



**ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO EM VIBRAÇÕES LIVRES FLUIDO-ELÁSTICAS EM CASCAS
CILÍNDRICAS PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO**

DAVIDSON DE OLIVEIRA FRANÇA JÚNIOR

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO EM VIBRAÇÕES LIVRES
FLUIDO-ELÁSTICAS EM CASCAS CILÍNDRICAS PARA
DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO**

DAVIDSON DE OLIVEIRA FRANÇA JÚNIOR

ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

**PUBLICAÇÃO: E.DM-3A/18
BRASÍLIA/DF: MARÇO - 2018**

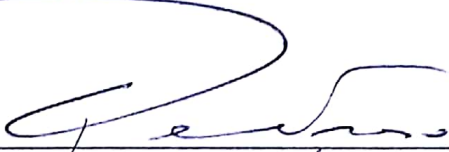
**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO EM VIBRAÇÕES LIVRES
FLUIDO-ELÁSTICA EM CASCAS CILÍNDRICAS PARA DIFERENTES
CONDIÇÕES DE CONTORNO**

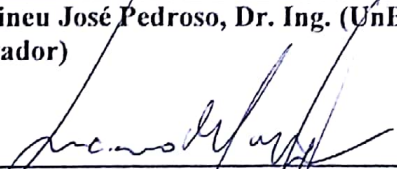
DAVIDSON DE OLIVEIRA FRANÇA JÚNIOR

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

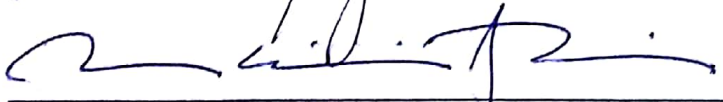
APROVADA POR:



**Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (UnB)
(Orientador)**



**Prof. Luciano Mendes Bezerra/PhD (UnB)
(Examinador Interno)**



**Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes, Dr. Univ. (UnB)
(Examinador Externo)**

Brasília/DF, 21 DE MARÇO DE 2018.

FICHA CATALOGRÁFICA

FRANÇA JR, DAVIDSON DE OLIVEIRA	
Estudo analítico-numérico em vibrações livres fluido-elásticas em cascas cilíndricas para diferentes condições de contorno [Distrito Federal] 2018.	
xvi, 128p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2018).	
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.	
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.	
1. Cascas cilíndricas	2. Fluido-estrutura
3. Vibração livre e forçada	4. Método dos elementos finitos
I. ENC/FT/UnB	II. Título (Mestre)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FRANÇA JR, D. O. (2018). Estudo analítico-numérico em vibrações livres fluido-elásticas em cascas cilíndricas para diferentes condições de contorno. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 143p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Davidson de Oliveira França Júnior

TÍTULO: Um estudo analítico-numérico em vibrações livres fluido-elásticas em cascas cilíndricas para diferentes condições de contorno.

GRAU: Mestre ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Davidson de Oliveira França Júnior
SQN 406, Bloco K, Apartamento 208 - Asa Norte
CEP: 70847-110 Brasília/DF - Brasil
e-mail: davidson.francajunior@gmail.com

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me guiar nos momentos mais difíceis.

Aos meus familiares, em especial a minha mãe Maria Aparecida pela educação e conselhos diários, pois sem você nada na minha vida faria sentido. Ao meu irmão José Marques, minha irmã Denise França e meu pai Davidson, por todo apoio, amizade e incentivo.

Agradeço também aos professores e servidores do PECC, em especial ao meu orientador, professor Lineu José Pedroso, pelos ensinamentos, apoio e incentivo. A sua dedicação e comprometimento com os trabalhos acadêmicos é algo admirável que irei levar como exemplo a seguir na minha carreira profissional.

Ao Prof. Víctor Ivan Fernandez-Dávila (Ingeniería Civil de la Pontificia Universidad Católica del Perú -PUCP), pela disposição em colaborar em nossos estudos, e pelo Programa de Cooperação em curso entre a UnB e a PUCP, onde minha dissertação deveria contar com uma parte experimental na mesa sísmica de sua universidade; aspecto não realizado pelo fato de dificuldades surgidas e retardo nos trâmites burocráticos de formalização dessa cooperação; assim como sua inclusão como Coorientador junto ao PECC não efetivada, em razão da parte experimental dessas pesquisas não terem sido realizadas no Perú.

Aos meus amigos pela amizade, companheirismo e constante ajuda, pois os momentos compartilhados foram, para mim, inesquecíveis e de grande crescimento pessoal.

Aos professores Luciano Mendes Bezerra e Marcus Vinícius Girão de Moraes pelas correções e contribuições neste trabalho.

Agradeço à UnB, em especial a CAPES pelo auxílio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a minha formação, a vocês o mais sincero agradecimento.

RESUMO

ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO EM VIBRAÇÕES LIVRES FLUIDO-ELÁSTICAS EM CASCAS CILÍNDRICAS PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO

Autor: Davidson de Oliveira França Júnior

Orientador: Lineu José Pedroso, Dr. Ing.

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Março de 2018

As estruturas em geral têm como papel principal transmitir as cargas estáticas verticais e horizontais para o solo, além de atender também as solicitações dinâmicas através dos seus elementos estruturais, com uma adequada capacidade resistente e um bom desempenho em serviço. Desta forma, destacam-se as cascas cilíndricas, que são caracterizadas por uma estrutura esbelta bastante utilizada na engenharia civil, indústria mecânica, naval, aeroespacial e em outras áreas pelo mundo. Os reservatórios verticais cilíndricos, estrutura objeto de estudo neste trabalho, são modelados por uma casca cilíndrica e podem estar submetidas à solicitação dinâmica, tendo a resposta estrutural (tensões, frequências, deformadas modais, etc.) influenciada por diversas variáveis. Decorrente disso, neste trabalho são estudadas as vibrações livres e forçadas de um reservatório cilíndrico vazio e totalmente preenchido com um líquido para diferentes condições de vinculação da casca. As análises são realizadas tendo por base a teoria de Soedel (2005), a técnica analítica de Sharma & Johns (1971), o cálculo variacional através das equações de energia da casca e o método dos elementos finitos (MEF) por meio do *software* ANSYS[®]. O fluido é modelado pela equação da onda e incorporado na casca cilíndrica através de uma massa adicional de fluido. Os efeitos das ondas de superfície livre (*sloshing*) e da pressão hidrostática são desprezados. Para demonstrar a validade da modelagem no *software*, os resultados analíticos são comparados com os resultados numéricos obtidos através do MEF. As frequências naturais e as formas modais da estrutura, desacoplada e acoplada fluido-estrutura são investigadas. Além disso, são avaliados os modos dominantes na vibração acoplada e abordada a massa adicional para diferentes condições de contorno. Posteriormente, na análise da vibração forçada para o sistema desacoplado e acoplado fluido-estrutura, foi obtida a resposta dinâmica decorrente de um carregamento harmônico pontual na casca. De posse da simulação computacional e do modelo analítico, quando aplicável, os resultados se mostraram satisfatórios para cada caso abordado.

Palavras-chave: *Vibrações, Casca cilíndrica, Fluido-Estrutura, Método dos Elementos Finitos.*

ABSTRACT

ANALYTICAL-NUMERICAL STUDY OF THE FLUID-ELASTIC FREE VIBRATIONS IN CYLINDRICAL SHELLS FOR DIFFERENT CONTOUR CONDITIONS

Author: Davidson de Oliveira França Júnior
Supervisor: Lineu José Pedroso, Dr. Ing.
Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil
Brasília, March of 2018

Structures in general have the main role of transmitting the vertical and horizontal static loads to the ground, as well as to respond to dynamic demands through their structural elements with adequate strength and good performance in service. Thus, cylindrical shells stand out and they are characterized by a slender structure widely used in civil engineering, mechanical, naval and aerospace industry, and in other areas around the world. The vertical cylindrical vessels, which are the object of study in this work, are modeled by a cylindrical shell and can be subjected to the dynamic request with the structural response (tensions, frequencies, deformed modal, etc.) influenced by several variables. Therefore, in this work, the free vibrations and the forced vibrations of an empty cylindrical vessel and a cylindrical vessel totally filled with a liquid are studied for different conditions of the attachment of the shell. The analysis is based on the theory of Soedel (2005), the analytical technique of Sharma & Johns (1971), the variational calculation through the shell energy equations, and the finite element method (MEF) using ANSYS software ®. The fluid is modeled by the wave equation and incorporated into the cylindrical shell through an additional mass of fluid. The effects of sloshing and hydrostatic pressure are neglected. To demonstrate the validity of the modeling in the software, the analytical results are compared with the numerical results obtained through the MEF. Natural frequencies and modal forms of the structure, decoupled and coupled fluid-structure are investigated. In addition, the dominant modes in the coupled vibration are evaluated and the additional mass is addressed for different boundary conditions. Subsequently, in the analysis of forced vibration for the decoupled and coupled fluid-structure system, the dynamic response was obtained due to a punctual harmonic loading in the shell. With the computational simulation and the analytical model, when applicable, the results were satisfactory for each case.

Keywords: *Vibrations, Cylindrical shell, Fluid-Structure, Finite Element Method.*

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO	1
1.1 - JUSTIFICATIVA	2
1.2 – COLOCAÇÃO DO PROBLEMA.....	3
1.3 - OBJETIVOS	4
1.3.1 – Objetivo geral.....	4
1.3.2 - Objetivos específicos	4
1.4 - METODOLOGIA	5
1.5 – ABRANGÊNCIAS E LIMITAÇÕES	8
1.6 – ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	9
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
2.1 - INTRODUÇÃO.....	11
2.2 – DINÂMICA DE RESERVATÓRIOS CILÍNDRICOS	11
2.3 – PRINCIPAIS ESTUDOS.....	15
2.3.1 – Vibração livre	16
2.3.2 – Vibração forçada.....	23
3 – FORMULAÇÕES ANALÍTICAS.....	27
3.1 - INTRODUÇÃO.....	27
3.2 – CASCA CILÍNDRICA	27
3.2.1 – Vibração livre	27
3.3 - FLUIDO	43
3.3.1 - Vibração livre.....	43
3.4 - INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA	50
3.4.1 - Vibração livre.....	50
4 – ASPECTOS COMPUTACIONAIS	56
4.1 – DESCRIÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS	56
4.1.1 – Casca cilíndrica – Elemento SHELL63	56
4.1.2 – Cavidade acústica – Elemento FLUID30.....	57
4.2 – TIPOS DE ANÁLISE	57
4.2.1 – Análise modal	57
4.2.2 – Análise harmônica.....	61

4.3 – MODELOS NUMÉRICOS E CONVERGÊNCIA DA MALHA	61
4.3.1 – Modelo da casca desacoplada	63
4.3.2 – Modelo do fluido desacoplado.....	64
4.3.3 – Modelo acoplado fluido-estrutura	65
5 - RESULTADOS.....	67
5.1 – CASCA CILÍNDRICA	67
5.1.1 – Vibração livre	67
5.1.2 – Vibração forçada (Carga harmônica pontual).....	81
5.2 – FLUIDO DESACOPLADO	85
5.2.1 – Vibração livre	85
5.3 - INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA	88
5.3.1 – Vibração livre	88
5.3.2 – Vibração forçada (Carga harmônica pontual).....	99
6 – CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS.....	105
6.1 – CONCLUSÕES GERAIS.....	105
6.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	107
REFERÊNCIAS	108
APÊNDICE A: FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO DINÂMICO DA CASCA CILÍNDRICA	118
APÊNDICE B: RESOLUÇÃO DO DETERMINANTE DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO DESACOPLADAS	122
APÊNDICE C: RESOLUÇÃO DAS INTEGRAIS I1 E I2 PARA DIFERENTES FUNÇÕES MODAIS DE VIGA	123
APÊNDICE D: ETAPA DA RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DE ENERGIA.....	125
APÊNDICE E: ETAPA DA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE PROPAGAÇÃO DE ONDA	126
APÊNDICE F: RESOLUÇÃO DO DETERMINANTE DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO ACOPLADAS	128

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Cascas cilíndricas: (a) Reservatório tubular fundo reto com divisão de cédula e (b) Reservatório cilíndrico vertical com fundo reto.....	2
Figura 1.2 - Diagrama do tanque: (a) seção transversal; (b) vista superior.....	3
Figura 1.3 - Fluxograma da pesquisa.....	8
Figura 1.4 – Deformadas modais da casca cilíndrica: (a) Corte circunferencial e longitudinal e (b) Identificação dos nodos na estrutura da casca.....	12
Figura 3.1 - Eixos dos deslocamentos para uma casca cilíndrica.....	27
Figura 3.2 - Elemento infinitesimal de casca cilíndrica: (a) Forças externas e internas de membrana, (b) Momentos de flexão e de torção.....	28
Figura 3.3 – Ilustração das funções de Bessel: (a) Por Soedel (2005), (b) Presente trabalho.....	50
Figura 4.1 – Elemento finito SHELL63.....	56
Figura 4.2 – Elemento finito FLUID30.....	57
Figura 4.3 – Modelagem numérica e nível de refinamento da malha para a casca desacoplada.....	63
Figura 4.4 – Estudo da convergência da malha da casca desacoplada.....	64
Figura 4.5 - Modelagem numérica e nível de refinamento da malha para o fluido.....	64
Figura 4.6 - Estudo da convergência da malha do fluido desacoplado.....	65
Figura 4.7 - Modelagem numérica e nível de refinamento da malha para o problema acoplado.....	66
Figura 4.8 - Estudo da convergência da malha da casca acoplada com fluido.....	66
Figura 5.1 – Frequências naturais analíticas obtidas pela teoria de Soedel para a casca cilíndrica desacoplada (A-A) e diferentes índices modais (i).....	68
Figura 5.2 – Frequências naturais analíticas obtidas pela teoria de Soedel da casca cilíndrica desacoplada (A-A) para o índice modal radial ($i=1$).....	69
Figura 5.3 – Frequências naturais analíticas pela teoria de Soedel (2005) para diferentes relações geométricas da casca do modo $m=1$ e $n=4$	70
Figura 5.4 – Comparativo entre as frequências naturais para a casca com condição de contorno apoiada-apoiada (A-A): (a) Índice modal $i=1$ e $m=1$; (b) Índice modal $i=1$ e $m=2$	73
Figura 5.5 – Relação entre as frequências naturais numéricas do modo $i=1$, $m=1$ para diferentes condições de contorno da casca desacoplada.....	74
Figura 5.6 – Frequências naturais e deformadas modais numéricas do modo $m=1$ e $n=4$ obtidos via ANSYS para diferentes condições de contorno da casca desacoplada.....	75
Figura 5.7 – Deformadas modais longitudinais da casca com condição de contorno apoiada-apoiada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.....	76
Figura 5.8 - Deformadas modais transversais da casca com condição de contorno apoiada-apoiada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.....	76

Figura 5.9 - Deformadas modais longitudinais da casca com condição de contorno apoiada-livre e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.....	77
Figura 5.10 - Deformadas modais longitudinais da casca com condição de contorno engastada-apoiada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.....	77
Figura 5.11 - Deformadas modais longitudinais da casca com condição de contorno engastada-engastada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.....	78
Figura 5.12 - Deformadas modais longitudinais da casca com condição de contorno engastada-livre e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.....	78
Figura 5.13 – Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno apoiada-apoiada.....	81
Figura 5.14 – Espectro de frequência numérico para uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada.....	82
Figura 5.15 - Espectro de frequência numérico para uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada.....	82
Figura 5.16 - Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno apoiada-livre.....	83
Figura 5.17 - Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno engastada-engastada.....	83
Figura 5.18 - Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno engastada-livre.....	84
Figura 5.19 - Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno engastada-apoiada.....	84
Figura 5.20 - Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno livre-livre.....	84
Figura 5.21 – Modo de vibração de pressão (0,1,0) analítico e numérico para o fluido desacoplado.....	86
Figura 5.22 - Modo de vibração de pressão (0,1,2) analítico e numérico para o fluido desacoplado.....	86
Figura 5.23 - Modo de vibração de pressão (0,2,1) analítico e numérico para o fluido desacoplado.....	87
Figura 5.24 – Frequências naturais analíticas para casca acoplada apoiada-apoiada.....	88
Figura 5.25 - Frequências naturais analíticas da casca acoplada apoiada-apoiada de índices modais $i=1$ e $m=1$ para diferentes níveis de fluido.....	89
Figura 5.26 – Massa adicional para a interação fluido-estrutura da casca acoplada apoiada-apoiada de índices modais $i=1$ e $m=1$ para diferentes níveis de fluido.....	89
Figura 5.27 – Frequências naturais analíticas e numéricas da casca apoiada-apoiada para diferentes tipos de fluido.....	90
Figura 5.28 – Deformadas modais longitudinais da casca acoplada com condição de contorno apoiada-apoiada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.....	91

Figura 5.29 - Deformadas modais transversais da casca acoplada com condição de contorno apoiada-apoiada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.....	91
Figura 5.30 – Análise do modo dominante para o acoplamento fluido-estrutura.....	92
Figura 5.31 – Frequências naturais numéricas do modo $i=1$ e $m=1$ para diferentes condições de contorno da casca acoplada fluido-estrutura.....	94
Figura 5.32 - Figura 5.32 – Deformadas modais: (a) Desacopladas e (b) Acopladas para $m=1$ e $n=4$	95
Figura 5.33 – Frequências naturais e deformadas modais numéricas da casca acoplada para $i=1$ e $m=1$	96
Figura 5.34 - Frequências naturais e deformadas modais numéricas da casca acoplada para $i=1$ e $m=1$	97
Figura 5.35 - Frequências naturais e deformadas modais numéricas da casca acoplada para $i=1$ e $m=1$	97
Figura 5.36 – Frequências naturais numéricas para a casca vazia e cheia: (a) A-A; (b) A-L (c) E-E; (d) E-L; (e) E-A e (d) L-L.....	98
Figura 5.37 – Frequências naturais numéricas acopladas da casca cilíndrica apoiada-apoiada: (a) Presente trabalho e (b) Experimento (Amabili e Dalpiaz, 1995).....	99
Figura 5.38 – Espectro de frequência numérico para uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada.....	100
Figura 5.39 – Espectro de frequência numérico para uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada.....	100
Figura 5.40 – Espectro de frequência para uma casca apoiada-apoiada acoplada com fluido.....	101
Figura 5.41 - Espectro de frequência para uma casca apoiada-livre acoplada com fluido.....	101
Figura 5.42 - Espectro de frequência para uma casca engastada-engastada acoplada com fluido.....	102
Figura 5.43 - Espectro de frequência para uma casca engastada-livre acoplada com fluido.....	102
Figura 5.44 - Espectro de frequência para uma casca engastada-apoiada acoplada com fluido.....	102
Figura 5.45 - Espectro de frequência para uma casca livre-livre acoplada com fluido.....	103
Figura 5.46 – Forma modal excitada da casca acoplada apoiada-apoiada com frequência de aplicação de 92Hz: (a) Axial; (b) Circunferencial; (c) Radial; (d) Pressão em Pa; (e) Vista superior do deslocamento circunferencial e (f) Deslocamento circunferencial com a casca rotacionada plano x-y em 40°	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1- Metodologia empregada nesta dissertação.....	6
Tabela 3.1 – Modos de vibração longitudinal.....	38
Tabela 3.2 – Coeficientes modais longitudinais.....	39
Tabela 3.3 – Valores dos parâmetros I1 e I2 obtidos a partir dos modos de viga.....	40
Tabela 4.1 - Características da casca cilíndrica e da cavidade acústica.....	62
Tabela 5.1 – Frequências naturais da casca cilíndrica desacoplada apoiada-apoiada.....	67
Tabela 5.2 – Frequências naturais da casca desacoplada apoiada-livre (A-L).....	71
Tabela 5.3 - Frequências naturais da casca desacoplada engastada-engastada (E-E).....	71
Tabela 5.4 – Frequências naturais da casca desacoplada engastada-livre (E-L).....	71
Tabela 5.5 - Frequências naturais da casca desacoplada engastada-apoiada (E-A).....	72
Tabela 5.6 – Frequências naturais da casca desacoplada livre-livre (L-L).....	72
Tabela 5.7 – Frequências naturais e modos de vibração numéricos para uma casca desacoplada com condição de contorno apoiada-apoiada.....	79
Tabela 5.8 – Frequências naturais e modos de vibração numéricos para uma casca desacoplada com condição de contorno Engastada-livre.....	80
Tabela 5.9 – Frequências naturais do fluido desacoplado.....	85
Tabela 5.10 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da cavidade acústica.....	86
Tabela 5.11 - Frequências naturais da casca cilíndrica acoplada –apoiada.....	88
Tabela 5.12 – Frequências naturais acopladas numéricas e análises dos modos dominantes.....	93
Tabela 5.13 - Frequências naturais acopladas numéricas e análises dos modos dominantes.....	93
Tabela 5.14 - Frequências naturais acopladas numéricas e análises dos modos dominantes.....	94

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

- a – Aceleração
- A - Analítica
- A – Área da seção transversal
- A – Coeficiente de amplitude longitudinal
- A-A – Condição de contorno apoiada-apoiada
- AB-AB – Aberta-aberta
- A-L – Condição de contorno apoiada-livre
- B - Coeficiente de amplitude circunferencial
- C - Coeficiente de amplitude radial
- c – Velocidade de propagação do som no fluido
- C.C – Condição de contorno
- CHP – Carga harmônica pontual
- D – Diâmetro da casca
- D – Rigidez flexional
- DC – Modo dominante cavidade
- DE – Modo dominante estrutura
- dv – Volume infinitesimal
- e – Base de logaritmo neperiano
- E – Módulo de elasticidade do material
- E-A – Condição de contorno engastada-apoiada
- E-E – Condição de contorno engastada-engastada
- E-L – Condição de contorno engastada-livre
- F – Frequência natural
- H – Altura do nível de fluido
- h – Espessura da casca
- i – Índice modal
- j – Unidade imaginária

J_n – Função de Bessel de primeira tipo

K – Rigidez de membrana

L – Comprimento da casca

L-L – Condição de contorno livre-livre

m – Número de meias-ondas longitudinais

Ma – Massa adicional virtual

MA – Modo de Massa adicional

Mc – Massa da casca

MEF - Método dos elementos finitos

MM – Modo misto

N – Numérica

N – Ordem da frequência natural

n – Número de ondas circunferenciais

P – Vetor pressão

P_r – Força na casca na direção radial

P_z – Força na casca na direção longitudinal

P_ϕ – Força na casca na direção circunferencial

R – Raio da cavidade

RA – Modo de rigidez adicional

R – Raio médio da casca

t – Tempo

u – Deslocamento axial

U – Vetor deslocamento

U_x ; U_y ; U_z – Translações

v – Deslocamento circunferencial

VF – Vibração forçada

VL – Vibração livre

V_r – Vetor velocidade do fluido

w – Deslocamento radial

x, y e z – Coordenadas do sistema cartesiano
 Y_n – Função de Bessel de segundo tipo
 α_m - Coeficiente da equação transcendental
 β – Módulo adiabático
 Δ – Parâmetro de frequência
 ζ – Parâmetro adimensional da massa adicional
 θ – Ângulo da cavidade acústica
 λ_i – Coeficiente da equação transcendental
 ξ – Taxa de amortecimento
 ρ – Massa específica da casca cilíndrica
 ρ_f – Massa específica do fluido
 σ_i – Coeficiente da equação transcendental
 ν – Coeficiente de Poisson do material
 ϕ – Ângulo da casca cilíndrica
 φ – Ângulo de fase arbitrário da casca
 $\phi_m(z)$ - Função modal longitudinal
 ψ – Ângulo de fase
 ω – Frequência natural
 ω_a – Frequência natural analítica
 ω_n – Frequência natural numérica
 $\bar{\psi}$ - Ângulo de fase modal
 \bar{i} - Número de círculos nodais
 \bar{n} - Número de diâmetros nodais
 \bar{m} - Número de nodos longitudinais
 ∇^2 - Operador Laplaciano
 $[B_u]$ – Matriz deslocamento-deformação
 $[C_f]$ – Matriz de amortecimento do fluido
 $[C_s]$ – Matriz de amortecimento da estrutura

[FS] – Matriz de acoplamento fluido-estrutura
[K_f] – Matriz de rigidez do fluido
[K_s] – Matriz de rigidez da estrutura
[M_f] – Matriz de massa do fluido
[M_s] – Matriz de massa da estrutura
[N_p] – Funções de interpolação das pressões
[N_u] – Funções de interpolação dos deslocamentos
{F_e} – Vetor forças genéricas
{F_e} – Vetor forças genéricas
{F_i} – Vetor pressão na interface
{n} – Vetor na direção normal
{P_e} – Vetor pressões nodais
{P_i} – Auto-vetores do fluido
{U_e} – Vetor deslocamentos nodais
{U_i} – Auto-vetores para estrutura

1- INTRODUÇÃO

No Brasil, as construções em constante evolução, possuem cada vez mais arquiteturas arrojadas, envolvendo elementos estruturais ainda mais esbeltos, com grandes vãos e elevadas curvaturas. Nesse contexto, se insere as estruturas de cascas cilíndricas, que tem como papel principal combater as solicitações através de seus esforços internos de membrana e flexão, além de atender também as ações dinâmicas, com uma adequada capacidade resistente e um bom desempenho em serviço.

As cascas cilíndricas são caracterizadas por estruturas esbeltas bastante utilizadas na engenharia civil, indústria mecânica, naval, aeroespacial. Elas são empregadas para a construção de reservatórios, silos para armazenagem de sólidos, estruturas *off-shore*, tubulação de adutoras, partes internas de reatores nucleares e tanques para estocagem de fluidos (Fig. 1.1), etc. Assim, visto o vasto campo de aplicações das cascas cilíndricas, enfatiza-se a importância da análise estrutural estática e dinâmica nesse tipo de estrutura.

As cascas cilíndricas são caracterizadas por um objeto de superfície curva com pequena espessura em comparação com suas outras dimensões, sendo feitas geralmente de material sólido. A análise estrutural dinâmica dessas cascas são consideravelmente complexas devido ao fato delas possuírem vibrações flexionais e extensional em conjunto.

Os reservatórios cilíndricos são modelados por cascas cilíndricas e podem estar submetidos a diferentes tipos de solicitações. A resposta estrutural (tensões, frequências, deformadas modais, etc.) é influenciada por vários fatores: o tipo de carregamento atuante, as dimensões geométricas da casca, espessura da parede, nível de fluido, as condições de contorno da casca, condições de contorno da cavidade acústica que representa o fluido, presença ou não de anel enrijecedor, influência da conexão entre as paredes da casca com a tampa e o fundo, entre outras. Decorre disso, a necessidade de uma análise criteriosa no projeto, visto que um colapso destas estruturas, contendo um material de risco, poderia acarretar em danos irreparáveis à sociedade e o meio ambiente.



(a)



(b)

Figura 1.1 - Cascas cilíndricas: (a) Reservatório tubular fundo reto com divisão de cédula e (b) Reservatório cilíndrico vertical com fundo reto (Disponível em: <http://www.rplreservatorios.com.br/>).

Com efeito, tendo-se em vista um certo histórico de ocorrência de acidentes nessas estruturas e que esses reservatórios cilíndricos podem ser feitos com diversos materiais (concreto armado, aço, alvenaria estrutural, etc.) e numa ampla gama de aplicações, os estudos de vibrações livres e forçadas em cascas cilíndricas tem despertado o interesse de vários pesquisadores na atualidade e em outras partes do mundo.

Nesse sentido, através da análise estrutural dinâmica do problema mostrado é que se pode captar a pressão hidrodinâmica do fluido nas paredes do tanque, as frequências naturais, deslocamentos excessivos, tensões máximas e assim evitar efeitos indesejáveis como o da ressonância. Portanto, estudar o problema mostrado sob o ponto de vista do acoplamento acústico-mecânico é de extrema importância para o bom funcionamento desses reservatórios.

1.1 - JUSTIFICATIVA

Em nossas pesquisas bibliográficas notamos que, no Brasil, a grande maioria das investigações sobre cascas cilíndricas são voltadas para a parte estática. Em consequência, estudos sobre a dinâmica de cascas cilíndricas, considerando à interação com fluido, são poucos encontrados em nosso país. Assim, compreender de forma adequada o comportamento da estrutura, do fluido, bem como os efeitos acoplados fluido-estrutura, torna-se uma etapa fundamental para futuras pesquisas que poderão contribuir no domínio do conhecimento em questão.

Entre outros fatores motivadores para a realização dessas pesquisas é a possibilidade de um estudo em conjunto com a *Universidad Católica del Peru* (PUC-Lima), já que o tema em estudo representa uma problemática relevante a esse país, devido o mesmo situar-se em uma

zona de elevada sismicidade, e a utilização de reservatórios cilíndricos contendo fluidos está em franca expansão.

Todavia, a realização da parte experimental em mesa sísmica naquele país (contribuição da instituição parceira na cooperação) não pode ser implementada no curto período de tempo envolvido nesta dissertação.

1.2 – COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Os reservatórios cilíndricos tem seu comportamento dinâmico influenciado por diversas coisas e a pergunta maior suscitada por este trabalho é a seguinte: como as condições de contorno influenciam no comportamento da resposta dinâmica acoplada de cascas cilíndricas em vibrações livres?

Na tentativa de responder esta questão, fio condutor deste trabalho, se articulará todas as estratégias e recursos disponíveis para tal. Assim, é tratada especificamente a influência das condições de contorno da casca cilíndrica na resposta dinâmica em vibrações livres (análise modal e harmônica) para tanques vazios e totalmente preenchidos com líquido. A Figura 1.2 ilustra adequadamente o problema a ser estudado.

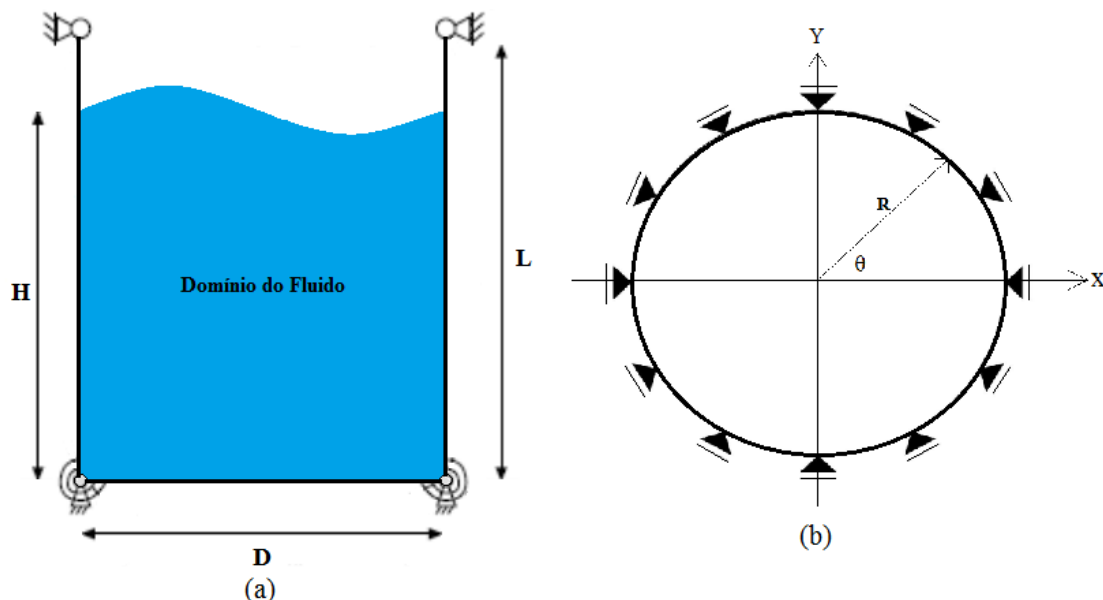


Figura 1.2 - Diagrama do tanque: (a) seção transversal; (b) vista superior.

Apesar dos extensos estudos teóricos sobre as vibrações em cascas cilíndricas, a maior parte dos trabalhos é limitada às condições de contorno clássicas: cascas com as duas bordas apoiadas, engastadas ou uma borda engastada e a outra livre. No entanto, sabe-se que em

aplicações de engenharia, as paredes das cascas cilíndricas geralmente são conectadas a outros componentes estruturais (tampa, placa de fundo, etc...) através de vários tipos de conexões, no qual a idealização de diferentes condições de contorno representa papel fundamental na análise dessas situações no modelo matemático e/ou numérico.

A prescrição da forma inadequada das condições de contorno pode levar a erros significativos do comportamento físico real da estrutura, ou seja, o comportamento dinâmico do fluido durante a vibração depende diretamente das deformadas modais das paredes da casca, que são influenciadas principalmente pelas condições de vinculação entre seus componentes estruturais. Em consequência, o presente trabalho pretende contribuir, ao abordar de forma conjunta a maioria das condições de contorno clássicas, para o problema de vibração em cascas considerando o acoplamento fluido-estrutura.

Por fim, ao analisar a ocorrência de tal fenômeno natural de vibração do reservatório, com a presença do fluido, podem-se prever forças inerciais ainda maiores na estrutura da casca, afetando o seu comportamento final, em que essa abordagem proporciona uma visão mais crítica das conexões em tanques nessas situações de projeto (Pedroso, 2018).

1.3 - OBJETIVOS

1.3.1 – Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é estudar a influência de diferentes condições de contorno no comportamento dinâmico (em termos de vibrações livres) de reservatórios verticais cilíndricos vazios e totalmente preenchidos com líquidos através de métodos analíticos e numéricos.

1.3.2 - Objetivos específicos

Os objetivos específicos são:

- Realizar a análise de vibrações livres (análise modal e harmônica), de cascas cilíndricas, analiticamente e numericamente pelo método dos elementos finitos (MEF) por meio do *software* ANSYS® para diferentes condições de contorno;
- Efetuar a análise de vibrações livres na cavidade acústica (volume do fluido), analiticamente e numericamente pelo MEF;

- Executar a análise de vibrações livres (análise modal e harmônica) do problema acoplado fluido-estrutura, analiticamente e numericamente pelo MEF;
- Estudar a influência das diferentes condições de contorno e outros parâmetros fundamentais do problema através do MEF;
- Reescrever (rededuzir) e programar as formulações analíticas de Soedel (2005), energética geral e energética simplificada (Sharma & Johns, 1971) e compará-las com outros resultados pelo MEF e da literatura;
- Elaborar saídas gráficas dos resultados em termos de frequências e deformadas modais (3D e cortes 2D) que permitam numa análise mais amigável a observação e interpretação dos fenômenos.

1.4 - METODOLOGIA

Para que se chegue ao objetivo proposto será necessária uma sequência lógica de procedimentos e análises. Num primeiro momento realiza-se o estudo da casca cilíndrica desacoplada sob vibrações livres (análise modal e harmônica). Posteriormente, apenas o fluido em vibrações livres é estudado. Por fim, trata-se em vibrações livres acopladas (interação fluido-estrutura entre casca cilíndrica e líquido).

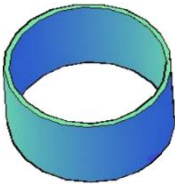

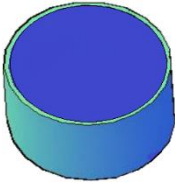
O maior desafio na análise dinâmica de cascas cilíndricas está nas técnicas analíticas de resolução da casca. Devido ao elevado grau de complexidade das equações envolvidas, conseguir acoplar o fluido na resolução do problema não é uma tarefa simples. Em decorrência disso, este estudo tem como base uma casca com condição de contorno apoiada-apoiada sem restrição axial. A vasta bibliografia disponível neste caso serve para a validação da análise numérica do problema desacoplado e acoplado fluido-estrutura em vibrações livres.

A análise numérica é realizada através do *software* ANSYS[®]. O estudo da convergência da malha em elementos finitos da casca cilíndrica e da cavidade acústica que representa fluido define a discretização adequada.

Assim, a modelagem final obtida serve de base para simular as diferentes condições de contorno adotadas no presente estudo. A Tabela 1.1 apresenta um esquema da metodologia empregada neste trabalho. Alerta-se ao leitor que a terminologia usada na tabela e por várias vezes no texto como vibração forçada (VF) não corresponde numa análise no domínio do

tempo, onde para cada frequência de excitação, extrai-se a resposta máxima associada a cada modo envolvido, mas sim num produto final do resultado do programa ANSYS, fornecendo deslocamentos *versus* frequências de excitação, dentro da análise harmônica.

Tabela 1.1- Metodologia empregada nesta dissertação.

Caso	Esquema do modelo	Condições de Contorno	Tipo de Análise	Carga	Abordagem
1	Casca Desacoplada 	A. A-A	VL	-	A-N
			VF	CHP	N
		B. A-L	VL	-	A-N
			VF	CHP	N
		C. E-E	VL	-	A-N
			VF	CHP	N
		D. E-L	VL	-	A-N
			VF	CHP	N
		E. E-A	VL	-	A-N
			VF	CHP	N
		F. L-L	VL	-	A-N
			VF	CHP	N
2	Cavidade Acústica 	A. AB-AB	VL	-	A-N
3	Acoplamento Fluido-Estrutura 	A. A-A	VL	-	A-N
			VF	CHP	
		B. A-L	VL	-	
			VF	CHP	
		C. E-E	VL	-	
			VF	CHP	
		D. E-L	VL	-	N
			VF	CHP	
		E. E-A	VL	-	
			VF	CHP	
		F. L-L	VL	-	
			VF	CHP	

Legenda: [A-A]: Apoiada-apoiada; [A-L]: Apoiada-livre; [E-E]: Engastada-engastada; [E-L]: Engastada-livre; [E-A]: Engastada-apoiada; [L-L]: Livre-livre; [VL]: Vibração livre; [VF]: Vibração forçada; [CHP]: Carga harmônica pontual; [A]: Analítica; [N]: Numérica; [AB-AB]: Aberta-aberta

Com base na Tabela 1.1, o primeiro caso estudado é a casca desacoplada para diferentes condições de contorno (de 1A a 1F). No caso 1A (apoiada-apoiada) compara-se a técnica de solução analítica de Soedel (2005) e resultado numérico em vibrações livres. Com a modelagem no *software* ANSYS®, foi realizado o estudo da convergência da malha de elementos finitos. Encontrando-se bons resultados numéricos e comparando-se aos analíticos,

valida-se a modelagem numérica da casca desacoplada. Em seguida, trocam-se as condições de contorno para os demais casos de vinculação no problema desacoplado (Casos 1B a 1F) em vibrações livres a fim de ser obter soluções numéricas a serem exploradas.

Em segundo lugar, ainda na análise da casca desacoplada em vibrações livres (casos 1A a 1F), foi adotada a técnica analítica simplificada apresentada por Sharma & Johns (1971) para determinar as características vibratórias para as diferentes condições de contorno estudadas. Por fim, a partir das funções de deformadas modais de viga apresentadas por Blevins (1979), o problema da casca também foi resolvido através do cálculo variacional, que tem por base as equações de energia e o procedimento de Ritz para a obtenção analítica das frequências naturais.

Ressalta-se ainda que especificamente na condição de contorno apoiada-apoiada, os resultados encontrados para a técnica analítica de Sharma & Johns (1971) foram comparados com os valores obtidos pela técnica de Soedel (2005) e pelo MEF, com o intuito de confrontar os três métodos. Portanto, uma vez que a malha empregada na modelagem numérica forneceu bons resultados para todos os casos desacoplados em vibração livre, foi imposto o carregamento harmônico pontual na casca (CHP) e obtidos os espectros de frequência.

Salienta-se que na resolução do problema através do método de energia, foi implementada uma rotina em *software* MAPLE para a resolução do problema para qualquer condição de contorno. De maneira semelhante, o *software* EXCEL também auxiliou na abordagem através da técnica analítica de Soedel (2005) e do método de Sharma e Johns (1971).

Na análise da cavidade acústica (caso 2A) somente o fluido é analisado, ou seja, foram determinadas as frequências naturais e as formas modais de pressão hidrodinâmica de maneira analítica e numérica pelo MEF. Assim, foi realizado um estudo de convergência da malha de fluido e os resultados analíticos foram comparados com os numéricos. Na cavidade acústica foi adotada a condição de contorno aberta no topo e na base para todos os casos, ou seja, para o fluido desacoplado (Caso 2A) e fluido acoplado com estrutura (Caso 3A a 3F). As laterais no contorno da cavidade são idealizadas como rígidas no caso do fluido desacoplado e, em contrapartida, para o problema acoplado a condição de fluido-estrutura é considerada na interface de contato casca-fluido.

Para a análise do acoplamento entre fluido-estrutura é inicialmente analisado o caso 3A (considerado o mais simples de ser avaliado e interpretado), visto que a condição de contorno

da casca é apoiada-apoiada e a cavidade acústica aberta-aberta. No desenvolvimento analítico do problema, o acoplamento é realizado através de um parâmetro de massa adicional incorporado às equações da casca cilíndrica fornecidas pela teoria de Soedel (2005). Na medida em que foi concluída com sucesso esta abordagem e, validada a análise numérica do efeito acoplado, são trocadas as condições de contorno na modelagem numérica, analisado as outras condições de contorno e também a resposta em vibrações forçada (análise harmônica) pela aplicação do carregamento harmônico pontual no centro da casca, sendo finalmente interpretados os resultados. Salienta-se que na análise acoplada em vibrações livres, os resultados obtidos pelas técnicas analíticas e pela abordagem numérica foram comparados com os valores experimentais encontrados por Amabili e Dalpiaz (1995).

O fluxograma a seguir mostra a sequência e etapas realizadas neste trabalho.

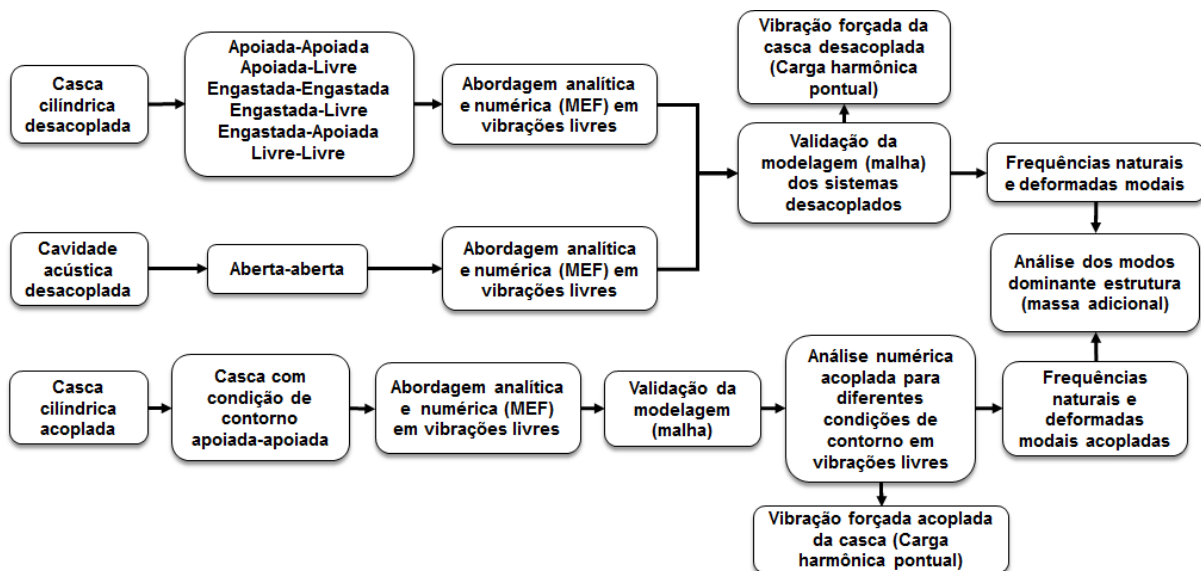


Figura 1.3 - Fluxograma da pesquisa.

1.5 – ABRANGÊNCIAS E LIMITAÇÕES

O trabalho proposto envolve as seguintes abrangências e limitações:

- A estrutura da casca é vertical e constituída de material linear, elástico, homogêneo e isotrópico;
- A casca cilíndrica tem espessura constante, paredes delgadas, são assumidos pequenos deslocamentos e desprezado os efeitos inerciais de rotação;

- O fluido é considerado quiescente (estagnado), invíscido (não-viscoso) e incompressível. Não há escoamento, existindo somente vibração em torno de um ponto de equilíbrio (fluido acústico);
- A formulação numérica para o problema acoplado fluido-estrutura é baseada no deslocamento para a estrutura e pressão para o fluido (U-P);
- A maioria dos resultados obtidos e mostrados se deu pela análise de uma única casca (modelo padrão), para se puderem comparar os resultados com experimentos da literatura;
- A análise da vibração forçada não é realizada com o intuito de se obter resultados no domínio do tempo, mas sim por uma varredura na frequência de excitação por uma carga harmônica;
- Nas análises do fluido desacoplado e acoplado os efeitos de onda de superfície (*sloshing*) e da pressão hidrostática não são considerados nas análises;

1.6 – ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Para que se alcance uma melhor explanação dos objetivos o texto foi dividido em seis capítulos. O primeiro capítulo apresenta à temática, justificativa, explica o problema estudado e mostra a metodologia empregada, por meio da explicação mais abrangente dos objetivos gerais e específicos.

No segundo capítulo, é apresentada a revisão bibliográfica do tema, ou seja, são apresentados os conceitos e as variáveis envolvidas no problema, e ainda, são mostrados os principais trabalhos na área que tratam sobre a problemática abordada nesta dissertação.

O terceiro capítulo complementa a revisão bibliográfica, tratando especificamente da fundamentação teórica empregada na pesquisa, com as técnicas analíticas para os casos que possuem soluções analíticas fechadas da casca cilíndrica, cavidade acústica e interação fluido-estrutura.

No quarto capítulo, são apresentados os aspectos computacionais para a análise, ou seja, a descrição dos elementos finitos, a formulação numérica e os tipos de análise estrutural relativa ao *software* ANSYS 14.5. Por fim, são mostrados os modelos para análise e os resultados dos testes de convergência da malha em elementos finitos.

No quinto capítulo, são apresentados os resultados obtidos, com suas respectivas análises e discussões. Por fim, no sexto e último capítulo, são apresentadas as conclusões obtidas desta dissertação e as sugestões para trabalhos futuros.

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados alguns aspectos gerais do comportamento dinâmico de reservatórios cilíndricos contendo fluido e os principais estudos a este assunto. Destacam-se os trabalhos clássicos e pesquisas envolvendo a abordagem de diferentes condições de contorno na análise dinâmica para cascas desacoplada e acoplada a fluidos.

2.2 – DINÂMICA DE RESERVATÓRIOS CILÍNDRICOS

Os reservatórios cilíndricos podem estar sujeitos a diferentes situações de projeto, como por exemplo, dispostos na horizontal ou vertical, apoiados, enterrados ou parcialmente enterrados no solo, com diferentes tipos de carregamento, dimensões, nível de fluido, entre outras. Por outras palavras, se deve controlar da melhor forma possível as variáveis envolvidas para que se determine adequadamente a resposta estrutural desses tanques (Pedroso, 1995).

Leissa (1973) denomina uma casca fina como um corpo tridimensional delimitado por duas superfícies curvas próximas, sendo a distância entre as superfícies pequenas em comparação com as outras dimensões. De acordo este mesmo autor, as cascas cilíndricas podem ser abertas ou fechadas, e de acordo com as condições de restrição das bordas estas podem assumir várias formas.

Além disso, vários parâmetros físicos podem ser variados, incluindo o número de semi-ondas longitudinais, número de ondas circunferenciais, a relação entre raio/espessura, comprimento/raio, entre outros. A Figura 1.4 ilustra alguns dos parâmetros citados que são encontrados no estudo dinâmico de uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada.

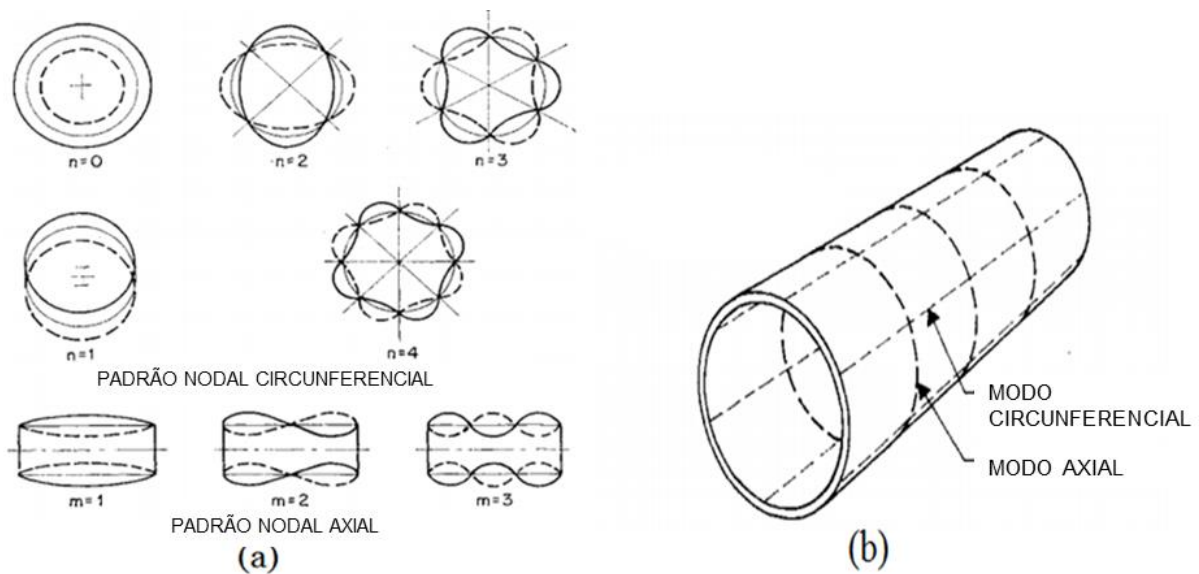


Figura 1.4 – Deformadas modais da casca cilíndrica: (a) Corte circunferencial e longitudinal e (b) Identificação dos nodos na estrutura da casca. (Forsberg, 1964, modificada).

A Figura 1.4 mostra as deformadas modais da casca cilíndrica no sentido longitudinal e circunferencial. Esta última é comumente chamada de deformadas azimutais ou modos de casca.

O tanque em situação estática tem os carregamentos assumidos de peso próprio da casca, as pressões hidrostáticas e o peso do líquido armazenado. Estas ações dependem das dimensões geométricas e propriedades dos materiais envolvidos (casca e fluido). Por outro lado, durante o movimento de vibração do reservatório, tanto a massa da casca cilíndrica quanto a massa do líquido oscilam em relação à posição de equilíbrio, fazendo com que surjam forças inerciais que maximizem os deslocamentos e conseqüentemente as tensões nessas situações.

Nesse sentido, decorrente de algum tipo de carregamento dinâmico (harmônico, sísmico, impulsivo, etc...), a casca cilíndrica inicialmente se desloca fazendo uma pressão no fluido. Por sua vez, o fluido responde com uma pressão hidrodinâmica nas paredes da casca. Essa pressão de resposta é chamada por diversos pesquisadores de pressão impulsiva. Durante o fenômeno de vibração os movimentos geram uma perturbação na superfície livre do líquido. Esse efeito é chamado de *sloshing*. As ondas de superfície livre ao atingir as paredes da casca fazem uma pressão, sendo esta chamada de convectivas (Housner, 1954).

Segundo Ozdemir *et. al* (2017) quando a frequência do movimento é próxima de uma das frequências naturais do líquido *sloshing*, são geradas grandes amplitudes de ondas. Assim, as forças hidrodinâmicas oriundas das ondas afetam a resposta global do tanque e provocam um

fenômeno complexo de interação fluido-estrutura. Moslemi *et al.* (2011) retrata que o efeito da componente impulsiva é muito superior do que a convectiva em tanques cilíndricos esbeltos, ou seja, o efeito *sloshing* é maior em tanques mais robustos. Portanto, visto que o reservatório do presente trabalho é classificado como esbelto o efeito *sloshing* não foi levado em consideração nas análises.

Ao estudar somente a componente impulsiva, pode-se destacar que, o fenômeno de vibração reflete em diferentes modos para o sistema acoplado, sendo eles: modos dominantes da estrutura (DE), onde o fluido apenas acompanha as deformadas modais da estrutura da casca, ou seja, não existe influência significativa das formas modais de pressão do fluido, podendo este ser computado na análise como uma massa adicional na estrutura (MA), reduzindo assim as frequências naturais acopladas. Há também modos dominantes do fluido (DF), ou seja, as formas modais acopladas reproduzem as formas modais de pressão da cavidade acústica, que por sua vez introduz uma rigidez adicional (RA) à estrutura da casca elevando assim as frequências naturais acopladas. Por fim, destaca-se o modo misto (MM), no qual os modos apresentam características dominantes da estrutura e do fluido (Souza, 2007; Pedroso, 2003).

Em razão disso, para que se determine o modo dominante durante a vibração do problema acústico-mecânico, é necessário primeiramente realizar o estudo dos sistemas desacoplados, ou seja, da casca cilíndrica e do fluido, ambos desacoplados.

Na análise dinâmica da casca cilíndrica desacoplada existem diversas teorias que fornecem bases teóricas consolidadas para isto. Assim, no presente trabalho foi adotada a teoria de Soedel (2005), devido ao fato que se trata de uma teoria de fácil entendimento e, com base nos estudos apresentados por Farshidianfar & Oliyazadeh (2012), essa formulação fornece resultados mais satisfatórios quando comparados a outras teorias de cascas para a condição de contorno apoiada-apoiada, além de possibilitar, pela característica da matriz das equações, uma fácil compreensão no processo de incorporação da massa adicional de fluido para o problema acoplado.

Na análise das diferentes condições de contorno, foi empregado o cálculo variacional e a técnica analítica apresentada por Sharma & Johns (1971), sendo esta última caracterizada por tratar de uma formulação simplificada para análise das características vibratórias da casca para qualquer condição de vinculação clássica. Neste trabalho, são discutidas ambas as formulações citadas.

Na análise do fluido desacoplado é visto que, segundo Blevins (1979), seu comportamento dinâmico é regido por ondas de pressão que se propagam na velocidade do som e refletem nas fronteiras, dependendo da natureza do fluido, pressão e temperatura. Além disso, o fluido pode ser tratado como cavidade acústica na análise dinâmica de problemas acoplados fluido-estrutura em situações no qual o líquido não apresente escoamento, ou seja, esteja estagnado, podendo vibrar em torno de um ponto de equilíbrio. Portanto, no presente trabalho foi utilizada diretamente a equação de propagação de onda, sendo o desenvolvimento da solução desta equação mostrado posteriormente.

A interação fluido-estrutura é abordada na interface entre casca e fluido como uma pressão normal do líquido na parede da casca que, devido à força de inércia do líquido oscilando, é incorporada na equação de movimento da casca como massa adicional virtual na direção radial (w) da casca cilíndrica. Essa equação da massa adicional é oriunda da inclusão de forma matemática da pressão de irradiação no contorno do líquido nas forças externas (pressão) nas equações da casca, e ainda, atribuindo que a velocidade normal radial da superfície da casca é igual a componente da velocidade radial na superfície da cavidade acústica, pode-se acoplar a casca com o fluido. Esta última condição descrita é chamada de condição de impermeabilidade ou impenetrabilidade e leva em consideração apenas os efeitos inerciais do fluido, ou seja, introduz uma massa adicional na casca (Soedel, 2005; Mendes, 2013).

Ao impor essa condição de impermeabilidade é idealizado a não existência de cavitação no sistema e que, durante as oscilações do conjunto, o deslocamento da casca é assumido o mesmo sem a presença do fluido, ou seja, no problema acoplado a compressibilidade do fluido não é levada em consideração. Essa suposição, segundo Soedel (2005), funciona melhor para frequências e modos naturais mais baixos e à medida que a frequência de interesse aumenta, a compressibilidade do fluido se tornará cada vez mais importante. Portanto, como o presente trabalho tem a finalidade de investigar as primeiras frequências e modos naturais, a justificativa para o emprego da massa adicional no problema estudado é cada vez mais comprovada.

Ressalta-se ainda que esse critério da massa adicional virtual foi primeiramente estudado por Lindholm *et al.* (1962), sendo tido como base para diversas pesquisas clássicas, como por exemplo, os trabalhos de Gonçalves & Batista (1986), Fortuny Gasser (1987), Fernholz & Robinson (1990), Amabili & Dalpiaz (1995), Mendes (2013), Lopez (2014), entre outros. Assim, mesmo tratando-se de um critério simplificado, é empregado nos trabalhos mais

atuais, pois devido à complexibilidade do tema abordado é de fundamental importância uma primeira concepção dos conceitos mais simples, para que assim se cheguem a estudar fenômenos mais realistas através das simulações analíticas.

No que se diz respeito às vibrações forçadas, o carregamento harmônico caracteriza em um tipo específico de análise, nos quais são identificados os modos operacionais que influenciam na resposta dinâmica da estrutura. Obtém-se a função de resposta em frequência de uma componente de deslocamento nodal. Quando o amortecimento é desprezado ($\xi=0$), os picos de ressonância acontecem para frequências de excitação iguais as frequências naturais (Pedroso, 1998).

Nesse sentido, qualquer carga periódica aplicada produz uma resposta periódica na estrutura e a análise harmônica lhe dá a capacidade de prever o comportamento dinâmico à ressonância e a outros efeitos nocivos das vibrações forçadas. No presente trabalho, a resposta harmônica foi determinada pelo método numérico, sendo mostrada posteriormente a forma de resolução nessas situações.

2.3 – PRINCIPAIS ESTUDOS

O estudo de vibrações livres e forçadas em cascas cilíndricas recebeu uma grande atenção de diversos pesquisadores no decorrer dos anos e ainda o faz atualmente. Seguindo os trabalhos clássicos de Love (1888), Donnell (1933), Flügge (1934), Mushtari (1938), Reissner (1941), Vlasov (1951), Arnold & Warburton (1953), Timoshenko e Woinowsky (1959), Sanders (1959) e Naghdi & Berry (1964), outras várias teorias foram desenvolvidas e aprimoradas para simular o comportamento dinâmico de uma casca. As diferentes técnicas analíticas citadas diferem entre si desde as deformações assumidas para a casca como também pelos métodos de solução do problema.

Além disso, nota-se também que o problema de interação fluido-estrutura aplicados à análise dinâmica em reservatórios é simplificado em algumas teorias clássicas, como por exemplo, no trabalho de Housner (1954), em que o fluido no interior da casca é tratado como um sistema massa-mola. Este e outros trabalhos servem de base para abordar sobre o assunto no que se diz respeito a pesquisas pioneiras de embasamento de algumas normas internacionais para o projeto de reservatórios cilíndricos.

2.3.1 – Vibração livre

A partir da base teórica consolidada nas teorias citadas, muitos trabalhos sobre vibrações de livres de cascas cilíndricas foram desenvolvidos. Pode-se mencionar os estudos realizados por Forsberg (1964), que analisou a resposta dinâmica em vibração livre em função da restrição axial, da proporção entre as dimensões geométricas da casca (L/R e R/h) e o comportamento das deformadas modais para três conjuntos de condição de contorno. Foi tida por base a teoria de cascas de Flügge (1934) e os deslocamentos da casca assumidos por funções trigonométricas em uma série de Fourier. As frequências naturais diminuem para cascas mais longas e mais finas. O reflexo dos resultados das frequências através da análise das deformadas modais também foram tratados no estudo.

Lakis & Paidoussis (1971) apresentou uma teoria utilizando o método dos elementos finitos para estudar as vibrações livres de cascas cilíndricas cheias e parcialmente preenchidas com líquido. Foram utilizados elementos finitos cilíndricos e assumido a teoria clássica de cascas de Sanders (1959) para obtenção da resposta dinâmica. A casca cilíndrica tem condição de contorno apoiada-apoiada e o fluido foi incorporado como massa adicional virtual nas equações de movimento da estrutura. Em síntese, as frequências naturais e as deformadas modais obtidas mostraram-se em conformidade quando comparadas com dados experimentais estudados por Lindholm *et al.* (1962). Por fim, afirmam que mesmo com essas aproximações no acoplamento fluido-estrutura entre massas dos sistemas, o procedimento é bem sucedido.

Um estudo bastante abrangente, tido como base em diversas pesquisas atuais, é o trabalho realizado por Leissa (1973). São apresentadas as diferentes teorias de pesquisas clássicas e os resultados oriundos de cada uma destas formulações. Em particular, Leissa dá atenção às comparações de frequências naturais e formais modais de vibração para cascas cilíndricas, cônicas, esféricas, entre outras. Dentre esses trabalhos, Leissa aborda algumas das condições de contorno empregadas neste trabalho: cascas com extremidades apoiada-apoiada, engastada-livre, engastada-engastada e livre-livre. Os resultados analíticos, numéricos e experimentais para as situações apresentados por Leissa, serviram de base para interpretar os resultados do presente trabalho.

Chung (1981) desenvolveu um método analítico para determinar as características de vibração livre de cascas cilíndricas com qualquer condição de contorno. O método é obtido através de um procedimento de solução direta das equações da teoria de Sanders (1959) utilizando expressões simples de série de Fourier para representar as equações de deslocamentos da

casca. Os resultados foram comparados com resultados numéricos através do método dos elementos finitos e com valores disponíveis na literatura.

Gonçalves & Batista (1986) desenvolveram uma análise teórica para vibração livre de cascas cilíndricas simplesmente apoiadas, parcialmente cheias ou submersas num fluido. As respostas de vibrações livres da casca são obtidas utilizando os métodos de energia. As deformações são baseadas na teoria de cascas de Sanders (1959) e o procedimento de Rayleigh-Ritz foi utilizado para obter uma solução do problema. O fluido foi representado pelo potencial de velocidade e modelado pela equação de propagação de onda. O acoplamento fluido-estrutura foi realizado através do parâmetro de massa adicional virtual. Por fim, foram investigados os efeitos de uma altura variável do nível de fluido, bem como a influência dos parâmetros geométricos nas frequências naturais da casca. Os resultados analíticos demonstraram-se satisfatórios quando comparados com estudos já disponíveis na literatura.

Fortuny Gasser (1987) realizou um estudo teórico e experimental da interação dinâmica entre uma casca cilíndrica delgada e o fluido interno. A investigação experimental foi realizada com o intuito de analisar o parâmetro de massa adicional de fluido aplicado na formulação teórica para a realização do acoplamento fluido-estrutura. Desta forma, modelos experimentais de cascas cilíndricas delgadas para condições de contorno engastadas e simplesmente apoiadas, foram ensaiadas para determinar a resposta em vibração livre da casca vazia ou parcialmente preenchida com fluido. Os resultados experimentais foram comparados com resultados teóricos obtidos e demonstraram a comprovação do acoplamento modal do parâmetro de massa de fluido adicionada.

O método de Koga (1988) determina a resposta dinâmica de uma casca com condições de contorno livre-livre, apoiada-apoiada com e sem restrição axial, ou suas combinações. Foi confrontado o parâmetro de frequência para diferente número de nodos circunferenciais das diferentes condições de contorno citadas. A exatidão da formulação é satisfatória quando feita uma comparação com soluções numéricas e resultados experimentais disponíveis na literatura.

Fernholz & Robinson (1990) estudaram problemas desacoplados e acoplados fluido-estrutura em placas e cascas cilíndricas através do método dos elementos finitos por meio do programa computacional NASTRAN. O desempenho do *software* foi validado através da comparação entre os resultados obtidos com valores encontrados por meio de soluções analíticas, segundo a teoria de Donnell-Mushtari, e o modelado como massa adicional (a pressão hidrodinâmica

nas equações da casca juntamente com a condição de impermeabilidade). Os resultados mostraram-se satisfatórios.

Cheng & Nicolas (1992) estudaram as vibrações livres de uma casca cilíndrica acoplada a uma placa circular. A abordagem é caracterizada pelo acoplamento estrutural e condições de contorno, na qual estas são incorporadas no modelo por meio de distribuições contínuas de molas ao longo da borda da casca e da interface da placa. Foi empregada uma formulação geral baseada no princípio de Hamilton para determinar a resposta dinâmica acoplada. A precisão do método foi satisfatória quando comparado os resultados obtidos com valores disponíveis na literatura e de análises através do método dos elementos finitos por meio do *software* ANSYS. Assim, foi evidenciado que existem três tipos diferentes de modos para essa estrutura combinada: modos controlados pela placa, modos controlados pela casca e modos fortemente acoplados. Cada tipo de forma modal está fortemente relacionado com o caráter modal de cada um dos elementos estruturais desacoplados.

Pedroso *et al.* (1994) elaboraram um algoritmo baseado no método das diferenças finitas (MDF) para a obtenção da resposta dinâmica em vibrações livres de cascas cilíndricas para diferentes condições de contorno. O algoritmo desenvolvido resolve a formulação simplificada de Donnell com a utilização das equações clássicas de energia cinética e potencial de deformação. Os valores obtidos através das soluções analíticas e resultados experimentais foram comparados às simulações numéricas com o algoritmo demonstrando uma boa correlação dos resultados.

Lam & Loy (1995) estudaram a influência das condições de contorno nas frequências naturais da uma casca cilíndrica de múltiplas camadas com diferentes espessuras. Foi empregada a teoria aproximada de Love nas equações de energia (cinética e potencial) e aplicado o procedimento de Ritz para resolução do problema através do princípio da energia mínima na função Lagrangeana. Foi determinada a resposta em vibração livre da casca a partir de diferentes funções modais de viga a fim de modelar para diferentes condições de contorno. Os resultados obtidos das frequências naturais e deformadas modais para as condições de contorno clássicas foram comparados com os valores disponíveis na literatura e apresentaram um bom acordo.

Amabili & Dalpiaz (1995) estudaram as vibrações livres de um reservatório circular cilíndrico cheio e parcialmente preenchido com líquido de forma analítica e experimental. Na resolução foi empregada a técnica analítica de Berry & Reissner (1958) para a casca e o fluido

modelado pela função potencial de velocidade na equação de Laplace. As frequências naturais e as deformadas modais para o reservatório vazio e com diferentes níveis de fluido são investigadas. O estudo mostra o bom acordo entre os resultados teóricos e experimentais, constatando que é possível aplicar a abordagem teórica às estruturas reais para reservatórios vazios e cheios de líquido. O presente estudo também serviu de base para as análises pertinentes no presente trabalho.

Amabili (1997) estudou analiticamente as vibrações livres de um reservatório cilíndrico parcialmente preenchido com líquido incompressível. O tanque é representado por uma casca cilíndrica simplesmente apoiada e acoplada a uma placa circular apoiada sobre uma base elástica de fundação de Winkler. Os efeitos das ondas de superfície livres (*sloshing*) e da pressão hidrostática do fluido foram desprezados. O fluido foi modelado pelo potencial de velocidade e resolvido através da equação de Laplace. Os modos de vibração nos quais a placa de fundo do tanque oscila com o líquido (modos *bulging*) foram investigados e a solução analítica obtida tendo por base um problema de autovalor usando a expansão Rayleigh-Ritz nas equações de energia. Vale ressaltar que a condição de impermeabilidade foi imposta ao fluido para idealizar as paredes laterais da casca como rígida. Na consideração do fundo flexível a condição aplicada foi que o deslocamento do fluido é o mesmo que a deflexão da placa. Os resultados obtidos em termos de frequências e parâmetros foram confrontados com valores disponíveis na literatura e mostraram-se satisfatórios.

Kim *et al* (2003) criaram um método teórico para analisar as características de vibração livres em casca cilíndrica enrijecidas com anel e parcialmente cheia de líquido. O efeito das ondas de superfície livre, também chamado de *sloshing*, o efeito do nível do fluido, do número e posição dos reforços é investigado na análise. A condição de contorno para a casca é engastada-livre e empregada à teoria de cascas de Love na análise. O método de Rayleigh-Ritz foi utilizado para resolver a equação de frequência pelo método da energia. Os resultados do método teórico foram satisfatórios quando comparados com a análise em elementos finitos por meio do *software* ANSYS[®], para a casca enrijecida e não-enrijecida, parcialmente preenchidas com fluido.

Paula (2003) faz um estudo do acoplamento acústico-mecânico em casca cilíndrica circular uniforme, no qual é abordada a interação objetivando o conhecimento do fator de acoplamento. Na resolução da casca foi empregada a teoria de Donnell-Mushtari e o fluido modelado pela equação de propagação de onda. O acoplamento acústico-estrutural realizado

ao incluir a pressão de irradiação nas equações de equilíbrio dinâmico da casca cilíndrica. Assim, através da condição de impermeabilidade determina-se o fator de acoplamento modal. O *software* ANSYS® foi utilizado para obter as frequências naturais e deformadas modais numéricas para a estrutura e cavidade acústica. É mostrado que as frequências da estrutura da casca não crescem necessariamente com o aumento do número de índices modais e que os modos acústicos e estruturais atuam em faixas de frequências diferentes, no qual o modo dominante de vibração estrutural é maior que os acústicos.

Farshidianfar & Oliazadeh (2012) realizaram um estudo de vibrações livres em cascas cilíndricas circulares com base em diferentes técnicas analíticas de solução. Para obtenção da solução analítica sabe-se que cada operador diferencial depende da teoria de cascas adotada, em que a partir das teorias encontradas em Leissa (1973), uma comparação foi feita entre os resultados experimentais e os seguintes operadores das teorias de Donnell-Mushtari, Love-Timoshenko, Arnold-Warburton, Houghton-Johns, Flugge-Byrne-Lur'ye, Reissner-Naghdi-Berry, Sanders, Vlasov, Kennard-Simplified e, por fim, Soedel. Em decorrência disso, foram comparadas as frequências naturais e as relações entre os coeficientes de amplitudes modais para diferentes relações geométricas (L/R e h/R). Deste modo, os resultados se mostraram satisfatórios e os métodos baseados na teoria de Soedel e Kennard demonstraram uma melhor aproximação em relação às outras teorias.

Chen *et al.* (2013) estudara as vibrações livres de uma casca cilíndrica circular para condições de contorno elásticas não uniformes. A solução analítica para o problema é obtida empregando um método de série de Fourier melhorado, no qual cada um dos três deslocamentos da casca é representado por uma série de Fourier complementado por vários termos introduzidos para garantir e acelerar a convergência das expansões da série. A teoria de cascas de Sanders foi utilizada nos métodos de energia e os coeficientes de expansão desconhecidos foram determinados usando o procedimento de Rayleigh-Ritz. Desta forma, a solução apresentada pelos pesquisadores permite alterar a condição de contorno da casca variando apenas a rigidez dos quatro conjuntos de molas de limite em cada extremidade, sem a necessidade de fazer qualquer alteração no procedimento de solução. A precisão da solução analítica é validada por comparação com os resultados obtidos através do método de elementos finitos por meio do *software* ANSYS®.

Dai *et al.* (2013) desenvolveram uma solução de série exata para a análise de vibração de cascas cilíndricas com quaisquer condições de contorno. Nesse sentido, utilizando as

equações elásticas baseadas na teoria de Flügge, os três deslocamentos são representados por uma série de Fourier e funções auxiliares, uma vez que esta solução satisfaz exatamente as equações diferenciais governantes e as condições de contorno do problema. As soluções em série foram aplicadas diretamente na resolução das equações diferenciais pela teoria citada. Assim, uma das vantagens do método apresentado é destacada por abranger condições de contorno mais complexas, como por exemplo, apoios em diferentes pontos da casca, vinculações parcialmente rígidas e restrições elásticas não uniformes. Com isso, foram apresentados exemplos numéricos sobre os parâmetros modais das cascas para várias condições de contorno e a confiabilidade do método de solução demonstrada através da comparação entre os resultados obtidos com o método dos elementos finitos e valores encontrados na literatura.

Liu *et al.* (2013) estudaram as vibrações livres em cascas cilíndricas com presença de anel enrijecedor para quaisquer condição de contorno. Assim, foram empregados seis conjuntos de polinômios ortogonais característicos que satisfazem seis restrições de contorno clássicas, para que fosse empregado para representar as equações gerais dos deslocamentos em qualquer modo longitudinal. Com base na teoria de cascas de Sanders e com as funções de energia dos sistemas as equações de frequências naturais relacionadas com o problema foram determinadas para várias condições de contorno clássicas através da resolução com o método de Rayleigh-Ritz. Ao ajustar a rigidez das molas artificiais, essas equações podem simular a vibração livre de cascas cilíndricas com quaisquer condições de contorno nas extremidades. O método foi verificado comparando os valores obtidos com resultados analíticos disponíveis na literatura para as cascas cilíndricas rígidas e sem anel enrijecedor. Além disso, são mostrados os efeitos nas frequências naturais de parâmetros, tais como: a rigidez das molas artificiais, a rotação da casca, o número de anéis de reforço e a relação profundidade / largura dos reforços de anel.

Sun *et al.* (2013) estudaram as vibrações de cascas cilíndricas com diferentes condições de contorno utilizando polinômios ortogonais característicos no método de Rayleigh-Ritz. A análise baseia-se na teoria da casca de Sanders, na qual são tomadas as séries polinomiais ortogonais como as funções características admissíveis. O método de Rayleigh-Ritz é empregado para derivar, a partir das funções de energia dos sistemas, as equações de frequência de cascas cilíndricas com condições de contorno clássicas utilizando molas artificiais para simular as restrições elásticas impostas nas bordas. Por fim, o número de

termos da série é analisado para as diferentes condições de contorno clássicas e o método validado ao comparar os resultados obtidos com os valores disponíveis na literatura.

Mendes *et al.* (2014) realizaram um estudo de vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas com anéis enrijecedor e contendo fluido. Foi apresentado um desenvolvimento teórico com o objetivo de investigar as características das vibrações de cascas cilíndricas enrijecidas por anéis, parcialmente preenchidas com um fluido. O método de Rayleigh-Ritz foi empregado para obter a equação analítica de frequências, sendo o fluido foi analisado através de seu potencial de velocidade com condições de contorno que satisfazem a equação de Laplace. A formulação teórica é validada através do método dos elementos finitos por meio do *software* ANSYS® e que foram comparados com resultados da literatura. Por fim, foram realizadas análises numéricas para cascas não enrijecida e enrijecida, para a condição de contorno engastada-livre.

Elkholy *et al.* (2014) realizou um estudo de diferentes tipos de elementos finitos para a análise modal de tanques circulares cilíndricos de armazenagem de líquidos. O estudo fornece opções de diferentes elementos finitos que melhor prever as características dinâmicas do tanque, ou seja, as frequências naturais e os modos de vibração. O refinamento da malha de elementos adotada também foi estudado. Foram obtidas frequências naturais acopladas com base na relação altura/diâmetro do tanque, várias espessuras de parede e diferentes profundidades de líquido. Os resultados obtidos através do método dos elementos finitos quando comparados com os resultados experimentais disponíveis na literatura demonstraram-se satisfatórios.

Mendes *et al.* (2016) realizaram um estudo de vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas contendo fluido e conectado com placa de fundo apoiada em base elástica. A casca cilíndrica é considerada simplesmente apoiada e conectada a uma placa circular simplesmente apoiada por uma mola rotacional na ligação casca-placa. A estrutura da placa é considerada apoiada sobre uma fundação elástica de Winkler e os efeitos das ondas de superfície livre foram desprezados. Desta forma, investigaram-se os modos *bulging* da estrutura, os efeitos da rigidez da fundação de Winkler e da rigidez das molas na ligação casca-placa para tanques preenchidos com água. Os resultados foram comparados com os valores obtidos pelo método dos elementos finitos via ANSYS®.

Sousa *et al.* (2016) estudaram as vibrações livres não-lineares de cascas cilíndricas simplesmente apoiadas, cheias e parcialmente preenchidas por um fluido incompressível, invíscido e irrotacional, levando em consideração a influência das ondas de superfície livre

(*sloshing*) e da geometria da casca no comportamento não linear do sistema. Foi utilizada a teoria não linear de Donnell e de Sanders na representação das deformações e curvaturas da casca cilíndrica. A partir da função Lagrange, composta pelas da energia cinética da casca cilíndrica e do fluido e da energia de deformação da casca cilíndrica, aplicou-se o método de Rayleigh-Ritz. As equações obtidas expressam as características vibratórias não lineares da casca cilíndrica.

Qin *et al.* (2017) estudaram as características de vibração livre de cascas cilíndricas condições de contorno arbitrarias. A teoria da casca de Sanders foi empregada no cálculo da energia de deformação elástica e as molas artificiais impostas na extremidade da casca. A formulação se caracteriza por expandir os deslocamentos da casca em três diferentes conjuntos de formulações: série de Fourier modificada, os polinômios ortogonais e os polinômios de Chebyshev. Com isso, uma solução unificada para os três tipos de funções de expansão foi desenvolvida usando o método Rayleigh-Ritz na resolução do problema. A convergência e eficiência das três funções de expansão são investigadas, uma vez que a solução unificada foi validada comparando-se com os resultados disponíveis na literatura.

2.3.2 – Vibração forçada

Amabili *et al.* (2002) realizaram um estudo experimental sobre vibrações em dois reservatórios cilíndricos cheios de líquido e submetidos a carregamento harmônico. As condições de contorno nos bordos da casca se aproximam da condição de contorno apoiada-apoiada. O topo e base da casca são fechados por discos de borracha para aproximar a condição de contorno para água confinada de pressão zero. Os resultados experimentais se mostraram satisfatórios quando comparados com os resultados teóricos obtidos.

Amabili & Paidoussis (2003) realizaram uma revisão dos principais estudos sobre dinâmica de cascas e painéis cilíndricos circulares, com e sem interação fluido-estrutura. A revisão da literatura foca principalmente em vibrações não lineares livres e forçadas de cascas e painéis cilíndricos, sem (ou não) acoplamento fluido-estrutura. Além disso, estudos restritos sobre problemas dinâmicos que envolvem, por exemplo, estabilidade dinâmica e problema de *flutter* em cascas acopladas a fluidos também são discutidos.

Silva *et al.* (2008) estudaram as vibrações não-lineares e a estabilidade de uma casca cilíndrica contendo um fluido. Foram tidos como base modelos de dimensão reduzida. Desta forma, foram determinadas equações de movimento assumindo as deformações da casca com

base na teoria não linear de Donnell resolvidas pelo método de Galerkin. O líquido é considerado interno a casca, irrotacional, não viscoso e incompressível, o qual através da condição de impenetrabilidade pode-se realizar a interação entre fluido-estrutura. Apresentam-se respostas no tempo, limites de instabilidade e diagramas de bifurcação para uma casca cilíndrica submetida a dois tipos de carregamentos harmônicos (pressão lateral e carga axial).

Kurylov & Amabili (2010) realizaram um estudo de vibrações não lineares em cascas cilíndricas com diferentes condições de contorno a partir de expansões polinomiais e trigonométricas. Os deslocamentos circunferenciais da casca foram expandidos por meio de uma série de funções harmônicas e para os deslocamentos longitudinais foram empregados polinômios ortogonais Chebyshev e funções trigonométricas. A partir da energia dos sistemas a abordagem Lagrangeana é aplicada para obter o sistema não linear de equações diferenciais. Primeiramente foi realizada análise modal para identificar os modos naturais. Posteriormente um carregamento harmônico pontual é assumido como ativo na casca. Os resultados são apresentados apenas para cascas simplesmente apoiadas e bi-engastadas, comparados com resultados numéricos e da literatura.

Moslemi & Kianoush (2012) realizaram um estudo paramétrico do comportamento dinâmico de tanques cilíndricos abertos. Foram analisados parâmetros que afetam a resposta dinâmica dessas estruturas, como o efeito *sloshing* da superfície líquida livre, flexibilidade da parede do tanque, aceleração horizontal e vertical do solo, relação de aspecto do tanque e fixação da base. Assim, foram obtidos resultados dinâmicos a partir do método dos elementos finitos e comparados com as recomendações do código da *American Concrete Institute* (ACI). A validade do método de elementos finitos é também verificada pela comparação dos resultados calculados a partir de métodos analíticos disponíveis na literatura. Com base nas análises da resposta em vibração livre e forçada no tempo do tanque, são feitas recomendações sobre a concepção sísmica de tanques cilíndricos contendo líquidos e comparações com o procedimento de projeto descrito pelo ACI.

Qu *et al.* (2013) propôs um método para determinar a resposta dinâmica em vibrações livres, harmônicas e transitórias de cascas cilíndricas compostas com diferentes condições de contorno clássicas. A teoria da casca de Reissner-Naghdi foi empregada para formular o modelo teórico tendo por base a série de Fourier e o uso de polinômios ortogonais como funções de deslocamento admissíveis para cada segmento de casca. São utilizados para avaliar

a perfeição do método os polinômios de primeiro e segundo gênero de Chebyshev, polinômios de primeiro tipo ortogonais de Legendre e os polinômios ortogonais de Hermite. Os resultados mostraram-se satisfatórios quando comparados com valores disponíveis na literatura e com os valores encontrados através do método dos elementos finitos com uso do *software* ANSYS®.

Ma *et al.* (2014) realizaram um estudo de vibrações livres e forçadas (carga harmônica pontual) de cascas cilíndricas e cônicas acopladas para diferentes condições de contorno. Nesse sentido, foi empregado um método de Fourier-Ritz modificado para obter a resposta dinâmica em diferentes condições de contorno da casca acoplada cônico-cilíndrica. Assim, cada um dos componentes de deslocamento de ambas as cascas cônicas e cilíndricas são expandidos como uma série de Fourier modificada, no qual é composta por uma série padrão de Fourier e de funções suplementares com o intuito de acelerar a convergência da expansão da série. A precisão do método é validada pela comparação dos resultados obtidos com os valores encontrado através do método dos elementos finitos e aqueles da literatura. Assim, diferentes exemplos numéricos também são feitos com o objetivo de mostrar o comportamento de vibração forçada da casca acoplada cônico-cilíndrica quando submetida às forças de excitação em diferentes direções.

Del Prado *et al.* (2014) estudaram o efeito do material e da geometria nas vibrações não-lineares das cascas cilíndricas circulares ortotrópicas. A casca tem condição de contorno simplesmente apoiada e está submetida a uma carga lateral dependente do tempo. A teoria não linear de Donnell é usada para modelar a casca e uma solução modal com seis graus de liberdade é empregada para descrever os deslocamentos laterais da casca. Com isto, o método Galerkin é imposto para derivar o conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas resolvidas pelo método Runge-Kutta. As propriedades do material e as relações geométricas têm uma influência significativa nas cargas de instabilidade e nas curvas de ressonância da casca.

Silva *et al.* (2015) estudaram as vibrações não-lineares de uma casca cilíndrica funcionalmente graduada com a presença de líquido, sendo essa submetida a uma carga lateral dependente do tempo e uma pré-carga estática axial. Foi empregada a teoria não linear de Donnell para modelar a casca e o fluido considerado incompressível, não viscoso e irrotacional. Desta forma, foi proposta uma nova função para descrever a variação da fração volumétrica do material constituinte através da espessura da casca. Devido a isto, a técnica de

perturbação é usada para descrever os deslocamentos da casca e o método de Galerkin é aplicado para derivar um conjunto de dados não lineares acoplados das equações diferenciais de movimento. Os resultados mostram a influência da variação dos dois materiais constituintes ao longo da espessura da casca, do fluido interno, da pré-carga estática e da geometria do cilindro nas frequências naturais, e ainda, abordam a relação entre amplitude e frequência, curvas de ressonância e cenário de bifurcação.

Tang *et al.* (2017) estudaram as vibrações livres e forçadas (carga harmônica) de cascas cilíndricas circulares de várias seções e quaisquer condições de contorno pelo método da matriz de radiação de reverberação. O método foi desenvolvido introduzindo as equações de movimento da teoria de casca de Flügge na matriz de radiação de reverberação, no qual são obtidas soluções exatas da forma de onda viajando ao longo da direção longitudinal. Para a direção circunferencial a forma de onda é estável em cada segmento uniforme de casca. Assim, o método desenvolvido calcula as frequências naturais e respostas de estado estável da casca cilíndrica de várias seções. Com isto, os efeitos da rigidez do apoio elástico e do número de diferentes seções nas frequências naturais são investigados, bem como as amplitudes de deslocamento para faixas de frequências de excitação. A precisão do método é validada com comparações entre os resultados obtidos através do método dos elementos finitos e de valores disponíveis na literatura.

O Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE) da Universidade de Brasília realizou diversos estudos sobre análises estáticas e/ou dinâmicas de cascas, barragens, cavidades acústicas, interação fluido-estrutura e estudos afins, como por exemplo, mencionam-se os trabalhos realizados por Moraes (2000), Souza Junior (2006), Ribeiro (2006), Souza (2007), Silva (2007), Melo (2009), Ribeiro (2010), Lustosa (2011), Campos Júnior (2011), Mendes (2013), Mendes *et al.* (2014), Macedo (2014), Lopez (2014). Mendes *et al.* (2015), Mendes *et al.* (2016) e Mendes *et al.* (2017).

3 – FORMULAÇÕES ANALÍTICAS

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as formulações teóricas referentes a vibrações livres de cascas cilíndricas, cavidade acústica (vibrações livres) e acoplamento fluido-estrutura.

3.2 – CASCA CILÍNDRICA

3.2.1 – Vibração livre

Para determinar a resposta dinâmica em vibração livre, foi utilizada a técnica analítica de Soedel (2005) para simular uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada. No estudo de todas as condições de contorno clássicas abordadas neste trabalho foi empregada a formulação proposta por Sharma e Johns (1971) e o método de energia na resolução do problema.

3.2.1.1 – Teoria de Soedel

A casca cilíndrica é composta de paredes delgadas de comprimento L , raio médio R , ângulo radial ϕ e espessura h . O material da casca é considerado como sendo elástico com módulo de Young E , coeficiente de Poisson ν e massa específica ρ . As coordenadas do vetor deslocamento na superfície da casca na direção axial, circunferencial e radial são respectivamente u , v e w . A Figura 3.1 mostra a casca cilíndrica com seus respectivos eixos.

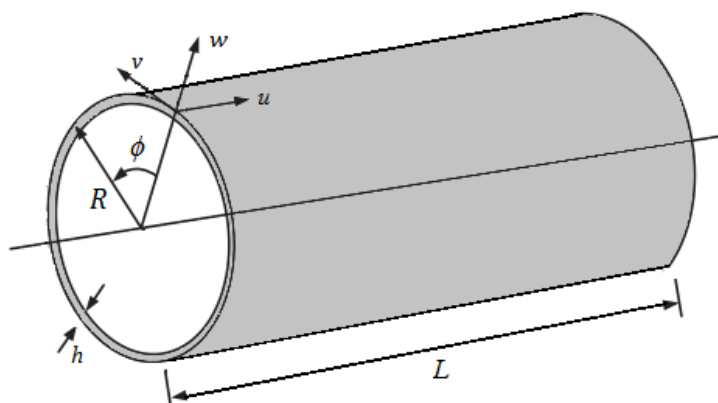


Figura 3.1 - Eixos dos deslocamentos para uma casca cilíndrica.

Com base na teoria linear apresentada por Soedel (2005), as deformações e as mudanças na curvatura da casca assumidas com base na teoria de Flugge são dadas por:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{w}{R} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{\phi z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (3.3)$$

$$\chi_z = -\frac{\partial \beta_z}{\partial z} \quad (3.4)$$

$$\chi_\phi = \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\phi}{\partial \phi} \quad (3.5)$$

$$\chi_{z\phi} = \frac{\partial \beta_\phi}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_z}{\partial \phi} \quad (3.6)$$

Onde:

$$\beta_z = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.7)$$

$$\beta_\phi = \frac{v}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad (3.8)$$

A figura a seguir mostra os esforços internos e externos assumidos nas paredes de uma casca cilíndrica.

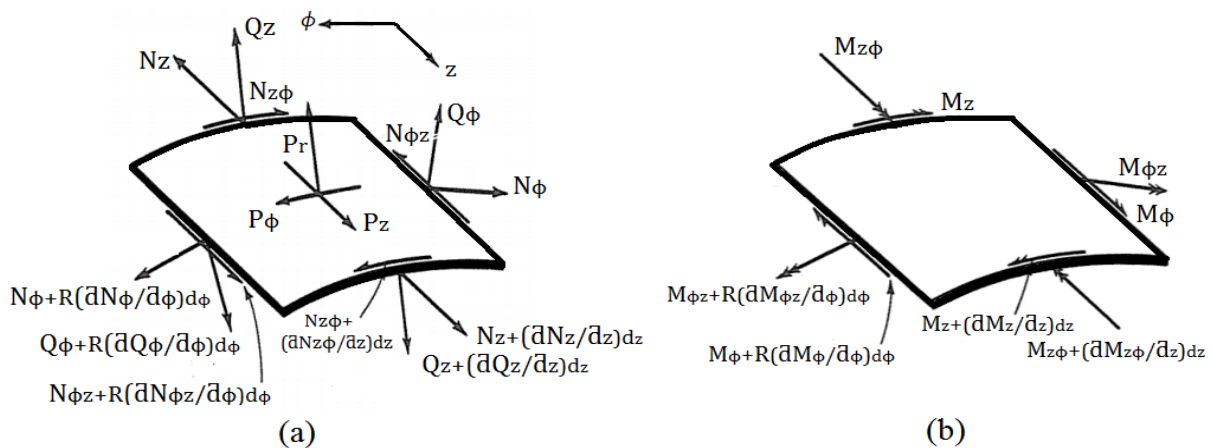


Figura 3.2 - Elemento infinitesimal de casca cilíndrica: (a) Forças externas e internas de membrana, (b) Momentos de flexão e de torção. (Flügge, 1973; modificada)

Na determinação das equações de equilíbrio dinâmico, Soedel (2005) realiza a somatória de forças e momentos tendo por base os esforços mostrados no elemento infinitesimal da casca.

Assim, aplicando a segunda lei de Newton, ou seja, $\sum F = m.a$ e $\sum M = 0$ têm-se para cada direção do elemento as seguintes equações de equilíbrio dinâmico da casca cilíndrica. A dedução das equações de equilíbrio dinâmico é mostrada no Apêndice A.

- Somatória de forças na direção \vec{u} (longitudinal):

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{\phi z}}{\partial \phi} + P_z - \rho.h. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.9)$$

- Somatória de forças na direção \vec{v} (tangencial):

$$\frac{\partial N_{z\phi}}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{Q_{\phi}}{R} + P_{\phi} - \rho.h. \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

- Somatória de forças na direção \vec{w} (radial):

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial Q_{\phi}}{\partial \phi} - \frac{N_{\phi}}{R} + P_r - \rho.h. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.11)$$

- Somatória de momentos em torno do eixo z (longitudinal):

$$Q_{\phi} = \frac{\partial M_{z\phi}}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\phi}}{\partial \phi} \quad (3.12)$$

- Somatória de momentos em torno do eixo v (transversal):

$$Q_z = \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\phi z}}{\partial \phi} \quad (3.13)$$

Para determinar a solução das equações diferenciais de movimento, Soedel (2005) assume como solução das equações os seguintes deslocamentos u , v e w .

$$u(z, \phi, t) = u(z, \phi) \cdot e^{j\omega t} \quad (3.14)$$

$$v(z, \phi, t) = v(z, \phi) \cdot e^{j\omega t} \quad (3.15)$$

$$w(z, \phi, t) = w(z, \phi) \cdot e^{j\omega t} \quad (3.16)$$

Sendo que $e^{j\omega t}$ é a parcela do tempo na solução das equações, $u(z, \phi)$, $v(z, \phi)$ e $w(z, \phi)$ são as deformadas modais (modos de vibração). As soluções mostradas se caracterizam por uma

separação de variáveis, em que e é à base dos logaritmos neperianos, $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, ω é a frequência natural de vibração e t é o tempo. Onde P_z , P_ϕ e P_r são iguais a zero para análise em vibrações livres (movimentos da estrutura sem nenhuma força aplicada). Por conseguinte, substituindo as equações (3.14), (3.15) e (3.16) nas equações (3.9), (3.10) e (3.11) e ainda, chamando $u(z, \phi)$, $v(z, \phi)$ e $w(z, \phi)$ por u , v e w tem-se finalmente no domínio da frequência as seguintes equações:

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\phi z}}{\partial \phi} + \rho h \omega^2 u = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial N_{z\phi}}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{Q_\phi}{R} + \rho h \omega^2 v = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} - \frac{N_\phi}{R} + \rho h \omega^2 w = 0 \quad (3.19)$$

As relações entre os esforços de membrana e de flexão têm como base as respectivas deformações. Assim, os esforços normais e momentos fletores são dados por:

$$N_z = k(\varepsilon_{zz} + \nu \varepsilon_{\phi\phi}) \quad (3.20)$$

$$N_\phi = k(\varepsilon_{\phi\phi} + \nu \varepsilon_{zz}) \quad (3.21)$$

$$N_{z\phi} = K \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{\phi z} \quad (3.22)$$

$$M_z = D(\chi_z + \nu \chi_\phi) \quad (3.23)$$

$$M_\phi = D(\chi_\phi + \nu \chi_z) \quad (3.24)$$

$$M_{z\phi} = D \frac{(1-\nu)}{2} \chi_{\phi z} \quad (3.25)$$

Sendo:

K a rigidez de membrana e D a rigidez flexional definidas por:

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (3.26)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.27)$$

Com base nas equações (3.14), (3.15) e (3.16) é possível analisar somente as deformadas modais u , v e w , uma vez que Soedel (2005) admite como solução para as deformações da superfície média da casca as seguintes equações:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \left(\frac{\partial}{\alpha_m \partial z} \right) \cos[n(\phi - \psi)] \\ B \operatorname{sen}[n(\phi - \psi)] \\ C \cos[n(\phi - \psi)] \end{Bmatrix} \phi_m(z) \quad (3.28)$$

Sendo A , B e C são constantes que expõem a amplitude dos deslocamentos axial (u), circunferencial (v) e radial (w) respectivamente. A parcela $\phi_m(z)$ representa as funções modais longitudinais, com as condições de contorno nas extremidades da casca. As funções de viga usualmente são empregadas neste caso e α_m é um coeficiente que depende da condição de contorno. O número de meias-ondas longitudinais é m e o número de ondas circunferenciais é n .

Para a vibração livre de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada em suas extremidades sem restrição axial na direção longitudinal (z) é empregado o modo de vibração de uma viga bi apoiada, de coeficiente $\alpha_m = m\pi/L$ e $\phi_m = \operatorname{sen}(m\pi z/L)$. Assim, após a substituição dessa equação de deformadas modal no conjunto de equações (3.28), a solução para a casca apoiada-apoiada fica na forma:

$$u(z, \phi) = A \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.29)$$

$$v(z, \phi) = B \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \operatorname{sen}[n(\phi - \psi)] \quad (3.30)$$

$$w(z, \phi) = C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.31)$$

As equações mostradas devem satisfazer as condições de contorno do problema. Assim, os deslocamentos e rotações impostas na análise para casca apoiada-apoiada sem restrição axial são dadas por:

$$w(0, \phi, t) = 0 \quad (3.32)$$

$$v(0, \phi, t) = 0 \quad (3.33)$$

$$M_z(0, \phi, t) = 0 \quad (3.34)$$

$$N_z(0, \phi, t) = 0 \quad (3.35)$$

$$w(L, \phi, t) = 0 \quad (3.36)$$

$$v(L, \phi, t) = 0 \quad (3.37)$$

$$M_z(L, \phi, t) = 0 \quad (3.38)$$

$$N_z(L, \phi, t) = 0 \quad (3.39)$$

Vale ressaltar que uma vez satisfeitas às condições de contorno equações (3.32) a (3.39), é possível substituir as equações soluções dos deslocamentos (3.29), (3.30) e (3.31) nas equações das deformações (3.1 a 3.8) e, que por sua vez, são inseridas nas equações dos esforços (3.20 a 3.25). Com isso, os esforços são dados por:

$$\beta_\phi = \frac{1}{R} (B + nC) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \operatorname{sen}[n(\phi - \psi)] \quad (3.40)$$

$$\beta_z = -\frac{m\pi}{L} C \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.41)$$

$$\chi_{z\phi} = \frac{m\pi}{LR} (B + 2nC) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \operatorname{sen}[n(\phi - \psi)] \quad (3.42)$$

$$\chi_\phi = \frac{n}{R^2} (B + nC) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.43)$$

$$\chi_{zz} = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_{z\phi} = \left(\frac{m\pi}{L} B - \frac{n}{R} A \right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \text{sen}[n(\phi - \psi)] \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{R} (Bn + C) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_{zz} = -A \frac{m\pi}{L} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.47)$$

$$M_{z\phi} = \frac{D(1-\nu)}{2} \frac{m\pi}{LR} (B + 2nC) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \text{sen}[n(\phi - \psi)] \quad (3.48)$$

$$M_{\phi\phi} = D \left\{ \frac{n}{R^2} B + \left[\frac{n^2}{R^2} + \nu \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] C \right\} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.49)$$

$$M_{zz} = D \left\{ \frac{\nu n}{R^2} B + \left[\nu \frac{n^2}{R^2} + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] C \right\} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.50)$$

$$N_{z\phi} = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{m\pi}{L} B - \frac{n}{R} A \right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \text{sen}[n(\phi - \psi)] \quad (3.51)$$

$$N_{\phi\phi} = K \left(\frac{n}{R} B + \frac{1}{R} C - \nu \frac{m\pi}{L} A \right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.52)$$

$$N_{zz} = K \left(\frac{\nu n}{R} B + \frac{\nu}{R} C - \nu \frac{m\pi}{L} A \right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.53)$$

$$Q_z = D \frac{m\pi}{L} \left\{ \frac{n}{R^2} \frac{1+\nu}{2} B + \left[\left(\frac{n}{R} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] C \right\} \cos\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (3.54)$$

$$Q_\phi = -\frac{D}{R} \left\{ \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] B + n \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] C \right\} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z \right) \text{sen}[n(\phi - \psi)] \quad (3.55)$$

Substituindo finalmente as equações dos esforços (3.40) a (3.55) nas equações governantes diferenciais de equilíbrio dinâmico (3.17), (3.18) e (3.19), podem-se desenvolver essas mesmas equações da seguinte forma:

$$\left\{ \rho h \omega^2 - K \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] \right\} A + \left(K \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) B + \left(K \frac{\nu}{R} \frac{m\pi}{L} \right) C = 0 \quad (3.56)$$

$$\left(K \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L}\right) A + \left\{ \rho h \omega^2 - \left(K + \frac{D}{R^2}\right) \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right] \right\} B + \left\{ -\frac{K}{R} \frac{n}{R} - \frac{D}{R} \frac{n}{R} \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right] \right\} C = 0 \quad (3.57)$$

$$\left(\frac{nK}{R} \frac{m\pi}{L}\right) A + \left\{ -\frac{K}{R} \frac{n}{R} - \frac{D}{R} \frac{n}{R} \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right] \right\} B + \left\{ \rho h \omega^2 - D \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right]^2 - \frac{K}{R^2} \right\} C = 0 \quad (3.58)$$

Ou na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \rho h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \rho h \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.59)$$

Em que:

$$k_{11} = K \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right] \quad (3.60)$$

$$k_{12} = k_{21} = K \frac{1+\nu}{2} \frac{m\pi}{L} \frac{n}{R} \quad (3.61)$$

$$k_{13} = k_{31} = K \frac{\nu}{R} \frac{m\pi}{L} \quad (3.62)$$

$$k_{22} = \left(K + \frac{D}{R^2}\right) \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right] \quad (3.63)$$

$$k_{23} = k_{32} = -\frac{K}{R} \frac{n}{R} - \frac{D}{R} \frac{n}{R} \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right] \quad (3.64)$$

$$k_{33} = D \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right]^2 + \frac{K}{R^2} \quad (3.65)$$

Para uma solução não trivial o determinante da matriz apresentada na Equação (3.59) tem que ser igual à zero, no qual se obtém o seguinte polinômio característico. No Apêndice B se podem visualizar algumas etapas na obtenção do polinômio característico.

$$\omega^6 + a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3 = 0 \quad (3.66)$$

onde:

$$a_1 = -\frac{1}{\rho h} (k_{11} + k_{22} + k_{33}) \quad (3.67)$$

$$a_2 = \frac{1}{(\rho h)^2} (k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33} + k_{11}k_{22} - k_{23}^2 - k_{12}^2 - k_{13}^2) \quad (3.68)$$

$$a_3 = \frac{1}{(\rho h)^3} (k_{11}k_{23}^2 + k_{22}k_{13}^2 + k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{23}k_{13} - k_{11}k_{22}k_{33}) \quad (3.69)$$

Por fim, as raízes da equação característica que caracterizam as frequências naturais da casca cilíndrica são dadas por:

$$\omega_{1m,n} = \sqrt{-\frac{2}{3}\sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{a_1}{3}\right)} \quad (3.70)$$

$$\omega_{2m,n} = \sqrt{-\frac{2}{3}\sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3} - \frac{a_1}{3}\right)} \quad (3.71)$$

$$\omega_{3m,n} = \sqrt{-\frac{2}{3}\sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos\left(\frac{\alpha + 4\pi}{3} - \frac{a_1}{3}\right)} \quad (3.72)$$

Onde:

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{27a_3 + 2a_1^3 - 9a_1a_2}{2\sqrt{(a_1^2 - 3a_2)^3}} \quad (3.73)$$

Segundo Soedel (2005), as três frequências naturais são associadas a cada combinação de m ($m=1, 2, 3\dots$) e n ($n=1, 2, 3\dots$). Com isso, a frequência mais baixa está associada ao modo em que a componente radial (w) predomina, por outro lado, as outras duas componentes apresentam as maiores frequências. Por fim, com base no sistema de equações (3.59), resolvendo A e B em função da variável C tem-se que as formas modais combinadas que são associadas as três frequências naturais são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega^2 - k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & \rho h \omega^2 - k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \end{Bmatrix} = -C_i \begin{Bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

Desta forma, expandindo as equações no sistema matricial (3.74) tem-se as equações da seguinte forma:

$$\frac{A_i}{C_i} = - \frac{k_{13}(\rho h \omega_{imn}^2 - k_{22}) - k_{12}k_{23}}{(\rho h \omega_{imn}^2 - k_{11})(\rho h \omega_{imn}^2 - k_{22}) - k_{12}^2} \quad (3.75)$$

$$\frac{B_i}{C_i} = - \frac{k_{23}(\rho h \omega_{imn}^2 - k_{11}) - k_{21}k_{13}}{(\rho h \omega_{imn}^2 - k_{11})(\rho h \omega_{imn}^2 - k_{22}) - k_{12}^2} \quad (3.76)$$

Por fim, C_i sendo uma constante qualquer adotada, as formas modais combinadas que são associadas as três frequências naturais são:

$$\left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\}_{i,m,n} = C_{i,m,n} \left\{ \begin{matrix} \frac{A_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} \cos\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \cos[n(\phi-\psi)] \\ \frac{B_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \text{sen}[n(\phi-\psi)] \\ \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \cos[n(\phi-\psi)] \end{matrix} \right\} \quad (3.77)$$

3.2.1.2 – Teoria de Sharma e Johns

Nesta parte, apresentam-se os procedimentos realizados na técnica analítica apresentada por Sharma & Johns (1971), no qual o problema foi formulado usando a técnica de Rayleigh-Ritz para obter uma solução analítica aproximada para diferentes condições de contorno a partir das funções modais de viga e das deformações assumidas para a casca embasadas na teoria de Flugge (1934).

O grande diferencial dessa técnica é caracterizado por supor que a deformação circunferencial e a cisalhante na casca é zero. Neste método, inicialmente os deslocamentos na superfície da casca assumidos para a respectiva direção longitudinal, circunferencial e radial são:

$$u = -A \frac{R}{n^2} \varphi'_m(z) \cos(n\phi) \cos(\omega t) \quad (3.78)$$

$$v = -B \frac{1}{n} \varphi_m(z) \text{sen}(n\phi) \cos(\omega t) \quad (3.79)$$

$$w = C \varphi_m(z) \cos(n\phi) \cos(\omega t) \quad (3.80)$$

Onde ω é a frequência natural circular da casca, n é o número de ondas circunferenciais, m é o número de semi-ondas longitudinais, φ_m é a deformada modal de viga para diferentes condições de contorno, ϕ é o ângulo circunferencial da casca, R é o raio, t é o tempo e A, B e

C são as constantes de amplitude modal. A partir da equação da energia potencial de deformação e da energia cinética da casca, aplica-se a técnica de Rayleigh-Ritz, na qual determina a frequência natural da casca igualando-se o determinante da seguinte matriz a zero.

$$\begin{bmatrix} A_{11}-\Delta I_2 & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22}-\Delta & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33}-\Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.81)$$

Em que:

$$A_{11} = \lambda_m^2 + (1+\beta)(1-\nu)n^2 I_2 / 2 \quad (3.82)$$

$$A_{12} = -\nu n \lambda_m I_1 - (1-\nu)n \lambda_m I_2 / 2 \quad (3.83)$$

$$A_{13} = -\nu \lambda_m I_1 + \beta \lambda_m \left[-\lambda_m^2 + (1-\nu)n^2 I_2 / 2 \right] \quad (3.84)$$

$$A_{22} = n^2 + (1+3\beta)(1-\nu)\lambda_m^2 I_2 / 2 \quad (3.85)$$

$$A_{23} = n + \beta n \lambda_m^2 \left[\nu I_1 + 3(1-\nu)I_2 / 2 \right] \quad (3.86)$$

$$A_{33} = 1 + \beta \left[\lambda_m^4 + (n^2 - 1)^2 + 2\nu n^2 \lambda_m^2 I_1 + 2(1-\nu)n^2 \lambda_m^2 I_2 \right] \quad (3.87)$$

Onde:

$$\lambda_m = P_m R \quad (3.88)$$

$$P_m = \frac{\lambda_i}{L} \quad (3.89)$$

$$I_1 = \frac{1}{L} \int_0^L P_m^2 \left[\int \varphi_m(z) dz \right]^2 dz \quad (3.90)$$

$$I_2 = \frac{1}{L} \int_0^L [\varphi_m'(z)]^2 dz \quad (3.91)$$

Destaca-se que λ_i é um coeficiente obtido com base na equação transcendental para cada condição de contorno. As integrais representadas pelas equações (3.90) e (3.91) dependem da função de viga assumida para o modo longitudinal, ou seja, uma vez substituída as diferentes

funções de viga para respectivas condições de contorno, pode-se então determinar a solução analítica para a casca cilíndrica. Tem-se ainda que, resolvendo o determinante da matriz igual à zero, o polinômio característico com base no parâmetro de frequência é dado por:

$$\Delta = \lambda_{m,n}^2 = \frac{\lambda_m^4 + \beta n^2 \lambda_m^2 \left[\lambda_m^2 n^2 + 2\nu n^2 (n^2 - 1) I_1 + 2(1 - \nu) (n^2 - 1)^2 I_2 \right] + \beta n^4 (n^2 - 1)^2}{\lambda_m^2 I_2 + n^2 (n^2 + 1)} \quad (3.92)$$

Sendo:

$$\beta = \frac{h^2}{12R^2} \quad (3.93)$$

$$\Delta = \frac{\rho R^2 (1 - \nu^2) \omega^2}{E} \quad (3.94)$$

A frequência natural adimensional pode também ser expressa em Hertz, dada por:

$$F_{m,n} = \frac{\lambda_{m,n}}{2\pi R} \left[\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)} \right]^{1/2} \quad (3.95)$$

Sendo m o número de semi-ondas longitudinais, n o número de ondas circunferenciais, E é o módulo de elasticidades, R é o raio médio da superfície, ρ é a massa específica e ν é o coeficiente de Poisson. Para a solução analítica, parte-se dos modos de viga e dos respectivos coeficientes das equações transcendentais apresentada por Blevins (1979).

Tabela 3.1 – Modos de vibração longitudinal.

Condição de contorno	Modo de vibração longitudinal (φ_m)
Apoiada-Apoiada	$\text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$
Apoiada-Livre	$\cosh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) + \cos\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \sigma_i \left[\text{senh}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) + \text{sen}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) \right]$
Engastada-Engastada	$\cosh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \sigma_i \left[\text{senh}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) \right]$
Engastada-Livre	$\cosh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \sigma_i \left[\text{senh}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) \right]$
Engastada-Apoiada	$\cosh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \sigma_i \left[\text{senh}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) \right]$
Livre-Livre	$\cosh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) + \cos\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \sigma_i \left[\text{senh}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) + \text{sen}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) \right]$

Os modos de viga são correlacionados ao efeito de flexão na direção longitudinal, porém quando incorporado nas equações da casca fornece, juntamente com as deformações assumidas para os modos circunferenciais, a deformada completa para a casca cilíndrica para os diferentes números de modos m e n sob as respectivas condições de contorno. A Tabela 3.2 apresenta os coeficientes modais que são empregados na obtenção das frequências naturais da casca para diferentes condições de contorno.

Tabela 3.2 – Coeficientes modais longitudinais.

Condição de contorno	λ_i	Σ_i
Apoiada-Apoiada	$m\pi$	-
	3,9265	1,000777304
	7,0686	1,000001445
Apoiada-Livre	10,2102	1,0
	13,3518	1,0
	16,4934	1,0
	$(4m+1)\pi/4$	1,0
	4,7300	0,982502215
	7,8532	1,000777312
Engastada-Engastada	10,9955	0,999966450
	14,1372	1,000001450
	17,2786	0,999999937
	$(2m+1)\pi/2$	1,0
	1,8751	0,734095514
	4,6941	1,018467319
Engastada-Livre	7,8548	0,999224497
	10,9955	1,000033553
	14,1372	0,999998550
	$(2m-1)\pi/2$	1,0
	3,9266	1,000777304
	7,0686	1,000001445
Engastada-Apoiada	10,2102	1,0
	13,3518	1,0
	16,4934	1,0
	$(4m-1)\pi/4$	1,0
	4,7300	0,982502215
	7,8532	1,000777312
Livre-Livre	10,9956	0,999966450
	14,1372	1,000001450
	17,2788	0,999999937
	$(2m-1)\pi/2$	1,0

A Tabela 3.3 apresenta a resolução das integrais I_1 e I_2 apresentadas nas equações (3.90) e (3.91) respectivamente.

Tabela 3.3 – Valores dos parâmetros I_1 e I_2 obtidos a partir dos modos de viga.

Condição de contorno	I_1 e I_2	M				
		1	2	3	4	5
Apoiada-Apoiada	I_1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	I_2	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Apoiada-Livre	I_1	0.7467	0.8585	0.9021	0.9251	0.9394
	I_2	1.7662	1.4244	1.2938	1.2247	1.1819
Engastada-Engastada	I_1	0.5499	0.7467	0.8180	0.8585	0.8843
	I_2	0.5499	0.7467	0.8180	0.8585	0.8843
Engastada-Livre	I_1	-0.2441	0.6033	0.7440	0.8182	0.8585
	I_2	1.3219	1.4712	1.2529	1.1820	1.1415
Engastada-Apoiada	I_1	0.7467	0.8585	0.9021	0.9251	0.9394
	I_2	0.7467	0.8585	0.9021	0.9251	0.9394
Livre-Livre	I_1	0.5499	0.7467	0.8180	0.8585	0.8843
	I_2	2.2116	1.7662	1.5456	1.4244	1.3473

No Apêndice C pode-se visualizar o cálculo das integrais I_1 e I_2 para a condição de contorno apoiada-apoiada. Assim, é possível determinar o coeficiente $\lambda_{m,n}$ e determinar as frequências naturais para uma casca cilíndrica com as condições de vinculação mostradas.

3.2.1.3 – Abordagem teórica através de métodos de energia

Neste item é apresentada uma forma de obtenção da resposta dinâmica em vibração livre da casca cilíndrica desacoplada com a resolução do problema através do cálculo variacional. O princípio deste método foi estudado no livro de Szilard (2004), as funções de energia da casca cilíndrica foram assumidas com base na teoria de Flugge (1973) e atribuídas às funções modais de viga apresentadas por Blevins (1979) para simular as diferentes condições de contorno. O procedimento é semelhante ao abordado por Sharma e Johns (1971), porém agora não são desprezadas as deformações circunferenciais e cisalhantes da casca.

O cálculo variacional proporciona abordar analiticamente problemas mais complexos de uma forma mais simples, uma vez que a manipulação algébrica é mais facilmente discorrida. Em outras palavras, partindo das equações da energia potencial e cinética da casca cilíndrica já encontrada na literatura pode-se, através do princípio da energia mínima, determinar a resolução do problema de autovalor e autovetor. Ressalta-se que as denominações das dimensões geométricas da casca são as mesmas adotadas nos itens anteriores da teoria de Soedel (2005) e de Sharma e Johns (1971).

De acordo com Szilard (2004), esses métodos diretos de cálculo de variação, também chamados de métodos de energia, compreendem um corpo de técnicas de aproximação introduzidas principalmente pelos cientistas Rayleigh, Ritz, Galerkin, Kantorovich, Lagrange e Trefftz.

Um método de energia desenvolvido por Ritz aplica o princípio de energia potencial mínima, caracterizado pelo fato de que todos os deslocamentos que satisfaçam as condições de contorno são as deflexões procuradas pertinentes para as condições de equilíbrio estável. Decorrente disso, este procedimento de minimização produz equações algébricas simultâneas nos coeficientes indeterminados A, B, C, dos quais os parâmetros desconhecidos podem ser calculados (Szilard, 2004).

Nesse sentido, a energia potencial de deformação (E_p) de uma casca cilíndrica delgada, derivadas por Flugge (1973), é dada por:

$$E_P = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\sigma_z \varepsilon_z + \sigma_\phi \varepsilon_\phi + \sigma_{z\phi} \varepsilon_{z\phi}^* \right) dv \quad (3.96)$$

Uma vez que as tensões e deformações são baseadas na Lei de Hooke, e ainda, que assumindo que as deformações finais são a soma das deformações de membrana e flexionais, tem-se que:

$$dv = R dz d\phi dr \quad (3.97)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_\phi) \quad (3.98)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\phi + \nu \varepsilon_z) \quad (3.99)$$

$$\sigma_{z\phi} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{z\phi}^* \quad (3.100)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{zz} + rk_z \quad (3.101)$$

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_{\phi\phi} + rk_\phi \quad (3.102)$$

$$\varepsilon^*_{z\phi} = \varepsilon_{z\phi} + rk_{z\phi} \quad (3.103)$$

Em consequência, substituindo as equações das deformações (3.101) a (3.103) nas equações que expressam a relação tensão vs deformação (3.98) a (3.100), e por sua vez, substituindo na equação (3.96), a energia potencial de deformação é dada por:

$$E_P = \frac{ERh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right)^2 + \frac{2\nu}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right) + \frac{1}{2R^2} (1-\nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} + R \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{h^2}{12R^2} \left[R^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{\partial v}{\partial \phi} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dzd\phi \quad (3.104)$$

Em que u , v e w são, respectivamente, os deslocamentos longitudinais, circunferencial e radiais assumidos para a casca. Da mesma forma, a expressão para a energia cinética da casca é dada por:

$$E_C = \frac{\rho Rh}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dzd\phi \quad (3.105)$$

Vale ressaltar que as deduções das equações de energia são discutidas no Apêndice D. Uma vez dispondo das energias potencial e cinética da casca, a função Lagrange é definida da seguinte forma:

$$\Gamma = E_{C\text{máx}} - E_{P\text{máx}} \quad (3.106)$$

Assumindo os deslocamentos u , v e w pelas equações (3.14) a (3.16), a energia cinética e potencial máxima da casca são dadas pelas seguintes equações.

$$E_{C\text{máx}} = \frac{\omega^2 \rho Rh}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ [U(z, \phi)]^2 + [V(z, \phi)]^2 + [W(z, \phi)]^2 \right\} dzd\phi \quad (3.107)$$

$$E_{P\text{máx}} = \frac{ERh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} + W \right)^2 + \frac{2\nu}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} + W \right) + \frac{1}{2R^2} (1-\nu) \left(\frac{\partial U}{\partial \phi} + R \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{h^2}{12R^2} \left[R^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} - \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} - \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dzd\phi \quad (3.108)$$

Por fim, uma vez assumido os deslocamentos da casca cilíndrica e aplicados nas equações de energia máximas mostradas acima, pode-se empregar o princípio da energia mínima e determinar as equações que expressam as frequências naturais realizando a derivada da

função Lagrange em relação aos coeficientes de amplitude que se encontram nas funções deslocamentos, ou seja, os coeficientes A, B e C. Tal feito fornece um conjunto de equações que, quando colocado na forma matricial representa o problema de autovalores da casca. O procedimento é dado da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial A} = 0 \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial B} = 0 \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial C} = 0 \quad (3.111)$$

Deve-se notar que durante a diferenciação parcial todos os coeficientes são tomados constantes. Por fim, as três equações acima na forma matricial representam o sistema:

$$\left([K] - \omega^2 [M] \right) \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.112)$$

Portanto, uma vez assumido diferentes funções modais de viga, vistas na Tabela 3.2, para simular as deformadas longitudinais e estas aplicadas nas equações de energia através de uma rotina elaborada em *software* MAPLE, foi possível impor as dimensões geométricas e propriedades da casca estudada e, conseqüentemente, determinar as frequências naturais analíticas. Foram abordadas as equações para diferentes condições de contorno, no qual satisfizeram com as respectivas condições geométricas. Por fim, os resultados foram obtidos e comparados com a teoria de Sharma & Johns (1971) e com os valores encontrados pelo método dos elementos finitos.

3.3 - FLUIDO

3.3.1 - Vibração livre

Neste capítulo é apresentada a resolução da equação de propagação de onda. Desta forma, a cavidade acústica cilíndrica tem comprimento H , raio R , ângulo radial θ e são delimitada nas laterais por paredes rígidas com ambas as extremidades (topo/base) abertas.

A análise do comportamento acústico de cavidades está relacionada ao comprimento das ondas acústicas juntamente com as dimensões do meio, no qual apresentam frequências naturais e modos acústicos. A resolução dos problemas e obtenção dos modos acústicos pode ser descritos tendo como base na função potencial de velocidade e da equação de propagação da onda em um meio fluido, sendo apresentada por diversos autores e repertoriados no presente trabalho com base nos estudos realizados Gibert (1988), Soedel (2005), Paula (2003), Paidoussis (2004) e por Mendes (2013). A equação de propagação de onda em um meio acústico é dada por:

$$\nabla^2 \bar{\varphi} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} \quad (3.113)$$

Esta expressão é também conhecida como equação de Helmholtz, no qual $\bar{\varphi}$ é a função potencial e c definido por:

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_f}} \quad (3.114)$$

onde β é o módulo adiabático, ρ_f é a densidade do fluido, $\bar{\varphi}$ é a função potencial de velocidade e $\nabla^2 \bar{\varphi}$ é o operador Laplaciano da função potencial. Para a análise de uma cavidade acústica cilíndrica é conveniente o emprego do operador em coordenadas cilíndricas, dada da seguinte forma:

$$\nabla^2 \bar{\varphi} = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} \quad (3.115)$$

Desta forma, substituindo o operador, a equação de Helmholtz é dada por:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} \quad (3.116)$$

Uma vez que movimentos irrotacionais de fluidos devem satisfazer a equação mostrada, para a resolução a técnica de separação de variáveis é utilizada, assumindo a solução como o produto de duas funções dependentes do espaço e do tempo.

$$\bar{\varphi}(r, \theta, z, t) = F(r, \theta, z) \dot{T}(t) \quad (3.117)$$

Em que $F(r, \theta, z)$ é o modo de vibração da função potencial e $T(t)$ é a parcela do tempo na equação. Vale ressaltar que essa variação de pressão na cavidade pode ser também descrita em termos do potencial de velocidade, sendo dada por:

$$P(r, \theta, z, t) = -\rho_f \frac{\partial \bar{\varphi}(r, \theta, z, t)}{\partial t} \quad (3.118)$$

Desta forma, substituindo à equação (3.117) na equação (3.118) a variação de pressão final na cavidade é dada pela seguinte equação.

$$P(r, \theta, z, t) = \rho_f \omega^2 F(r, \theta, z) e^{j\omega t} \quad (3.119)$$

Desta forma, substituindo a equação (3.117) na equação governante (3.116) e desenvolvendo a simplificação nas derivadas (ver Apêndice E) têm-se a seguinte equação separada no domínio do espaço e do tempo.

$$\underbrace{\frac{1}{F} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)}_{\text{Domínio do Espaço}} = \underbrace{\frac{\ddot{T}}{c^2 T}}_{\text{Domínio do Tempo}} = -v^2 \quad (3.120)$$

A parte no domínio do tempo da equação (3.120) é função apenas do tempo e pode ser escrita:

$$\ddot{T} + v^2 c^2 T = 0 \quad (3.121)$$

Assume-se a resposta harmônica, então a equação (3.121) é escrita da seguinte forma:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (3.122)$$

Onde ω^2 é a frequência natural definida por:

$$\Omega = c v \quad (3.123)$$

Resolvendo a equação (3.122) a solução é dada por:

$$T(t) = A_r \cos(\omega t) + B_r \text{sen}(\omega t) = e^{j\omega t} \quad (3.124)$$

Em que $e^{j\omega t}$ é a parcela do tempo na equação. A função mostrada se caracteriza por uma separação de variáveis, em que e é à base dos logaritmos neperianos, $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, ω é a frequência natural de vibração e t é o tempo.

Por outro lado, a parte no domínio do espaço da equação (3.120) é resolvida da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + v^2 F = 0 \quad (3.125)$$

Na resolução da equação (3.125) é aplicada novamente a técnica de separação de variáveis, de maneira que, a solução assumida separa em duas funções independentes para a direção radial e longitudinal da cavidade acústica.

$$F(r, \theta, z) = G(r, \theta)Z(z) \quad (3.126)$$

Substituindo a equação (3.126) na equação (3.125) e realizando as respectivas derivadas, a equação do domínio do espaço pode ser escrita da seguinte forma:

$$-\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + v^2 G \right) = \frac{Z''}{Z} = -k^2 \quad (3.127)$$

onde $-k^2$ é a constante de separação de variáveis. Assim, reescrevendo o termo da equação (3.127) em função da coordenada z tem-se a seguinte equação.

$$Z'' + k^2 Z = 0 \quad (3.128)$$

Resolvendo a solução da equação (3.128) é dada por:

$$Z(z) = A_z \cos(kz) + B_z \text{sen}(kz) \quad (3.129)$$

No topo e na base da cavidade acústica a condições de contorno são assumidas aberta-aberta, e por isso, a componente de pressão e modo de vibração da função potencial deve ser igual à zero nesses limites. A equação (3.130) a seguir mostra matematicamente a condição citada.

$$\underbrace{[P]_{z=0} = [F]_{z=0} = [Z(z)]_{z=0}}_{\text{Base da cavidade cilíndrica}} = \underbrace{[P]_{z=H} = [F]_{z=H} = [Z(z)]_{z=H}}_{\text{Topo da cavidade cilíndrica}} = 0 \quad (3.130)$$

Uma vez substituída às condições de contorno a solução é dada por:

$$Z(z) = B_z \text{sen} \left(\frac{m \pi z}{H} \right) \quad (3.131)$$

Onde a partir das substituições e desenvolvimento das equações, o parâmetro k é dado por:

$$k = \frac{\bar{m} \pi}{H} \quad (3.132)$$

Sendo \bar{m} o número de nodos longitudinais, z a coordenada na direção longitudinal e H a altura da cavidade acústica.

Na resolução da Equação (3.127) para a função dependente de G os parâmetros são dados por:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + v^2 G - k^2 G = 0 \quad (3.133)$$

Define-se $\eta^2 = v^2 - k^2$, então a equação (3.133) é dada na forma:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + \eta^2 G = 0 \quad (3.134)$$

Para a resolução dessa equação é aplicada novamente a técnica de separação de variáveis, de maneira que, a solução é assumida:

$$G(r, \theta) = R(r) \bar{\theta}(\theta) \quad (3.135)$$

Após aplicar à separação de variáveis, substituindo à equação (3.135) em (3.134) a equação é dada por:

$$-\frac{r^2}{R} \left(R'' + \frac{1}{r} R' + \eta^2 R \right) = \frac{\bar{\theta}''}{\bar{\theta}} = -x^2 \quad (3.136)$$

Reescrevendo o lado direito da equação (3.136) tem-se que:

$$\bar{\theta}'' + x^2 \bar{\theta} = 0 \quad (3.137)$$

Resolvendo a equação (3.137) a solução é dada por:

$$\bar{\theta}(\theta) = A_\theta \cos(\bar{n} \theta) + B_\theta \text{sen}(\bar{n} \theta) \quad (3.138)$$

Assumindo a pressão sonora contínua em θ , têm-se as seguintes condições de contorno que são aplicadas na equação (3.138).

$$[P]_{\theta=0} = [P]_{\theta=2\pi} \quad (3.139)$$

$$[P]_{\theta=0} = [F]_{\theta=0} = [G]_{\theta=0} = [\bar{\theta}]_{\theta=0} \quad (3.140)$$

$$[P]_{\theta=2\pi} = [F]_{\theta=2\pi} = [G]_{\theta=2\pi} = [\bar{\theta}]_{\theta=2\pi} \quad (3.141)$$

$$[\bar{\theta}]_{\theta=0} = [\bar{\theta}]_{\theta=2\pi} \quad (3.142)$$

Aplicando as condições de contorno a solução é:

$$\bar{\theta}(\theta) = A_{\theta} \cos[\bar{n}(\theta - \bar{\psi})] \quad (3.143)$$

em que \bar{n} é o número de diâmetros nodais e $\bar{\psi}$ é o ângulo de fase modal.

Na resolução da equação (3.136) para a função dependente de R os parâmetros são reescritos e dados por:

$$r^2 R'' + rR' + (r^2 \eta^2 - x^2)R = 0 \quad (3.144)$$

A equação acima é conhecida como equação diferencial de Bessel e tem seguinte solução:

$$R(r) = A_r J_{\bar{n}}(\eta r) + B_r Y_{\bar{n}}(\eta r) \quad (3.145)$$

onde $J_{\bar{n}}$ é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem \bar{n} , $Y_{\bar{n}}$ é a função de Bessel de segundo tipo e ordem \bar{n} . Para a cavidade acústica cilíndrica de paredes rígidas a velocidade da partícula de fluido no contorno deve ser igual à zero. Desta forma, temos as seguintes condições de contorno.

$$\left[\frac{\partial P}{\partial r} \right]_{r=R} = \left[\frac{\partial F}{\partial r} \right]_{r=R} = \left[\frac{\partial G}{\partial r} \right]_{r=R} = 0 \quad (3.146)$$

A partir das condições de contorno e dos pontos de singularidade das funções de Bessel, as parcelas das funções de Bessel de segundo tipo devem ser eliminadas, pois estas não satisfazem a condição citada. Assim, a solução é dada por:

$$R(r) = A_r J_{\bar{n}}\left(\frac{\chi_i}{R} r\right) \quad (3.147)$$

onde:

$$\chi_i^- = \eta R \quad (3.148)$$

Para determinar a solução final para o campo de pressão no interior da casca cilíndrica é inicialmente substituída às equações (3.147) e (3.143) na equação (3.135), sendo esta dada por:

$$G(r, \theta) = A_r J_n^- \left(\frac{\chi_i^-}{R} r \right) A_\theta \cos \left[\bar{n} (\theta - \bar{\psi}) \right] \quad (3.149)$$

Esta equação (3.149), juntamente com a equação (3.147) pode ser substituída na equação (3.126), sendo esta dada agora por:

$$F(r, \theta, z) = A_r J_n^- \left(\frac{\chi_i^-}{R} r \right) A_\theta \cos \left[\bar{n} (\theta - \bar{\psi}) \right] B_z \text{sen} \left(\frac{\bar{m} \pi z}{H} \right) \quad (3.150)$$

A função potencial do fluido final pode ser obtida substituindo a equação (3.150) e a derivada da equação (3.124) na equação (3.117), ficando da seguinte forma:

$$\bar{\varphi}(r, \theta, z, t) = A_r J_n^- \left(\frac{\chi_i^-}{R} r \right) A_\theta \cos \left[\bar{n} (\theta - \bar{\psi}) \right] B_z \text{sen} \left(\frac{\bar{m} \pi z}{H} \right) j \omega e^{j\omega t} \quad (3.151)$$

Finalmente a pressão hidrodinâmica do fluido pode ser encontrada substituindo a equação (3.151) na equação (3.119).

$$P(r, \theta, z, t) = \rho_f \omega^2 A_r J_n^- \left(\frac{\chi_i^-}{R} r \right) A_\theta \cos \left[\bar{n} (\theta - \bar{\psi}) \right] B_z \text{sen} \left(\frac{\bar{m} \pi z}{H} \right) e^{j\omega t} \quad (3.152)$$

Destaca-se que os três índices \bar{i} , \bar{m} e \bar{n} são os respectivos modos acústicos nas três dimensões.

3.3.1.1 – Frequências naturais

Por fim, substituindo na relação $\eta^2 = v^2 - k^2$ as equações (3.132) e (3.148) tem-se o parâmetro v dado por:

$$v = \sqrt{\left(\frac{\bar{m} \pi}{H} \right)^2 + \left(\frac{\chi_{i,\bar{n}}^-}{R} \right)^2} \quad (3.153)$$

Finalmente, substituindo à equação (3.153) na equação (3.123), as frequências naturais da cavidade são expressas dadas da seguinte forma:

$$\omega = c \sqrt{\left(\frac{m \pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{\chi_{i,n}}{R}\right)^2} \quad (3.154)$$

Após análise das funções de Bessel tem-se:

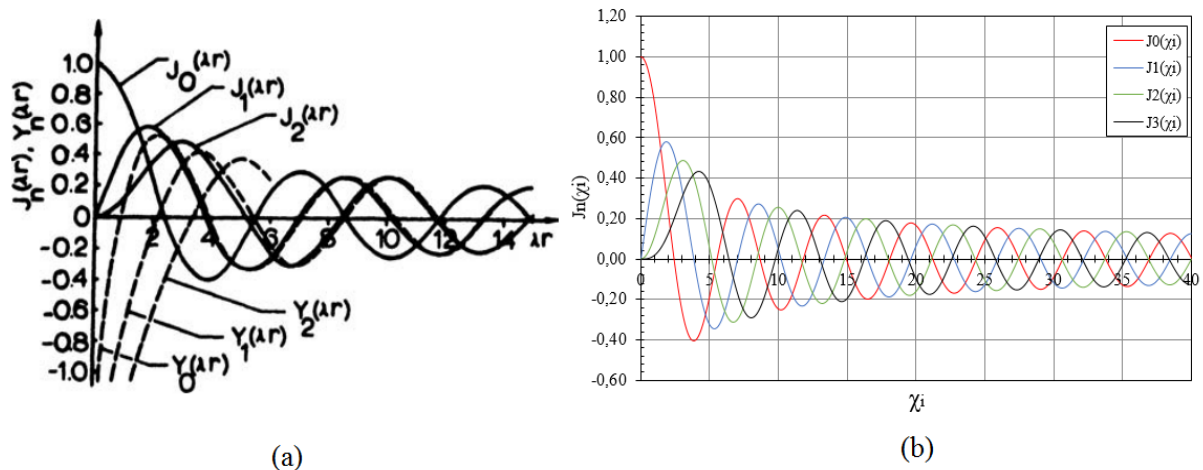


Figura 3.3 – Ilustração das funções de Bessel: (a) Por Soedel (2005), (b) Presente trabalho.

3.4 - INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

3.4.1 - Vibração livre

Neste capítulo é apresentada a forma de acoplar a casca e o fluido. Para isto, parte-se da teoria de Soedel (2005) e da resolução da equação de propagação de onda, sendo em alguns momentos necessário retomar algumas de suas equações já mostradas.

A condição fluido-estrutura, conforme já comentando na revisão bibliográfica, parte de dois princípios: A pressão radial na superfície da casca é igual à pressão no contorno da cavidade e que a velocidade radial na superfície da casca é igual à velocidade na superfície da cavidade acústica (condição de impenetrabilidade).

Nesse sentido, inicialmente parte-se da condição de impermeabilidade, mostrada matematicamente pela equação a seguir:

$$\underbrace{\frac{\partial w(z, \phi, t)}{\partial t}}_{\text{Velocidade radial da casca}} = \underbrace{v_r(R, \theta, z, t)}_{\text{Velocidade radial na superfície da cavidade}} \quad (3.155)$$

Partindo-se da mecânica dos fluidos básica, um movimento de um fluido é fisicamente possível quando este é irrotacional, ou seja, uma vez que o campo de velocidade é representado pela função potencial que atende a seguinte equação.

$$\vec{V} = \nabla \bar{\varphi} \quad (3.156)$$

Ou na forma de vetores unitários em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{V} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \vec{a}_r + \frac{\partial \bar{\varphi}}{r \partial \theta} \vec{a}_\theta + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \vec{a}_z \quad (3.157)$$

Assumindo somente a componente de velocidade radial da equação (3.157) tem-se que:

$$v_r(R, \theta, z, t) = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \quad (3.158)$$

Substituindo a equação (3.158) na equação (3.155) tem-se que:

$$\frac{\partial w(z, \phi, t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\varphi}(r, \theta, z, t)}{\partial r} \quad (3.159)$$

Conhecendo o deslocamento radial da casca através da substituição da equação (3.31) na equação (3.16), e ainda, sabendo que a função potencial é representada pela equação (3.151), pode-se então substituir as equações citadas na condição fluido-estrutura, ou seja, na equação (3.159), sendo esta agora dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(C \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L} z \right) \cos[n(\phi - \psi)] e^{j\omega t} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(A_r J_n \left(\frac{\chi_i}{R} r \right) A_\theta \cos[\bar{n}(\theta - \bar{\psi})] B_z \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{m} \pi z}{H} \right) j\omega e^{j\omega t} \right) \quad (3.160)$$

Realizando as derivadas funções, a equação (3.160) pode ser escrita da seguinte forma:

$$j\omega C \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L} z \right) \cos[n(\phi - \psi)] e^{j\omega t} = j\omega A_r J_n' \left(\frac{\chi_i}{R} r \right) A_\theta \cos[\bar{n}(\theta - \bar{\psi})] B_z \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{m} \pi z}{H} \right) e^{j\omega t} \quad (3.161)$$

Segundo Mendes (2013), assume-se de forma simplificada que os modos de vibração do fluido são iguais os modos de vibração da estrutura, ou seja, o líquido não altera o modo de

vibração no vácuo. Assim, os índices modais e os parâmetros são caracterizados da seguinte forma: $m = \bar{m}$, $n = \bar{n}$, $L = H$, $\bar{\psi} = \psi$ e $\phi = \theta$. Por fim, com as considerações citadas, a equação (3.161) é dada por:

$$A_r A_\theta = \frac{C}{J'_n\left(\frac{\chi_i}{R} r\right)} \quad (3.162)$$

Portanto, uma vez substituindo a equação (3.162) na equação da pressão (3.152) finalmente para o problema acoplado a pressão é dada por:

$$P(r, \theta, z, t) = \frac{C}{J'_n\left(\frac{\chi_i}{R} r\right)} \rho_f \omega^2 J_n\left(\frac{\chi_i}{R} r\right) \cos[n(\theta - \psi)] B_z \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi z}{H}\right) e^{j\omega t} \quad (3.163)$$

Para concluir o acoplamento fluido-estrutura, parte-se das equações de equilíbrio dinâmico da casca, ou seja, das equações (3.17), (3.18) e (3.19). Num primeiro momento é assumido que cada ponto da casca elástica se mova como uma função harmônica, ou seja, os deslocamentos do problema acoplado também são regidos pelas equações (3.14), (3.15) e (3.16). Factualmente, ao fazer essa simplificação atribui-se matematicamente que o modo de vibrar da estrutura não é afetado pela presença do fluido. Logo após, como comentado na revisão bibliográfica, no acoplamento é imposto que o fluido acrescenta massa na estrutura, sendo especificamente para o caso da casca cilíndrica na direção radial, ou seja, somente as componentes P_z e P_ϕ são iguais à zero. Desta forma, analisando somente a equação de equilíbrio dinâmico na direção radial (Equação 3.19) da casca com a pressão de irradiação tem-se que:

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} - \frac{N_\phi}{R} + \rho h \omega^2 w + P(R, \theta, z) = 0 \quad (3.164)$$

Desta forma, agora a força Pr é representada pela pressão irradiada devido a excitação da casca, sendo analisada somente forma modal, ou seja, $P(r, \theta, z)$. Devido a isso, desprezando a parcela do tempo $e^{j\omega t}$ na equação (3.163), substituindo na equação (3.164) e reorganizando os termos tem-se que:

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} - \frac{N_\phi}{R} + \rho h (1 + \zeta) \omega^2 w = 0 \quad (3.165)$$

Em que:

$$\zeta = \left(\frac{\rho_f}{\rho} \right) \left(\frac{R}{h} \right) \left\{ \frac{J_n(\chi_i)}{R [J'_n(\chi_i)]_{r=R}} \right\} \quad (3.166)$$

Sendo ζ é a expressão da massa adicional virtual, ρ_f é a densidade do fluido acústico, ρ a densidade da estrutura da casca, R raio médio, h a espessura e $[J'_n(\chi_i)]_{r=R}$ é a derivada da função de Bessel. Vale observar que a massa adicional aumenta a carga inercial da casca na direção radial e que depende dos parâmetros geométricos e físicos da casca e do fluido.

Gonçalves e Batista (1986) apresenta a expressão da massa adicional virtual para uma casca parcialmente preenchida, sendo esta dada por:

$$\zeta = \left(\frac{\rho_f}{\rho} \right) \left(\frac{R}{h} \right) \left[\frac{H}{L} - \frac{\text{sen}\left(\frac{2m\pi H}{L}\right)}{2m\pi} \right] \left\{ \frac{J_n(\chi_i)}{R [J'_n(\chi_i)]_{r=R}} \right\} \quad (3.167)$$

Lembrando que H é a altura do fluido e L o comprimento longitudinal da casca. Para o problema em estudo, utilizando o conjunto de equações governantes, o sistema matricial (3.59) para o problema acoplado fica na forma:

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \rho h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \rho h (1 + \zeta) \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.168)$$

Para uma solução não trivial o determinante da matriz acoplada tem que ser igual à zero, no qual se obtém o seguinte polinômio característico. A obtenção do polinômio característico pode ser visualizada no Apêndice F.

$$a_0 \omega^6 + a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3 = 0 \quad (3.169)$$

Em que:

$$a_0 = 1 + \zeta \quad (3.170)$$

$$a_1 = -\frac{1}{\rho h} [(1 + \zeta)(k_{11} + k_{22}) + k_{33}] \quad (3.171)$$

$$a_2 = \frac{1}{(\rho h)^2} [(1 + \zeta)(k_{11}k_{22} - k_{12}^2) + (k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33} - k_{13}^2 - k_{23}^2)] \quad (3.172)$$

$$a_3 = \frac{1}{(\rho h)^3} (k_{11}k_{23}^2 + k_{22}k_{13}^2 + k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{23}k_{13} - k_{11}k_{22}k_{33}) \quad (3.173)$$

Sendo k_{11} , k_{12} , k_{13} , k_{22} , k_{23} e k_{33} dados pelas equações (3.60) a (3.65). Por fim, as raízes da equação característica (3.169) caracterizam as frequências naturais e deformadas modais acopladas, ou seja, são determinadas realizando um procedimento análogo ao realizado para obter as equações (3.70) a (3.72) e (3.77) respectivamente.

Quando se realiza a análise acoplada tendo por base à equação (3.169), a obtenção das frequências naturais é uma tarefa trabalhosa, pois devido ao fato de que a equação (3.167) é dependente das funções de Bessel, que por sua vez dependem da frequência, pode-se afirmar que é uma função transcendental de ω . Devido a isso, Foutuny Gasser (1987) apresenta uma forma aproximada para a massa adicional virtual que pode ser empregada na resolução do problema, sendo dada da seguinte forma.

$$\zeta = \left(\frac{\rho_f}{\rho_e} \right) \left(\frac{R}{h} \right) \left(\frac{1}{n} \right) \left[\frac{H}{L} - \frac{\text{sen} \left(\frac{2m\pi H}{L} \right)}{2m\pi} \right] \quad (3.174)$$

Nota-se que as derivadas das funções de Bessel desaparecem, pois neste caso foi feita a seguinte aproximação assintótica dada na equação a seguir.

$$\left\{ \frac{J_n(\chi_i)}{R \left[J'_n(\chi_i) \right]_{r=R}} \right\} = \frac{1}{n} \quad (3.175)$$

3.4.1.1 – Relação entre frequências acopladas e desacopladas

De forma que o presente trabalho necessitar da análise dos modos dominantes do sistema acoplado, Blevins (1979) apresenta uma equação que a partir das frequências desacopladas e acopladas fluido-estrutura, para um modo dominante estrutura, pode-se retirar uma relação entre a massa adicional virtual (m_a) e a massa da estrutura (m). Esta equação é dada por:

$$\frac{\omega_{Acochado}}{\omega_{Desacchado}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{ma}{m}}} \quad (3.176)$$

Através da equação (3.176) pode-se analisar qual modo de vibração da casca capta mais massa adicional para as diferentes condições de contorno.

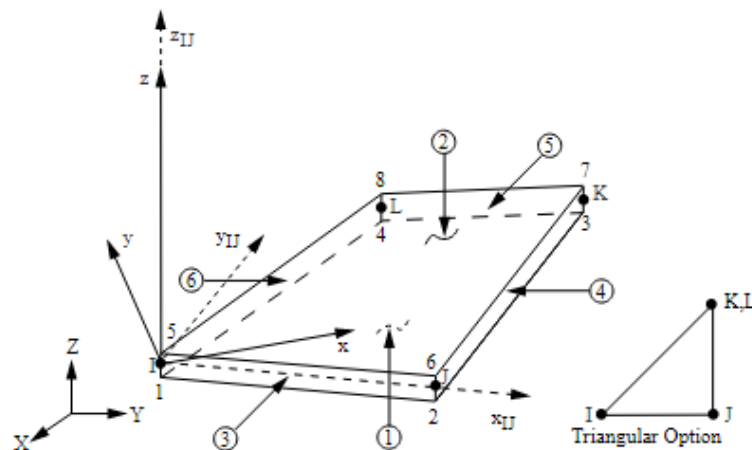
4 – ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são abordados os aspectos computacionais utilizados na análise numérica através do *software* ANSYS®. A análise é baseada no método dos elementos finitos, com o qual é possível determinar a resposta dinâmica dos sistemas em estudo e comparar com os valores obtidos pelas técnicas analíticas. Uma das principais vantagens de se utilizar a análise numérica é destacada pela possibilidade de avaliar o comportamento dinâmico de uma forma mais rápida e eficaz. Em contrapartida, é essencial que a modelagem numérica seja validada com técnicas analíticas ou resultados experimentais disponíveis.

4.1 – DESCRIÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS

4.1.1 – Casca cilíndrica – Elemento SHELL63

Na modelagem tridimensional da casca cilíndrica foi empregado o elemento SHELL63, visto que este possui quatro nós com seis graus de liberdade em cada nó, ou seja, três de translação e três de rotação. Com isso, esse elemento dispõe assim da capacidade de contabilizar os efeitos de flexão e de membrana em estruturas cilíndricas delgadas. A Figura 4.1 mostra o elemento.



x_{IJ} = Element x-axis if ESYS is not supplied.

x = Element x-axis if ESYS is supplied.

Figura 4.1 – Elemento finito SHELL63. (Biblioteca ANSYS).

4.1.2 – Cavidade acústica – Elemento FLUID30

No que diz respeito à malha para o fluido, o elemento FLUID30 pode ser empregado nas análises, pois apresenta oito nós de canto (I, J, K, L, M, N, O, P) com quatro graus de liberdade por nó, captando as translações na interface fluido-estrutura nas três direções e também as pressões (U_x , U_y , U_z e P). Esse elemento é amplamente utilizado para modelar o meio fluido quando em repouso e representa adequadamente a interação fluido-estrutura em problemas estáticos e dinâmicos. A Figura 4.2 mostra o elemento citado.

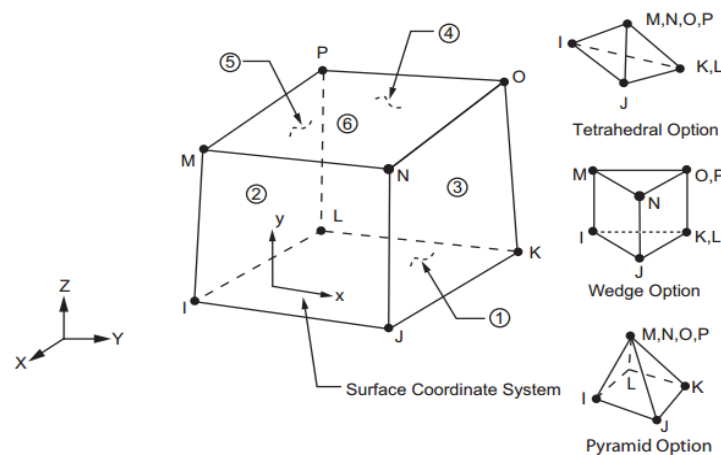


Figura 4.2 – Elemento finito FLUID30. (Biblioteca do ANSYS).

4.2 – TIPOS DE ANÁLISE

4.2.1 – Análise modal

Na análise da resposta dinâmica em vibração livre através do MEF foram utilizados os módulos *Block Lanczos*, no qual é adequado para sistemas estruturais desacoplados com as matrizes de rigidez e massa simétricas, e o *Unsymmetric*, ideal para sistemas acoplados fluido-estrutura com as matrizes assimétricas, sendo ambos os métodos incluídos no *software ANSYS®*.

Com o uso do módulo *Block Lanczos* na obtenção das matrizes, a resolução numérica da análise modal nos sistemas desacoplados é caracterizada por obter a resposta dinâmica para vibração livre na forma clássica do problema de autovalores e autovetores, nas seguintes fórmulas.

Casca elástica

$$\left([K_S] - \omega^2 [M_S] \right) \{U_i\} = \{0\} \quad (4.1)$$

Em que $[K_S]$ é a matriz de rigidez da estrutura, $[M_S]$ a matriz de massa da estrutura e $\{U_i\}$ os autovetores.

Cavidade acústica

Do mesmo modo, em problemas de acústica pura a resposta dinâmica em vibrações livres e dada por:

$$\left([K_f] - \omega^2 [M_f] \right) \{P_i\} = \{0\} \quad (4.2)$$

Em que $[K_S]$ é a matriz de rigidez da estrutura, $[M_S]$ a matriz de massa da estrutura e $\{P_i\}$ os autovetores.

Interação fluido-estrutura

De acordo com Morais (2000), existem praticamente quatro maneiras clássicas para contabilizar o problema fluido-estrutura: as formulações Lagrangeanas, as Eulerianas, as Arbitrárias Eulerianas-Lagrangeanas e as Eulerianas mistas. A primeira descreve a estrutura e o fluido com variáveis de deslocamento, no qual o líquido é simulado como um sólido elástico sem resistência ao cisalhamento. A segunda utiliza variáveis escalares para modelar o fluido: pressão, potencial de velocidade e potencial de deslocamentos. A terceira utiliza as variáveis escalares e vetoriais, sendo mais aplicadas a escoamentos viscosos compressíveis. A quarta e última faz o uso de uma abordagem variacional e basicamente expressam uma formulação mista de pressão e potencial de deslocamento do tipo acoplamento de massa.

Num primeiro momento, empregando o módulo *Unsymmetric* para as matrizes assimétricas, a análise para o problema acoplado fluido-estrutura é baseada na formulação denominada U-P, ou seja, o deslocamento para estrutura e a pressão para o fluido são assumidas como incógnitas. Assim, esta se trata de uma formulação Euleriana e é oriunda dos trabalhos pioneiros de Zienkiewicz e Newton (1969). O fluido é modelado por um campo de pressão com a formulação provinda a partir da resolução da equação da onda através do método de Galerkin. A estrutura é descrita por variáveis de deslocamento, uma vez que existe no sistema final uma matriz de acoplamento que permite a resolução do sistema acoplado.

Desta forma, o ANSYS® trata a interação partindo da equação clássica de movimento da estrutura, sendo o fluido incorporado como uma força. Por tudo isso, a equação de movimento é dada por:

$$[M_S]\{\ddot{U}\} + [C_S]\{\dot{U}\} + [K_S]\{U\} = \{F_e\} + \{F_I\} \quad (4.3)$$

Em que $\{F_e\}$ é um vetor de forças quaisquer e $\{F_I\}$ outro vetor de forças decorrente às pressões do fluido na região de interface fluido-estrutura. As matrizes rigidez e massa da estrutura são definidas por:

$$[K_S] = \int_V [Bu]^T [C_S] \cdot [Bu] \cdot dV \quad (4.4)$$

$$[M_S] = \int_V \rho [Nu]^T \cdot [Nu] \cdot dV \quad (4.5)$$

O vetor de forças do fluido $\{F_I\}$ aplicado na interface do acoplamento é obtido realizando a integração da pressão do fluido na superfície de contato, sendo dado por:

$$\{F_I\} = \int_S \{N_u\} P \{n\} dS \quad (4.6)$$

Uma vez que $\{N_u\}$ são as funções de interpolação utilizadas para idealizar as componentes de deslocamentos u , v , w , e $\{n\}$ é o vetor na direção normal à superfície. Destaca-se ainda que os deslocamentos da estrutura e a pressão do fluido são regidos pelas equações (4.7) e (4.8) respectivamente.

$$U = \{N_u\}^T \{U_e\} \quad (4.7)$$

$$P = \{N_p\}^T \{P_e\} \quad (4.8)$$

Em que o vetor $U_e = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_i \ v_i \ w_i]$ representa os deslocamentos nodais, onde u_i , v_i e w_i corresponde aos deslocamentos do nó i , nas direções x , y e z , respectivamente. De maneira paralela a isto, $P_e = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_N]$ representa as pressões que estão vinculadas às variáveis nodais do fluido. Assim, substituindo a equação (4.8) na equação (4.6) tem-se que:

$$\{F_I\} = \int_S \{N_p\} \{N_u^T\} \{n\} dS \{P_e\} \quad (4.9)$$

Sabendo que a integração na superfície de $\int_S \{N_p\} \{N_u^T\} \{n\} dS$ representa a matriz fluido-estrutura $[FS]$ para o sistema acoplado, então:

$$\{F_I\} = [FS] \{P_e\} \quad (4.10)$$

Desta forma, substituindo a equação (4.10) na equação (4.3), à equação de movimento da estrutura para o problema acoplado pode ser reescrita como:

$$[M_s] \{\ddot{U}\} + [C_s] \{\dot{U}\} + [K_s] \{U\} - [FS] \{P_e\} = \{F_e\} \quad (4.11)$$

De maneira paralela a isto, a equação da onda é resolvida aplicando-se o método de Galerkin com a discretização por elementos finitos, correlacionando a variação de pressão na interface da cavidade com os deslocamentos da estrutura através da matriz de acoplamento (Biblioteca ANSYS). Com isso, a equação dinâmica para cavidade acústica do problema acoplado é dada por:

$$[M_f] \{\ddot{P}\} + [C_f] \{\dot{P}\} + [K_f] \{P\} + \rho [FS] \{\ddot{U}\} = \{0\} \quad (4.12)$$

Em que as matrizes de rigidez, de massa e amortecimento do fluido, juntamente com a matriz de acoplamento fluido-estrutura são caracterizadas por:

$$[K_f] = \int_{\Omega_f} [Bp]^T \cdot [Bp] \cdot d\Omega_f \quad (4.13)$$

$$[M_f] = \int_{\Omega_f} [Np]^T \cdot [Np] \cdot d\Omega_f \quad (4.14)$$

$$[C_f] = \frac{1}{c} \int_{\Omega_f} [Np]^T \cdot [Np] \cdot d\Omega_f \quad (4.15)$$

$$[FS] = \oint_{\Omega_f} [Nu]^T \bar{n} \cdot [Np] \cdot d\Omega_f \quad (4.16)$$

Por fim, colocando as equações (4.11) e (4.12) na forma matricial obtém-se a equação (4.17), sendo que esta representa a equação clássica de movimento em vibrações forçadas para o problema de interação fluido – estrutura.

$$\begin{bmatrix} [M_s] & [0] \\ \rho[FS] & [M_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\ddot{U}] \\ [\ddot{P}] \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_s] & [0] \\ [0] & [C_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\dot{U}] \\ [\dot{P}] \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_s] & -[FS] \\ [0] & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [U] \\ [P] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F_E] \\ [0] \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

No conjunto matricial acima, quando atribuído $F_E=0$, $[C_s]=0$ e $[C_f]=0$ obtém-se a resposta dinâmica em vibrações livres não amortecidas acopladas do problema, sendo o sistema matricial dado por:

$$\begin{bmatrix} [M_s] & [0] \\ \rho[FS] & [M_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\ddot{U}] \\ [\ddot{P}] \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_s] & -[FS] \\ [0] & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [U] \\ [P] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [0] \\ [0] \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Da mesma forma, quando atribuído $F_E=0$, $[C_s]=0$, $[C_f]=0$ e ainda desprezando a matriz de acoplamento fluido-estrutura $[FS]=0$ obtém-se as equações desacopladas que fornecem a resposta dinâmica em vibrações livres não amortecidas da estrutura e do fluido, ou seja, as equações (4.1) e (4.2) respectivamente.

4.2.2 – Análise harmônica

Na análise da resposta dinâmica da estrutura sob vibrações forçadas através do MEF foram utilizados os mesmos módulos para obtenção das matrizes, ou seja, o *Block Lanczos* e o *Unsymmetric*. Todavia, o ANSYS® disponibiliza três métodos para análise harmônica, sendo eles: *full* (completo), *reduced* (reduzido) e *mode superposition* (superposição modal).

Neste trabalho é empregado o método *full*, no qual emprega as matrizes de rigidez, massa e amortecimento completas para calcular a resposta harmônica. A análise harmônica fornece a resposta da estrutura para cargas que variam harmonicamente com o tempo. Para as análises o amortecimento foi adotado igual a zero e a formulação numérica empregada é a mesma apresentada na seção anterior, ou seja, a U-P.

4.3 – MODELOS NUMÉRICOS E CONVERGÊNCIA DA MALHA

Nesta parte serão apresentados os modelos numéricos, as propriedades físicas e geométricas, os níveis de refinamento e convergência da malha para a casca cilíndrica desacoplada, cavidade acústica desacoplada e casca acoplada com fluido. Vale ressaltar que a equação para

obter o erro percentual dos resultados numéricos quando comparados aos analíticos é dada por:

$$Erro (\%) = \left| \frac{\omega_a - \omega_n}{\omega_a} \right| \cdot 100 \quad (4.19)$$

Onde ω_a é a frequência natural analítica e ω_n a frequência natural numérica.

Desta forma, para a realização da análise dinâmica foi empregada uma casca cilíndrica e cavidade acústica com as características mostradas na tabela a seguir.

Tabela 4.1 - Características da casca cilíndrica e da cavidade acústica

Descrição	Sigla	Valor adotado
Espessura da casca	h	0,00102 m
Raio da casca e cavidade	R	0,175 m
Comprimento da casca	L	0,664 m
Módulo de Elasticidade	E	200 GPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,29
Massa específica da casca	ρ_c	7760 Kg/m ³
Massa específica do fluido	ρ_f	1000 Kg/m ³
Velocidade de propagação do som na água	c	1500 m/s
Altura de líquido	H	0,175 m

A escolha do tipo de casca cilíndrica foi tida por base as dimensões e propriedades da casca estudada experimentalmente por Amabili e Dalpiaz (1995). Para a análise da vibração forçada da casca desacoplada e acoplada o carregamento imposto foi o harmônico pontual na direção radial (w) no centro da casca, ou seja, em $z=L/2$ e $\phi=0^\circ$. A carga é representada pela equação (4.20).

$$F_r(z, \phi, t) = 1000 \overline{\text{sen}(\omega t)} \quad (\text{Em Newton}) \quad (4.20)$$

A frequência de excitação (ω) da carga foi variada de 0 a 2500 rad/s e a razão de amortecimento adotada igual à zero ($\xi = 0\%$). Na obtenção dos resultados foram adotados diferentes pontos da casca cilíndrica e analisado os resultados.

De acordo com Ventsel e Krauthammer (2001) uma casca cilíndrica é dita delgada quando $h/R \leq 1/20$, do contrário é espessa. Assim, a casca em estudo tem relação $h/R=0,00583$, ou seja, é delgada. A mesma casca quando $\beta L \leq 5$ é classificada como curta, do contrário é longa. O parâmetro β é dado pela seguinte equação.

$$\beta = \left[\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h} \right]^{1/4} \quad (4.21)$$

Assim, a casca em estudo possui $\beta L=64,30$, ou seja, a casca é classificada como longa.

4.3.1 – Modelo da casca desacoplada

O primeiro caso analisado foi à casca cilíndrica desacoplada com condição de contorno apoiada-apoiada (caso 1A), na qual foi possível comparar os resultados obtidos na simulação numérica com os valores encontrados pela técnica analítica de Soedel (2005) e assim determinar a convergência da malha para diferentes formas modais de vibração. A Figura 4.3 mostra a modelagem e o nível de refinamento da malha.

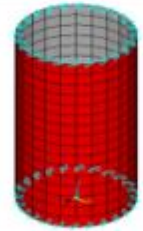
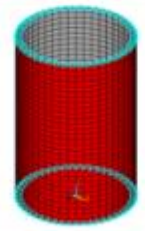
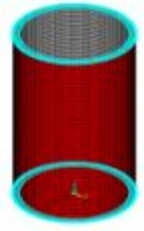
Modelo	Nível de Refinamento da Malha (Número de Elementos)		
	1 (384)	2 (1250)	3 (6000)
Casca cilíndrica desacoplada			

Figura 4.3 – Modelagem numérica e nível de refinamento da malha para a casca desacoplada.

Assim, com base na Figura 4.3, inicialmente foi realizado três níveis de refinamento da malha com elemento tipo SHELL63 e adotados os modos da casca que apresentam uma faixa de frequências naturais que englobem modos baixos e elevados na vibração livre, para que assim a malha abordada seja simulada com os mais diferentes tipos de deformadas modais. A Figura 4.4 mostra a convergência da malha da casca cilíndrica.

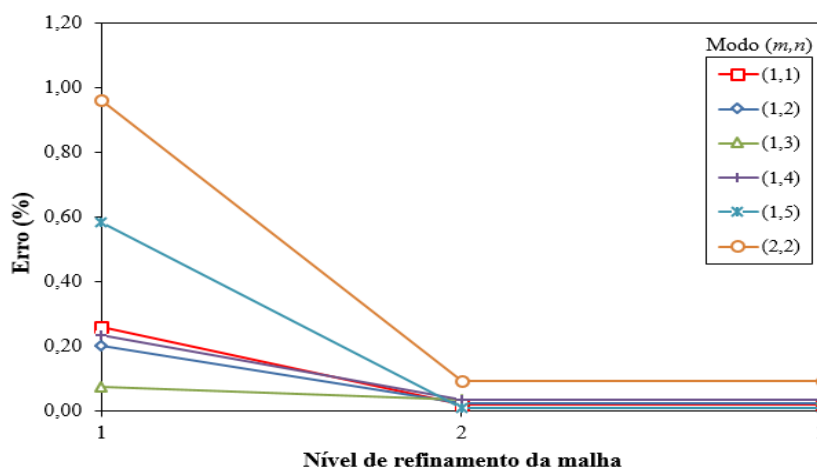


Figura 4.4 – Estudo da convergência da malha da casca desacoplada.

Com base na Figura 4.4, pode-se observar que o erro entre a solução analítica e numérica é pequena. Destaca-se ainda que para todas as combinações modais o erro vai diminuindo e convergindo para valores constantes e pequenos à medida que a malha vai sendo mais refinada. Desta forma, por apresentar um menor percentual de erro quando comparado com a técnica analítica de Soedel (2005), pode-se afirmar que a modelagem numérica está correta, utilizando os resultados finais da malha 3 nas comparações e estudo de outras condições de contorno.

4.3.2 – Modelo do fluido desacoplado

O fluido também foi tratado desacoplado, apresentando condição de contorno aberta-aberta (caso 2A) para a cavidade acústica. Assim, foi possível comparar os resultados obtidos na simulação numérica do líquido com os valores encontrados pela técnica analítica de equação de propagação de onda e assim determinar a convergência da malha para diferentes formas modais de vibração de pressão. A Figura 4.5 mostra a modelagem e o nível de refinamento da malha do fluido.

Modelo	Malha (Número de elementos)		
	1 (189)	2 (980)	3 (13000)
Estrutura da cavidade acústica			

Figura 4.5 - Modelagem numérica e nível de refinamento da malha para o fluido.

Desta forma, com visto na figura 4.5 foi realizado três níveis de refinamento da malha com elemento tipo FLUID30 e também adotados os modos da cavidade com uma faixa de frequências naturais que contemplem modos baixos e elevados. A Figura 4.6 mostra a convergência da cavidade acústica.

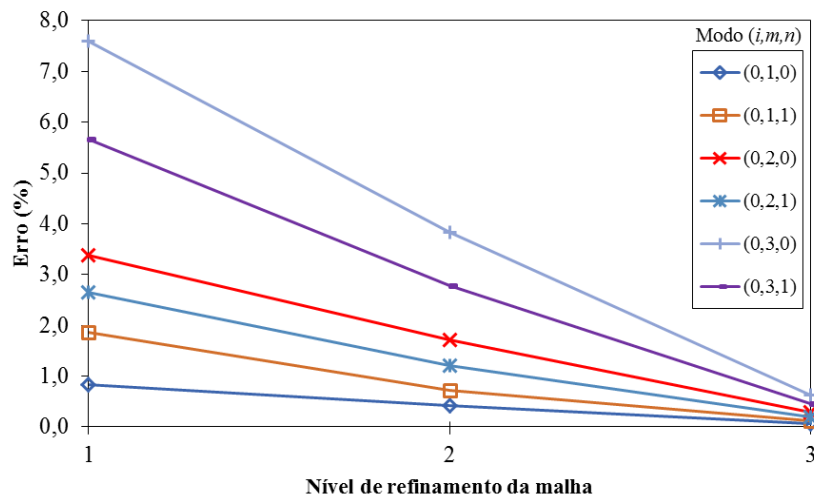


Figura 4.6 - Estudo da convergência da malha do fluido desacoplado.

Através da Figura 4.6 é possível notar que o erro também vai diminuindo e convergindo para valores constantes e pequenos à medida que a malha vai sendo mais refinada. Desta forma, afirma-se que a modelagem numérica está correta, utilizando os resultados finais da malha 3 nas análises neste trabalho.

4.3.3 – Modelo acoplado fluido-estrutura

De maneira análoga aos casos desacoplados, também foi abordada o refinamento da malha para o caso acoplado casca-cavidade. A casca com condição de contorno apoiada-apoiada e a cavidade acústica com condição de contorno aberta-aberta, ou seja, o caso acoplado 3A. Desta forma, foi possível comparar os resultados obtidos na simulação numérica com os valores encontrados pela técnica analítica de Soedel (2005) juntamente com o parâmetro de massa adicional de fluido incorporado nas equações de movimento da casca. A Figura 4.7 mostra o nível de refinamento da malha para o problema acoplado.

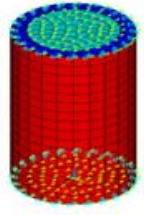
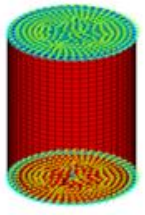
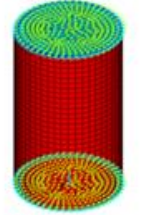
Modelo	Nível de Refinamento da Malha (Número de Elementos)		
	1 (600)	2 (6750)	3 (21880)
Interação fluido-estrutura			

Figura 4.7 - Modelagem numérica e nível de refinamento da malha para o problema acoplado.

Na modelagem do problema acoplado foram utilizados os mesmos tipos de elementos finitos respectivos para a casca e fluido. Por fim, adotando alguns modos de vibração, a convergência da malha para o problema acoplado fluido-estrutura é vista na Figura 4.8.

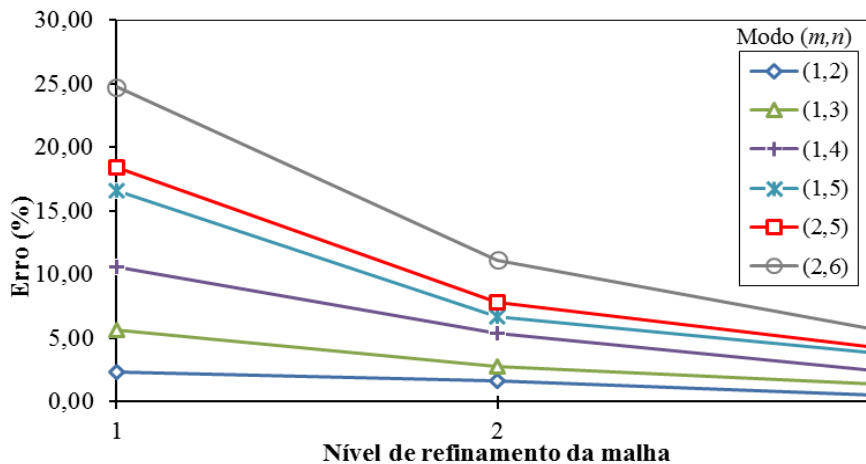


Figura 4.8 - Estudo da convergência da malha da casca acoplada com fluido

De maneira análoga aos casos desacoplados é possível notar que o erro também vai diminuindo e convergindo para valores constantes e com isso afirma-se que a modelagem numérica está correta, utilizando os resultados finais da malha 3 nas comparações.

5 - RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos através das técnicas analíticas, da abordagem numérica via *software* ANSYS® e dos ensaios experimentais realizados por Amabili e Dalpiaz (1995).

5.1 – CASCA CILÍNDRICA

5.1.1 – Vibração livre

A primeira análise é da casca desacoplada com condição de contorno bi-apoiada sem restrição axial. As quatorze primeiras frequências naturais obtidas através da técnica analítica de Soedel (2005), pela teoria de Sharma & Johns (1971), pelo método de energia e através da análise numérica foram comparadas e são mostrados na Tabela 5.1 a seguir. O índice N é a ordem das frequências, o índice i indica a menor entre as três frequências (axial, circunferencial e radial), m é o número de meia-onda longitudinal e n o número de ondas circunferenciais.

Tabela 5.1 – Frequências naturais da casca cilíndrica desacoplada apoiada-apoiada.

N	i	m	n	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [1]	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [2]	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [3]	$F_{i,m,n}$ (Hz) MEF	$E_{[1]}$ (%)	$E_{[2]}$ (%)	$E_{[3]}$ (%)
1	1	1	4	221,25	233,96	221,25	221,17	0,03	5,47	0,04
2	1	1	5	230,46	233,10	230,46	230,43	0,01	1,53	0,01
3	1	1	6	297,99	297,09	297,95	297,96	0,01	0,29	0,00
4	1	1	3	321,94	353,82	315,83	315,72	1,93	10,77	0,03
5	1	2	6	441,28	465,00	441,31	441,67	0,09	5,02	0,08
6	1	1	7	396,16	394,14	396,20	396,07	0,02	0,49	0,03
7	1	2	7	473,88	478,48	473,87	473,65	0,05	1,01	0,05
8	1	2	5	494,55	556,44	494,55	495,54	0,20	10,94	0,20
9	1	1	8	515,17	512,75	516,36	514,97	0,04	0,43	0,27
10	1	2	8	561,68	557,71	561,46	560,92	0,14	0,58	0,10
11	1	1	2	597,77	733,69	597,77	597,63	0,02	18,54	0,02
12	1	1	9	652,01	649,43	650,80	651,73	0,04	0,35	0,14
13	1	2	4	667,83	810,55	667,83	669,34	0,23	17,42	0,23
14	1	3	7	670,60	728,74	670,59	672,82	0,33	7,67	0,33

Legenda: [1]:Teoria de Soedel (2005); [2]: Teoria de Sharma & Johns (1971); [3]: Método de Energia; $E_{[1]}$: Erro entre [1] e MEF; $E_{[2]}$: Erro entre [2] e MEF; $E_{[3]}$: Erro entre [3] e MEF.

Com base na Tabela 5.1 é possível observar que os resultados analíticos e numéricos praticamente coincidem, validando o emprego da técnica analítica e da modelagem numérica no ANSYS®. Como o erro entre os resultados é muito pequeno para diferentes frequências naturais fica nítido que a malha discretizada simula adequadamente o comportamento dinâmico da casca cilíndrica para qualquer modo de vibração.

Um aspecto a ser observado é que os resultados obtidos pelo método de Sharma e Johns (1971) possuem um maior erro para frequências condizentes a um número de ondas circunferenciais pequenos e longitudinais maiores. De qualquer forma, os resultados obtidos são condizentes, pois de acordo com Blevins (1979), a precisão desta formulação aproximada geralmente aumenta com o número de modos circunferencial (n) e com a relação entre o comprimento efetivo/raio (L/mR).

Prosseguindo com a análise da casca apoiada-apoiada, a Figura 5.1 mostra as frequências naturais obtidas através da técnica analítica de Soedel (2005) para os diferentes índices modais i .

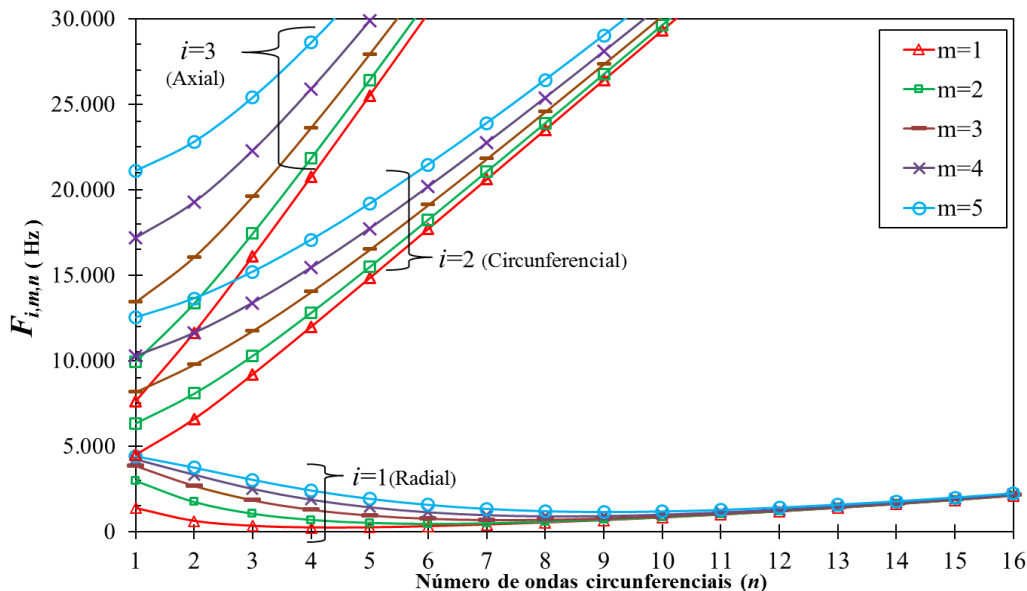


Figura 5.1 – Frequências naturais analíticas obtidas pela teoria de Soedel (2005) para a casca cilíndrica desacoplada (A-A) e diferentes índices modais (i).

A Figura 5.1 apresenta todas as frequências naturais em estudo associadas sob o modo radial ($i=1$), circunferencial ($i=2$) e axial ($i=3$). Desta forma, as menores frequências são dominadas

pelo modo radial ($i=1$), o que por sua vez são mais relevantes quando se sabe que as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para essas baixas frequências. A Figura 5.2 mostra as frequências naturais analíticas obtidas através da solução analítica de Soedel (2005) para o índice modal radial ($i=1$).

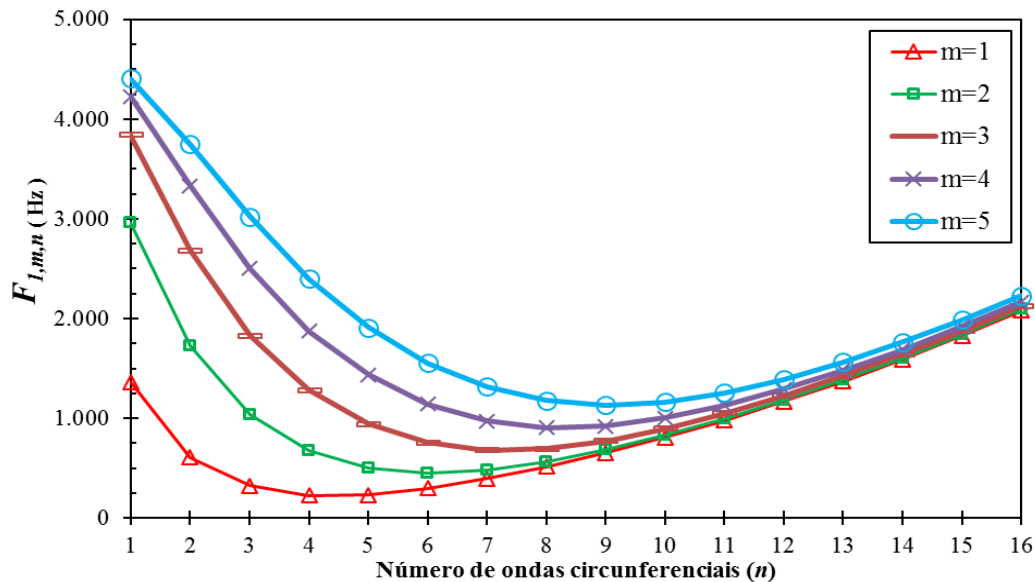


Figura 5.2 – Frequências naturais analíticas obtidas pela teoria de Soedel (2005) da casca cilíndrica desacoplada (A-A) para o índice modal radial ($i=1$).

Com base na Figura 5.2 é possível observar que as menores frequências naturais da casca cilíndrica não ocorrem necessariamente para valores pequenos do índice modal n (número de ondas circunferenciais). Por outro lado, as frequências naturais aumentam de acordo o índice modal m (número de semi-ondas longitudinais) cresce. Tal fenômeno é justificado pelo fato de que quando a casca vibra em modos circunferenciais (n) pequenos a energia de deformação extensional de membrana predomina na energia de deformação total do sistema. Porém à medida que o número de modos n aumenta, a energia de deformação flexional passa a predominar no sistema.

Nesse sentido, é possível notar que as frequências mais baixas para a estrutura dependem diretamente das relações geométricas entre o L/R (comprimento/raio) e h/R (espessura/raio), pois estas influenciam diretamente forças internas (membrana e flexão) e conseqüentemente nas energias do sistema.

A fim de se analisar os parâmetros geométricos da casca cilíndrica, o gráfico a seguir mostra a uma relação entre as frequências naturais e as dimensões da casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada para um mesmo modo longitudinal e circunferencial ($m=1$ e $n=4$).

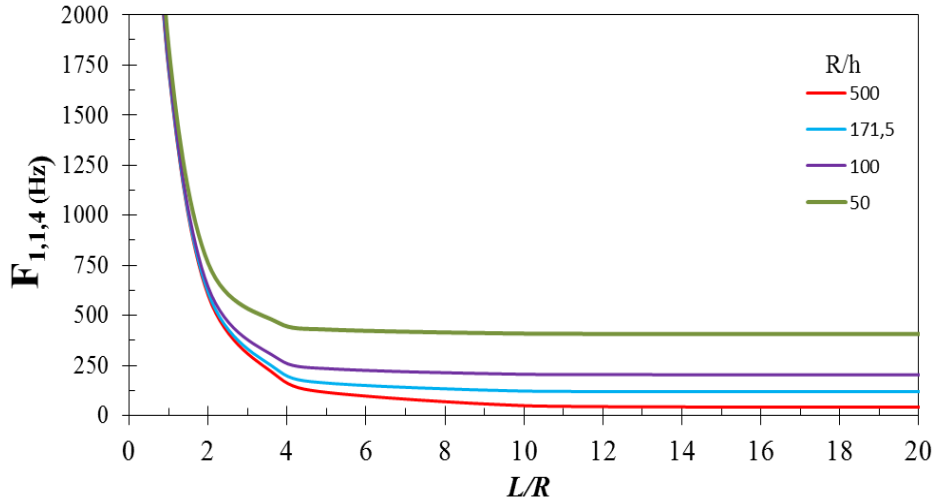


Figura 5.3 – Frequências naturais analíticas pela teoria de Soedel (2005) para diferentes relações geométricas da casca do modo $m=1$ e $n=4$.

Com base na Figura 5.3 é possível notar que para valores fixos de L/R as menores frequências naturais da casca são encontradas para maiores valores de R/h , ou seja, para cascas mais finas. Da mesma forma, observa-se que para um mesmo valor de R/h as frequências são maiores para cascas para pequenas relações L/R , ou seja, para cascas mais curtas.

Uma vez visto que as menores frequências naturais da casca cilíndrica estão associadas às maiores amplitudes de deslocamentos representados pelo modo de vibração predominante radial ($i=1$) e uma semi-onda longitudinal ($m=1$), estes foram adotados de base para o estudo das diferentes condições de contorno e posteriormente o problema acoplado fluido-estrutura.

Assim, com a análise numérica validada através da teoria de Soedel (2005) para uma casca cilíndrica apoiada-apoiada, foram abordadas as diferentes condições de contorno no modelo numérico e os resultados confrontados com os valores obtidos através da técnica de Sharma & Johns (1971) e pelo método de energia. As frequências naturais para as diferentes condições de contorno ($C.C$) são apresentadas nas tabelas a seguir. Vale ressaltar que o método aproximado por Sharma e Johns (1971) não fornece a resposta para um diâmetro nodal circunferencial ($n=1$).

Tabela 5.2 - Frequências naturais da casca desacoplada apoiada-livre (A-L).

i	m	n	$\omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [1]	$\omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [2]	$\omega_{i,m,n}$ (Hz) MEF	$E_{[1]}$ (%)	$E_{[2]}$ (%)
1	1	1	-	2,82	2,2	-	21,98
1	1	2	26,50	23,98	22,50	15,09	6,17
1	1	3	70,15	63,99	62,66	10,68	2,08
1	1	4	129,41	120,73	119,40	7,74	1,10
1	1	5	202,30	193,90	192,51	4,84	0,72
1	1	6	284,60	283,42	281,92	0,94	0,53
1	1	7	388,77	389,26	387,60	0,30	0,43

Legenda: [1]:Teoria de Sharma & Johns (1971); [2]: Método de Energia; $E_{[1]}$: Erro entre [1] e MEF; $E_{[2]}$: Erro entre [2] e MEF

Tabela 5.3 - Frequências naturais da casca desacoplada engastada-engastada (E-E).

i	m	n	$\omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [1]	$\omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [2]	$\omega_{i,m,n}$ (Hz) MEF	$E_{[1]}$ (%)	$E_{[2]}$ (%)
1	1	1	-	1758,18	1595,01	-	9,27
1	1	2	1020,55	982,22	905,79	11,24	7,78
1	1	3	613,22	590,47	554,30	9,61	6,12
1	1	4	406,33	398,60	380,22	6,43	4,61
1	1	5	330,13	327,54	318,21	3,61	2,85
1	1	6	344,88	344,44	339,98	1,42	1,29
1	1	7	419,76	418,87	416,67	0,74	0,52

Legenda: [1]:Teoria de Sharma & Johns (1971); [2]: Método de Energia; $E_{[1]}$: Erro entre [1] e MEF; $E_{[2]}$: Erro entre [2] e MEF

Tabela 5.4 - Frequências naturais da casca desacoplada engastada-livre (E-L).

i	m	n	$\omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [1]	$\omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [2]	$\omega_{i,m,n}$ (Hz) MEF	$E_{[1]}$ (%)	$E_{[2]}$ (%)
1	1	1	-	658,59	576,00	-	12,54
1	1	2	268,46	251,30	232,98	13,22	7,29
1	1	3	141,72	138,18	131,85	6,96	4,58
1	1	4	140,49	139,86	137,74	1,96	1,52
1	1	5	198,93	198,88	197,92	0,51	0,48
1	1	6	284,71	284,74	283,96	0,26	0,35
1	1	7	389,41	389,46	388,56	0,22	0,23

Legenda: [1]:Teoria de Sharma & Johns (1971); [2]: Método de Energia; $E_{[1]}$: Erro entre [1] e MEF; $E_{[2]}$: Erro entre [2] e MEF

Tabela 5.5 - Frequências naturais da casca desacoplada engastada-apoiada (E-A).

i	m	n	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [1]	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [2]	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) MEF	$E_{[1]}$ (%)	$E_{[2]}$ (%)
1	1	1	-	1627,83	1455,03	-	10,62
1	1	2	907,11	827,39	761,30	16,07	7,98
1	1	3	469,89	463,78	437,69	6,85	5,62
1	1	4	306,44	309,03	297,59	2,89	3,70
1	1	5	286,55	273,90	269,01	6,12	1,78
1	1	6	321,90	317,57	315,52	1,98	0,71
1	1	7	407,61	406,08	405,02	0,63	0,26

Legenda: [1]:Teoria de Sharma & Johns (1971); [2]: Método de Energia; $E_{[1]}$: Erro entre [1] e MEF; $E_{[2]}$: Erro entre [2] e MEF

Tabela 5.6 - Frequências naturais da casca desacoplada livre-livre (L-L).

i	m	n	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [1]	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico [2]	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) MEF	$E_{[1]}$ (%)	$E_{[2]}$ (%)
1	1	1	-	5,95	2,10	-	64,70
1	1	2	28,01	28,33	21,87	21,92	22,80
1	1	3	68,27	75,72	61,76	9,54	18,44
1	1	4	126,47	138,53	118,42	6,37	14,52
1	1	5	197,50	212,24	191,49	3,04	9,78
1	1	6	286,30	302,10	280,86	1,90	7,03
1	1	7	392,00	408,06	386,50	1,40	5,28

Legenda: [1]:Teoria de Sharma & Johns (1971); [2]: Método de Energia; $E_{[1]}$: Erro entre [1] e MEF; $E_{[2]}$: Erro entre [2] e MEF

De acordo com as tabelas mostradas pode-se afirmar que no geral as frequências naturais da estrutura mostram uma boa aproximação entre resultados analíticos e numéricos para a maioria dos modos analisados das menores frequências naturais. A solução analítica obtida através da minimização do funcional Lagrangeano foi eficaz, pois os erros obtidos, quando comparados aos resultados numéricos, se mantiveram pequenos, exceto nos casos apoiado-livre e livre-livre que o erro nos modos mais baixo foi considerável. A literatura mostra que as funções de forma com bordas livres não simulam adequadamente a deformada nessas condições e por isso leva a erros maiores em modos mais baixos.

Contudo, da mesma forma que na casca apoiada-apoiada, pode-se observar que o método analítico proposto por Sharma & Johns (1971) possui um maior erro quando a casca vibra

com números de ondas circunferenciais (n) não elevados, como por exemplo, podem-se observar os valores para $m=1$ e $n=2$ no qual os erros entre as condições de contorno estudadas estão entre 10% e 22%.

Nesse sentido, para a casca com condição de contorno apoiada-apoiada foram confrontados os valores obtidos das frequências naturais pelo método de Sharma & Johns (1971) com os resultados encontrados através da teoria de Soedel (2005) e da análise numérica via MEF. A abordagem é mostrada na Figura 5.4.

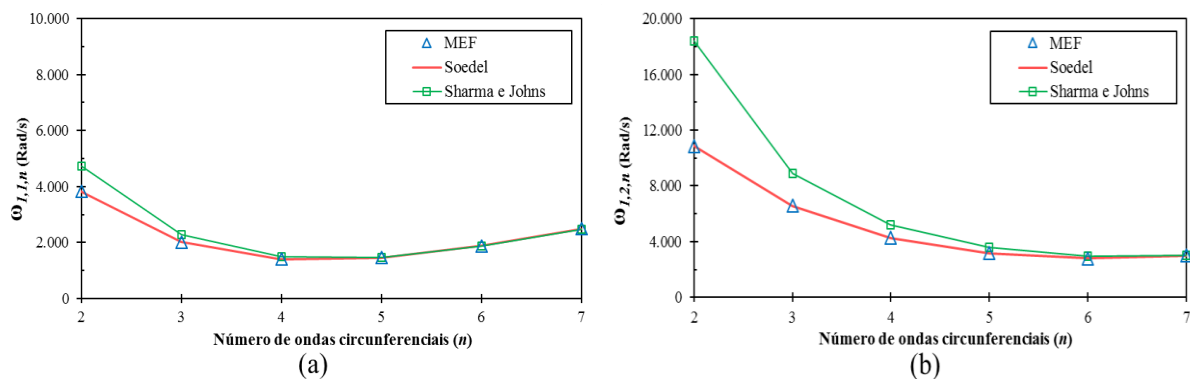


Figura 5.4 – Comparativo entre as frequências naturais para a casca com condição de contorno apoiada-apoiada (A-A): (a) Índice modal $i=1$ e $m=1$; (b) Índice modal $i=1$ e $m=2$.

Através da Figura 5.4 pode-se notar que a técnica analítica proposta por Sharma & Johns (1971) não expressa adequadamente às frequências naturais para modos circunferenciais (n) de valores entre $0 < n < 4$, pois a curva diverge da teoria de Soedel (2005) e da análise numérica. Observa-se ainda que o erro é ainda maior em modos longitudinais (m) superiores, como pode ser visualizado ao comparar a diferença entre as frequências obtidas pelos três métodos para o modo $m=1$ e $n=2$ da primeira curva [gráfico (a)] e o da segunda [gráfico (b)] com modo $m=2$ e $n=2$. De qualquer forma, pode-se notar que os valores das mínimas frequências naturais, ou seja, no modo $m=1$ e $n=4$, praticamente coincidem entre os três métodos analisados.

Nesse sentido, uma vez que a modelagem numérica mostra-se confiável, a partir dos valores numéricos obtidos pelo MEF que constam nas Tabelas 5.1 a 5.6 foi possível traçar um gráfico com o intuito de visualizar melhor o comportamento das frequências naturais para as diferentes condições de contorno.

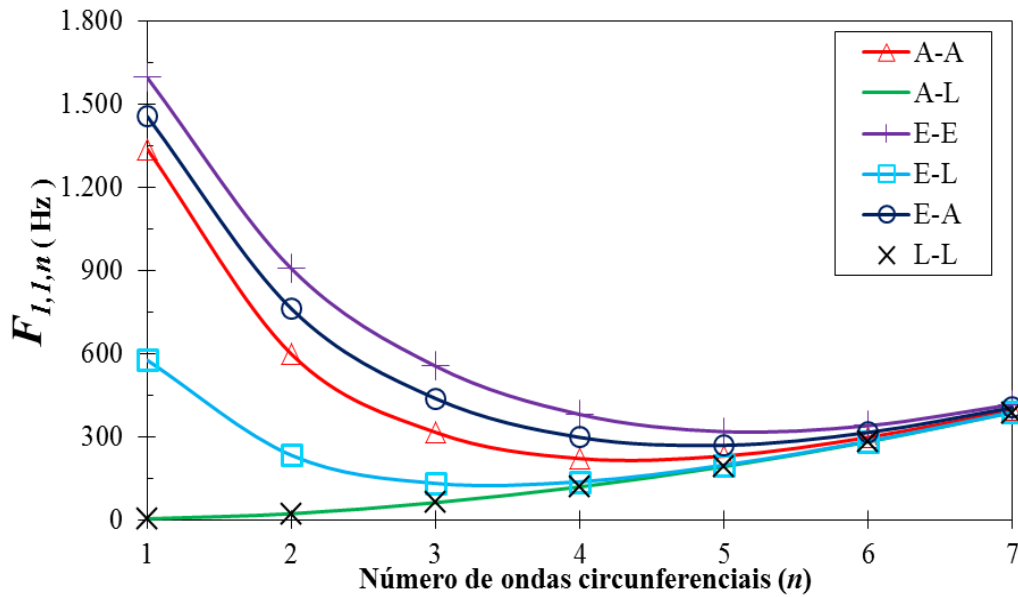


Figura 5.5 – Relação entre as frequências naturais numéricas do modo $i=1$, $m=1$ para diferentes condições de contorno da casca desacoplada.

Com base na análise das diferentes condições de contorno no gráfico acima, pode-se observar que as menores frequências naturais da casca cilíndrica não ocorrem necessariamente para valores pequenos de número de ondas circunferenciais (n), exceto para as condições de contorno apoiada-livre e livre-livre, no qual estas demonstraram um comportamento crescente com os índices modais circunferenciais e valores bem próximos.

Ressalta-se ainda que as condições de contorno livre-livre e engasta-engastada apresentam, respectivamente, as duas curvas extremas para os valores das frequências. Assim, pode-se afirmar que além das demais condições de contorno entre as duas curvas citadas, qualquer outra condição de contorno, como por exemplo, um apoio com um engastamento parcial deverá se enquadrar entre essas curvas.

Outro fator preponderante a ser destacado é que os comportamentos das curvas mostradas acima coincidiram com os gráficos encontrados nos trabalhos de Koga (1988) e com os resultados das pesquisas apresentados por Leissa (1973).

Para demonstrar ainda mais a validade da modelagem numérica, foi realizada a comparação entre as deformadas modais analíticas e pelo MEF da casca desacoplada para as diferentes condições. A Figura 5.6 mostra estas deformadas modais obtidas pelo *software* ANSYS, sendo adotado como referência o modo de vibração com índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$.

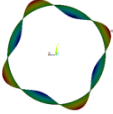
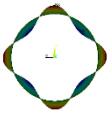
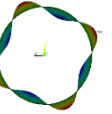
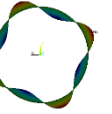
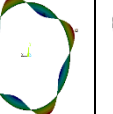
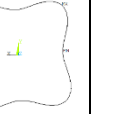
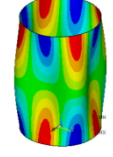
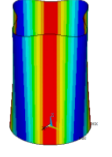
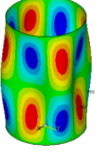
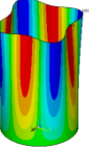
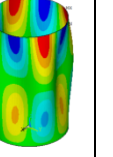
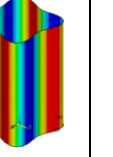
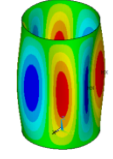
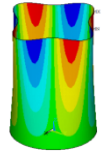
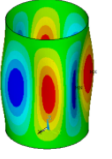
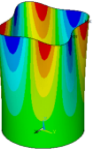
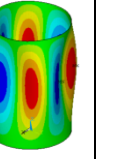
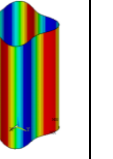
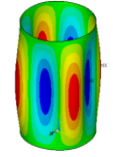
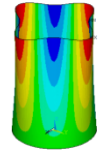
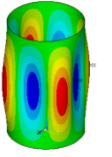
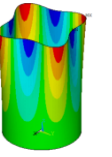
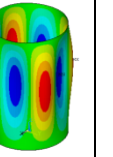
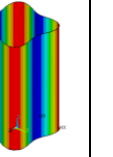
C.C	A-A	A-L	E-E	E-L	E-A	L-L
ω (Hz)	221,17	119,40	380,22	137,74	297,59	118,42
Vista Superior						
Deformada Axial (u)						
Deformada Circ. (v)						
Deformada Radial (w)						

Figura 5.6 – Frequências naturais e deformadas modais numéricas do modo $m=1$ e $n=4$ obtidos via ANSYS® para diferentes condições de contorno da casca desacoplada.

A comparação entre as deformadas modais analíticas e numéricas são feitas através cortes na casca para as condições de contorno apoiada-apoiada, apoiada-livre, engastada-apoiada, engastada-engastada e engastada-livre, sendo adotado como referência o modo de vibração $m=1$ e $n=4$. Assim, os resultados são apresentados para cada deslocamento, ou seja, para a direção longitudinal (u), circunferencial (v) e radial (w).

Vale ressaltar que em ambos os casos as amplitudes foram ajustadas pelos modos de vibração analíticos, ou seja, para cada tipo de deformada modal traçada ajustou-se as curvas para o ponto de máximo valor de deslocamento. Inicialmente para a condição de contorno apoiada-apoiada a Figura 5.7 mostra um corte longitudinal ($0 \leq z \leq L$) quando $\phi=90^\circ$ e a Figura 5.8 um corte na seção transversal da casca em ($0 \leq \phi \leq 360^\circ$) para $z=2L/3$. Em ambos os casos foi adotado o ângulo de fase $\psi=0^\circ$.

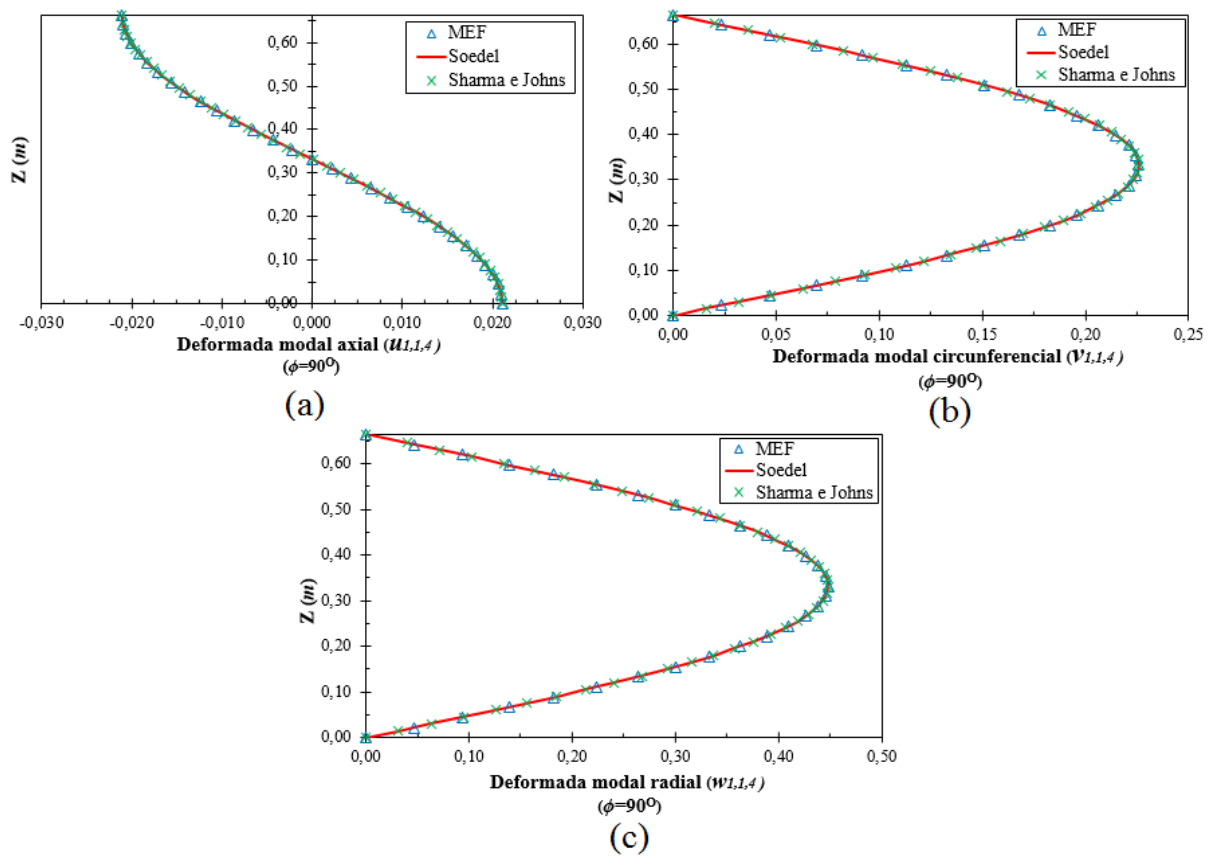


Figura 5.7 – Deformadas modais longitudinais da casca com condição de contorno apoiada-apoiada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.

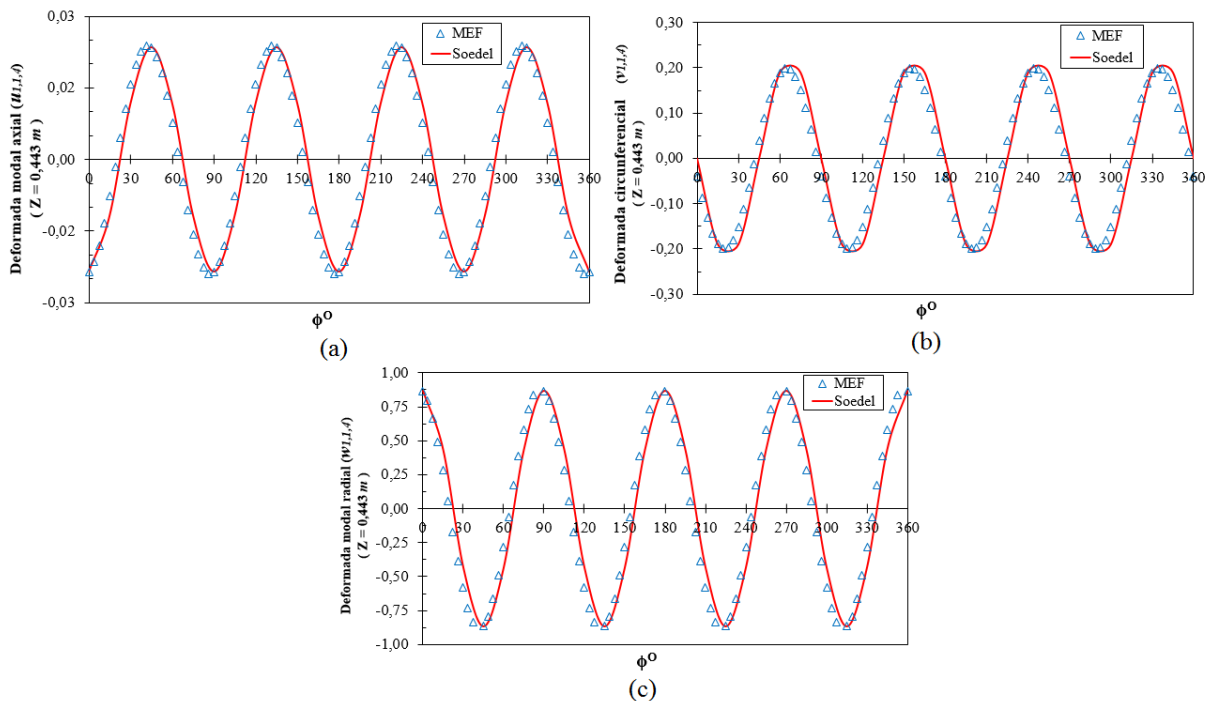


Figura 5.8 - Deformadas modais transversais da casca com condição de contorno apoiada-apoiada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.

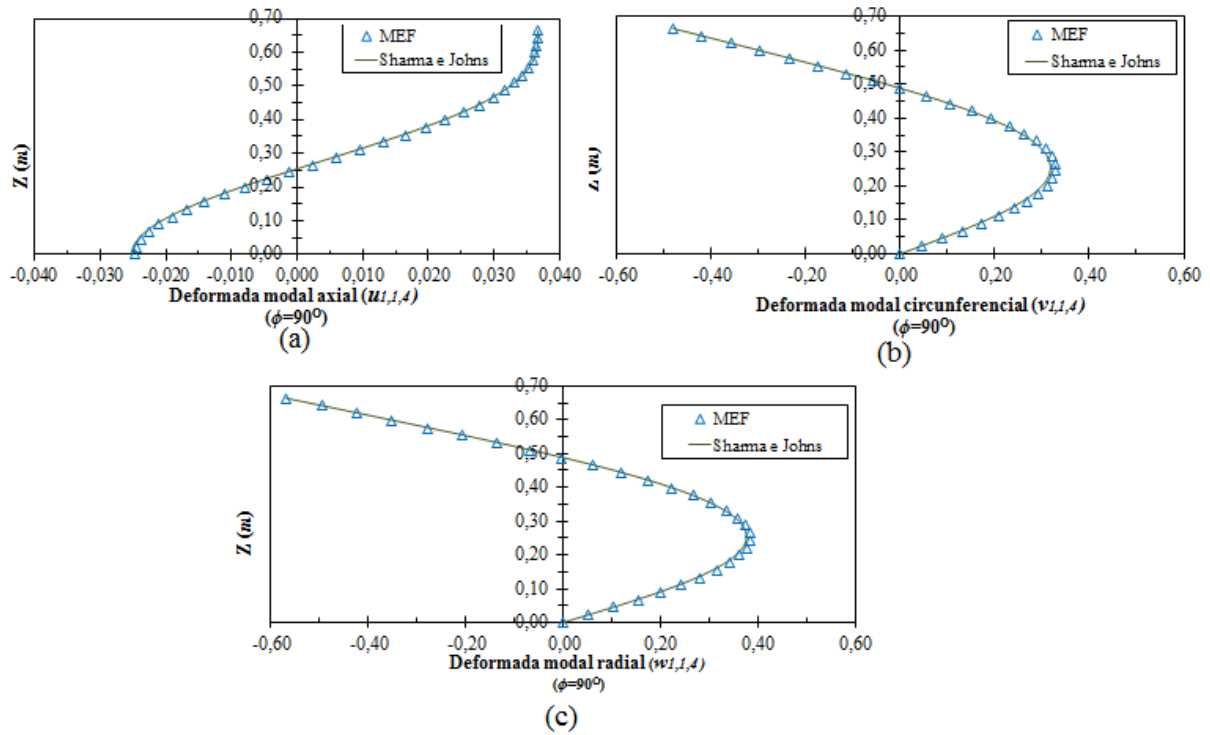


Figura 5.9 - Deformadas modais longitudinais da casca com condição de contorno apoiada-livre e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.

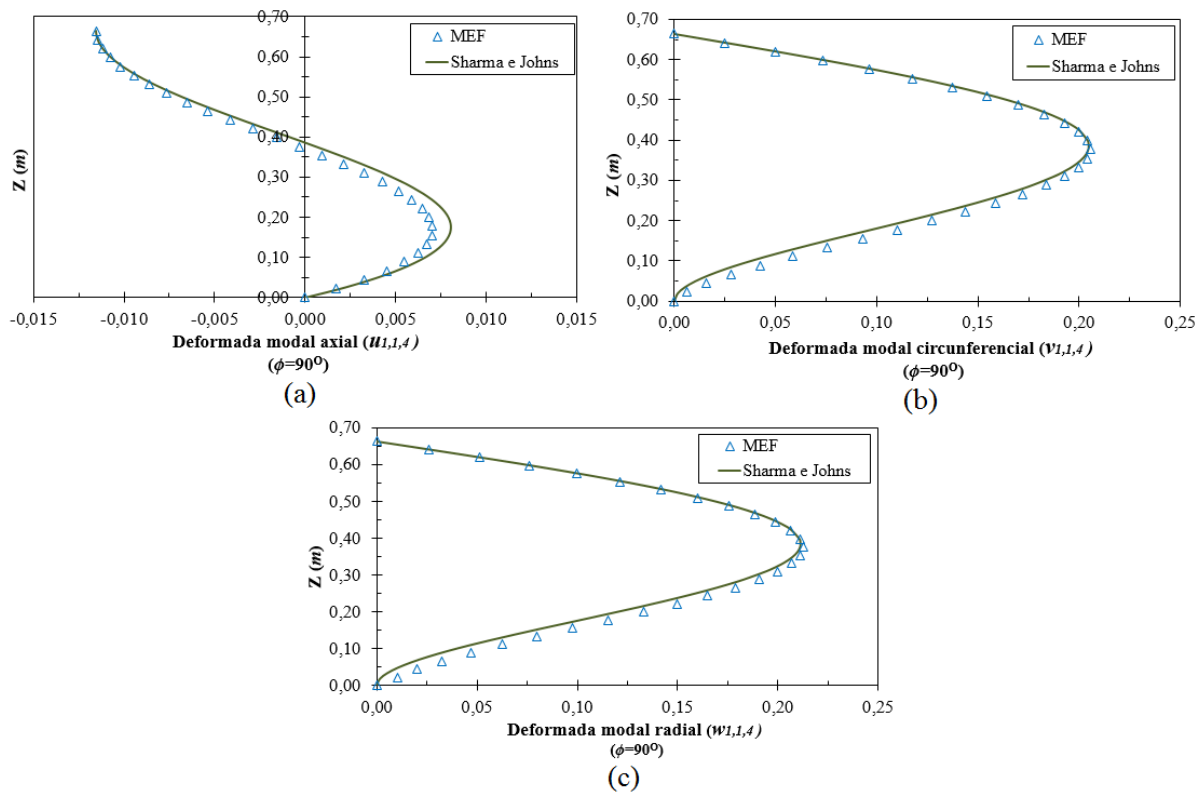


Figura 5.10 - Deformadas modais longitudinais da casca com condição de contorno engastada-apoiada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.

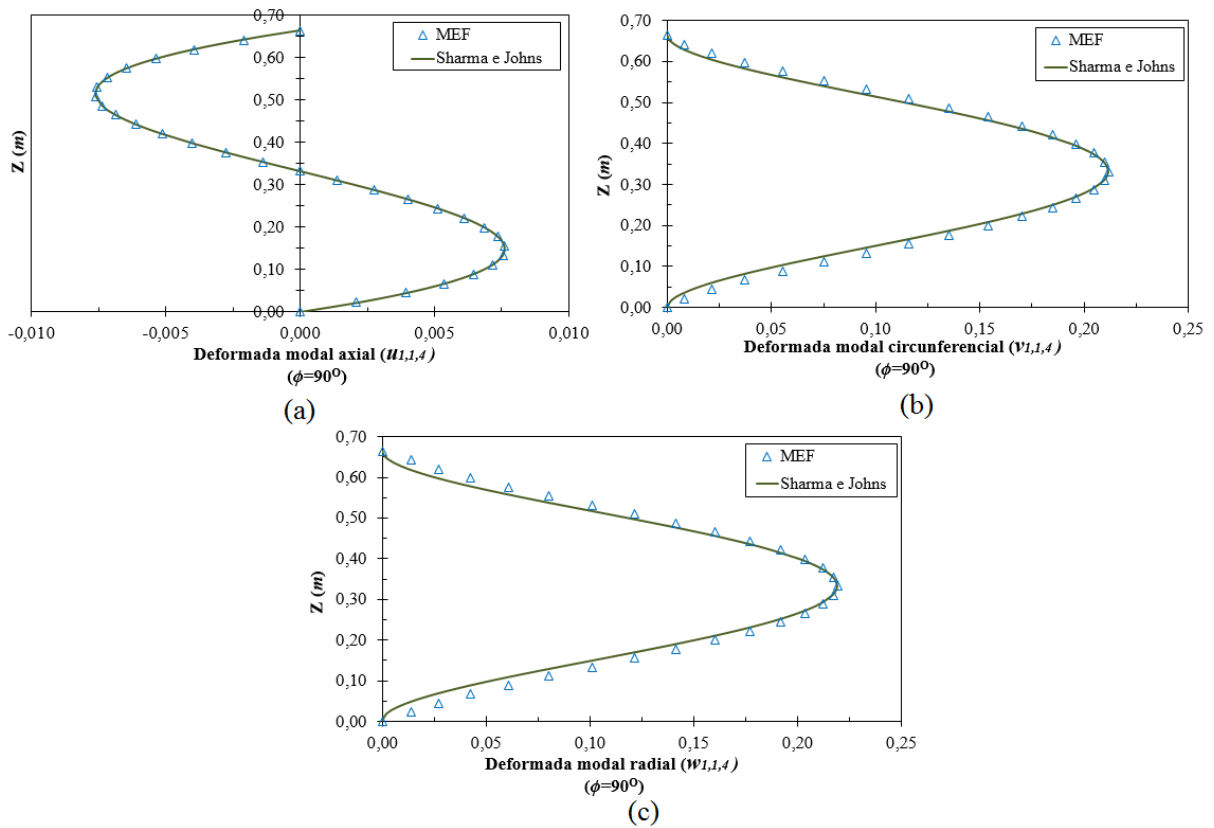


Figura 5.11 - Deformadas modais longitudinais da casca com condição de contorno engastada-engastada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.

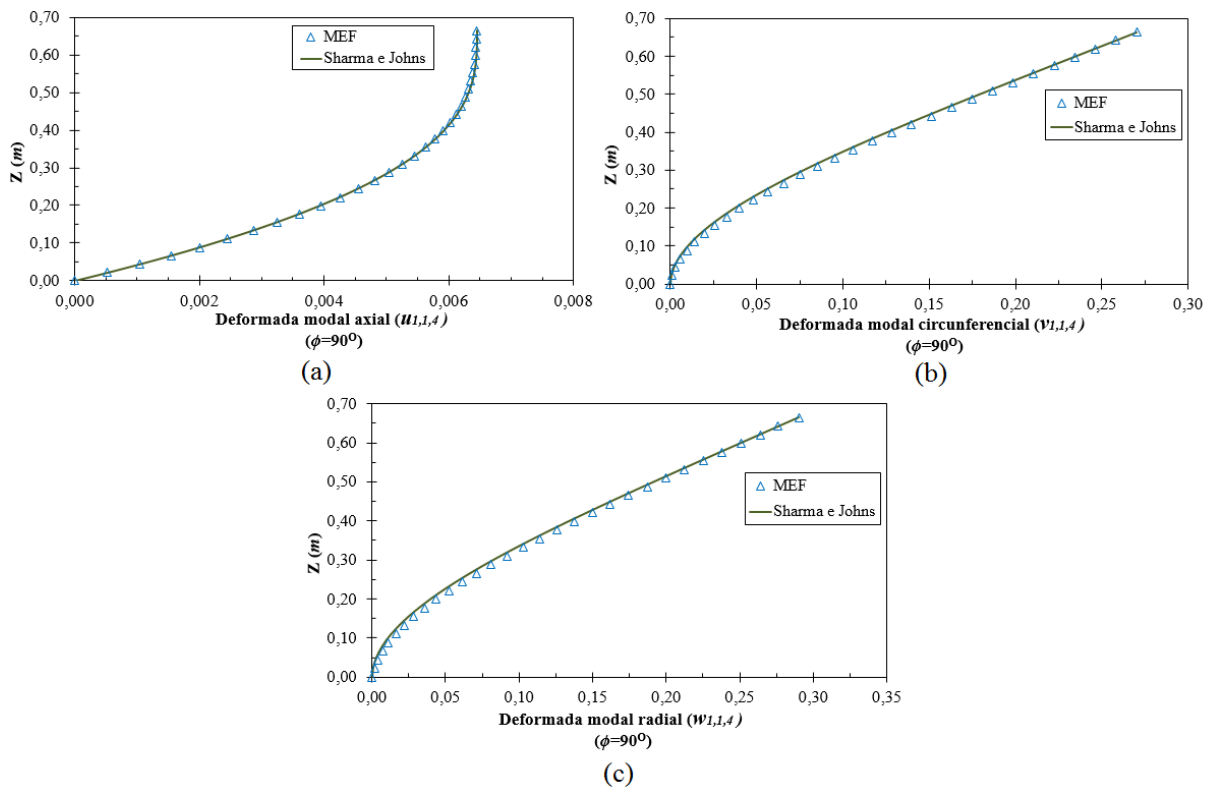


Figura 5.12 - Deformadas modais longitudinais da casca com condição de contorno engastada-livre e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.

Com as deformadas modais apresentadas nas figuras acima fica nítido que a modelagem numérica e refinamento da malha foram realizados de forma correta, pois somente em alguns pontos é visto uma pequena defasagem entre os valores numéricos e analíticos. Outro aspecto importante a ser destacado é que o maior deslocamento é na direção radial (w), ou seja, condiz com os valores elevados de frequências encontrados anteriormente. Por fim, são mostrados na Tabela 5.7 e Tabela 5.8 a seguir alguns modos de vibração numéricos obtidos via ANSYS® com o intuito de facilitar a visualização das diferentes deformadas modais.

Tabela 5.7 – Frequências naturais e modos de vibração numéricos para uma casca desacoplada com condição de contorno apoiada-apoiada.

Modo (i,m,n)		Modos de vibração		Desformada modal		
		Deformada	Vista Superior	Axial (u)	Circunferencial (v)	Radial (w)
$i=1, m=1, n=2$	$\omega = 597,63$ (Hz)					
$i=1, m=1, n=3$	$\omega = 315,92$ (Hz)					
$i=1, m=1, n=4$	$\omega = 221,17$ (Hz)					
$i=1, m=2, n=1$	$\omega = 2961,16$ (Hz)					

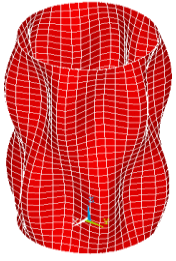
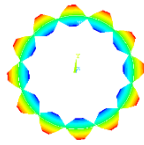
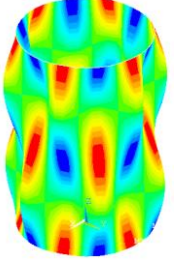
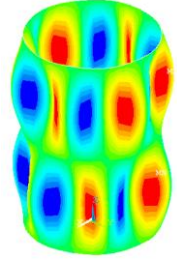
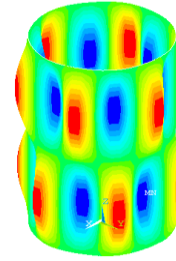
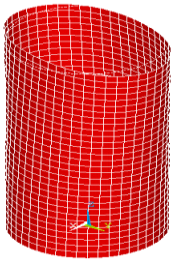
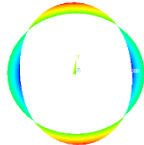
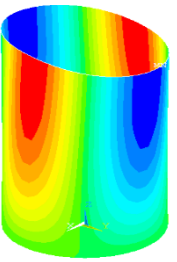
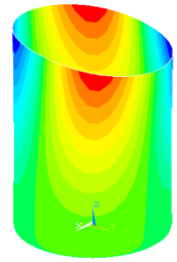
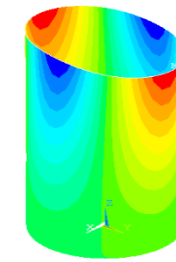
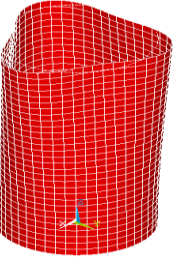
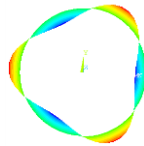
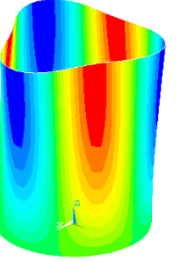
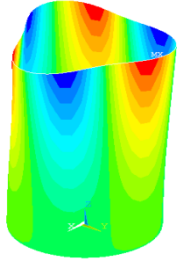
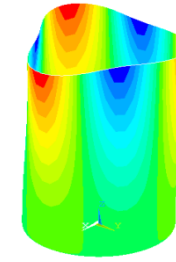
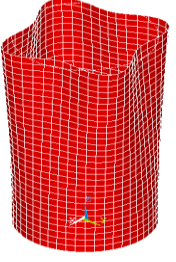
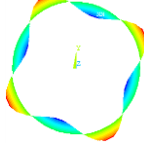
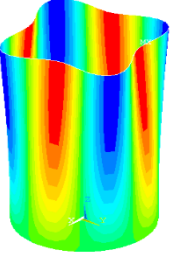
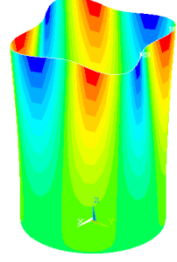
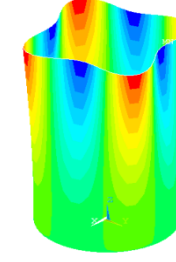
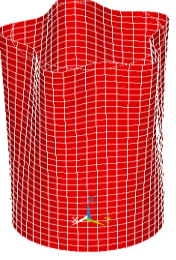
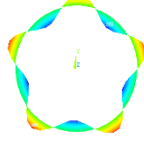
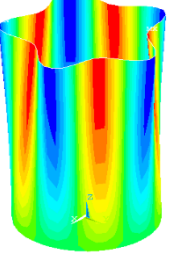
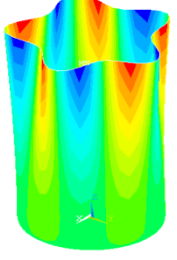
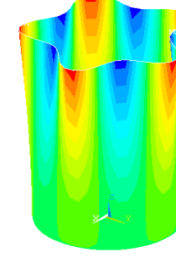
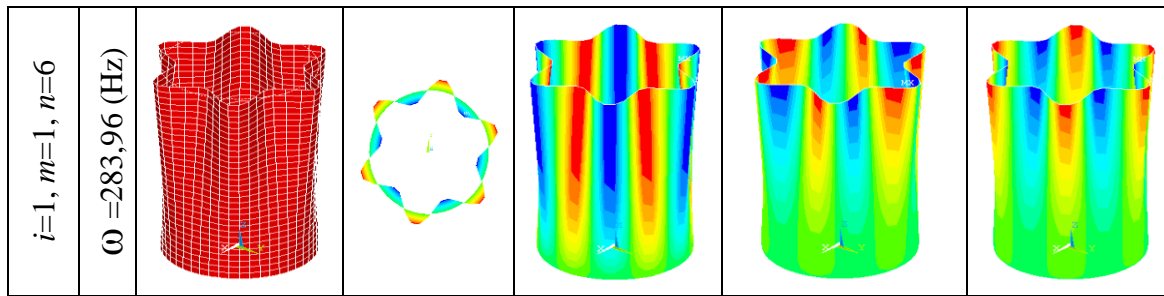
$i=1, m=2, n=6$	$\omega = 441,67$ (Hz)					
-----------------	------------------------	---	---	---	--	---

Tabela 5.8 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos para uma casca desacoplada com condição de contorno Engastada-livre

Modo (i,m,n)		Modos de vibração		Desformada modal		
		Deformada	Vista Superior	Axial (u)	Circunferencial (v)	Radial (w)
$i=1, m=1, n=2$	$\omega = 232,98$ (Hz)					
$i=1, m=1, n=3$	$\omega = 131,85$ (Hz)					
$i=1, m=1, n=4$	$\omega = 137,74$ (Hz)					
$i=1, m=1, n=5$	$\omega = 197,32$ (Hz)					



5.1.2 – Vibração forçada (Carga harmônica pontual)

Partindo da modelagem numérica validada na análise em vibrações livres, foi imposta na casca cilíndrica a carga harmônica pontual na direção radial (w), no centro da casca cilíndrica ($z=L/2$) e para respectivo ângulo $\phi=0^\circ$. A frequência de excitação (ω) da carga foi variada de 0 a 2500 rad/s e a razão de amortecimento adotada igual a zero ($\xi = 0\%$). Assim, foi possível obter as curvas das amplitudes dos deslocamentos axiais (u), circunferencial (v) e radial (w) em função desta frequência de excitação aplicada. Desta forma, foi feita uma varredura na faixa de frequência aplicada e determinado os maiores picos da curva, ou seja, a maior amplitude de deslocamento.

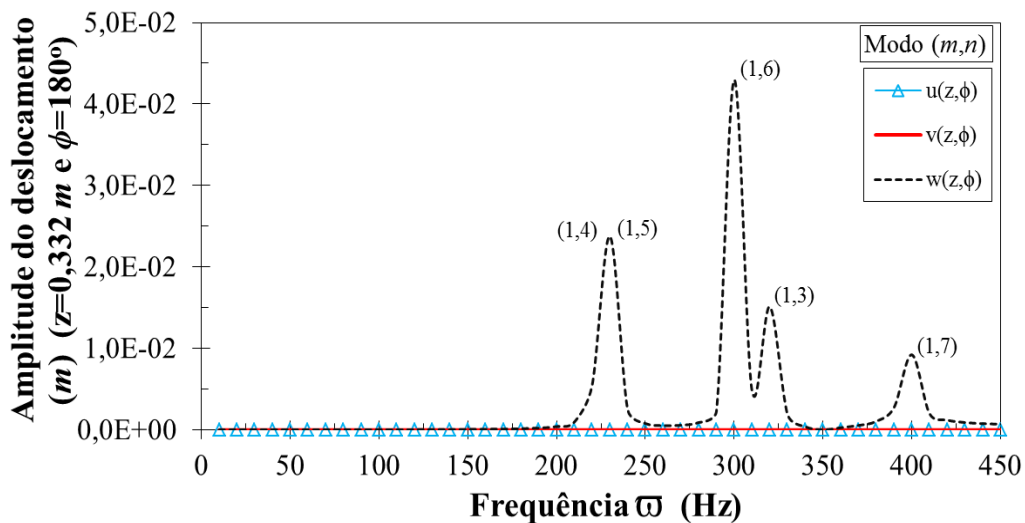


Figura 5.13 – Espectro de frequência numérico para uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada.

Através da Figura 5.13 pode-se observar que as amplitudes na direção radial são maiores, sendo principalmente a componente axial desprezível. Um aspecto importante é que as frequências encontradas no espectro de frequência são condizentes as frequências naturais da estrutura da casca, tendo diferenças inferiores a 5% para os primeiros modos desejados. Para

uma melhor identificação dos modos, foram determinados os deslocamentos em um corte da casca, ou seja, sendo variados apenas os pontos para diferentes ângulos. Cabe observar que somente a componente radial é analisada pelo fato de que as amplitudes circunferenciais e axiais são pequenas. A Figura 5.14 mostra a situação descrita.

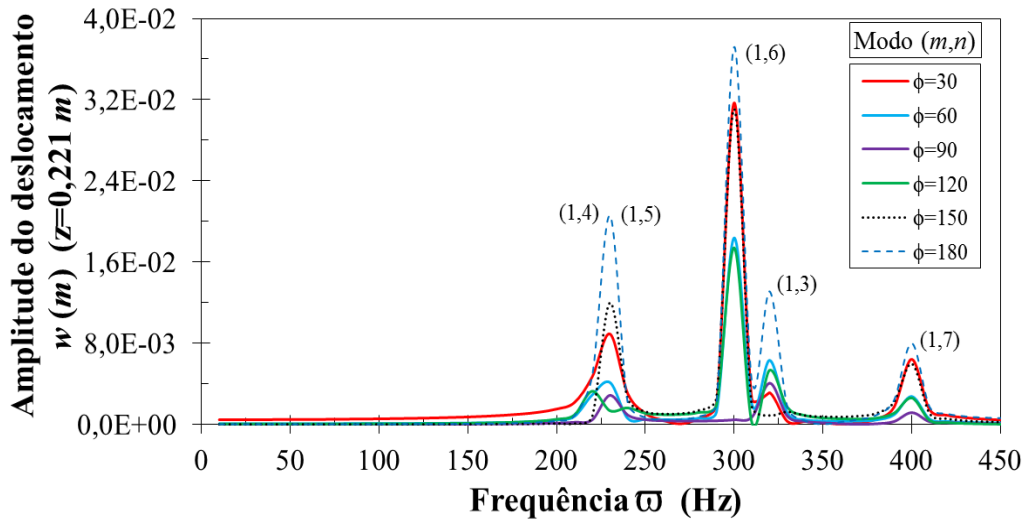


Figura 5.14 – Espectro de frequência numérico para uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada.

A Figura 5.14 mostra os resultados obtidos para os diferentes pontos de aplicação da casca. Observa-se também que a frequência do modo $m = 1$ e $n = 4$ é muito próxima do modo $m = 1$ e $n = 5$, sendo captado na mesma faixa de amplitude. A Figura 5.15 mostra uma análise em cinco pontos no sentido longitudinal da casca.

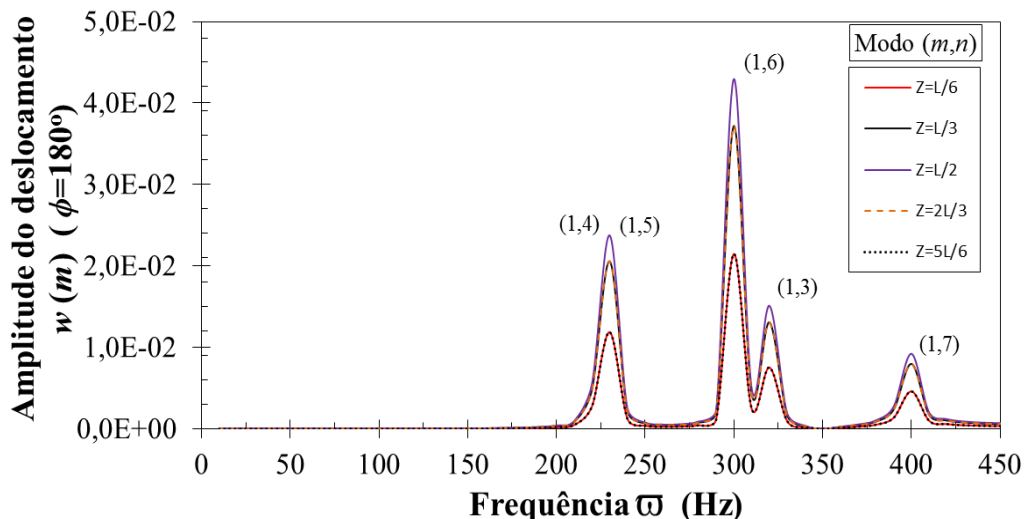


Figura 5.15 - Espectro de frequência numérico para uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada.

Através da Figura 5.15 pode-se notar que a análise foi satisfatória, pois além de captar os modos fundamentais da estrutura, os resultados encontrados em $Z=L/3$ são idênticos aos valores em $Z=5L/6$, sendo isso devido à simetria da casca, da condição de vinculação na extremidade e da aplicação da carga harmônica no centro da casca.

Por fim, as Figuras a seguir mostram os espectros de frequência para as diferentes condições de contorno da casca desacoplada.

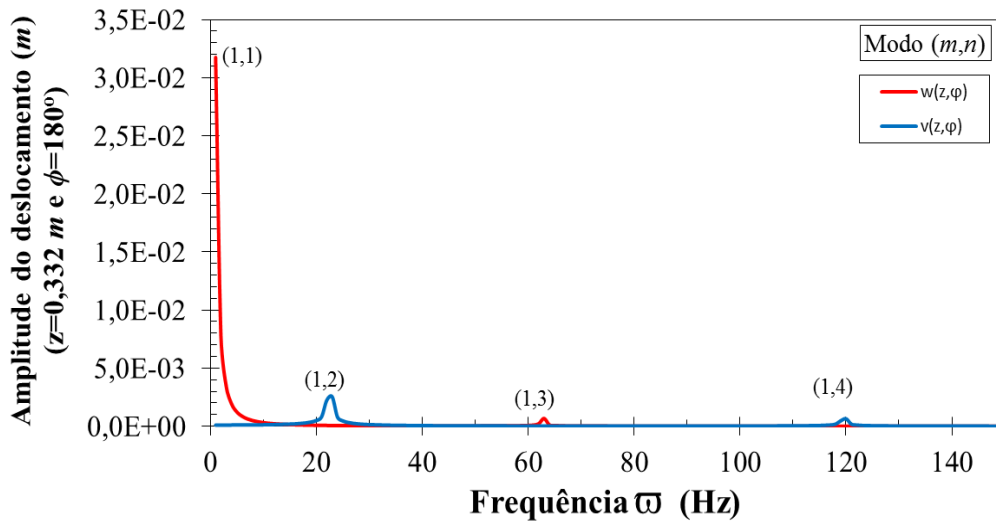


Figura 5.16 - Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno apoiada-livre.

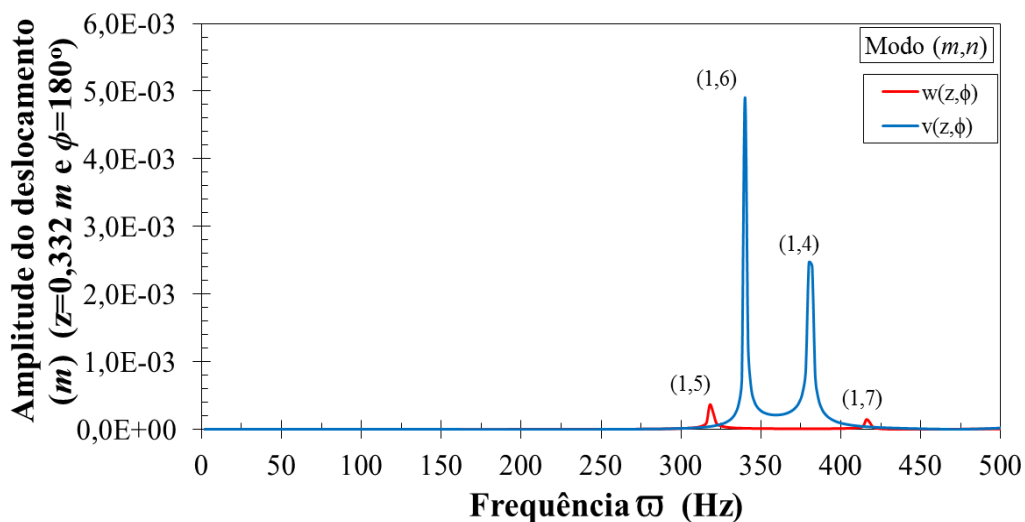


Figura 5.17 - Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno engastada-engastada.

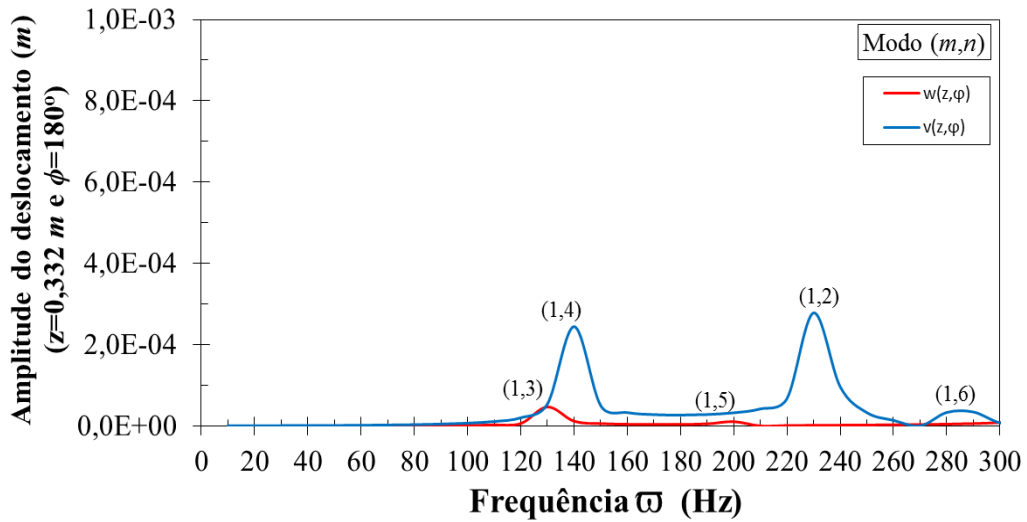


Figura 5.18 - Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno engastada-livre.

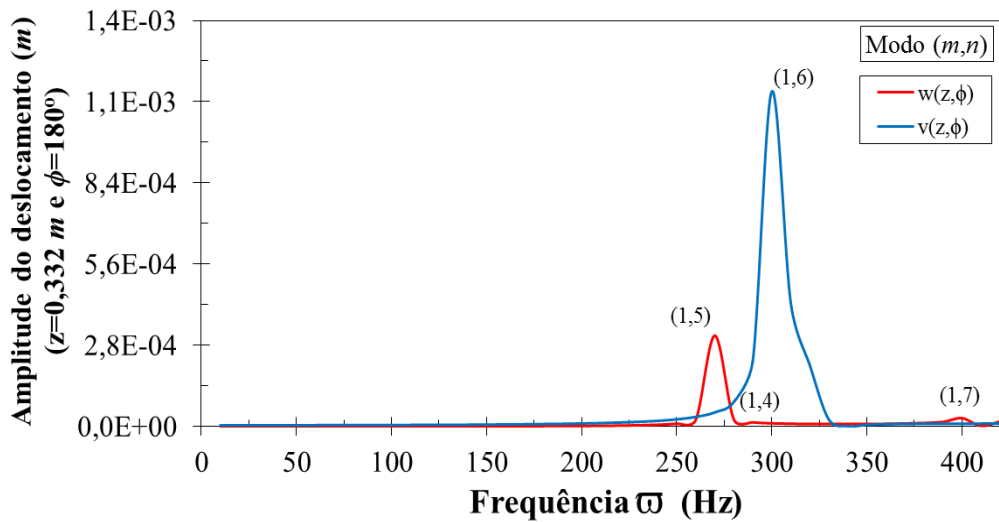


Figura 5.19 - Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno engastada-apoiada.

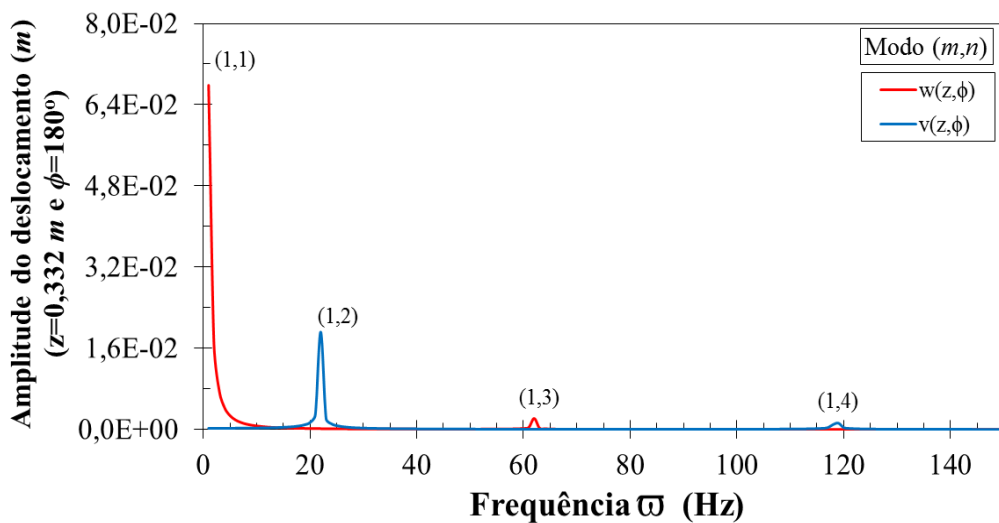


Figura 5.20 - Espectro de frequência para uma casca com condição de contorno livre-livre.

Com base nos espectros de frequência mostrados através das figuras acima se pode concluir que, os picos das curvas com as amplitudes de deslocamento ocorrem para frequências aplicadas aproximadamente iguais as primeiras frequências naturais em que a casca é excitada. Isso é observado para todas as condições de contorno, em que a diferença entre a frequência aplicada e a natural não ultrapassaram 3%. Conforme pode ser visto também, as maiores amplitudes foram identificadas tanto na direção radial (w) da casca quanto da direção circunferencial (v). Por fim, a modelagem numérica foi realizada de forma correta e os resultados mostraram-se satisfatórios.

5.2 – FLUIDO DESACOPLADO

5.2.1 – Vibração livre

Neste item são abordados os resultados referentes à análise da cavidade acústica cilíndrica circular reta fechada lateral e com condição de contorno aberta-aberta na base e topo respectivamente. Na Tabela 5.9, são apresentados os resultados das nove primeiras frequências naturais analíticas e numéricas da cavidade, sendo que (N) indica a ordem do modo, \bar{i} é o índice nodal circular, \bar{m} o índice axial e \bar{n} indica um diâmetro nodal.

Tabela 5.9 – Frequências naturais do fluido desacoplado.

N	\bar{i}	\bar{m}	\bar{n}	$\Omega_{\bar{i},\bar{m},\bar{n}}$ Analítico (Hz)	$\Omega_{\bar{i},\bar{m},\bar{n}}$ MEF (Hz)	Erro (%)
1	0	1	0	1129,52	1130,30	0,07
2	0	2	0	2259,04	2265,40	0,28
3	0	1	1	2754,02	2757,20	0,12
4	0	2	1	3378,18	3385,00	0,20
5	0	3	0	3388,55	3409,70	0,62
6	0	3	1	4217,95	4237,30	0,46
7	0	1	2	4316,88	4326,10	0,21
8	0	4	0	4517,98	4568,30	1,11
9	0	2	2	4739,51	4751,10	0,24

Com base na Tabela 5.9, as frequências naturais da cavidade acústica se mostraram bem próximos entre resultados analíticos e numéricos para diferentes modos acústicos adotados.

Assim, a Tabela 5.10 a seguir apresenta alguns dos modos de vibração da cavidade acústica obtida através do método dos elementos finitos no *software* ANSYS.

Tabela 5.10 – Frequências naturais e modos de vibração numéricos da cavidade acústica.

Modo	(0,1,0)	(0,2,0)	(0,1,1)	(0,2,1)	(0,3,0)	(0,3,1)	(0,1,2)	(0,4,0)
Ω (Hz)	1130,30	2265,40	2757,20	3385,00	3409,70	4237,30	4326,10	4568,30
Pressão								

As frequências naturais e os modos de vibração desacoplados da cavidade são fundamentais para que se identifiquem os modos predominantes quando a estrutura é acoplada com o fluido. Por fim, as Figuras 5.21, Figura 5.22 e Figura 5.23 a seguir apresentam alguns dos modos de pressão da cavidade acústica analíticos e numéricos, sendo os valores comparados através de um corte longitudinal para $(0 \leq z \leq H)$ quando $\theta=0^\circ$.

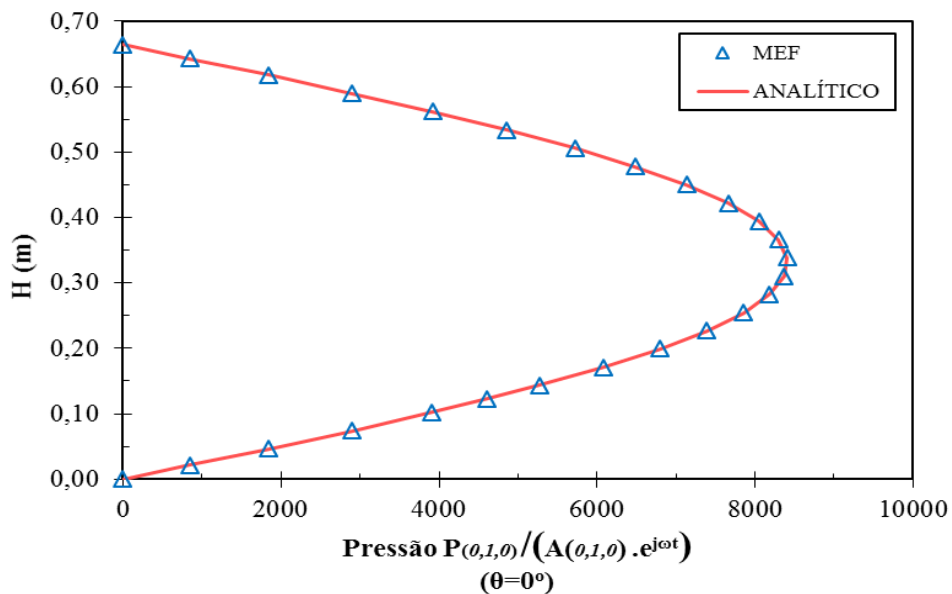


Figura 5.21 – Modo de vibração de pressão (0,1,0) analítico e numérico para o fluido desacoplado.

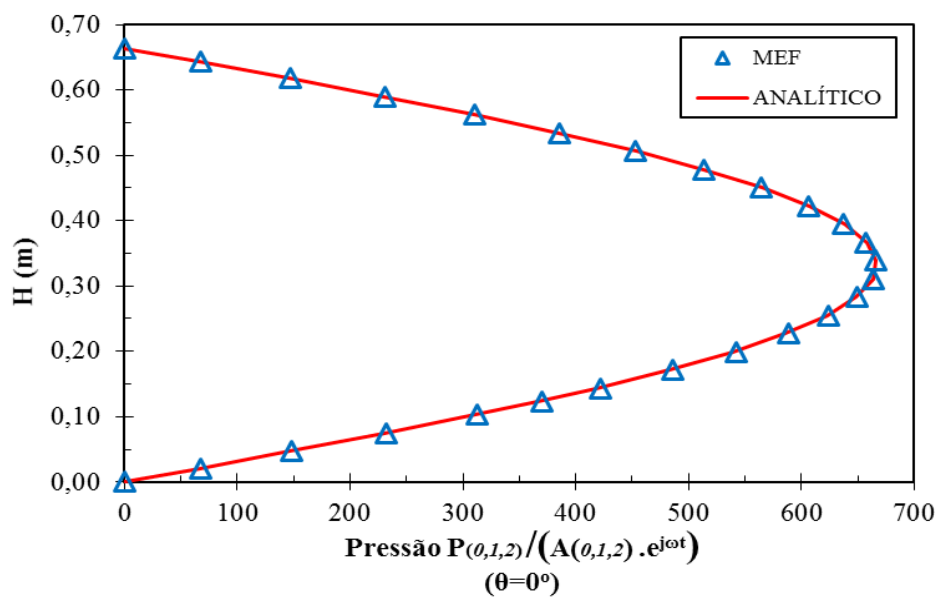


Figura 5.22 - Modo de vibração de pressão (0,1,2) analítico e numérico para o fluido desacoplado.

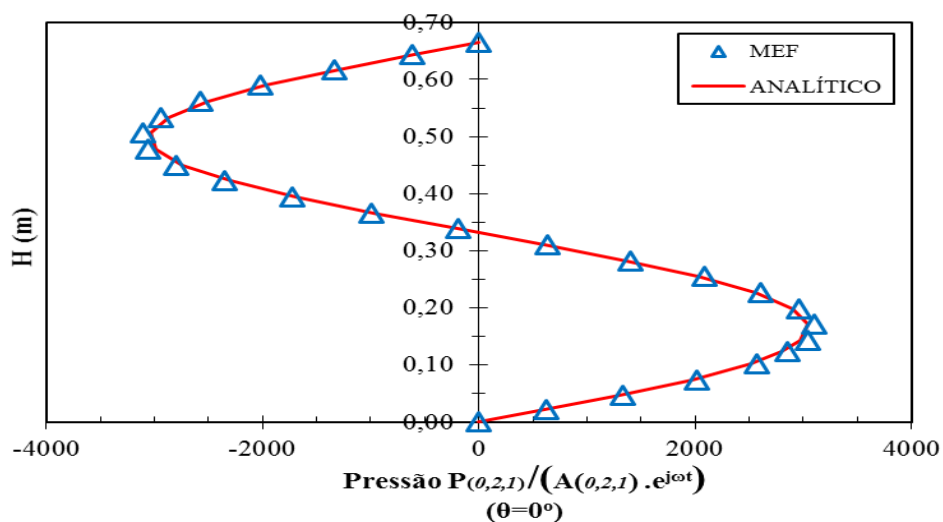


Figura 5.23 - Modo de vibração de pressão (0,2,1) analítico e numérico para o fluido desacoplado.

Com base nas figuras acima as formas modais de vibração de pressão da cavidade acústica se mostraram bem próximas entre resultados analíticos e numéricos para os diferentes modos acústicos adotados. Desta forma, pode-se afirmar que a modelagem e refinamento da malha do fluido desacoplado foram realizados de forma correta.

5.3 - INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

5.3.1 – Vibração livre

A primeira análise do problema acoplado fluido-estrutura tem a casca com condição de contorno apoiada-apoiada e a cavidade acústica aberta-aberta. As frequências naturais obtidas através da técnica analítica de Soedel (2005) com a massa adicional foram comparadas com os valores encontrados na simulação numérica e são mostrados na tabela a seguir.

Tabela 5.11 – Frequências naturais da casca cilíndrica acoplada apoiada-apoiada.

N	i	m	n	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) Analítico (Soedel, 2005)	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) Numérico (MEF)	$\Omega_{i,m,n}$ (Hz) Experimental (Amabili e Dalpiaz, 1995)	$E_{[1]}$ (%)	$E_{[2]}$ (%)	$E_{[3]}$ (%)
1	1	1	4	88,96	91,77	92,00	3,16	3,42	0,25
2	1	1	5	100,62	104,91	104,00	4,26	3,36	0,88
3	1	1	3	114,73	117,70	119,00	2,59	3,72	1,09
4	1	1	6	139,20	147,08	147,00	5,66	5,60	0,05
5	1	1	7	195,79	210,07	206,00	7,29	5,21	1,98
6	1	1	2	192,55	198,35	-	3,01	-	-
7	1	2	6	206,26	220,52	-	6,91	-	-
8	1	2	5	216,14	229,19	-	6,03	-	-

Legenda: $E_{[1]}$: Erro entre teoria de Soedel (2005) e MEF; $E_{[2]}$: Erro entre Teoria de Soedel (2005) e Experimental; $E_{[3]}$: Erro entre MEF e Experimental.

As frequências naturais analíticas da casca cilíndrica acoplada com o fluido mostrada na Tabela 5.11 apresentam valores quase coincidentes (erros em média de 5%) com os valores numéricos obtidos através do MEF no *software* ANSYS e com os valores experimentais. Para uma visualização do comportamento das frequências acopladas a Figura 5.24 completa a análise da Tabela 5.11.

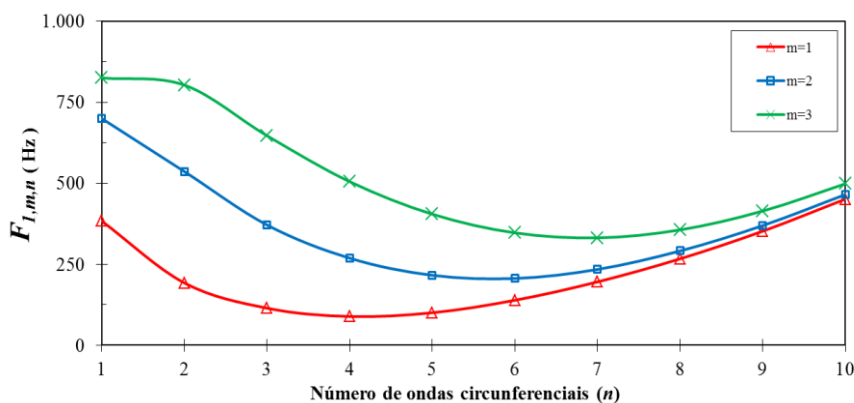


Figura 5.24 – Frequências naturais analíticas para casca acoplada apoiada-apoiada.

Através da Figura 5.24 é possível notar que apesar do comportamento das curvas serem os mesmos para a casca desacoplada, agora a presença do fluido reduziu as frequências naturais dessa estrutura, isso devido ao fato da incorporação da massa adicional nas equações da casca. Para um mesmo o modo longitudinal que expressa as menores frequências naturais ($m=1$) foram determinadas as frequências naturais analíticas acopladas para diferentes níveis de fluido da casca. A figura a seguir mostra os resultados obtidos.

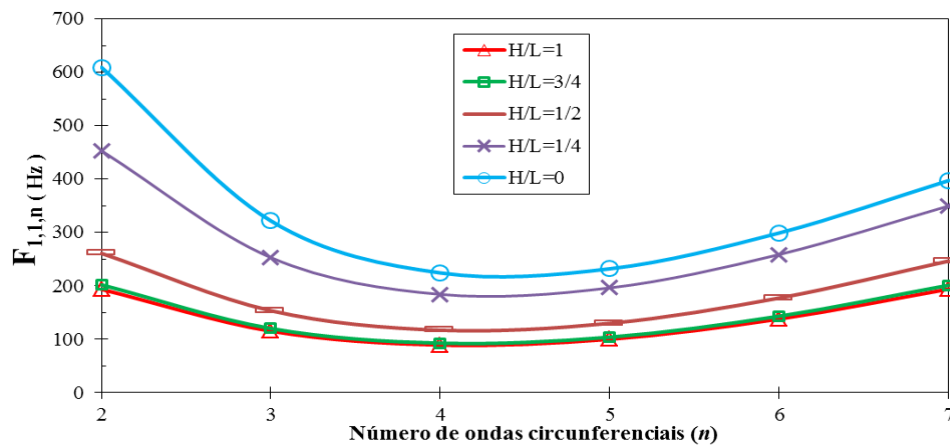


Figura 5.25 - Frequências naturais analíticas da casca acoplada apoiada-apoiada de índices modais $i=1$ e $m=1$ para diferentes níveis de fluido.

Com o gráfico mostrado pode-se observar que as frequências naturais atingem um valor mínimo para o mesmo modo n independentemente da quantidade de fluido na casca. Isso se dá ao fato de que quanto maior a quantidade de líquido, mais energia cinética é imposta no sistema sem uma modificação da energia interna de deformação elástica. Para um melhor entendimento, a figura a seguir mostra a massa adicional virtual empregada no acoplamento fluido-estrutura.

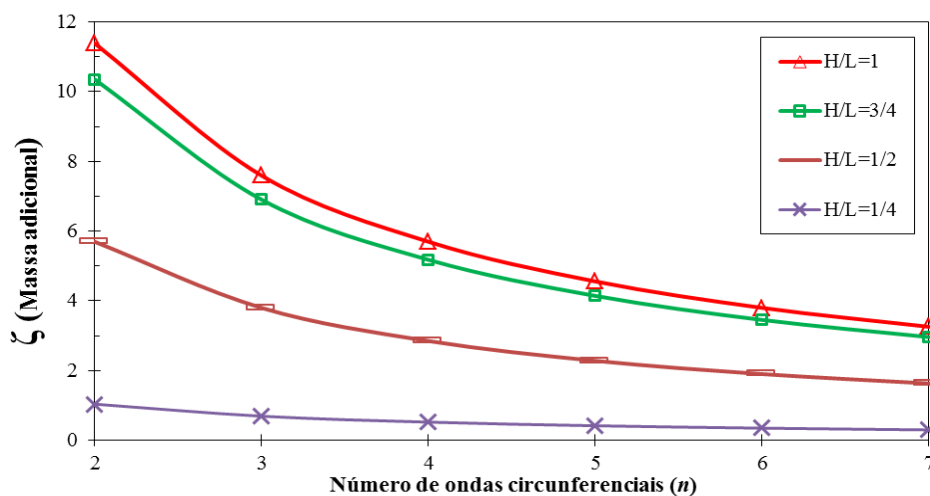


Figura 5.26 – Massa adicional para a interação fluido-estrutura da casca acoplada apoiada-apoiada de índices modais $i=1$ e $m=1$ para diferentes níveis de fluido.

Com base no gráfico mostrado acima se pode observar que a massa adicional empregada condiz com os valores de frequências acopladas obtidas, ou seja, quanto mais fluido, mais massa adicional é captada em cada modo circunferencial semelhante. Outro fator a ser observado é que quando a casca está preenchida com 25% de fluido ($H/L=1/4$) essa massa adicional permanece quase que constante para diferentes modos de vibração circunferencial.

Prosseguindo com as análises foi alterado o tipo de líquido no interior da casca, e conseqüentemente a idealização do fluido no modelo analítico e numérico. Foram adotadas duas curvas limites tendo por base a densidade extrema de fluidos, tais como: a casca preenchida com álcool ($\rho_{\text{álcool}}=789 \text{ Kg/m}^3$ e $c=1180 \text{ m/s}$) e com mercúrio ($\rho_{\text{mercúrio}}=13633 \text{ Kg/m}^3$ e $c=1450 \text{ m/s}$). A figura a seguir mostra a análise citada.

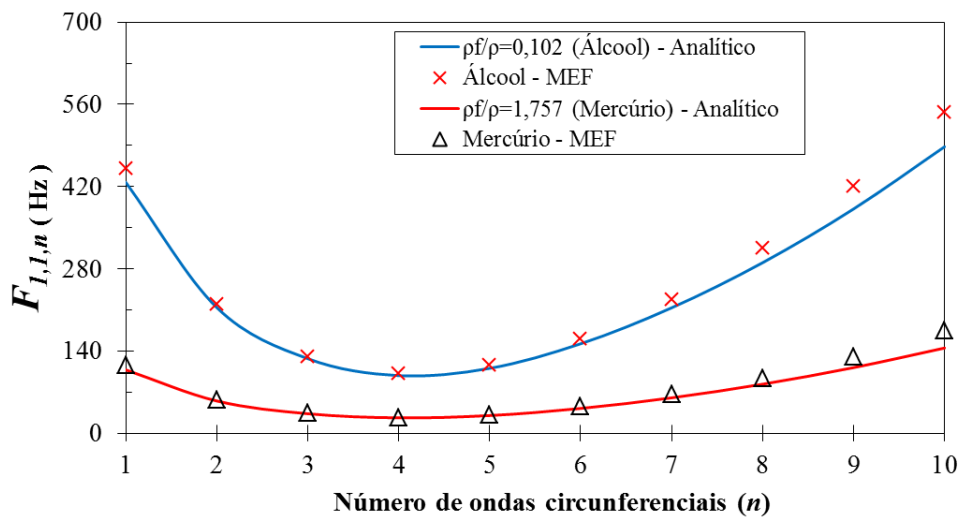


Figura 5.27 – Frequências naturais analíticas e numéricas da casca apoiada-apoiada para diferentes tipos de fluido.

Através da Figura 5.27 pode-se observar que os resultados analíticos e numéricos foram satisfatórios, uma vez que as curvas são coincidentes. Para um mesmo modo de vibração, como por exemplo, $m=1$ e $n=4$, o aumento na densidade do fluido diminuiu as frequências naturais acopladas. Fato que já se era esperado, pois aumentando a massa de fluido mais carga inercial é imposta na casca.

Por fim, as deformadas modais acopladas analíticas e numéricas foram comparadas para o modo que apresenta a menor frequência ($m=1$ e $n=4$) e são mostradas na Figura 5.28 através de um corte longitudinal ($0 \leq z \leq L$) quando $\phi=30^\circ$. A Figura 5.29 mostra um corte na seção transversal da casca em $z=2L/3$ para ($0 \leq \phi \leq 360^\circ$).

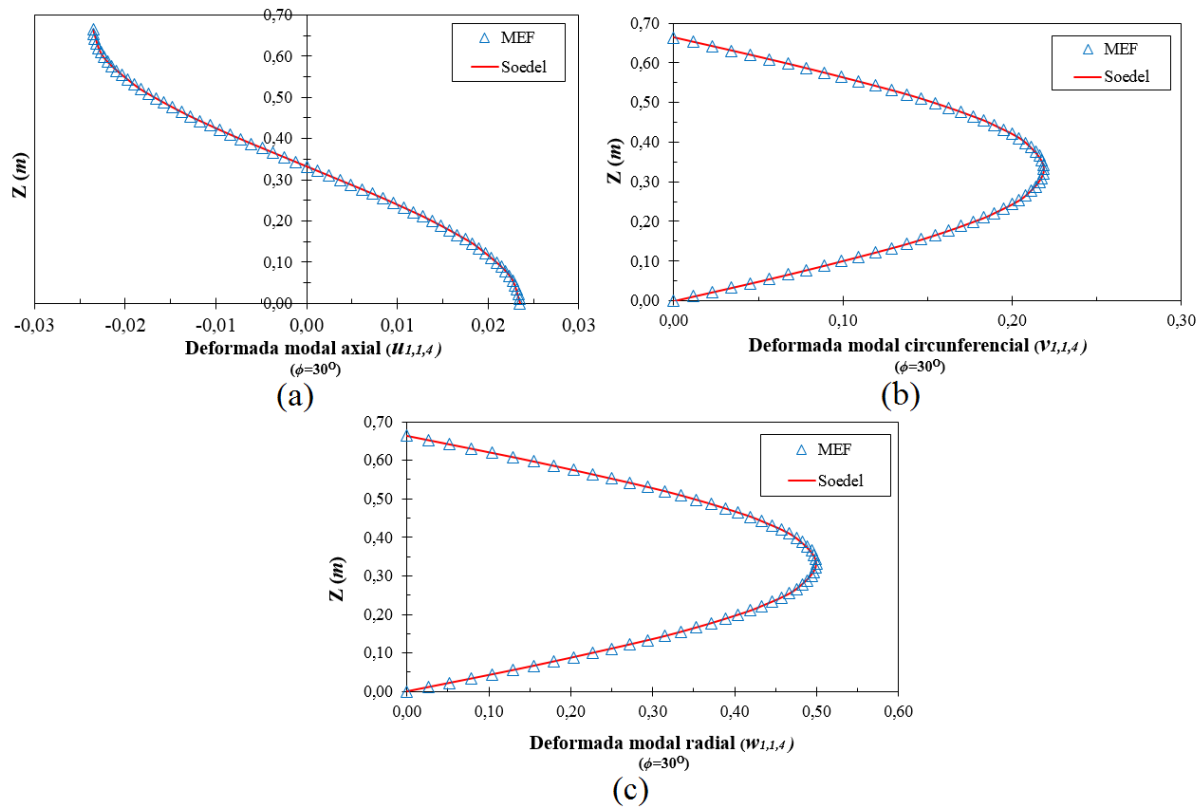


Figura 5.28 – Deformadas modais longitudinais da casca acoplada com condição de contorno apoiada-apoiada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.

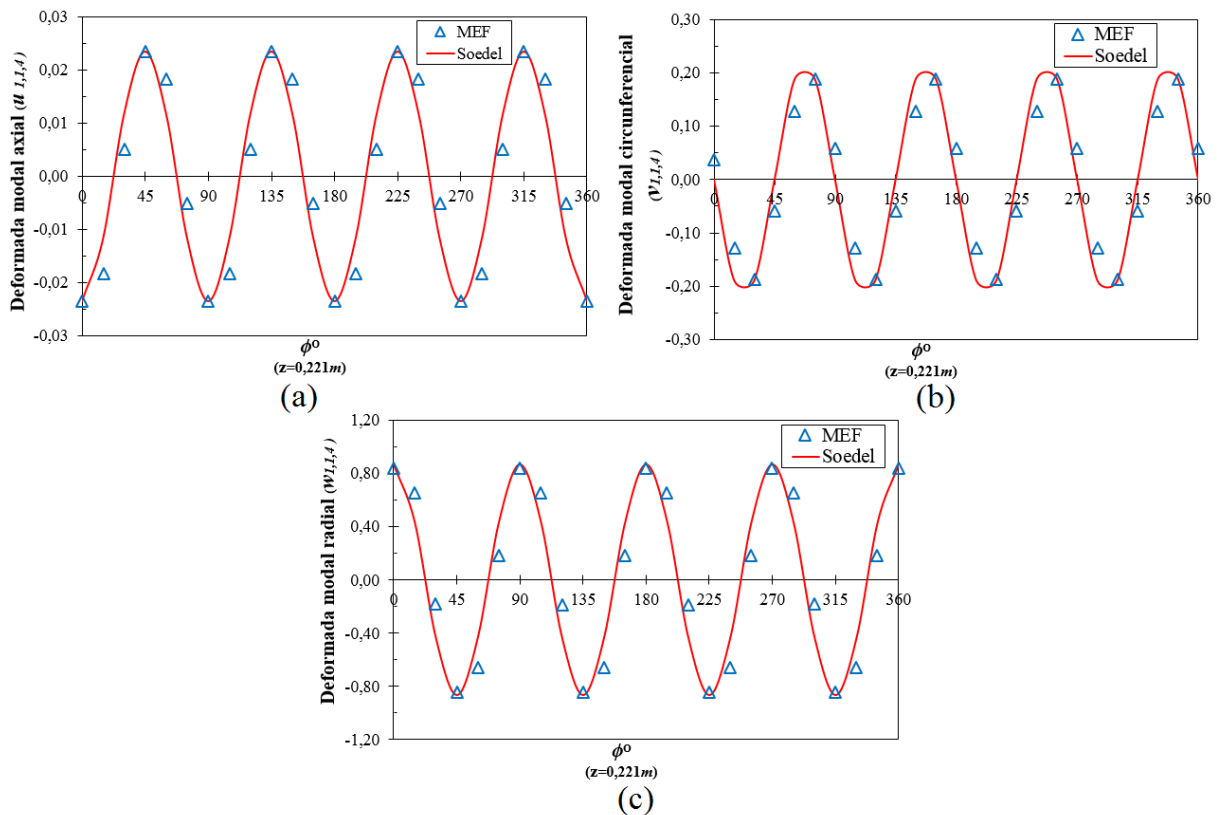


Figura 5.29 - Deformadas modais transversais da casca acoplada com condição de contorno apoiada-apoiada e índices modais $i=1$, $m=1$ e $n=4$: (a) Axial; (b) Circunferencial e (c) Radial.

Analisando as deformadas modais, pode-se notar que as curvas com valores analíticos e numéricos praticamente coincidem, apresentando uma pequena defasagem no corte transversal. Assim, com a modelagem validada foi possível a troca das condições de contorno da casca cilíndrica e conseqüentemente obter os resultados numéricos do problema acoplado para outras condições de vinculação.

Destaca-se ainda que no problema acoplado fora necessário à análise dos modos dominantes do sistema, pois conforme citado no capítulo da descrição do fenômeno, podem ocorrer modos dominante estrutura (DE), modos dominantes cavidade (DC) e modos misto (MM). Devido a isto, as frequências naturais e deformadas modais desacopladas e acopladas fluido estrutura foram comparadas entre si, bem como as deformadas de pressão da cavidade. A Figura 5.30 a seguir mostra uma análise de um modo dominante.

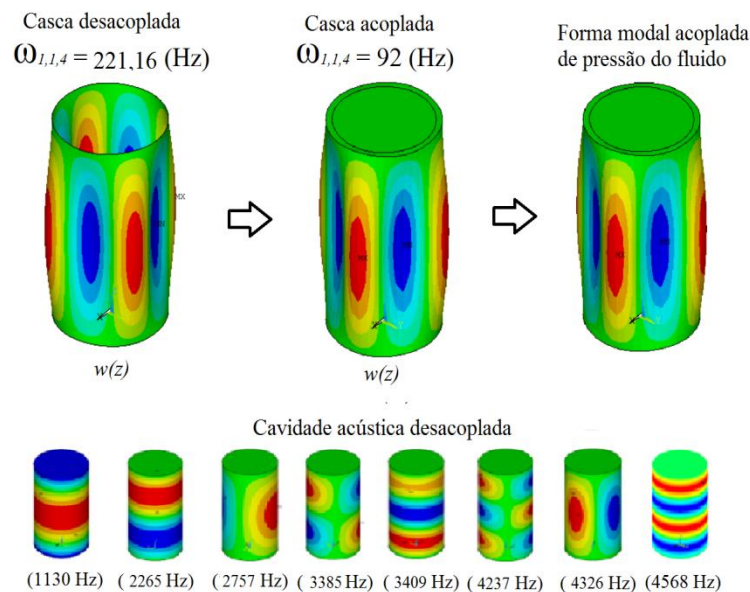


Figura 5.30 – Análise do modo dominante para o acoplamento fluido-estrutura.

Através da Figura 5.30 pode-se observar que a frequência final da casca acoplada é de 92 Hz, ou seja, houve uma diminuição em relação à frequência desacoplada (221,16 Hz). Isso significa que a presença do líquido acrescentou massa de fluido à estrutura, ou seja, um modo dominante estrutura de massa adicional, no qual durante o fenômeno de vibração a casca ao se deformar faz uma pressão no fluido e por sua vez este acompanha as deformadas da casca. Isso pode ser visto na figura pela forma modal acoplada de pressão do fluido, no qual reproduz exatamente o comportamento das deformadas da casca.

Outro fator preponderante para esta análise é a razão do produto entre a frequência natural e diâmetro do cilindro com a velocidade de propagação do som na água (parâmetro de compressibilidade), no qual quando for muito menor do que um ($\omega D/c \ll 1$) no modo de vibração em estudo, o fluido é classificado na análise como fluido incompressível e, mesmo que pequena, a sua compressibilidade não interfere de forma significativa a análise.

Assim sendo, semelhante à casca desacoplada, são abordados neste trabalho os modos com as menores frequências naturais da casca acoplada, ou seja, índice $i=1$ e $m=1$. A Tabela 5.12, Tabela 5.13 e Tabela 5.14 mostram as frequências naturais, os valores do parâmetro de compressibilidade e o modo dominante.

Tabela 5.12 – Frequências naturais acopladas numéricas e análises dos modos dominantes.

C.C			Apoiada-Apoiada				Apoiada-Livre			
<i>i</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Desacoplada	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Acoplada	$\omega D/c$	Modo	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Desacoplada	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Acoplada	$\omega D/c$	Modo
1	1	1	1337,16	408,39	0,598	DE/MA	2,20	0,58	8.10^{-4}	DE/MA
1	1	2	597,63	198,35	0,291	DE/MA	22,50	7,21	0,011	DE/MA
1	1	3	315,72	117,70	0,173	DE/MA	62,66	22,82	0,033	DE/MA
1	1	4	221,17	91,77	0,135	DE/MA	119,40	48,67	0,071	DE/MA
1	1	5	230,43	104,91	0,154	DE/MA	192,51	86,33	0,127	DE/MA
1	1	6	297,96	147,08	0,216	DE/MA	281,92	137,31	0,201	DE/MA
1	1	7	396,07	210,07	0,308	DE/MA	387,60	203,08	0,298	DE/MA

Tabela 5.13 - Frequências naturais acopladas numéricas e análises dos modos dominantes.

C.C			Engastada-Engastada				Engastada-Livre			
<i>i</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Desacoplada	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Acoplada	$\omega D/c$	Modo	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Desacoplada	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Acoplada	$\omega D/c$	Modo
1	1	1	1595,01	454,50	0,666	DE/MA	576,00	196,12	0,287	DE/MA
1	1	2	905,79	292,88	0,429	DE/MA	232,98	83,03	0,122	DE/MA
1	1	3	554,30	203,79	0,299	DE/MA	131,85	52,00	0,076	DE/MA
1	1	4	380,22	156,11	0,229	DE/MA	137,74	59,73	0,088	DE/MA
1	1	5	318,21	143,47	0,210	DE/MA	197,92	93,08	0,136	DE/MA
1	1	6	339,98	166,18	0,244	DE/MA	283,96	143,10	0,210	DE/MA
1	1	7	416,67	218,79	0,321	DE/MA	388,56	208,16	0,305	DE/MA

Tabela 5.14 - Frequências naturais acopladas numéricas e análises dos modos dominantes.

C.C			Engastada-Apoiada				Livre-Livre			
i	m	n	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Desacoplada	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Acoplada	$\omega D/c$	Modo	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Desacoplada	$\omega_{1,1,n}$ (Hz) Acoplada	$\omega D/c$	Modo
1	1	1	1455,03	430,94	0,632	DE/MA	2,10	0,65	$9 \cdot 10^{-4}$	DE/MA
1	1	2	761,30	248,01	0,364	DE/MA	21,87	7,41	0,011	DE/MA
1	1	3	437,69	161,13	0,236	DE/MA	61,76	23,47	0,034	DE/MA
1	1	4	297,59	122,13	0,179	DE/MA	118,42	49,84	0,073	DE/MA
1	1	5	269,01	121,18	0,178	DE/MA	191,49	88,03	0,129	DE/MA
1	1	6	315,52	154,12	0,226	DE/MA	280,86	139,36	0,204	DE/MA
1	1	7	405,02	212,59	0,312	DE/MA	386,50	205,28	0,301	DE/MA

Ao analisar a tabela acima se pode notar que, independentemente das diferentes condições de contorno, nas faixas das mínimas frequências possíveis para a casca acoplada o modo dominante foi o da estrutura, ou seja, para as mais diferentes formas modais o fluido acompanhou as deformadas da parede da casca. Outro aspecto importante é que com os valores para o parâmetro de compressibilidade muito menor que um, o fluido é classificado como incompressível, satisfazendo a consideração do acoplamento através da massa adicional, no qual atribuem nas suas hipóteses apenas os aspectos de acoplamento inercial, ou seja, ignora os efeitos de compressibilidade do fluido (Silva, 2007).

Desta forma, com os valores das tabelas recém-mostradas foi possível traçar um gráfico com o intuito de visualizar melhor o comportamento das frequências naturais acopladas para diferentes condições de contorno.

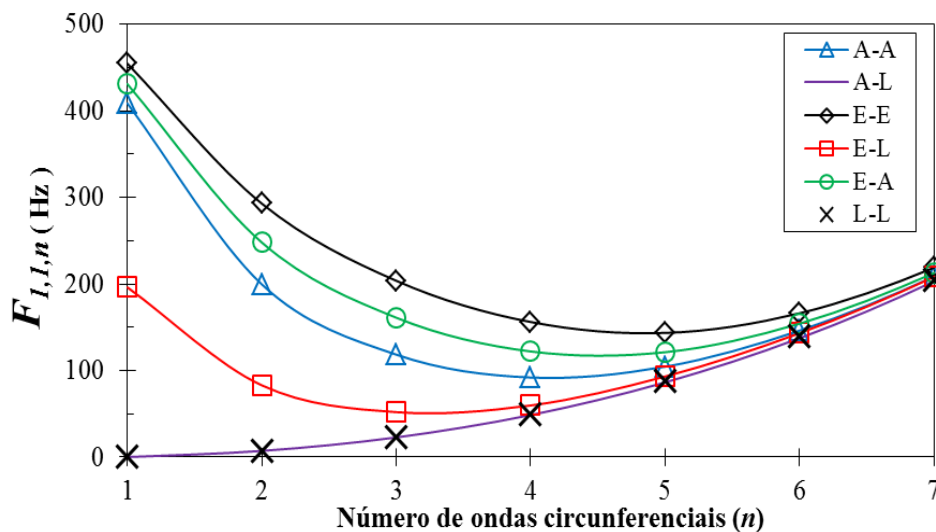


Figura 5.31 – Frequências naturais numéricas do modo $i=1$ e $m=1$ para diferentes condições de contorno da casca acoplada fluido-estrutura.

Ao analisar o gráfico mostrado pode-se perceber que o comportamento das frequências naturais da casca acoplada para diferentes condições de contorno é semelhante ao da casca desacoplada. Entretanto, um fator preponderante a ser observado é que as frequências naturais acopladas da condição de contorno apoiada-livre foram um pouco menores quando comparada com a condição de contorno livre-livre. Nesse sentido, através da relação entre as frequências desacopladas e acopladas da equação apresentada por Blevins (1979), foi possível determinar a relação entre a massa adicional de fluido e a massa da casca (Ma/Mc) para as diferentes condições de contorno. A Figura 5.32 mostra os resultados obtidos.

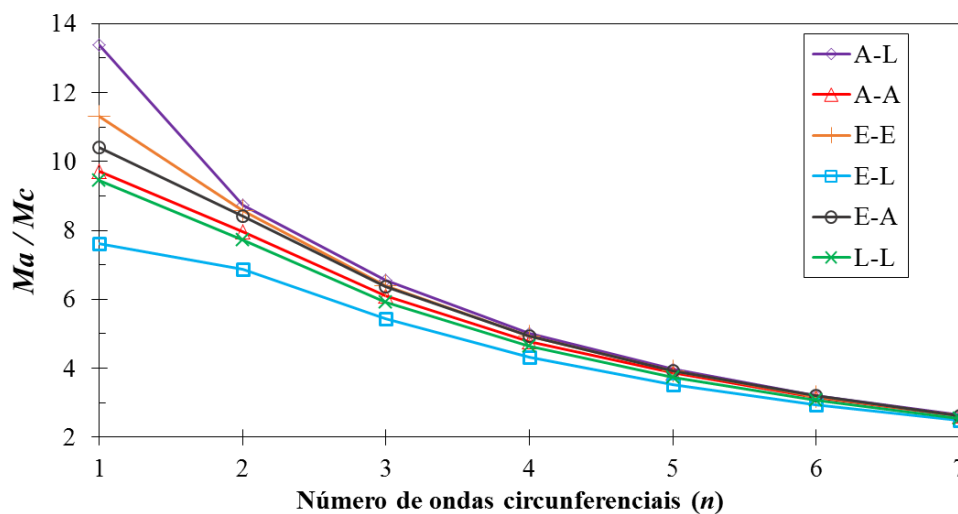


Figura 5.32 – Relação entre a massa adicional (Ma) e a massa da casca (Mc) para $i=1$ e $m=1$.

Com base na Figura 5.32 nota-se que as frequências para a casca apoiada-livre foram menores quando comparadas com a condição de contorno livre-livre devido ao fato da casca apoiada-livre captar mais massa adicional de fluido. Assim, quanto menor o número de modos circunferenciais maior a amplitude de deslocamento dos nodos e conseqüentemente uma maior região de fluido é perturbada.

Tal efeito pode ser justificado também pelo fato do modo longitudinal $m=1$ na condição livre-livre não ser o mesmo modo $m=1$ da apoiada-livre, ou seja, durante a vibração na condição livre-livre as forças inerciais do fluido se distribuem de forma igualitária no comprimento da casca com deformada constante do topo até a base, sendo isso devido à liberação das restrições de deslocamentos e rotações nas extremidades da casca. Assim, durante a vibração na condição apoiada-livre a deformada da casca envolve uma maior região de fluido e conseqüentemente capta uma maior massa adicional, aumentando a amplitude de

deslocamento no topo da casca e, conseqüentemente, reduzindo pouco mais as frequências naturais quando comparada com a condição livre-livre.

Em resumo pode-se afirmar que para o problema acoplado com modo dominante estrutura, a forma da deformada da casca, dependente do tipo das condições de contorno, atua sob uma determinada região de fluido (pequena ou grande), captando maior ou menor massa adicional em diferentes pontos da casca, no qual interfere diretamente nas respostas dinâmicas da estrutura.

De acordo com Lakis & Paidoussis (1971), as amplitudes de deslocamento de uma casca apoiada-apoiada cheia de líquido é menor quando comparada em relação a esta vazia, sendo isso devido a influencia do fluido. Tal fato também foi evidenciado neste trabalho para a casca apoiada-apoiada e, por fim, a seguir são apresentadas as deformadas modais numéricas acopladas analisadas.

C.C	Apoiada-Apoiada						Apoiada-Livre					
Modo (m,n)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
ω (Hz)	198,35	117,70	91,77	104,91	147,08	396,07	7,21	22,82	48,67	86,33	137,31	203,08
Vista Superior												
Deformada Axial (ϕ)												
Deformada Circ. (ψ)												
Deformada Radial (w)												
Pressão (P)												

Figura 5.33 – Frequências naturais e deformadas modais numéricas da casca acoplada para $i=1$ e $m=1$.

c.c	Engastada-Engastada						Engastada-Livre					
Modo (m,n)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
Θ (Hz)	292,88	203,79	156,11	143,47	166,18	218,79	83,03	52,00	59,73	93,08	143,10	208,16
Vista Superior												
Deformada Axial (u)												
Deformada Circ. (v)												
Deformada Radial (w)												
Pressão (P)												

Figura 5.34 - Frequências naturais e deformadas modais numéricas da casca acoplada para $i=1$ e $m=1$.

c.c	Engastada-Apoiada						Livre-Livre					
Modo (m,n)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
Θ (Hz)	248,01	161,13	122,13	121,18	154,12	212,59	7,41	23,47	49,84	88,03	139,36	205,28
Vista Superior												
Deformada Axial (u)												
Deformada Circ. (v)												
Deformada Radial (w)												
Pressão (P)												

Figura 5.35 - Frequências naturais e deformadas modais numéricas da casca acoplada para $i=1$ e $m=1$.

Por fim, é apresentada na Figura 5.36 uma abordagem entre as frequências naturais para a casca vazia e cheia para as condições de contorno em estudo.

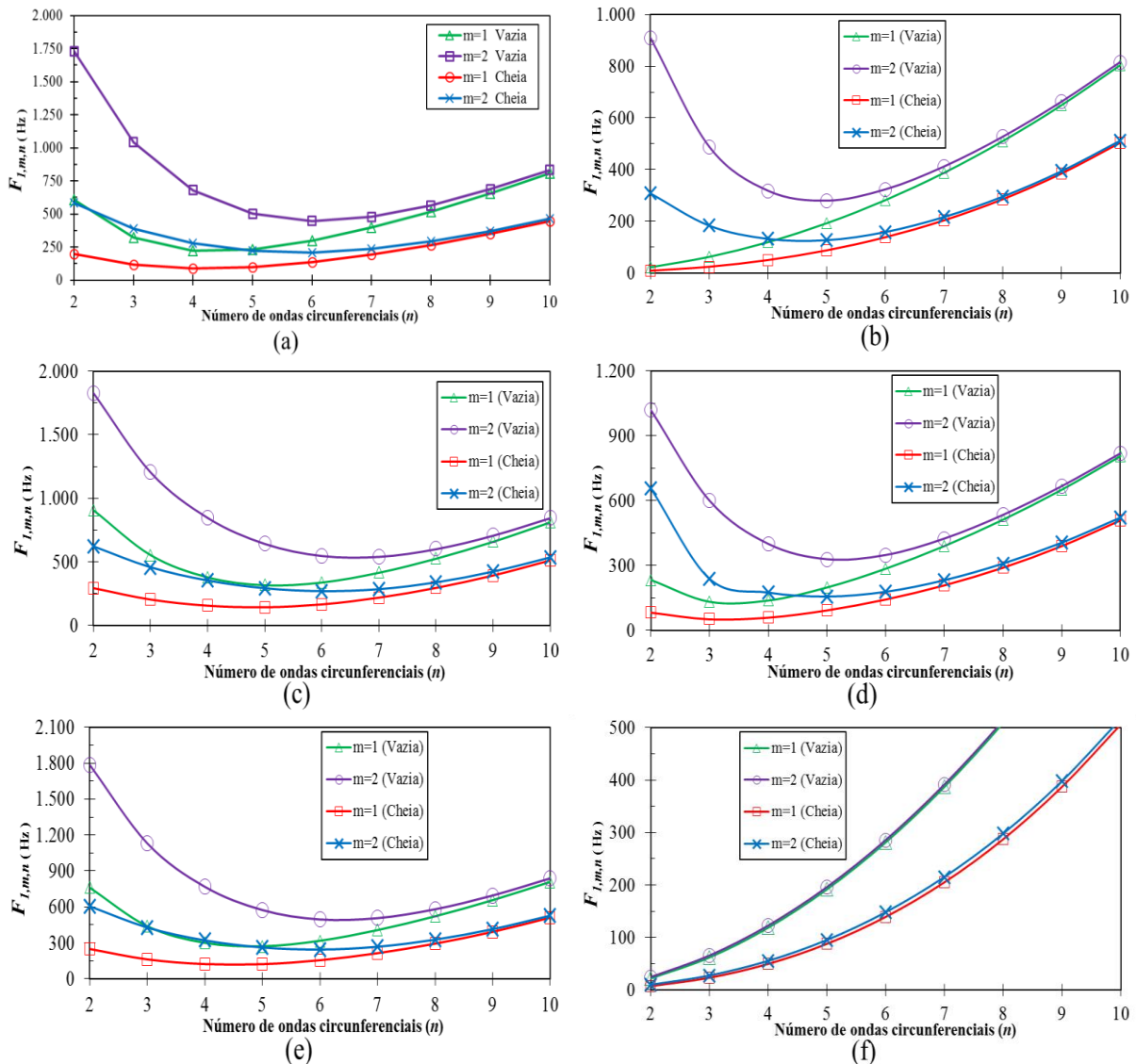


Figura 5.36 – Frequências naturais numéricas para a casca vazia e cheia: (a) A-A; (b) A-L (c) E-E; (d) E-L; (e) E-A e (d) L-L.

Com a análise dos gráficos na Figura 5.36 é possível observar que tanto para a casca vazia quanto cheia as frequências naturais mais baixas para as condições de contorno apoiada-apoiada, engastada-engastada, engastada-livre e engastada-apoiada estão caracterizadas nos modos $n=3$, $n=4$ e $n=5$. Para estas mesmas condições de vinculação se pode concluir também que, as menores frequências para os modos longitudinais $m=2$ com a casca cheia são atingidas primeiro do que os modos $m=1$ da casca vazia.

De todas as condições de contorno em estudo a livre-livre tem um comportamento particular, em que as curvas das frequências para diferentes modos longitudinais (m), tanto para a casca

cheia quanto para a casca vazia, são muito próximas. Isso pode ser explicado pelo fato de que a casca com nenhuma restrição no deslocamento e rotação tem as amplitudes de deslocamentos para os diferentes índices modais (m) pequenos, ou seja, as paredes da casca na direção longitudinal se deformam pouco. Assim, ressalta-se a importância em abordar as peculiaridades da presença do fluido e das condições de vinculação na análise dinâmica em estruturas. Portanto, para a casca apoiada-apoiada os resultados apresentados na Figura 5.36 são comparados com o experimento realizado por Amabili e Dalpiaz (1995).

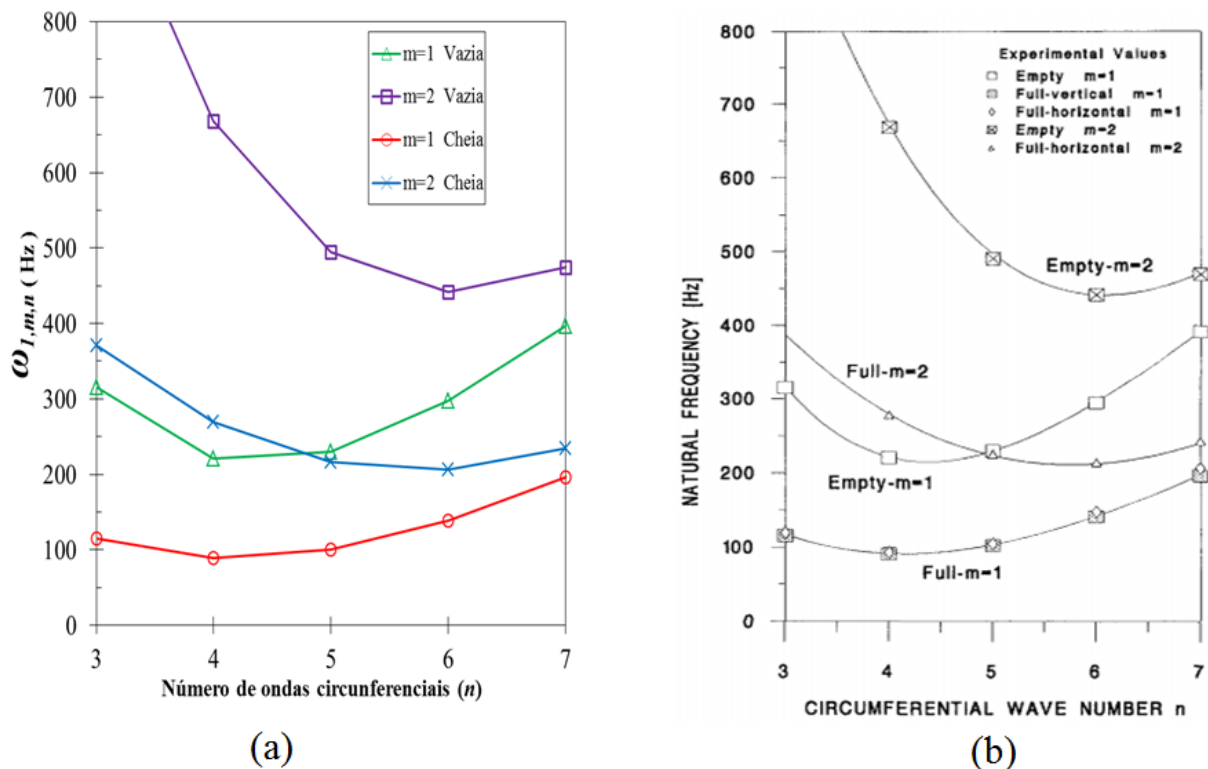


Figura 5.37 – Frequências naturais numéricas acopladas da casca cilíndrica apoiada-apoiada: (a) Presente trabalho e (b) Experimento (Amabili e Dalpiaz, 1995).

Por fim, através da Figura 5.37 pode-se observar que os resultados obtidos numericamente praticamente coincidiram com os valores experimentais encontrados por Amabili e Dalpiaz (1995).

5.3.2 – Vibração forçada (Carga harmônica pontual)

Partindo da modelagem numérica validada na análise em vibrações livres do problema acoplado fluido-estrutura, foi imposta na casca cilíndrica a mesma carga harmônica pontual do problema desacoplado na mesma direção radial (w), ou seja, no centro da casca cilíndrica ($z=L/2$) e ângulo $\phi=0^\circ$. Agora neste caso a frequência de excitação (ω) da carga foi variada de 0 a 1000 Rad/s e a razão de amortecimento também adotada igual à zero ($\xi = 0\%$). Assim, foi

possível obter as curvas das amplitudes dos deslocamentos axiais (u), circunferencial (v) e radial (w) em função desta frequência de excitação aplicada, no qual são mostradas a seguir.

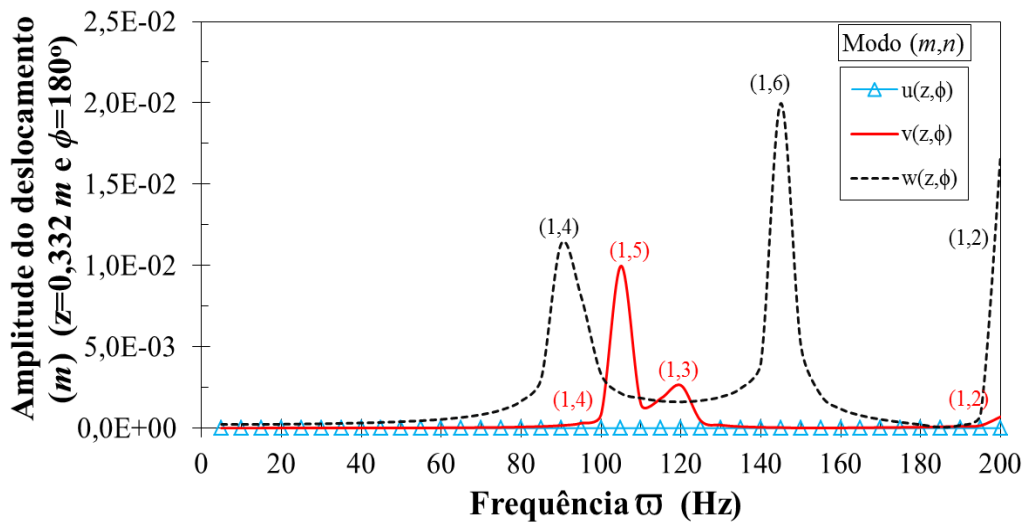


Figura 5.38 – Espectro de frequência numérico para uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada.

Através da Figura 5.38 pode-se observar que as amplitudes na direção radial são maiores e que a componente axial tem amplitude desprezível. Um aspecto importante é que as frequências encontradas no espectro de frequência são condizentes as frequências naturais da estrutura da casca, tendo pequena diferença (menor que 5%) para os primeiros modos analisados. Para uma melhor identificação dos modos, foram determinados os deslocamentos em um corte da casca, ou seja, sendo variados apenas os pontos para diferentes ângulos. Cabe observar que somente a componente radial é analisada pelo fato de que as amplitudes circunferenciais e axiais são pequenas. A Figura a seguir mostra a situação descrita.

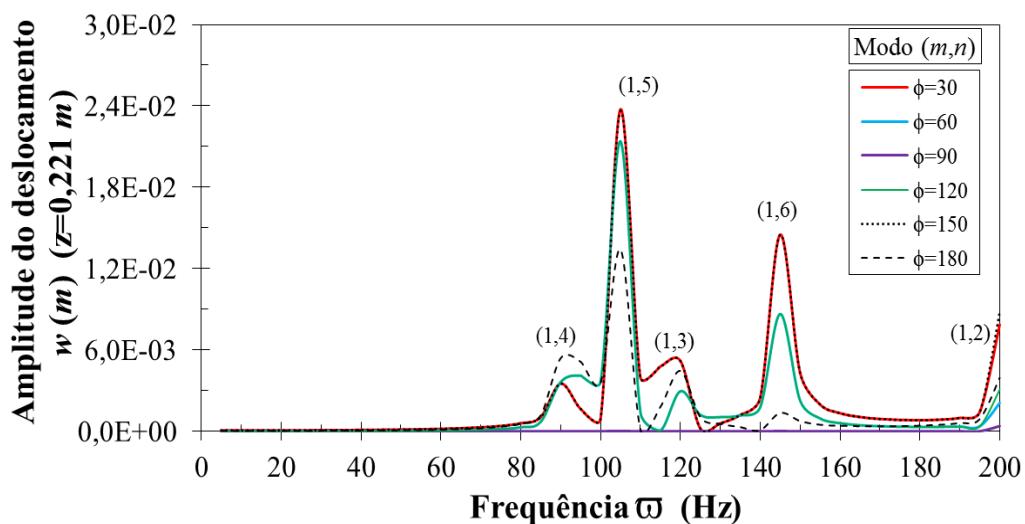


Figura 5.39 – Espectro de frequência numérico para uma casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada.

Através da Figura 5.39 pode-se notar que os resultados se mostraram satisfatórios, pois em diferentes pontos circunferenciais da casca foi possível obter os pontos de ressonância da estrutura. A Figura a seguir mostra uma análise em cinco pontos no sentido longitudinal da casca.

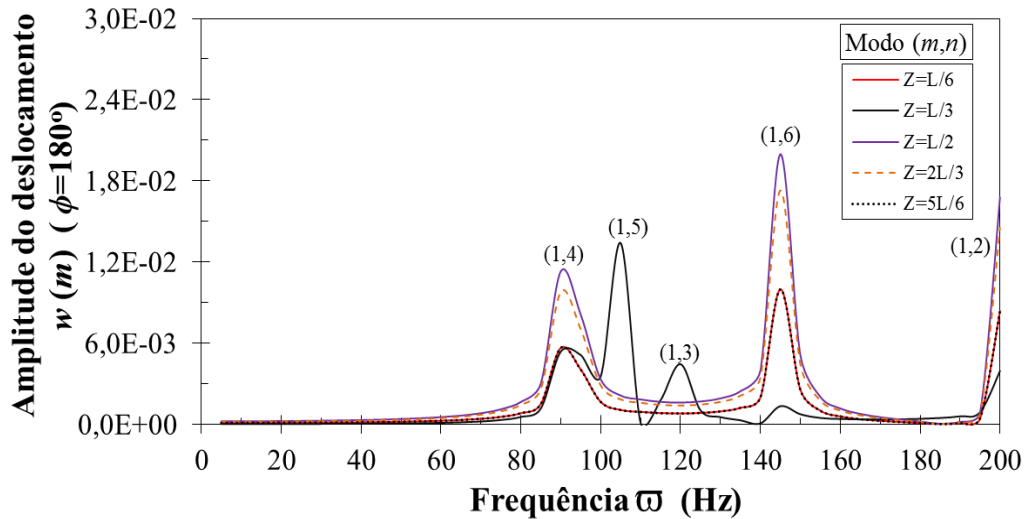


Figura 5.40 – Espectro de frequência para uma casca apoiada-apoiada acoplada com fluido. Através da Figura 5.40 pode-se notar que a análise foi satisfatória, pois além de captar os modos fundamentais da estrutura, os resultados encontrados em $Z=L/6$ são idênticos aos valores em $Z=5L/6$, sendo isso devido à simetria da casca, da condição de vinculação na extremidade e da aplicação da carga harmônica no centro da casca. Entretanto, na curva correspondente a $Z=L/3$ os resultados captam dois modos a mais $(1,5)$ e $(1,3)$. Por fim, as Figuras a seguir mostram os espectros de frequência para as diferentes condições de contorno da casca acoplada.

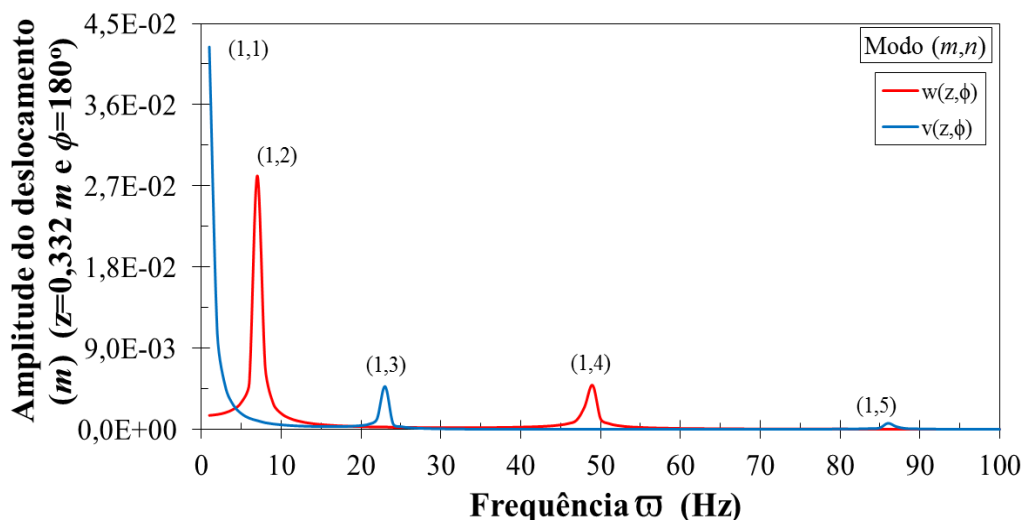


Figura 5.41 - Espectro de frequência para uma casca apoiada-livre acoplada com fluido.

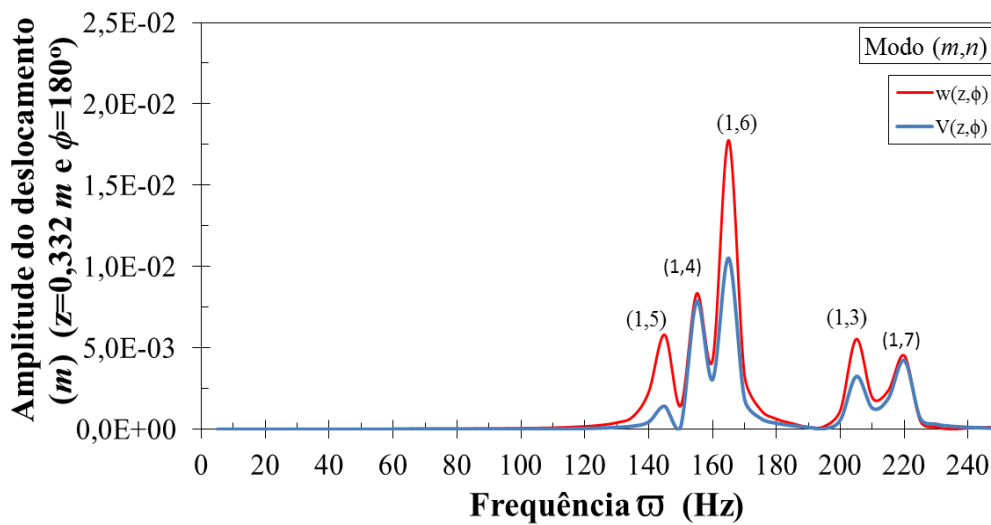


Figura 5.42 - Espectro de frequência para uma casca engastada-engastada acoplada com fluido.

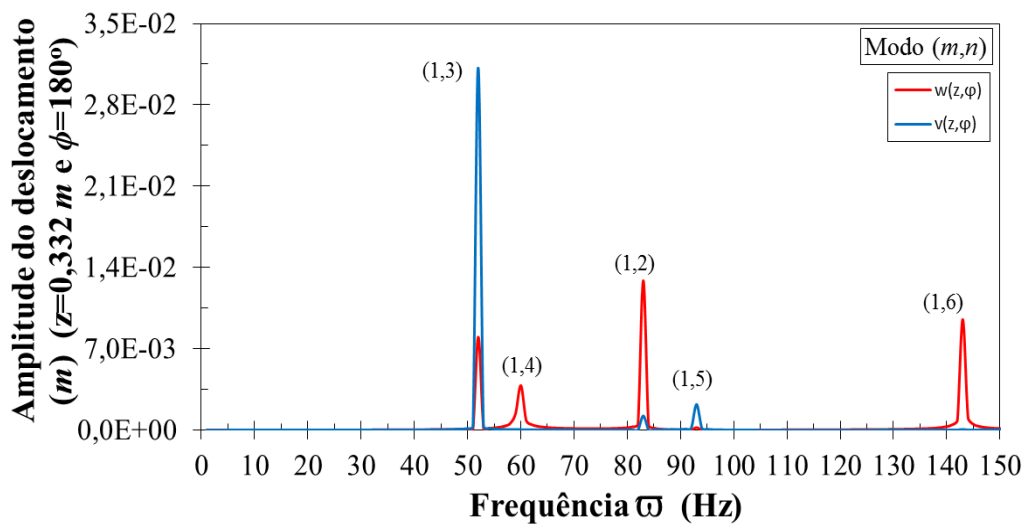


Figura 5.43 - Espectro de frequência para uma casca engastada-livre acoplada com fluido.

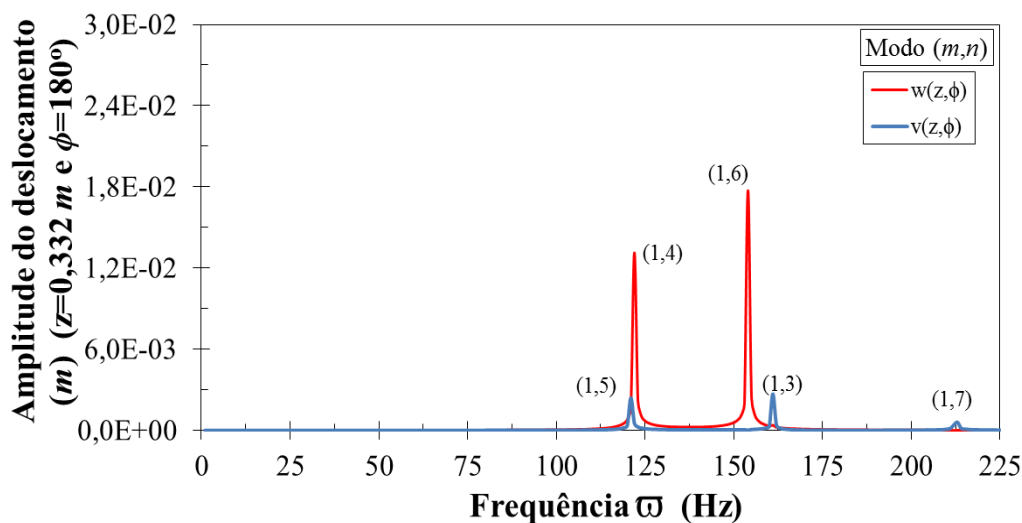


Figura 5.44 - Espectro de frequência para uma casca engastada-apoiada acoplada com fluido.

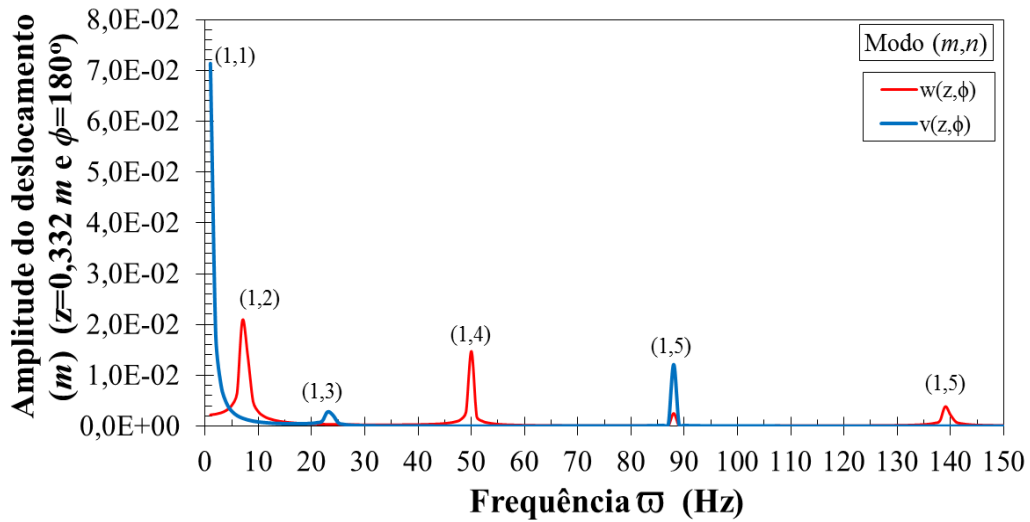
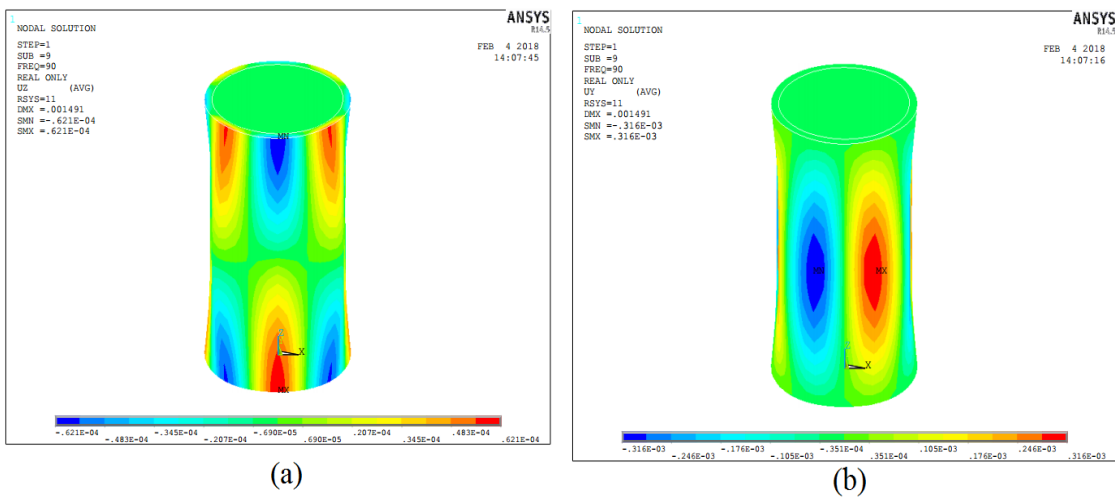


Figura 5.45 - Espectro de frequência para uma casca livre-livre acoplada com fluido.

Com base nos espectros de frequência mostrados através das figuras acima se pode concluir que, semelhante ao caso desacoplado, os picos das curvas com maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para frequências aplicadas aproximadamente iguais as primeiras frequências naturais em que a casca é excitada.

A Figura 5.46 mostra as formas modais da casca acoplada com condição de contorno apoiada-apoiada obtidas para o pico da primeira frequência de excitação, ou seja, 92 Hz.



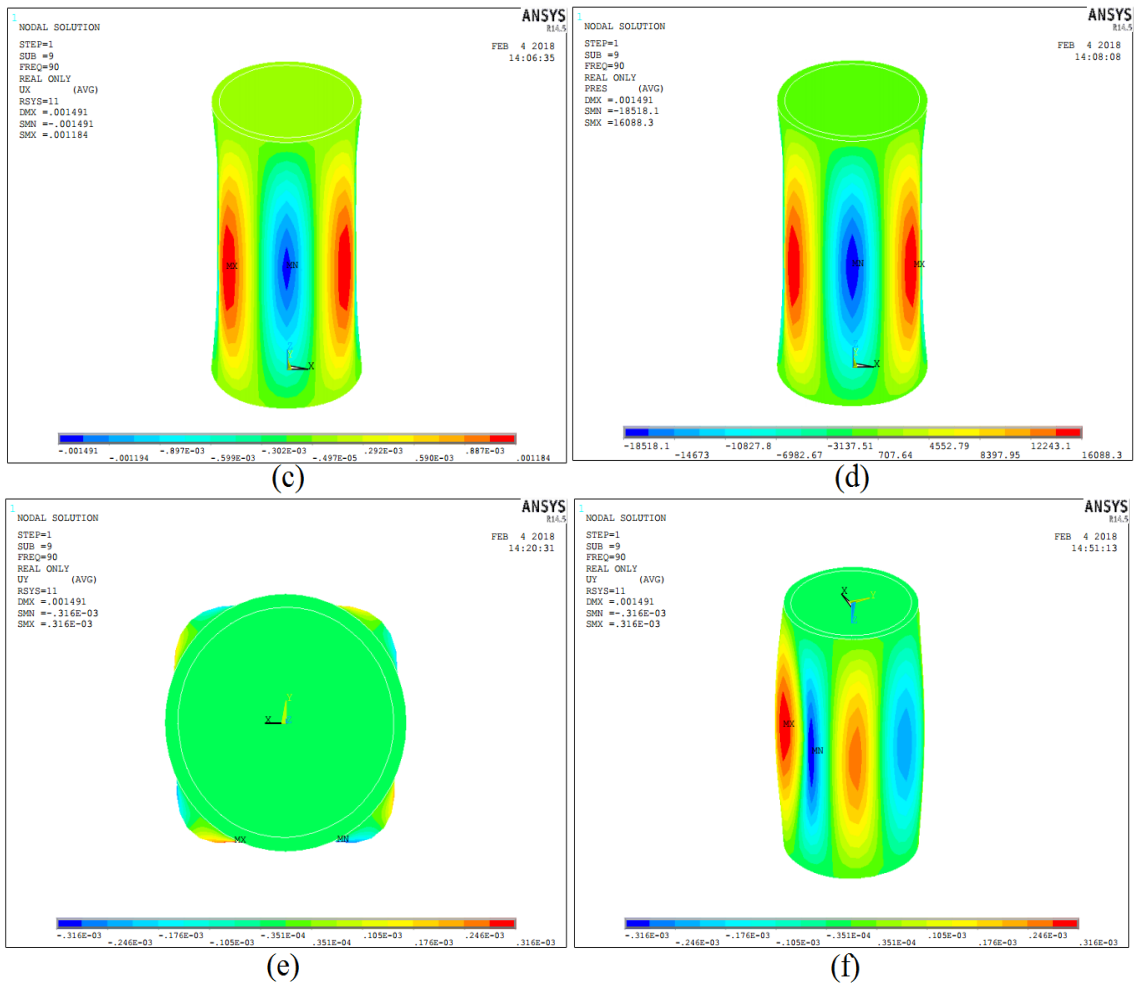


Figura 5.46 – Forma modal excitada da casca acoplada apoiada-apoiada com frequência de aplicação de 92Hz: (a) Axial; (b) Circunferencial; (c) Radial; (d) Pressão em Pa; (e) Vista superior do deslocamento circunferencial e (f) Deslocamento circunferencial com a casca rotacionada plano x-y em 40°.

6 – CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

6.1 – CONCLUSÕES GERAIS

Este trabalho abordou os aspectos da interação fluido-estrutura em problemas aplicados na análise dinâmica em reservatórios cilíndricos verticais. Foram estudadas a influência das condições de contorno nas vibrações livres de cascas cilíndricas sem e totalmente preenchidas com fluido. A abordagem analítica proposta por Soedel (2005) representa adequadamente o comportamento dinâmico de cascas desacopladas simplesmente apoiadas em vibrações livres. Infere-se ainda que a solução analítica e a modelagem numérica foram empregadas de forma correta, e que os resultados obtidos são muito semelhantes, não existindo praticamente nenhuma diferença entre aqueles encontrados analiticamente e numericamente.

Os resultados obtidos através do método de energia foram também satisfatórios, mostrando uma adequada aplicação das funções dos deslocamentos nas equações de energia, e também da rotina de cálculo realizada pelo *software* MAPLE. Além disso, o estudo através desse método proporcionou uma grande ferramenta que pode ser estendido a problemas mais complexos que envolvam as equações de energia do fluido, anel enrijecedor, apoios elásticos, acoplamento com placa de tampa ou fundo, etc.

No que se diz respeito à teoria de Sharma & Johns (1971), os resultados encontrados em vibração livre para a casca desacoplada são mais satisfatórios em modos circunferenciais superiores, sendo isto devido ao fato desta técnica desprezar as deformações circunferenciais e cisalhantes em sua formulação. De forma geral os resultados analíticos e numéricos reproduziram as tendências esperadas, fato que permitiu uma comparação e interpretação dos fenômenos observados durante esses estudos para as diferentes condições de contorno.

Na análise da cavidade acústica, o emprego da equação de Helmholtz e do método dos elementos finitos através do *software* ANSYS[®] forneceu os elementos de base para a compreensão do comportamento dinâmico do fluido desacoplado, e contribuiu para a análise dos modos dominantes no problema acoplado. Assim, foi possível investigar as formas modais de pressão da cavidade cilíndrica, e observar, que a estrutura e o fluido atuam em faixas de frequências bem diferentes (a estrutura em faixas de frequências mais baixas e a cavidade em faixas de frequência mais altas).

No estudo do problema acoplado em vibrações livres, o método analítico baseado no conceito da massa adicional virtual imposto a formulação de Soedel (2005) forneceu os fundamentos teóricos para o entendimento do fenômeno do acoplamento fluido-estrutura, além de ser útil para a validação da modelagem numérica do sistema acoplado da casca com a condição de contorno apoiada-apoiada. Ressalta-se ainda que mesmo com a simplificação na formulação fluido-estrutura, ao se desconsiderar a compressibilidade do fluido através da aproximação assintótica introduzida as funções de Bessel, os resultados foram satisfatórios, e demonstraram que o parâmetro da massa adicional é eficaz e determina as características vibratórias da casca acoplada adequadamente em regime de baixas frequências.

Com as inúmeras modelagens numéricas foi possível analisar o efeito do acoplamento fluido-estrutura através da identificação dos modos dominantes do sistema. A obtenção da relação da massa adicional envolvida nas diferentes condições de contorno foi fundamental para se observar que mesmo tendo influência no comportamento dinâmico, as diferentes vinculações produzem modos característicos dominantes da estrutura. Assim o estudo analítico através do critério da massa adicional satisfaz as mais variadas situações reais de projeto, caracterizadas por suas vinculações.

De uma forma geral, tanto para o problema desacoplado e acoplado fluido-estrutura se pode concluir que as condições de contorno com uma ou ambas as bordas livres provocam as frequências mais baixas, ou seja, fica nítido que ocorre uma redução da rigidez do sistema e conseqüentemente uma diminuição das frequências naturais.

Com a análise numérica foi possível aplicar o método dos elementos finitos na simulação via *software* ANSYS[®] de forma mais abrangente. O estudo dos tipos de elementos finitos, das respectivas funções de interpolação, da forma de obtenção das matrizes de massa e rigidez, bem como as formulações envolvidas na resolução da gama de problemas abordados, uma experiência e base de conhecimento ficam consolidados para futuros estudos.

Ao se impor o carregamento harmônico pontual na casca cilíndrica desacoplada e acoplada com fluido, foi possível mostrar a forma de obtenção dos modos operacionais. Também se adquiriu uma maior experiência na simulação numérica aplicadas a estes tipos de problemas, sob qualquer condição de contorno, uma vez que o tratamento analítico nessas situações é mais complexo.

Assim, mesmo com algumas simplificações realizadas em relação ao fenômeno físico real, este trabalho fornece mais análises e argumentos importantes sobre a temática em questão, através dos estudos comparativos analíticos-numéricos dos modelos desacoplados e acoplados fluido-estrutura para diferentes condições de contorno que foram efetuadas.

6.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas propostas são relacionadas para trabalhos futuros:

- Estender a análise dinâmica de casca através da interação da casca com placa de fundo e/ou anel de borda;
- Efetuar a análise dinâmica da casca a outros tipos de carregamentos (sísmicos, impulsivos, etc...) para qualquer condição de contorno da casca;
- Partir para formulações mais recentes utilizadas na área para a análise dos mais diversos problemas em cascas cilíndricas, como por exemplo, as formulações que tratam os deslocamentos da casca por expansões em séries de Fourier.

REFERÊNCIAS

Amabili, M. & G. Dalpiaz; (1995). “Breathing Vibrations of a horizontal circular cylindrical tank shells, partially filled with liquid”. *In: International Journal of Vibration and Acoustics*, pp. 117–187.

Amabili, M. & Paidoussis, M. P., (2003). “Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid structure interaction”. *In: Applied Mechanics Review*, pp. 349- 381.

Amabili, M. (1997). “Bulging modes of circular bottom plates in rigid cylindrical containers filled with a liquid”. *In: Shock and Vibration*, pp. 51–68.

Amabili, M.; Garziera R. & Negri A.; (2002). “Experimental study on large-amplitude vibrations of water-filled circular cylindrical shells”. *In: International Journal of Fluids and Structures*, pp. 213–227. DOI: 10.1006/j#s.2001.0412.

Arnold R. N. & Warburton G. B. (1953). “The flexural vibrations of thin cylinders”. *In: Institute Mechanical Engineering* 167 (A): 62–80.

Berry, J. G. e Reissner, E. (1958). “The Effect of an Internal Compressible Fluid Column on the Breathing Vibrations of a Thin Pressurized Shell”. *In: Journal Aerospace Sciences*, vol. 25, n° 5, pp. 288-294.

Blevins, R. D., (1979). “Formulas for Natural Frequency and Mode Shape”. *First Edition, Van Nostrand Reinhold Company*, New York, United States.

Campos Junior, H. S. (2011). “Procedimentos progressivos analíticos e numéricos para análise de barragens em arco”. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*. Publicação E.DM-007A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 183p.

Cheng L. & Nicolas J. (1992). “Free vibration analysis of a cylindrical shell-circular plate system with general coupling and various boundary conditions”. *In: Journal Sound and Vibration*; 155(2):231–47.

- Chen Y., Jin G. & Liu Z. (2013). "Free vibration analysis of circular cylindrical shell with non-uniform elastic boundary constraints". *International Journal Mechanical Sciences*; 74 : 120 – 32.
- Chung H. (1981). "Free vibration analysis of circular cylindrical shells". *In: Journal Sound and Vibration*; 74(3):331–50.
- Clough, R. W., Penzien, J. (2003). "Dynamics of Structures". *Third Edition*. Berkeley, CA, USA. *In: Computers & Structures*.
- Dai, L., Yang, T., Du, J. & Brennan, M. J., (2013). "An exact series solution for the vibration analysis of cylindrical shells with arbitrary boundary conditions". *International Journal Applied Acoustics*, pp. 440–449.
- Del Prado, Z. J. G. N.; Argenta, A. L. D. P.; Da Silva, F. M. A. & Gonçalves, P. B. (2014). "The effect of material and geometry on the non-linear vibrations of orthotropic circular cylindrical shells". *In: International Journal of Non-Linear Mechanics*; pp. 12. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.017.
- Donnell, L. H., (1933). "Stability of thin walled tubes under torsion". *In: NACA Report*, N° 479.
- Elkholy S. A.; Elsayed A. A.; El-Ariss B, & Sadek S. A. (2014). "Optimal finite element modelling for modal analysis of liquid storage circular tanks". *International Journal Structural Engineering*, Vol. 5, N° 3, pp. 207-241.
- Farshindianfar, A. & Oliazadeh, P. (2012). "Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories". *International Journal of Mechanics and applications*, pp. 74 – 80.
- Fernholz, C. M, Robinson, J. H., (1990). "Fully-Coupled Fluid/Structure Vibration Analysis Using MSC/NASTRAN". *NASA technical memorandum* 102857.
- Flügge, W., (1934). "Statik und Dynamic der Schalen". Berlin, Julius Springer.
- Flügge, W., (1973). "Stresses in Shells". *Second edition*, Berlin, Verlag Springer.

Forsberg, K., (1964). “Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells”. *Journal American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 8p.

Fortuny Gasser, F. L. F. (1987). “Vibrações de Cascas Cilíndricas Delgadas contendo Fluido”. *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COOPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 138 p.

Gibert, R. J., (1988). “Vibrations des Structures. Interactions avec les fluides – Source d’excitation aléatoires”. *Fifth Edition*, Saint-Germain Paris, France, *Éditions Eyrolles*.

Gonçalves, P. B. & Batista, R. C., (1986). “Frequency Response of Cylindrical Shells Partially Submerge dor Filled with Liquid”. In: *Journal of Sound and Vibration*. DOI: 0022-460X/87/040059+12.

Housner, G. W. (1954). “Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers”. In: *Division of Engineering. California Institute of Technology*, Pasadena, California.

Kim, Y., Lee, Y. S. & Ko, S. H., (2003). “Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners”. *International Journal of Sound and Vibration*, pp. 869–897.

Koga, T., (1988). “Effects of boundary conditions on the free vibrations of circular cylindrical shells under uniform external pressure”. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pp. 242–248.

Kurylov Y. & Amabili M. (2010). “Polynomial versus trigonometric expansions for non linear vibrations of circular cylindrical shells with diferente boundary conditions”. In: *Journal Sound and Vibration*; 329 (9): 1435–49.

Lakis, A. A. & Paidoussis, M. P., (1971). “Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid”. *International Journal of Sound and Vibration*, pp. 1–15.

Lam K. Y. & Loy C. T. (1995). “Effects of boundary conditions on frequencies of a multi-layered cylindrical shell”. In: *Journal Sound and Vibration*; 188 (3) : 363–84.

Leissa, A. W. (1973). “Vibration of Shells”. In: *National Aeronautics and Space Administration (NASA)*, Washington, D. C. pp. 425.

Lindholm, U. S., Kana, D. D. & Abramson, H. N. (1962). “Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid”. *In: Journal Aerospace Science*. 29, 1052-1059.

Liu L., Cao D. & Sun S. (2013). “Vibration analysis for rotating ring-stiffened cylindrical shells with arbitrary boundary conditions”. *In: Journal Vibrations and Acoustic*; 135(6):061010.

Lopez, A. A., (2014). “Estudo comparativo analítico-numérico de vibrações livres e livres acopladas fluido-estrutura em cascas cilíndricas”. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 120 p.

Love, A. E. H., (1888). “The small free vibrations of a thin elastic shell”. *International Phil. Trans. Roy. Soc.*, pp. 491–549.

Lustosa, I. A. A. (2011). “Um estudo comparativo analítico-numérico de esforços e deslocamentos em cascas cilíndricas abertas ou com conexões de borda”. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Publicação E.DM-003A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 168p.

Ma X., Jin G., Xiong Y. & Liu Z. (2014). “Free and forced vibration analysis of coupled conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions”. *International Journal Mechanical Sciences*; 88:122–37.

Macedo, F. C. (2014). “Estudo analítico e numérico dos esforços térmicos em cascas cilíndricas axissimétricas”. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Publicação E.DM-005A/14, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 131p.

Melo, C. A. E. (2009). “Estudo do Acoplamento Comporta-Reservatório Sob Ações Sísmicas”. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, E.DM 012A/09, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 107p.

Mendes, N. B. & Pedroso, L. J., (2017). “Estudo de vibrações livres para barragem em arco-reservatório utilizando modelos simplificados”. *CILAMCE 2017 – XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Florianópolis, SC, Brasil, 17 p.

Mendes, N. B., (2013). “Estudo Comparativo Analítico e Numérico de Aspectos da Interação Fluido Estrutura Aplicados a Barragens em arco”. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 318 p.

Mendes, N. B., Pedroso, L. J. & Ribeiro, P. M. V., (2014). “Um estudo de vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas com anéis enrijecedores e contendo fluido”. *CILAMCE 2014 – XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Fortaleza, CE, Brasil, 19 p.

Mendes, N. B., Pedroso, L. J. & Ribeiro, P. M. V., (2015). “Estudo de vibração acoplada de cascas cilíndricas sob diferentes níveis de fluido e posições de anéis enrijecedores”. *CILAMCE 2015 – XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 16 p.

Mendes, N. B., Pedroso, L. J. & Ribeiro, P. M. V., (2016). “Vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas contendo fluido e conectadas com placas de fundo apoiadas em base elástica”. *CILAMCE 2016 – XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília, DF, Brasil, 20 p.

Morais, M. V. Girão de. (2000). “Modelagens numéricas pelo método dos elementos finitos em problemas de interação fluido-estrutura”. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Publicação E.DM-008A/00, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 157p.

Moslemi M. & Kianoush M. R., (2012). “Parametric study on dynamics behavior of cylindrical ground-supported tanks”. *In: Journal Engineering Structures*. 42 (2012) 214-230.

Moslemi M., Kianoush M. R. & Pogorzelski W., (2011). “Seismic response of liquid-filled elevated tanks”. *In: Journal Engineering Structures*. 33 (2011) 2074-2084.

Mushtari, K. M., (1938). “On the stability of cylindrical shells subject to torsion”. *International Trudy Kaz. Avais*, Russian.

Naghdi, P. M. & Berry J. G. (1964). “On the equations of motion of cylindrical shells”. *In: International Journal. Applied Mechanics*. 21 (2) 160–166.

- Ozdemir Z.; Fahjan Y. M. & Souli M. (2017). “Numerical simulation of liquid sloshing in tanks”. In: *Computational Methods in Earthquake Engineering*. DOI 10.1007/978-3-319-47798-5_3.
- Paidoussis, M. P. (2004). “Fluid-Structure Interactions - Slender Structures and Axial Flow”. *Volume 2, Elsevier Academic Press, McGill University, Montreal, Québec, Canada.*
- Paula, M. R., (2003). “Estudo do Acoplamento Acústico-Estrutural de uma Estrutura do Tipo Casca Cilíndrica Uniforme”. *Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil, 140 p.*
- Pedroso, L.J. (1995). “Dinâmica de cascas cilíndricas”. In: *Notas de Curso e Apostila Didática, UnB-FT/ENC, Brasília, DF.*
- Pedroso, L. J. (1998). “Introdução a Dinâmica das Estruturas”. In: *Notas de Curso e Apostila Didática, UnB-FT/ENC, Brasília, DF.*
- Pedroso, L. J. (2003). “Interação Fluido-Estrutura”. In: *Notas de Curso e Apostila Didática, UnB-FT/ENC, Vs.3, Brasília, DF.*
- Pedroso, L. J. (2018). “Manuscritos, Esquemas, Discussões e Notas de Seções de Orientações, 2016-2018”. In: *Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil - PECC, UnB-FT/ENC, Brasília, DF.*
- Pedroso, L. J., Barbosa, A. N. & Morais, M. V. G., (1994). “Vibrações livres de cascas cilíndricas pelo método das diferenças finitas”. *Relatório Técnico de Pesquisa. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 10 p.*
- Qin Z.; Chu F. & Zu J. (2017). “Free vibrations of cylindrical shells with arbitrary boundary conditions: A comparison study”. In: *International Journal of Mechanical Sciences*; pp. 91-99.
- Qu Y.; Hua H. & Meng G.; (2013). “A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries”. In: *Journal Composite Structures*. 95 (2013) pp. 307-321.

Reissner, E., (1941). “A new derivation of the equations of the deformation of elastic shells”. *International Am J. Math.*, pp. 177–184.

Ribeiro, P. M. V. (2006). “Uma Metodologia Analítica para a Avaliação do Campo de Tensões em Barragens Gravidade de Concreto Durante Terremotos”. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Publicação E.DM - 003A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 140p.

Ribeiro, P. M. V. (2010). “Soluções Analíticas para Cavidades Acústicas Bidimensionais com Aplicação ao Estudo de Problemas de Interação Dinâmica Barragem-Reservatório”. *Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil*, Publicação E.TD-004A/10, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 306p.

Sanders, J. L., (1959). “An improved first approximation theory of thin shells”. *In. NASA Report*.

Sharma, C. B. & Johns, D. J., (1971). “Vibration characteristics of a camped-free and camped-ring-stiffened circular cylindrical shell”. *Inc. Journal of Sound and Vibration*, pp. 459–474.

Silva, F. M. A. da; Gonçalves, P. B. & Prado, Z. J. G. N. D. (2008); “Modelos de dimensão reduzida para análise das oscilações não-lineares e estabilidade de cascas cilíndrica”. *Tese de Doutorado*, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 182 p.

Silva, F. M. A. da; Montes, R. O. P.; Gonçalves, P. B. & Prado, Z. J. G. N. D. (2015); “Nonlinear vibrations of fluid-filled functionally graded cylindrical shell considering a time-dependent lateral load and static preload”. *In: Journal Mechanical Engineering Science*, 0(0) 1-18. DOI: 10.1177/0954406215587729.

Silva, S. F. (2007). “Interação dinâmica barragem-reservatório: modelos analíticos e numéricos”. *Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil*, Publicação E.TD-05A/07, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 220p.

Soedel, W., (2005). “Vibrations of Shells and Plates”. *Third Edition, Marcel Dekker*, New York, United States,.

Sousa, M. V., Silva, F. M. A. & Prado, Z. J. G. N. D., (2016). “Análise da influência da superfície livre do fluido nas vibrações livres não lineares da casca cilíndrica”. *CILAMCE 2016 – XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília, DF, Brasil, 16 p.

Souza Junior, L. C. (2006). “Uma Aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas à Interação Fluido-Estrutura”. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-008A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 197p.

Souza, S. M., (2007). “Contribuição para uma Metodologia de Análise Acoplada Fluido-Estrutura em Cavidades Acústicas com Paredes Flexíveis”. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 199 p.

Sun W., Cao D., Han Q. (2013). “Vibration studies of rotating cylindrical shells with arbitrary edges using characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh–Ritz method”. *In: Journal of Mechanical Sciences*. 68 (2013) 180–189.

Szilar, Rudolph, (2004). “Theory and Applications of Plate Analysis – Classical, Numerical and Engineering Methods”. New Jersey, United States, Inc. John Wiley & Sons.

Tang D., Yao X., Wu G. & Peng Y. (2017). “Free and forced vibration analysis of multi-stepped circular cylindrical shells with arbitrary boundary conditions by the method of reverberation-ray matrix”. *In: Journal Thin-Walled Structures*. 116 (2017) 154-168.

Timoshenko, S. & Woinowsky, K. S., (1959). “Theory of plates and shells”. *Second Edition*, United States, McGraw-Hill.

Ventsel, E. & Krauthammer, T. (2001). “Thin Plates and Shells – Theory, Analysis and Applications”. *Inc: Marcel Dekker*, New Yourk, United States.

Vlasov, V. S. (1951). “Basic differential equations in general theory of elastic shells”. *In: National Advisory Committee for Aeronautics*. NACA-TM-1241”. Washington DC: US Government Printing Office.

Zienkiewicz, O. C. & Newton, R. R. (1969). "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid". *In: Symposium on Finite Element Techniques*, Stuttgart.

Sites:

< <http://www.rplreservatorios.com.br/>>; Acesso em 12/11/2017.

APÊNDICES

APÊNDICE A: Formulação das equações diferenciais de equilíbrio dinâmico da casca cilíndrica

A casca cilíndrica é composta de paredes delgadas de comprimento L , raio médio R , ângulo radial ϕ e espessura h . O material da casca é considerado como sendo elástico com módulo de Young E , coeficiente de Poisson ν e massa específica ρ . As coordenadas do vetor deslocamento na superfície da casca na direção axial, circunferencial e radial são respectivamente u , v e w . A Figura mostra a casca cilíndrica com seus respectivos eixos.

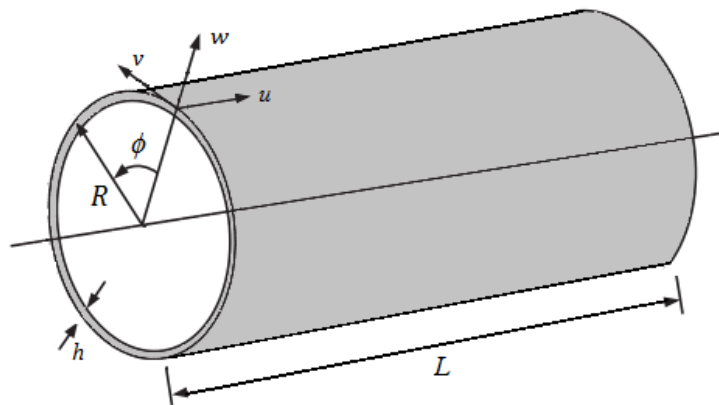


Figura A.1 - Eixos dos deslocamentos para uma casca cilíndrica.

Assim, fazendo um corte na superfície da casca e analisando um elemento infinitesimal, se pode identificar as forças internas, externas e momentos atuantes na casca. A figura a seguir mostra os esforços nas paredes de uma casca cilíndrica.

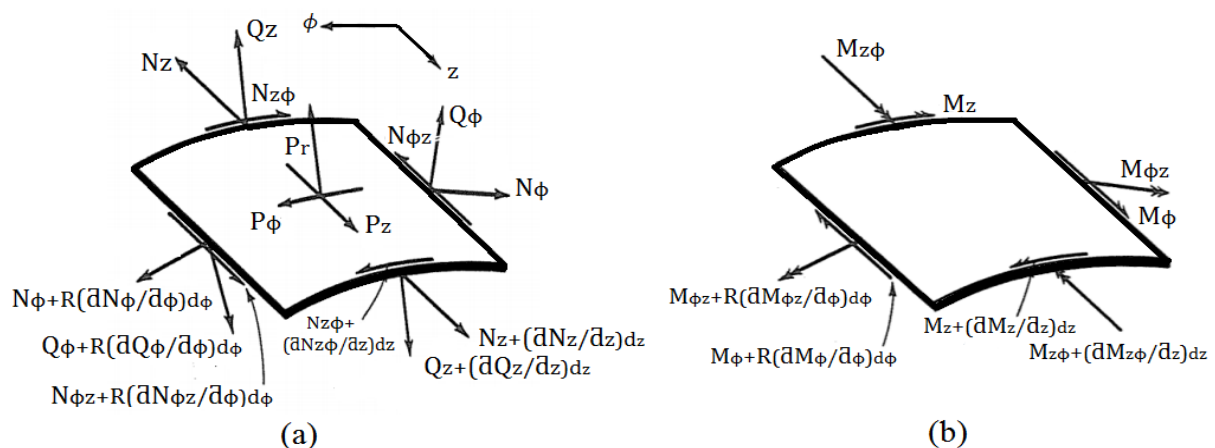


Figura A.2 - Elemento infinitesimal de casca cilíndrica: (a) Forças externas e internas de membrana, (b) Momentos de flexão e de torção. (Flugge, 1973; modificada).

Na determinação das equações de equilíbrio dinâmico, Soedel (2005) realiza a somatória de forças e momentos tendo por base os esforços mostrados no elemento infinitesimal da casca. Assim, sabendo que o elemento infinitesimal tem as dimensões mostradas na figura A.3 podemos aplicar a segunda lei de Newton nas respectivas direções, ou seja, $\sum F = m.a$ e $\sum M = 0$.

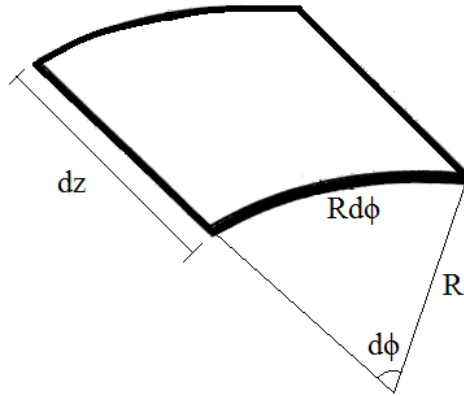


Figura A.3 – Dimensões infinitesimais.

Vale ressaltar que uma vez que os ângulos são infinitesimais o seu seno foi aproximado pelo próprio ângulo.

- Somatória de forças na direção \vec{u} (longitudinal):

$$\sum F_u = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} & -N_z R d\phi + N_z R d\phi + \frac{\partial}{\partial z} (N_z R d\phi) dz - N_{\phi z} dz + N_{\phi z} dz + \frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi z} dz) d\phi \\ & + P_z dz R d\phi = \rho \cdot h \cdot R \cdot d\phi dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dividindo todos os termos por $R \cdot dz \cdot d\phi$ tem-se que:

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{\phi z}}{\partial \phi} + P_z - \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

- Somatória de forças na direção \vec{v} (tangencial):

$$\sum F_v = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$-N_\phi dz + N_\phi dz + \frac{\partial}{\partial \phi}(N_\phi dz)d\phi - N_{z\phi}Rd\phi + N_{z\phi}Rd\phi + \frac{\partial}{\partial z}(N_{z\phi}Rd\phi)dz \quad (\text{A.5})$$

$$-Q_\phi dz \left(-\frac{d\phi}{2}\right) + Q_\phi dz \frac{d\phi}{2} + P_\phi dz Rd\phi = \rho \cdot h \cdot R \cdot d\phi dz \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Dividindo todos os termos por $R \cdot dz \cdot d\phi$ tem-se que:

$$\frac{\partial N_{z\phi}}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{Q_\phi}{R} + P_\phi - \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.6})$$

- Somatória de forças na direção \vec{w} (radial):

$$\sum F_w = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$-Q_z Rd\phi + Q_z Rd\phi + \frac{\partial}{\partial z}(Q_z Rd\phi)dz - Q_\phi dz + Q_\phi dz + \frac{\partial}{\partial \phi}(Q_\phi dz)d\phi - N_\phi dz \frac{d\phi}{2}$$

$$-N_\phi dz \frac{d\phi}{2} + P_r dz Rd\phi = \rho \cdot h \cdot R \cdot d\phi dz \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{A.8})$$

Dividindo todos os termos por $R \cdot dz \cdot d\phi$ tem-se que:

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} - \frac{N_\phi}{R} + P_r - \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.9})$$

- Somatória de momentos em torno do eixo \vec{u} (longitudinal):

$$\sum M_z = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$+M_\phi dz - M_\phi dz - \frac{\partial}{\partial \phi}(M_\phi dz)d\phi + M_{z\phi}Rd\phi - M_{z\phi}Rd\phi - \frac{\partial}{\partial z}(M_{z\phi}Rd\phi)dz$$

$$+Q_\phi dz R \frac{d\phi}{2} + Q_\phi dz R \frac{d\phi}{2} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Dividindo todos os termos por $R \cdot dz \cdot d\phi$ tem-se que:

$$Q_\phi = \frac{\partial M_{Z\phi}}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.12})$$

- Somatória de momentos em torno do eixo \vec{v} (transversal):

$$\sum M_\phi = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} & -M_z R d\phi + M_z R d\phi + \frac{\partial}{\partial z} (M_z R d\phi) dz - M_{\phi z} dz + M_{\phi z} dz + \frac{\partial}{\partial \phi} (M_{\phi z} dz) d\phi \\ & - Q_z R d\phi \frac{dz}{2} - Q_z R d\phi \frac{dz}{2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Dividindo todos os termos por $R \cdot dz \cdot d\phi$ tem-se que:

$$Q_Z = \frac{\partial M_Z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\phi z}}{\partial \phi} \quad (\text{A.15})$$

APÊNDICE B: Resolução do determinante das equações de equilíbrio dinâmico desacopladas

Partindo do sistema matricial apresentado na equação 3.59, para uma solução não trivial o determinante da matriz tem que ser igual à zero. Desta forma, as equações mostradas trazem o tratamento analítico nesta etapa.

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \rho h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \rho h \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{B.1})$$

(B.2)

$$DET \begin{vmatrix} \rho h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & \rho h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & \rho h \omega^2 - k_{33} \end{vmatrix} = 0$$

(B.3)

$$\begin{aligned} & (\rho h \omega^2 - k_{11})(\rho h \omega^2 - k_{22})(\rho h \omega^2 - k_{33}) + k_{12}k_{23}k_{13} + k_{13}k_{12}k_{23} - k_{13}(\rho h \omega^2 - k_{22})k_{13} \\ & - k_{23}k_{23}(\rho h \omega^2 - k_{11}) - (\rho h \omega^2 - k_{33})k_{12}k_{12} = 0 \end{aligned}$$

(B.4)

$$\begin{aligned} & (\rho h)^3 \omega^6 - (\rho h)^2 k_{33} \omega^4 - (\rho h)^2 k_{22} \omega^4 - (\rho h)^2 k_{11} \omega^4 + \rho h k_{22} k_{33} \omega^2 + \rho h k_{11} k_{33} \omega^2 + \rho h k_{11} k_{22} \omega^2 - \rho h k_{13}^2 \omega^2 \\ & - \rho h k_{23}^2 \omega^2 - \rho h k_{12}^2 \omega^2 - k_{11} k_{22} k_{33} + k_{12} k_{23} k_{13} + k_{13} k_{12} k_{23} + k_{13}^2 k_{22} + k_{11} k_{23}^2 + k_{12}^2 k_{33} = 0 \end{aligned}$$

$$\omega^6 - \frac{1}{(\rho h)} [k_{11} + k_{22} + k_{33}] \omega^4 + \frac{1}{(\rho h)^2} (k_{11} k_{33} + k_{22} k_{33} + k_{11} k_{22} - k_{13}^2 - k_{23}^2 - k_{12}^2) \omega^2 \quad (\text{B.5})$$

$$+ \frac{1}{(\rho h)^3} (k_{11} k_{23}^2 + k_{22} k_{13}^2 + k_{33} k_{12}^2 + 2k_{12} k_{13} k_{23} - k_{11} k_{22} k_{33}) = 0$$

$$\omega^6 + a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3 = 0 \quad (\text{B.6})$$

Por fim, resolvendo o polinômio característico no *software* MAPLE encontram-se as equações das frequências naturais. Sendo a_1 , a_2 e a_3 são dados pelas equações 3.67, 3.68 e 3.69 respectivamente.

APÊNDICE C: Resolução das integrais I1 e I2 para diferentes funções modais de viga

Partindo do determinante mostrado na equação 3.81 temos que para uma solução não trivial o determinante da matriz tem que ser igual à zero. Desta forma, as equações mostradas trazem o tratamento analítico nesta etapa.

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \Delta I_2 & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} - \Delta & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} I_2 \Delta^6 - \Delta^4 (A_{11} + I_2 A_{22} + I_2 A_{33}) - \Delta^2 (A_{12}^2 + A_{13}^2 + I_2 A_{23}^2 - I_2 A_{22} A_{33} - A_{11} A_{33} - A_{11} A_{22}) \\ + A_{12}^2 A_{33} + A_{23}^2 A_{11} + A_{13}^2 A_{22} - A_{11} A_{22} A_{33} - 2 A_{12} A_{23} A_{13} = 0 \end{aligned} \quad (C.2)$$

Sendo a relação entre as constantes de amplitude dadas por:

$$\frac{A}{C} = \frac{(A_{11} - \Delta^2)(A_{22} - \Delta^2) - A_{23}^2}{(A_{12} A_{23}) - (A_{22} A_{13})} \quad (C.3)$$

$$\frac{B}{C} = \frac{A_{12}(A_{33} - \Delta^2) - A_{13} A_{23}}{(A_{22} A_{13}) - (A_{23} A_{12})} \quad (C.4)$$

Sendo os valores de A_{11} , $A_{12} = A_{21}$, $A_{13} = A_{31}$, A_{22} e A_{33} dados pelas equações 3.82 a 3.87. A resolução do polinômio característico C.2 fornece a equação 3.92, sendo mais uma vez mostrada neste momento pela equação C.5.

$$\Delta = \lambda_{m,n}^2 = \frac{\lambda_m^4 + \beta n^2 \lambda_m^2 \left[\lambda_m^2 n^2 + 2 \nu n^2 (n^2 - 1) I_1 + 2(1 - \nu)(n^2 - 1)^2 I_2 \right] + \beta n^4 (n^2 - 1)^2}{\lambda_m^2 I_2 + n^2 (n^2 + 1)} \quad (C.5)$$

Na resolução do problema é necessário definir os valores de I1 e I2 dados pelas equações 3.90 e 3.91. Desta forma, como um exemplo, para uma casca apoiada-apoiada os valores são determinados da seguinte forma.

Adotando o modo longitudinal a função:

$$\varphi_m(z) = \text{sen} \left(\frac{\lambda_i}{L} z \right) \quad (C.6)$$

Sabendo que:

$$P_m = \lambda_i / L \quad (C.7)$$

Substituindo as equações mostradas na equação 3.90 temos que:

$$I_1 = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\lambda_i}{L} \right)^2 \left[\int \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda_i}{L} z \right) dz \right]^2 dz \quad (C.8)$$

$$I_1 = \frac{1}{L} \left(\frac{\lambda_i}{L} \right)^2 \int_0^L \left[\frac{L}{\lambda_i} \operatorname{cos} \left(\frac{\lambda_i}{L} z \right) \right]^2 dz \quad (C.9)$$

Resolvendo a integral, temos que:

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{[\operatorname{cos}(\lambda_i) \operatorname{sen}(\lambda_i) + \lambda_i]}{\lambda_i} \quad (C.10)$$

Sabendo que o coeficiente da equação transcendental para uma viga apoiada-apoiada é $\lambda_i = m\pi$ para $m=0,1,2,3,\dots$ tem-se então a seguinte condição:

$$\operatorname{sen}(\lambda_i) = \operatorname{sen}(m\pi) = 0 \quad (C.11)$$

Assim, a equação C.10 é dada por:

$$I_1 = \frac{\lambda_i}{2\lambda_i} = \frac{1}{2} \quad (C.12)$$

Portanto o valor de I_1 para uma casca apoiada-apoiada é de 0,5 para qualquer índice longitudinal. Fazendo procedimento análogo para I_2 e para outras condições de contorno e respectivos coeficientes transcendentais pode-se chegar à tabela 3.3 empregada na análise dinâmica final das cascas cilíndricas.

APÊNDICE D: Etapa da resolução pelo método de energia

A equação da energia potencial de deformação na casca cilíndrica é dada por:

$$E_P = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{\frac{2\pi L}{h}} \int_0^0 \left(\sigma_z \varepsilon_z + \sigma_\phi \varepsilon_\phi + \sigma_{z\phi} \varepsilon_{z\phi}^* \right) dv \quad (D.1)$$

Substituindo na equação acima as tensões e deformações a partir das equações 3.97 a 3.103 têm-se que:

$$E_P = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{\frac{2\pi L}{h}} \int_0^0 \left(\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_\phi) \varepsilon_z + \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\phi + \nu \varepsilon_z) \varepsilon_\phi + \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{z\phi} \varepsilon_{z\phi} \right) dv \quad (D.2)$$

Assumindo as equações 3.14 a 3.16 e a partir de um longo desenvolvimento da equação acima através do *software* MAPLE a energia potencial é dada por:

$$E_{Pmáx} = \frac{ERh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\frac{2\pi L}{h}} \int_0^0 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} + W \right)^2 + \frac{2\nu}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} + W \right) + \frac{1}{2R^2} (1-\nu) \left(\frac{\partial U}{\partial \phi} + R \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{h^2}{12R^2} \left[R^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} - \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} - \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dz d\phi \quad (D.3)$$

De maneira análoga a energia cinética é dada por:

$$E_c = \frac{\rho h}{2} \int_0^{\frac{2\pi L}{h}} \int_0^0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R dz d\phi \quad (D.4)$$

$$E_C = \frac{\rho h}{2} \int_0^{\frac{2\pi L}{h}} \int_0^0 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} (U e^{j\omega t}) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial t} (V e^{j\omega t}) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial t} (W e^{j\omega t}) \right]^2 \right\} R dz d\phi \quad (D.5)$$

Da mesma forma, desenvolvendo a equação acima se tem que:

$$E_{cmáx} = \frac{\omega^2 \rho R h}{2} \int_0^{\frac{2\pi L}{h}} \int_0^0 \left\{ [U(z, \phi)]^2 + [V(z, \phi)]^2 + [W(z, \phi)]^2 \right\} dz d\phi \quad (D.6)$$

APÊNDICE E: Etapa da resolução da equação de propagação de onda

Na resolução da cavidade acústica partiu-se da equação de propagação de onda em coordenadas cilíndricas, dada pela equação a seguir.

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} \quad (\text{E.1})$$

Tendo por base a função potencial de velocidade dada pela equação a seguir:

$$\bar{\varphi}(r, \theta, z, t) = F(r, \theta, z) \dot{T}(t) \quad (\text{E.2})$$

Substituindo a função potencial na equação governante tem-se que:

$$\frac{\partial^2 F(r, \theta, z)}{\partial r^2} \dot{T}(t) + \frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \theta, z)}{\partial r} \dot{T}(t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F(r, \theta, z)}{\partial \theta^2} \dot{T}(t) + \frac{\partial^2 F(r, \theta, z)}{\partial z^2} \dot{T}(t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \dot{T}(t)}{\partial t^2} F(r, \theta, z) \quad (\text{E.3})$$

Denominando de maneira simplificada $F(r, \theta, z) = F$ e desenvolvendo a equação tem-se que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial t} T(t) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial}{\partial t} T(t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial t} T(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial t} T(t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial t} T(t) F \quad (\text{E.4})$$

Dividindo todos os termos por $\partial/\partial t$, organizando os termos e igualando a constante de separação de variáveis temos que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} T(t) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} T(t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} T(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} T(t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} F = -v^2 \quad (\text{E.5})$$

Ou ainda:

$$\underbrace{\frac{1}{F} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)}_{\text{Domínio do Espaço}} = \underbrace{\frac{\ddot{T}(t)}{c^2 T(t)}}_{\text{Domínio do Tempo}} = -v^2 \quad (\text{E.6})$$

Desta forma, através da técnica de separação de variáveis, foram separadas em duas equações diferenciais, dadas por:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + v^2 F = 0 \quad (\text{E.7})$$

$$\ddot{T}(t) + \underbrace{v^2 c^2}_{\omega^2} T(t) = 0 \quad (\text{E.8})$$

A resolução das equações diferenciais mostradas acima é mostrada no trabalho. Assim, visto que a pressão hidrodinâmica pode ser escrita em termos do potencial de velocidade da seguinte forma:

$$P(r, \theta, z, t) = -\rho_f \frac{\partial \bar{\varphi}(r, \theta, z, t)}{\partial t} \quad (\text{E.9})$$

Substituindo a função potencial na equação mostrada tem-se que:

$$P(r, \theta, z, t) = -\rho_f F(r, \theta, z) \ddot{T}(t) \quad (\text{E.10})$$

Assim, sabendo que $T(t) = e^{j\omega t}$, ou seja, $\ddot{T}(t) = j^2 \omega^2 e^{j\omega t}$ se pode obter a equação da pressão hidrodinâmica resolvida anteriormente neste trabalho.

$$P(r, \theta, z, t) = \rho_f \omega^2 F(r, \theta, z) e^{j\omega t} \quad (\text{E.11})$$

APÊNDICE F: Resolução do determinante das equações de equilíbrio dinâmico acopladas

Partindo do sistema matricial apresentado na equação 3.170, para uma solução não trivial o determinante da matriz tem que ser igual à zero. Desta forma, as equações mostradas trazem o tratamento analítico nesta etapa.

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \rho h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \rho h(1 + \zeta) \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{F.1})$$

$$DET \begin{vmatrix} \rho h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & \rho h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & \rho h(1 + \zeta) \omega^2 - k_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{F.2})$$

$$\begin{aligned} & (\rho h \omega^2 - k_{11})(\rho h \omega^2 - k_{22})(\rho h(1 + \zeta) \omega^2 - k_{33}) + k_{12}k_{23}k_{13} + k_{13}k_{12}k_{23} \\ & - k_{13}(\rho h \omega^2 - k_{22})k_{13} - k_{23}k_{23}(\rho h \omega^2 - k_{11}) - [\rho h(1 + \zeta) \omega^2 - k_{33}]k_{12}k_{12} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

$$\begin{aligned} & (\rho h)^3(1 + \zeta)\omega^6 - (\rho h)^2 k_{33}\omega^4 - (\rho h)^2(1 + \zeta)k_{22}\omega^4 - (\rho h)^2(1 + \zeta)k_{11}\omega^4 + \\ & \rho h k_{22}k_{33}\omega^2 + \rho h k_{11}k_{33}\omega^2 + \rho h(1 + \zeta)k_{11}k_{22}\omega^2 - \rho h k_{13}^2 \omega^2 \\ & - \rho h k_{23}^2 \omega^2 - \rho h(1 + \zeta)k_{12}^2 \omega^2 - k_{11}k_{22}k_{33} + k_{12}k_{23}k_{13} \\ & + k_{13}k_{12}k_{23} + k_{13}^2 k_{22} + k_{11}k_{23}^2 + k_{12}^2 k_{33} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

$$\begin{aligned} & (1 + \zeta)\omega^6 - \frac{1}{(\rho h)} [(1 + \zeta)(k_{11} + k_{22}) + k_{33}] \omega^4 + \frac{1}{(\rho h)^2} \left[(1 + \zeta)(k_{11}k_{22} - k_{12}^2) \right. \\ & \left. + (k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33} - k_{13}^2 - k_{23}^2) \right] \omega^2 \\ & + \frac{1}{(\rho h)^3} (k_{11}k_{23}^2 + k_{22}k_{13}^2 + k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23} - k_{11}k_{22}k_{33}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$a_0 \omega^6 + a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3 = 0 \quad (\text{F.6})$$

Por fim, resolvendo o polinômio característico no *software* MAPLE encontram-se as equações das frequências naturais. Sendo a_0 , a_1 , a_2 e a_3 são dados pelas equações 3.172 a 3.175.