0) = v = f(x_0, s_0)$ . Assim, da unicidade do transporte paralelo com respeito a conexão normal  $\nabla^\perp$  de  $g$ , concluímos que  $W = \alpha_{x_0}$ . Portanto, sendo  $(x_0, s_0) \in M^{n-1} \times I$  qualquer, obtivemos  $f(x_0, s_0)$  através do transporte paralelo de  $\alpha_{x_0}$ , como queríamos. ■

Uma curva  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^1 \times \mathbb{R}$ ,  $J \subset \mathbb{R}$ , que não é uma reta e que tem a propriedade de que sua reta tangente faz um ângulo constante com uma direção fixa é chamada de **hélice**.

**Proposição 2.2.6** *Suponha que a função ângulo  $\nu = \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}$  é constante. Então,  $\alpha_{x_0} : I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^1 \times \mathbb{R}$  é uma hélice.*

**Demonstração:** De início, da definição de  $\alpha_{x_0}$  dada em (2.92), obtemos que

$$\alpha'_{x_0}(s) = C'_\varepsilon(s)g(x_0) + S'_\varepsilon(s)N(x_0) + a'(s)\partial_t,$$

donde, lembrando que  $C'_\varepsilon(s) = -\varepsilon S_\varepsilon(s)$  e  $S'_\varepsilon(s) = C_\varepsilon(s)$ , obtemos

$$\alpha'_{x_0}(s) = -\varepsilon S_\varepsilon(s)g(x_0) + C_\varepsilon(s)N(x_0) + a'(s)\partial_t.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha'_{x_0}(s), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle -\varepsilon S_\varepsilon(s)g(x_0) + C_\varepsilon(s)N(x_0) + a'(s)\partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= -\varepsilon S_\varepsilon(s)\langle g(x_0), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + C_\varepsilon(s)\langle N(x_0), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + a'(s)\langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= a'(s). \end{aligned} \tag{2.93}$$

Da Propriedade 2.1.6, sabemos que  $\nu = \frac{1}{b(s)}$ , onde  $b(s) = \sqrt{1 + (a'(s))^2}$ . Agora, por hipótese  $\nu = \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}$  é constante. Então,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} = c,$$

para alguma constante  $c$ . Logo,

$$c^2 + (a'(s))^2 c^2 = 1$$

que é equivalente a, lembrando que  $a'(s) > 0$ ,

$$a'(s) = \frac{1 - c^2}{c^2}. \quad (2.94)$$

Juntando (2.93) e (2.94), obtemos

$$\langle \alpha'_{x_0}(s), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = \frac{1 - c^2}{c^2}.$$

Isto é, a direção tangente a curva  $\alpha_{x_0}$  faz um ângulo constante com a direção fixa  $\partial_t$ . Resta mostrar que  $\alpha_{x_0}$  não é uma reta.

De (2.94), temos que  $a''(s) = 0$ . Ainda, vale também que  $C''_{\varepsilon}(s) = -\varepsilon C_{\varepsilon}(s)$  e  $S''_{\varepsilon}(s) = -\varepsilon S_{\varepsilon}(s)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \alpha''_{x_0}(s) &= C''_{\varepsilon}(s)g(x_0) + S''_{\varepsilon}(s)N(x_0) + a''(s)\partial_t, \\ &= -\varepsilon C_{\varepsilon}(s)g(x_0) - \varepsilon S_{\varepsilon}(s)N(x_0) \\ &= -\varepsilon[C_{\varepsilon}(s)g(x_0) + S_{\varepsilon}(s)N(x_0)] \\ &= -\varepsilon g_s(x_0). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Se  $\varepsilon = 1$  ou  $\varepsilon = -1$ , então  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$  é a esfera  $\mathbb{S}^n$  ou o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , respectivamente. Nesse caso, temos  $\langle g_s(x_0), g_s(x_0) \rangle_{\mathcal{P}} = 1$  ou  $\langle g_s(x_0), g_s(x_0) \rangle_{\mathcal{P}} = -1$ , para  $\varepsilon = 1$  ou  $\varepsilon = -1$ , também respectivamente. Dessa forma,  $g_s(x_0) \neq 0$ . Então, de (2.95), concluímos que  $\alpha''_{x_0}(s) \neq 0$ . Portanto,  $\alpha_{x_0}$  não é uma reta. Com isso, concluímos que  $\alpha_{x_0}$  é uma hélice. ■

Todos os resultados que vimos até agora nesta subseção se referem ao caso em que  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Trataremos agora do caso  $\varepsilon = 0$ .

Temos que  $f : M^{n-1} \times I \longrightarrow \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}$ , onde podemos identificar  $\mathbb{E}^n \times \mathbb{E} \approx \mathbb{E}^{n+1}$ . Veremos aqui a hipersuperfície  $g(M) \subset \mathbb{E}^n$  como uma imersão isométrica em  $\mathbb{E}^{n+1}$ , isto é,  $g : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ . Nesse caso, dado  $x \in M^{n-1}$ , o espaço normal de  $g$  em  $x$  é um espaço vetorial de dimensão 2.

O vetor unitário  $N$  é normal a  $g(M) \subset \mathbb{E}^n$  em  $g(x)$ . O campo unitário constante  $\partial_t$ , tangente a fibra  $\mathbb{E}$  do produto  $\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}$ , é normal a base  $\mathbb{E}^n$  e, portanto, é normal

a  $g(M)$  em  $g(x)$ . Além disso, esses dois campos são ortonormais entre si. Assim, o espaço normal a  $g$  em  $x$  é gerado por  $\{N(x), \partial_t\}$ .

Novamente, denotaremos por  $\nabla^\perp$  a conexão normal da imersão  $g(M) \subset \mathbb{E}^{n+1}$ . Assim como no caso  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , a base  $\{N(x), \partial_t\}$  é composta por campos paralelos com respeito a  $\nabla^\perp$ . A demonstração deste fato é inteiramente análoga ao que fizemos na demonstração da Proposição 2.2.3, desconsiderando o campo de vetores posição  $g$ .

Como  $\varepsilon = 0$ , temos que  $C_\varepsilon = 1$  e  $S_\varepsilon = s$ . Assim,

$$f(x, s) = g(x) + sN(x) + a(s)\partial_t. \quad (2.96)$$

Consideremos a aplicação  $\Psi : M \times I \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$  dada por

$$\Psi(x, s) = f(x, s) - g(x) = sN(x) + a(s)\partial_t. \quad (2.97)$$

Dado  $x_0 \in M^{n-1}$  fixado mas qualquer, consideremos a curva no espaço normal de  $g$  em  $x_0$  dada por

$$\alpha_{x_0}(s) = \Psi(x_0, s) = sN(x_0) + a(s)\partial_t. \quad (2.98)$$

Procedendo assim como na demonstração da Proposição 2.2.4, novamente desconsiderando o campo de vetores posição  $g$ , concluímos que a curva  $\alpha_{x_0}$  define um campo paralelo com respeito a  $\nabla^\perp$  por ser combinação linear dos campos paralelos  $N$  e  $\partial_t$ .

**Proposição 2.2.7** *A aplicação  $\Psi$  definida assim como em (2.97) é gerada através do transporte paralelo da curva  $\alpha_{x_0}$  na conexão normal  $\nabla^\perp$  de  $g$ .*

**Demonstração:** Seja  $s_0 \in I$  fixado mas qualquer. Temos que  $v = \Psi(x_0, s_0) \in T_v\mathbb{E}^{n+1} \approx \mathbb{E}^{n+1}$ . Assim, existe um único campo de vetores paralelo  $W$  de  $\mathbb{E}^{n+1}$  definido em  $I$  ao longo da curva  $\alpha_{x_0}$  para o qual  $W(s_0) = v = \Psi(x_0, s_0)$ .

Sabemos que  $\alpha_{x_0}$  é um campo paralelo e, além disso, da definição de  $\alpha_{x_0}$  em (2.98), vale que  $\alpha_{x_0}(s_0) = v = \Psi(x_0, s_0)$ . Assim, da unicidade do transporte paralelo com respeito a conexão normal  $\nabla^\perp$  de  $g$ , concluímos que  $W = \alpha_{x_0}$ . Portanto, sendo  $(x_0, s_0) \in M^{n-1} \times I$  qualquer, obtivemos  $\Psi(x_0, s_0)$  através do transporte paralelo de  $\alpha_{x_0}$ , como queríamos. ■



Por (2.97) e (2.98) temos que  $f(x_0, s) = g(x_0) + \alpha_{x_0}(s)$ . Dessa forma, o que a Proposição 2.2.7 nos diz é que o ponto  $f(x_0, s)$  é obtido tomando-se a soma do vetor posição  $g(x_0)$  com o transporte paralelo de  $\alpha_{x_0}(s)$ . Sendo  $x_0$  fixo mas qualquer, concluimos que a hipersuperfície  $f$  é gerada inteiramente dessa maneira.

Quando  $\varepsilon = 0$ , hipersuperfícies com função ângulo  $\nu = \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}$  constante corresponde ao caso em que  $\alpha_{x_0}$  é uma reta, como veremos no próximo resultado.

**Proposição 2.2.8** *Seja  $f$  dada por (2.96). Suponha que a função ângulo  $\nu = \langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}$  de  $f$  é constante. Então,  $\alpha_{x_0}$  é uma reta.*

**Demonstração:** Usando a hipótese de que  $\nu$  é constante, podemos repetir o que fizemos na demonstração da Proposição (2.2.6), obtendo que

$$a'(s) = \frac{1 - c^2}{c^2}, \quad (2.99)$$

para alguma constante  $c$ . Assim, integrando (2.99) com respeito a  $s$ , obtemos que  $a$  é uma função linear da forma  $a(s) = c_1 s + c_2$ , onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  com  $c_1 = \frac{1-c^2}{c^2}$ . Portanto, da definição de  $\alpha_{x_0}$  dada em (2.98), temos

$$\begin{aligned} \alpha_{x_0}(s) &= sN(x_0) + (c_1 s + c_2)\partial_t \\ &= c_2\partial_t + s[N(x_0) + c_1\partial_t], \end{aligned}$$

que é uma reta partindo de  $c_2\partial_t$  com vetor diretor dado por  $N(x_0) + c_1\partial_t$ . ■

# Capítulo 3

## Aplicações

No capítulo 2, apresentamos o Teorema 2.1.1, que dá condições necessárias e suficientes para garantir que uma hipersuperfície dos espaços produto  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  esteja na classe  $\mathcal{A}$ ; e o Teorema 2.1.7, que caracteriza tal classe. Neste capítulo, obteremos duas aplicações de tais resultados. Tais aplicações nos fornecem informações diretamente ligadas a geometria das hipersuperfícies pertencentes a classe  $\mathcal{A}$ .

A primeira aplicação surge do interesse em saber quais condições são necessárias e suficientes para que a função ângulo  $\nu = \langle \partial_t, \eta \rangle_p$  seja constante e pode ser vista como um corolário do Teorema 2.1.7. Em verdade, sendo  $f$  uma hipersuperfície da classe  $\mathcal{A}$ , veremos que se a função real  $a$  dada em (2.11) é linear, então  $\nu$  é constante. Por outro lado, se uma hipersuperfície  $f$  de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  possui função ângulo  $\nu$  constante, concluiremos que sua descrição depende do valor real que  $\nu$  assume, mas que analisar três casos distintos é suficiente.

A segunda aplicação classifica totalmente as hipersuperfícies da classe  $\mathcal{A}$  que possuem curvatura média constante. Primeiro, verificaremos que uma hipersuperfície da classe  $\mathcal{A}$  possui curvatura média constante desde que a hipersuperfície  $g$  associada a  $f$  seja isoparamétrica. Por outro lado, mostraremos que qualquer hipersuperfície da classe  $\mathcal{A}$  com curvatura média constante é construída através de uma hipersuperfície isoparamétrica  $g$ . Para mostrar essa aplicação é necessário obter uma interessante relação entre a curvatura média de  $f$  e a curvatura média das paralelas  $g_s$  associadas a  $g$  e definidas assim como em (2.9). Com essa aplicação observamos uma importante

relação entre a geometria de uma  $f$  da classe  $\mathcal{A}$  e a geometria da hipersuperfície  $g$  associada a ela.

Os resultados e demonstrações deste capítulo podem ser encontrados em nossa principal referência [22].

### 3.1 Hipersuperfícies da Classe $\mathcal{A}$ com Ângulo Constante

Vamos então mostrar a primeira aplicação.

**Corolário 3.1.1** *Seja  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  assim como em (2.11), onde  $a(s) = As$ , para algum  $A > 0$ , isto é,*

$$f(x, s) = g_s(x) + As\partial_t, \quad x \in M^{n-1} \text{ e } s \in I. \quad (3.1)$$

Então,  $f$  é uma hipersuperfície com função ângulo  $\nu$  constante. Por outro lado, qualquer hipersuperfície com função ângulo  $\nu$  constante,  $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , é um subconjunto aberto do slice  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \{t_0\}$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ ; ou é um subconjunto aberto do produto  $M^{n-1} \times \mathbb{R}$ , onde  $M^{n-1}$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ ; ou é dada localmente por (3.1).

**Demonstração:** Suponha, inicialmente, que  $f$  seja dada por (3.1). Queremos mostrar que  $f$  é uma hipersuperfície com função ângulo  $\nu$  constante. Pela Propriedade 2.1.6, temos que

$$\nu = \frac{1}{b(s)}, \quad (3.2)$$

onde  $b(s) = \sqrt{1 + (a'(s))^2}$ . Como  $a(s) = As$  para alguma  $A > 0$ , temos que  $a'(s) = A$ . Assim, segue de (3.2) que

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}},$$

que é constante, como queríamos.

Suponha agora que  $f$  é uma hipersuperfície com função ângulo  $\nu$  constante. Lembre que, como  $\partial_t = \mathcal{T} + \nu\eta$ ,

$$\langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = \langle \eta, \mathcal{T} + \nu\eta \rangle_{\mathcal{P}} = \langle \eta, \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} + \nu \langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{P}} = \nu. \quad (3.3)$$

Se  $\nu = 1$ , por (3.3) temos que  $\langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = 1$  e, assim,  $\eta = \partial_t$ . Segue que  $f$  é um subconjunto aberto de um *slice*  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \{t_0\}$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Se  $\nu = 0$ , novamente por (3.3), temos que  $\langle \eta, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = 0$ . Então,  $\eta$  e  $\partial_t$  são ortonormais, donde temos que  $f$  é um subconjunto aberto de um produto  $M^{n-1} \times \mathbb{R}$ , com  $M^{n-1}$  hipersuperfície de  $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ .

Como último caso, suponha que  $\nu \neq 0$  e  $\nu \neq 1$ . Por (1.38), temos que

$$X(\nu) = -\langle A(X), \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}},$$

para todo campo  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ . Como  $\nu$  é constante, da igualdade acima obtemos que

$$0 = X(\nu) = -\langle A(X), \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{P}} = -\langle X, A(\mathcal{T}) \rangle_{\mathcal{P}}. \quad (3.4)$$

Como (3.4) vale para todo campo  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , concluímos que  $A(\mathcal{T}) = 0 = 0 \cdot \mathcal{T}$ , isto é,  $\mathcal{T}$  é direção principal com curvatura principal associada igual a 0. Assim, pelo Teorema 2.1.7,  $f : \mathcal{M}^n = M^{n-1} \times I \longrightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$  é dada localmente por (2.11). Assim, pela Propriedade 2.1.6, vale que

$$\nu = \frac{1}{b(s)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}}.$$

Tomando o quadrado em ambos os lados da expressão acima, temos

$$\nu^2 = \frac{1}{1 + (a'(s))^2},$$

donde segue que

$$1 + (a'(s))^2 = \frac{1}{\nu^2},$$

ou ainda

$$a'(s) = \frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{\nu}.$$

Sendo  $\nu$  constante, integrando a expressão acima com respeito a  $s$ , obtemos que

$$a(s) = As,$$

onde  $A = \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\nu} \in \mathbb{R}$ , com  $A > 0$ . Isso demonstra o corolário. ■

## 3.2 Hipersuperfícies da Classe $\mathcal{A}$ com Curvatura Média Constante

Seja  $f : M^{n-1} \times I \longrightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  assim como em (2.11). Mostraremos agora um lema que descreve como são as curvaturas principais da hipersuperfície  $f$  em função das curvaturas principais das hipersuperfícies paralelas  $g_s$  e, por consequência, nos dá uma equação diferencial que relaciona a curvatura média normalizada de  $g_s$  com a curvatura média normalizada de  $f$ , as quais denotaremos por  $H_s$  e  $H_f$ , respectivamente.

**Lema 3.2.1**  $H_f$  e  $H_s$  satisfazem a equação

$$H_f(x, s) = -\rho(s)H_s(x) + \rho'(s),$$

onde  $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável dada por  $\rho(s) = \frac{a'(s)}{b(s)}$ .

**Demonstração:** Como  $f$  é dada por (2.11), pela Propriedade 2.1.5, o vetor normal  $\eta$  de  $f$  é dado por

$$\eta(x, s) = -\frac{a'(s)}{b(s)}N_s(x) + \frac{1}{b(s)}\partial_t, \quad (3.5)$$

onde  $b(s) = \sqrt{1 + (a'(s))^2}$  e  $N_s$  é vetor normal à hipersuperfície  $g_s : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

Fixado  $s \in I$  qualquer, consideremos o campo  $X \in \mathcal{X}(f(M^{n-1} \times \{s\}))$ , isto é,  $X \in \mathcal{X}(g_s(M^{n-1}))$ . Assim,

$$X \left( -\frac{a'(s)}{b(s)} \right) = 0, \quad \text{e} \quad X \left( \frac{1}{b(s)} \right) = 0.$$

Usando, nesta ordem, a Proposição 1.2.3, a igualdade (3.5) e o paralelismo de  $\partial_t$  em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  (Proposição 1.6.2), temos que

$$\begin{aligned} A(X) &= -(\overline{\nabla}_X \eta)^T \\ &= -\left[ \overline{\nabla}_X \left( -\frac{a'(s)}{b(s)}N_s + \frac{1}{b(s)}\partial_t \right) \right]^T \\ &= -\left[ -\frac{a'(s)}{b(s)}\overline{\nabla}_X N_s + X \left( -\frac{a'(s)}{b(s)} \right) N_s + \frac{1}{b(s)}\overline{\nabla}_X \partial_t + X \left( \frac{1}{b(s)} \right) N_s \right]^T \\ &= -\left( -\frac{a'(s)}{b(s)}\overline{\nabla}_X N_s \right)^T \\ &= \frac{a'(s)}{b(s)} (\overline{\nabla}_X N_s)^T. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como  $g_s(M^{n-1}) \subset \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , temos que  $X = X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}$ . Além disso,  $N_s \in \mathcal{X}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n)$ , isto é,  $N_s = (N_s)_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}$ . Denote por  $A_{N_s}$  o operador forma associado ao campo de vetores normais unitários  $N_s$ , e por  $\nabla^1$  e  $\nabla^2$  as conexões de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e  $\mathbb{R}$ , respectivamente. Assim, usando, novamente nesta ordem, o Corolário 1.4.3 e a Proposição 1.2.3, na equação (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} A(X) &= \frac{a'(s)}{b(s)} \left( \nabla_{X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}}^1 (N_s)_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} + \nabla_{X_{\mathbb{R}}}^2 (N_s)_{\mathbb{R}} \right)^T \\ &= \frac{a'(s)}{b(s)} \left( \nabla_{X_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}}^1 (N_s)_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} \right)^T \\ &= \frac{a'(s)}{b(s)} (\nabla_X^1 N_s)^T \\ &= -\frac{a'(s)}{b(s)} A_{N_s}(X). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim, as  $n-1$  direções principais da hipersuperfície  $g_s$ , as quais denotaremos por  $e_1^s, e_2^s, \dots, e_{n-1}^s$ , são também direções principais da hipersuperfície  $f$ . Se  $\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_{n-1}^s$  denotam as curvaturas principais de  $g_s$  associadas a  $e_1^s, e_2^s, \dots, e_{n-1}^s$ , respectivamente, então segue de (3.7) que

$$\lambda_i = -\frac{a'(s)}{b(s)} \lambda_i^s, \quad (3.8)$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ , correspondem às primeiras  $n-1$  curvaturas principais de  $f$ . Vamos agora obter a  $n$ -ésima e última curvatura principal  $\lambda_n = \lambda$  de  $f$ .

Pela equação (2.20) e pela Propriedade 2.1.2, temos que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta, df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} &= \left\langle -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right) N_s(x) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{b(s)} \right) \partial_t + \varepsilon \frac{a'(s)}{b(s)} g_s(x), N_s(x) + a'(s) \partial_t \right\rangle_{\mathcal{P}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right) \langle N_s(x), N_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} - a'(s) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right) \langle N_s(x), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{b(s)} \right) \langle \partial_t, N_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} + a'(s) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{b(s)} \right) \langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\quad + \varepsilon \frac{a'(s)}{b(s)} \langle g_s(x), N_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} + \varepsilon \frac{(a'(s))^2}{b(s)} \langle g_s(x), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De início, como  $N_s \in \mathcal{X}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n)$  e  $\partial_t$  é o campo coordenado tangente a fibra  $\mathbb{R}$ , concluímos que eles são vetores ortonormais. Assim, a expressão acima se torna

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta, df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} &= \varepsilon \frac{a'(s)}{b(s)} \langle g_s(x), N_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} + \varepsilon \frac{(a'(s))^2}{b(s)} \langle g_s(x), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right) + a'(s) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{b(s)} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se  $\varepsilon = 1$ , temos que  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n = \mathbb{S}^n$ . Dessa forma, a posição  $g_s(x) \in \mathbb{S}^n$  é ortogonal ao campo  $N_s(x) \in T\mathbb{S}^n$ . Como a posição  $g_s(x) \in \mathbb{S}^n$  não tem componente em  $\mathbb{R}$ , concluímos que  $g_s$  e  $\partial_t$  são ortogonais, isto é,  $\langle g_s(x), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} = 0$ . Pode-se repetir o mesmo argumento para  $\varepsilon = -1$ . Em todo caso, inclusive para  $\varepsilon = 0$ , a igualdade em (3.10) se torna

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta, df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} &= -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right) + a'(s) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{b(s)} \right) \\ &= -\frac{b(s)a''(s) - a'(s)b'(s)}{b^2(s)} - a'(s) \frac{b'(s)}{b^2(s)} \\ &= \frac{-b(s)a''(s) + a'(s)b'(s) - a'(s)b'(s)}{b^2(s)} \\ &= -\frac{a''(s)}{b(s)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como vimos em (2.24), vale que

$$\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta = \bar{\nabla}_{\partial_s} \eta + [\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta]^\perp.$$

Dessa forma, substituindo a igualdade acima em (3.11), obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{\partial_s} \eta, df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} = -\frac{a''(s)}{b(s)}. \quad (3.12)$$

Agora, na demonstração do Teorema 2.1.7 obtivemos que  $\partial_s$  é uma direção principal de  $f$  associada ao operador forma  $A$ . Assim, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  para o qual  $A(\partial_s) = \lambda \partial_s$ . Primeiro lembrando que identificamos  $df(\partial_s)$  com  $\partial_s$  e depois usando a Propriedade 2.1.2, temos

$$\begin{aligned} \langle A(\partial_s), df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle \lambda \partial_s, df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \lambda \langle df(\partial_s), df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \lambda \langle N_s(x) + a'(s)\partial_t, N_s(x) + a'(s)\partial_t \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \lambda [\langle N_s(x), N_s(x) \rangle_{\mathcal{P}} + 2a'(s)\langle N_s(x), \partial_t \rangle_{\mathcal{P}} + (a'(s))^2 \langle \partial_t, \partial_t \rangle_{\mathcal{P}}] \\ &= \lambda [1 + (a'(s))^2] \\ &= \lambda b^2(s). \end{aligned}$$

Donde, isolando  $\lambda$ , obtemos

$$\lambda = \frac{\langle A(\partial_s), df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}}}{b^2(s)}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, usando o fato de que  $\nabla_{\partial_s}^\perp \eta = \bar{\nabla}_{\partial_s} \eta + A(\partial_s)$  e a equação (3.12), temos

$$\begin{aligned} \langle A(\partial_s), df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} &= \langle \nabla_{\partial_s}^\perp \eta - \bar{\nabla}_{\partial_s} \eta, df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= \langle \nabla_{\partial_s}^\perp \eta, df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} - \langle \bar{\nabla}_{\partial_s} \eta, df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= -\langle \bar{\nabla}_{\partial_s} \eta, df(\partial_s) \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= -\left( -\frac{a''(s)}{b(s)} \right) \\ &= \frac{a''(s)}{b(s)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por fim, substituindo (3.14) em (3.13), concluímos que a  $n$ -ésima curvatura principal da hipersuperfície  $f$  é dada por

$$\lambda_n = \lambda = \frac{\frac{a''(s)}{b(s)}}{b^2(s)} = \frac{a''(s)}{b^3(s)}. \quad (3.15)$$

A curvatura média normalizada de  $g_s$  é dada por

$$H_s = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^s,$$

enquanto que a curvatura média normalizada de  $f$  é

$$H_f = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i.$$

Assim, substituindo (3.8) e (3.15) na igualdade acima, temos

$$H_f = \frac{a''(s)}{b^3(s)} + \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{a'(s)}{b(s)} \lambda_i^s = \frac{a''(s)}{b^3(s)} - \frac{a'(s)}{b(s)} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^s = \frac{a''(s)}{b^3(s)} - \frac{a'(s)}{b(s)} H_s. \quad (3.16)$$

Visto que  $\rho(s) = \frac{a'(s)}{b(s)}$ , temos

$$\begin{aligned} \rho'(s) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right) = \frac{b(s)a''(s) - a'(s)b'(s)}{b^2(s)} \\ &= \frac{a''(s)\sqrt{1+(a'(s))^2} - a'(s)\frac{a'(s)a''(s)}{\sqrt{1+(a'(s))^2}}}{1+(a'(s))^2} \\ &= \frac{a''(s)\sqrt{1+(a'(s))^2}}{1+(a'(s))^2} - \frac{(a'(s))^2 a''(s)}{[1+(a'(s))^2]\sqrt{1+(a'(s))^2}} \\ &= \frac{a''(s)[1+(a'(s))^2] - (a'(s))^2 a''(s)}{[1+(a'(s))^2]\sqrt{1+(a'(s))^2}} \\ &= \frac{a''(s)}{[1+(a'(s))^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{a''(s)}{b^3(s)}. \end{aligned}$$



Logo, (3.16) se torna

$$H_f = -\rho(s)H_s + \rho'(s),$$

como queríamos. ■

Como uma hipersuperfície possui curvatura média normalizada constante se, e somente se, ela possui curvatura média constante, para efeito do que vamos mostrar, podemos identificar esses dois conceitos.

**Teorema 3.2.2** *Sejam  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  uma hipersuperfície isoparamétrica e  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto de tal forma que a hipersuperfície paralela à  $g$ ,  $g_s : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , é uma imersão, para todo  $s \in I$ . Seja também  $H_s(x) = H(s)$  a curvatura média de  $g_s$ . Dados  $H$ ,  $\phi_0 \in \mathbb{R}$  e  $s_0 \in I$  com  $0 < \phi_0 < 1$ , considere uma restrição de  $I$ , que denotaremos por  $\bar{I}$ , de tal forma que a função*

$$\phi(s) := \frac{1}{\psi(s)} \left[ \phi_0 + H \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau \right], \quad (3.17)$$

satisfaz  $0 < \phi(s) < 1$ , para todo  $s \in \bar{I}$ , onde  $\psi(s)$  é dada por

$$\psi(s) = \exp \left( - \int_{s_0}^s H(\tau) d\tau \right). \quad (3.18)$$

Defina  $a : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$a(s) = a_0 + \int_{s_0}^s \frac{\phi(\tau)}{\sqrt{1 - \phi^2(\tau)}} d\tau, \quad (3.19)$$

para algum  $a_0 \in \mathbb{R}$ . Então, a aplicação  $f : M^{n-1} \times \bar{I} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, s) = g_s(x) + a(s)\partial_t \quad (3.20)$$

é uma hipersuperfície com curvatura média constante  $H$  que tem  $\mathcal{T}$  como uma de suas direções principais. Por outro lado, qualquer hipersuperfície  $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , com função ângulo  $\nu$  que não se anula em nenhum ponto, com curvatura média constante  $H$  e que possui  $\mathcal{T}$  como uma de suas direções principais é dada localmente por (3.20).

### Demonstração:

Provaremos, inicialmente, a primeira parte do Teorema. Por hipótese, temos que  $f : M^{n-1} \times \bar{I} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  é definida assim como em (3.20), onde  $a : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por (3.19). Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$a'(s) = \frac{\phi(s)}{\sqrt{1 - \phi^2(s)}}. \quad (3.21)$$

Donde segue que  $a'(s) > 0$ , pois temos por hipótese que  $0 < \phi(s) < 1$ , para todo  $s \in \bar{I}$ . Assim, do Teorema 2.1.7, concluímos que  $\mathcal{T}$  é uma direção principal da hipersuperfície  $f$ .

Resta mostrar que  $f$  tem curvatura média constante  $H$ .

Pelo Lema 3.2.1, se  $H_f$  e  $H_s$  denotam as curvaturas média de  $f$  e  $g_s$ , respectivamente, então vale a seguinte equação

$$H_f(x, s) = -\rho(s)H_s(x) + \rho'(s), \quad (3.22)$$

onde  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável dada por  $\rho(s) = \frac{a'(s)}{b(s)}$ . Dessa forma, usando (3.21), temos que

$$\begin{aligned} \rho(s) = \frac{a'(s)}{b(s)} &= \frac{a'(s)}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} = \frac{\frac{\phi(s)}{\sqrt{1-\phi^2(s)}}}{\sqrt{1 + \left[ \frac{\phi(s)}{\sqrt{1-\phi^2(s)}} \right]^2}} \\ &= \frac{\frac{\phi(s)}{\sqrt{1-\phi^2(s)}}}{\sqrt{1 + \frac{\phi^2(s)}{1-\phi^2(s)}}} \\ &= \frac{\frac{\phi(s)}{\sqrt{1-\phi^2(s)}}}{\sqrt{\frac{1}{1-\phi^2(s)}}} \\ &= \phi(s). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Donde, substituindo (3.23) em (3.22), temos

$$H_f = -\phi(s)H_s + \phi'(s). \quad (3.24)$$

Por hipótese, temos que  $\psi(s)$  é dada por (3.18). Note que o fato de  $\psi$  depender somente de  $s$ , isto é,  $\psi$  não depende de  $x \in M^{n-1}$ , é consequência da hipótese de que  $g$  é isoparamétrica. De fato, pois pelo Lema 1.3.4,  $g$  é isoparamétrica se, e somente se, a curvatura média  $H_s$  de  $g_s$  depende apenas de  $s$ , isto é,  $H_s$  não depende de  $x \in M^{n-1}$ . Assim, temos que

$$\psi'(s) = -H(s) \exp\left(-\int_{s_0}^s H(\tau) d\tau\right) = -H(s)\psi(s) = -H_s\psi(s). \quad (3.25)$$

Como  $\phi$  é dada por (3.17), usando (3.25), a igualdade (3.24) se torna

$$\begin{aligned}
 H_f &= -H_s \left[ \frac{1}{\psi(s)} \left( \phi_0 + H \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau \right) \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{1}{\psi(s)} \left( \phi_0 + H \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau \right) \right] \\
 &= \frac{-\phi_0 H_s - H H_s \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau}{\psi(s)} + \frac{H \psi^2(s) - \left( \phi_0 + H \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau \right) \psi'(s)}{\psi^2(s)} \\
 &= \frac{-\phi_0 H_s \psi(s) - H H_s \psi(s) \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau + H \psi^2(s) - \left( \phi_0 + H \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau \right) [-H_s \psi(s)]}{\psi^2(s)} \\
 &= \frac{-\phi_0 H_s \psi(s) - H H_s \psi(s) \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau + H \psi^2(s) + \phi_0 H_s \psi(s) + H H_s \psi(s) \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau}{\psi^2(s)} \\
 &= H.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  possui curvatura média constante  $H_f = H$ , como queríamos.

Mostraremos agora a segunda parte do teorema. Seja  $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , uma hipersuperfície com função ângulo  $\nu$  que não se anula em nenhum ponto e que possui  $\mathcal{T}$  como uma de suas direções principais. Pelo Teorema 2.1.7, temos que  $\mathcal{M}^n = M^{n-1} \times I$  e, então,  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  é dada localmente por

$$f(x, s) = g_s(x) + a(s)\partial_t,$$

onde  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável com derivada positiva em  $I \subset \mathbb{R}$ . Assim, pelo Lema 3.2.1, vale a equação

$$H_f(x, s) = -\rho(s)H_s(x) + \rho'(s).$$

Por hipótese,  $f$  possui curvatura média  $H_f = H$  constante, isto é,  $H_f$  não depende do ponto  $(x, s) \in M^{n-1} \times I$ . Assim, a equação acima se torna

$$H = -\rho(s)H_s(x) + \rho'(s). \tag{3.26}$$

Logo, por (3.26), podemos escrever a curvatura média  $H_s$  de  $g_s$  em função apenas de  $s$ , ou ainda,  $H_s = H(s)$  não depende do ponto  $x \in M^{n-1}$ . Segue do Lema 1.3.4 que  $g$  é uma hipersuperfície isoparamétrica.

Considere agora uma função diferenciável positiva definida  $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $\psi'(s) = -H_s \psi(s)$ . Multiplicando a equação (3.26) por  $\psi(s)$  em ambos os lados, obtemos que

$$H\psi(s) = -\rho(s)H_s\psi(s) + \rho'(s)\psi(s).$$

Como  $\psi'(s) = -H_s\psi(s)$ , a equação acima equivale a

$$H\psi(s) = \rho(s)\psi'(s) + \psi(s)\rho'(s),$$

donde segue que

$$H\psi(s) = \frac{d}{ds}[\rho(s)\psi(s)].$$

Assim, integrando com respeito a  $s$  em ambos os lados, temos

$$c + H \int_{s_0}^s \psi(\tau)d\tau = \rho(s)\psi(s),$$

para alguma constante  $c \in \mathbb{R}$  e para algum  $s_0 \in I$ . Sendo  $\psi$  positiva definida, podemos então escrever

$$\rho(s) = \frac{1}{\psi(s)} \left[ c + H \int_{s_0}^s \psi(\tau)d\tau \right]. \quad (3.27)$$

Vamos agora encontrar a função  $\psi$ . Lembrando que  $\psi'(s) = -H_s\psi(s)$ , temos

$$\frac{1}{\psi(s)}\psi'(s) = -H_s.$$

Que por sua vez equivale a

$$\frac{d}{ds}[\ln(\psi(s))] = -H_s.$$

Integrando com respeito a  $s$  em ambos os lados, obtemos

$$\ln(\psi(s)) = - \int_{s_0}^s H(\tau)d\tau.$$

Portanto, concluimos que

$$\psi(s) = \exp \left( - \int_{s_0}^s H(\tau)d\tau \right). \quad (3.28)$$

Agora, lembrando que  $\rho(s) = \frac{a'(s)}{b(s)}$ , onde  $b(s) = \sqrt{1 + (a'(s))^2}$ , podemos escrever

$$\rho^2(s) = \frac{(a'(s))^2}{1 + (a'(s))^2},$$

que por sua vez é equivalente a

$$\rho^2(s) = (a'(s))^2(1 - \rho^2(s)).$$

### 3.2. Hipersuperfícies da Classe $\mathcal{A}$ com Curvatura Média Constante 100

---

Assim, como  $a'(s) > 0$  para todo  $s \in I$ , podemos escrever

$$a'(s) = \frac{\rho(s)}{\sqrt{1 - \rho^2(s)}}.$$

Portanto, integrando em ambos os lados com respeito a  $s$ , temos

$$a(s) = a_0 + \int_{s_0}^s \frac{\rho(\tau)}{\sqrt{1 - \rho^2(\tau)}} d\tau, \quad (3.29)$$

para alguma constante  $a_0 \in \mathbb{R}$ .

Assim, tomando um subconjunto  $\bar{I}$  de  $I$  de tal forma que  $0 < \rho(s) < 1$ , para todo  $s \in \bar{I}$ , temos que  $a : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida.

Finalmente, tomando  $\phi = \rho$  em  $\bar{I}$ , concluímos de (3.27) que

$$\phi(s) = \frac{1}{\psi(s)} \left[ c + H \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau \right],$$

satisfaz  $0 < \phi(s) < 1$ , para todo  $s \in \bar{I}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , onde, por (3.28), temos que  $\psi(s)$  é dada por

$$\psi(s) = \exp \left( - \int_{s_0}^s H(\tau) d\tau \right),$$

e, ainda, por (3.29), vale que

$$a(s) = a_0 + \int_{s_0}^s \frac{\phi(\tau)}{\sqrt{1 - \phi^2(\tau)}} d\tau,$$

para algum  $a_0 \in \mathbb{R}$ .

Isso conclui a demonstração do Teorema. ■

# Conclusão

Neste trabalho, estudamos as hipersuperfícies dos espaços produto  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  com fibrado normal plano quando vistas como subvariedade do espaço euclidiano  $\mathbb{E}^{n+2} \supset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  ou do Espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^{n+2} \supset \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ .

Seja  $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ) uma hipersuperfície. Como vimos, o campo unitário tangente a fibra  $\mathbb{R}$ , o qual denotamos por  $\partial_t$ , pode ser escrito da forma

$$\partial_t = \mathcal{T} + \nu\eta, \quad (3.30)$$

onde  $\mathcal{T}$  é a projeção de  $\partial_t$  sobre o espaço tangente de  $\mathcal{M}$ ,  $\eta$  é o campo de vetores normais unitários de  $f$  e  $\nu = \langle \partial_t, \eta \rangle_{\mathcal{P}}$ .

Mostramos que uma hipersuperfície de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ) possui fibrado normal plano quando vista como subvariedade de  $\mathbb{E}^{n+2}$  (respectivamente,  $\mathbb{L}^{n+2}$ ), se, e somente se, o campo  $\mathcal{T}$  é uma de suas direções principais. Seguimos Tojeiro e Mendonça em [15] e também chamamos de classe  $\mathcal{A}$  a classe das hipersuperfícies que satisfazem tal propriedade. Tivemos como principal fonte bibliográfica o artigo [22], também do Tojeiro.

Sejam  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n$ ) e  $g_s : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n$ ) a hipersuperfície paralela a  $g(M)$ . Definimos  $f : \mathcal{M}^n := M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ) por

$$f(x, s) = g_s(x) + a(s)\partial_t, \quad (3.31)$$

com  $(x, s) \in M^{n-1} \times I$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto e  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável com derivada positiva. Mostramos que a aplicação  $f$  define, em

pontos regulares, uma hipersuperfície que pertence a classe  $\mathcal{A}$ . Além disso, qualquer hipersuperfície  $f : \mathcal{M}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ),  $n \geq 2$ , pertencente a classe  $\mathcal{A}$  com função ângulo  $\nu$  que não se anula em nenhum ponto é dada localmente por (3.31). Obtivemos então uma forma de construir as hipersuperfícies pertencentes a classe  $\mathcal{A}$ .

No campo das aplicações, estabelecemos condições para que a função ângulo  $\nu$  de uma hipersuperfície  $f$  dos espaços produto seja constante. Se  $f$  é dada assim como em (3.31), onde  $a(s) = As$  para algum número positivo  $A \in \mathbb{R}$ , então  $\nu$  é constante. Por outro lado, se  $f$  possui função ângulo  $\nu$  constante então  $f$  é um subconjunto aberto de um espaço produto do tipo  $\mathbb{S}^n \times \{t_0\}$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n \times \{t_0\}$ ), para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ ; ou é um subconjunto aberto do produto  $M^{n-1} \times \mathbb{R}$ , onde  $M^{n-1}$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{S}^n$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n$ ); ou é dada localmente por (3.31) com  $a(s) = As$ ,  $0 < A \in \mathbb{R}$ .

Obtivemos uma equação que descreve como são as curvaturas principais da hipersuperfície  $f$  dada em (3.31) a partir das curvaturas principais da hipersuperfície paralela  $g_s$  associada a  $f$  e, por consequência, nos dá uma equação diferencial que envolve a curvatura média normalizada de  $g_s$  e a curvatura média normalizada de  $f$ , as quais denotamos por  $H_s$  e  $H_f$ , respectivamente. Se denotarmos por  $\rho(s) = \frac{a'(s)}{\sqrt{1+(a'(s))^2}}$ , tal equação é escrita da seguinte maneira

$$H_f(x, s) = -\rho(s)H_s(x) + \rho'(s),$$

onde  $(x, s) \in M^{n-1} \times I$ .

Neste contexto, classificamos totalmente todas as hipersuperfícies pertencentes a classe  $\mathcal{A}$  que possuem curvatura média constante. Se  $f$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  (respectivamente,  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ) dada localmente por (3.31) de tal forma que  $g$  é isoparamétrica e

$$a(s) = a_0 + \int_{s_0}^s \frac{\phi(\tau)}{\sqrt{1-\phi^2(\tau)}} d\tau, \tag{3.32}$$

para algum  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $s_0 \in I$  e  $\phi$  satisfazendo  $0 < \phi(s) < 1$  para todo  $s \in I$ , com

$$\phi(s) := \frac{1}{\psi(s)} \left[ \phi_0 + H \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau \right],$$

para algum  $H \in \mathbb{R}$  e  $0 < \phi_0 < 1$ , onde

$$\psi(s) = \exp \left( - \int_{s_0}^s H(x, \tau) d\tau \right),$$

### 3.2. Hipersuperfícies da Classe $\mathcal{A}$ com Curvatura Média Constante 103

---

em que  $H_s(x) = H(x, s)$  é a curvatura média de  $g_s$  em  $x \in M^{n-1}$ , então  $f$  pertence a classe  $\mathcal{A}$  e possui curvatura média constante  $H$ . Por outro lado, qualquer hipersuperfície  $f$  pertencente a classe  $\mathcal{A}$  e de curvatura média constante  $H$ , com  $\nu \neq 0$ , é dada localmente por (3.31), onde  $g$  isoparamétrica e  $a(s)$  satisfaz (3.32).



# Bibliografia

- [1] J. A. Aledo, J. M. Espinar, and J. A. Gálvez, *Complete surfaces of constant curvature in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* , Calculus of Variations and Partial Differential Equations **29** (2007), no. 3, 347–363.
- [2] ———, *Surfaces with constant curvature in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . height estimates and representation*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society **38** (2007), no. 4, 533–554.
- [3] G. Calvaruso, D. Kowalczyk, and J. Van der Veken, *On extrinsically symmetric hypersurfaces of  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Bull. Aust. Math. Soc **82** (2010), no. 3, 390–400.
- [4] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 5a ed, Rio de Janeiro, 2015.
- [5] M. P. do Carmo and M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Transactions of the American Mathematical Society **277** (1983), no. 2, 685–709.
- [6] E. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **17** (1938), no. 1, 177–191.
- [7] B. Daniel, *Isometric immersions into  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  and applications to minimal surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society **361** (2009), no. 12, 6255–6282.
- [8] F. Dillen, J. Fastenakels, and J. Van der Veken, *Rotation hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Note di Matematica **29** (2009), 41–54.

- 
- [9] ———, *Surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  with a canonical principal direction*, Annals of Global Analysis and Geometry **35** (2009), no. 4, 381–396.
- [10] F. Dillen, J. Fastenakels, J. Van der Veken, and L. Vrancken, *Constant angle surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* , Monatshefte für Mathematik **152** (2007), no. 2, 89–96.
- [11] F. Dillen and M. I. Munteanu, *Constant angle surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Bull. Braz. Math. Soc **40** (2009), no. 1, 85–97.
- [12] F. Dillen, M. I. Munteanu, and A. I. Nistor, *Canonical coordinates and principal directions for surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Taiwanese J. Math **15** (2011), no. 5, 2265–2289.
- [13] J. M. Espinar, *La ecuación de codazzi en superficies*, Ph.D. thesis, Universidad de Granada, 2008.
- [14] F. Manfio and R. Tojeiro, *Hypersurfaces with constant sectional curvature of  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Illinois J. Math. **55** (2011), no. 1, 397–415 (2012).
- [15] B. Mendonça and R. Tojeiro, *Umbilical submanifolds of  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$* , Canad. J. Math. **66** (2014), no. 2, 400–428.
- [16] M. I. Munteanu and A. I. Nistor, *A new approach on constant angle surfaces in  $\mathbb{E}^3$* , Turkish Journal of Mathematics **33** (2009), no. 2, 168–178.
- [17] R. M. de Novais, *Hipersuperfícies de rotação em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Dissertação (Mestrado em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasil 2017.
- [18] R. M. de Novais and J. P. dos Santos, *Intrinsic and extrinsic geometry of hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Journal of Geometry **108** (2017), no. 3, 1115–1127.
- [19] B. O’neill, *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*, vol. 103, Academic press, Pure and applied mathematics, New York 1983.
- [20] S. Otten, *An introduction to distributions and foliations*, Notas de Aula, Michigan State University, Disponível em: <<https://msu.edu/~ottensam/Foliations.pdf>>, Acesso em: 31 de janeiro de 2018.

- 
- [21] H. F. S. Reis, *Sobre o fluxo de curvatura média em formas espaciais*, Tese de Doutorado, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasil 2017.
- [22] R. Tojeiro, *On a class of hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series **41** (2010), no. 2, 199–209.
- [23] F. Ulhoa and M. Lourenço, *Um Curso de Álgebra Linear*, Edusp, 2a ed, São Paulo 2013.
- [24] J. Van der Veken and L. Vrancken, *Parallel and semi-parallel hypersurfaces of  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$* , Bulletin of the Brazilian Mathematical Society **39** (2008), no. 3.
- [25] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, vol. 94, Springer Science & Business Media, 2013.