Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Sobre Teoremas de Rigidez e Estimativas de Autovalores

por

Adriano Cavalcante Bezerra

Brasília
2018

Sobre Teoremas de Rigidez e Estimativas de Autovalores

por

Adriano Cavalcante Bezerra

Tese apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientadora: Prof^a. Dra. Qiaoling Wang

Brasília
2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C B574s

Cavalcante Bezerra, Adriano
Sobre Teoremas de Rigidez e Estimativas de Autovalores / Adriano Cavalcante Bezerra; orientador Qiaoling Wang. -- Brasília, 2018.
88 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Teoremas de Rigidez. 2. Estimativas de Autovalores. 3. Estabilidade e Super Estabilidade. 4. Teoremas tipo Bernstein. 5. Drifting Laplaciano. I. Wang, Qiaoling, orient. II. Título.

Sobre Teoremas de Rigidez e Estimativas de Autovalores

por

Adriano Cavalcante Bezerra

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 16 de março de 2018.

Comissão Examinadora:

Wang Qiaoling

Profa. Dra. Wang Qiaoling– Orientadora (MAT-UnB)

Xia Changyu

Prof. Dr. Xia Chang Yu (MAT-UnB)

Romildo da Silva Pina

Prof. Dr. Romildo da Silva Pina (UFG)

Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro (UFG)

Adriano Cavalcante Bezerra

Dedicatória

Para Nádya, Yasmim e Raul.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, senhor de todas as coisas, sem o qual jamais teria chegado onde cheguei.

Aos meus pais e mentores, Maria Diva e Manoel Bezerra, uma dona de casa e um lavrador, pedreiro e comerciante, que mesmo sem a oportunidade de terem estudado conseguiram repassar aos filhos a importância de se tornarem pessoas de caráter e íntegras. Minha mãe sempre atenta e preocupada com minhas escolhas, e ao mesmo tempo motivadora. Obrigado mãe.

A minha querida esposa Nádya, minha princesinha, quem teve influência direta nas minhas conquistas. Por trás do sucesso de um homem, sempre existe uma grande mulher.

Aos meus filhos Yasmim e Raul. De quem eu roubei precioso e impagável tempo. Muitas vezes, quando vocês ainda riam no explendor da infância, eu chorava por estar longe. Nunca me esqueci de vocês, quando por necessidade me encontrava ausente, estudando, em dias de imensa solidão.

Agradeço aos meus irmãos, que sempre me admiraram e me tiveram como exemplo de superação. Se hoje cheguei aqui, é porque ontem tive quem me apoiasse. Obrigado a todos vocês, de coração.

Agradeço a minha orientadora Profª. Qiaoling Wang, pela orientação, pela paciência, pelas preciosas correções durante todo o periodo de doutoramento.

Agradeço ao Prof. Changyu Xia, pela ajuda e sugestões na preparação do meu trabalho.

Aos Professores componentes da banca examinadora Romildo Pina, Armando Corro, da Universidade Federal de Goiás. Meus amigos de longa data, quem me ensinaram as primeiras lições de geometria, nos tempos de graduação e mestrado, obrigado pelas valiosas sugestões e correções, que muito melhoraram meu trabalho, e abriram caminho para novas questões.

Ao Professor Pedro Roitman, que sempre acompanhou meu trabalho nos seminários, e pelas valiosas correções.

A todos os professores, funcionários e alunos do MAT, que me propiciaram êxito no decorrer dessa trajetória.

Aos meus amigos Agenor e Silvio, companheiros desde o mestrado, e que sempre me deram muita força nos estudos. Quando conheci vocês, pensei que tinha algo a ensinar. Esse foi meu maior erro. Com vocês, aprendi matemática de um jeito diferente. Não com menos trabalho. Mas com mais prazer e alegria. Amigos são assim. Obrigado Agenor, você é o maior entendedor de Latex que já conheci. Sem sua ajuda realmente não sei o que faria. Obrigado Silvio. Após as longas jornadas de estudos, ainda conseguíamos tempo para conversar, mesmo com suas teimosias. Seu apoio teve muita importância para meus dias de correria, esquecimento, cansaço...ainda continuo assim.

Ao meu amigo Hudson Pina. Obrigado por sanar minhas dúvidas, e compartilhar os momentos agradáveis durante esse longo tempo. Você fez as dificuldades parecerem menos difíceis.

Aos amigos Antônio Marcos, Camila, Cid, Elson, Dióscoros, Tarcísio e Walter. Obrigado por darem mais sentido aos meus dias.

Ao Departamento de Áreas Acadêmicas do IFG campus Luziânia, que me deu todas as condições para que eu pudesse me qualificar.

Em especial, ao meu pai Manoel Bezerra. Obrigado por ter me dado todas as condições necessárias para meu sucesso. Quando criança, sempre ouvia de meu pai: ”no próximo ano você estudará no Marcos!”, como era conhecido na época o melhor colégio de Trindade. Por questões financeiras, pai, esse ano nunca chegou... mas isso não serviu de impasse para que eu superasse as barreiras das dificuldades. Sempre tentei fazer dos momentos difíceis uma oportunidade para reflexão, e um incentivo para continuar. Obrigado pai. Não é difícil tornar-se doutor estudando em salas arejadas e bancos limpos de uma grande universidade. Difícil é conseguir formar os filhos sem ter instrução, saindo do trabalho no campo para trabalhar nos grandes centros como pedreiro, distante da família. Essa conquista não foi mérito meu. Foi obrigação pelo que o senhor me proporcionou.

...Se tenho as mãos macias, eu devo tudo a meu pai. Que teve as mãos calejadas, no tempo que longe vai. Cada viagem que fazia, naquelas manhãs de inverno. Era um pingo do meu pranto, nas folhas do meu caderno. Meu pai deixou essa terra, mas cumpriu sua missão. Carreando ele colocou, um diploma em minhas mãos. Por isso guardo esse carro, com carinho e muito amor. É lembrança do carreiro que de mim fez um Doutor...

Sulino e José Fortuna,
trecho de *O Carro e a Faculdade.*

Resumo

Adriano Cavalcante Bezerra. **Sobre Teoremas de Rigidez e Estimativas de Autovalores**. Brasília, 2018. 89p. Tese de Doutorado. Departamento de Matemática, Universidade de Brasília.

Neste trabalho, faremos um estudo de estimativas de autovalores para alguns operadores elípticos, buscando entender quais são suas relações com resultados de rigidez sobre a imersão a qual foram definidos. Na primeira parte do texto, estudaremos o operador drifting Laplaciano em variedades Riemannianas compactas com fronteira, com uma condição na curvatura de Ricci Bakry-Émery. Na segunda parte do texto, abrangendo os capítulos 3 e 4, buscaremos estabelecer condições sobre os operadores de estabilidade e super estabilidade de uma subvariedade mínima imersa no espaço hiperbólico, e sobre a norma L^d da segunda forma fundamental, para concluir que a imersão é totalmente geodésica. Um resultado similar será obtido para uma superfície tipo-espaço com curvatura média constante, imersa no espaço de Lorentz $\mathbb{L}^3$.

Palavras–chave

Estimativas de autovalores, teoremas de rigidez, drifting Laplaciano, curvatura Ricci-Bakry-Émery, operador de estabilidade e super estabilidade, hipersuperfícies tipo espaço.

Abstract

Bezerra, Adriano Cavalcante. **On Rigidity Theorems and Estimates of Eigenvalues**. Brasília, 2018. 89p. PhD. Thesis. Departamento de Matemática, Universidade de Brasília.

In this work, we will make a study of eigenvalue estimates for some elliptical operators, trying to understand what their relationships with rigidity results on the immersion to which they were defined. In the first part of the text, we will study the Laplacian drifting operator in compact boundary Riemannian manifolds, with a condition in the Ricci Bakry-Émery curvature. In the second part of the text, covering chapters 3 and 4, we will seek to establish conditions on the stability and super stability operators of a minimal submanifolds immersed in the hyperbolic space, and on the norm L^d of the second fundamental form, for conclude that the immersion is totally geodesic. A similar result will be obtained for a space-like surface with constant mean curvature, immersed in the Lorentz space $\mathbb{L}^3$.

Keywords

Eigenvalue estimates, rigidity theorems, Laplacian drifting, Ricci-Bakry-Émery curvature, stability and super stability operators, space-like hipersurfaces.

Sumário

Introdução

Dentre os vários assuntos abordados em geometria Riemanniana, neste trabalho propomos um estudo de basicamente dois tópicos: estimativas de autovalores e teoremas de rigidez do tipo Bernstein. As estimativas são para autovalores dos operadores bi-drifting Laplaciano, agindo sobre funções suaves definidas em uma variedade compacta com fronteira, e para os operadores de estabilidade e super estabilidade para uma imersão mínima no espaço hiperbólico. Já os teoremas de rigidez se baseiam em obter condições para que uma imersão mínima no espaço hiperbólico seja totalmente geodésica, ou condições para sabermos quando a imersão coincide com o próprio espaço ambiente, caso este que será tratado no capítulo 4.

Para facilitar nosso propósito, dividimos o texto em quatro capítulos. No primeiro capítulo trataremos das preliminares. Faremos uma breve abordagem das ferramentas necessárias para o entendimento do texto. Tentaremos ser objetivos e evitaremos detalhes que não prejudiquem a leitura, dando enfoque aos fatos de maior importância para nosso propósito. Iniciaremos com uma abordagem das imersões isométricas, do ponto de vista de formas diferenciais. Introduziremos os conceitos de imersões, métricas, conexões, curvatura, dentre outros.

No capítulo 2, trataremos de generalizar estimativas para o primeiro autovalor do operador bi-Laplaciano para alguns problemas clássicos. Iremos generalizar esses problemas para o operador diferencial denominado drifting Laplaciano (ou Laplaciano com peso), definido como sendo

$$L_{\phi} = \triangle - \langle \nabla\phi, \nabla(\cdot)\rangle, \quad \phi \in C^2(M).$$

Como dispomos de vários tipos de operadores diferenciais, uma pergunta natural seria qual a motivação de estudo deste operador. Na verdade, o primeiro operador diferencial para funções em várias variáveis que vem em nosso pensamento, talvez pela frequência em que ele ocorra devido ao grande número de aplicações, é o operador Laplaciano. A partir daí existem várias generalizações para este operador, assim como generalizações de problemas clássicos envolvendo o mesmo.

Um exemplo de problema clássico e bastante estudado envolvendo o Laplaciano é o problema de Dirichlet, onde consideramos uma variedade Riemanniana M

com fronteira ∂M e uma função suave u definida em M. O problema de Dirichlet pode ser formulado como abaixo.

- *Problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \triangle u = -\lambda u \text{ em } M, \\ u|_{\partial M} = 0. \end{cases}$$

Já um resultado clássico que podemos citar envolvendo estimativas para o Laplaciano é o teorema de Lichnerowicz-Obata. Este teorema afirma que se M é uma variedade Riemanniana de dimensão n, conexa, completa e com curvatura de Ricci limitada inferiormente por $n-1$, então o primeiro autovalor não nulo do Laplaciano de M é maior ou igual a dimensão n da variedade, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, M é isométrica a uma esfera n-dimensional unitária. Considerando, porém, uma variedade compacta com fronteira, em 1977 Reilly obteve um resultado similar, para o primeiro autovalor do problema de Dirichlet.

Teorema 0.1. *(Reilly) Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão $n(\geq 2)$, compacta e conexa, com fronteira ∂M. Assuma que a curvatura de Ricci de M seja limitada inferiormente por $(n-1)$. Se a curvatura média H de ∂M é não negativa, então o primeiro autovalor λ_1 do problema de Dirichlet em M satisfaz $\lambda_1 \geq n$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, M é isométrica a uma semi-esfera Euclideana unitária de dimensão n.*

Detalhes do teorema de Reilly podem ser conferidos em [64].

Ainda considerando uma variedade Riemanniana compacta com fronteira, um outro problema interessante de ser mencionado é o problema de Neumann, que pode ser enunciado da seguinte forma.

- *Problema de Neumann*

$$\begin{cases} \triangle u = \lambda u \text{ em } M, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial M} = 0, \end{cases}$$

onde ν é o normal unitário exterior a fronteira ∂M.

Uma estimativa similar a do Teorema de Reilly para o primeiro autovalor não nulo do problema de Neumann para variedades compactas com fronteira foi obtida do J. F. Scobar [37] e C. Xia [74], de forma independente.

Nas condições do problema de Neumann, outros dois problemas importantes e que nos servirão de base para os resultados do capítulo 2 são o problema de campled plate e o problema de buckling, que enunciaremos agora.

- *Problema de campled plate*

$$\begin{cases} \triangle^2 u = \lambda u \text{ em } M, \\ u|_{\partial M} = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial M} = 0, \end{cases}$$

- *Problema de buckling*

$$\begin{cases} \triangle^2 u = -\lambda \triangle u \text{ em } M, \\ u|_{\partial M} = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial M} = 0, \end{cases}$$

Recentemente, em um artigo de 2012, Chen, Cheng, Wang e Xia estimaram o primeiro autovalor de quatro tipos de problemas para o operador biharmonico em variedades compactas com fronteira e curvatura de Ricci positiva ([18]). Os dois primeiros resultados são na direção dos problemas de clamped plate e buckling, respectivamente. Enunciaremos esses resultados no capítulo de preliminares.

No capítulo 3 trataremos do estudo de teoremas de rigidez do tipo Bernstein para imersões mínimas no espaço hiperbólico e também obteremos algumas estimativas para o primeiro autovalor do operador de super estabilidade. A importância e motivação deste capítulo nos remete ao início do século 20, por volta de 1915, quando o matemático soviético Sergei Bernstein provou o seguinte teorema

Teorema 0.2. *(Bernstein) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaz*

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0,$$

então $f(x,y) = ax + by + c$, onde a, b e c são constantes.

O teorema de Bernstein nos diz que as únicas superfícies mínimas tipo gráfico e completa em $\mathbb{R}^3$ são planos. Posteriormente, na década de 60, o teorema de Bernstein foi generalizado para hipersuperfícies tipo gráfico mínima e completa em $\mathbb{R}^{n+1}$ para $n \leq 7$, em trabalhos independentes e devidos a Fleming [40], De Giorgi [27], Almgren [2] e Simons [69]. Essa restrição na dimensão de fato mostrou-se necessária, o que veio a ser comprovada em 1969 por Bombieri, De Giorgi e Giusti, com contra-exemplos conhecidos como cones mínimos [27].

Uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana é dita estável se a sua segunda variação de volume é não negativa, para toda variação normal com suporte compacto. Dentro desse contexto, podemos verificar que hipersuperfícies mínimas tipo gráfico imersas em $\mathbb{R}^n$ são estáveis. Em termos práticos, a condição de estabilidade nos indica a não existência de autovalores negativos para o operador de estabilidade, definido como sendo

$$L := \triangle + Ric(\nu,\nu) + |A|^2,$$

onde $Ric(\nu,\nu)$ é o tensor de Ricci na direção do normal exterior ν a hipersuperfície e A é a segunda forma fundamental da imersão. O índice $Index(D)$ de um domínio relativamente compacto $D \subset M$, é definido como sendo o número de autovalores negativos do operador $-L$, para o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -Lf = \lambda f \ em \ D, \\ f|_{\partial D} = 0. \end{cases}$$

O índice de uma hipersuperfície M é definido como sendo

$$Index(M) := sup\{Index(D);\ D \subset M\ rel.compacto\},$$

e dizemos então que M é estável se $Index(M) = 0$.

De forma natural, podemos pensar se hipersuperfícies mínimas estáveis e completas em $\mathbb{R}^{n+1}$ também são hiperplanos. Essa resposta foi demonstrada parcilmente como verdadeira e de forma independente por Carmo-Peng em 1979 [30] e Fischer-Colbrie-Schoen em 1980 [39]. Eles provaram que esse resultado é verdadeiro para superfícies em $\mathbb{R}^3$. Para dimensões maiores essa questão encontra-se em aberto.

Posteriormente, Do Carmo-Peng [31] adicionaram a seguinte hipótese

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^{2q+2}} \int_{B_p(R)} |A|^2 = 0, \quad q < \sqrt{\frac{2}{n}}, \tag{0.1}$$

e demostraram que uma hipersuperfície M mínima estável e completa em $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo (0.1) é um hiperplano, onde $B_p(R)$ denota a bola geodésica de raio R centrada em $p \in M$. Nessa direção e mais recentemente, várias generalizações dos resultados de rigidez mencionados têm sido obtidas. Como exemplo podemos citar Cao-Shen-Zhu em 1997 [14] que mostraram que uma hipersuperfície mínima estável e completa em $\mathbb{R}^{n+1}$ tem apenas um fim. Por um fim com respeito a um compacto $D \subset M$, podemos entender como sendo uma componente conexa e ilimitada de $M \backslash D$.

Outro resultado importante é devido a Shen-Zhu de 1998 [66] que diz que se M^n $(n \geq 3)$ é uma hipersuperfície mínima estável completa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura total finita, ou seja,

$$\int_M |A|^n < +\infty,$$

então M^n é um hiperplano.

Por outro lado, Anderson [4] mostrou que uma hipersuperfície mínima completa em $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 3)$ com curvatura total finita e contendo apenas um fim é um hiperplano. Podemos observar que o teorema de Shen-Zhu segue do teorema de Cao-Shen-Zhu juntamente com o teorema de Anderson. Esses resultados datam das décadas de 80 e 90. Já em um artigo de 2003, Wang [71] definiu o conceito de super estabilidade e generalizou o teorema de Shen-Zhu para subvariedades mínimas do $\mathbb{R}^m$.

Teorema 0.3. *(Wang) Seja M^n $(n \geq 3)$ uma subvariedade mínima super estável completa em $\mathbb{R}^m$. Se M tem curvatura total finita, isto é,*

$$\int_M |A|^n < +\infty,$$

então M é um hiperplano.

Podemos perceber que todos os resultados de rigidez menciondados são para imersões no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Porém, mais recentemente, outros resultados nessa direção também apareceram para imersões em outros espaços, como as variedades de curvatura negativa ou mesmo variedades pseudo-Riemannianas. Podemos citar Neto-Wang em um trabalho de 2012 [61] para subvariedades mínimas em $\mathbb{R}^m$ e para uma imersão com curvatura média constante em uma variedade Riemanniana. Nesse mesmo trabalho, os autores obtiveram também resultados de rigidez para subvariedades tipo espaço no espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+m}_m$ com índice m . Posteriormente, Neto-Wang-Xia [62] obtiveram um resultado similar para hipersuperfícies mínimas completas no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^m$. Esse último artigo, juntamente com um artigo de Hai-Ping Fu de 2012 para subvariedades em espaços forma [41], nos serviu de base para obtermos os resultados que serão tratados no capítulo 3.

No capítulo 4 continuaremos nosso estudo sobre teoremas de rigidez, porém trabalharemos com uma imersão em uma variedade semi-Riemanniana. De fato, obteremos um resultado de ridigez para uma superfície tipo espaço com curvatura média constante imersa no espaço de Lorentz $\mathbb{L}^3$. Neste contexto, nossa motivação consiste no fato de que recentemente, vários matemáticos têem demonstrado interesse pelo estudo da geometria de imersões em variedades semi-Riemannianas de índice 1 e com curvatura seccional constante c. Dentre essas imersões destacam-se as hipersuperfícies cuja métrica induzida é positiva definida, conhecidas como hipersuperfícies tipo espaço. As variedades semi-Riemannianas aqui descritas são chamadas variedades de Lorentz e são representadas por $\overline{M}^{n+1}_1(c)$. Dependendo do sinal de c, podemos classificar as variedades de Lorentz em: espaço de Sitter, quando $c > 0$ e representado por $\mathbb{S}^{n+1}_1(c)$; espaço de Lorentz-Minkowski (ou simplesmente espaço de

Lorentz), quando $c=0$ e representado por $\mathbb{L}^{n+1}$; e espaço anti de Sitter, quando $c<0$ e representado por $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$.

A importância no estudo de imersões nessa classe de variedades semi-Riemannianas se deve ao fato de estarem intimamente relacionadas ao estudo da Relativade Geral, e também por possuírem propriedades tipo Bernstein. Faremos um destaque aqui no caso das hipersuperfícies tipo espaço com curvatura média constante. Como sabemos, a curvatura média pode ser expressa pelas curvaturas principais, que são autovalores da aplicação linear associada à segunda forma fundamental, conhecida como Endomorfismo de Weingarten. Um caso particular de curvatura média constante ocorre quando a hipersuperfície possui curvaturas principais constantes. Nesse caso, a hipersuperfície é chamada isoparamétrica, conceito devido por Nomizu [63], que provou que as hipersuperfícies tipo espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ e em $\mathbb{L}^{n+1}$ possuem no máximo duas curvaturas principais distintas.

Já no caso do espaço anti de Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}$, T. Ishihara [50] obteve uma cota superior para o quadrado da norma da segunda forma fundamental (o qual denotaremos por S) de uma imersão tipo espaço completa (onde as geodésicas estão definidas para todo valor do parâmetro) e com curvatura média nula, conhecidas na literatura como hipersuperfícies máximas. A cota obtida depende apenas da dimensão da hipersuperfície e da curvatura do espaço ambiente. Além disso, ele mostrou que as hipersuperfícies que atingem essa cota são cilindros hiperbólicos. Ishihara observou na demonstração que, para este caso, a hipersuperfície possui exatamente duas curvaturas principais. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Teorema 0.4. *(Ishihara). Seja M^n uma hipersuperfície $(n \geq 2)$ tipo espaço completa e máxima em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$. Seja S o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M^n. Temos que $S \leq n$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,*

$$M^n = \mathbb{H}^m\left(-\frac{n}{m}\right) \times \mathbb{H}^{n-m}\left(-\frac{n}{n-m}\right), \quad 1 \leq m \leq n-1.$$

Em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ existem hipersuperfícies tipo espaço completas com apenas uma curvatura principal, denominadas hipersuperfícies umbílicas. Na verdade, essas hipersuperfícies são espaços hiperbólicos $\mathbb{H}^n(-r^2)$ com curvatura $-r^2$. Isso induz a pensarmos que no espaço anti de Sitter, as hipersuperfícies isoparamétricas também possuem no máximo duas curvaturas principais, o que foi provado por L. Zhen-qi e X. Xian-Hua em [55], onde também fornecem uma caracterização das hipersuperfícies para os possíveis casos, umbílicas e com duas curvaturas principais. Podemos citar também, nessa mesma direção, K. Abe, N Koike e S. Yamaguchi [1]. Se trocarmos a hipótese de isoparamétrica pelo caso um pouco mais geral onde a curvatura média é constante, com duas curvaturas principais, L. F. Cao e G. Wei [15] estudaram hipersuperfícies tipo espaço, completas e máximas. Nessa mesma linha, baseados no trabalho de Ishihara, L. F. Cao e G. Wei caracterizaram essas hipersuperfícies como sendo cilindros hiperbólicos, como no teorema de Ishihara, exigindo uma hipótese adicional, ou seja, que uma das curvaturas seja simples. Neste mesmo trabalho, foi conjecturado que o resultado permaneceria válido para o caso de hipersuperfícies tipo espaço em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, com $c \leq 0$, exigindo apenas que essas hipersuperfícies fossem completas com curvatura média constante, duas curvaturas principais e, sendo uma das curvaturas simples, as mesmas condições do caso de máximas.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo faremos uma breve abordagem de alguns dos principais fatos da teoria das imersões isométricas. Nosso objetivo é estabelecer as ferramentas necessárias para o entendimento dos resultados tratados nos demais capítulos. Todas as variedades aqui tratadas são orientáveis e sempre que usarmos a notação M^n, estaremos nos referirmos a uma variedade de dimensão n (ou n-dimensional).

1.1 Imersões Isométricas

Uma imersão $f : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{m+n}$ de uma variedade Riemanniana (M^n, g) em uma variedade Riemanniana $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ é dita uma imersão isométrica se

$$g_x(u,v) = \overline{g}_{f(x)}(df_x(u), df_x(v)), \quad \forall\, x \in M,\ u,v \in T_p(M). \tag{1.1}$$

Observamos, portanto, que f será uma imersão isométrica se a métrica de M coincide com a métrica induzida por f. Um outro fato bastante conhecido e que ocorre como consequência do teorema da função inversa é o de que localmente, toda imersão é um mergulho. Logo, $\forall\, x \in M$ podemos encontrar uma vizinhança U de x de forma que $f(U)$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. É usual identificarmos $f(U) \approx U$, pois para a geometria local de $f(U)$, é como se tivéssemos de fato $M \subset \overline{M}$ com a métrica induzida.

Podemos obter dessa forma o espaço tangente de $\overline{M}$ como sendo uma soma direta $T_x\overline{M} = T_xM \oplus N_xM$, onde usamos a identificação $df_x(T_xM) = T_xM$ e N_xM como sendo o complemento ortogonal de T_xM em $T_x\overline{M}$ segundo a métrica de $\overline{M}$. N_xM é chamado o fibrado normal de M em x, e cada seção do fibrado normal NM é dito um campo normal a M.

Considere $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{n+m}\}$ um referencial ortonormal adaptado a M em uma vizinhaça $V \subseteq U$. Estabeleceremos a seguinte convenção para o domínio de variação dos índices:

$$
\begin{aligned}
1 \leq i, j, k, \ldots \leq n; \\
n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n+m; \\
1 \leq A, B, C, \ldots \leq n+m.
\end{aligned}
$$

Seja ω^A o coreferencial associado. As equações de estrutura são dadas por

$$
\begin{cases} d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \ \omega_A^B = -\omega_B^A, \\ d\omega_A^B = \omega_A^E \wedge \omega_E^B - \frac{1}{2}\overline{R}_{ACD}^B \omega^C \wedge \omega^D, \end{cases} \tag{1.2}
$$

onde $\overline{R}_{ACD}^B$ e $\{\omega_A^B\}$ são as componentes do tensor curvatura e as formas de conexão de $\overline{M}$. No que segue usaremos a convenção de Einstein para somas, ou seja, os índices repetidos em cimas e em baixo significarão somas.

Podemos notar que $\omega^\alpha|M = 0$. De fato,

$$
(f^*\omega^\alpha)_x(\upsilon) = (\omega^\alpha)_{f(x)}(df_x(\upsilon)) = 0 \ \ \forall\, x \in M, \ \forall\, \upsilon \in T_xM, \tag{1.3}
$$

visto que $df_x(\upsilon)$ é tangente a M e $\omega^\alpha \in N^*M$.

Por (1.2) temos que

$$
0 = d\omega^\alpha = \omega^i \wedge \omega_i^\alpha + \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = \omega^i \wedge \omega_i^\alpha. \tag{1.4}
$$

Pelo Lema de Cartan [29] segue que

$$
\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{1.5}
$$

Assim, podemos definir a segunda forma fundamental de M como sendo o tensor misto

$$
A = h_{ij}^\alpha \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_\alpha. \tag{1.6}
$$

Como temos o isomorfismo de fibrados $Hom(N^*M, T^*M \otimes T^*M) \approx T^*M \otimes T^*M \otimes NM$, podemos pensar na segunda forma fundamental de M em termos de uma aplicação linear $B : N^*M \to T^*M \otimes T^*M$ dada por

$$
B(\omega^\beta) := A^\beta = h_{ij}^\alpha \omega^i \otimes \omega^j \langle \omega^\beta, e_\alpha \rangle = h_{ij}^\beta \omega^i \otimes \omega^j.
$$

Observe que $\langle , \rangle$ representa o pareamento entre TM e T^*M. A aplicação B é comumente conhecida como aplicação de Weingarten.

Definimos a curvatura média de M como sendo a média do operador traço da segunda forma A. Assim, temos

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{n}\left(\sum_i h_{ii}^{\alpha}\right) e_{\alpha} = H^{\alpha} e_{\alpha}. \tag{1.7}$$

De posse dessa expressão, é conveniente definirmos uma variedade de curvatura média constante.

Definição 1.1. *Dizemos que uma variedade Riemanniana M tem curvatura média constante se $H := \sqrt{\sum_{\alpha}(H^{\alpha})^2} = cte$. Nesse caso, se $H = 0$, isto é, se o vetor curvatura média de M é identicamente nulo, então dizemos que a imersão é mínima.*

Podemos obter, de (1.2), as equações de estrutura de M,

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega^i \wedge \omega^i_j, \\ d\omega^j_i = \omega^p_i \wedge \omega^j_p - \dfrac{1}{2} R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l, \end{cases} \tag{1.8}$$

onde R^j_{ikl} são as componentes do tensor curvatura de M. De (1.2), (1.5) e (1.8) temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l &= d\omega^j_i - \omega^p_i \wedge \omega^j_p \\ &= \omega^i_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha}_j - \frac{1}{2}\overline{R}^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l \\ &= -\left(\sum_{\alpha} h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{jl} + \frac{1}{2}\overline{R}^j_{ijk}\right)\omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned}$$

de onde obtemos a equação de Gauss

$$R^j_{ikl} - \overline{R}^j_{ikl} = \sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{jl} - h^{\alpha}_{il}h^{\alpha}_{jk}). \tag{1.9}$$

Podemos notar que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j &= \sum_{i<j} a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + \sum_{j<i} a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \\ &= \sum_{i<j} a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + \sum_{i<j} a_{ji}\omega^j \wedge \omega^i \\ &= \sum_{i<j}(a_{ij} - a_{ji})\omega^i \wedge \omega^j. \end{aligned}$$

Como $a_{ij} = -a_{ji}$, temos então que

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\omega_i \wedge \omega^j = \sum_{i<j} a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j.$$

Podemos destacar também as equações de estrutura do fibrado normal de M, ou seja,

$$\begin{cases} d\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta}, \\ d\omega^{\beta}_{\alpha} = \omega^{\gamma}_{\alpha} \wedge \omega^{\beta}_{\gamma} - \frac{1}{2} R^{\perp\beta}_{\alpha ij} \omega^{i} \wedge \omega^{j}. \end{cases} \tag{1.10}$$

As componentes do tensor curvatura normal $R^{\perp\beta}_{\alpha ij}$ mantém um relação análoga à (1.9) com a curvatura do espaço ambiente $\overline{M}$, a qual é conhecida na literatura como equação de Ricci, e cuja expressão segue de (1.2), (1.5) e (1.10):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} R^{\perp\beta}_{\alpha ij} \omega^{i} \wedge \omega^{j} &= d\omega^{\beta}_{\alpha} - \omega^{\gamma}_{\alpha} \wedge \omega^{\beta}_{\gamma} \\ &= \omega^{k}_{\alpha} \wedge \omega^{\beta}_{k} - \frac{1}{2} \overline{R}^{\beta}_{\alpha ij} \omega^{i} \wedge \omega^{j} \\ &= -\left(\sum_{k} h^{\alpha}_{ki} h^{\beta}_{kj} + \frac{1}{2} \overline{R}^{\beta}_{\alpha ij} \right) \omega^{i} \wedge \omega^{j}. \end{aligned}$$

Portanto

$$R^{\perp\beta}_{\alpha ij} - \overline{R}^{\beta}_{\alpha ij} = \sum_{k} \left(h^{\alpha}_{ki} h^{\beta}_{kj} - h^{\alpha}_{kj} h^{\beta}_{ki} \right). \tag{1.11}$$

Introduziremos agora o conceito de conexão afim de uma variedade diferenciável, e entenderemos sua relação com as formas de conexão ω^{B}_{A}. Denotaremos por $\Gamma(\cdot)$ como sendo o conjunto das secções dos respectivos fibrados.

Definição 1.2. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma conexão afim em M é uma plicação $\nabla : \Gamma(TM) \to \Gamma(T^{*}M \otimes TM)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*
$1 - \nabla(X_1 + X_2) = \nabla X_1 + \nabla X_2, \quad \forall\ X_1,\ X_2 \in\ \Gamma(TM)$;
$2 - \nabla(fX) = df \otimes X + f \nabla X, \quad \forall\ X \in\ \Gamma(TM), f \in\ C^{\infty}(M)$.

Com essa definição, podemos provar que a equação

$$\nabla e_A = \omega^{B}_{A} \otimes e_B \tag{1.12}$$

define uma conexão ∇ em $\overline{M}$.

Dentre as infinitas conexões que uma variedade Riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$ possui, existe uma única conexão simétrica e que preserva a métrica de $\overline{M}$ (num sentido que ficará mais preciso posteriormente). Essa conexão é chamada de conexão de Levi-Civita, ou conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Um fato é que as formas $\{\omega^{B}_{A}\}$ determinam a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ pela expressão (1.12), motivo pela qual são chamadas formas de conexão.

Considere ∇ a conexão Riemanniana de TM. A conexão Riemanniana $\widetilde{\nabla}$ induzida em $T^*\overline{M}$ é definida pela expressão

$$\langle \widetilde{\nabla}\omega, X\rangle = d\langle X,\omega\rangle - \langle \nabla X,\omega\rangle. \tag{1.13}$$

Logo, se $\{\widetilde{\omega}_A^B\}$ são as formas de conexão de $T^*\overline{M}$, isto é, $\widetilde{\nabla}\omega_A = \widetilde{\omega}_B^A \otimes \omega_B$, temos então que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_B^A &= \langle \widetilde{\nabla}\omega^A, e_B\rangle \\
&= d\delta_B^A - \langle \nabla e_B, \omega^A\rangle \\
&= -\langle \omega_B^C \otimes e_C, \omega^A\rangle \\
&= -\omega_B^C \omega^A(e_C) = \omega_B^C \delta_C^A = -\omega_B^A.
\end{aligned}$$

Podemos então induzir uma conexão em $T^*\overline{M}\otimes T\overline{M}$ utilizando a equação

$$\widehat{\nabla}(\omega\otimes X) = \widetilde{\nabla}\omega\otimes X + \omega\otimes\nabla X. \tag{1.14}$$

De agora em diante, sempre que não houver confusão utilizaremos apenas ∇ para denotar todas as conexões consideradas neste capítulo.

Agora mostraremos em que sentido a conexão $\{\omega_A^B\}$ preserva a métrica. Considerando que o tensor métrico de $\overline{M}$ seja dado por $\overline{g} = \overline{g}_{AB}\omega^A\otimes\omega^B$, de (1.14) temos que

$$\begin{aligned}
\nabla\overline{g} &= d\overline{g}_{AB}\otimes\omega^A\otimes\omega^B + \overline{g}_{AB}\nabla\omega^A\otimes\omega^B + \overline{g}_{AB}\omega^A\otimes\nabla\omega^B \\
&= d\overline{g}_{AB}\otimes\omega^A\otimes\omega^B - \overline{g}_{AB}\omega_C^A\otimes\omega^C\otimes\omega^B - \overline{g}_{AB}\omega_C^B\otimes\omega^A\otimes\omega^C \\
&= (d\overline{g}_{AB} - \overline{g}_{CB}\omega_A^C - \overline{g}_{AC}\omega_B^C)\otimes\omega^A\otimes\omega^B.
\end{aligned}$$

Desde que o referencial é ortonormal, temos que $g_{AB} = \delta_{AB}$, e portanto temos

$$\begin{aligned}
\nabla\overline{g} &= (d\delta_{AB} - \delta_{CB}\omega_A^C - \delta_{AC}\omega_B^C)\otimes\omega^A\otimes\omega^B \\
&= (-\omega_A^B - \omega_B^A)\otimes\omega^A\otimes\omega^B \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pelo fato de M ter a métrica induzida de $\overline{M}$, pode-se verificar que as formas $\{\omega_i^j\}$ e $\{\omega_\alpha^\beta\}$ definem as conexões Riemannianas de TM e NM, respectivamente.

Observação: Em geral, as métricas g_{ij} e $g^{ij} = g_{ij}^{-1}$ de TM e T^*M, respectivamente, induzem uma métrica Riemanniana no fibrado

$$T_s^r(M) = \overbrace{T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M}^{s\ vezes} \otimes \underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{r\ vezes}.$$

Tal métrica, ainda denotada por g, é definida pela fórmula

$$g(t,s) = g^{i_1k_1} \ldots g^{i_sk_s} g_{j_1l_1} \ldots g_{j_rl_r} t_{i_1\ldots i_s}^{j_1\ldots j_r} s_{k_1\ldots k_s}^{l_1\ldots l_r},$$

onde $t_{i_1\ldots i_s}^{j_1\ldots j_r}$ e $s_{k_1\ldots k_s}^{l_1\ldots l_r}$ são as compontentes dos tensores t e s. A conexão definida por (1.14) preserva essa métrica.

Por outro lado, derivando a segunda forma fundamental, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla A &= (dh_{ij}^{\alpha} - h_{lj}^{\alpha}\omega_i^l - h_{il}^{\alpha}\omega_j^l + h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}) \otimes \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_{\alpha} \\
&= \left(\frac{\partial h_{ij}^{\alpha}}{\partial x^k} - h_{lj}^{\alpha}\omega_i^l(e_k) - h_{il}^{\alpha}\omega_j^l(e_k) + h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}(e_k)\right) \omega^k \otimes \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_{\alpha} \\
&= h_{ijk}^{\alpha}\omega^k \otimes \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_{\alpha}.
\end{aligned}$$

Diferenciando exteriormente (1.5) e usando (1.8) temos

$$\begin{aligned}
d\omega_i^{\alpha} &= dh_{ij}^{\alpha} \wedge \omega^j + h_{ij}^{\alpha} d\omega^j \\
&= \frac{\partial h_{ij}^{\alpha}}{\partial x^k}\omega^k \wedge \omega^j + h_{ij}^{\alpha}\omega^l \wedge \omega_l^j \\
&= \frac{\partial h_{ij}^{\alpha}}{\partial x^k}\omega^k \wedge \omega^j + h_{ij}^{\alpha}\omega^l \wedge \omega_l^j(e_k)\omega^k \\
&= \left(\frac{\partial h_{ij}^{\alpha}}{\partial x^k} - h_{il}^{\alpha}\omega_j^l(e_k)\right) \omega^k \wedge \omega^j.
\end{aligned}$$

Por outro lado, da equação (1.2) temos que o lado esquerdo da expressão acima é dado por

$$\begin{aligned}
d\omega_i^{\alpha} &= \omega_i^l \wedge \omega_l^{\alpha} + \omega_i^{\beta} \wedge \omega_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}\overline{R}_{ikj}^{\alpha}\omega^k \wedge \omega^j \\
&= \omega_i^l(e_k)\omega^k \wedge (h_{lj}^{\alpha}\omega^j) + h_{ij}^{\beta}\omega^j \wedge (\omega_{\beta}^{\alpha}(e_k)\omega^k) - \frac{1}{2}\overline{R}_{ikj}^{\alpha}\omega^k \wedge \omega^j \\
&= \left(h_{lj}^{\alpha}\omega_i^l(e_k) - h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}(e_k) - \frac{1}{2}\overline{R}_{ikj}^{\alpha}\right) \omega^k \wedge \omega^j.
\end{aligned}$$

Juntando essas duas últimas expressões obtemos

$$\left(\frac{\partial h_{ij}^{\alpha}}{\partial x^k} - h_{il}^{\alpha}\omega_j^l(e_k) - h_{lj}^{\alpha}\omega_i^l(e_k) + h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}(e_k) + \frac{1}{2}\overline{R}_{ikj}^{\alpha}\right) \omega^k \wedge \omega^j = 0,$$

de onde podemos obter a equação de Codazzi

$$h^{\alpha}_{ijk} - h^{\alpha}_{ikj} = \overline{R}^{\alpha}_{ijk}. \tag{1.15}$$

As fórmulas de Gauss e Ricci juntamente com a equação de Codazzi formam as equações fudamentais de uma imersão isométrica, motivo pelo qual serão bastante utilizadas no decorrer do texto.

Considere uma família $\{i_t\}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a 1 parâmetro de imersões $M \hookrightarrow \overline{M}$ de forma que $i_0 = i$ e que $I : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \overline{M}$ seja uma aplicação diferenciável definida por $I(t,x) = i_t(x)$. Dizemos então que $\{i_t\}$ é uma variação de $i : M \to \overline{M}$.

A variaçao $\{i_t\}$ induz um campo V de vetores em $\overline{M}$ definido ao longo da imagem de M. Este campo pode ser construído da seguinte forma. Seja $\dfrac{\partial}{\partial t}$ o vetor tangente canônico a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ com a estrutura produto. Definimos

$$V(x) = dI\left(\frac{\partial}{\partial t}(0,x)\right). \tag{1.16}$$

O campo V divide-se nas componentes tangente V^T e normal $V^{\perp}$. Se M tem a forma de volume induzida θ, como V^T é tangente sobre M, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.3. *Seja M uma variedade compacta. Se $A(t)$ é a área induzida de $i_t(M)$, então*

$$A'(0) = -\int_M g(V^{\perp}, \overrightarrow{H}) + \int_{\partial M} \theta_{V^T}, \tag{1.17}$$

onde θ_{V^T} representa a $(n-1)$-forma em ∂M obtida pela contração da forma de volume θ pelo vetor tangente V^T.

Demonstração. Para uma demonstração em coordenadas locais o leitor pode consultar [35]. Uma prova global do resultado pode ser obtida em [3]. □

A abordagem global no resultado acima será útil no cálculo da segunda variação de volume, que trataremos agora.

A princípio podemos perceber que se considerarmos as variações que fixam o bordo de M, ou seja, $i_t(x) = i(x)$ para todo $x \in \partial M$, então (1.17) se torna

$$A'(0) = -\int_M g(V^{\perp}, \overrightarrow{H}),$$

o que nos mostra que as subvariedades mínimas são pontos críticos de $A(t)$.

Sejam $\nu \in NM$ e $\{e_i\}$ uma base ortonormal de TM. Definimos a aplicação $\overline{Rc} : NM \to NM$ dada por

$$\overline{Rc}(\nu) = \sum_i (\overline{R}_{e_i,\nu} e_i)^{\perp},$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}$. Temos então o seguinte resultado.

Teorema 1.4. *Seja $M^n \hookrightarrow N^{n+m}$ uma subvariedade compacta minimamente imersa e $\{i_t\}$ uma variação de M tal que $i_t(\partial M) = i(\partial M)$. Então*

$$A''(0) = \int_M \{|\nabla V^{\perp}|^2 - g(\overline{Rc}(V^{\perp}), V^{\perp}) - |B(V^{\perp})|^2\}. \tag{1.18}$$

Demonstração. Ver [44]. □

Sem perda de generalidades, podemos considerar um referencial ortonormal adaptado $\{e_A\}$ em uma vizinhança de $x \in M$ de forma que

$$\omega_A^B(x) = 0.$$

Logo, escolhendo uma variação normal $V = fe_\alpha$ com $f \in C_0^\infty(M)$, temos que

$$|\nabla V^{\perp}|^2 = |df \otimes e_\alpha|^2 = |\frac{\partial f}{\partial x^i}\omega^i \otimes e_\alpha|^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2 = |\nabla f|^2,$$

$$g(\overline{Rc}(V^{\perp}), V^{\perp}) = \sum_i g(R_{e_i, fe_\alpha} e_i, fe_\alpha) = f^2 Ric_N(e_\alpha, e_\alpha),$$

$$|B(V^{\perp})|^2 = f^2 |A^\alpha|^2.$$

Substituindo as expressões acima em (1.18), obtemos a seguinte expressão

$$A''(0) = \int_M \{|\nabla f|^2 - f^2 Ric_N(e_\alpha, e_\alpha) - f^2 |A^\alpha|^2\}.$$

Podemos ver portanto que se M satisfaz o mínimo do funcional volume, então

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \int_M f^2 (Ric_N(e_\alpha, e_\alpha) + |A^\alpha|^2).$$

Com essa última expressão, introduziremos o conceito super estabilidade.

Definição 1.5. *Uma subvariedade imersa* $i : M^n \hookrightarrow N^{n+m}$ *é dita super estável se*

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \int_M f^2 (\sum_\alpha Ric_N(e_\alpha, e_\alpha) + |A|^2), \ \forall\ f \in\ C_0^\infty(M), \tag{1.19}$$

onde $|A|^2 = \sum_\alpha |A^\alpha|^2$ *denota o comprimento da segunda forma fundamental de* M *e* $\{e_\alpha\}$ *são direções normais unitárias tais que* $Ger\{e_\alpha\} = NM$.

No caso em que $N = \mathbb{R}^{n+m}$, reobtemos a definição de Wang em [71], e quando $m = 1$, a definição coincide com a definição clássica de estabilidade de hipersuperfícies.

Acrescentando mais uma condição em f, temos também o conceito de super estabilidade fraca.

Definição 1.6. *Uma subvariedade imersa* $i : M^n \hookrightarrow N^{n+m}$ *é fracamente super-estável se a desigualdade em* (1.19) *for satisfeito para toda* $f \in\ C_0^\infty(M)$ *com*

$$\int_M f = 0. \tag{1.20}$$

É claro que toda subvariedade super-estável é também uma subvariedade fracamente super-estável. A recíproca é falsa. De fato, considerando a imersão totalmente geodésica $S^2 \subset S^3$ (podemos pensar em S^2 como o "equador" de S^3), a inequação de super-estabilidade se torna

$$\int_{S^2} |\nabla f|^2 \geq 2 \int_{S^2} f^2.$$

Pelo fato de S^2 ser compacto, tomando $f = 1$ obtemos uma contradição. Logo a imersão não é super-estável. Porém é fracamente super estável, já que se f tem média 0, ou seja,

$$\int_{S^2} f = 0,$$

desde que $\lambda_1(S^2) = 2$, pela desigualdade de Poincaré temos que

$$\int_{S^2} |\nabla f|^2 \geq 2 \int_{S^2} f^2.$$

Um outro conceito bastante importante e que será muito utilizado no capítulo 4 é o conceito de traço livre da segunda forma fundamental, e que passaremos a descrever. Considere uma imersão n-dimensional M^n com curvatura média H constante. Sejam A e B o operador shape e a segunda forma fundamental de M, respectivamente, isto é, $\langle A(x), y\rangle = \langle \nu, B(x,y)\rangle$ para todo $x, y \in TM$. Denote por

Φ o traço livre da segunda forma fundamental, definido por $\Phi = B - H\nu g$ e por ϕ o endomorfismo de TM associado a Φ, ou seja, $\langle \phi(x), y \rangle = \langle \nu, \Phi(x,y) \rangle$, para todo x, y em TM. Para nosso propósito, consideraremos $\phi = A - HI$, onde I denota a matriz identidade $n \times n$. Podemos observar que essa aplicação ϕ tem traço zero. De fato,

$$tr\phi = tr(A - HI) = trA - HtrI = nH - nH = 0.$$

Temos ainda que

$$S := |A|^2 = |\phi|^2 + nH^2.$$

Sendo H constante, o fato do traço ser zero nos mostra que essa aplicação é uma ferramenta útil para obtermos propriedades similares ao caso de $H \equiv 0$. Pelo fato de A ser diagonalizável, temos que ϕ também goza dessa propriedade. Logo, tomando um referencial $\{e_i\}$ que diagonaliza A, temos que

$$\phi e_i = \widetilde{\lambda}_i e_i, \quad \widetilde{\lambda}_i = \lambda_i - H, \tag{1.21}$$

onde λ_i é um autovalor de A. Desde que H é constante, temos ainda que

$$\nabla A = \nabla\phi \ , \quad \nabla|A|^2 = \nabla(|\phi|^2 + 2H^2) = \nabla|\phi|^2.$$

Abaixo apresentaremos uma estimativa para o termo $|\nabla\phi|^2$, conhecida como desigualdade tipo Kato. Essa desigualdade foi inicialmente estabelecida para hipersuperfícies mínimas, sendo obtida por R. Schoen, L. Simon e S. T. Yau em [68]. Porém, os cálculos podem ser adaptados para o caso $H \neq 0$. Utilizaremos essa desigualdade no capítulo 4.

Lema 1.7. *(Desigualdade tipo Kato) Seja M uma hipersuperfície com curvatura média H constante imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Para todo $\varepsilon > 0$ temos*

$$|\nabla\phi|^2 - |\nabla|\phi||^2 \geq \frac{2}{n(1+\varepsilon)}|\nabla|\phi||^2 - \frac{2}{\varepsilon}\sum_{ij}\overline{R}(\nu, e_i, e_i, e_j)^2.$$

Além disso, se $\overline{M}$ tem curvatura constante temos

$$|\nabla\phi|^2 - |\nabla|\phi||^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|\phi||^2.$$

O lema acima pode ser consultado com mais detalhes em [48]. Na próxima seção, introduziremos mais algumas desigualdades e resultados que serão necessários nos demais capítulos.

1.2 Resultados Auxiliares

Definição 1.8. *Seja $\Omega \subset M^n$ um aberto. Denotamos o espaço das funções p-integráveis em Ω por*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \quad \int_\Omega |f(x)|^p < +\infty \right\},$$

com f é mensurável.

Com o conceito dos espaços L^p em mãos, podemos enunciar algumas desigualdades importantes.

Proposição 1.9. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, q < +\infty$. Então $f \cdot g \in L^1$ e*

$$\left| \int f \cdot g \right| \leq \int |f \cdot g| \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

onde $\|f\|_p := (\int |f(x)|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Quando $p = q = 2$, a desigualdade de Hölder se reduz à famosa desigualdade de Schwarz, já que em L^2 temos o produto interno usual e a norma induzida, dada por

$$\langle f, g \rangle = \int_M f g dV, \quad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle,$$

para $f, g \in L^2$. Com o produto interno acima, L^2 é um espaço de Hilbert.

Proposição 1.10. *(Desigualdade de Young) Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então, para todo par de números reais a e b não negativos vale a desigualdade*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

A desigualdade de Young também pode tomar a forma conhecida como desigualdade de Young com épsilon.

Proposição 1.11. *Nas condições da Proposição 1.10, dado $\varepsilon > 0$ temos que*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q,$$

onde $C(\varepsilon)$ é uma constante positiva que depende de ε.

Demonstração. De fato, pela proposição anterior temos que

$$ab = (\xi a)\left(\frac{b}{\xi}\right) \leq \frac{1}{p}(\xi a)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{\xi}\right)^q = \frac{\xi^p}{p}a^p + \frac{1}{q\xi^q}b^q.$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{\xi^p}{p}$ temos que

$$ab = \leq \varepsilon a^p + \frac{1}{q(\varepsilon p)^{q/p}}b^q = \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q.$$

□

Seja M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional, $n \geq 1$, conexa e com métrica g. Assumiremos que M^n tenha fronteira ∂M. Lembramos que ∂M pode ser visto como uma subvariedade $(n-1)$-dimensional de M, com métrica Riemanniana induzida e mensurada, e com densidade de medida denotada por dA. Seja ν o campo vetorial unitário normal e exterior a ∂M. Consideraremos que $divX$ denota o divergente de um campo X atuante sobre o conjunto de funções definidas em M. Seja $\chi(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M. Nesse caso, temos as seguintes definições.

Definição 1.12. *O divergente de um campo de vetores $X \in \chi(M)$ é dado por*

$$\begin{array}{rcl} divX: M & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & tr(Y(p) \mapsto \nabla_{Y(p)}X). \end{array}$$

Definição 1.13. *Seja $f: M \to \mathbb{R}$ diferenciável. O gradiente de f é definido como o único campo de vetores ∇f em M tal que*

$$g(\nabla f(p), \upsilon) = df_p(\upsilon), \ p \in M, \ \upsilon \in T_pM.$$

Definição 1.14. *A Hessiana de $f: M \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$\begin{array}{rl} \nabla^2 f: & \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M) \\ & (X,Y) \mapsto g(\nabla_X \nabla f, Y). \end{array}$$

Outro conceito bastante utilizado e que foi mencionado na introdução pelo fato de motivar os problemas de autovalores que serão estudados nos capítulos 2 e 3 é o conceito do Laplaciano, definido sobre o conjunto de funções suaves sobre M.

Definição 1.15. *O Laplaciano de M é dado por*

$$\begin{aligned} \triangle : C^\infty(M) &\to C^\infty(M) \\ f &\to div\nabla f. \end{aligned}$$

Seja $\{Y_1,...,Y_n\}$ uma base ortonormal do espaço tangente de M. Temos que

$$\triangle f = div\nabla f = tr(\nabla_Y \nabla f) = \sum_i g(\nabla_{Y_i}\nabla f, Y_i) = tr(\nabla^2 f). \tag{1.22}$$

Definição 1.16. *Um referencial $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ é dito ortonormal se é uma base ortonormal de T_pM para cada M.*

Um fato bastante conhecido é que dado $p \in M^n$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, E_2, ..., E_n \in \chi(U)$, ortonormais em cada ponto de U, tais que, $\nabla_{E_i}E_j(p) = 0$. Uma tal família E_i, $i = 1,2,...,n$ de campos de vetores é chamada um referencial geodésico local em p. A seguir, consideraremos uma referencial geodésico $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ em uma vizinhança $U \subset M$ e uma função $f \in C^\infty(M)$ para obtermos expressões para o gradiente, Laplaciano e a Hessiana em termos dos elementos da base, e que serão de maior praticidade. Como de costume, denotaremos a métrica g por $\langle , \rangle$. Temos então que

$$\langle \nabla f, E_i \rangle = df(E_i) = E_i(f) = f_i. \tag{1.23}$$

Logo

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i E_i. \tag{1.24}$$

Assim, podemos obter uma expressão para o Laplaciano e para a Hessiana de f

$$\begin{aligned} \triangle f &= div\nabla f = tr(\nabla_{E_i}\nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\left(\sum_{j=1}^n f_j E_j\right), E_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle f_j \nabla_{E_i}E_j + E_i(f_j)E_j, E_i \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle f_{j,i}E_j, E_i \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\triangle f = \sum_{i=1}^n f_{ii}. \tag{1.25}$$

Para a Hessiana, temos que

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(E_i,E_j) &= \langle \nabla_{E_j}\nabla f, E_i\rangle = \langle \nabla_{E_j}\left(\sum_{m=1}^{n} f_m E_m\right), E_i\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{n}\langle f_m \nabla_{E_j} E_m + E_j(f_m)E_m, E_i\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{n}\langle E_j(f_m)E_m, E_i\rangle = E_j(f_i) = f_{ij},\end{aligned}$$

o que nos fornece

$$|\nabla^2 f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2. \tag{1.26}$$

Os próximos teoremas são de extrema importância por relacionar a integral de certo tipo de funções definidas em uma variedade com a integral de um termo definido na fronteira da variedade.

Teorema 1.17. *(Teorema da Divergência) Sejam X um campo vetorial C^1 em $\overline{M}$ e com suporte compacto em $\overline{M}$. Então temos*

$$\int_M divX\ dV = \int_{\partial M} X\nu\ dA.$$

Os detalhes sobre o Teorema da Divergência podem ser consultados em [16].

Teorema 1.18. *(Identidade de Green) Sejam $h \in C^1(\overline{M})$, $f \in C^2(\overline{M})$ de forma que $h\nabla f$ tenha suporte compacto em $\overline{M}$. Então*

$$\int_M (h\triangle f + \langle \nabla h, \nabla f\rangle)dV = \int_{\partial M} h\frac{\partial f}{\partial \nu} dA,$$

onde $\langle \cdot,\cdot\rangle$ representa o produto interno em T_pM.

A identidade de Green pode ser obtida diretamente do Teorema da Divergência. Quando a fronteira ∂M da variedade for vazia, podemos considerar a integral do termo de fronteira como sendo identicamente nula.

O próximo teorema nos fornece uma importante ferramenta para nosso estudo, pois relaciona a curvatura de Ricci de uma variedade com propriedades de uma função suave definida sobre essa mesma variedade.

Teorema 1.19. *(Fórmula de Böchner) Se M é uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$, então*

$$\frac{1}{2}\triangle(|\nabla f|^2) = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \triangle f\rangle + Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{1.27}$$

Demonstração. Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $V \subset M$. Como

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i,$$

temos

$$|\nabla f|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} f_i E_i, \sum_{i=1}^{n} f_i E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} (f_i)^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle(|\nabla f|^2) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|\nabla f|^2)_{jj} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(f_i)^2\right)_{jj} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}2f_i f_{ij}\right)_j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(2\sum_{i=1}^{n}f_{ij}^2 + 2\sum_{i=1}^{n}f_i f_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jij}.\end{aligned}$$

Desde que $f_{ij} = f_{ji}$, então

$$\frac{1}{2}\triangle(|\nabla f|^2) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jij}.$$

Da fórmula de Ricci (1.11) temos $f_{jij} = f_{jji} + \sum_{l=1}^{n} f_l R_{ljij}$, e portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle(|\nabla f|^2) &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i \left(f_{jji} + \sum_{l=1}^{n} f_l R_{ljij}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jji} + \sum_{i,l=1}^{n} f_i f_l \left(\sum_{j=1}^{n} R_{ljij}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jji} + \sum_{i,l=1}^{n} f_i f_l R_{li} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \left\langle \sum_{i=1}^{n} f_i E_i, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (f_{jj})_i E_i \right\rangle + Ric\left(\sum_{i=1}^{n} f_i E_i, \sum_{l=1}^{n} f_l E_l\right),\end{aligned}$$

de onde conlcuímos que

$$\frac{1}{2}\triangle(|\nabla f|^2) = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \triangle f \rangle + Ric(\nabla f, \nabla f).$$

□

Já no caso de variedades compactas com fronteira suave, uma ferramenta essencial é a fórmula de Reilly, que apresentaremos agora.

Teorema 1.20. *Seja (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana compacta com fronteira suave ∂M. Dada uma função $f \in C^\infty(M)$, temos que*

$$\int_M ((\overline{\triangle} f)^2 - |\overline{\nabla}^2 f|^2 - Ric(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f))dV = \int_{\partial M} (2(\triangle f)f_\nu + nH(f_\nu)^2 + \Pi(\nabla f, \nabla f))dA, \tag{1.28}$$

onde $\overline{\nabla} f$, $\overline{\triangle} f$ e $\overline{\nabla}^2 f$ representam o gradiente, Laplaciano e a Hessiana de f em M, e Ric a curvatura de Ricci de M. Ainda, ∇f, $\triangle f$ representam o gradiente e o Laplaciano de f em ∂M, $\Pi(\nabla f, \nabla f) = g(\overline{\nabla}_X \nu, Y)$ para todo $X, Y \in T\partial M$ e $H = \frac{1}{n} tr\Pi$ a segunda forma fundamental e a curvatura média de ∂M com respeito ao normal unitário ν em ∂M.

Demonstração. Ver [64]. □

Relacionando propriedades de funções definidas sobre a variedade com propriedades dessas mesmas funções, quando as restringimos sobre a fronteira, temos uma relação bastante interessante para o Laplaciano, de acordo com o lema a seguir.

Lema 1.21. *Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $f \in C^\infty(\overline{M})$, então em cada $p \in M$ temos*

$$\overline{\triangle} f = \triangle f + nHf_\nu + \overline{\nabla}^2 f(\nu, \nu), \tag{1.29}$$

onde $\overrightarrow{H} = H\nu$ é o vetor curvatura média da imersão e ν é o normal unitário exterior a M.

Uma observação importante e que às vezes percebemos na literatura é que o sinal do termo nHf_ν em (1.29) pode mudar, dependendo da orientação escolhida para ν.

Demonstração. Seja $\{e_1, ..., e_n = \nu\}$ um referencial adaptado em uma vizinhança de $p \in M$ em $\overline{M}$. Em p temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\triangle} f &= \sum_{i=1}^{n+1} (e_i(e_i(f)) - (\overline{\nabla}_{e_i} e_i)(f)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)) + B(e_i, e_i)(f)) + \nu(\nu(f)) - (\overline{\nabla}_\nu \nu)(f) \\
&= \triangle f + nHf_\nu + \overline{\nabla}^2 f(\nu, \nu),
\end{aligned}$$

onde usamos que $\overline{\nabla}^2 f(X,Y) = X\langle \overline{\nabla} f, Y\rangle - \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}_X Y\rangle = X(Y(f)) - (\overline{\nabla}_X Y)(f)$. □

1.3 O Operador Drifting

Esta seção será dedicada as variedades com peso. Trataremos de um operador diferencial denominado drifting Laplaciano, o qual descreveremos abaixo. Nosso objetivo é estabelecer as ferramentas necessárias para obtermos estimativas para esse operador, adaptando a alguns problemas clássicos que serão tratados no capítulo 2.

No que segue, $(M,\langle,\rangle)$ é uma variedade Riemanniana n-dimensional, compacta com fronteira ∂M (possivelmente vazia). Seja $\phi \in C^2(M)$ e considere a medida com peso $d\mu = e^{-\phi}d\upsilon$, onde $d\upsilon$ é a medida de volume Riemanniana em $(M,\langle,\rangle)$. O drifting Laplaciano com respeito a medida de volume com peso $d\mu$ é definido como sendo

$$L_\phi = \triangle - \langle \nabla\phi, \nabla(.)\rangle.$$

Podemos notar que o drifting Laplaciano é uma generalização do Laplaciano. De fato, quando $\phi \equiv cte$ temos $L_\phi f = \triangle f$.

Para funções suaves f e g tais que

$$f \mid \partial M = g \mid \partial M = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \nu} \mid \partial M = \frac{\partial g}{\partial \nu} \mid \partial M = 0,$$

por integração por partes pode-se mostrar que

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla g\rangle d\mu = -\int_M g L_\phi f d\mu = -\int_M f L_\phi g d\mu,$$

e

$$\int_M g L_\phi^2 f d\mu = \int_M L_\phi f L_\phi g d\mu = \int_M f L_\phi^2 g d\mu.$$

Consequentemente, no espaço de funções suaves definidas em M que se anulam na froteira, L_ϕ e L_ϕ^2 são auto-adjuntos com respeito ao produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_M f g d\mu.$$

Além disso, o problema de Dirichlet para o Drifting Laplaciano

$$\begin{cases} Ł_\phi u = -\lambda u \ em \ M, \\ u|_{\partial M} = 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

tem espectro real e discreto:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ... \to +\infty.$$

Convencionaremos $\lambda_0(L_\phi) = 0$ se $\partial M = \emptyset$. Cada autovalor é repetido de acordo com sua multiplicidade. Aqui ressaltamos que, sempre que não houver confusão, omitiremos o operador ao tratar de seus autovalores. Dito isto, podemos escrever $\lambda_k(L_\phi) = \lambda_k$.

Recentemente, muitos resultados interessantes envolvendo estimativas de autovalores do drifting Laplaciano tem sido obtidos por Liu, Ma, Du, Xia, dentre outros ([21-23], [33] etc.).

Como de costume, consideraremos ν o normal unitário exterior a ∂M. O operador shape de ∂M é dado por $S(X) = \nabla_X \nu$ e a segunda forma fundamental de ∂M é definida como $\Pi(X,Y) = \langle A(X), Y\rangle$, onde X, $Y \in \partial M$. Os autovalores de S são chamados de curvaturas principais de ∂M. A curvatura média com peso é uma generalização natural da curvatura média para variedades Riemannianas com densidade (ou peso), e é definida como

$$H_\phi := H - \frac{1}{n-1}\phi_\nu,$$

onde H denota a curvatura média usual de ∂M, dada por $H = \dfrac{1}{n-1} trB$, com trB sendo o traço da aplicação B.

Em espaços métricos com medida suave, podemos definir o tensor Ricci Bakry-Émery Ric_ϕ, dado por $Ric_\phi = Ric + \nabla^2\phi$, que é também chamado de curvatura de Ricci com peso.

Considerando uma função suave ϕ definida em uma variedade compacta n-dimensional M com fronteira, Ma e Du [56] estenderam a fórmula de Reilly em (1.28) para uma variedade Riemanniana com densidade. De fato, eles obtiveram a seguinte identidade

$$\int_M (\overline{L}_\phi f)^2 - |\overline{\nabla}^2 f|^2 - Ric_\phi(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) d\mu = \int_{\partial M} 2(L_\phi f) f_\nu + nH_\phi (f_\nu)^2 + \Pi(\nabla f, \nabla f) dA_\phi, \tag{1.31}$$

onde $dA_\phi = e^{-\phi} dA$. Aqui, $L_\phi = \triangle - \langle \nabla\phi, \nabla(.)\rangle$ e ∇ representam respectivamente o drifting Laplaciano e o gradiente em ∂M, com respeito a métrica induzida.

1.4 Estimativas para o Operador Bi-harmônico

A seguir, apresentaremos alguns resultados obtidos por Chen-Cheng-Wang-Xia (ver [18]) sobre estimativas de autovalores para o operador bi-harmônico. Os dois primeiros resultados são na direção do problema de campled plate e do problema de buckling. Esses resultados nos dão uma estimativa para o primeiro autovalor desse operador em uma variedade Riemanniana compacta com fronteira e curvatura de Ricci positiva.

Teorema 1.22. *Seja $(M,\langle,\rangle)$ uma variedade Riemanniana com dimensão $n \geq 2$ compacta conexa com fronteira ∂M e denote por ν o normal unitário exterior de ∂M. Assuma que a curvatura de Ricci de M seja limitada inferiormente por $(n-1)$. Seja λ_1 o primeiro autovalor do problema de Dirichlet (para o Laplaciano) e seja Γ_1 o primeiro autovalor do problema de campled plate:*

$$\begin{cases} \triangle^2 u = \Gamma u \text{ em } M, \\ u|_{\partial M} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial M} = 0. \end{cases}$$

Então temos $\Gamma_1 > n\lambda_1$.

Teorema 1.23. *Assuma que M satisfaz as mesmas condições do teorema 1.22 e seja Λ_1 o primeiro autovalor do problema do buckling:*

$$\begin{cases} \triangle^2 u = -\Lambda \triangle u \text{ em } M, \\ u|_{\partial M} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial M} = 0. \end{cases}$$

Então temos $\Lambda_1 > n$.

Os dois teoremas acima são análogos o teorema de Lichnerowicz-Obata, enquanto que os dois próximos resultados vão de encontro ao teorema de Reilly, enunciados na introdução do texto.

Teorema 1.24. *Seja $(M,\langle,\rangle)$ uma variedade Riemanniana com dimensão $n(\geq 2)$, compacta conexa com fronteira ∂M. Assuma que a curvatura de Ricci de M seja limitada inferiormente por $(n-1)$ e a curvatura média de ∂M seja não negativa. Seja p_1 o primeiro autovalor do seguinte problema:*

$$\begin{cases} \triangle^2 u = pu \text{ em } M, \\ u|_{\partial M} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\partial M} = 0. \end{cases}$$

Então $p_1 \geq n\lambda_1$, com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se, M é isométrica a uma semi-esfera Euclidiana unitária n-dimensional, onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema de Dirichlet.

Teorema 1.25. *Assuma que M satisfaz as condições do teorema 1.24 e seja q_1 o primeiro autovalor do seguinte problema*

$$\begin{cases} \triangle^2 u = -q \triangle u \text{ em } M, \\ u|_{\partial M} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\partial M} = 0. \end{cases}$$

Então $q_1 \geq n$, *com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se,* M *é isométrica a uma semi-esfera Euclidiana unitária* n*-dimensional.*

No capítulo 2 iremos generalizar esses resultados acima para o operador drifting Laplaciano. Para dar suporte aos resultados do capítulo 2, necessitaremos enunciar mais dois resultados importantes. O primeiro é uma desigualdade conhecida como desigualdade de Rayleigh-Ritz.

Teorema 1.26. *(Desigualdade de Rayleigh-Ritz) Considere o problema* (1.30) *e uma função* f *não nula em* $L^2(M)$*. Se* $\{u\}_{i=1}^{\infty}$ *é uma base ortonormal correspondente a cada autovalor* λ_i*, e além disso,* $\langle u_j, f\rangle = 0$*, para todo* $j = 1, \ldots, k$*, então temos a seguinte desigualdade*

$$\lambda_{k+1} \leq -\frac{\int_M f L_\phi f \; d\mu}{\int_M f^2 d\mu}, \tag{1.32}$$

onde

$$\| f \|^2 = \langle f, f\rangle = \int_M f^2.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, f *é autofunção de* λ_k*.*

O próximo resultado é uma versão do princípio do máximo para o operador L_ϕ, e pode ser encontrada em [38].

Teorema 1.27. *Seja* M *uma variedade Riemanniana compacta com fronteira* ∂M *e seja* ν *o normal unitário exterior a fronteira. Seja* $u \in C^2(M)$ *tal que* $L_\phi u \geq 0$.
i) (Princípio do Máximo Fraco) Se $u \in C(\overline{M})$, $u|_{\partial M} \leq 0$*, então* $u \leq 0$ *em toda* $\overline{M}$*.*
ii) (Princípio do Máximo de Hopf) Se o máximo de u *é atingido em* $p \in M$*, então* u *é constante.*
iii) (Condição de Fronteira) Se u *é não constante e o máximo é atingido em* $p_1 \in \partial M$*, então* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(p_1) > 0$*, se a derivada existir.*

Na próxima seção, trataremos de obter uma desigualdade do tipo Simons para uma hipersuperfície M^n tipo espaço com curvatura média constante, imersa no espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+1}$. Essa desigualdade será utilizada no capítulo 4.

1.5 Desigualdade tipo Simons

O objetivo desta seção é estabelecer uma expressão para o Laplaciano da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície M^n tipo espaço com curvatura média constante imersa em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Uma expressão desse tipo é chamada fórmula tipo Simons. Estabeleceremos antes, porém, algumas informações necessárias.

Sendo $x : M^n \to \overline{M}_1^{n+1}$ a imersão mencionada, sua segunda forma fundamental é dada por

$$h = \sum_k h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j e_{n+1}. \tag{1.33}$$

Por outro lado, separando nas equações de estrutura de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ as partes tangente e normal a M^n, obtemos de $\omega_{n+1} = 0$ que

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, && (1.34)\\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1j} + \overline{\Omega}_{ij}, && (1.35)\\ d\omega_{in+1} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn+1} + \overline{\Omega}_{in+1}. && (1.36) \end{aligned}$$

Temos portanto que as derivadas covariantes de h_{ij} satisfazem

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = d(h_{ij}) + \sum_k h_{kj}\omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj}, \tag{1.37}$$

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l = d(h_{ijk}) + \sum_l h_{ljk}\omega_{li} + \sum_l h_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l h_{ijl}\omega_{lk}. \tag{1.38}$$

Como consequência dessas duas expressões temos as chamadas equações de Codazzi

$$h_{ijk} = h_{ikj}; \quad \forall\ i, j, k = 1, ..., n. \tag{1.39}$$

De fato, substituindo dh_{ij} na derivada exterior da equação (1.37) temos

$$\begin{aligned} d\omega_{in+1} = d(-\sum_j h_{ij}\omega_j) &= -\sum_j (dh_{ij} \wedge \omega_j + h_{ij} d\omega_j)\\ &= -\sum_{j,k} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j + \underbrace{\sum_{j,k} h_{kj}\omega_{ki} \wedge \omega_j}_{a}\\ &\quad + \underbrace{\sum_{j,k} h_{ik}\omega_{kj} \wedge \omega_j}_{b} - \underbrace{\sum_{j,k} h_{ij}\omega_{jk} \wedge \omega_k}_{b}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ tem curvatura seccional constante c, temos que

$\overline{\Omega}_{in+1} = 0$. Logo, de (1.36) temos

$$d\omega_{in+1} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d\omega_{in+1} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \left(-\sum_j h_{kj}\omega_j \right) \\ &= -\sum_{k,j} h_{kj}\omega_{ik} \wedge \omega_j. \end{aligned}$$

Das duas últimas sentenças, e pelo fato de que os somatórios indicados pelas mesmas letras se cancelam, obtemos

$$0 = \sum_{k,j} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j = \sum_{j<k} (h_{ijk} - h_{ikj})\omega_k \wedge \omega_j, \tag{1.40}$$

o que nos fornece $h_{ijk} = h_{ikj}$.

Uma outra relação importante e bastante útil é a identidade de Ricci, que envolve as segunda derivadas covariantes de h_{ij},

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}R_{mikl} + \sum_m h_{im}R_{mjkl}. \tag{1.41}$$

Para deduzirmos essa expressão, diferenciamos exteriormente o lado esquerdo de (1.37) e utilizamos (1.38). Logo temos

$$\begin{aligned} d\left(\sum_k h_{ijk}\omega_k \right) &= \sum_k (d(h_{ijk}) \wedge \omega_k + h_{ijk}d\omega_k) \\ &= \sum_{k,l} (h_{ijkl}\omega_l - h_{ljk}\omega_{li} - h_{ilk}\omega_{lj} - h_{ijl}\omega_{lk}) \wedge \omega_k \\ &\quad + \sum_{k,l} h_{ijk}\omega_{kl} \wedge \omega_l) \\ &= \sum_{k,l} h_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k - \underbrace{\sum_{k,l} h_{ljk}\omega_{li} \wedge \omega_k)}_{a} - \underbrace{\sum_{k,l} h_{ilk}\omega_{lj} \wedge \omega_k}_{b} \\ &\quad \underbrace{-\sum_{k,l} h_{ijl}\omega_{lk} \wedge \omega_k}_{c} + \underbrace{\sum_{k,l} h_{ijk}\omega_{kl} \wedge \omega_l}_{c}. \end{aligned}$$

Diferenciando agora o lado direito de (1.37) temos

$$\begin{aligned}
d\left(\sum_k h_{ijk}\omega_k\right) &= d(dh_{ij}) + \sum_k dh_{kj}\wedge\omega_{ki} + \sum_k h_{kj}d\omega_{ki} \\
&\quad + \sum_k dh_{ik}\wedge\omega_{kj} + \sum_k h_{ik}d\omega_{kj} \\
&= \sum_{k,l}(h_{kjl}\omega_l - h_{lj}\omega_{lk} - h_{kl}\omega_{lj})\wedge\omega_{ki} + \sum_{kl} h_{kj}\omega_{kl}\wedge\omega_{li} \\
&\quad + \sum_k h_{kj}\Omega_{ki} + \sum_{k,l}(h_{ikl}\omega_l - h_{lk}\omega_{li} - h_{il}\omega_{lk})\wedge\omega_{kj} \\
&\quad + \sum_{k,l} h_{ik}\omega_{kl}\wedge\omega_{lj} + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj} \\
&= \underbrace{\sum_{k,l} h_{kjl}\omega_l\wedge\omega_{ki}}_{a} - \underbrace{\sum_{k,l} h_{lj}\omega_{lk}\wedge\omega_{ki}}_{d} - \underbrace{\sum_{k,l} h_{kl}\omega_{lj}\wedge\omega_{ki}}_{e} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{k,l} h_{kj}\omega_{kl}\wedge\omega_{li}}_{d} + \sum_k h_{kj}\Omega_{ki} + \underbrace{\sum_{k,l} h_{ikl}\omega_l\wedge\omega_{kj}}_{b} \\
&\quad - \underbrace{\sum_{k,l} h_{lk}\omega_{li}\wedge\omega_{kj}}_{e} - \underbrace{\sum_{k,l} h_{il}\omega_{lk}\wedge\omega_{kj}}_{f} + \underbrace{\sum_{k,l} h_{ik}\omega_{kl}\wedge\omega_{lj}}_{f} + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj}.
\end{aligned}$$

Como podemos perceber, após uma mudança de índices, os somatórios com as mesmas letras se cancelam, de onde obtemos então

$$\sum_{k,l} h_{ijkl}\omega_l\wedge\omega_k = \sum_k h_{kj}\Omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj}.$$

Temos portanto que

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}\Omega_{mi}(e_l,e_k) + \sum_m h_{im}\Omega_{mj}(e_l,e_k).$$

Observando que

$$\Omega_{mi}(e_l,e_k) = -\frac{1}{2}\sum_{r,s} R_{mirs}\omega_r\wedge\omega_s(e_l,e_k) = R_{mikl},$$

$$\Omega_{mj}(e_l,e_k) = -\frac{1}{2}\sum_{r,s} R_{mjrs}\omega_r\wedge\omega_s(e_l,e_k) = R_{mjkl},$$

Segue então que

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}R_{mikl} + \sum_m h_{im}R_{mjkl}.$$

Usando a simetria das funções h_{ij} em relação aos índices e a relação acima, temos que o Laplaciano de h_{ij} pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}\triangle h_{ij} &= \sum_k h_{ijkk} = \sum_k h_{ikjk} \\ &= \sum_k \left(h_{ikkj} + \sum_m h_{mk} R_{mijk} + \sum_m h_{im} R_{mkjk} \right) \\ &= \sum_k h_{kkij} + \sum_{k,m} h_{mk} R_{mijk} + \sum_{k,m} h_{im} R_{mkjk}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Por outro lado, da segunda forma fundamental podemos definir o (0,2)-tensor $\overline{h}(X,Y) = \langle h(X,Y), e_{n+1} \rangle$. Para cada $p \in M^n$, existe uma transformação linear $A_p : T_pM \to T_pM$ tal que

$$\langle h(X,Y), e_{n+1} \rangle_p = \langle A(X), Y \rangle_p; \quad \forall\, X, Y \in T_pM^n.$$

Como h é diferenciável e simétrica, podemos verificar que A varia diferenciavelmente com o ponto p e é auto-adjunta. Pela relação acima, podemos concluir que $A = \sum_{i,j} h_{ij} \omega_i e_j$. Podemos derivar A covariantemente, onde as funções compontentes de ∇A são h_{ijk}. Desta forma,

$$|A|^2 = \sum_{i,j} h_{ij}^2; \qquad |\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2. \tag{1.43}$$

Pelo fato de A_p ser auto-ajunta em cada ponto p de M^n, sua matriz $(h_{ij}(p))$ é diagonalizável, ou seja, existem um referencial $\{e_i\}$ e uma coleção de números λ_i de forma que $(h_{ij}(p)) = \lambda_i \delta_{ij}$. Os números λ_i são chamados as curvaturas principais de M^n em cada ponto p, e cada direção e_i é chamada uma direção principal. Agora estamos em condições de deduzir uma fórmula do tipo Simons para hipersuperfícies tipo espaço com curvatura média constante em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ de curvatura seccional constante c.

Teorema 1.28. *(Fórmula tipo Simons). Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço com curvatura média constante H imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ de curvatura seccional constante c. Então*

$$\frac{1}{2} \triangle S = |\nabla A|^2 + S^2 + nc(S - nH^2) - nH tr(A^3), \tag{1.44}$$

onde S denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental A da imersão.

Demonstração. Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço. Definindo $S := \sum_{i,j} h_{ij}^2$ e usando propriedades do Laplaciano temos

$$\triangle S = \sum_{i,j} \triangle h_{ij}^2, \tag{1.45}$$

e para cada par $1 \leq i, j \leq n$,

$$\triangle h_{ij}^2 = 2h_{ij}\triangle h_{ij} + 2|\nabla h_{ij}|^2.$$

De (1.42) temos que

$$\frac{1}{2}\triangle h_{ij}^2 = \underbrace{h_{ij}\sum_k h_{kkij}}_{a} + \underbrace{h_{ij}\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} + h_{ij}\sum_{k,m} h_{im}R_{mkjk}}_{b} + |\nabla h_{ij}|^2.$$

Vamos analisar as parcelas a e b. De (1.38) temos

$$\sum_k h_{kkij} = \sum_k d(h_{kki})(e_j) + \sum_{k,t} h_{tki}\omega_{tk}(e_j) + \sum_{k,t} h_{kti}\omega_{tk}(e_j) + \sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j). \tag{1.46}$$

Utilizando (1.37) podemos perceber que

$$\begin{aligned} \sum_k d(h_{kki})(e_j) &= \sum_k e_j\left(d(h_{kk})(e_i) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_i)\right) \\ &= e_j\left(e_i\left(\sum_k h_{kk}\right)\right) + 2e_j\left(\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i)\right). \end{aligned} \tag{1.47}$$

Trocando os índices k e m na segunda parcela e utilizando a anti-simetria das 1-formas de conexão ω_{mk} e a simetria das funções h_{ij}, temos

$$\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i) = \sum_{k,m} h_{km}\omega_{km}(e_i) = -\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i), \tag{1.48}$$

o que nos fornece

$$\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i) = 0. \tag{1.49}$$

Como $\sum_k h_{kk} = nH$, pelo fato de H ser constante, segue de (1.37) que $\sum_k d(h_{kki})(e_j) = 0$.

Analogamente, como em (1.38) podemos concluir utilizando a equação de

Codazzi (1.39) que

$$\sum_{k,t} h_{kti}\omega_{tk}(e_j) = \sum_{k,t} h_{tki}\omega_{tk}(e_j) = 0. \tag{1.50}$$

Para o último termo de (1.46) temos que

$$\sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) = \sum_t \left(\sum_k h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) \right).$$

Utilizando (1.37) podemos observar que

$$\begin{aligned}
\sum_k h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) &= \sum_k \left(d(h_{kk})(e_t) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_t) \right) \omega_{ti}(e_j) \\
&= \sum_k \left((e_t)(h_{kk}) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_t) \right) \omega_{ti}(e_j) \\
&= e_t \left(\sum_k h_{kk} \right) \omega_{ti}(e_j) + 2\left(\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_t) \right) \omega_{ti}(e_j).
\end{aligned}$$

Como em (1.48) obtemos $\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_t) = 0$ e como $\sum_k h_{kk} = nH$, obtemos então que

$$\begin{aligned}
\sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) &= \sum_t \left(e_t \left(\sum_k h_{kk} \right) \omega_{ti}(e_j) \right) && (1.51) \\
&= \sum_t (e_t(nH))\,\omega_{ti}(e_j) = 0, && (1.52)
\end{aligned}$$

já que é H constante. Assim temos $a = 0$. Analisando agora a expressão em b, segue da equação de Gauss que

$$\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} = \sum_{k,m} (ch_{mk}(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}) - h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})). \tag{1.53}$$

Se $i = j$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k,m} h_{mk}R_{miik} &= \sum_{k\neq m} (ch_{mk}(\delta_{mi}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ii})) + \sum_{k=m} (ch_{mm}(\delta_{mi}\delta_{im} - \delta_{mm}\delta_{ii})) \\
&\quad - \sum_{k,m} (h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})) \\
&= ch_{ii} - c\delta_{ii}\sum_m h_{mm} - \sum_{k,m} (h_{mk}(h_{mk}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})).
\end{aligned}$$

Se $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} &= \sum_{k\neq m}(ch_{mk}(\delta_{mj}\delta_{ik}-\delta_{mk}\delta_{ij}))+\sum_{k=m}(ch_{mm}(\delta_{mj}\delta_{im}-\delta_{mm}\delta_{ij}))\\
&\quad -\sum_{k,m}(h_{mk}(h_{mj}h_{ik}-h_{mk}h_{ij}))\\
&= ch_{ij}-c\delta_{ij}\sum_m h_{mm}-\sum_{k,m}(h_{mk}(h_{mj}h_{ik}-h_{mk}h_{ij})).
\end{aligned}$$

Assim, para todo $1 \leq i, j \leq n$,

$$\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} = ch_{ij}-c\delta_{ij}\sum_m h_{mm}-\sum_{k,m}(h_{mk}(h_{mj}h_{ik}-h_{mk}h_{ij})). \tag{1.54}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{k,m} h_{im}R_{mkjk} &= \sum_{k,m}(ch_{mi}(\delta_{mj}\delta_{kk}-\delta_{mk}\delta_{kj})-h_{mi}(h_{mj}h_{kk}-h_{mk}h_{kj}))\\
&= \sum_{k\neq m}(ch_{mi}(\delta_{mj}\delta_{kk}-\delta_{mk}\delta_{kj})+\sum_{k=m}(ch_{mi}(\delta_{mj}\delta_{mm}-\delta_{mm}\delta_{mj})\\
&\quad -\sum_{k,m}h_{mi}(h_{mj}h_{kk}-h_{mk}h_{kj}))\\
&= (n-1)ch_{ij}-\sum_{k,m}h_{mi}(h_{mj}h_{kk}-h_{mk}h_{kj})).
\end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned}
b &= cnh_{ij}^2-c\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}-\sum_{k,m}(h_{ij}h_{mk}(h_{mj}h_{ik}-h_{mk}h_{ij}))\\
&\quad -\sum_{k,m}(h_{ij}h_{mi}(h_{mj}h_{kk}-h_{mk}h_{kj}))\\
&= cnh_{ij}^2-c\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mn}-\underbrace{\sum_{k,m}h_{ij}h_{mk}h_{mj}h_{ik}}_{c}+\sum_{k,m}h_{mk}^2h_{ij}^2))\\
&\quad -\sum_{k,m}h_{ij}h_{mi}h_{mj}h_{kk}+\underbrace{\sum_{k,m}h_{ij}h_{mi}h_{mk}h_{kj}}_{c}.
\end{aligned}$$

Mudando os índices m e k, podemos perceber que os somatórios indicados por c se cancelam. Temos portanto que

$$b = cnh_{ij}^2-c\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}+\sum_{k,m}h_{ij}^2h_{mk}^2-\sum_{k,m}h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij}.$$

Logo, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\triangle h_{ij}^2 &= cn\sum_{i,j}h_{ij}^2 - c\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}\right) + \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^2 h_{mk}^2 \\ &\quad - \sum_{i,j,k,m} h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij} + \sum_{i,j}|\nabla h_{ij}|^2.\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}cn\sum_{i,j}h_{ij}^2 &= cnS, \\ c\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}\right) &= c\sum_{i,j}(\delta_{ij}h_{ij}nH) = cn^2H^2, \\ \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^2 h_{mk}^2 &= \sum_{i,j}\left(h_{ij}^2\sum_{k,m}h_{mk}^2\right) = S^2, \\ \sum_{i,j,k,m} h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij} &= \sum_{i,j,k}\left(h_{ki}h_{kj}h_{ij}\sum_m h_{mm}\right) = nH\sum_{i,j,k}\left(h_{ki}h_{kj}h_{ij}\right) = nHtr(A^3), \\ \sum_{i,j}|\nabla h_{ij}|^2 &= \sum_{i,j}|\sum_k e_k(h_{ij})e_k|^2 = \sum_{i,j,k}h_{ijk}^2.\end{aligned}$$

Utilizando as igualdades acima e a expressão (1.43), podemos reescrever a expressão para o Laplaciano de h_{ij}^2 da seguinte forma

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\triangle h_{ij}^2 = cnS - cn^2H^2 + S^2 - nHtr(A^3) + |\nabla A|^2.$$

Por (1.45) concluimos então que

$$\frac{1}{2}\triangle S = |\nabla A|^2 + S^2 + cn(S - nH^2) - nHtr(A^3).$$

□

A Fórmula de Simons é uma ferramenta extremamente importante para a geometria de hipersuperfícies, sendo utilizada para obtenção de resultados de caracterização de hipersuperfícies e obtenção de estimativas para a curvatura média e a norma da segunda forma fundamental. Inicialmente, em [69], Simons apresentou uma expressão para o Laplaciano do quadrado da norma da sugunda forma fundamental de uma variedade conexa na esfera e obteve resultados importantes para o estudo de imersões mínimas e variedades compactas. Posteriormente, vários outros matemáticos como Ishihara, por exemplo, generalizaram a fórmula de Simons para imersões em outros modelos de variedades e também obtiveram resultados importantes. As generalizações dos teoremas tipo Bernstein nos dão uma prova disso.

Nos capítulos 3 e 4 obteremos alguns teoremas tipo Bernstein para imersões mínimas no espaço Hiperbólico e para superfícies tipo espaço no espaço de Lorentz.

CAPÍTULO 2

O Bi-drifting Laplaciano

Nosso objetivo neste capítulo é obter estimativas para o primeiro autovalor de quatro tipos de problemas envolvendo o operador drifting Laplaciano em uma variedade Riemanniana compacta com fronteira, com uma condição na curvatura de Ricci Bakry-Émery (ou curvatura de Ricci com peso). Esses resultados generalizam os teoremas de Chen-Cheng-Wang-Xia apresentados na seção 1.4. Os dois primeiros resultados generalizam o problema de campled plate e o problema de buckling, já que esses problemas foram originalmente enunciados para o operador Laplaciano.

Consideraremos uma variedade Riemanniana M^n com dimensão $n \geq 2$, compacta com fronteira, a qual estamos denotando por ∂M. No capítulo de preliminares foi observado que, dada uma função suave ϕ definida em M, com o auxílio do teorema da divergência, temos que os operadores drifting L_ϕ e bi-drifting L_ϕ^2 são auto-adjuntos no espaço de funções suaves definidas em M e que se anulam em ∂M com respeito ao produto interno $\langle f, g \rangle = \int_M fg \, d\mu$. Vale lembrar mais uma vez que $d\mu = e^{-\phi} d\upsilon$, com $d\upsilon$ sendo a medida de volume de M. O fato desses operadores serem auto-adjuntos será de grande utilidade para o desenvolvimento de nossas idéias.

Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados pelo autor em [34], em trabalho em conjunto com Feng Du.

2.1 Estimativas para o Operador Bi-drifting Laplaciano

Teorema 2.1. *Seja $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana de dimensão $n(\geq 2)$ compacta e conexa com fronteira ∂M e denote por ν o normal unitário exterior de $\partial\Omega$. Considere o seguinte problema de autovalor*

$$\begin{cases} \text{Ł}_\phi^2 u = \Lambda u \ \text{em } M, \\ u|_{\partial M} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial M} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Assuma que

$$Ric_\phi \geq \frac{|\nabla\phi|^2}{na} + b, \tag{2.2}$$

para constantes positivas a *e* b*. Então o primeiro autovalor de* (2.1) *satisfaz* $\Lambda_1 > \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}\lambda_1$*, onde* λ_1 *é o primeiro autovalor do problema de Dirichlet para o drifting Laplaciano:*

$$\begin{cases} L_\phi u = -\lambda u \ in\ M, \\ u|_{\partial M} = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

O problema (2.1) acima é a formulação do problema de campled plate para o drifting Laplaciano. Segue abaixo a demonstração do teorema 2.1.

Demonstração. Em [75], Xia-Xu provaram que $\Lambda_1 \geq \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}\lambda_1$. Mostraremos que a igualdade não ocorre. De fato, suponha então

$$\Lambda_1 = \frac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}\lambda_1, \tag{2.4}$$

e seja u uma autofunção do problema (2.1) correspondendo ao primeiro autovalor Λ_1. Multiplicando (2.4) por u^2 e integrando em M temos

$$\int_M b\lambda_1 u^2\, d\mu = \int_M \left(1 - \frac{1}{n(a+1)}\right)\Lambda_1 u^2\, d\mu \tag{2.5}$$

Sem dificuldades, podemos ver que

$$(\triangle u)^2 = (L_\phi u + \langle\nabla\phi,\nabla u\rangle)^2 \geq \frac{(L_\phi u)^2}{a+1} - \frac{\langle\nabla\phi,\nabla u\rangle^2}{a}. \tag{2.6}$$

De fato, a desigualdade em (2.6) afirma que

$$\begin{aligned} &(L_\phi u)^2 + 2\langle\nabla\phi,\nabla u\rangle L_\phi u + \langle\nabla\phi,\nabla u\rangle^2 \geq \frac{(L_\phi u)^2}{a+1} - \frac{\langle\nabla\phi,\nabla u\rangle^2}{a} \\ \Leftrightarrow\quad &\frac{a}{a+1}(L_\phi u)^2 + 2\langle\nabla\phi,\nabla u\rangle L_\phi u + \frac{a+1}{a}\langle\nabla\phi,\nabla u\rangle^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Essa última expressão quadrática tem discriminante igual a zero. Segue então de (2.6) e da desigualdade de Schwarz que

$$|\nabla^2 u|^2 \geq \frac{1}{n}(\triangle u)^2 \geq \frac{(L_\phi u)^2}{n(a+1)} - \frac{\langle\nabla\phi,\nabla u\rangle^2}{na}. \tag{2.7}$$

Introduzindo u na fórmula de Reilly (1.31) e usando a desigualdade de Schwarz em

(2.7) segue que

$$\begin{aligned}\int_M Ric_\phi(\nabla u,\nabla u)\ d\mu &= \int_M (L_\phi u)^2-|\nabla^2 u|^2\ d\mu\\ &\leq \int_M\left[\left(1-\frac{1}{n(a+1)}\right)(L_\phi u)^2+\frac{|\nabla\phi|^2|\nabla u|^2}{na}\right]\ d\mu.\end{aligned}$$

Usando o fato de que L_ϕ^2 é auto-adjunto, temos

$$\int_M Ric_\phi(\nabla u,\nabla u)\ d\mu \leq \int_M\left[\left(1-\frac{1}{n(a+1)}\right)\Lambda u^2+\frac{|\nabla\phi|^2|\nabla u|^2}{na}\right]\ d\mu. \tag{2.8}$$

Logo, de (2.2), (2.5) e (2.8) temos que

$$\int_M b\lambda_1 u^2\ d\mu \geq \int_M b\,|\nabla u|^2\ d\mu. \tag{2.9}$$

Da desigualdade de Rayleigh-Ritz (1.32), e pelo fato de ser também L_ϕ auto-adjunto, temos

$$\lambda_1 \leq \frac{-\int_M uL_\phi u\ d\mu}{\int_M u^2\ d\mu}=\frac{\int_M|\nabla u|^2\ d\mu}{\int_M u^2\ d\mu}. \tag{2.10}$$

Podemos ver que (2.9) juntamente com (2.10) nos fornecem

$$\lambda_1=\frac{\int_M|\nabla u|^2\ d\mu}{\int_M u^2\ d\mu}, \tag{2.11}$$

o que por Rayleigh-Ritz acontece se, e somente se, u é solução de (2.3) associado a λ_1, ou seja, $L_\phi u=-\lambda_1 u$. Portanto $\Lambda_1=\lambda_1^2$, o que implica $\lambda_1=\dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$.

Por outro lado, em [56] temos a seguinte fórmula de Bochner para o tensor de Ricci Bakry-Émery

$$\frac{1}{2}L_\phi|\nabla f|^2=|\nabla^2 f|^2+\langle\nabla f,\nabla L_\phi f\rangle+Ric_\phi(\nabla f,\nabla f). \tag{2.12}$$

Consequentemente, da fórmula de Bochner que acabamos de enunciar temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}L_\phi\left(|\nabla u|^2+\frac{\lambda_1}{n(a+1)}u^2\right) &= \frac{(L_\phi u)^2}{n(a+1)}-\frac{|\nabla\phi|^2|\nabla u|^2}{na}-\lambda_1|\nabla u|^2+\left(\frac{|\nabla\phi|^2}{na}+b\right)|\nabla u|^2\\ &\quad+\frac{\lambda_1}{n(a+1)}|\nabla u|^2-\frac{\lambda_1^2u^2}{n(a+1)}\\ &= \frac{\lambda_1^2u^2}{n(a+1)}-\lambda_1|\nabla u|^2+b|\nabla u|^2+\frac{\lambda_1}{n(a+1)}|\nabla u|^2-\frac{\lambda_1^2u^2}{n(a+1)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Desde que $\left(|\nabla u|^2+\frac{\lambda_1}{n(a+1)}u^2\right)|_{\partial M}=0$, podemos concluir pelo princípio do máximo (Teorema 1.27) que $|\nabla u|^2+\frac{\lambda_1}{n(a+1)}u^2=0$ em M, o que é uma contradição e consequentemente completa a prova do teorema 2.1 $\square$

O problema (2.13) no próximo resultado nos trará a formulação do problema de buckling para o drifting Laplaciano.

Teorema 2.2. *Assuma que M satisfaz as condições do teorema 2.1 e seja Γ_1 o primeiro autovalor do seguinte problema:*

$$\begin{cases} L_\phi^2 u = -\Gamma L_\phi u \text{ em } M, \\ u|_{\partial M} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial M} = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Então temos $\Gamma_1 > \frac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$.

Demonstração. Seja u uma autofunção do problema (2.13) correspondendo ao primeiro autovalor Γ_1, isto é,

$$L_\phi^2 u = -\Gamma_1 L_\phi u \quad \text{em} \quad M, \qquad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em} \quad \partial M. \tag{2.14}$$

Desde que L_ϕ e L_ϕ^2 são auto-adjuntos, de (2.14) temos

$$\int_M (L_\phi u)^2 d\mu = \int_M u L_\phi^2 u d\mu = -\int_M u(\Gamma_1 L_\phi u) d\mu = \Gamma_1 \int |\nabla u|^2 d\mu. \tag{2.15}$$

Aplicando novamente a desigualdade de Schwarz em (2.7) e integrando em M, pela fórmula de Reilly e pela condição (3) na curvatura de Ricci, temos que

$$\begin{aligned} \int_M \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{na}+b\right)|\nabla u|^2 \, d\mu &\leq \int_M Ric_\phi(\nabla u,\nabla u) \, d\mu = \int_M ((L_\phi u)^2 - |\nabla^2 u|^2) \, d\mu \\ &\leq \int_M \left(1-\frac{1}{n(a+1)}\right)(L_\phi u)^2 + \frac{|\nabla u|^2|\nabla\phi|^2}{na} \, d\mu. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Juntando (2.16) e (2.15) obtemos

$$\int_M \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{na}+b\right)|\nabla u|^2 \, d\mu \leq \int_M \left(1-\frac{1}{n(a+1)}\right)\Gamma_1|\nabla u|^2 + \frac{|\nabla u|^2|\nabla\phi|^2}{na} \, d\mu.$$

Portanto

$$b\int_M |\nabla u|^2 \, d\mu \leq \int_M \left(1-\frac{1}{n(a+1)}\right)\Gamma_1 |\nabla u|^2 \, d\mu, \tag{2.17}$$

o que nos dá

$$\Gamma_1 \geq \frac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}. \tag{2.18}$$

Mostraremos que $\Gamma_1 > \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$. Suponha, portanto, que $\Gamma_1 = \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$. Invertendo todo o processo feito na demonstração do teorema 2.1, teremos a igualdade em (2.6), ou seja,

$$(\triangle u)^2 = (L_\phi u + \langle \nabla\phi, \nabla u\rangle)^2 = \frac{(L_\phi u)^2}{a+1} - \frac{\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle^2}{a}. \tag{2.19}$$

o que significa que ϕ é não constante, caso contrário teríamos

$$(\triangle u)^2 = \frac{(\triangle u)^2}{a+1},$$

e portanto $\triangle u = 0$ em M, o que não pode ser. Logo, desenvolvendo a segunda igualdade em (2.19) temos

$$\triangle u + \frac{1}{a}\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle = 0 \tag{2.20}$$

em M. Multiplicando (2.20) por u e integrando em M com respeito a medida $e^{\frac{1}{a}\phi}d\upsilon$, temos que

$$0 = \int_M u\left(\triangle u + \frac{1}{a}\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle\right) e^{\frac{1}{a}\phi}d\upsilon. \tag{2.21}$$

Pelo Teorema da Divergência, visto que $u|_{\partial M} = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial M}\langle u\nabla u, \nu\rangle\; e^{\frac{1}{a}\phi}dA &= \int_M div(u\nabla u)\; e^{\frac{1}{a}\phi}d\upsilon \\ &= \int_M \left(|\nabla u|^2 + u\triangle u + \frac{1}{a}u\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle\right)\; e^{\frac{1}{a}\phi}d\upsilon, \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\int_M |\nabla u|^2\; e^{\frac{1}{a}\phi}d\upsilon = 0.$$

Da equação acima, concluímos que u é constante em M, que é uma contradição, pois u é a primeira autofunção do problema (2.13) e portanto não pode ser constante. Temos então que $\Gamma_1 > \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$.

Utilizando o princípio do máximo, daremos uma demonstração alternativa para mostrar que $\Gamma_1 > \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$. Desde que

$$u|_{\partial M} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\,|_{\partial M} = 0, \tag{2.22}$$

e lembrando que o Lema 1.21 nos fornece

$$\triangle u = \overline{\triangle} u + (n-1)Hu_\nu + \nabla^2 u(\nu,\nu), \tag{2.23}$$

então temos que

$$\triangle u|_{\partial M} = \nabla^2 u(\nu,\nu). \tag{2.24}$$

Observe que em (2.23) utilizamos $\triangle$ e $\overline{\triangle}$ para representar o Laplaciano em M e em ∂M, respectivamente. Da igualdade em (2.6) temos $\nabla^2 u = \dfrac{\triangle u}{n}\langle,\rangle$, o que juntamente com (2.24) nos dá

$$\triangle u|_{\partial M} = 0. \tag{2.25}$$

Por questão de praticicidade, definamos $\overline{n} := \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$. Pelo fato de que

$$(\overline{n}u + L_\phi u) \mid \partial M = 0, \tag{2.26}$$

com o auxílio do teorema da divergência segue que

$$\int_M |\nabla(\overline{n}u + L_\phi u)|^2 \; d\mu = -\int_M (\overline{n}u + L_\phi u)(\overline{n}L_\phi u - \overline{n}L_\phi u) \; d\mu = 0.$$

A integral acima nos diz que

$$\overline{n}u + L_\phi u \equiv cte \; em \; M. \tag{2.27}$$

Consequentemente, de (2.26) e (2.27) temos

$$\overline{n}u + L_\phi u = 0 \; em \; M. \tag{2.28}$$

Por outro lado, da fórmula de Bochner (2.12) e pela igualdade em (2.7) juntamente com (2.28), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}L_\phi\left(|\nabla u|^2 + \frac{\overline{n}}{n(a+1)}u^2\right) &= \frac{(L_\phi u)^2}{n(a+1)} - \frac{|\nabla\phi|^2|\nabla u|^2}{na} - \overline{n}|\nabla u|^2 + \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{na} + b\right)|\nabla u|^2 \\
&\quad + \frac{\overline{n}}{n(a+1)}|\nabla u|^2 - \frac{\overline{n}^2u^2}{n(a+1)} \\
&= \frac{\overline{n}^2u^2}{n(a+1)} - \overline{n}|\nabla u|^2 + b|\nabla u|^2 + \frac{\overline{n}}{n(a+1)}|\nabla u|^2 - \frac{\overline{n}^2u^2}{n(a+1)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Desde que

$$L_\phi\left(|\nabla u|^2+\frac{\overline{n}}{n(a+1)}u^2\right)=0=\left(|\nabla u|^2+\frac{\overline{n}}{n(a+1)}u^2\right)|_{\partial M},$$

podemos concluir pelo princípio do máximo que $|\nabla u|^2+\dfrac{\overline{n}}{n(a+1)}u^2=0$ em M, o que é uma contradição e completa novamente a demonstração do teorema 2.2. □

2.2 Mudando a Condição de Fronteira

Com uma mudança na condição de fronteira e uma hipótese na curvatura média com peso H_ϕ da fronteira, estenderemos o teorema 0.1 de Reilly e generalizaremos os teoremas 1.24 e 1.25 de Chen-Cheng-Wang-Xia, para o operador drifting Laplaciano.

Teorema 2.3. *Seja $(M,\langle,\rangle)$ uma variedade Riemanniana com dimensão $n(\geq 2)$ compacta conexa com fronteira ∂M. Denote por ν o normal unitário exterior a ∂M. Seja p_1 o primeiro autovalor do seguinte problema:*

$$\begin{cases} L_\phi^2 u = pu \ \ em \ M, \\ u|_{\partial M}=\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\partial M}=0 \end{cases} \tag{2.29}$$

Se (2.2) é satisfeito e a curvatura média com peso H_ϕ de ∂M é não negativa, então $p_1>\dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}\lambda_1$.

Demonstração. Seja f uma autofunção do problema (2.29) correspondendo ao primeiro autovalor p_1, ou seja,

$$L_\phi^2 f = p_1 f \ \ em \ \ M, \qquad f=\frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2}=0 \ \ em \ \ \partial M. \tag{2.30}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.30) por f e integrando em M, pelo teorema da divergência obtemos

$$\begin{aligned} p_1\int_M f^2\, d\mu=\int_M fL_\phi^2 f\, d\mu &= -\int_M\langle\nabla f,\nabla L_\phi f\rangle\, d\mu \\ &= \int_M (L_\phi f)^2\, d\mu-\int_{\partial M} hL_\phi f, \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $h=\dfrac{\partial f}{\partial \nu}|_{\partial M}$. Adaptando a expressão (2.23) para o operador L_ϕ temos o seguinte lema

Lema 2.4. *Considere M uma variedade n-dimensional com fronteira ∂M e $f \in C^\infty(M)$. Para cada ponto $p \in M$, temos*

$$L_\phi f = \overline{L_\phi} f + (n-1)H_\phi f_\nu + \nabla^2 f(\nu,\nu),$$

onde H_ϕ é a curvatura média com peso de ∂M e ν é o normal unitário exterior a ∂M.

Observe que L_ϕ e $\overline{L_\phi}$ são definidos para M e ∂M, respectivamente. Para uma demonstração do lema 2.4, basta verificarmos que $L_\phi f = \triangle f - \langle \nabla\phi, \nabla f\rangle$. Por (2.23) temos que

$$L_\phi f = \overline{\triangle} f + (n-1)H f_\nu + \nabla^2 f(\nu,\nu) - \langle \nabla\phi, \nabla f\rangle, \tag{2.32}$$

onde $\nabla f = \nabla^T f + \langle \nabla f, \nu\rangle \nu$. Como $\nabla^T f = 0$, temos que

$$\langle \nabla\phi, \nabla f\rangle = \langle \nabla\phi, \nu\rangle \langle \nabla f, \nu\rangle = \phi_\nu f_\nu.$$

Recorde que $H_\phi = H - \dfrac{1}{n-1}\phi_\nu$. Portanto, (2.32) se torna

$$\begin{aligned} L_\phi f &= \overline{\triangle} f + (n-1)\left(H - \frac{1}{n-1}\phi_\nu\right) f_\nu + \nabla^2 f(\nu,\nu) \\ &= \overline{\triangle} f + (n-1)H_\phi f_\nu + \nabla^2 f(\nu,\nu), \end{aligned}$$

o que conclui o lema 2.4. Desde que $f\mid_{\partial M} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial \nu^2}\mid_{\partial M} = 0$, temos

$$L_\phi f \mid_{\partial M} = (n-1)H_\phi h \tag{2.33}$$

Substituindo (2.33) em (2.31), obtemos a seguinte expressão

$$p_1 = \frac{\int_M (L_\phi f)^2\, d\mu - (n-1)\int_{\partial M} H_\phi h^2}{\int_M f^2}, \tag{2.34}$$

Intruduzindo f na fórmula de Reilly (1.31) temos

$$\int_M (L_\phi f)^2 - |\nabla^2 f|^2 - Ric_\phi(\nabla f, \nabla f)\; d\mu = (n-1)\int_{\partial M} H_\phi h^2. \tag{2.35}$$

Combinando (2.2), (2.7) e (2.35), e usando a desigualdade de Schwarz temos

$$\int_M (L_\phi f)^2 \geq \frac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}\int_M |\nabla f|^2 + \frac{n(a+1)(n-1)}{n(a+1)-1}\int_{\partial M} H_\phi h^2. \tag{2.36}$$

Substituindo (2.36) em (2.34), desde que H_ϕ é não negativo, temos que

$$p_1 \geq \frac{\overline{n}\int_M |\nabla f|^2 \, d\mu}{\int_M f^2}, \tag{2.37}$$

onde $\overline{n} := \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$. Por outro lado, desde que f é uma função não nula que se anula na fronteira, por Rayleigh-Ritz (Teorema 1.26) temos que o primeiro autovalor λ_1 do problema (2.3) satisfaz

$$\lambda_1 \leq \frac{-\int_M fL_\phi f \, d\mu}{\int_M f^2} d\mu = \frac{\int_M \mid \nabla f \mid^2 \, d\mu}{\int_M f^2 d\mu}. \tag{2.38}$$

Segue então de (2.37) e (2.38) que $p_1 \geq \overline{n}\lambda_1$.

Suponha que $p_1 = \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}\lambda_1$. Então, como na demonstração do teorema 2.2, a igualdade ocorre em (2.6), o que nos garante a validade da equação (2.20) para f, ou seja,

$$\triangle f + \frac{1}{a}\langle \nabla f, \nabla \phi \rangle = 0. \tag{2.39}$$

Por uma discussão similar ao resultado anterior, concluimos que

$$\int_M |\nabla f|^2 \, e^{\frac{1}{a}\phi} d\upsilon = 0, \tag{2.40}$$

o que é uma contradição. Logo podemos obter $p_1 > \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}\lambda_1$. $\square$

No próximo resultado faremos uma mudança na condição de fronteira do problema (2.13).

Teorema 2.5. *Assuma que M satisfaz as condições do teorema* 2.3 *e seja q_1 o primeiro autovalor do seguinte problema*

$$\begin{cases} Ł_\phi^2 u = -qL_\phi u \text{ em } M, \\ u|_{\partial M} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\partial M} = 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

Então temos $q_1 > \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$.

Demonstração. Seja g uma autofunção do problema (2.41) correspondendo ao primeiro autovalor q_1, isto é,

$$L_\phi^2 g = -q_1 L_\phi g \quad em \quad M, \qquad g = \frac{\partial^2 g}{\partial \nu^2} = 0 \quad em \quad \partial M. \tag{2.42}$$

Multiplicando (2.42) por g e integrando em M, temos

$$\int_M gL_\phi^2 g\; d\mu = -q_1 \int_M gL_\phi g\; d\mu, \tag{2.43}$$

segue do Teorema da Divergência que

$$\int_M gL_\phi^2 g\; d\mu = \int_M (L_\phi g)^2\; d\mu - \int_{\partial M} sL_\phi g \tag{2.44}$$

onde $s = \dfrac{\partial g}{\partial \nu} \mid_{\partial M}$. Pelo fato de ser L_ϕ auto-adjunto, temos

$$-\int_M gL_\phi g\; d\mu = \int_M |\nabla g\,|^2\, d\mu.$$

Combinando (2.43) e (2.44) obtemos a seguinte expressão

$$q_1 \int_M |\nabla g\,|^2\;\; d\mu = \int_M (L_\phi g)^2\; d\mu - \int_{\partial M} sL_\phi g. \tag{2.45}$$

De (2.33) temos $L_\phi g \mid_{\partial M} = (n-1)H_\phi s$. Juntamente com (2.45) podemos obter

$$q_1 = \frac{\int_M (L_\phi g)^2\; d\mu - (n-1)\int_{\partial M} H_\phi s^2}{\int_M |\nabla g\,|^2\;\; d\mu} \tag{2.46}$$

Similarmente ao que foi feito no Teorema 2.3, substituindo g na fórmula de Reilly, juntamente com (2.2) e (2.7) temos

$$\int_M (L_\phi g)^2 \geq \frac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}\int_M |\nabla g|^2 + \frac{n(a+1)(n-1)}{n(a+1)-1}\int_{\partial M} H_\phi s^2. \tag{2.47}$$

Substituindo (2.47) em (2.46) e usando o fato de que H_ϕ é não negativa, podemos concluir que

$$q_1 \geq \frac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}.$$

Porém, se tivermos $q_1 = \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$ obteremos uma contradição, similarmente ao que foi feito nos resultados anteriores. Esse fato nos mostra que $q_1 > \dfrac{n(a+1)b}{n(a+1)-1}$. $\square$

CAPÍTULO 3

Rigidez de Subvariedades Mínimas no Espaço Hiperbólico

O objetivo deste capítulo é estabelecer condições sobre o primeiro autovalor do operador de estabilidade e super estabilidade e na norma L^d da segunda forma fundamental de uma imersão mínima M^n no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, com o intuito de obtermos resultados de rigidez. Mais especificamente, obteremos resultados de rigidez na direção dos teoremas tipo Bernstein, ou seja, mostraremos quais as condições satisfeitas para que uma hipersuperfície imersa no espaço hiperbólico seja totalmente geodésica. Obteremos também estimativas para o primeiro autovalor do operador de super-estabilidade para uma subvariedade mínima imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$.

Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados pelo autor em [10], em trabalho em conjunto com Qiaoling Wang.

3.1 O Operador de Estabilidade

Seja (M^n, ds^2) uma variedade Riemanniana n-dimensional completa, não compacta e seja $\mu : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Defina o operador $L_\mu = \triangle + \mu$ e denote por $\lambda_1(L_\mu, M)$ o primeiro autovalor de L_μ, o qual pode ser caracterizado por

$$\lambda_1(L_\mu, M) = \inf_{f \in C_0^\infty(M),\ f \neq 0} \frac{\int_M (|\nabla f|^2 - \mu f^2)}{\int_M f^2}. \tag{3.1}$$

Quando $\mu \equiv 0$, $\lambda_1(L_0, M)$ é o primeiro autovalor de M (para o Laplaciano) e como já mencionamos anteriormente, o denotaremos por $\lambda_1(M)$. É conhecido na literatura (ver [17]) que

$$\lambda_1(\mathbb{H}^n) = \frac{(n-1)^2}{4}. \tag{3.2}$$

Por outro lado, se M^n é uma subvariedade mínima completa em $\mathbb{H}^m$, em [26] podemos ver que

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(n-1)^2}{4},$$

o que é equivalente a

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \frac{(n-1)^2}{4} \int_M f^2, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M). \tag{3.3}$$

Sendo M^n é uma hipersuperfície mínima completa de $\mathbb{H}^{n+1}$, o operador de estabilidade de M é $L_{|A|^2-n}$, e M é dita estável se $\lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) \geq 0$ (ver [53]). Por outro lado, usando (3.1) e (3.2) podemos checar que o primeiro autovalor do operador de estabilidade de uma hipersuperfície completa totalmente geodésica em $\mathbb{H}^{n+1}$ é numericamente igual a $\frac{(n-1)^2}{4} + n$.

3.2 Rigidez de Hipersuperfícies Mínimas

Como mencionado na introdução do texto, Neto-Wang-Xia mostraram em um trabalho de 2015 ([62]) que se $n \geq 5$, uma hipersuperfície mínima completa M^n imersa no espaço hiperbólico será totalmente geodésica se a condição (0.1) de Do Carmo-Peng for satisfeita e se o primeiro autovalor do operador de estabilidade for maior que uma constante fixada.

Teorema 3.1. *(Neto-Wang-Xia) Seja M^n uma hipersuperfície mínima completa com dimensão $n(\geq 2)$ imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$ e seja A a segunda forma fundamental M. Suponha que exista uma constante $q \in (0, \sqrt{2/n})$ tal que*

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^{2q+2}} \int_{B_p(R)} |A|^2 = 0.$$

i) Se $n \geq 6$ e

$$\lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) > 2n - \frac{(2-nq^2)(n-1)^2}{4n(1+q^2)},$$

então M é totalmente Geodésica.
ii) Se $n \leq 4$ então

$$\lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) \leq 2n - \frac{(2-nq^2)n}{2+2nq+n}.$$

iii) Se $n = 5$, $q \in (0, 1/5)$ e

$$\lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) > 5 + \frac{25(q+1)^2}{10q+7},$$

então M é totalmente Geodésica.
iv) Se $n=5$, $q\in[1/5,\sqrt{2/5})$ então

$$\lambda_1(L_{|A|^2-n},M)\leq 5+\frac{25(q+1)^2}{10q+7}.$$

Como podemos ver no resultado de Neto-Wang-Xia, dada uma hipersuperfície mínima completa imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, com uma condição no crescimento da norma da segunda forma fundamental juntamente com uma condição no primeiro autovalor do operador de estabilidade, podemos concluir que a imersão é totalmente geodésica. O resultado foi estabelecido para dimensão $n\geq 5$. Baseado neste resultado e no trabalho de Hai-Ping Fu [41], apresentaremos agora alguns resultados que obtivemos para subvariedades mínimas completas imersas no espaço hiperbólico, porém com maior liberdade sobre a dimensão da imersão, abrangendo os casos $n=2$ e $n=4$. O resultado abaixo generaliza, portanto, o Teorema 3.1.

Teorema 3.2. *Seja M uma hipersuperfície mínima completa de dimensão $n(\geq 2,\neq 3)$ em $\boldsymbol{H}^{n+1}$. Se*

$$\lambda_1(L_{|A|^2-n},M)>2n-\frac{(8-n(d-2)^2)(n-1)^2}{4nd^2}, \tag{3.4}$$

e

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R^2}\int_{B_p(R)}|A|^d=0, \tag{3.5}$$

para uma constante d satisfazendo

$$d\in\begin{cases}\left(0\ ,\ \dfrac{1}{2}\right), & \text{para}\quad n=2,\\[2mm] \left(\dfrac{n-1}{n}\ ,\ \dfrac{(n-1)(n-2)}{n}\right), & \text{para}\quad n=4\ ou\ 5,\\[2mm] \left(2-2\sqrt{\dfrac{2}{n}},\ 2+2\sqrt{\dfrac{2}{n}}\right), & \text{para}\quad n\geq 6,\end{cases} \tag{3.6}$$

então M é totalmente geodésica.

Observação 3.1. Podemos ver que tanto no Teorema 3.1 quanto no Teorema 3.2 são impostas condições no crescimento da norma L^d da segunda forma fundamental e no primeiro autovalor do operador de estabilidade de uma hipersuperfície mínima completa M^n no espaço Hiperbólico para implicar que a imersão é totalmente geodésica. Porém, no Teorema 3.1 tem-se $n\geq 5$ e no Teorema 3.2 tratamos do caso $n\geq 2$ e $\neq 3$. Outro ponto relevante a ser considerando é que no teorema 3.1

temos duas condições distintas no primeiro autovalor $\lambda_1(L_{|A|^2-n},M)$ do operador de estabilidade. Essas condições variam de acordo com a dimensão da imersão. Já no Teorema 3.2 conseguimos reduzir para apenas uma condição (condição (3.4)) para $\lambda_1(L_{|A|^2-n},M)$.

Observação 3.2. Como o primeiro autovalor do operador de estabilidade de uma subvariedade mínima completa $\mathbb{H}^n$ imersa em $\mathbb{H}^{n+m}$ é igual a $\frac{(n-1)^2}{4}+n$, temos que d satisfaz (3.6) se, e somente se, a constante do lado direito de (3.4) for menor que $\frac{(n-1)^2}{4}+n$. Podemos ver então que o Teorema 3.2 é um fenômeno lacuna para hipersuperfícies mínimas no espaço hiperbólico, já que o método aplicado para provar o teorema não se aplica no caso $n=3$. Porém acreditamos que o caso tridimensional pode ter um resultado similar no espaço $\mathbb{H}^4$.

Para demonstrar os resultados deste capítulo, apresentaremos uma desigualdade tipo Simons (similar a fórmula de Simons do Teorema 1.28 que foi introduzida no capítulo de preliminares). De fato, considerando uma subvariedade mínima M^n imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$, em [73] temos a seguinte desigualdade:

$$|A|\triangle|A|+b(m)|A|^4+n|A|^2\geq\frac{2}{nm}|\nabla|A||^2, \tag{3.7}$$

onde $b(1)=1$ e $b(m)=\frac{3}{2}$ se $m\geq 2$. De posse da inequação (3.7), iniciaremos agora a demonstração do Teorema 3.2.

Demonstração. Seja α uma constante positiva fixada. Observando que no Teorema 3.2 temos que $m=b(m)=1$, segue de (3.7) que

$$\begin{aligned}
|A|^\alpha\triangle|A|^\alpha &= |A|^\alpha(\alpha\nabla|A|^{\alpha-1}\nabla|A|+\alpha|A|^{\alpha-1}\triangle|A|)\\
&= \frac{(\alpha-1)}{\alpha}\alpha^2|A|^{2(\alpha-1)}|\nabla|A||^2+\alpha|A|^{2\alpha-2}|A|\triangle|A|\\
&= \frac{(\alpha-1)}{\alpha}|\nabla|A|^\alpha|^2+\alpha|A|^{2\alpha-2}|A|\triangle|A|\\
&\geq \frac{(\alpha-1)}{\alpha}|\nabla|A|^\alpha|^2+\frac{2\alpha}{n}|A|^{2\alpha-2}|\nabla|A||^2-\alpha|A|^{2\alpha+2}-\alpha n|A|^{2\alpha}\\
&= \frac{(\alpha-1)}{\alpha}|\nabla|A|^\alpha|^2+\frac{2}{n\alpha}|\nabla|A|^\alpha|^2-\alpha|A|^{2\alpha+2}-\alpha n|A|^{2\alpha},
\end{aligned}$$

o que nos fornece

$$|A|^\alpha\triangle|A|^\alpha\geq\left(1-\frac{n-2}{\alpha n}\right)|\nabla|A|^\alpha|^2-\alpha|A|^{2\alpha+2}-\alpha n|A|^{2\alpha}. \tag{3.8}$$

Seja q uma constante não negativa e $f\in C_0^\infty(M)$. Multiplicando (3.8) por $|A|^{2\alpha q}f^2$ e integrando sobre M obtemos

$$\left(1-\frac{n-2}{\alpha n}\right)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q}f^2 \leq \alpha\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2|A|^2$$
$$+\alpha n\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2+\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}f^2\triangle|A|^\alpha. \tag{3.9}$$

Desde que $f\in C_0^\infty(M)$, por integração por partes no termo $\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}f^2\triangle|A|^\alpha$ temos

$$\begin{aligned}0=\int_M div(|A|^{(2q+1)\alpha}f^2\nabla|A|^\alpha) &= (2q+1)\alpha\int_M |A|^{(2q+1)\alpha-1}f^2\langle\nabla|A|,\nabla|A|^\alpha\rangle\\ &\quad +2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}f\langle\nabla f,\nabla|A|^\alpha\rangle\\ &\quad \int_M |A|^{(2q+1)\alpha}f^2\triangle|A|^\alpha.\end{aligned}$$

Rearranjando os termos dessa última expressão temos

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}f^2\triangle|A|^\alpha &= -(2q+1)\alpha\int_M |A|^{(2q+1)\alpha-1}f^2\langle\nabla|A|,\nabla|A|^\alpha\rangle\\ &\quad -2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}f\langle\nabla f,\nabla|A|^\alpha\rangle\\ &= -(2q+1)\alpha^2\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|A|^{-2}f^2|\nabla|A||^2\\ &\quad -2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}f\langle\nabla f,\nabla|A|^\alpha\rangle\\ &= -(2q+1)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2q\alpha}f^2\\ &\quad -2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}f\langle\nabla f,\nabla|A|^\alpha\rangle,\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que

$$|\nabla|A|^\alpha|^2=\alpha^2|A|^{2\alpha-2}|\nabla|A||^2. \tag{3.10}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz na expressão acima juntamente com a desigualdade de Young com ε (Proposição 1.11) com $C(\varepsilon)=\frac{1}{4\varepsilon}$ temos

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}f^2\triangle|A|^\alpha &= -(2q+1)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2q\alpha}f^2\\ &\quad -2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}f|\nabla f||\nabla|A|^\alpha|\\ &= -(2q+1)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2q\alpha}f^2\\ &\quad +\varepsilon\int_M |A|^{2\alpha q}f^2|\nabla|A|^\alpha|^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2.\end{aligned}$$

Substituindo essa última expressão em (3.9) temos que

$$\begin{aligned}&\left(2(q+1)-\frac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)\int_M|\nabla|A|^{\alpha}|^2|A|^{2\alpha q}f^2\\ \leq\ &\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}f^2|A|^2+\alpha n\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}f^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2. \quad (3.11)\end{aligned}$$

Segue da caracterização de $\lambda_1(L_{|A|^2-n},M)$ que

$$\int_M|\nabla f|^2\geq\int_M|A|^2f^2-n\int_M f^2+\lambda_1\int_M f^2,\ \forall\ f\in C_0^\infty(M). \quad (3.12)$$

Definindo $\theta:=\lambda_1-n$, e $\gamma:=\dfrac{(n-1)^2}{4}$, de (3.3) e (3.12) temos as duas expressões abaixo

$$\int_M|\nabla f|^2\geq\int_M|A|^2f^2+\theta\int_M f^2,\ \forall\ f\in C_0^\infty(M), \quad (3.13)$$

$$\int_M|\nabla f|^2\geq\gamma\int_M f^2,\ \forall\ f\in C_0^\infty(M). \quad (3.14)$$

Fixando $x\in[0,1]$, podemos deduzir de (3.13) e (3.14) que

$$x\int_M|A|^2f^2+(\theta x+(1-x)\gamma)\int_M f^2\leq\int_M|\nabla f|^2. \quad (3.15)$$

Substituindo f por $f|A|^{(q+1)\alpha}$ em (3.15) obtemos

$$\begin{aligned}&x\int_M|A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2+(\theta x+(1-x)\gamma)\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}f^2\\ \leq\ &\int_M|(q+1)\alpha|A|^{(q+1)\alpha-1}f\nabla|A|+|A|^{(q+1)\alpha}\nabla f|^2\\ =\ &((q+1)\alpha)^2\int_M|A|^{2(q+1)\alpha-2}f^2|\nabla|A||^2+2(q+1)\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha-1}f\langle\nabla|A|,\nabla f\rangle\\ &+\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2\\ =\ &(q+1)^2\int_M|A|^{2q\alpha}f^2|\nabla|A|^{\alpha}|^2+2(q+1)\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha-1}f\langle\nabla|A|,\nabla f\rangle\\ &+\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
& x\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2} f^2 + (\theta x + (1-x)\gamma)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2 \\
& \le (q+1)^2 \int_M |A|^{2q\alpha} f^2 |\nabla |A|^\alpha|^2 + 2(q+1)\alpha \int_M |A|^{2(q+1)\alpha-1} f\langle \nabla |A|, \nabla f\rangle \\
& + \int_M |A|^{2(q+1)\alpha} |\nabla f|^2, \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

onde usamos novamente (3.10) na última expressão. Analogamente ao que fizemos para obter a inequação (3.11), usando a desigualdade de Young com ε em (3.16) obtemos

$$
\begin{aligned}
& x\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2} f^2 + (\theta x + (1-x)\gamma)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2 \\
& \le \frac{(q+1)}{\alpha}(\varepsilon + (q+1)\alpha)\int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2q\alpha} f^2 \\
& + \left(1 + \frac{(q+1)}{\alpha\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Suponha $2(q+1) - \frac{n-2}{n\alpha} - \varepsilon > 0$. Multiplicando (3.11) por $\frac{(q+1)}{\alpha}(\varepsilon + (q+1)\alpha)$ e (3.17) por $2(q+1) - \frac{n-2}{n\alpha} - \varepsilon$, e combinando essas duas expressões obtemos

$$
\begin{aligned}
& \left(2(q+1) - \frac{n-2}{n\alpha} - \varepsilon\right)\left(x\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2} f^2 + (\theta x + (1-x)\gamma)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2\right) \\
\le\ & \left(2(q+1) - \frac{n-2}{n\alpha} - \varepsilon\right)\left(1 + \frac{(q+1)}{\alpha\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2 \\
& + (q+1)(\varepsilon + (q+1)\alpha)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2} f^2 + (q+1)(\varepsilon + (q+1)\alpha) n \int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2 \\
& + \frac{(q+1)}{\alpha\varepsilon}(\varepsilon + (q+1)\alpha)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Defina

$$
d := 2(q+1)\alpha \quad e \quad \beta = n - \frac{(8 - n(d-2)^2)(n-1)^2}{4nd^2}. \qquad (3.19)
$$

De (3.4) e $\theta = \lambda_1 - n$, sabemos que existe uma constante $\rho > 0$ tal que

$$
\theta \ge \beta + \rho. \qquad (3.20)
$$

Desde que $d \in \left(2-2\sqrt{\frac{2}{n}},\ 2+2\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$\frac{(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon}+\varepsilon<1 \tag{3.21}$$

e

$$\rho+\left(\frac{1}{\frac{(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon}+\varepsilon}-1-\frac{\frac{2}{n}-((q+1)\alpha-1)^2}{((q+1)\alpha)^2}\right)\gamma>0. \tag{3.22}$$

Fazendo portanto

$$x:=\frac{(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon}+\varepsilon \tag{3.23}$$

em (3.18), e divindo esta mesma expressão por $\left(2(q+1)-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon\right)$, temos

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2+(\theta x+(1-x)\gamma-nx+n\varepsilon)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2\\ &\leq C\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2,\end{aligned} \tag{3.24}$$

para alguma constante positiva C dependendo apenas de n, q, α e ε. Segue de (3.20), (3.22) e (3.23) que

$$\begin{aligned}&\gamma+x(\theta-\gamma)-nx\\ =\ & x\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)\gamma+\theta-n\right)\\ \geq\ & x\left(\left(\frac{1}{\frac{(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon}+\varepsilon}-1\right)\gamma-\frac{\left(\frac{2}{n}-((q+1)\alpha-1)^2\right)(n-1)^2}{4((q+1)\alpha)^2}+\rho\right)\\ =\ & x\left(\rho+\left(\frac{1}{\frac{(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon}+\varepsilon}-1-\frac{\frac{2}{n}-((q+1)\alpha-1)^2}{((q+1)\alpha)^2}\right)\gamma\right)>0.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Assim, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ e uma constante positiva C_2 dependendo apenas de n, q, α e ε tal que

$$\int_M |A|^{d+2}f^2 \leq C_2\int_M |A|^d|\nabla f|^2,\ \forall\ f\in C_0^\infty(M). \tag{3.26}$$

Desde que o primeiro autovalor do operador de estabilidade de uma hipersuperfície completa totalmente geodésica em $\mathbb{H}^{n+1}$ é igual a

$$\frac{(n-1)^2}{4}+n, \tag{3.27}$$

então o Teorema 3.2 faz sentido se

$$\frac{(n-1)^2}{4}+n>2n-\frac{(8-n(d-2)^2)(n-1)^2}{4nd^2}. \tag{3.28}$$

Assim, sabemos que (3.28) é válido se, e somente se,

$$d\in\left(\frac{n-1}{n},\frac{(n-1)(n-2)}{n}\right). \tag{3.29}$$

Se $n<6$ temos

$$d\in\left(\frac{n-1}{n},\frac{(n-1)(n-2)}{n}\right)\subset\left(2-2\sqrt{\frac{2}{n}},2+2\sqrt{\frac{2}{n}}\right). \tag{3.30}$$

Se $n\geq 6$ temos

$$\left(2-2\sqrt{\frac{2}{n}},2+2\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\subset\left(\frac{n-1}{n},\frac{(n-1)(n-2)}{n}\right). \tag{3.31}$$

Logo, a condição (3.6) implica que (3.21) e (3.28) são justificados.

Seja f uma função suave em $[0,\infty)$ tal que $f\geq 0$, $f=1$ em $[0,R]$ e $f=0$ em $[2R,+\infty)$ com $|f'|\leq\frac{2}{R}$. Considerando $f\circ r$, onde r é a distância de um ponto $p\in M$, temos de (3.26) que

$$\int_{B_p(R)}|A|^{d+2}\leq\frac{4C_2}{R^2}\int_{B_p(2R)}|A|^d. \tag{3.32}$$

Fazendo $R\longrightarrow+\infty$, pela condição (3.5) concluimos que $|A|=0$ em M, isto é, M é totalmente geodésica. $\square$

Quando $n=2$, substituindo a condição (3.4) sobre o primeiro autovalor do operador de estabilidade, pela condição de estabilidade da imersão, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *Seja M uma superfície mínima completa e estável imersa em $\mathbb{H}^3$. Se existe uma constante $d\in\left(0,\frac{4}{17}\right)$ tal que (3.5) é satisfeito, então M é totalmente geodésica.*

Demonstração. Como na prova do Teorema 3.2, considere $d = 2(q+1)\alpha$. Desde que $d \in \left(0, \frac{4}{17}\right)$, podemos encontrar um $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < \frac{(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\varepsilon} + \varepsilon < \frac{1}{17}. \tag{3.33}$$

Tomando $n = 2$ e substituindo

$$x = \frac{(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\varepsilon} + \varepsilon$$

em (3.18) e dividindo por $(2(q+1)-\varepsilon)$, temos que

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2} f^2 + (\theta x + (1-x)\gamma - 2x + 2\varepsilon) \int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2 \\ \leq \ & C_1 \int_M |A|^{2(q+1)\alpha} |\nabla f|^2, \end{aligned} \tag{3.34}$$

para alguma constante positiva C_1 dependendo apenas de q, α e ε. Desde que M seja estável, temos que $\lambda_1(L_{|A|^2-2}, M) \geq 0$. Usando (3.33) e lembrando que definimos $\theta := \lambda_1 - 2$, temos então que

$$\begin{aligned} \theta x + (1-x)\gamma - 2x &= x\left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)\gamma + \theta - 2\right) \\ &= x\left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)\gamma + \lambda_1 - 4\right) \\ &\geq x\left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)\gamma - 4\right) > 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ e uma constante positiva C_2 dependendo apenas de q, α e ε tal que

$$\int_M |A|^{d+2} f^2 \leq C_2 \int_M |A|^d |\nabla f|^2, \ \forall \ f \in C_0^\infty(M).$$

O restante da prova segue exatamente como na parte final da prova do Teorema 3.2. □

De acordo com o teorema de Do Carmo-Peng [30] e Fischer Colbrie-Schoen [39], é interessante pensarmos se a condição (3.5) no teorema 3.3 é realmente necessária, isto é, uma superfície mínima estável e completa imersa em $\mathbb{H}^3$ é totalmente geodésica ? Esse é sem dúvida um interessante problema para pensarmos.

Na próxima seção daremos uma definição de estabilidade para subvariedades no espaço hiperbólico, a saber, definiremos o conceito de super estabilidade, que generaliza a definição usual de estabilidade para hipersuperfícies. Nosso objetivo é obter estimativas para o primeiro autovalor do operador de super estabilidade para subvariedades mínimas no espaço hiperbólico.

3.3 Estimativas para o Operador de Super-estabilidade

Em busca de resultados para subvariedades mínimas no espaço hiperbólico e que ainda não haviam sido tratados no trabalho de Neto-Wang-Xia [62] e Wang-Xia [73], conseguimos obter algumas estimativas para o primeiro autovalor do operador de super estabilidade para uma superfície mínima imersa no espaço hiperbólico de dimensão 4. Introduziremos esse conceito.

Seja M^n uma subvariedade mínima de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+m}$. Quando $m = 1$ a condição de estabilidade de M é equivalente a condição

$$\int_M (|\nabla f|^2 - |A|^2 f^2) \geq 0, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M).$$

No caso de codimensão maior, spruck [70] provou que para uma variação de um campo de vetores $E = \phi\nu$, a segunda variação do volume $Vol(M_t)$ satisfaz

$$\frac{d^2 Vol(M_t)}{dt^2}\Big|_{t=0} \geq \int_M (|\nabla\phi|^2 - |A|^2\phi^2), \tag{3.35}$$

onde ν é o vetor normal unitário e $\phi \in W_0^{1,2}(M)$. Com essa motivação, Wang introduziu em [71] o conceito de super-estabilidade para subvariedades mínimas em $\mathbb{R}^{n+m}$.

Definição 3.4. *Seja M uma subvariedade mínima completa de dimensão n imersa em $\mathbb{R}^{n+m}$. M é dita super estável se*

$$\int_M (|\nabla f|^2 - |A|^2 f^2) \geq 0, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M).$$

Baseado nesse conceito, alguns autores estenderam o conceito de super-estabilidade para subvariedades mínimas de $\mathbb{H}^{n+m}$. Em [65], Seo introduziu a seguinte definição.

Definição 3.5. *Seja M^n uma subvariedade mínima completa de dimensão n imersa em $\boldsymbol{H}^{n+m}$. O super índice de M é definido como sendo o limite de índices de uma sequência $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ de domínios compactos em M tais que $\bigcup_i D = M$. O índice de um domínio compacto D é o número de autovalores negativos do problema de* *autovalores*

$$\begin{cases} (\triangle + |A|^2 - n)f + \lambda f = 0 \text{ em } D, \\ f|_{\partial D} = 0. \end{cases}$$

Dizemos que M é super estável se seu super índice é igual a zero, o que significa

$$\int_M (|\nabla f|^2 - (|A|^2 - n)f^2) \geq 0, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M). \tag{3.36}$$

Quando M tem codimensão um, o conceito de super estabilidade tem o mesmo sentido que a definiçao usual de estabilidade e o conceito de super índice de M é o mesmo que o conceito de índice.

Com esse novo conceito em mãos, os dois resultados a seguir nos fornecem uma estimativa para o primeiro autovalor do operador de super estabilidade de uma superfície mínima em $\mathbb{H}^4$.

Teorema 3.6. *Seja M uma superfície mínima completa imersa em $\mathbb{H}^4$. Se existe uma constante $d \in \left(\frac{2}{3}, 2\right)$ tal que (3.5) é satisfeito, então*

$$\lambda_1(L_{|A|^2-2}, M) \leq \frac{43d^2 - 8d + 4}{12d^2}.$$

Demonstração. Suponha inicialmente que

$$\lambda_1(L_{|A|^2-2}, M) > \frac{43d^2 - 8d + 4}{12d^2}.$$

Em (3.7) temos a seguinte desigualdade tipo Simons para uma subvariedade mínima M^n em $\mathbb{H}^{n+m}$:

$$|A|\triangle|A| + \frac{3}{2}|A|^4 + n|A|^2 \geq \frac{2}{nm}|\nabla|A||^2, \quad m \geq 2.$$

Como estamos trabalhando com uma superfície em $\mathbb{H}^4$, temos que $n = m = 2$, e a desigualdade tipo Simons se torna

$$|A|\triangle|A| + \frac{3}{2}|A|^4 + 2|A|^2 \geq \frac{1}{2}|\nabla|A||^2. \tag{3.37}$$

Seja α uma constante positiva fixada. Analogamente ao que foi feito na obtenção de (3.8) juntamente com (3.37), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} |A|^\alpha \triangle |A|^\alpha &= \frac{(\alpha-1)}{\alpha}|\nabla|A|^\alpha|^2 + \alpha|A|^{2\alpha-2}|A|\triangle|A| \\ &\geq \frac{(\alpha-1)}{\alpha}|\nabla|A|^\alpha|^2 + \frac{1}{2\alpha}|\nabla|A|^\alpha|^2 - \frac{3}{2}\alpha|A|^{2\alpha+2} - 2\alpha|A|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos dessa última expressão temos

$$|A|^{\alpha}\triangle|A|^{\alpha} \geq \left(1-\frac{1}{2\alpha}\right)|\nabla|A|^{\alpha}|^{2}-\frac{3}{2}\alpha|A|^{2\alpha+2}-2\alpha|A|^{2\alpha}. \tag{3.38}$$

Seja q uma constante não negativa e $f\in C_0^{\infty}(M)$. Multiplicando (3.38) por $|A|^{2\alpha q}f^2$ e integrando em M temos

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2\alpha}\right)\int_M|\nabla|A|^{\alpha}|^2|A|^{2\alpha q}f^2 &\leq \frac{3}{2}\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2\\ &+2\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}f^2+\int_M|A|^{(2q+1)\alpha}\triangle|A|^{\alpha}f^2. \end{aligned}\tag{3.39}$$

Analogamente ao que foi feito na seção 3.2, aplicando integração por partes no último termo de (3.39), podemos observar que

$$\begin{aligned}&\int_M 2f|A|^{(2q+1)\alpha}\langle\nabla f,\nabla|A|^{\alpha}\rangle+(2q+1)\alpha\int_M f^2|A|^{(2q+1)\alpha-1}\langle\nabla|A|,\nabla|A|^{\alpha}\rangle\\ &+\int_M f^2|A|^{(2q+1)\alpha}\triangle|A|^{\alpha}=0,\end{aligned}$$

e então (3.39) torna-se

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{2\alpha}\right)\int_M|\nabla|A|^{\alpha}|^2|A|^{2\alpha q}f^2\\ &\leq\frac{3}{2}\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2+2\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}f^2-2\int_M f|A|^{(2q+1)\alpha}\langle\nabla f,\nabla|A|^{\alpha}\rangle\\ &-(2q+1)\alpha\int_M f^2|A|^{(2q+1)\alpha-1}\langle\nabla|A|,\nabla|A|^{\alpha}\rangle\\ &=\frac{3}{2}\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2+2\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}f^2-2\int_M f|A|^{(2q+1)\alpha}\langle\nabla f,\nabla|A|^{\alpha}\rangle\\ &-(2q+1)\alpha^2\int_M f^2|A|^{2(q+1)\alpha-2}|\nabla|A||^2.\end{aligned}$$

Novamente usando a desigualdade de Schwarz e a desigualdade de Young com $C(\varepsilon)=\dfrac{1}{4\varepsilon}$ na penúltima parcela da expressão acima, e com o auxílio de (3.10) para a última parcela, obtemos

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2\alpha}\right)\int_M|\nabla|A|^{\alpha}|^2|A|^{2\alpha q}f^2 &\leq\frac{3}{2}\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2+2\alpha\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}f^2\\ +\varepsilon\int_M|\nabla|A|^{\alpha}|^2|A|^{2\alpha q}f^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_M|A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2&-(2q+1)\int_M|A|^{2\alpha q}|\nabla|A|^{\alpha}|^2f^2.\end{aligned}$$

Reagrupando os termos obtemos então a seguinte expressão

$$
\begin{aligned}
&\left(2(q+1)-\frac{1}{2\alpha}-\varepsilon\right)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q}f^2 \leq \frac{3}{2}\alpha\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2\\
&+2\alpha\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Recordemos que (3.3) é válida para subvariedades mínimas em $\mathbb{H}^{n+m}$, e que na seção anterior, deduzimos (3.17) de (3.3). Logo, a inequação (3.17) é válida para o teorema 3.6. Recorde a inequação (3.17):

$$
\begin{aligned}
&x\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2+(\theta x+(1-x)\gamma)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2\\
&\leq\left(1+\frac{q+1}{\alpha\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2+\frac{(q+1)}{\alpha}(\varepsilon+(q+1)\alpha)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2q\alpha}f^2,
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

onde nesse caso $x\in[0,1]$, $\theta=\lambda_1-2$ e $\gamma=\frac{1}{4}$. Suponha que

$$2(q+1)-\frac{1}{2\alpha}-\varepsilon>0.$$

Multiplicando (3.40) por $\frac{(q+1)}{\alpha}(\varepsilon+(q+1)\alpha)$ e (3.17) por $\left(2(q+1)-\frac{1}{2\alpha}-\varepsilon\right)$ e juntando essas duas desigualdades obtemos a seguinte expressão

$$
\begin{aligned}
&\left(2(q+1)-\frac{1}{2\alpha}-\varepsilon\right)\left(x\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2\right.\\
&\qquad\left.+(\theta x+(1-x)\gamma)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2\right)\\
\leq\ &\left(2(q+1)-\frac{1}{2\alpha}-\varepsilon\right)\left(1+\frac{q+1}{\alpha\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2\\
&+\left(\frac{3}{2}(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2\right.\\
&+2(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2\\
&\left.+\frac{(q+1)}{\alpha\varepsilon}(\varepsilon+(q+1)\alpha)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2\right).
\end{aligned}
$$

Dividindo esta última expressão por $2(q+1)-\dfrac{1}{2\alpha}-\varepsilon$, temos que

$$
\begin{aligned}
& x\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2} f^2 + (\theta x + (1-x)\gamma)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2 \\
\leq\ & \left(1+\frac{q+1}{\alpha\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2 \\
& + \frac{1}{\left(2(q+1)-\dfrac{1}{2\alpha}-\varepsilon\right)}\left(3/2(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2} f^2\right. \\
& \left. +2(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2 + \frac{(q+1)}{\alpha\varepsilon}(\varepsilon+(q+1)\alpha)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2\right).
\end{aligned}
$$

Podemos finalmente reorganizar os termos da expressão acima, definindo novamente $d := 2(q+1)\alpha$. Temos então que

$$
\begin{aligned}
& \left(x - \frac{3/2(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\dfrac{1}{2\alpha}-\varepsilon}\right)\int_M |A|^{d+2} f^2 \\
& + \left(\theta x + (1-x)\gamma - \frac{2(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\dfrac{1}{2\alpha}-\varepsilon}\right)\int_M |A|^{d} f^2 \\
\leq\ & \left(1+\frac{q+1}{\alpha\varepsilon}+\frac{\dfrac{(q+1)}{\alpha\varepsilon}(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\dfrac{1}{2\alpha}-\varepsilon}\right)\int_M |A|^{d}|\nabla f|^2. \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Definindo

$$
x = \frac{\frac{3}{2}(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\frac{1}{2\alpha}-\varepsilon}+\varepsilon, \qquad (3.42)
$$

podemos reescrever (3.41) como

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon\int_M |A|^{d+2} f^2 + \left(\theta x + (1-x)\gamma - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\varepsilon\right)\int_M |A|^{d} f^2 \\
\leq\ & \left(1+\frac{q+1}{\alpha\varepsilon}+\frac{\dfrac{(q+1)}{\alpha\varepsilon}(\varepsilon+(q+1)\alpha)}{2(q+1)-\dfrac{1}{2\alpha}-\varepsilon}\right)\int_M |A|^{d}|\nabla f|^2. \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

Mostraremos que

$$
x < 1 \quad \text{e} \quad \theta x + (1-x)\gamma - \frac{4}{3}x > 0. \qquad (3.44)
$$

De fato, seja

$$\beta = \frac{4}{3} + \frac{3d^2 - 8d + 4}{12d^2}, \tag{3.45}$$

Como estamos supondo

$$\lambda_1(L_{|A|^2-2}, M) > \frac{43d^2 - 8d + 4}{12d^2},$$

existe uma constante $\rho > 0$ tal que $\theta \geq \beta + \rho$. Basta observar que

$$\theta = \lambda_1 - 2 > \frac{43d^2 - 8d + 4}{12d^2} - 2 = \beta. \tag{3.46}$$

Portanto, fazendo $\varepsilon = 0$ em (3.42), temos

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{\frac{3}{2}(q+1)(q+1)\alpha}{2(q+1) - \dfrac{1}{2\alpha}} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}(q+1)^2\alpha < 2(q+1) - \frac{1}{2\alpha} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{8\alpha}d^2 < \frac{d}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{8}d^2 - d + \frac{1}{2} < 0. \end{aligned}$$

A expressão quadrática acima tem discriminante igual a $\dfrac{1}{4}$ e portanto para que tenhamos $x < 1$, temos que d deve estar no intervalo $\left(\dfrac{2}{3}, 2\right)$.

Por outro lado, para demonstrarmos a segunda desigualdade em (3.44), temos que

$$\begin{aligned} &\theta x + (1-x)\gamma - \frac{4}{3}x = x\left(\theta + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\gamma - \frac{4}{3}\right) \geq x\left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)\gamma + \beta + \rho - \frac{4}{3}\right) \\ &= x\left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)\gamma + \frac{12d^2 - 32d + 16}{48d^2} + \rho\right) \\ &= x\left(\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{12d^2 - 32d + 16}{12d^2}\right)\gamma + \rho\right) \\ &= x\left(\left(\frac{1}{\frac{\frac{3}{2}(q+1)(\varepsilon + (q+1)\alpha)}{2(q+1) - \frac{nm-2}{nm\alpha} - \varepsilon} + \varepsilon} - 1 + \frac{12d^2 - 32d + 16}{12d^2}\right)\frac{1}{4} + \rho\right). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Analogamente, fazendo $\varepsilon = 0$ em (3.47), temos que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\frac{\frac{3}{2}(q+1)(q+1)\alpha}{2(q+1)-\frac{4-2}{4\alpha}}}-1+\frac{12d^2-32d+16}{12d^2}\right)\gamma \\
= &\left(\frac{1}{\frac{3d^2}{8d-4}}-1+\frac{12d^2-32d+16}{12d^2}\right)\gamma \\
= &\left(\frac{8d-4}{3d^2}-1+\frac{3d^2-8d+4}{3d^2}\right)\gamma \\
= &\ 0.
\end{aligned}$$

Logo, podemos encontrar um $\varepsilon > 0$ tal que (3.44) seja satisfeito. Podemos então reescrever (3.43) da seguinte forma

$$\int_M |A|^{d+2} f^2 \leq C \int_M |A|^d |\nabla f|^2, \ \forall\ f \in C_0^\infty(M), \tag{3.48}$$

para alguma constante positiva C dependendo apenas de q, α e ε. Observe que o primeiro autovalor do operador de super estabilidade de uma subvariedade totalmente geodésica em $\mathbb{H}^{n+m}$ é

$$\lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) = \frac{(n-1)^2}{4} + n.$$

Portanto, no nosso caso temos $\lambda_1(L_{|A|^2-2}, M) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$. Logo, percebemos que o Teorema 3.6 faz sentido se

$$\begin{aligned}
&\frac{43d^2-8d+4}{12d^2} < \frac{9}{4} \\
\Leftrightarrow\ & 43d^2 - 8d + 4 - 27d^2 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & 16d^2 - 8d + 4 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4d^2 - 2d + 1 < 0.
\end{aligned}$$

A última inequação acima possui discrimintante negativo, e portanto não possui raízes reais. Logo temos que

$$\lambda_1(L_{|A|^2-2}, M) \leq \frac{43d^2-8d+4}{12d^2},$$

e o teorema está demonstrado. $\square$

Mudando a condição em (3.5) para uma condição semelhante, a saber, fixando a potência da norma da segunda forma fundamental no integrando como sendo $d = 1$, mas dando maior liberdade para a potência do raio R na bola geoésica (condição (3.49) abaixo), obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *Seja M uma superfície mínima completa imersa em $\mathbb{H}^4$. Se existe uma constante $k \in \left(\frac{5}{3}, 3\right)$ tal que*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^k} \int_{B_p(R)} |A| = 0, \tag{3.49}$$

então

$$\lambda_1(L_{|A|^2-2}, M) \leq \frac{43k^2 - 94k + 55}{12(k-1)^2}.$$

Demonstração. Suponha que

$$\lambda_1(L_{|A|^2-2}) > \frac{43k^2 - 94k + 55}{12(k-1)^2}. \tag{3.50}$$

Como a inequação (3.48) é válida para esse caso, substituindo $k = d + 1$ em (3.48) temos

$$\int_M |A|^{k+1} f^2 \leq C \int_M |A|^{k-1} |\nabla f|^2, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M),$$

onde C é uma constante positiva. Substituindo f por $f^{\frac{k}{2}}$ na inequação acima e utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M |A|^{k+1} f^k &\leq \overline{C} \int_M |A|^{k-1} f^{k-2} |\nabla f|^2 \\ &\leq \overline{C} \left(\int_M |A|^{k+1} f^k\right)^{\frac{k-2}{k}} \left(\int_M |A| |\nabla f|^k\right)^{\frac{2}{k}}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Seja f uma função suave em $[0, \infty)$ tal que $f \geq 0$, $f = 1$ em $[0, R]$ e $f = 0$ em $[2R, +\infty)$, com $|f'| \leq \frac{2}{R}$. Então considerando $f \circ r$, onde r é a distância de $p \in M$, (3.51) torna-se

$$\left(\int_{B_p(R)} |A|^{k+1}\right)^{\frac{2}{k}} \leq \overline{C} \left(\frac{1}{R^k} \int_{B_p(R)} |A|\right)^{\frac{2}{k}}. \tag{3.52}$$

Fazendo $R \to +\infty$, concluímos que $|A| = 0$ em M, isto é, M é totalmente geodésica. De maneira similar ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.6, temos que

$\lambda_1(L_{|A|^2-2}, M) = \frac{9}{4}$, e o Teorema 3.7 será válido se, e somente se

$$\frac{43k^2 - 94k + 55}{12(k-1)^2} < \frac{9}{4}.$$

A inequação acima possui discriminante negativo, e portanto não possui raízes reais. Logo temos que

$$\lambda_1(L_{|A|^2-2}, M) \leq \frac{43k^2 - 94k + 55}{12(k-1)^2},$$

e o teorema está demonstrado. □

O método utilizado para as demonstrações dos resultados do capítulo 3 é clássico e tem sido muito utilizado nos artigos da bibliografia. O artigo de Bérard [9] é referência pioneira para a equação de Simons generalizada satisfeita para a segunda forma fundamental de uma imersão em uma variedade Riemanniana. As desigualdades tipo Simons utilizadas podem ser deduzidas do artigo de Bérard.

Uma interessante relação e que futuramente poderá ser objeto de estudo é a relação entre a hipótese na curvatura total e a entropia de volume de uma hipersuperfície.

Definição 3.8. *O volume de entropia v de uma variedade Riemanniana M é definido como sendo*

$$v = \lim_{r \to +\infty} \frac{ln(Vol_M B_x(r))}{r},$$

onde $B_x(r)$ é uma bola de raio r centrada em $x \in M$.

Um fato clássico conhecido na literatura é que $\lambda_1(M) \leq \dfrac{v^2}{4}$, onde $\lambda_1(M)$ é o primeiro autovalor do Laplaciano de M.

Para algumas ideias sobre entropia de volume, podemos consultar os artigos [11] e [12], e mais recentemente [49] e suas referências.

Um outro conceito bastante interessante é o crescimento de volume polinomial, que descreveremos agora. Dizemos que uma variedade M tem crescimento de volume polinomial se

$$Vol(B_x(r)) \leq Cr^K, \quad K \geq 0,$$

onde $B_x(r)$ é a bola geodésica de raio r. é importante mencionarmos um importante resutado devido a Cheng-Yau, em 1975, relacionado ao crescimento de volume polinomial.

Teorema 3.9. *(Cheng-Yau) Seja M uma variedade Riemanniana completa, não compacta. Se M tem crescimento de volume polinomial, então $\lambda_1(M) = 0$.*

Demonstração. Ver [24]. □

No próximo capítulo estenderemos o estudo dos teoremas de rigidez para as variedades semi-Riemannianas, à saber, os espaços de Lorentz. Obteremos um resultado de rigidez para uma superfície com curvatura média constante imersa no espaço $\mathbb{L}^3$. Para isso, utilizaremos uma condição mais fraca que a adotada sobre a norma L^d da segunda forma fundamental e que foi adotada no capítulo 3.

CAPÍTULO 4

Superfícies de Curvatura Média Constante no Espaço de Lorentz

Nosso objetivo neste capítulo é estabelecermos quais condições para que uma superfície M tipo espaço, completa, não compacta com curvatura média H constante no espaço 3-Lorentz seja isométrica ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2(-H^2)$ de curvatura $-H^2$. As condições aqui utilizadas serão sobre o primeiro autovalor do Laplaciano, e não mais sobre o operador de estabilidade. A condição sobre o crescimento da norma L^d da segunda forma fundamental também será substituída pelo crescimento da norma L^d do traço livre da segunda forma fundamental, definido como $\phi := A - HI$, onde I é o operador identidade.

4.1 Hipersuperfícies Tipo Espaço

Em [55] L. Zhen-Qi e X. Xian-Hua classificaram as hipersuperfícies tipo espaço e isoparamétricas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Para a forma espacial $\mathbb{L}^{n+1}$, Nomizu [63] mostrou que uma hipersuperfície tipo espaço e isoparamétrica não tem mais que duas curvaturas principais. Para uma caracterização dessas hipersuperfícies N. Abe, N. Koike e S. Yamaguchi [1] mostraram o seguinte teorema.

Teorema 4.1. *(Abe, Koike, Yamaguchi) Seja M^n uma hipersuperfície completa tipo espaço em $\mathbb{L}^{n+1}$. Se M tem $\{\gamma\}$ ou $\{\gamma,\beta\}$ como conjunto de suas curvaturas principais, com γ e β constantes, então M é isométrica a*
i) hipersuperfície umbílica

$$\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; x_{n+1} = 0\},$$

ou

$$\mathbb{H}^n(-r^2) = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{n+1}^2 = -\frac{1}{r^2}\};$$

ii) *o produto de um espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^m$ *e um espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n-m}(-r^2)$, *ou seja,*

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{H}^{n-m}(-r^2) = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2 - x_{n+1}^2 = -\frac{1}{r^2}\}.$$

Com auxílio do resultado de Abe, Koike e Yamaguchi, apresentaremos um resultado de rigidez para uma superfície tipo espaço com curvatura média constante no espaço 3-Lorentz. A condição utilizada em (4.1) é mais fraca do que a condição (3.5) utilizada no capítulo 3, visto que da definição de traço livre, temos $|A|^2 = |\phi|^2 + nH^2$, o que nos fornece $|\phi|^2 \leq |A|^2$, e consequentemente a condição (3.5) implica na condição (4.1) . Nosso objetivo será mostrar que se o primeiro autovalor do Laplaciano $\lambda_1(M)$ é maior que uma constante fixada, então M é isométrica a $\mathbb{H}^2(-H^2)$.

4.2 Superfícies Tipo Espaço com Curvatura Média Constante

O principal fato que apresentaremos neste capítulo consiste no teorema 4.2 a seguir.

Teorema 4.2. *Seja M uma superfície completa não compacta tipo espaço com curvatura média H constante em $\mathbb{L}^3$. Seja A a segunda forma fundamental de M, $\phi := A - HI$ o traço livre da segunda forma fundamental e I o operador identidade. Suponha que existe uma constante $d \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2} \int_{B_p(R)} |\phi|^d = 0. \tag{4.1}$$

Se $\lambda_1(M) > \frac{H^2 d}{2}$, então $M = \mathbb{H}^2(-H^2)$, o espaço hiperbólico de dimensão 2 com curvatura Gaussiana $-H^2$.

Observação 4.3. *No capítulo 3 já havíamos mencionado o resultado de Cheng-Yau (Teorema 3.9), onde se afirma que o primeiro autovalor de uma variedade Riemanniana completa não compacta com crescimento de volume polinomial é nulo. Por outro lado, é conhecido que uma hipersuperfície máxima tipo espaço imersa em uma variedade Lorentz $\mathbb{L}^{n+1}$ é um hiperplano. Esse fato é devido à Calabi para $n \leq 4$ ([13]) e à Cheng-Yau para todo n ([22]). Combinando esses fatos, temos que a curvatura média H de M no Teorema 4.2 satisfaz $H \neq 0$, desde que $\lambda_1(M) > 0$.*

Para uma hipersuperfície tipo espaço n-dimensional M^n com curvatura média constante e imersa em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ com curvatura c também constante, no Teorema 1.28 temos a seguinte fórmula tipo Simons

$$\frac{1}{2}\triangle|A|^2 = |\nabla A|^2 + |A|^4 + nc(|A|^2 - nH^2) - nHtr(A)^3.$$

No teorema 4.2, temos que $n = 2$ e $c = 0$. Portanto a fórmula de Simons se torna

$$\frac{1}{2}\triangle|A|^2 = |\nabla A|^2 + |A|^4 - 2Htr(A)^3.$$

diagonalizando a segunda forma fundamental, temos então que

$$\frac{1}{2}\triangle|A|^2 = |\nabla A|^2 + |A|^4 - 6H^2|A|^2 + 8H^4, \tag{4.2}$$

já que nesse caso temos que $|A|^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$ e $H = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$, onde γ_1 e γ_2 são os autovalores da segunda forma fundamental diagonalizada. Estamos em condições de demonstrar o teorema 4.2.

Demonstração. O traço livre da segunda forma fundamental de M é definido como sendo $\phi := A - HI$, onde I denota a identidade. Logo podemos ter

$$|A|^2 = |\phi|^2 + 2H^2. \tag{4.3}$$

Desde que H é constante, temos

$$\nabla A = \nabla\phi, \text{ e } \nabla|A|^2 = \nabla(|\phi|^2 + 2H^2) = \nabla|\phi|^2. \tag{4.4}$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{2}\triangle|A|^2 = \frac{1}{2}div\nabla|A|^2 = \frac{1}{2}div\nabla|\phi|^2 = \frac{1}{2}\triangle|\phi|^2. \tag{4.5}$$

Substituindo (4.3)-(4.5) em (4.2) obtemos

$$\frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 + (|\phi|^2 + 2H^2)^2 - 6H^2(|\phi|^2 + 2H^2) + 8H^4. \tag{4.6}$$

Com o auxílio do Lema 1.7 (desigualdade tipo Kato), obteremos uma expressão mais simples para (4.6). De fato, faremos uso da seguinte desigualdade

$$|\nabla\phi|^2 - |\nabla|\phi||^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|\phi||^2.$$

Como estamos considerando $n = 2$, substituindo a inequação acima em (4.6) e rearranjando os termos, temos

$$|\phi|\triangle|\phi| \geq |\nabla|\phi||^2 + |\phi|^4 - 2H^2|\phi|^2. \tag{4.7}$$

Substituindo $|A|$ por $|\phi|$ no cálculo de (3.8), obtemos a seguinte expressão

$$|\phi|^\alpha\triangle|\phi|^\alpha = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)|\nabla|\phi|^\alpha|^2 + \alpha|\phi|^{2(\alpha-1)}|\phi|\triangle|\phi|, \tag{4.8}$$

onde α é uma constante positiva. Assim, (4.7) juntamente com (4.8) nos fornece

$$|\phi|^\alpha|\triangle|\phi|^\alpha \geq |\nabla|\phi|^\alpha|^2 + \alpha|\phi|^{2\alpha+2} - 2\alpha H^2|\phi|^{2\alpha}, \tag{4.9}$$

onde observamos que

$$\alpha^2|\phi|^{2\alpha-2}|\nabla|\phi||^2 = |\nabla|\phi|^\alpha|^2.$$

Seja q uma constante não negativa e $f \in C_0^\infty(M)$. Multiplicando (4.9) por $|\phi|^{2\alpha q}f^2$ e integrando em M, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla|\phi|^\alpha|^2|\phi|^{2\alpha q}f^2 &\leq -\alpha\int_M |\phi|^{2(q+1)\alpha+2}f^2 \\ &+2\alpha H^2\int_M |\phi|^{2(q+1)\alpha}f^2 + \int_M |\phi|^{(2q+1)\alpha}f^2\triangle|\phi|^\alpha. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Assim como foi feito nos Teoremas 3.2 e 3.6 do capítulo 3, como $f \in C_0^\infty(M)$, usando integração por partes e a desigualdade de Young com $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{4\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned} (2(q+1)-\varepsilon)\int_M |\nabla|\phi|^\alpha|^2|\phi|^{2\alpha q}f^2 &\leq -\alpha\int_M |\phi|^{2(q+1)\alpha+2}f^2 \\ &+2\alpha H^2\int_M |\phi|^{2(q+1)\alpha}f^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |\phi|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2, \end{aligned} \tag{4.11}$$

para algum $\varepsilon > 0$. Por outro lado, fazendo $\mu \equiv 0$ em (3.1), temos a seguinte caracterização variacional para $\lambda_1(M)$:

$$\lambda_1\int_M f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \ \forall\ f\ \in C_0^\infty(M). \tag{4.12}$$

Substituindo f por $f|\phi|^{(q+1)\alpha}$ em (4.12) e novamente fazendo uso da desigualdade de Young, podemos obter a seguinte expressão

$$\lambda_1 \int_M |\phi|^{2(q+1)\alpha} f^2 \leq \left(\frac{q+1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \int_M |\phi|^{2(q+1)\alpha} |\nabla f|^2 + (q+1)(q+1+\varepsilon) \int_M |\nabla|\phi|^{\alpha}|^2 |\phi|^{2q\alpha} f^2. \tag{4.13}$$

Definindo $d := 2(q+1)\alpha$, observe que podemos obter um $\varepsilon > 0$ tal que $2(q+1)-\varepsilon = \frac{d}{\alpha} - \varepsilon > 0$. Multiplicando (4.11) por $(q+1)(q+1+\varepsilon)$ e (4.13) por $\frac{d}{\alpha} - \varepsilon$, e juntando essas duas expressões temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{\alpha} - \varepsilon\right) \lambda_1 \int_M |\phi|^d f^2 \ \leq \ & \left(\frac{d}{\alpha} - \varepsilon\right) \left(\frac{q+1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \int_M |\phi|^d |\nabla f|^2 \\ & -\alpha(q+1)(q+1+\varepsilon) \int_M |\phi|^{d+2} f^2 \\ & +2\alpha H^2 (q+1)(q+1+\varepsilon) \int_M |\phi|^d f^2 \\ & +(q+1) \left(\frac{q+1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \int_M |\phi|^d |\nabla f|^2.\end{aligned}$$

Rearranjando os termos desta última expressão temos

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{\alpha}\lambda_1 - \frac{d^2 H^2}{2\alpha} - (\lambda_1 + dH^2)\varepsilon\right) \int_M |\phi|^d f^2 \\ &+\alpha(q+1)(q+1+\varepsilon) \int_M |\phi|^{d+2} f^2 \leq C_1 \int_M |\phi|^d |\nabla f|^2, \quad \forall f \in C_0^\infty(M),\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde C_1 é uma constante positiva que depende de q, α and ε. Por hipótese,

$$\lambda_1 > \frac{H^2 d}{2},$$

de modo que podemos obter um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{d}{\alpha}\lambda_1 - \frac{H^2 d^2}{2\alpha} - (\lambda_1 + H^2 d)\varepsilon > 0.$$

Dividindo (4.14) por $\frac{d}{\alpha}\lambda_1 - \frac{H^2 d^2}{2\alpha} - (\lambda_1 + H^2 d)\varepsilon$, obtemos a expressão

$$\int_M |\phi|^d f^2 + C_2 \int_M |\phi|^{d+2} f^2 \leq C_3 \int_M |\phi|^d |\nabla f|^2, \quad \forall f \in C_0^\infty(M). \tag{4.15}$$

onde C_2 e C_3 são constantes positivas. Seja f uma função suave em $[0,\infty)$ tal que $f \geq 0$, $f = 1$ em $[0,R]$ e $f = 0$ em $[2R,+\infty)$, com $|f'| \leq \frac{2}{R}$. Então considerando $f \circ r$, onde r é a função distância de um ponto $p \in M$, temos que

$$\int_{B_p(R)} |\phi|^d \leq \frac{4C_3}{R^2} \int_{B_p(2R)} |\phi|^d. \tag{4.16}$$

Fazendo $R \longrightarrow +\infty$, por hipótese temos que o lado direito de (4.16) se anula. Assim, concluímos que $|\phi| = 0$ em M, o que nos mostra que M é totalmente umbílica. Além disso, como $|A|^2 = 2H^2$ é constante, temos que

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)^2,$$

isto é, $\gamma_1 = \gamma_2$. Esse fato nos mostra que M tem apenas uma curvatura principal γ, a qual é constante, ou seja, M é isoparamétrica. Pelo teorema 4.1, M é isométrica a $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{H}^2(-r^2)$. Como $\lambda_1(M)$ é positivo, concluímos que M tem que ser isométrica a $\mathbb{H}^2(-r^2)$. Pelo fato de M ter curvatura média H constante, implica que $r^2 = H^2$, o que demonstra o teorema. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Abe, K. Koike, N. Yamaguchi, S.: Congruence Theorems for Proper semi-Riemannian hipersurfaces in a real space form. Yokohama Math. J., v. 35, p. 123-136, 1987.

[2] Almgren F.J, Jr.: Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. - Ann. of Math. (2) 84, 1966, 277-292.

[3] W. Ambrose: Higher order Grassmann bundles, topology 3, suplemento 2, 1965, 199-238.

[4] Anderson, M.: The compactification of a minimal submanifold in Euclidean space, preprint, 1984.

[5] Bernstein, S.: Sur un theoreme de geometrie et ses application aux equations aux derivees partielles du type elliptique. - Comm. Soc. Math. Kharkov (2) 15, 1915-1917, 38-45.

[6] Bombieri, E., De Giorgi, E. and Giusti, E.: Minimal cones and the Bernstein problem. - Invent. Math. 7, 1969, 243-268.

[7] D. Bakry, M. Émery, Diffusions hypercontractives, Séminaire de probabilit´es, XIX, 1983/84, volume 1123 of Lecture Notes in Math., pages 177-206. Springer, Berlin, 1985.

[8] M. Batista, M.P. Cavalcante, J. Pyo, Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates in weighted manifolds, J. Math. Anal. Appl. 419(1)(2014), 617-626.

[9] Bérard, P.: Simon's equation revisited. - An. Acad. Brasil. Ciênc. 66, 1994, 397–403.

[10] Bezerra, A. C., Wang, Q.: Rigidity Theorems for Minimal Submanifolds in a Hyperbolic Space. Ann. A. S. Fennicae Math., 42, 905-920, 2017.

[11] Brooks, R.: Exponential growth and the spectrum of the Laplacian. - Proc. Amer. Math. Soc. 82, 1981, 473–477.

[12] Brooks, R.: On the spectrum of non-compact manifold with finite volume. - Math. Zeit. 187, 1984, 425–432.

[13] E. Calabi, Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations. 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968) pp. 223-230 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[14] Cao, H. D., Shen, Y. and Zhu S. Y.: The structure of stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$, Math. Research Letters 4, 1997, 637-644.

[15] Cao, L. F.; Wei G. X.: A new chacacterization of hiperbolic cylinder in anti-de Sitter space $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$. J. Math. Anal. Appl., v 329 n. 1: p. 408-414, 2007

[16] Chavel, I.: Eigenvalues in Riemannian geometry. Academic. Press, 1984.

[17] Chavel, I.: Riemannian geometry. A modern introduction. 2nd edition. - Cambridge Stud. Adv. Math., Cambridge Univ. Press, 2006.

[18] D. Chen, Q. M. Cheng, Q.Wang, C. Xia, On eigenvalues of a system of elliptic equations and of the biharmonic operator, J. Math. Anal. Appl. 387(2), 2012, 1146-1159.

[19] X. Cheng, T. Mejia, D. Zhou, Eigenvalue estimate and compactness for closed f -minimal surfaces, Pacific J. Math. 271(2)(2014), 347-367.

[20] Q. M. Cheng, H. C. Yang, Universal inequalities for eigenvalues of a system of elliptic equations, Proc. Royal Soc. Edinburgh 139A(2009), 273-285.

[21] Cheng, S. Y.: Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. - Math. Z. 143, 1975, 279-297.

[22] S. Y. Cheng, S. T. Yau.: Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz–Minkowski space, Ann. of Math. 104 (1976) 407–419.

[23] Cheng, X. Mejia, T. and Zhou, D.: Simons-type equation for f-mimimal hypersurfaces and applications. - J. Geom. Anal, 2014

[24] S. Y. Cheng, S. T. Yau: Differential equations on Riemannian manifolds and their Geometric Applications. Comm. Pure Appl. Math. 28, 333-354, 1975.

[25] Chern, S. S., Do Carmo, M. P. and Kobayashi, S.: Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. - In: Functional Analysis and Related Fields, Springer, 1970, 59-75.

[26] Cheung, L. F., and Leung, P. F.: Eigenvalue estimates for submanifolds with bounded mean curvature in the hyperbolic space. - Math. Z. 236, 2001, 525-530.

[27] De Giorgi, E.: Una estensione del teorema di Bernstein. - Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (3) 19, 1965, 79-85.

[28] Do Carmo, M. and Zhou, D.: Berstein-type theorems in hypersurfaces with constant mean curvature. - An. Acad. Brasil. Cienc. 72, 2000, 301-310.

[29] M. Do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, Inc., Englewoods Cliffs, New Jersey (1976).

[30] Do Carmo, M. P., and C. K. Peng: Stable complete minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^3$ are planes. - Bull. Amer. Math. Soc. (6) 1, 1979, 903-906.

[31] Do Carmo, M. P. and Peng, C. K.: Stable complete minimal hypersurfaces. - Proc. Beijing Symp. Differential Equations and Differential Geometry 3, 1980, 1349-1358.

[32] F. Du, C. Wu, G. Li, C. Xia: Universal inequalities for eigenvalues of a system of sub-elliptic equations on Heisenberg group, Kodai Math. J. 38(2)(2015), 437-450.

[33] F. Du, C. Wu, G. Li, C. Xia: Estimates for eigenvalues of the bi-drifting Laplacian operator, Z. Angew. Math. Phys. 66(3)(2015), 703-726.

[34] F. Du, Bezerra, A. C.: Estimates for eigenvalues of a system of elliptic equations with drift and of bi-drifting laplacian Comm. Pure Appl. Anal. 2017, 6(2): 475-491.

[35] L. P. Eisenhart: An introduction to Differencial Geometry, Princeton University Press, 1949.

[36] Elbert, M. F., Nelli, B. and Rosemberg, H.: Stable constant mean curvature hypersurfaces. - Proc. Amer. Math. Soc. 135, 2007, 3359-3366.

[37] J.F. Escobar: Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate, Comm. Pure Appl. Math. 43 (1990) 857–883.

[38] Ferreira, A. C. and Salavessa, I.: Dirichlet principal eigenvalue comparison theorems in geometry with torsion, J. of Math. Ann. and Appl. 453. 700-723, 2017.

[39] Fisher-Colbrie, D. and Schoen, R.: The structure of complete minimal surfaces in 3- manifolds with non-negative scalar curvature. - Comm. Pure Appl. Math. (2) 33, 1980, 199-211.

[40] Fleming, W. H.: On the oriented Plateau problem. - Rend. Circ. Math. Palermo (2) 11, 1962, 69-90.

[41] FU, P., H.: Bernstein type theorems for complete submanifolds in space forms. - Math. Nachr 285, No 2-3, 2012, 236-244.

[42] A. Futaki, H. Li, X. D. Li, On the first eigenvalue of theWitten-Laplacian and the diameter of compact shrinking solitons, Ann. Glob. Anal. Geom. 44(2), 105-114(2013)

[43] J. N. gomes, H. F. De Lima, F. R. Dos Santos, M. A. L. Velásquez.: On the complete linear Weingarten spacelike hypersurfaces with two distinct principal curvatures in Lorentzian space forms. J. Math. Anal. Appl. 418, 2014, 248–263.

[44] R. Herman: second variation for minimal manifolds, J. Math Mech. 16, 1966, 473-491.

[45] Ho, P., T.: The estructure of ϕ-stable minimal hypersurfaces in manifolds of nonnegative P-scalar curvature. - Math. Ann. 348, 2010, 319-332.

[46] S.M. Hook, Domain independent upper bounds for eigenvalues of elliptic operator, Trans. Amer. Math. Soc. 318(1990), 615-642.

[47] Q. Huang, Q. H. Ruan, Applications of some elliptic equations in Riemannian manifolds, J. Math. Anal. Appl. 409(1)(2014), 189-196.

[48] Ilias, S., Nelli, B. and Soret, M.: Caccioppoli's inequalities on constant mean curvature hypersurfaces in Riemannian manifolds. - Ann. Glob. Anal. Geom. 42, 2012, 443-471.

[49] Ilias, S., B. Nelli, and Soret, M: On the entropy of hypersurfaces with bounded curvature. - Math. Ann. 364, 2016, 1095–1120.

[50] Ishihara, T.: Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space form of constant curvature. Michigan Math. J., v. 35, p. 345-352, 1988.

[51] H.A. Levine, M. H. Protter, Unretricted lower bounds for eigenvalues of elliptic equations and systems of equations with applications to problem in elasticity, Math. Methods Appl. Sci. 7(1985), 210-222.

[52] M. Levitin, L. Parnovski, Commutators, spectral trance identities, and universal estimates for eigenvalues, J. Funct. Anal. 192(2002), 425-445.

[53] LI, P.: Geometric analysis. - Cambridge Stud. Adv. Math. 134, Cambridge Univ. Press, 2012.

[54] H. Li, Y. Wei, f -minimal surface and manifold with positive m-Bakry- ´ Emery Ricci curvature, J. Geom. Anal. 25(1)(2015), 421-435.

[55] Li, Z. Q., Xei, X. H.: Spacelike isoparametric hipersurfaces in Lorentzian space forms. From math. China, v. 1, n. 1, p. 130-137, 2006.

[56] L. Ma, S. H. Du, Extension of Reilly formula with applications to eigenvalue estimates for drifting Laplacians, C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 348(21-22)(2010), 1203-1206.

[57] L. Ma, B. Y. Liu, Convex eigenfunction of a drifting Laplacian operator and the fundamental gap, Pacific J. Math. 240(2009), 343-361.

[58] L. Ma, B. Y. Liu, Convexity of the first eigenfunction of the drifting Laplacian operator and its applications, New York J. Math. 14(2008), 393-401.

[59] Mckean, H. P.: An upper bound for the spectrum of $\triangle$ on a manifold of negative curvature. - J. Differential Geom. 6, 1970, 359-366.

[60] Nelli, B. and Soret, M.: Stably embedded minimal hypersurfaces. - Math. Z. 255, 2007, 493-514.

[61] Neto, N. M. B. and Wang, Q.: Some Berstein-type rigidity theorems. - J. Math. Anal. Appl. 389, 2012, 694-700.

[62] Neto, N. M. B., Wang, Q. and Xia, C.: Rididity of complete minimal hipersurfaces in a hiperbolic space. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 40, 2015, 659-668

[63] Nomizu, K.: On isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian space forms. Jpn. J. Math (N.S.). v. 7, n. 1, p. 217-226. 1981.

[64] R. Reilly, Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold, Indiana Univ. Math. J. 26(3)(1977), 459-472.

[65] Seo, K.: L^2 harmonic 1-forms on minimal submanifolds in hyperbolic space, J. Math. Anal. Appl. 371, 546–551 (2010).

[66] Shen, Y. B. and Zhu, X. H.: On stable complete minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. - Amer. J. Math. 120, 1998, 103-116.

[67] Shen, Y. B. and Zhu, X. H.: On complete hypersurfaces with constant mean curvature and finite L_p-norm curvature in $\mathbf{R}^{n+1}$. - Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 21, 2005, 631-642.

[68] R. Shoen, L. Simons, S. T. Yau: Curvartura estimates for minimal hipersurfaces, Acta Math. 134, 1975, 275-288.

[69] Simons, J.: Minimal varieties in Riemmanian manifolds. - Ann. of Math. (2) 88, 1968, 62-105.

[70] Spruck, J.: Remarks on the stability of minimal submanifolds of $\mathbb{R}^n$. - Math. Zeit. 144, 1975, 169–174.

[71] Wang, Q.: On minimal submanifolds in an Euclidean space. - Math. Nachr. 261/262, 2003, 176180.

[72] G. Wei, W. Wylie: Comparison geometry for the Bakry- ´ Emery Ricci tensor, J. Diff. Geom. 83(2009), 377-405.

[73] Xia, C. and Wang, Q.: Gap theorems for minimal submanifolds of a hyperbolic space. J. Math. Anal. Appl. 436, 2016, 983-989.

[74] C. Xia: The first nonzero eigenvalue for manifolds with Ricci curvature having positive lower bound, in: Chinese Mathematics into the 21st Century, Tianjin, 1988, Peking Univ. Press, Beijing, 1991, pp. 243–249.

[75] C. Xia, H. Xu: Inequalities for eigenvalues of the drifting Laplacian on Riemannian manifolds, Ann. Glob. Anal. Geom. 45(3)(2014), 155-166.

[76] Xin, Y. L. and Yang, L.: Curvature estimates for minimal submanifolds of higher codimension. - Chin. Ann. Math. Ser. B 30:4, 2009, 379-396.