Universidade de Brasília (UnB)
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

A Landesman-Lazer local condition for nonlinear elliptic problems

por

Pedro Manuel Sánchez Aguilar

Orientador: Elves Alves de Barros e Silva

Brasília

2017

Universidade de Brasília (UnB)
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

A Landesman-Lazer local condition for nonlinear elliptic problems

por

Pedro Manuel Sánchez Aguilar *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 28 de Julho de 2017

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva (UnB)-Orientador

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros (UFPB)

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (UnB)

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares (USP)

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SSA194l

Sánchez Aguilar, Pedro Manuel
A Landesman-Lazer local condition for nonlinear elliptic problems / Pedro Manuel Sánchez Aguilar; orientador Elves Alves de Barros e Silva. -- Brasília, 2017.
100 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. Matemática. 2. Problemas elípticos não lineares. 3. Métodos variacionais. 4. Condição de Landesman-Lazer. 5. Método de redução de Lyapunov Schmidt. I. Alves de Barros e Silva, Elves , orient. II. Título.

Agradecimentos

À Deus, por permitir mais uma conquista.

Ao Professor Elves Alves de Barros e Silva e a professora Manuela Caetano Martins de Rezende que me orientaram no presente trabalho motivando a estudar e a seguir em frente transmitindo sua experiência de forma pontual e precisa.

Aos membros da banca examinadora, professores Everaldo Souto de medeiros, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Sérgio Henrique Monari Soares, pela disponibilidade para participar e pelas valiosas sugestões.

Aos meus pais Hermenegildo Sánchez Vega e Gladys Teodonila Aguilar Viteri, a meus avós Emperatrys Viteri Anhuaman, Paula Vega e Pedro Sánchez Azabache, a minha esposa Olinda Cristina Gamboa Murga e a minha filha Gladys Sánchez Gamboa por me apoiarem em todos os momentos.

Aos meus irmãos Alvaro, Mercy, Einer Gladys e Harvey por acreditarem no sucesso desta jornada.

Aos professores e amigos do Departamento de Matemática-UnB, por estarem sempre presentes a pesar de todos os seus compromissos, sempre estiveram à disposição.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a existência, multiplicidade e não existência de soluções para problemas elípticos não-lineares dependendo de um parâmetro sob uma hipótese do tipo Landesman-Lazer. Para estabelecer a existência de solução combinamos o Método de Redução de Lyapunov-Schmidt e a técnica de congelamento do termo gradiente com argumentos de truncamento e aproximação através de métodos de bootstrap. Não há restrição de crescimento no infinito sobre o termo não-linear o qual pode mudar de sinal.

Palavras-chave: Problemas elípticos não lineares, métodos variacionais, método de redução de Lyapunov-Schmidt, condição de Landesman-Lazer.

Abstract

The purpose of this work is to study the existence, multiplicity and non existence of solutions for nonlinear elliptic problems depending on a parameter under Landesman-Lazer type hypotheses. In order to establish the existence of solution we combine the Lyapunov-Schmidt Reduction Method and the term gradient freeze technique with truncation and approximation arguments via bootstrap methods. There is no growth restriction at infinity on the nonlinear term and it may change sign.

Key words: Nonlinear elliptic problems, variational methods, Lyapunov-Schmidt Reduction Method, Landesman-Lazer condition.

Contents

Notations

Throughout this work we use the following notations

- For $k \in \mathbb{N}$ and $0 < \gamma \leq 1$,

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : H_\gamma(D^\alpha u) < \infty \text{ for } 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

where $H_\gamma(D^\alpha u) = \sup\{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|/|x-y|^\gamma : x, y \in \Omega, x \neq y\}$, with norm given by

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha| \leq k} H_\gamma(D^\alpha u).$$

- For $1 < q < \infty$,

$$L^q(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ is measurable and } \int_\Omega |u|^q dx < \infty\right\}$$

with norm given by

$$\|u\|_q = \left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{1/q}.$$

- $L^\infty(\Omega)$ denotes the space of the measurable functions that are almost every bounded in Ω with norm given by

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ a.e. in } \Omega\}.$$

- For $k \in \mathbb{N}$ and $1 \leq q < \infty$,

$$W^{k,q}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ for } 0 \leq |\alpha| \leq k\right\}$$

with norm given by

$$\|u\|_{k,q} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|D^{\alpha}u\|_q^q \right)^{1/q}.$$

- $H_0^1(\Omega)$ is the clousure of $C_0^{\infty}(\Omega)$ in the space $W^{1,2}(\Omega)$ with norm given by

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

- The symbols A, d_q, K and K_i, $i = 1, 2, \cdots$, represent positive constants, reserving d_q for the embedding constant of $H_0^1(\Omega)$ into $L^q(\Omega)$, $q \in [1, 2^*]$.

Introdução

Neste trabalho utilizamos métodos variacionais, o Método de Redução de Lyapunov-Schmidt e a técnica do congelamento do termo gradiente, para o estudo de existência, multiplicidade e não-existência de soluções para problemas elípticos não-lineares dependendo de um parâmetro sob hipóteses do tipo Landesman-Lazer. O nosso principal objetivo é considerar problemas em que não há restrição de crescimento global sobre o termo não-linear e onde este termo pode mudar de sinal.

No Capítulo 1 deste trabalho consideramos a existência e não-existência de soluções fracas para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \mu h(x,u) \text{ em } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$, $\overline{\lambda} < \lambda_2$, λ_2 é o segundo autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$; $\mu \neq 0$ é um parâmetro real e $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory satisfazendo

(h_0) para todo $A > 0$ existe $f_A \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N/2$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 1$ se $N = 1, 2$, tal que

$$|h(x,s)| \leq f_A(x), \text{ para todo } |s| \leq A, \text{ para quase todo } x \in \overline{\Omega};$$

e

(h_1) dado $A_1 > 0$ existe $\zeta := \zeta(A_1) \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N/2$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 1$ se $N = 1, 2$, tal que

$$|h(z,s_1) - h(z,s_2)| \leq \zeta(z)|s_1 - s_2|, \text{ para todos } z \in \overline{\Omega}, \ |s_1|, \ |s_2| \leq A_1.$$

Nosso principal objetivo é estabelecer a existência de múltiplas soluções para o Problema (1.1). Para esse resultado, consideramos que

(h_2) existem $k \in \mathbb{N}$ e $t_i \in \mathbb{R}$, $t_i < t_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k$ tais que

$$\left[\int_\Omega h(x, t_i\varphi_1)\varphi_1 dx\right]\left[\int_\Omega h(x, t_{i+1}\varphi_1)\varphi_1 dx\right] < 0,$$

onde φ_1 é uma autofunção positiva associada a λ_1.

Theorem 1.1. *Suponha que h satisfaz (h_0), (h_1) e (h_2). Então, existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para todos $0 < |\mu| < \mu^*$ e $|\lambda - \lambda_1| < |\mu|\nu^*$, o Problema* (1.1) *possui k soluções $u_i = \hat{t}_i\varphi_1 + v_i$ de classe $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $\hat{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$ e $v_i \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$, $i = 1, \cdots, k$.*

É importante notar que, no Teorema 1.1, a não-linearidade não tem restrição de crescimento global e as projeções das soluções u_i, sobre a direção de φ_1, estão localizadas entre $t_i\varphi_1$ e $t_{i+1}\varphi_1$.

O Teorema 1.1 é uma consequência direta de dois resultados que garantem a existência de um solução para o Problema (1.1) sob um dos seguintes casos particulares de (h_2):

(h_2^+) existem números reais t_1 e t_2, com $t_1 < t_2$, tais que

$$\int_\Omega h(x, t_1\varphi_1)\varphi_1 dx > 0 > \int_\Omega h(x, t_2\varphi_1)\varphi_1 dx,$$

ou

(h_2^-) existem números reais t_1 e t_2, com $t_1 < t_2$, tais que

$$\int_\Omega h(x, t_1\varphi_1)\varphi_1 dx < 0 < \int_\Omega h(x, t_2\varphi_1)\varphi_1 dx.$$

Em nosso primeiro resultado sobre existência, usamos métodos variacionais para estabelecer a existência de uma solução fraca para o Problema (1.1), considerando a hipótese (h_2^+) e menos regularidade na função h. Mais precisamente, temos:

Teorema 1.2. *Suponha que h satisfaz (h_0) e (h_2^+). Então,existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para todos $\mu \in (0, \mu^*)$ e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, o Problema* (1.1) *possui uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$ de classe $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $t \in (t_1, t_2)$ e $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

Para estabelecer a existência de uma solução sob a hipótese (h_2^-), precisamos supor mais regularidade na função h.

Teorema 1.3. *Suponha que h satisfaz (h_0), (h_1) e (h_2^-). Então, existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para todos $\mu \in (0, \mu^*)$ e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, o Problema (1.1) possui uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$ de classe $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $t \in (t_1, t_2)$ e $v \in \langle \varphi_1 \rangle^\perp$.*

Observação 1.4. *Se assumimos em (h_0) e (h_1) que $\sigma > N$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 1$ se $N = 1, 2$, a solução u_μ do Problem (1.1), dado no Teorema 1.2 ou 1.3, é de classe $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$. Usando este fato podemos provar que u_μ é positiva ou negativa em Ω, desde que $t_1 \geq 0$ ou $t_2 \leq 0$, respectivamente. Além disso, para $|\mu| > 0$ suficientemente pequeno, as soluções do Teorema 1.1 são ordenadas (veja os Teoremas 1.20 e 1.21).*

Observe que a hipótese (h_2) é uma condição do tipo Landesman-Lazer, veja [35]. De fato, no caso onde a não-linearidade h, dada em (1.1), é da forma $h(x, s) = f(x) - g(s)$, onde $f \in L^\sigma(\Omega)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continua limitada, com limites finitos $g^- := \lim_{s \to -\infty} g(s)$ e $g^+ := \lim_{s \to \infty} g(s)$, a condição de Landesman-Lazer

$$g^\mp \int_\Omega \varphi_1 dx < \int_\Omega f\varphi_1 dx < g^\pm \int_\Omega \varphi_1 dx$$

nos assegura que

$$\lim_{t \to -\infty} \int_\Omega h(x, t\varphi_1)\varphi_1 dx = \int_\Omega (f - g^-)\varphi_1 dx > (<) 0$$

e

$$\lim_{t \to +\infty} \int_\Omega h(x, t\varphi_1)\varphi_1 dx = \int_\Omega (f - g^+)\varphi_1 dx < (>) 0.$$

Consequentemente, existem números reais t_1 e t_2, com $t_1 < 0 < t_2$, tais que a condição (h_2^+) (or (h_2^-)) é válida para t_1 e t_2. Em outras palavras, quando $h(x, s) = f(x) - g(s)$, onde f e g são como acima, obtemos que a condição de Landesman-Lazer implica em (h_2^+) (or (h_2^-)).

É importante notar que, sob nossas hipóteses, h pode mudar de sinal em Ω, o que caracteriza o Problema (1.1) como indefinido. Esta classe de problemas tem sido objeto de uma intensa pesquisa nas últimas três décadas desde os trabalhos de Alama e Tarantello [2], Berestycki, Capuzzo e Nirenberg [11] e Ouyang [41]. Veja [3, 4, 5, 21, 23, 26, 27, 38, 47] e suas referências para mais detalhes sobre este tipo de problemas.

As demonstrações dos Teoremas 1.2 e 1.3 são inspiradas no Método de Redução de Lyapunov-Schmidt, conforme apresentado nos artigos [19, 20, 22, 36] . No entanto, sob as hipóteses desses teoremas, dito método não pode ser aplicado diretamente, já que não impomos nenhuma restrição de crescimento global no termo não linear h. Para contornar essa dificuldade, combinamos o Método de Redução de Lyapunov-Schmidt com argumentos de truncamento e aproximação via o método bootstrap.

É importante mencionar que em muitas situações a condição (h_2^+) ou (h_2^-) é suficiente para a existência de uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$, $t \in (t_1, t_2)$, $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$. A seguir estabelecemos a não-existência de soluções para o Problema (2.1) quando a hipótese (h_2) não é valida. De fato, se assumimos que h satisfaz

(h_3) existe $f \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N/2$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 1$ se $N = 1, 2$, tal que

$$|h(x,s)| \leq f(x)(1+|s|), \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \quad \text{para quase todo } x \in \overline{\Omega};$$

e

(h_4) existem números reais t_1 e t_2, com $t_1 < t_2$, tais que

$$\int_\Omega h(x, t\varphi_1)\varphi_1 dx \neq 0, \quad \text{para todo } t \in [t_1, t_2],$$

podemos estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 1.5. *Suponha que h satisfaz (h_3) e (h_4). Então, existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para todos $0 < |\mu| < \mu^*$ e $|\lambda - \lambda_1| < |\mu|\nu^*$, o Problema (1.1) não possui solução fraca $u_\mu = t\varphi_1 + v$, com $t \in [t_1, t_2]$ e $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

É importante notar que o Teorema 1.5 é consequência de um resultado que estabelece que, sob a hipótese (h_4), o Problema (1.1) não possui solução limitada em $L^\infty(\Omega)$.

Como uma aplicação dos Teoremas 1.2 e 1.3, consideramos a existência de uma solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \beta b_1(x)u^q + b_2(x)u^p \text{ em } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde Ω é um domínio suave limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$, $\overline{\lambda} < \lambda_2$, λ_2 é o segundo autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$; $\beta > 0$ é um parâmetro real; $p > q$, com $p \neq 1$, e b_1, $b_2 \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N/2$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 1$ if $N = 1, 2$. Denotemos

$$r_1 := \int_\Omega b_1\varphi_1^{q+1}dx \quad \text{e} \quad r_2 := \int_\Omega b_2\varphi_1^{p+1}dx.$$

Considerando a nomenclatura para problemas elípticos usada na literatura, o Problema (1.2) é superlinear ou sublinear no infinito se $p > 1$ ou $0 < p < 1$ e é superlinear, linear ou sublinear na origem se $q > 1$, $q = 1$ ou $0 < q < 1$. Para o caso linear ou superlinear na origem e superlinear no infinito podemos estabelecer o seguinte resultado.

Proposição 1.6. *Suponha que* $p > q \geq 1$ *e* $r_1 r_2 < 0$. *Então, existem constantes positivas* β^* *e* ν^* *tais que o Problema* (1.2) *possui uma solução de classe* $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, *para todo* $\beta \in (0, \beta^*)$ *e* $|\lambda - \lambda_1| < \beta^{\frac{p-1}{p-q}} \nu^*$.

Para o caso sublinear na origem e superlinear no infinito podemos aplicar o Teorema 2.20.

Proposição 1.7. *Suponha que* $p > q > 0$, $p \neq 1$, $1 > q > 0$ *e* $r_1 > 0 > r_2$. *Então*

(i) *se* $p > 1$, *existem constantes positivas* β_1^* *e* ν_1^* *tais que o Problema* (1.2) *possui uma solução de classe* $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, *para todo* $\beta \in (0, \beta_1^*)$ *e* $|\lambda - \lambda_1| < \beta^{\frac{p-1}{p-q}} \nu_1^*$.

(i) *se* $p < 1$, *existem constantes positivas* β_2^* *e* ν_2^* *tais que o Problema* (1.2) *possui uma solução de classe* $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, *para todo* $\beta \in (\beta_2^*, \infty)$ *e* $|\lambda - \lambda_1| < \beta^{\frac{p-1}{p-q}} \nu_2^*$.

Quando em (1.2) consideramos b_1, $b_2 \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 1$ se $N = 1, 2$, as soluções dadas pela Proposição 1.6 ou 1.7 é de classe $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ e é positiva em Ω (veja Observação 1.27). Além disso, conforme observado no início desta introdução, as funções b_1 e b_2 podem mudar de sinal. Neste caso, o Problema (1.2) é indefinido. Enfatizamos que na Proposição 1.6 e no item (i) da Proposição 1.7, não assumimos a restrição $p < (N+2)/(N-2)$ para garantir a existencia de uma solução para (1.2). Para o caso linear ou superlinear na origem e superlinear no infinito referimos o leitor aos artigos de Ouyang [41], Alama e Tarantello [3] e Medeiros, Severo e Silva [38]. Para o caso sublinear na origem citamos os trabalhos de Ambrosetti, Brezis e Cerami [8] e De Figueiredo, Gossez e Ubilla [26].

Inspirados pelo artigo de Brezis e Nirenberg, veja [15], consideramos uma aplicação da Proposição 1.6 para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + b(x) u^p \text{ em } \Omega, \\ u = & 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda < \lambda_1$, λ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$; $p > 0$ e $b \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N/2$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 1$ se $N = 1, 2$, satisfazendo

$$\int_\Omega b(x) \varphi_1^{p+1} dx > 0. \tag{1.4}$$

Proposição 1.8. *Suponha que b satisfaz (1.4), com $p > 0$ e $p \neq 1$, então existe $\underline{\lambda}$ tal que o Problema (1.3) possui uma solução positiva para todo $\underline{\lambda} < \lambda < \lambda_1$.*

Motivados por Landesman e Lazer, veja [35], também apresentamos outra aplicação do Teorema 1.2 ou 1.3. Ou seja, estamos interessados na solubilidade do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \mu(f(x) + g(u)) \text{ em } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; λ e μ são como em (1.1) e $f \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N/2$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 1$ se $N = 1, 2$.

Para garantir a existência de uma solução para o Problema (1.5), consideramos

(g_1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e existe $M > 0$ tal que

$$g(s) \geq -M \text{ se } s \leq 0 \text{ e } g(s) \leq M \text{ se } s \geq 0.$$

Denotando por $g_i^- := \liminf_{s\to-\infty} g(s)$ e $g_s^+ := \limsup_{s\to+\infty} g(s)$, assumimos:

(LL^+)
$$\int_\Omega (f + g_i^-)\varphi_1 dx > 0 > \int_\Omega (f + g_s^+)\varphi_1 dx.$$

Proposição 1.9. *Suponha que g satisfaz (g_1) e (LL^+). Então, existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para todo $\mu \in (0, \mu^*)$ e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, o Problema (1.5) possui uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$ de classe $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $t \in \mathbb{R}$ e $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

Denotando $g_s^- := \limsup_{s\to-\infty} g(s)$ e $g_i^+ := \liminf_{s\to+\infty} g(s)$, fornecemos um resultado análogo quando

$(\hat{g}_1)$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz e existe $M > 0$ tal que

$$g(s) \leq M \text{ se } s \leq 0 \text{ e } g(s) \geq -M \text{ se } s \geq 0$$

e

(LL^-)
$$\int_\Omega (f + g_s^-)\varphi_1 dx < 0 < \int_\Omega (f + g_i^+)\varphi_1 dx.$$

Proposição 1.10. *Suponha que g satisfaz $(\hat{g}_1)$ e (LL^-). Então, existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para todo $\mu \in (0, \mu^*)$ e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, o Problema (1.5) possui uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$ de classe $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $t \in \mathbb{R}$ e $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

Observação 1.11. *Os resultados anteriores permitem considerar g tal que $g_i^- = +\infty$ e $g_s^+ = -\infty$ ou $g_s^- = -\infty$ e $g_i^+ = +\infty$, respectivamente. Além disso g pode ter um comportamento oscilante ilimitado, o que não ocorre, por exemplo, em [35].*

Ressaltamos que uma aplicação do Teorema 1.1 é dada quando h é uma função polinomial na segunda variável. Veja Proposição 1.28.

Como mencionado anteriormente, h não tem restrição de crescimento, o que impede a aplicação de métodos variacionais, uma vez que o funcional associado não está bem definido. Para provar o Teorema 1.2, inicialmente assumimos que h é limitada com respeito a $L^\sigma(\Omega)$.

Neste caso, usando um argumento de minimização, existe uma constante positiva ν^* tal que, para $\mu > 0$ suficientemente pequeno e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, o Problema (1.1) possui uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$, com $t \in (t_1, t_2)$ e $v \in \langle \varphi_1 \rangle^\perp$. Em seguida, considerando uma função truncamento adequada de h e usando a solubilidade de (1.1), com h limitada com respeito a $L^\sigma(\Omega)$ garantimos a existência de uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$ de classe $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Posteriormente, via um argumento bootstrap, provamos que $\|v\|_\infty \to 0$, quando $\mu \to 0$, isto nos permite encontrar $\mu^* > 0$ tal que u_μ é uma solução do problema (1.1), para todos $\mu \in (0, \mu^*)$ e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$.

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que, sob a condição (h_2^-), não podemos aplicar o método de minimização utilizado na demonstração do Teorema 1.2. A solução, neste caso, é um ponto crítico minimax.

Para provar o Teorema 1.3, inicialmente assumimos que h é limitada com respeito a $L^\sigma(\Omega)$ e Lipschitz com respeito a $L^\sigma(\Omega)$ na segunda variável.

Sob estas hipóteses, podemos aplicar o Método de Redução de Lyapunov-Schmidt para encontrar um ponto crítico para o funcional associado ao problema truncado. Agora argumentamos como na prova do Teorema 1.2 para mostrar que existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para todos $\mu \in (0, \mu^*)$ e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, $u_\mu = t\varphi_1 + v$, com $t \in (t_1, t_2)$ e $v \in \langle \varphi_1 \rangle^\perp$, é uma solução do Problema (1.1).

No Capítulo 2, consideramos a existência e não-existência de soluções fracas para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \mu h(x, u, \nabla u) \text{ em } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$, $\overline{\lambda} < \lambda_2$, λ_2 é o segundo autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$; $\mu \neq 0$ é um parâmetro real e $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory satisfazendo:

$(h_\nabla)_0$ para todo $A > 0$, existe $f_A \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 2$ se $N = 1, 2$, tal que

$$|h(x,s,\xi)| \leq f_A(x), \text{ para todos } |s| \leq A, \ |\xi| \leq A, \text{ para quase todo } x \in \overline{\Omega};$$

e

$(h_\nabla)_1$ para todos $A_1,\ A_2 > 0$, existem $\zeta_1 = \zeta_1(A_1),\ \zeta_2 = \zeta_2(A_2) \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 2$ se $N = 1, 2$, tais que

$$|h(z,s_1,\xi) - h(z,s_2,\xi)| \leq \zeta_1(z)|s_1 - s_2|, \text{ para todos } z \in \overline{\Omega}, \ |s_1|, |s_1| \leq A_1, \ |\xi| \leq A_2$$

e

$$|h(z,s,\xi_1) - h(z,s,\xi_2)| \leq \zeta_2(z)|\xi_1 - \xi_2|, \text{ para todos } z \in \overline{\Omega}, \ |s| \leq A_1, \ |\xi_1|, |\xi_2| \leq A_2.$$

Nosso principal resultado estabelece a existência de uma solução para o Problema (2.1). Para este resultado, consideramos que:

$(h_\nabla)_2$ existem t_1 e $t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, tais que

$$\left[\int_\Omega h(x, t_1\varphi_1, t_1\nabla\varphi_1)\varphi_1 dx\right]\left[\int_\Omega h(x, t_2\varphi_1, t_2\nabla\varphi_1)\varphi_1 dx\right] < 0,$$

onde φ_1 é uma autofunção positiva associada a λ_1.

Teorema 2.1. *Suponha que h satisfaz $(h_\nabla)_0$, $(h_\nabla)_1$ e $(h_\nabla)_2$. Então, existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para todos $\mu \in (0, \mu^*)$ e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, o Problema* (2.1) *possui uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$ de classe $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $t \in (t_1, t_2)$ e $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

É importante notar que no Teorema 2.1 não impomos restrição de crescimento global sobre o termo não-linear em relação à segunda e terceira variável. Também observe que a projeção da solução u_μ na direção de φ_1 está localizada entre $t_1\varphi_1$ e $t_2\varphi_2$.

Como consequência direta do Teorema 2.1 estabelecemos a existência de múltiplas soluções para Problema (2.1). Na verdade, assumindo que

$(\hat{h}_\nabla)_2$ existem $k \in \mathbb{N}$ e $t_i \in \mathbb{R}$, $t_i < t_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k$, tais que

$$\left[\int_\Omega h(x, t_i\varphi_1, t_i\nabla\varphi_1)\varphi_1 dx\right]\left[\int_\Omega h(x, t_{i+1}\varphi_1, t_{i+1}\nabla\varphi_1)\varphi_1 dx\right] < 0,$$

podemos estabelecer o seguinte resultado:

Proposição 2.2. *Suponha que h satisfaz $(h_\nabla)_0$, $(h_\nabla)_1$ e $(\hat{h}_\nabla)_2$. Então, existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para todos $0 < |\mu| < \mu^*$ e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, o Problema (2.1) possui k soluções $u_i = \hat{t}_i\varphi_1 + v_i$ de classe $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $\hat{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$ e $v_i \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$, $i = 1, \cdots, k$.*

Observação 2.3. *A solução u_μ, dada pelo Teorema 2.1, é positiva ou negativa em Ω desde que $t_1 \geq 0$ ou $t_2 \leq 0$, respectivamente. Além disso, para $|\mu| > 0$ suficientemente pequeno as soluções da Proposição 2.2 são ordenadas, veja o Teorema 2.17 e Proposição 2.18.*

Observe que a hipóteses $(h_\nabla)_2$ é uma condição do tipo Landesman-Lazer, veja [35]. Em [46] (veja também [18, 40]) Shaw considero o caso onde a não-linearidade h é da forma $h(x,s,\xi) = f(x) + g(s) + \Gamma(x,s,\xi)$, onde $f \in L^\sigma(\Omega)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua limitada, com limites finitos $g^- := \lim_{s\to-\infty} g(s)$ e $g^+ := \lim_{s\to\infty} g(s)$, e $\Gamma : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua limitada. Shaw provou a existência de uma solução para o Problema (2.1) assumindo o seguinte versão da condição Landesman-Lazer:

$$g^- \int_\Omega \varphi_1 dx + \int_\Omega f\varphi_1 dx + \alpha \int_\Omega \varphi_1 dx < 0 < g^+ \int_\Omega \varphi_1 dx + \int_\Omega f\varphi_1 dx - \alpha \int_\Omega \varphi_1 dx,$$

onde $\alpha = \sup\{|\Gamma|\}$. Consequentemente, existem números reais t_1 e t_2, com $t_1 < 0 < t_2$, tais que a condição $(h_\nabla)_2$ é valida para t_1 e t_2. Em outras palavras, a versão da condição de Landesman-Lazer usada por Shaw [46] implica na hipótese $(h_\nabla)_2$.

É importante mencionar que em muitas situações a condição $(h_\nabla)_2$ é suficiente para a existência de uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$, $t \in (t_1, t_2)$, $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$. A seguir estabelecemos a não-existência de soluções para o Problema (2.1) quando a hipótese $(h_\nabla)_2$ não é valida. De fato, se assumimos que h satisfaz

$(h_\nabla)_3$ existe $f \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 2$ se $N = 1, 2$, tal que

$$|h(x,s,\xi)| \leq f(x)(1 + |s| + |\xi|), \text{ para todos } s \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ para quase todo } x \in \overline{\Omega},$$

e

$(h_\nabla)_4$ existem números reais t_1 e t_2, com $t_1 < t_2$, tais que

$$\int_\Omega h(x, t\varphi_1, t\nabla\varphi_1)\varphi_1 dx \neq 0, \quad \text{para todo } t \in [t_1, t_2],$$

podemos estabelecer:

Teorema 2.4. *Suponha que h satisfaz $(h_\nabla)_3$ e $(h_\nabla)_4$. Então, existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para cada $0 < |\mu| < \mu^*$ e $|\lambda - \lambda_1| < |\mu|\nu^*$, o Problema (2.1) não possui solução fraca $u_\mu = t\varphi_1 + v$, com $t \in [t_1, t_2]$ e $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

Como uma primeira aplicação do Teorema 2.1 consideramos a existência de uma solução para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \beta b_1(x) u^{q_1} |\nabla u|^{q_2} + b_2(x) u^{p_1} |\nabla u|^{p_2} \text{ em } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$, $\overline{\lambda} < \lambda_2$, λ_2 é o segundo autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$; $\beta > 0$ é um parâmetro real e b_1, $b_2 \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 2$ se $N = 1, 2$.

Considerando

$$r_1 := \int_\Omega b_1 \varphi_1^{q_1+1} |\nabla\varphi_1|^{q_2} dx \quad \text{e} \quad r_2 := \int_\Omega b_2 \varphi_1^{p_1+1} |\nabla\varphi_1|^{p_2} dx,$$

estabelecemos o resultado:

Proposição 2.5. *Suponha que $p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$, p_1, p_2, q_1, $q_2 \geq 1$, $p > q$ e $r_1 r_2 < 0$. Então, existem constantes positivas β_1^* e ν_1^* tais que o Problema (2.2) possui uma solução de classe $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, para todos $\beta \in (0, \beta_1^*)$ e $|\lambda - \lambda_1| < \beta^{\frac{p-1}{p-q}} \nu_1^*$.*

Outra aplicação do Teorema 2.1 é dada pelo seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + b(x) u^{p_1} |\nabla u|^{p_2} \text{ em } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda < \lambda_1$, λ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$; p_1, $p_2 > 0$ e $b \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N/2$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 1$ se $N = 1, 2$, satisfazendo

$$\int_\Omega b(x) \varphi_1^{p_1+1} |\nabla\varphi_1|^{p_2} dx > 0. \tag{2.4}$$

Proposição 2.6. *Suponha que b satisfaz (2.4), com p_1, $p_2 \geq 1$, então existe $\underline{\lambda}$ tal que o Problema (2.3) possui uma solução positiva para todo $\underline{\lambda} < \lambda < \lambda_1$.*

Motivados por Landesman e Lazer [35] e Shaw [46], apresentamos outra aplicação do Teorema 2.1. Mais precisamente, estamos interessados na solubilidade do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \mu(f(x) + g(u) + \Gamma(x,u,\nabla u)) \text{ em } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; λ e μ são como em (2.1) e $f \in L^\sigma(\Omega)$, com $\sigma > N$ se $N \geq 3$ e $\sigma > 2$ se $N = 1, 2$. Para garantir a existência de uma solução para o Problema (2.5), via o Teorema 2.1, consideramos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz e que $\Gamma : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz em relação à segunda e terceira variáveis satisfazendo

(g_1) existe $M > 0$ tal que

$$g(s) \geq -M \text{ se } s \leq 0 \text{ e } g(s) \leq M \text{ se } s \geq 0;$$

e

(Γ_1) existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\Gamma(x,s,\xi) \geq -\alpha \text{ se } s \leq 0 \text{ e } \Gamma(x,s,\xi) \leq \alpha \text{ se } s \geq 0.$$

Além disso, denotando por $g_i^- := \liminf_{s\to-\infty} g(s)$ e $g_s^+ := \limsup_{s\to+\infty} g(s)$, assumimos que

(LL_∇)
$$\int_\Omega (f + g_i^- - \alpha)\varphi_1 dx > 0 > \int_\Omega (f + g_s^+ + \alpha)\varphi_1 dx.$$

Proposição 2.7. *Suponha que (g_1), (Γ_1) e (LL_∇) são satisfeitas. Então, existem constantes positivas μ^* e ν^* tais que, para todos $\mu \in (0, \mu^*)$ e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, o Problema (2.5) possui uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$ de classe $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $t \in \mathbb{R}$ e $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

Ressaltamos que, como uma aplicação da Proposição 2.2, fornecemos um resultado, veja Proposição 2.20, sobre a existência de múltiplas soluções para o Problema (2.1) quando h é dada por

$$h(x,t,\xi) = \sum_{i,j=0}^{m} \alpha_{ij}(x) t^i |\xi|^j, \text{ onde } \alpha_{ij} \in L^\sigma(\Omega), \text{ com } \sigma > N \text{ se } N \geq 3 \text{ e } \sigma > 2 \text{ se } N = 1, 2.$$

As equações elípticas com não-linearidade dependendo do gradiente desempenham um papel importante nas equações diferenciais parciais. Na literatura, há muitos artigos relacionados a este tópico, veja, por exemplo, [6, 8, 9, 12, 13, 17, 29, 33, 42, 25, 44, 45, 49, 50]. Nestes trabalhos, os autores usam diferentes métodos para estudar esse tipo de problemas, como o grau topológico, Teoremas do ponto fixo e métodos de sub e supersolução.

Em [25], De Figueiredo, Girardi e Matzeu desenvolveram um novo método para estudar problemas com dependência do gradiente usando a teoria do minimax. Mais especificamente, os autores consideraram a solubilidade do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x,u,\nabla u) \text{ em } \Omega, \\ u = & 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Para aplicar o método minimax para o Problema (2.6), que não é variacional devido à presença do termo gradiente, em [25] os autores associaram a (2.6) uma família de problemas variacionais, fixando o termo ∇u, em seguida, aplicando o Teorema do Passo da Montanha, os autores obtiveram uma família de soluções para uma família de problemas elípticos semilineares que não depende do gradiente da solução. Posteriormente, estabelecendo estimativas sobre as normas dessas soluções e utilizando uma técnica iterativa, De Figueiredo, Girardi e Matzeu, estabeleceram a existência de uma solução não trivial para o Problema (2.6). Veja [28, 31, 32, 37] para o uso desta técnica em outras classes de problemas.

Como em (2.1) a não-linearidade depende do gradiente da solução, a técnica de congelamento do termo gradiente introduzida por De Figueiredo, Girardi e Matzeu, combinada com o método utilizado no Capítulo 1 nos permite estabelecer a existência de solução para o Problema (2.1). Mais especificamente, para provar o Teorema 2.1, primeiro assumimos que h é limitado a com respeito a $L^\sigma(\Omega)$, i.e., existe $f \in L^\sigma(\Omega)$ tal que $|h(x,s,\xi)| \leq f(x)$, para todos $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, para quase todo $x \in \overline{\Omega}$. Em seguida, considerando uma função truncamento adequada de h e usando a solubilidade de (2.1), com h limitada em relação a $L^\sigma(\Omega)$, garantimos a existência de uma solução $u_\mu = t\varphi_1 + v$ de classe $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$. Posteriormente, via um argumento bootstrap, provamos que $\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} \to 0$, quando $\mu \to 0$, isto permite encontrar $\mu^* > 0$ tal que u_μ é solução do Problema (2.1), para todo $\mu \in (0, \mu^*)$ e $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$.

Introduction

In this work we use variational methods, the Lyapunov-Schmidt Reduction Method and the term gradient freeze technique to study existence, multiplicity and non existence of solutions for nonlinear elliptic problems depending on a parameter under Landesman-Lazer type hypotheses. Our main objective is to consider problems in which there is no global growth restriction on the nonlinear term and settings where this term may change sign.

In Chapter 1 of this work we consider the existence and non existence of weak solutions for the following problem

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \mu h(x,u) \text{ in } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$, $\overline{\lambda} < \lambda_2$, λ_2 is the second eigenvalue of the operator $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$; $\mu \neq 0$ is a real parameter and $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Carathéodory function satisfying:

(h_0) for every $A > 0$, there exists $f_A \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N/2$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 1$ if $N = 1, 2$, such that

$$|h(x,s)| \leq f_A(x), \text{ for every } |s| \leq A, \quad \text{for almost every } x \in \overline{\Omega};$$

and

(h_1) given $A_1 > 0$ there exists $\zeta := \zeta(A_1) \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N/2$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 1$ if $N = 1, 2$, such that

$$|h(z,s_1) - h(z,s_2)| \leq \zeta(z)|s_1 - s_2|, \text{ for every } z \in \overline{\Omega}, \ |s_1|, \ |s_2| \leq A_1.$$

Our main objective is to establish the existence of multiple solutions for Problem (1.1). For this result, we consider that

(h_2) there exist $k \in \mathbb{N}$ and $t_i \in \mathbb{R}$, $t_i < t_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k$ such that

$$\left[\int_\Omega h(x, t_i\varphi_1)\varphi_1 dx\right]\left[\int_\Omega h(x, t_{i+1}\varphi_1)\varphi_1 dx\right] < 0,$$

where φ_1 is a positive eigenfunction associated to λ_1.

In this case our main result is:

Theorem 1.1. *Suppose h satisfies (h_0), (h_1) and (h_2). Then there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $0 < |\mu| < \mu^*$ and $|\lambda - \lambda_1| < |\mu|\nu^*$, Problem (1.1) has k solutions $u_i = \hat{t}_i\varphi_1 + v_i$ of class $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, with $\hat{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$ and $v_i \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$, $i = 1, \cdots, k$.*

It is important to note that in Theorem 1.1 the nonlinearity has no global growth restriction and the projections of the solutions u_i on the direction of φ_1 are located between $t_i\varphi_1$ and $t_{i+1}\varphi_1$.

Theorem 1.1 is a direct consequence of two results that guarantee the existence of a solution for Problem (1.1) under one of the following particular case of (h_2):

(h_2^+) there exist real numbers t_1 and t_2, with $t_1 < t_2$, such that

$$\int_\Omega h(x, t_1\varphi_1)\varphi_1 dx > 0 > \int_\Omega h(x, t_2\varphi_1)\varphi_1 dx,$$

or

(h_2^-) there exist real numbers t_1 and t_2, with $t_1 < t_2$, such that

$$\int_\Omega h(x, t_1\varphi_1)\varphi_1 dx < 0 < \int_\Omega h(x, t_2\varphi_1)\varphi_1 dx.$$

In our first result on existence, we use variational methods to establish the existence of a weak solution for Problem (1.1), considering the hypothesis (h_2^+) and less regularity on the function h. More precisely we have:

Theorem 1.2. *Suppose h satisfies (h_0) and (h_2^+). Then there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $\mu \in (0, \mu^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, Problem (1.1) has a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$ of class $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, with $t \in (t_1, t_2)$ and $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

In order to establish the existence of solutions under the hypotheses (h_2^-) we need to suppose more regularity on the function h.

Theorem 1.3. *Suppose h satisfies (h_0), (h_1) and (h_2^-). Then there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $\mu \in (0, \mu^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, Problem* (1.1) *has a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$ of class $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, with $t \in (t_1, t_2)$ and $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

Remark 1.4. *If we assume in (h_0) and (h_1) that $\sigma > N$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 1$ if $N = 1, 2$, the solution u_μ of Problem* (1.1)*, given in Theorem* 1.2 *or* 1.3*, is of class $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$. Using this fact we may prove that u_μ is positive or negative in Ω provided $t_1 \geq 0$ or $t_2 \leq 0$, respectively. Moreover, for $|\mu| > 0$ sufficiently small the solutions of Theorem* 1.1 *are ordered, see Theorems* 1.20 *and* 1.21.

We observe that the hypothesis (h_2) is a Landesman-Lazer type condition, see [35]. Indeed, in the case where nonlinearity h, given in (1.1), is of the form $h(x, s) = f(x) - g(s)$, where $f \in L^\sigma(\Omega)$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a bounded continuous function, with finite limits $g^- := \lim_{s\to-\infty} g(s)$ and $g^+ := \lim_{s\to\infty} g(s)$, the Landesman-Lazer Condition

$$g^\mp \int_\Omega \varphi_1 dx < \int_\Omega f\varphi_1 dx < g^\pm \int_\Omega \varphi_1 dx$$

assures us that

$$\lim_{t\to-\infty} \int_\Omega h(x, t\varphi_1)\varphi_1 dx = \int_\Omega (f - g^-)\varphi_1 dx > (<) 0$$

and

$$\lim_{t\to+\infty} \int_\Omega h(x, t\varphi_1)\varphi_1 dx = \int_\Omega (f - g^+)\varphi_1 dx < (>) 0.$$

Consequently, there exist real numbers t_1 and t_2, with $t_1 < 0 < t_2$, such that the condition (h_2^+) (or (h_2^-)) is valid for t_1 and t_2. In other words, when $h(x, s) = f(x) - g(s)$, where f and g are as above, we obtain that the Landesman-Lazer Condition implies (h_2^+) (or (h_2^-)).

It is important to note that under our hypotheses h may change sign in Ω, this characterizes the Problem (1.1) as indefinite. This class of problems has been the object of an intense research in the last three decades since the works of Alama and Tarantello [2], Berestycki, Capuzzo and Nirenberg [11] and Ouyang [41]. See [3, 4, 5, 21, 23, 26, 27, 38, 47] and its references for more details on this type of problems.

The proofs of Theorems 1.2 and 1.3 are inspired by the Lyapunov-Schmidt Reduction Method, as presented in the articles [19, 20, 22, 36]. However, under the hypotheses of those theorems, that method can not be applied directly since we do not impose any global growth restriction on the term nonlinear h. To overcome this difficulty we combine the Lyapunov-Schmidt Reduction Method with truncation and approximation arguments via bootstrap methods.

It is worthwhile mentioning that in several situations the conditions (h_2^+) or (h_2^-) are sufficient to the existence of a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$, $t \in (t_1, t_2)$, $v \in \langle \varphi_1 \rangle^\perp$. Next we establish the non existence of solutions to the Problem (1.1) when the hypothesis (h_2) is not valid. Indeed, if we suppose

(h_3) there exists $f \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N/2$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 1$ if $N = 1, 2$, such that

$$|h(x, s)| \leq f(x)(1 + |s|), \text{ for every } s \in \mathbb{R}, \text{ for almost every } x \in \overline{\Omega};$$

and

(h_4) there exist real numbers t_1 and t_2, with $t_1 < t_2$, such that

$$\int_\Omega h(x, t\varphi_1)\varphi_1 dx \neq 0, \quad \text{for every } t \in [t_1, t_2],$$

we may state the following non existence result.

Theorem 1.5. *Suppose h satisfies (h_3) and (h_4). Then there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $0 < |\mu| < \mu^*$ and $|\lambda - \lambda_1| < |\mu|\nu^*$, Problem (1.1) has no weak solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$, with $t \in [t_1, t_2]$ and $v \in \langle \varphi_1 \rangle^\perp$.*

It is important to note that Theorem 1.5 is a consequence of a more geral result that establishes that, under the hypothesis (h_4), Problem (1.1) has no bounded solutions in $L^\infty(\Omega)$.

As an application of Theorems 1.2 and 1.3 we consider the existence of a solution to the following problem

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \beta b_1(x) u^q + b_2(x) u^p \text{ in } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$, $\overline{\lambda} < \lambda_2$, λ_2 is the second eigenvalue of the operator $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$; $\beta > 0$ is a real parameter; $p > q$, with $p \neq 1$, and b_1, $b_2 \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N/2$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 1$ if $N = 1, 2$. We also set:

$$r_1 := \int_\Omega b_1 \varphi_1^{q+1} dx \quad \text{and} \quad r_2 := \int_\Omega b_2 \varphi_1^{p+1} dx.$$

Considering the nomenclature for elliptic problems used in the literature, Problem (1.2) is superlinear or sublinear at infinity if $p > 1$ or $0 < p < 1$ and it is superlinear, linear or sublinear at the origin if $q > 1$, $q = 1$ or $0 < q < 1$. For the case linear or superlinear at the origin and superlinear at infinity we can establish the following result.

Proposition 1.6. *Suppose $p > q \geq 1$ and $r_1 r_2 < 0$. Then there exist positive constants β^* and ν^* such that Problem (1.2) has a solution of class $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, for every $\beta \in (0, \beta^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \beta^{\frac{p-1}{p-q}} \nu^*$.*

For the case sublinear at the origin and superlinear at infinity we may applyging the Theorem 1.2.

Proposition 1.7. *Suppose $r_1 > 0 > r_2$. Then*

(*i*) *if $0 < q < 1 < p$, there exist positive constants β_1^* and ν_1^* such that Problem (1.2) has a solution of class $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, for every $\beta \in (0, \beta_1^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \beta^{\frac{p-1}{p-q}} \nu_1^*$.*

(*ii*) *if $0 < q < p < 1$, there exist positive constants β_2^* and ν_2^* such that Problem (1.2) has a solution of class $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, for every $\beta \in (\beta_2^*, \infty)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \beta^{\frac{p-1}{p-q}} \nu_2^*$.*

When in (1.2) we consider $b_1, b_2 \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 1$ if $N = 1, 2$, the solution given by Proposition 1.6 or 1.7 is of class $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ and it is positive in Ω, see Remark 1.27. Furthermore, as noted in the beginning of this introduction, the weight functions b_1 and b_2 may change signal. In this case, Problem (1.2) is indefinite. We emphasize that in Proposition 1.6 and item (*i*) of Proposition 1.7, we do not assume the restriction $p < (N + 2)/(N - 2)$ to ensure the existence of a solution for (1.2).

For the case linear or superlinear at the origin and superlinear at infinity we refer the reader to the papers by Ouyang [41], Alama and Tarantello [3] and Medeiros, Severo and Silva [38]. For the case sublinear at the origin see the papers by Ambrozetti, Brezis and Cerami [7] and De Figueiredo, Gossez and Ubilla [26].

Inspired by the paper of Brezis and Nirenberg, see [15], we consider an application of Proposition 1.6 to following problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + b(x) u^p \text{ in } \Omega, \\ u = & 0 \qquad\qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda < \lambda_1$, λ_1 is the first eigenvalue of the operator $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$; $p > 0$ and $b \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N/2$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 1$ if $N = 1, 2$, satisfies

$$\int_\Omega b(x) \varphi_1^{p+1} dx > 0. \tag{1.4}$$

Proposition 1.8. *Suppose b satisfies* (1.4)*, with $p > 0$ and $p \neq 1$, then there exists $\underline{\lambda}$ such that Problem* (1.3) *has a positive solution for every $\underline{\lambda} < \lambda < \lambda_1$.*

Motivated by Landesman and Lazer, see [35], we also present another application of Theorem 1.2 or 1.3. Namely, we are interested in the solubility of the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \mu(f(x) + g(u)) \text{ in } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; λ and μ are as in (1.1) and $f \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N/2$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 1$ if $N = 1, 2$.

To ensure the existence of a solution for Problem (1.5) we consider

(g_1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function and there exists $M > 0$ such that

$$g(s) \geq -M \text{ if } s \leq 0 \text{ and } g(s) \leq M \text{ if } s \geq 0.$$

Denoting by $g_i^- := \liminf_{s\to-\infty} g(s)$ and $g_s^+ := \limsup_{s\to+\infty} g(s)$, we assume:

(LL^+)
$$\int_\Omega (f + g_i^-)\varphi_1 dx > 0 > \int_\Omega (f + g_s^+)\varphi_1 dx.$$

Proposition 1.9. *Suppose g satisfies (g_1) and (LL^+). Then there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $\mu \in (0, \mu^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, Problem* (1.5) *has a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$ of class $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, with $t \in \mathbb{R}$ and $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

Denoting $g_s^- := \limsup_{s\to-\infty} g(s)$ and $g_i^+ := \liminf_{s\to+\infty} g(s)$ we provide an analogous result when

$(\hat{g}_1)$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is locally Lipschitz and there exists $M > 0$ such that

$$g(s) \leq M \text{ if } s \leq 0 \text{ and } g(s) \geq -M \text{ if } s \geq 0,$$

and

(LL^-)
$$\int_\Omega (f + g_s^-)\varphi_1 dx < 0 < \int_\Omega (f + g_i^+)\varphi_1 dx.$$

Proposition 1.10. *Suppose g satisfies $(\hat{g}_1)$ and (LL^-). Then there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $\mu \in (0, \mu^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, Problem* (1.5) *has a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$ of class $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, with $t \in \mathbb{R}$ and $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

Remark 1.11. *The above results allow us to consider g such that $g_i^- = +\infty$ and $g_s^+ = -\infty$ or $g_s^- = -\infty$ and $g_i^+ = +\infty$, respectively. Moreover g may have unbounded oscillatory behavior, which does not occur, for example, in [35].*

We point out that an application of Theorem 1.1 is given when h is a polynomial function in the second variable. See Proposition 1.28.

As mentioned previously we are not suppose that h has a global growth restriction, which prevents the direct application of variational methods, since the associated functional is not well defined. To prove Theorem 1.2, firstly we assume that h is bounded with respect to $L^\sigma(\Omega)$.

In this case, using a minimization argument, we prove that there exist a positive constant ν^* such that, for $\mu > 0$ sufficiently small and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, Problem (1.1) has a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$, with $t \in (t_1, t_2)$ and $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$. Next, considering a suitable truncation function of h and using the solubility of (1.1), with h bounded with respect to $L^\sigma(\Omega)$ we guarantee the existence of a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$ of class $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Subsequently, by a bootstrap argument, we prove that $\|v\|_\infty \to 0$, when $\mu \to 0$, this allows us to find $\mu^* > 0$ such that u_μ is a solution of Problem (1.1), for every $\mu \in (0, \mu^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$.

We call the reader's attention to the fact that, under the condition (h_2^-), we do not apply the minimization method used in the proof of Theorem 1.2. The solution, in this case, is a minimax critical point. To prove Theorem 1.3, firstly we assume that h is bounded with respect to $L^\sigma(\Omega)$ and Lipschitz with respect to $L^\sigma(\Omega)$ in the second variable.

Under these hypotheses, we can apply Lyapunov-Schmidt Reduction Method to find a critical point for the functional associated with the truncated problem. Next we argunent as in the proof of Theorem 1.2 to show that there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $\mu \in (0, \mu^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, $u_\mu = t\varphi_1 + v$, with $t \in (t_1, t_2)$ and $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$, is a solution of Problem (1.1).

In Chapter 2 we consider the existence and non existence of weak solutions for the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \mu h(x, u, \nabla u) \text{ in } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$, $\overline{\lambda} < \lambda_2$, λ_2 is the second eigenvalue of the operator $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$; $\mu \neq 0$ is a real parameter and $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a Carathéodory function satisfying

$(h_\nabla)_0$ for every $A > 0$, there exists $f_A \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 2$ if

$N = 1, 2$, such that

$$|h(x, s, \xi)| \leq f_A(x), \text{ for every } |s| \leq A, \ |\xi| \leq A, \text{ for almost every } x \in \overline{\Omega};$$

and

$(h_\nabla)_1$ for every A_1, $A_2 > 0$, there exist $\zeta_1 = \zeta_1(A_1)$, $\zeta_2 = \zeta_2(A_2) \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 2$ if $N = 1, 2$, such that

$$|h(z, s_1, \xi) - h(z, s_2, \xi)| \leq \zeta_1(z)|s_1 - s_2|, \text{ for every } z \in \overline{\Omega}, \ |s_1|, |s_1| \leq A_1, \ |\xi| \leq A_2$$

and

$$|h(z, s, \xi_1) - h(z, s, \xi_2)| \leq \zeta_2(z)|\xi_1 - \xi_2|, \text{ for every } z \in \overline{\Omega}, \ |s| \leq A_1, \ |\xi_1|, |\xi_2| \leq A_2.$$

Our main result establishes the existence of a solution for Problem (2.1). For this result we assume

$(h_\nabla)_2$ there exist t_1 and $t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, such that

$$\left[\int_\Omega h(x, t_1\varphi_1, t_1\nabla\varphi_1)\varphi_1 dx\right]\left[\int_\Omega h(x, t_2\varphi_1, t_2\nabla\varphi_1)\varphi_1 dx\right] < 0,$$

where φ_1 is a positive eigenfunction associated to λ_1.

Theorem 2.1. *Suppose h satisfies $(h_\nabla)_0$, $(h_\nabla)_1$ and $(h_\nabla)_2$. Then there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $\mu \in (0, \mu^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, Problem* (2.1) *has a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$ of class $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, with $t \in (t_1, t_2)$ and $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

It is important to note that in Theorem 2.1 we do not impose any global growth restriction on the nonlinear term with respect to the second and third variable. We also observe that the projection of the solution u_μ on the direction of φ_1 is located between $t_1\varphi_1$ and $t_2\varphi_1$.

As a direct consequence of Theorem 2.1 we derive the existence of multiple solutions for Problem (2.1). Indeed, assuming

$(\hat{h}_\nabla)_2$ there exist $k \in \mathbb{N}$ and $t_i \in \mathbb{R}$, $t_i < t_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k$, such that

$$\left[\int_\Omega h(x, t_i\varphi_1, t_i\nabla\varphi_1)\varphi_1 dx\right]\left[\int_\Omega h(x, t_{i+1}\varphi_1, t_{i+1}\nabla\varphi_1)\varphi_1 dx\right] < 0,$$

we may state

Proposition 2.2. *Suppose h satisfies $(h_\triangledown)_0$, $(h_\triangledown)_1$ and $(\hat{h}_\triangledown)_2$. Then there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $0 < |\mu| < \mu^*$ and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, Problem* (2.1) *has k solutions $u_i = \hat{t}_i\varphi_1 + v_i$ of class $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, with $\hat{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$ and $v_i \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$, $i = 1, \cdots, k$.*

Remark 2.3. *The solution u_μ, given by Theorem* 2.1, *is positive or negative in Ω provided $t_1 \geq 0$ or $t_2 \leq 0$, respectively. Moreover, for $|\mu| > 0$ sufficiently small the solutions of Proposition* 2.2 *are ordered, see Theorems* 2.17 *and Proposition* 2.18.

We observe that hypothesis $(h_\triangledown)_2$ is a Landesman-Lazer type condition, see [35]. In [46] Shaw, see too [18, 40], considered the case where nonlinearity h is of the form $h(x, s, \xi) = f(x) + g(s) + \Gamma(x, s, \xi)$, where $f \in L^\sigma(\Omega)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is bounded continuous function, with finite limits $g^- := \lim_{s\to-\infty} g(s)$ and $g^+ := \lim_{s\to\infty} g(s)$, and $\Gamma : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is bounded continuous function. Shaw has proved the existence of a solution for Problem (2.1) by assuming the following verssion of the Landesman-Lazer condition:

$$g^- \int_\Omega \varphi_1 dx + \int_\Omega f\varphi_1 dx + \alpha \int_\Omega \varphi_1 dx < 0 < g^+ \int_\Omega \varphi_1 dx + \int_\Omega f\varphi_1 dx - \alpha \int_\Omega \varphi_1 dx,$$

where $\alpha = \sup\{|\Gamma|\}$. Consequently there exist real numbers t_1 and t_2, with $t_1 < 0 < t_2$, such that the condition $(h_\triangledown)_2$ is valid for t_1 and t_2. In other words the version of the Landesman-Lazer condition used by Shaw [46] implies the hypothesis $(h_\triangledown)_2$.

It is worthwhile mentioning that in several situations the condition $(h_\triangledown)_2$ is necessary to the existence of a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$, $t \in (t_1, t_2)$, $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$. Next we establish the non existence of solutions to the Problem (2.1) when the hypothesis $(h_\triangledown)_2$ is not valid. Indeed, if h satisfies

$(h_\triangledown)_3$ there exists $f \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 2$ if $N = 1, 2$, such that

$$|h(x, s, \xi)| \leq f(x)(1 + |s| + |\xi|), \text{ for every } s \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ for almost every } x \in \overline{\Omega},$$

and

$(h_\triangledown)_4$ there exist real numbers t_1 and t_2, with $t_1 < t_2$, such that

$$\int_\Omega h(x, t\varphi_1, t\nabla\varphi_1)\varphi_1 dx \neq 0, \quad \text{for every } t \in [t_1, t_2],$$

we may state the following non existence result.

Theorem 2.4. *Suppose h satisfies $(h_\nabla)_3$ and $(h_\nabla)_4$. Then there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $0 < |\mu| < \mu^*$ and $|\lambda - \lambda_1| < |\mu|\nu^*$, Problem* (2.1) *has no weak solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$, with $t \in [t_1, t_2]$ and $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

As a first application of Theorem 2.1 we consider the existence of a solution for the following problem

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \beta b_1(x) u^{q_1} |\nabla u|^{q_2} + b_2(x) u^{p_1} |\nabla u|^{p_2} \text{ in } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$, $\overline{\lambda} < \lambda_2$, λ_2 is the second eigenvalue of the operator $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$; $\beta > 0$ is a real parameter and b_1, $b_2 \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 2$ if $N = 1, 2$.

Setting

$$r_1 := \int_\Omega b_1 \varphi_1^{q_1+1} |\nabla\varphi_1|^{q_2} dx \quad \text{and} \quad r_2 := \int_\Omega b_2 \varphi_1^{p_1+1} |\nabla\varphi_1|^{p_2} dx,$$

we state the following result:

Proposition 2.5. *Suppose $p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$, p_1, p_2, q_1, $q_2 \geq 1$, $p > q$ and $r_1 r_2 < 0$. Then there exist positive constants β_1^* and ν_1^* such that Problem* (2.2) *has a solution of class $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, for every $\beta \in (0, \beta_1^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \beta^{\frac{p-1}{p-q}} \nu_1^*$.*

Another application of Theorem 2.1 is given by the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + b(x) u^{p_1} |\nabla u|^{p_2} \text{ in } \Omega, \\ \quad u = & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\lambda < \lambda_1$, λ_1 is the first eigenvalue of the operator $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$; p_1, $p_2 > 0$ and $b \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N/2$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 1$ if $N = 1, 2$, satisfying

$$\int_\Omega b(x) \varphi_1^{p_1+1} |\nabla\varphi_1|^{p_2} dx > 0. \tag{2.4}$$

Proposition 2.6. *Suppose b satisfies* (2.4)*, with p_1, $p_2 \geq 1$, then there exists $\underline{\lambda}$ such that Problem* (2.3) *has a positive solution for every $\underline{\lambda} < \lambda < \lambda_1$.*

Motivated by Landesman and Lazer [35] and Shaw [46], we also present another application of Theorem 2.1. Namely, we are interested in the solubility of the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + \mu(f(x) + g(u) + \Gamma(x, u, \nabla u)) \text{ in } \Omega, \\ u = & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; λ and μ are as in (2.1) and $f \in L^\sigma(\Omega)$, with $\sigma > N$ if $N \geq 3$ and $\sigma > 2$ if $N = 1, 2$. To ensure the existence of a solution for Problem (2.5) we consider $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a locally Lipschitz function and $\Gamma : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a locally Lipschitz function with respect to the second and third variable satisfiying

(g_1) there exists $M > 0$ such that

$$g(s) \geq -M \text{ if } s \leq 0 \text{ and } g(s) \leq M \text{ if } s \geq 0;$$

and

(Γ_1) there exists $\alpha > 0$ such that, for every $x \in \Omega$ and $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\Gamma(x, s, \xi) \geq -\alpha \text{ if } s \leq 0 \text{ and } \Gamma(x, s, \xi) \leq \alpha \text{ if } s \geq 0.$$

Denoting by $g_i^- := \liminf_{s\to-\infty} g(s)$ and $g_s^+ := \limsup_{s\to+\infty} g(s)$, we assume that

$$(LL_\nabla) \qquad \int_\Omega (f + g_i^- - \alpha)\varphi_1 dx > 0 > \int_\Omega (f + g_s^+ + \alpha)\varphi_1 dx.$$

Proposition 2.7. *Suppose (g_1), (Γ_1) and (LL_∇) are satisfied. Then there exist positive constants μ^* and ν^* such that, for every $\mu \in (0, \mu^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$, Problem* (2.5) *has a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$ of class $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, with $t \in \mathbb{R}$ and $v \in \langle\varphi_1\rangle^\perp$.*

We point out that, as an application of Proposition 2.2, we provide a result, see Proposition 2.20, on the existence of multiple solution for Problem (2.1) when h is given by

$$h(x, t, \xi) = \sum_{i,j=0}^{m} \alpha_{ij}(x) t^i |\xi|^j, \text{ where } \alpha_{ij} \in L^\sigma(\Omega), \text{ with } \sigma > N \text{ if } N \geq 3 \text{ and } \sigma > 2 \text{ if } N = 1, 2.$$

Elliptic equations with nonlinearity depending on the gradient play an important role in partial differential equations. In the literature, there are many papers related to this topic, See, for example, [6, 8, 9, 12, 13, 17, 29, 33, 42, 25, 44, 45, 49, 50]. In these works, the authors use different methods to study this type of problems such as Topological Degree, Fixed Point Theorems and Sub and Supersolution Method.

In [25], De Figueiredo, Girardi and Matzeu developed a new method to study problems with gradient dependency using minimax theory. More specifically, the authors considered the solubility of the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x,u,\nabla u) \text{ in } \Omega, \\ u = & 0 \qquad\qquad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

In order to apply the minimax method for Problem (2.6), which is not variational due to the presence of the term gradient, in [25] the authors associated with (2.6) a family of variational problems, fixing the term ∇u, then, applying Mountain Pass Theorem, they obtained a family of solutions for the family of semilinear elliptic problems that does not depend on the gradient of the solution. Subsequently, establishing appropriate estimates on the norms of these solutions and using an iterative technique, De Figueiredo, Girardi and Matzeu, established the existence of a non-trivial solution for Problem (2.6), see [28, 31, 32, 37] for the use of this technique in other classes of problems.

As in (2.1) the nonlinearity depends on the gradient of the solution, the term gradient freeze technique introduced by De Figueiredo, Girardi and Matzeu, combined with the method used in Chapter 1 allows us to establish the existence of solution for Problem (2.1). More specifically, in order to prove Theorem 2.1, first we assume that h is bounded with respect to $L^\sigma(\Omega)$. Next, considering a suitable truncation function of h and using the solubility of (2.1), with h bounded with respect to $L^\sigma(\Omega)$ we guarantee the existence of a solution $u_\mu = t\varphi_1 + v$ of class $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$. Posteriorly, by a bootstrap argument, we prove that $\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} \to 0$, when $\mu \to 0$, this allows us to find $\mu^* > 0$ such that u_μ is solution of Problem (2.1), for every $\mu \in (0, \mu^*)$ and $|\lambda - \lambda_1| < \mu\nu^*$.

Bibliography

[1] Agmon S.; Douglis A.; Nirenberg L. *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I.* Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727.

[2] Alama, S.; Tarantello, G. *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities.* Calc. Var. Partial Differential Equations 1 (1993), 439-475.

[3] Alama, S.; Del Pino, M. *Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via morse theory and linkings.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13 (1996), 95-115.

[4] Alama, S.; Tarantello, G. *Elliptic problems with nonlinearities indefinite in sign.* J. Funct. Anal. 141 (1996), 159-215.

[5] Alves, C. O.; De Freitas L. R.; Soares, S. H. M. *Indefinite quasilinear elliptic equations in exterior domains with exponential critical growth.* Differential Integral Equations 24 (2011), 1047-1062.

[6] Amann H.; Crandall M. G. *On some existence theorems for semi-linear elliptic equations.* Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 779-790.

[7] Ambrosetti, A.; Brezis, H.; Cerami, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems.* J. Funct. Anal. 122 (1994), 519-543.

[8] Ambrosetti, A.; Arcoya, D. *On a quasilinear problem at strong resonance.* Topol. Methods Nonlinear Anal., 6 (1995), 255-264.

[9] Arcoya, D.; Martinez-Aparicio P. J. *Quasilinear equations with natural growth.* Rev. Mat. Iberoam., 24 (2008), 597-616.

[10] Bartsch, T.; Willem, M. *On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities.* Proc. Amer. Math. Soc.123 (1995), 3555-3561.

[11] Berestycki, H.; Capuzzo-Dolcetta, I.; Nirenberg, L. *Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 4 (1994), 59-78.

[12] Boccardo, L.; Gallouët, T. *Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms and L^1 data.* Nonlinear Anal., 19 (1992), 573-579.

[13] Boccardo, L. *Dirichlet problems with singular and gradient quadratic lower order terms.* ESAIM Control Optim. Calc. Var., 14 (2008), 411-426.

[14] Brézis, H.; Turner, R. E. L. *On a class of superlinear elliptic problems.* Comm. Partial Differential Equations 2 (1977), 601-614.

[15] Brézis H.; Nirenberg L. *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations involving Critical Exponents.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 34 (1983), 437

[16] Brown, K. J.; Wu, T. F. *A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem.* Electron. J. Differential Equations 2007, 9 pp.

[17] Bueno, H.; Ercole, G.; Ferreira, W.M.; Zumpano, A.*Existence of positive solutions for the p-Laplacian with dependence on the gradient.* Nonlinearity 25 (2012), 1211-1234.

[18] Cañada A. *Nonselfadjoint semilinear elliptic boundary value problems.* Ann. Mat. Pura Appl., 148 (1987), pp. 237-250.

[19] Castro, A.; Lazer, A. C. *Critical point theory and the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 120 (1979), 113-137.

[20] Castro A. *Reduction methods via minimax.* First Latin American School of Differential Equations, Held at São Paulo, Brazil, June 29-July 17, 1981.

[21] Chang, K. C.; Jiang, M. Y. *Dirichlet problem with indefinite nonlinearities.* Calc. Var. Partial Differential Equations 20 (2004), 257-282.

[22] Cossio, J. *Contribution to the study of elliptic partial differential equations.* (*Spanish*) *Mathematics and statistics* (*Spanish*). Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur. 28 (2004), 135-145.

[23] Costa D. G.; Tehrani, H. *Existence of positive solutions for a class of indefinite elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$. Calc. Var. Partial Differential Equations 13 (2001), 159-189.

[24] Courant R.; Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol II: Partial differential equations*. Interscience Publishers, New York-Lon don 1962.

[25] De Figueiredo D.; Girardi M.; Matzeu M. *Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain-pass techniques*. Differential Integral Equations, 17 (2004),119-126.

[26] De Figueiredo, D. G.; Gossez, J. P.; Ubilla, P. *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*. J. Funct. Anal. 199 (2003), 452-467.

[27] De Figueiredo, D. G.; Gossez, J. P.; Ubilla, P. *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 8 (2006), 269-286.

[28] De Figueiredo, G. M. *Quasilinear equations with dependence on the gradient via Mountain Pass techniques in* $\mathbb{R}^N$. Applied Mathematics and Computation 203 (2008), 14-18.

[29] Faraci, F.; Motreanu, D.; Puglisi, D. *Positive solutions of quasi-linear elliptic equations with dependence on the gradient*. Calc. Var. Partial Differential Equations 54 (2015), 525-538.

[30] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 224. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[31] Girardi M.; Matzeu M. *Positive and negative solutions of a quasi-linear elliptic equation by a Mountain Pass method and truncature techniques*. Nonlinear Anal., 59 (2004), 199-210.

[32] Girardi M.; Matzeu M. *A compactness result for quasilinear elliptic equations by Mountain Pass techniques*, Rend. Mat. Appl. (7), 29 (2009), 83-95.

[33] Iturriaga, L.; Lorca S.; Sánchez, J. *Existence and multiplicity results for the p-Laplacian with a p-gradient term*. Nonlin. Diff. Eqns Applic. 15 (2008), 729-743.

[34] Ladyzhenskaya, O. A.; Uraltseva, N. N. *Linear and quasilinear elliptic equations.* Izdat. "Nauka", Mosacow (1964) (in Russian. English translation: Academic Press, New York (1968). 2nd Russian edition (1973).

[35] Landesman, E. M.; Lazer, A. C. *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance.* J. Math. Mech. 19 (1970), 609-623.

[36] Landesman, E. M.; Lazer, A. C.; Meyers, David R. *On Saddle Point Problems in the calculus of Variations, the Ritz Algorithm, and Monotone Convergence.* J. Math. Anal. Appl. 52 (1975), 594-614.

[37] Matzeu M.; Servadei R. *A variational approach to a class of quasilinear elliptic equations not in divergence form.* Discrete Cont. Din. Syst. 5(2012), 819-830.

[38] Medeiros, E. S.; Severo, U. B.; Silva, E. A. B. *On a class of elliptic problems with indefinite nonlinearities.* Calc. Var. Partial Differential Equation 50 (2014), 751-777.

[39] Mironescu, P.; Rădulescu, V. D. *The study of a bifurcation problem associated to an asymptotically linear function.* Nonlinear Anal. 26 (1996), 857-875.

[40] Nagle K.; Pothoven K.; Singkofer k. *Nonlinear elliptic equations at resonance where the nonlinearity depends essentially on the derivatives.* J. Differential Equations, 38 (1980), pp. 210-225

[41] Ouyang, T. *On the positive solutions of semilinear equations* $\Delta u + \lambda u + hu^p = 0$ *on compact manifolds II.* Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), 1083-1141.

[42] Pohožaev S. *Equations of the type* $\Delta u = f(x, u, Du)$. Mat. Sb. (N.S.), 113(155) (1980), 324-338, 351.

[43] Rabinowitz, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to diferential equations.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[44] Rezende, M. C.; Santos, C. A. *Quasilinear problems with two parameters including superlinear and gradient terms.* Electron. J. Differential Equations, 2014, 2014(220): 1-22.

[45] Ruiz, D. *A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems.* J. Differ. Equ. 199, 96-114 (2004).

[46] Shaw, H. *Nonlinear elliptic boundary value problems at resonance.* J. Differential Equations 26 (1977), 335-346.

[47] Silva, E. A. B.; Silva, M. L. *Continuous dependence of solutions for indefinite semilinear elliptic problems*. Electron. J. Differential Equations 2013, 17 pp.

[48] Struwe M. *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. Springer-Verlag, Zürich, 2007.

[49] Xavier J. B. M. *Some existence theorems for equations of the form* $-\Delta u = f(x, u, Du)$. Nonlinear Anal., 15 (1990), 59-67.

[50] Yan Z. *A note on the solvability in* $W^{2,p}(\Omega)$ *for the equation* $-\Delta u = f(x, u, Du)$. Nonlinear Anal., 24 (1995), 1413-1416.