



**IMPLEMENTAÇÃO DE UM MODELO CONSTITUTIVO VISCOELÁSTICO
COM ENVELHECIMENTO DO CONCRETO NO *SOFTWARE* ABAQUS**

CARLOS VALBSON DOS SANTOS ARAÚJO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**IMPLEMENTAÇÃO DE UM MODELO CONSTITUTIVO VIS-
COELÁSTICO COM ENVELHECIMENTO DO CONCRETO
NO *SOFTWARE* ABAQUS**

CARLOS VALBSON DOS SANTOS ARAÚJO

ORIENTADOR: FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

PUBLICAÇÃO: E.DM – 08A/18

BRASÍLIA/DF: MARÇO – 2018

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**IMPLEMENTAÇÃO DE UM MODELO CONSTITUTIVO VISCOELÁSTICO
COM ENVELHECIMENTO DO CONCRETO NO *SOFTWARE*
ABAQUS**

CARLOS VALBSON DOS SANTOS ARAÚJO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

**Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD. (ENC-UnB)
(Orientador)**

**Prof. Rodrigo de Melo Lameiras, Dr. (ENC-UnB)
(Examinador Interno)**

**Prof. Márcio Augusto Roma Buzar, DSc. (FAU-UnB)
(Examinador Externo)**

BRASÍLIA/DF, MARÇO DE 2018.

FICHA CATALOGRÁFICA

ARAÚJO, CARLOS VALBSON DOS SANTOS
Implementação de um Modelo Constitutivo Viscoelástico com Envelhecimento do Concreto no *Software* Abaqus [Distrito Federal] 2018.

xv, 56p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2018).
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Método dos Elementos Finitos

3. Envelhecimento

I. ENC/FT/UnB

2. Viscoelasticidade

4. Abaqus

II. Título (Mestre)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ARAÚJO, C. V. S. (2018). Implementação de um Modelo Constitutivo Viscoelástico com Envelhecimento do Concreto no *Software* Abaqus. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM – 08A/18, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 56p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Carlos Valbson dos Santos Araújo.

TÍTULO: Implementação de um Modelo Constitutivo Viscoelástico com Envelhecimento do Concreto no *Software* Abaqus.

GRAU: Mestre

ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Carlos Valbson dos Santos Araújo
UnB, Campus Darcy Ribeiro, Colina, Bloco K, Apto 203, Asa Norte.
70.904-111 Brasília – DF – Brasil.
carlos.valbson.araujo@gmail.com

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Carlos Alberto e Maria Judite, que sempre me amaram e me ensinaram, com muita paciência e carinho, a ser um homem melhor. Obrigado pelas noites em claro cuidando de mim, pela dedicação e preocupação com o meu bem-estar, pela serenidade e compreensão nos momentos em que eu falhei, por sempre me apoiarem e me encorajarem. A vocês meus pais, muito obrigado por tudo.

Às minhas irmãs, Ana Vérica, Vlândia Carla e Valéria Carla, por estarem ao meu lado em todos os momentos da minha vida, por serem exemplos de força e superação, e por não me deixarem desistir dos meus sonhos.

Ao meu orientador, Francisco Evangelista Junior, agradeço pela dedicação e paciência em orientar-me e pela contínua inspiração em seguir na carreira acadêmica. E a todos os “gigantes”, sobre os ombros dos quais pude enxergar mais longe, os meus professores, que desde a infância me ensinaram a gostar de aprender e sem os quais minha formação e aprendizado não teriam sido possíveis.

A todos os amigos conquistados até aqui, em especial Bryan Pantoja, Vanessa de Moura, Davidson França, Álvaro Martins, Iago Freitas, Nicolás Rojas, Nelson Afanador, Guilherme Pava, Jéssica Borges, Eduardo Pains. E todos os que estiveram ao meu lado durante o período de mestrado, pelos momentos de companheirismo, diversão e aprendizado.

A Fátima Albuquerque, pelos momentos de cumplicidade, de constante apoio e compreensão, e por tornar minha vida mais leve. E a Beatriz Tiziotti, por todo o auxílio prestado durante esses últimos meses da minha pesquisa.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

“Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos.”

Isaac Newton

À minha família, dedico este trabalho.

RESUMO

IMPLEMENTAÇÃO DE UM MODELO CONSTITUTIVO VISCOELÁSTICO COM ENVELHECIMENTO DO CONCRETO NO *SOFTWARE* ABAQUS

Autor: Carlos Valbson dos Santos Araújo

Orientador: Francisco Evangelista Junior

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, março de 2018

Este trabalho teve como objetivo implementar computacionalmente um modelo constitutivo viscoelástico com envelhecimento do concreto, para ser utilizado em análises através do *software* comercial Abaqus. A principal contribuição desta pesquisa foi a criação de uma sub-rotina para o Abaqus, para modelagem de materiais viscoelásticos com envelhecimento, para utilização em análises quase-estáticas. Para isso, foi utilizado um algoritmo incremental recursivo, que descarta a necessidade de integrações ao longo do histórico de carregamento, diminuindo assim a capacidade computacional exigida para as análises. A validação da sub-rotina foi feita comparando-a com resultados experimentais encontrados na literatura. Foram ainda realizadas simulações para encontrar a função de fluência homogeneizada de um material, e também no cálculo das deflexões de uma estrutura tridimensional com geometria complexa. O modelo implementado apresentou resultados satisfatórios em análises viscoelásticas para diferentes idades de aplicação do carregamento. Por ser um modelo explícito, observou-se que seu comportamento é altamente dependente do valor dos incrementos de tempo considerados. Os resultados obtidos nas diversas simulações comprovaram a eficiência, do modelo e da sub-rotina implementados, na consideração do envelhecimento em análises quase-estáticas de fluência e relaxação. Com isso, as contribuições desta pesquisa, podem ser consideradas uma ferramenta poderosa para análises de estruturas de concreto no *software* Abaqus.

Palavras chave: Método dos Elementos Finitos, Viscoelasticidade, Envelhecimento, Abaqus.

ABSTRACT

IMPLEMENTATION OF A VISCOELASTIC CONSTITUTIVE MODEL WITH CONCRETE AGING IN ABAQUS SOFTWARE

Author: Carlos Valbson dos Santos Araújo

Supervisor: Francisco Evangelista Junior

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, march of 2018

This dissertation implemented a constitutive model for concrete materials considering viscoelastic and aging effects in the commercial software Abaqus through UMAT (*User Material Subroutines*) named VAUMAT. The main contribution of this research is the formulation and implementation of an incremental recursive algorithm that efficiently avoids the cumulative integrations along the loading history in order to reduce the computational cost required for the analyses. The verification of the implemented algorithm was carried out through comparison with Matlab® adaptive integration *quadgk*. The subroutine validation was performed comparing with experimental results of literature through simulations to reproduce creep compliance functions of creep tests. The implemented VAUMAT presented satisfactory results in viscoelastic analyses for different ages of loading application. Since it is an explicit integration, it was observed that the predicted behaviour is dependent on the time increments considered. The 3D capabilities of the subroutine VAUMAT were demonstrated through simulations of long term deflections of the Koror-Babeldaob Bridge from aging relaxation modulus provided in the literature. The results obtained in simulations prove the efficiency of implemented subroutine in the consideration of aging in creep and relaxation quasi-static analyses in realistic 3D analyses. Therefore, this research contributes with an efficient and robust algorithm to simulate aging and viscoelastic effects in realistic concrete structures.

Keywords: Finite Element Methods, Viscoelasticity, Aging, Abaqus.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS.....	x
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURAS.....	xiii
1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - OBJETIVOS.....	3
1.1.1 - Objetivo geral.....	3
1.1.2 - Objetivos específicos.....	3
1.2 - CONTRIBUIÇÕES.....	4
1.3 - ESTRUTURA DO TRABALHO	4
2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	5
2.1 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	5
2.1.1 - Equações básicas.....	5
2.2 - VISCOELASTICIDADE.....	7
2.2.1 - Modelos mecânicos	7
2.2.2 - Fluência e relaxação	9
2.2.3 - Séries de Prony.....	12
2.2.4 - Interconversão $J(t) \leftrightarrow E(t)$	13
2.3 - MATERIAIS COM ENVELHECIMENTO	14
3 - ALGORITMO INCREMENTAL PARA ANÁLISE VISCOELÁSTICA VIA MEF E IMPLEMENTAÇÃO NO <i>SOFTWARE</i> ABAQUS	18
3.1 - FORMULAÇÃO PARA $E(t, t')$ E ALGORITMO INCREMENTAL.....	18
3.2 - IMPLEMENTAÇÃO DA UMAT NO <i>SOFTWARE</i> ABAQUS	23
4 - VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO	26
4.1 - VERIFICAÇÃO DA VAUMAT	26
4.2 - VALIDAÇÃO COM EXPERIMENTOS	29
4.2.1 - Comparação com ensaios de Atrushi (2003)	30
4.2.2 - Comparação com ensaios de Silva Junior (2017)	32

5 - APLICAÇÕES	36
5.1 - SIMULAÇÃO DE TESTES DE FLUÊNCIA EM MATERIAIS COMPÓSITOS	36
5.1.1 - Obtenção do módulo $J(t, t')$ homogeneizado	36
5.2 - SIMULAÇÃO EM ESTRUTURA 3D (PONTE KOROR-BABELDAOB).....	40
5.2.1 - Análise das deflexões da ponte	44
5.2.2 - Análise de sensibilidade com experimento fatorial	46
6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	51
6.1 - CONCLUSÕES	51
6.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	52
REFERÊNCIAS	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Carregamento aplicado para cada idade t'	30
Tabela 4.2 – Resistências da mistura REF 0,367 e tensões aplicadas para cada idade t'	33
Tabela 5.1 – Porcentagens das inclusões utilizadas nos modelos	37
Tabela 5.2 – Parâmetros estatísticos dos coeficientes analisados	47

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Modelos mecânicos: (a) elástico; (b) viscoso e viscoelásticos; (c) Maxwell; (d) Kelvin; (e) Burgers e (f) modelo generalizado de Kelvin.....	7
Figura 2.2 – Componentes de deformação, modelo de Burgers. Adaptado de Huang (2004)...	8
Figura 2.3 – Comportamentos básicos de materiais viscoelásticos: (a) fluência e (b) relaxação. Adaptado de Lakes (2009)	9
Figura 2.4 – Superposição de efeitos para fluência. Adaptado de Lakes (2009)	10
Figura 2.5 – Histórico de deformação aplicada variando com t . Adaptado de Lakes (2009) .	11
Figura 2.6 – Modelo generalizado (a) de Maxwell; (b) de Kelvin.....	12
Figura 2.7 – Superfície representando a função de fluência para um material com envelhecimento. Adaptado de Marques e Creus (2012)	15
Figura 2.8 – Fluência em baixas idades do concreto sob compressão. Adaptado de Atrushi (2003)	15
Figura 3.1 – Fluxo básico de ações internas no <i>solver Standard</i> do Abaqus.....	24
Figura 3.2 – Sequência de passos programados na VAUMAT.....	24
Figura 4.1 – Módulo de relaxação $E(t, t')$. Intervalo $t - t'$: (a) de 10^{-2} a 10^2 dias e (b) de 10^{-1} a 10^1 dias	26
Figura 4.2 – Resposta de fluência para carregamento senoidal: (a) comparação VAUMAT e MatLab e (b) erro relativo e_r	28
Figura 4.3 – Resposta de relaxação para carregamento senoidal: (a) comparação VAUMAT e MatLab e (b) erro relativo e_r	29
Figura 4.4 – Malha e condições de contorno usadas nas simulações de Atrushi (2003)	30
Figura 4.5 – Deformações de fluência para $t' = 1$ dia	31
Figura 4.6 – Deformações de fluência para $t' = 3$ dias	31
Figura 4.7 – Deformações de fluência para $t' = 8$ dias	32
Figura 4.8 – Malha e condições de contorno usadas nas simulações de Silva Junior (2017)..	33
Figura 4.9 – Regressão curvas $E(t, t')$ obtidas de Silva Junior (2017).....	34
Figura 4.10 – Resultados da função fluência para 1, 3 e 7 dias	35
Figura 5.1 – Disposição geométrica das inclusões: (a) M1; (b) M2; (c) M3; (c) M4.....	37
Figura 5.2 – Curvas $E(t, t')$ do material utilizado na matriz: (a) $t - t'$ de 10^{-1} até 10^4 dias e (b) $t - t'$ de 10^{-2} até 10^2 dias	38
Figura 5.3 – Curvas de $J(t, t')$ homogeneizados para $t' = 1$ dia	39

Figura 5.4 – Curvas de $J(t, t')$ homogeneizados normalizados: (a) $t' = 3$ dias; (b) $t' = 8$ dias.	40
Figura 5.5 – Ponte Koror-Babeldaob (Bažant <i>et al.</i> , 2010).....	41
Figura 5.6 – Seções transversais da ponte analisada. Adaptado de Bažant <i>et al.</i> (2010).....	41
Figura 5.7 – Regressão curvas $E(t, t')$ do concreto utilizado na ponte	42
Figura 5.8 – Erro relativo entre malhas com diferentes quantidades de elementos	43
Figura 5.9 – Características da ponte modelada: (a) geometria e condições de contorno, (b) corte longitudinal e (c) malha utilizada nas análises	43
Figura 5.10 (continuação) – Características da ponte modelada: (a) geometria e condições de contorno, (b) corte longitudinal e (c) malha utilizada nas análises	44
Figura 5.11 – Deflexões da ponte normalizadas com relação a $\delta(7,7)$	45
Figura 5.12 – Convergência das deflexões para diferentes valores de Δt , para t' de 7 dias....	46
Figura 5.13 – Efeitos relativos, $e_{f\ rel}$, relacionados aos coeficientes lineares (a_i) de Y	48
Figura 5.14 – Efeitos relativos, $e_{f\ rel}$, relacionados aos coeficientes quadráticos (a_{ii}) de Y ..	49
Figura 5.15 – Efeitos relativos, $e_{f\ rel}$, relacionados aos coeficientes a_{ij} de Y	50

LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURAS

Símbolos do Alfabeto Grego

- σ Vetor de tensões
- ε Vetor de deformações
- σ Tensão unidirecional
- ε, ϵ Deformação unidirecional
- η_i Coeficiente de viscosidade
- ρ_i Tempo de relaxação do material
- τ_i Tempo de retardação do material
- Δ Operador indicando incremento
- ν Coeficiente de Poisson
- β_i Coeficiente da função de envelhecimento
- ω_i Coeficiente relacionado à idade de aplicação do carregamento
- λ Primeiro parâmetro de Lamé
- δ Deflexão

Símbolos do Alfabeto Latino

- W Trabalho interno realizado
- \mathbf{b} Vetor de forças de corpo
- \mathbf{t} Vetor de forças de superfície
- \mathbf{p}_i Vetor de forças concentradas
- \mathbf{u} Vetor de deslocamentos
- \mathbf{N} Matriz de funções de forma

- \mathbf{u}_N Vetor de deslocamentos nodais
- \mathbf{B} Matriz com as derivadas das funções de forma
- \mathbf{D} Matriz constitutiva do material
- \mathbf{K} Matriz de rigidez genérica
- \mathbf{f} Vetor de forças externas
- E Módulo de elasticidade
- t Tempo de análise
- $E(t)$ Módulo de relaxação
- $J(t)$ Função de fluência
- s Variável do espaço de Laplace
- t' Idade de aplicação do carregamento
- q_1, q_2, q_3, q_4 Parcelas de deformação do modelo B3
- $C_0(t, t')$ Função para fluência básica
- $C_d(t, t', t_0)$ Função para fluência devida à secagem
- h Umidade relativa do ambiente
- $S(t)$ Função que define a forma da curva de retração do concreto
- $\mathbf{C}(v)$ Matriz constante ao longo do tempo em função de v
- $\mathbf{s}_j(t, t')$ Variável de estado relacionada ao histórico de solicitações
- \mathbf{J} Matriz jacobiana do material
- G Módulo de cisalhamento do material
- \mathbf{c} Vetor de correção dos deslocamentos
- \mathbf{r}^α Vetor de forças residuais
- P Carga aplicada

- X Variável aleatória de uma função
- a_0 Valor médio de uma função
- a Efeito de determinada variável X em uma função

Nomenclatura

- MEF Método dos Elementos Finitos
- Abaqus *Software* comercial que utiliza o MEF
- UMAT *User Material Subroutine*
- PTV Princípio dos Trabalhos Virtuais
- ACI *American Concrete Institute*
- fib* *Fédération internationale de béton*
- JSCE *Japan Society of Civil Engineers*
- DPL *Double Power Law*
- B3 Modelo de fluência e retração do concreto, proposto por Bažant e Baweja (1995)
- B4 Atualização do modelo B3, proposta por Bažant *et al.* (2015)
- MMEA Método do Módulo de Elasticidade Ajustado
- MatLab Linguagem de programação de alto nível e ambiente computacional numérico
- M1 Modelo de matriz viscoelástica sem inclusões elásticas
- M2 Modelo de matriz viscoelástica com 13,06% de inclusões elásticas
- M3 Modelo de matriz viscoelástica com 21,71% de inclusões elásticas
- M4 Modelo de matriz viscoelástica com 28,90% de inclusões elásticas
- C3D8 Elemento finito contínuo tridimensional com oito nós, hexaedro linear
- C3D10 Elemento finito contínuo tridimensional com dez nós, tetraedro quadrático

1 - INTRODUÇÃO

Para prever o comportamento de peças estruturais, como por exemplo, determinar tensões e deformações, a engenharia usa métodos numéricos para aproximação dos meios contínuos. Entre os métodos mais utilizados está o Método dos Elementos Finitos (MEF), o qual subdivide o domínio do problema em regiões menores, facilitando assim a resolução do problema como um todo. Para utilizar esse método, uma das informações essenciais é o modelo constitutivo do material empregado, o qual descreve o seu comportamento mecânico na forma de uma relação entre tensão e deformação.

Com o avanço da capacidade de processamento dos computadores o uso do MEF se tornou comum na engenharia, havendo no mercado diversas opções de *softwares* para sua utilização. Um dos programas de MEF mais usados é o Abaqus, o qual permite, entre outras coisas, que o usuário programe sub-rotinas para modelar o comportamento de materiais que não estão nativamente disponíveis em sua biblioteca. Essas sub-rotinas são chamadas de *User Material* (UMAT) e, com elas, é possível implementar modelos constitutivos desenvolvidos para materiais com características específicas. Na literatura, encontram-se diversos autores que usaram esse recurso do Abaqus, tais como Al-Rub *et al.* (2011) e Darabi *et al.* (2011), que implementaram modelos para materiais asfálticos. Já Dean *et al.* (2011) programaram uma UMAT para modelagem da fluência em polímeros e Yun *et al.* (2016) e Tunç e Özüpek (2016) para modelagem de combustíveis sólidos para foguetes. Pode-se também encontrar trabalhos onde se aproveitou essa capacidade do Abaqus para implementar modelos para estruturas de concreto, como em Yu *et al.* (2012), Hedegaard *et al.* (2014) e Xu e Su (2017).

O estudo das propriedades reológicas dos materiais de construção civil é de extrema importância, visto que uma avaliação equivocada de seu comportamento pode levar uma estrutura à ruína. Um exemplo são as deformações de longo tempo, ocasionadas em pontes de concreto armado e protendido, as quais podem chegar a valores extremos, como o caso da ponte estudada por Bažant *et al.* (2010) e Bažant *et al.* (2012a,b). Essa ponte teve sua construção finalizada no ano de 1977, usando balanços sucessivos em concreto protendido e possuindo um vão principal de 241 metros. Após 18 anos de utilização apresentou uma deflexão excessiva no meio do vão principal, o que levou a reforçarem-na com protensão adicional. Porém, em 1996, três meses após sua reinauguração, entrou em colapso, ocasionando duas fatalidades e muitos prejuízos. Em outro estudo, Bažant *et al.* (2011) analisaram os dados de 56 pontes em

concreto protendido e verificaram que a maioria apresentou deflexões excessivas entre 20 e 40 anos, bem abaixo da vida útil de 100 anos esperada em projeto.

Casos como esses mostram que o concreto é um material reológico e, por isso, se faz necessário o estudo das suas propriedades. Uma das formas de se modelar o comportamento de materiais desse tipo é através da teoria da viscoelasticidade, a qual pode ser utilizada juntamente com o MEF para se realizar análises estruturais. Além dos comportamentos reológicos típicos de fluência e relaxação, o concreto é também um material com envelhecimento, onde a data de aplicação das solicitações influencia diretamente nas suas respostas finais. Porém, os modelos implementados em MEF para fluência no concreto não consideram o envelhecimento, sendo necessário obter curvas diferentes para cada idade de aplicação do carregamento. Assim, a modelagem via MEF, que considere também o envelhecimento, é uma forma de se obter valores mais reais das respostas de estruturas de concreto, ajudando a prevenir acidentes e contribuindo para a engenharia estrutural.

Os modelos de previsão de fluência para o concreto, tanto para baixas como para longas idades, tais como os propostos por ACI 209 (2008), *fib* (2010) e Bažant *et al* (2015), não são eficientemente aplicáveis para MEF. Isso se dá porque eles dependem de muitos parâmetros e, quando considerados na equação constitutiva viscoelástica, se faz necessário um grande esforço computacional para resolvê-la. Assim, é mais apropriado usar um modelo constitutivo viscoelástico baseado em séries de Prony, como aqueles utilizados por Darabi *et al.* (2011), Dean *et al.* (2011), Yu *et al.* (2012) e Yun *et al.* (2016), por exemplo. Esses modelos são mais eficientes porque permitem a utilização de um algoritmo incremental para resolver a equação constitutiva viscoelástica, como visto em Taylor *et al.* (1970), Zocher *et al.* (1997) e Chazal e Pitti (2011). Algoritmos desse tipo necessitam de menos poder de processamento e capacidade de armazenamento, tornando mais viável a solução de problemas com muitos graus de liberdade.

Na literatura há certa escassez de trabalhos sobre envelhecimento do concreto, ou seja, mostrando os ensaios de fluência para várias idades de carregamento e para longos períodos de aplicação de carga. Há escassez também da implementação computacional via MEF de modelos que considerem o envelhecimento. Para modelagem no Abaqus, por exemplo, são utilizadas várias curvas de fluência, uma para cada idade de aplicação da carga, como em Bažant *et al.* (2012a,b) e Yu *et al.* (2012), tornando a análise mais trabalhosa. Assim, esta pesquisa insere-se neste meio através de uma proposta de tentar simplificar a modelagem de materiais vis-

coelásticos com envelhecimento, como o concreto, por exemplo, para utilização em análises via MEF no *software* Abaqus.

1.1 - OBJETIVOS

1.1.1 - Objetivo geral

Esta pesquisa tem como objetivo principal implementar computacionalmente um modelo constitutivo viscoelástico para o concreto, que considere os efeitos do envelhecimento, para ser utilizado no *software* comercial Abaqus, em análises 2D e 3D.

1.1.2 - Objetivos específicos

Ao longo do desenvolvimento desta pesquisa procurou-se cumprir com os objetivos específicos listados a seguir:

- Formular uma equação constitutiva, baseada em séries de Prony, para representar o comportamento viscoelástico de materiais com envelhecimento;
- Adaptar um algoritmo incremental com a formulação encontrada, a fim de utilizá-lo em análises por elementos finitos;
- Implementar uma sub-rotina UMAT, na linguagem de programação Fortran, para o *software* Abaqus. Essa sub-rotina foi nomeada de VAUMAT;
- Validar a VAUMAT comparando com resultados experimentais de envelhecimento do concreto;
- Testar a viabilidade de se usar a VAUMAT para encontrar uma função de fluência equivalente para um material compósito, a partir do módulo da matriz juntamente com inclusões elásticas;
- Realizar testes para verificar a eficiência da VAUMAT;
- Estudar o efeito das variáveis da lei constitutiva, utilizando superfície de resposta.

1.2 - CONTRIBUIÇÕES

A principal contribuição desta pesquisa foi a criação de uma sub-rotina para a modelagem no Abaqus de materiais viscoelásticos com envelhecimento. Na literatura há modelos para o envelhecimento, mas a sua implementação não é eficiente para a integração da equação constitutiva, demandando muito tempo computacional. Nesta pesquisa, foi utilizado um algoritmo incremental recursivo, que descarta a necessidade de integrações ao longo do histórico de carregamento, diminuindo a capacidade computacional exigida para as análises. Dados os resultados de fluência estática para várias idades, podem-se construir as curvas de fluência e, a partir destas, as curvas de relaxação do material. Na sub-rotina foi implementado um modelo para o envelhecimento, inexistente no *software* Abaqus, com o qual pode-se regredir tais curvas de relaxação e assim simular o comportamento viscoelástico com envelhecimento.

1.3 - ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta pesquisa está dividida em seis capítulos, sendo o Capítulo 1 dedicado a uma introdução sobre o assunto estudado e aos objetivos geral e específicos da pesquisa. O Capítulo 2 apresenta uma breve revisão sobre o MEF, viscoelasticidade e materiais com envelhecimento. O Capítulo 3 mostra o algoritmo incremental utilizado e detalhes da implementação numérica realizada. O Capítulo 4 traz a verificação da sub-rotina implementada para o *software* Abaqus. Já o Capítulo 5 apresenta a aplicação da VAUMAT para a obtenção da função de fluência homogeneizada para um material compósito e também sua aplicação em um exemplo de uma estrutura tridimensional real. Por fim, o Capítulo 6 apresenta as principais considerações deste trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros.

2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta uma breve revisão dos assuntos abordados na pesquisa, os quais foram divididos em três grupos: MEF, teoria da viscoelasticidade e materiais com envelhecimento. Primeiramente, são mostradas as equações básicas utilizadas para modelagens via MEF. Em seguida, apresentam-se os conceitos de fluência e relaxação, séries de Prony, interconversão e também alguns modelos de envelhecimento para o concreto.

2.1 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em um procedimento numérico para determinar soluções aproximadas de problemas de valores de contorno, que são dados por equações diferenciais parciais. O MEF subdivide o domínio de um problema em partes menores, denominadas elementos finitos. Para cada elemento finito, são desenvolvidas equações algébricas a partir da equação governante do problema que, posteriormente, são agrupadas de modo a formar um sistema linear de equações. Assim, a solução global é encontrada impondo-se condições de compatibilidade e de equilíbrio, ao longo do contorno do domínio do problema.

2.1.1 - Equações básicas

Em problemas de equilíbrio estático, pode-se usar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para encontrar as equações de elementos finitos. Esse princípio diz que tensões e forças atuantes em um corpo estarão em equilíbrio se os trabalhos virtuais, interno e externo, forem iguais para qualquer campo de deslocamentos virtuais:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext}$$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{p}_i \quad (2.1)$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são os vetores que representam os tensores simétricos de tensões e de deformações, respectivamente. Além disso, \mathbf{b} é o vetor de forças de corpo, \mathbf{t} o vetor de forças de superfície, \mathbf{p}_i o vetor de forças concentradas, \mathbf{u} o vetor de deslocamentos e V e S definem volume e superfície, respectivamente.

No domínio dos elementos finitos, usando interpolação, deformações e deslocamentos podem ser relacionados com os deslocamentos nodais dos elementos. Assim, os deslocamentos virtuais em um ponto podem ser expressados em termos dos deslocamentos virtuais nodais:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}_N \quad (2.2)$$

Onde $\mathbf{N} = [\mathbf{I}N_1 \mathbf{I}N_2 \mathbf{I}N_3 \dots \mathbf{I}N_n]$ é a matriz das funções de forma. Do mesmo modo, as deformações virtuais podem ser relacionadas com os deslocamentos virtuais nodais por:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_N \quad (2.3)$$

Sendo \mathbf{B} uma matriz dada em função das derivadas das funções de forma, com relação às coordenadas cartesianas do problema.

Substituindo $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ na Eq. (2.1), desconsiderando os deslocamentos virtuais nodais $\delta \mathbf{u}_N$ e expressando o vetor de tensões em termos da matriz constitutiva do material (\mathbf{D}), da forma como segue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}_N \quad (2.4)$$

Obtém-se a equação de elementos finitos para análise linear estática, dada por:

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{u}_N = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \sum_{i=1}^n \mathbf{N}^T \mathbf{p}_i \quad (2.5)$$

Esta equação relaciona forças com deslocamentos e pode ser escrita simplesmente como:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_N = \mathbf{f} \quad (2.6)$$

Onde \mathbf{K} é denotado por matriz de rigidez, \mathbf{u}_N é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{f} o vetor de forças externas.

Para problemas mais complexos, que exigem uma discretização do domínio em uma grande quantidade de elementos finitos, é necessário o uso de implementação computacional do MEF. Assim, as integrais da Equação (2.5) são resolvidas numericamente usando, por exemplo, a quadratura de Gauss (ou Gauss-Legendre), para análises estáticas (Bathe, 1996; Reddy, 2006; Fish e Belytschko, 2007). Já para análises dinâmicas, pode-se usar o método de integração de Newmark (Cook, 1995; Bathe, 1996).

2.2 - VISCOELASTICIDADE

Um material viscoelástico possui tanto propriedades elásticas de um sólido quanto o comportamento viscoso de um líquido, característica que faz com que ele tenha suas propriedades variando em função do tempo sob carregamento. O procedimento geral da teoria da viscoelasticidade se baseia na correspondência entre viscoelasticidade e elasticidade, através das transformadas de Laplace, que permitem resolver o problema como um problema elástico equivalente. Assim, a inversa de Laplace da solução elástica é a solução para o caso viscoelástico, quando as condições de contorno do problema não mudarem com o tempo.

2.2.1 - Modelos mecânicos

A Figura 2.1 mostra diversos modelos mecânicos para representar o comportamento de materiais elásticos, viscosos e viscoelásticos.

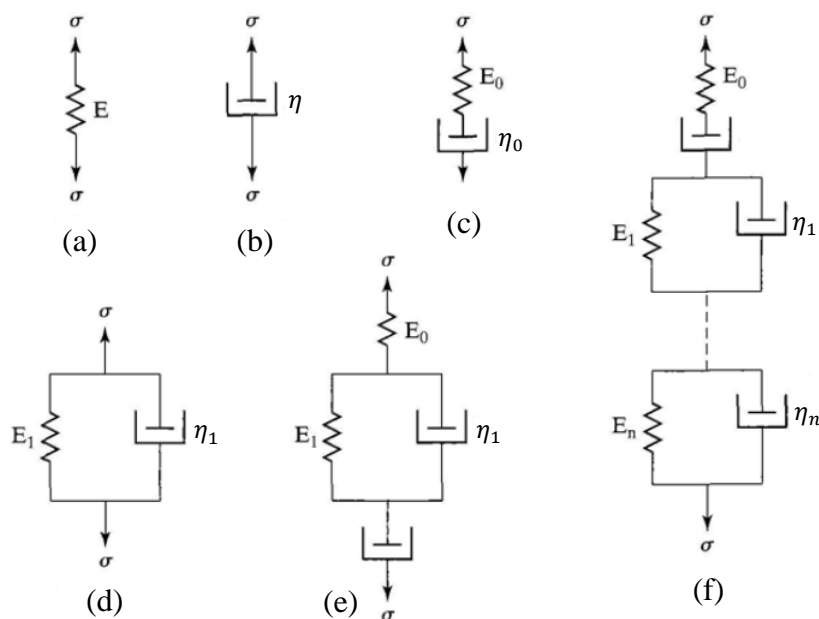


Figura 2.1 – Modelos mecânicos: (a) elástico; (b) viscoso e viscoelásticos; (c) Maxwell; (d) Kelvin; (e) Burgers e (f) modelo generalizado de Kelvin.

Esses modelos são formados por dois elementos principais, sendo o primeiro uma “mola”, representada pelo módulo E , que caracteriza o comportamento elástico. Já o segundo é um “amortecedor”, simbolizado pelo coeficiente de viscosidade η , caracterizando o comportamento viscoso do material. Assim, o primeiro modelo da Figura 2.1 define um material elásti-

co que segue a Lei de Hooke, onde as tensões são diretamente proporcionais às deformações, da seguinte forma:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.7)$$

Para um material puramente viscoso, como indicado na Figura 2.1 (b), as tensões obedecem à Lei de Newton, sendo proporcionais à taxa de variação da deformação com o tempo, como segue:

$$\sigma = \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.8)$$

Combinando-se elementos de “mola” e “amortecedor” podem-se simular comportamentos de materiais viscoelásticos, como o modelo de Maxwell, apresentado na Figura 2.1 (c), que os une em série. Para esse modelo, a deformação sob uma tensão constante é a soma das parcelas elástica e viscosa, dada por:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma t}{\eta_0} \quad (2.9)$$

Para o modelo de Kelvin, representado pela Figura 2.1 (d), tanto a “mola” quanto o “amortecedor” terão a mesma deformação, e a tensão será a soma correspondente às duas parcelas:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon + \eta_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.10)$$

Combinando os modelos de Maxwell e Kelvin obtém-se o modelo de Burgers (Figura 2.1 (e)), para o qual a deformação é composta de três partes: uma elástica instantânea, uma viscosa e uma elástica lenta (Figura 2.2), sendo $\rho = \eta/E$.

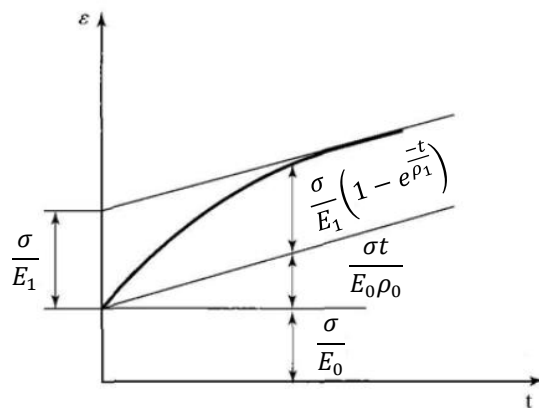


Figura 2.2 – Componentes de deformação, modelo de Burgers. Adaptado de Huang (2004)

Por último, a Figura 2.1 (f) mostra um modelo generalizado, que pode ser usado para simular o comportamento de um material viscoelástico qualquer. Esse modelo utiliza uma combinação de vários modelos de Kelvin, para levar em consideração a influência de inúmeras parcelas de deformação lenta, que podem surgir ao longo do período de tempo considerado (Huang, 2004). Para uma tensão constante, a deformação dada por um modelo generalizado toma a forma a seguir:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 + \frac{t}{\rho_0} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma}{E_i} \left[1 - e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right] \quad (2.11)$$

2.2.2 - Fluência e relaxação

Fluência é um dos comportamentos básicos dos materiais viscoelásticos, a qual é caracterizada por uma deformação lenta e progressiva, quando o material é submetido a uma tensão constante. Já a relaxação é a resposta de decréscimo de tensão quando se submete um material viscoelástico a uma deformação constante. A Figura 2.3 mostra os comportamentos típicos de deformação e tensão ao longo do tempo para esses dois casos.

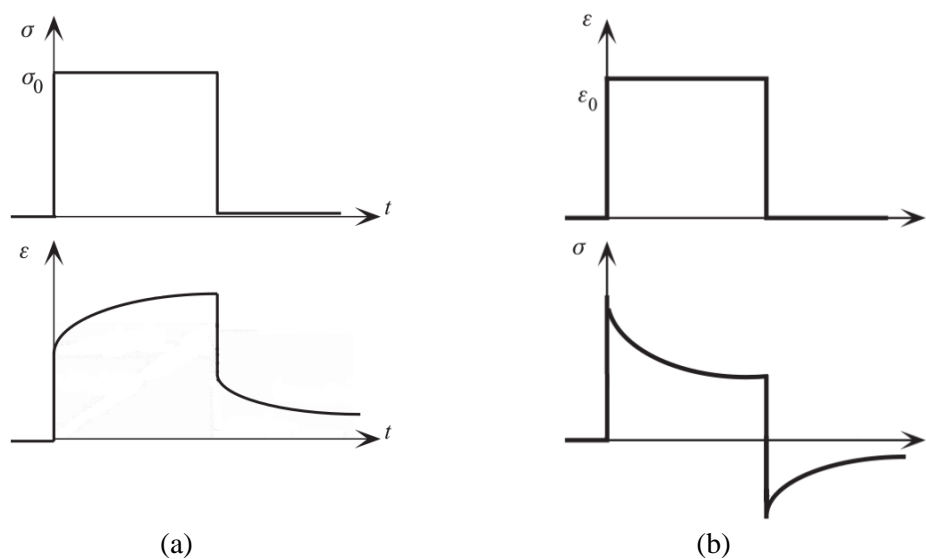


Figura 2.3 – Comportamentos básicos de materiais viscoelásticos: (a) fluência e (b) relaxação. Adaptado de Lakes (2009)

Na Figura 2.3 (a) pode-se perceber o aumento da deformação enquanto a tensão é mantida constante e seu posterior decréscimo quando a tensão é removida. Já a Figura 2.3 (b) mostra a resposta de tensão para o caso de deformação constante imposta ao longo do tempo, onde se percebe uma relaxação, ou seja, um decréscimo do valor da tensão, seguido de uma recuperação quando a solicitação é removida.

O comportamento do material após a retirada da sollicitação, seja na fluência ou na relaxação, pode ser interpretado como uma sollicitação com mesmo valor e sentido contrário ao do carregamento aplicado inicialmente. Assim, considerando a superposição dos efeitos dos dois casos de carregamento, como mostrado na Figura 2.4 para a fluência, pode-se expressar a tensão em função do tempo da seguinte forma:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [E(t) - E(t - t_1)] \quad (2.12)$$

Onde $E(t)$ é o módulo de relaxação do material e t_1 é a idade em que a sollicitação é retirada.

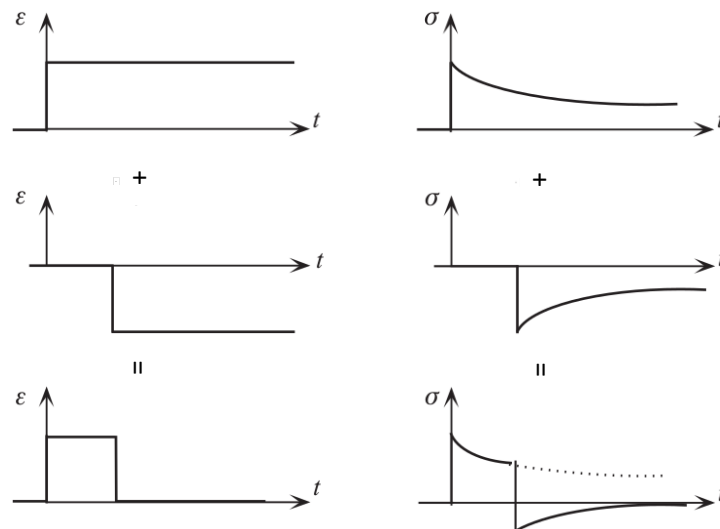


Figura 2.4 – Superposição de efeitos para fluência. Adaptado de Lakes (2009)

O comportamento apresentado na Figura 2.4 é para o caso básico de sollicitação constante. Para casos mais gerais, onde se tem a deformação variando ao longo do tempo, é necessário usar o princípio de superposição de Boltzmann. Esse princípio diz que, para materiais lineares, o efeito de uma combinação de casos de sollicitações é igual à soma dos efeitos desses casos individuais. Assim, para um histórico arbitrário de deformação aplicada, como mostrado na Figura 2.5, o incremento de tensão de um seguimento de tempo de $t - t'$ para $t - t' + \Delta t'$ é dado por:

$$d\sigma(t) = \varepsilon(t) [E(t - t') - E(t - t' + \Delta t')] \quad (2.13)$$

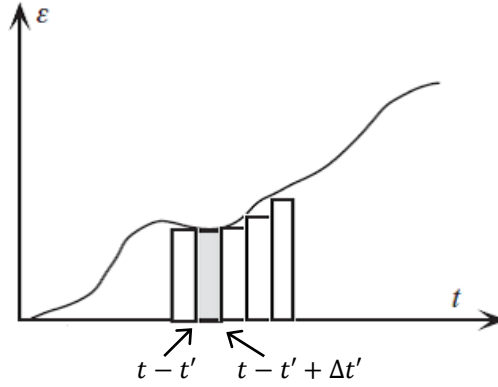


Figura 2.5 – Histórico de deformação aplicada variando com t . Adaptado de Lakes (2009)

Aqui, t' é a idade em que um incremento de deformação é aplicado. Considerando então que $\frac{dE(t-t')}{dt'} = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{E(t-t'+\Delta t') - E(t-t')}{\Delta t'}$, esse incremento de tensão pode ser expressado da seguinte forma:

$$d\sigma(t) = -\varepsilon(t) \frac{dE(t-t')}{dt'} dt' \quad (2.14)$$

A tensão total em um tempo t será dada pelo somatório de todos os incrementos até esse tempo. Assim, a Eq. (2.14) se torna uma integral e, utilizando integração por partes, obtém-se a relação constitutiva para a relaxação, dada pela integral de convolução:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-t') \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} dt' \quad (2.15)$$

De forma semelhante, encontra-se que, para um histórico de tensões, a relação constitutiva que descreve a fluência é dada pela seguinte integral de convolução:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-t') \frac{d\sigma(t')}{dt'} dt' \quad (2.16)$$

Onde $J(t-t')$ é a função de fluência do material.

Para um material inicialmente em repouso ($\sigma = 0$ e $\varepsilon = 0$), onde as solicitações envolvem um valor inicial σ_0 ou ε_0 no tempo $t = 0$, as integrais das equações (2.15) e (2.16) se tornam:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t-t') \frac{d\sigma(t')}{dt'} dt' \quad (2.17)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t) + \int_0^t E(t-t') \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} dt' \quad (2.18)$$

2.2.3 - Séries de Prony

Para representar matematicamente os comportamentos encontrados nos ensaios de fluência e relaxação dos materiais viscoelásticos utilizam-se funções de regressão. Essas funções podem ser descritas pelos modelos mecânicos generalizados de Maxwell e Kelvin (Figura 2.6), os quais proporcionam melhor eficiência na implementação computacional. Esses modelos são expressados na forma de somatórios, conhecidos como séries de Prony (Lakes, 2009; Marques e Creus, 2012).

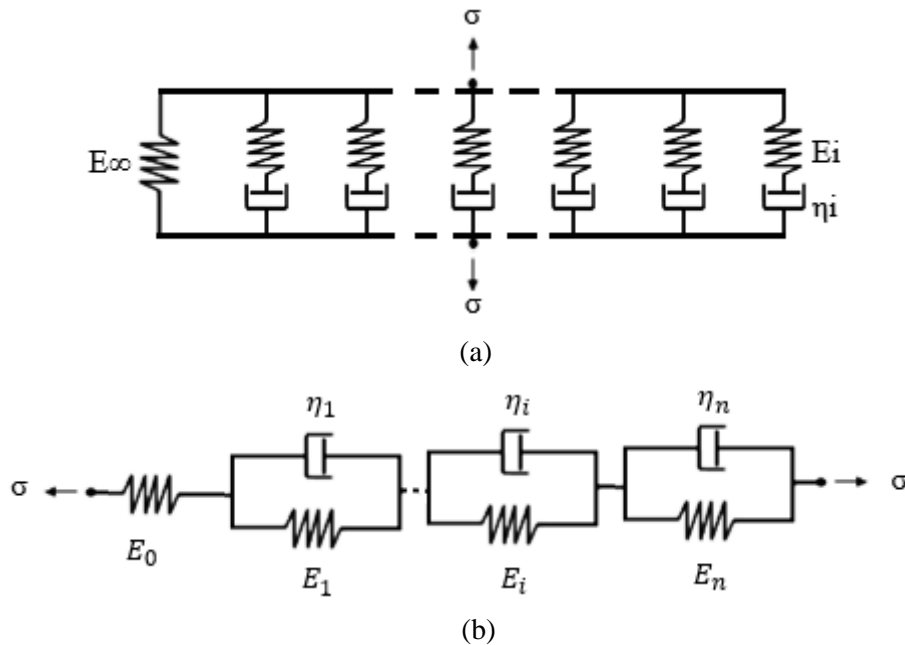


Figura 2.6 – Modelo generalizado (a) de Maxwell; (b) de Kelvin

Assim, baseando-se no modelo generalizado de Maxwell da Figura 2.6 (a), a expressão da série de Prony para o módulo de relaxação, $E(t)$, é dada por:

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^M E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \quad (2.19)$$

Onde E_∞ representa o módulo do material totalmente relaxado, ou seja, quando $t \rightarrow \infty$, E_i é a parcela elástica de cada dupla da série e $\rho_i = \eta_i/E_i$ o tempo de relaxação do material. Da

mesma forma, pode-se obter uma expressão a partir do modelo generalizado de Kelvin para a função de fluência, $J(t)$, em termos da série de Prony:

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^M \frac{1}{E_i} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \quad (2.20)$$

Onde E_0 representa o módulo do material quando $t = 0$ e $\tau_i = \eta_i/E_i$ é o tempo de retardação do material, o qual mede a taxa com a qual cada dupla da série desenvolve sua deformação.

2.2.4 - Interconversão $J(t) \leftrightarrow E(t)$

As funções $E(t)$ e $J(t)$ descrevem as propriedades reológicas dos materiais viscoelásticos submetidos a diferentes solicitações (deslocamentos impostos ou forças aplicadas, respectivamente), sendo funções obtidas experimentalmente. Porém, o ensaio para se obter o módulo $E(t)$ de um material é mais complicado de ser realizado, por conta de seu custo. Assim, por questões práticas, tem-se desenvolvido técnicas para se obter o módulo de relaxação a partir da função de fluência, obtida do ensaio estático de fluência, uma vez que esse é mais simples de ser realizado. Nesse ensaio, aplica-se uma tensão constante de valor unitário e, utilizando as relações constitutivas (2.15) e (2.16), obtém-se a seguinte correspondência entre as funções de fluência e de relaxação:

$$\int_0^t E(t-t') \frac{\partial J(t')}{\partial t'} dt' = 1 \quad (2.21)$$

Com isso, utilizando integração numérica pode-se calcular $E(t)$ a partir dos valores de $J(t)$ encontrados no ensaio de fluência.

As integrais de convolução das Equações (2.15) e (2.16) também podem ser manipuladas com o auxílio da transformada de Laplace, a qual converte uma equação integral ou diferencial linear em uma equação algébrica. Logo, no espaço de Laplace, essas equações se tornam, respectivamente:

$$\sigma(s) = sE(s)\varepsilon(s) \rightarrow \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} = sE(s) \quad (2.22)$$

e

$$\varepsilon(s) = sJ(s)\sigma(s) \rightarrow \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{1}{sJ(s)} \quad (2.23)$$

Igualando essas duas equações:

$$E(s)J(s) = \frac{1}{s^2} \quad (2.24)$$

Fazendo a inversa da transformada de Laplace para a Equação (2.24) obtém-se a seguinte relação:

$$\int_0^t J(t-t')E(t')dt' = \int_0^t E(t-t')J(t')dt' = t \quad (2.25)$$

A qual também pode ser utilizada para encontrar o módulo de relaxação a partir da função de fluência ou vice-versa.

A esses métodos que relacionam as funções viscoelásticas $E(t)$ e $J(t)$ dá-se o nome de interconversão. Existem outros métodos de interconversão dessas funções, alguns apresentados por Ferry (1980) e também por Christensen (1982). Há ainda o método desenvolvido por Park e Schapery (1999), que se utiliza de um procedimento numérico para calcular os coeficientes da série de Prony de uma das funções, $E(t)$ ou $J(t)$, a partir dos coeficientes da série de Prony da outra função.

2.3 - MATERIAIS COM ENVELHECIMENTO

Materiais com envelhecimento são aqueles cujas propriedades mudam com o tempo, mesmo sem estar sob carregamento. A origem da escala de tempo desses materiais é a data da sua criação que, para o concreto, por exemplo, pode ser considerada a data de sua mistura ou a data do final da cura. Assim, para um material linearmente viscoelástico, a equação constitutiva de fluência para o caso uniaxial pode ser dada por:

$$\varepsilon(t, t') = \int_0^t J(t, t') \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt' \quad (2.26)$$

Ou, para o caso de relaxação, por:

$$\sigma(t, t') = \int_0^t E(t, t') \frac{\partial \varepsilon(t')}{\partial t'} dt' \quad (2.27)$$

Nesse caso, a função de fluência depende de duas variáveis, podendo ser representada como uma família de curvas ou por uma superfície, como mostrado na Figura 2.7.

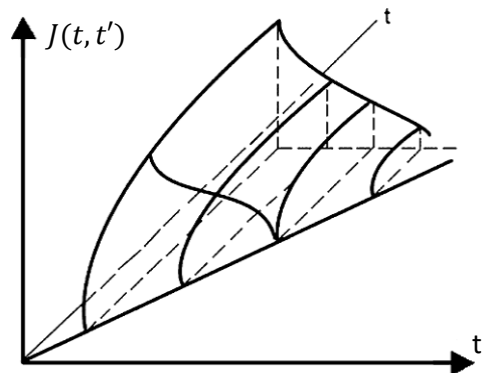


Figura 2.7 – Superfície representando a função de fluência para um material com envelhecimento. Adaptado de Marques e Creus (2012)

No concreto, a propriedade de envelhecimento pode influenciar bastante na resposta final de uma estrutura, uma vez que solicitações aplicadas em baixas idades geram deformações maiores do que quando aplicadas em idades mais avançadas. Esse comportamento pode ser visto na Figura 2.8, a qual mostra os resultados de ensaios experimentais realizados por Atrushi (2003). Em sua tese, Atrushi (2003) investigou o comportamento de fluência à tração do concreto submetido a carregamentos em baixas idades, comparando com a fluência à compressão. Além disso, investigou também a influência desse comportamento no desenvolvimento das tensões auto induzidas devidas à retração do concreto.

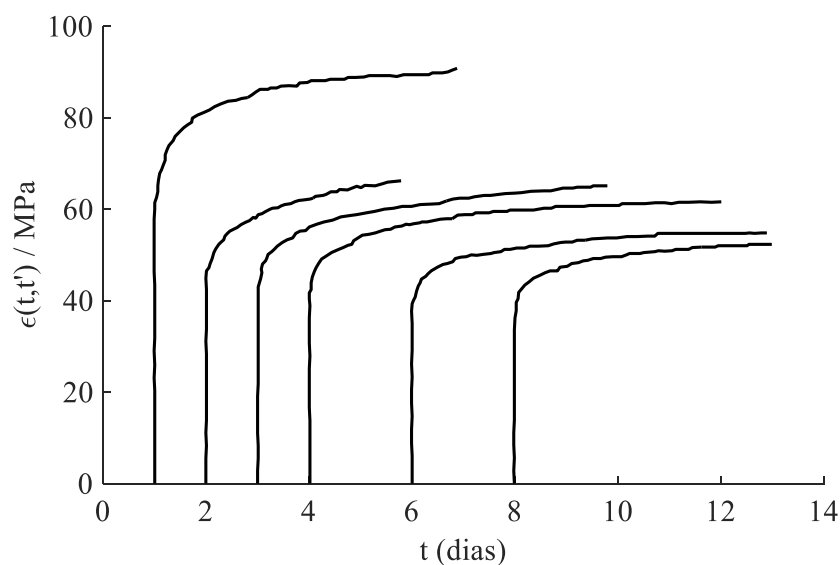


Figura 2.8 – Fluência em baixas idades do concreto sob compressão. Adaptado de Atrushi (2003)

Há diversos modelos de previsão da fluência do concreto considerando o envelhecimento, entre eles estão os modelos propostos nas normas ACI 209 (2008), *fib* (2010) e JSCE (1991). Há também os modelos propostos por pesquisadores como Bažant e Panula (1978), Bažant e Baweja (1995) e Bažant *et al* (2015). O primeiro, denotado por *Double Power Law* (DPL) (Bažant e Panula, 1978), segue o princípio da superposição e não faz distinção entre as deformações instantânea e de fluência, como acontece nos modelos da ACI 209 (2008) e da *fib* (2010). Nesse modelo, a fluência básica é dada pela seguinte função:

$$J(t, t') = \frac{1}{E_0} + \frac{\varphi_0}{E_0} (\alpha' + t'^{-d})(t - t')^p \quad (2.28)$$

Em que E_0 , φ_0 , α' , d e p são parâmetros do material. Esse modelo tem esse nome porque tanto a idade t' quanto o intervalo de tempo sob carregamento $(t - t')$ são funções de potências. Já o modelo proposto por Bažant e Baweja (1995) é conhecido por modelo B3 e estima as deformações de fluência através da seguinte expressão:

$$J(t, t') = q_1 + C_0(t, t') + C_d(t, t', t_0) \quad (2.29)$$

Onde q_1 é a deformação instantânea devida a uma tensão unitária, $C_0(t, t')$ é a função para a fluência básica, a qual ocorre quando não há perda de umidade, e $C_d(t, t', t_0)$ dá a parcela adicional devida à secagem do concreto. A função $C_0(t, t')$ é dada por:

$$C_0(t, t') = q_2 Q(t, t') + q_3 \ln[1 + (t - t')^{0,1}] + q_4 \ln(t/t') \quad (2.30)$$

Com:

$$Q(t, t') = Q_f(t') \left[1 + \left(\frac{Q_f(t')}{Z(t, t')} \right)^{r(t')} \right]^{-\frac{1}{r(t')}} \quad (2.31a-d)$$

$$r(t') = 1,7(t')^{0,12} + 8$$

$$Z(t, t') = (t')^{-m} \ln[1 + (t - t')^n]$$

$$Q_f(t') = \left[0,086(t')^{\frac{2}{9}} + 1,21(t')^{\frac{4}{9}} \right]^{-1}$$

Os parâmetros q_2 , q_3 e q_4 na Eq. (2.30) representam as parcelas viscoelásticas com envelhecimento, sem envelhecimento e de fluidez do material, respectivamente, e os índices m e n são parâmetros do material. Já a parcela $C_d(t, t', t_0)$ da Eq. (2.29) é dada por:

$$C_d(t, t', t_0) = q_5 [e^{-8H(t)} - e^{-8H(t')}]^{\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

Em que:

$$q_5 = 757000 f_c'^{-1} \varepsilon_{sh\infty}^{-0,6} \quad (2.33a-b)$$

$$H(t) = 1 - (1 - h)S(t)$$

Onde f_c' é a resistência do concreto à compressão aos 28 dias, $\varepsilon_{sh\infty}$ é a deformação última de retração, h é a umidade relativa do ambiente e $S(t)$ é uma função que define a forma da curva de retração do concreto ao longo do tempo. Mais recentemente, Bažant *et al* (2015) atualizaram esse modelo, criando o modelo B4, o qual fornece uma previsão aprimorada para a fluência de várias décadas. Este novo modelo também faz distinção entre as deformações de secagem e de retração autógena, bem como introduz novas equações e parâmetros para considerar os efeitos das variações nas misturas e tipos de agregados do concreto.

Em análises por elementos finitos é necessário utilizar o módulo $E(t, t')$ do material, porém para a maioria dos materiais só se tem a função $J(t, t')$, sendo necessário técnicas de interconversão entre essas duas propriedades. Bažant *et al.* (2013) propuseram uma formulação para estimar a função de relaxação a partir da função de fluência, considerando o envelhecimento do concreto. Porém, sua fórmula é voltada para o cálculo analítico das tensões e deformações de peças estruturais, tendo sua principal aplicação na avaliação do coeficiente de envelhecimento utilizado no Método do Módulo de Elasticidade Ajustado (MMEA). Este método foi desenvolvido por Bažant (1972) para fornecer uma estimativa aproximada dos efeitos da fluência em estruturas de concreto, utilizando o princípio da superposição.

3 - ALGORITMO INCREMENTAL PARA ANÁLISE VISCOELÁSTICA VIA MEF E IMPLEMENTAÇÃO NO SOFTWARE ABAQUS

Neste capítulo são apresentados aspectos referentes à formulação proposta para representar o módulo de relaxação do concreto, considerando o envelhecimento, baseada em séries de Prony. Também é mostrado o algoritmo incremental utilizado para a realização das simulações viscoelásticas através do MEF. Este algoritmo foi utilizado na programação da sub-rotina VAUMAT, implementada para o *software* Abaqus, a qual pode ser utilizada tanto em problemas de tensão plana quanto naqueles de deformação plana, naqueles com axissimetria e também em problemas tridimensionais.

3.1 - FORMULAÇÃO PARA $E(t, t')$ E ALGORITMO INCREMENTAL

Para se realizar análises considerando materiais com propriedades viscoelásticas, através do MEF, é necessário o uso da relação constitutiva dada pela Eq. (2.15), a qual expressa tensão como uma função das deformações. Contudo, a implementação computacional dessa relação exige o conhecimento de todo o histórico de tensões e deformações. Isso dificulta a modelagem de problemas reais e mais complexos, uma vez que se precisa armazenar uma grande quantidade de dados para manter esse histórico.

Pensando em resolver esse problema de armazenamento, alguns autores propuseram métodos numéricos para incrementalização da equação constitutiva viscoelástica, de modo a aproximar seus valores sem resolver a integral de convolução diretamente (Taylor *et al.*, 1970; Ghazlan *et al.*, 1995). Baseando-se em trabalhos como esses, Zocher *et al.* (1997) apresentaram um algoritmo incremental que transforma a relação constitutiva da Eq. (2.15) em um conjunto de somatórios, utilizando séries de Prony para representar o módulo de relaxação do material.

Mais recentemente, Chazal e Pitti (2010) e Chazal e Pitti (2011) apresentaram um método semelhante ao de Zocher *et al.* (1997), o qual possui uma variável de estado interna para representar a influência do histórico de tensões e deformações. Porém, esse método utiliza algoritmos diferentes para análises de fluência e de relaxação, tornando-o mais dispendioso. Assim, nesta pesquisa optou-se por utilizar um algoritmo semelhante ao apresentado por Zocher *et al.* (1997) para a incrementalização da Eq. (2.27), a qual considera também o envelhecimento do material.

Reescrevendo a Eq. (2.27) em notação matricial tem-se a relação constitutiva para o caso multidimensional:

$$\boldsymbol{\sigma}(t, t') = \int_0^t \mathbf{C}(t, t') \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.1)$$

Assumindo o coeficiente de Poisson ν constante ao longo do tempo e considerando materiais isotrópicos, pode-se representar a matriz constitutiva $\mathbf{C}(t, t')$ como:

$$\mathbf{C}(t, t') = \mathbf{C}(\nu)E(t, t') \quad (3.2)$$

Definindo então um incremento de tensões como:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t, t') - \boldsymbol{\sigma}(t, t') \quad (3.3)$$

E substituindo as Eq. (3.1) e (3.2) na Eq. (3.3), tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \int_0^{t+\Delta t} \mathbf{C}(\nu)E(t + \Delta t, t') \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' - \int_0^t \mathbf{C}(\nu)E(t, t') \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.4)$$

Que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\sigma} = & \int_0^t \mathbf{C}(\nu)E(t + \Delta t, t') \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{C}(\nu)E(t + \Delta t, t') \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' \\ & - \int_0^t \mathbf{C}(\nu)E(t, t') \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agrupando as integrais com mesmos limites, obtém-se:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.6)$$

em que

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}(\nu) \int_t^{t+\Delta t} E(t + \Delta t, t') \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.7)$$

e

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}(\nu) \int_0^t \Delta E \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.8)$$

onde

$$\Delta E = E(t + \Delta t, t') - E(t, t') \quad (3.9)$$

Nesta formulação considera-se que a taxa de variação das deformações se mantém constante durante cada incremento de tempo. Com isso, nas integrais com limites de t a $t + \Delta t$ pode-se considerar a seguinte aproximação:

$$\frac{\partial \varepsilon(t')}{\partial t'} \approx \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} \quad (3.10)$$

Além disso, é necessário expressar o módulo $E(t, t')$ do material através de uma função envolvendo séries de Prony. Conforme visto na Seção 2.2.3, essas séries representam muito bem o comportamento viscoelástico dos materiais. Porém, as Equações (2.19) e (2.20) não são capazes de representar o envelhecimento do material, o qual depende da idade t' em que o material é carregado. Assim, buscou-se uma expressão para $E(t, t')$ que pudesse ser utilizada no algoritmo aqui apresentado.

Grasley e Lange (2007) propuseram uma formulação baseada na teoria da solidificação, para a representação do envelhecimento no cálculo de $J(t, t')$. Essa formulação consiste na multiplicação da Eq. (2.20) pela seguinte função de t' :

$$\frac{1}{v(t')} = \sum_{i=n}^M \beta_i e^{-\omega_i t'} \quad (3.11)$$

A teoria da solidificação, a qual foi originalmente proposta por Bažant (1977), assume que os produtos da hidratação do concreto são componentes viscoelásticos sem envelhecimento, sendo os efeitos do envelhecimento resultantes da gradual solidificação de novos produtos de hidratação. Calculando $J(t, t')$ dessa forma, tem-se o comportamento viscoelástico para fluência do material dado por uma série de Prony e a consideração do envelhecimento sendo feita através da Eq. (3.11). Como apresentado por Grasley e Lange (2007), essa forma de consideração do envelhecimento é bastante eficiente. Porém, para o algoritmo aqui apresentado precisa-se de uma função para o módulo de relaxação. Assim, baseando-se na Eq. (3.11), neste trabalho propõe-se uma formulação para a função $E(t, t')$, sendo dada pela seguinte relação:

$$E(t, t') = \frac{1}{\sum_{i=1}^M \beta_i e^{-t'/\omega_i}} \left[E_\infty + \sum_{j=1}^N E_j e^{-(t-t')/\rho_j} \right] \quad (3.12)$$

Aqui, o primeiro somatório do lado direito é uma função de t' para a consideração do envelhecimento do material. Já o termo entre colchetes é a série de Prony para representar o comportamento viscoelástico do material. Utilizando essa formulação aqui proposta, pode-se então reescrever a Eq. (3.7) como:

$$\Delta\bar{\sigma} = \mathcal{C}(\nu) \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\sum_{i=1}^M \beta_i e^{-t'/\omega_i}} \left[E_\infty + \sum_{j=1}^N E_j e^{-(t+\Delta t-t')/\rho_j} \right] dt' \frac{\Delta\epsilon}{\Delta t} \quad (3.13)$$

Aproximando a integral da Eq. (3.13) pela área do trapézio, tem-se:

$$\Delta\bar{\sigma} = \mathcal{C}(\nu) \bar{E} \Delta\epsilon \quad (3.14)$$

em que

$$\bar{E} = \frac{1}{\sum_{i=1}^M \beta_i e^{-(t+\Delta t/2)/\omega_i}} \left[E_\infty + \sum_{j=1}^N E_j e^{-\Delta t/2\rho_j} \right] \quad (3.15)$$

Usando agora a Eq. (3.12) na Eq. (3.9) tem-se:

$$\Delta E = \frac{1}{\sum_{i=1}^M \beta_i e^{-t'/\omega_i}} \sum_{j=1}^N E_j e^{-(t-t')/\rho_j} (e^{-\Delta t/\rho_j} - 1) \quad (3.16)$$

Fazendo então:

$$\theta(t') = \sum_{i=1}^M \beta_i e^{-t'/\omega_i} \quad (3.17)$$

pode-se reescrever a Eq. (3.16) como:

$$\Delta E = - \sum_{j=1}^N (1 - e^{-\Delta t/\rho_j}) \frac{E_j}{\theta(t')} e^{(t'-t)/\rho_j} \quad (3.18)$$

Substituindo na Eq. (3.8), tem-se:

$$\Delta\hat{\sigma} = -\mathcal{C}(\nu) \sum_{j=1}^N (1 - e^{-\Delta t/\rho_j}) \mathbf{s}_j(t, t') \quad (3.19)$$

em que $\mathbf{s}_j(t, t')$ é um vetor para cada termo do somatório, sendo dado por:

$$\mathbf{s}_j(t, t') = \int_0^t \frac{E_j}{\theta(t')} e^{(t'-t)/\rho_j} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.20)$$

O qual pode ser reescrito na forma:

$$\mathbf{s}_j(t, t') = \int_0^{t-\Delta t} \frac{E_j}{\theta(t')} e^{(t'-t)/\rho_j} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' + \int_{t-\Delta t}^t \frac{E_j}{\theta(t')} e^{(t'-t)/\rho_j} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.21)$$

Fazendo $t = \Delta t + t - \Delta t$ na primeira integral à direita dessa equação, tem-se:

$$\mathbf{s}_j(t, t') = e^{-\Delta t/\rho_j} \mathbf{s}_j(t - \Delta t, t') + \int_{t-\Delta t}^t \frac{E_j}{\theta(t')} e^{(t'-t)/\rho_j} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.22)$$

em que

$$\mathbf{s}_j(t - \Delta t, t') = \int_0^{t-\Delta t} \frac{E_j}{\theta(t')} e^{(t'-t+\Delta t)/\rho_j} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.23)$$

Aplicando a aproximação dada pela Eq. (3.10) na segunda integral à direita da Eq. (3.22) e aproximando sua solução pela área do trapézio tem-se:

$$\mathbf{s}_j(t, t') = e^{-\Delta t/\rho_j} \mathbf{s}_j(t - \Delta t, t') + \frac{E_j}{\theta(t - \Delta t/2)} e^{-\Delta t/2\rho_j} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.24)$$

Substituindo a Eq. (3.17) tem-se então:

$$\mathbf{s}_j(t, t') = e^{-\Delta t/\rho_j} \mathbf{s}_j(t - \Delta t, t') + \frac{1}{\sum_{i=1}^M \beta_i e^{-(t-\Delta t/2)/\omega_i}} E_j e^{-\Delta t/2\rho_j} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.25)$$

Aqui, $\mathbf{s}_j(t, t')$ é uma variável de estado responsável pela avaliação de todo o histórico de solicitações até o tempo corrente t na análise.

Esse algoritmo apresentado pode ser considerado eficiente computacionalmente, pois não necessita que a matriz de rigidez do sistema varie ao longo do tempo, uma vez que se mantenha um incremento de tempo Δt constante. Na seção a seguir é mostrado como foi realizada a implementação desse algoritmo na UMAT desenvolvida para ser usada no *software* Abaqus.

3.2 - IMPLEMENTAÇÃO DA UMAT NO SOFTWARE ABAQUS

Abaqus é um *software* comercial de elementos finitos, mantido e distribuído pela Dassault Systèmes, originalmente desenvolvido em 1978 por David Hibbitt, Bengt Karlsson e Paul Sorensen. Entre os inúmeros recursos disponibilizados por esse programa está a possibilidade de se programar sub-rotinas para criação de modelos que não são nativamente implementados em sua biblioteca. Essas sub-rotinas podem ser usadas, por exemplo, para a criação de condições específicas de carregamento, descrição de formas de contato e interação entre partes do modelo ou também a implementação de elementos com formulações específicas. E há também a sub-rotina UMAT (*User Material*), a qual permite ao usuário programar um modelo constitutivo mecânico específico de um material, sendo essa a sub-rotina utilizada nesta pesquisa.

Basicamente, uma UMAT deve interagir com os demais módulos do programa, realizando principalmente três tarefas. Primeiro, deve ser fornecida a matriz jacobiana (J) do material, a qual é composta das derivadas parciais dos incrementos de tensões com relação aos incrementos de deformações que, por exemplo, para casos de deformação plana ou de simetria axial, é dada por:

$$J = \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \epsilon} = \begin{pmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Sendo G o módulo de cisalhamento do material e λ o primeiro parâmetro de Lamé. Segundo, as tensões no final de cada incremento de tempo devem ser atualizadas e, por último, qualquer variável de estado que seja dependente de valores calculados em passos anteriores, como em análises não lineares, deve ser atualizada (Dunne e Petrinic, 2005). Uma das vantagens de se utilizar esse recurso do Abaqus é que não há a necessidade de fazer modificações em todo o processo de análise, pois cada sub-rotina atua em um módulo específico do programa, de forma independente. Mas, apesar de não ser necessário conhecer detalhadamente cada módulo do Abaqus, é importante ter uma visão global de como o processo de análise ocorre e onde cada sub-rotina interage com o programa. A Figura 3.1 a seguir ilustra o fluxo básico de cálculo no *solver Standard* do Abaqus, mostrando onde a UMAT interage com o programa.

O Abaqus é um *software* que foi criado para realizar qualquer tipo de análise, inclusive não linear, por isso seu processo de cálculo é dividido em *Steps*, os *Steps* são divididos em incre-

mentos, e os incrementos em iterações. Na Figura 3.1, \mathbf{K}^{el} é a matriz de rigidez de cada elemento finito, \mathbf{c} é o vetor de correção dos deslocamentos e \mathbf{r}^α o vetor de forças residuais. Como se pode ver, a UMAT está relacionada com a definição da matriz \mathbf{K}^{el} e, uma vez definida, o programa segue seu fluxo normal de análise.

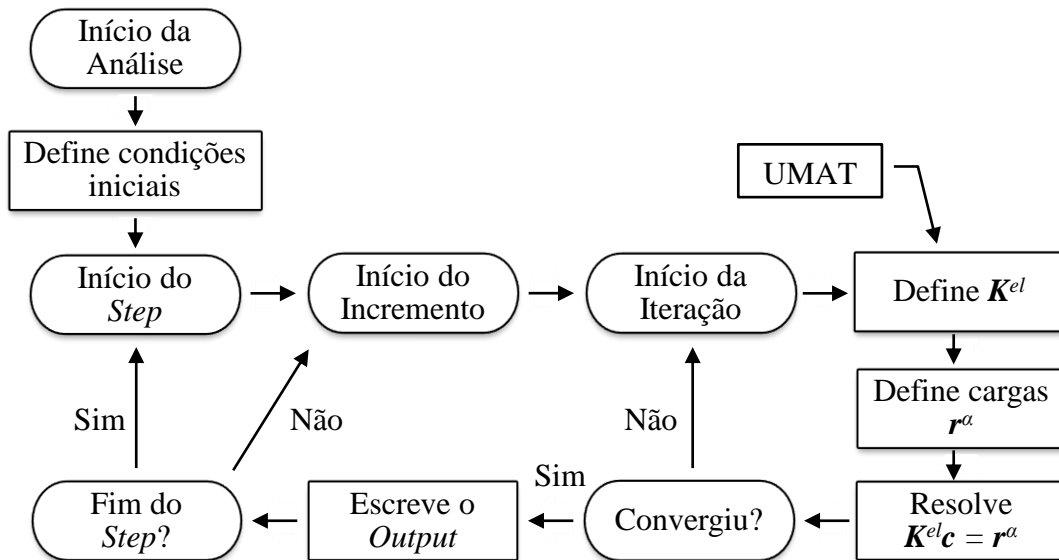


Figura 3.1 – Fluxo básico de ações internas no *solver Standard* do Abaqus.

As sub-rotinas do Abaqus geralmente são programadas de forma estruturada, podendo-se utilizar as linguagens de programação Fortran, C ou C++. A UMAT desenvolvida nesta pesquisa foi escrita em Fortran, utilizando-se o algoritmo incremental descrito na Seção 3.1 para a consideração do modelo constitutivo viscoelástico com envelhecimento. Para essa sub-rotina foi dado o nome de VAUMAT (*Viscoelasticity with Aging for User Material*). A Figura 3.2 a seguir mostra a sequência básica dos passos programados na VAUMAT.

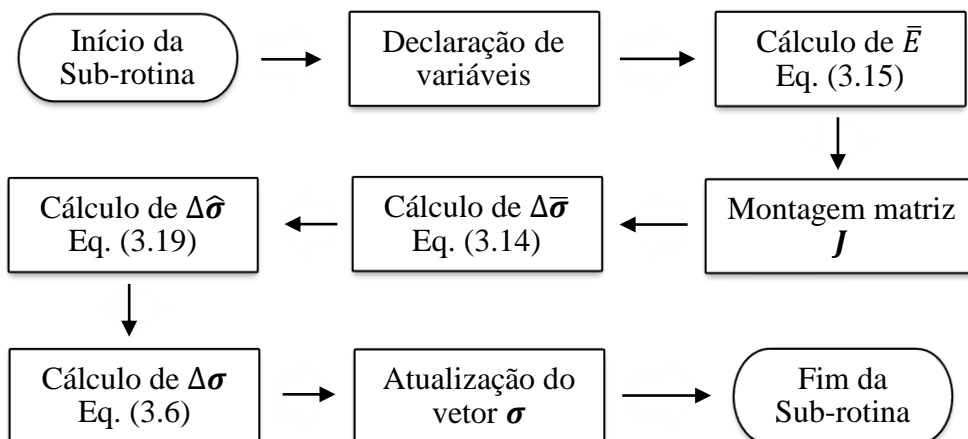


Figura 3.2 – Sequência de passos programados na VAUMAT

No Abaqus, a matriz \mathbf{J} é armazenada em uma variável chamada DDSDDDE. Para a utilização da VAUMAT é necessário passar para o Abaqus, no início da análise, os valores dos coeficientes β_i , ω_i , E_∞ , E_j e ρ_j da Eq. (3.12), os quais são obtidos através da regressão das curvas de relaxação do material. Além disso, deve ser informado também o valor do coeficiente de Poisson ν do material. A VAUMAT foi então utilizada para a realização de análises de verificação e validação do modelo proposto na Eq. (3.12), bem como do algoritmo apresentado na Seção 3.1, e posterior aplicação em problemas de fluência.

4 - VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO

Neste capítulo são apresentados resultados de simulações realizadas no *software* Abaqus, a fim de verificar o comportamento da VAUMAT implementada. Para isso, foram realizadas inicialmente análises quase-estáticas com carregamentos variando ao longo do tempo, de forma senoidal. Os resultados foram então comparados com aqueles obtidos através de uma rotina implementada no MatLab, para testar a precisão do algoritmo incremental em relação à integração numérica das equações constitutivas (2.26) e (2.27). Posteriormente, foram realizadas análises com carregamentos constantes ao longo do tempo, para diferentes idades de aplicação t' . Esses resultados foram comparados com aqueles obtidos por Atrushi (2003) e por Silva Junior (2017), a fim de validar a VAUMAT com relação a ensaios experimentais.

4.1 - VERIFICAÇÃO DA VAUMAT

Para a realização dessas simulações, foram consideradas as curvas $J(t, t')$ obtidas por Atrushi (2003) para o concreto em baixas idades, apresentadas na Figura 2.8. Essas curvas foram interconvertidas em curvas $E(t, t')$ e foram regredidas utilizando-se a Eq. (3.12), para se poder usar o algoritmo incremental apresentado na Seção 3.1. A Figura 4.1 a seguir mostra essas curvas regredidas.

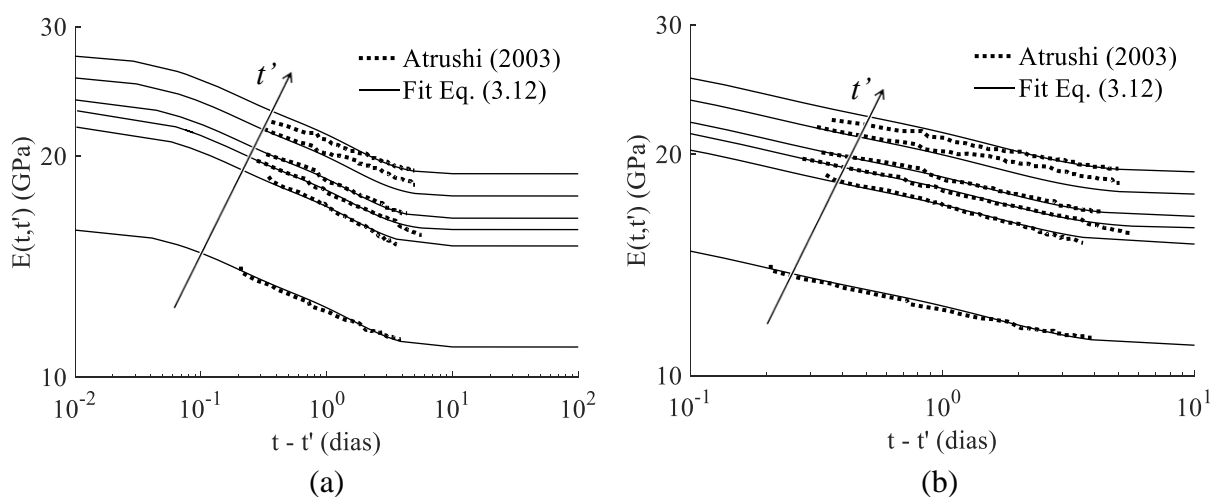


Figura 4.1 – Módulo de relaxação $E(t, t')$. Intervalo $t - t'$: (a) de 10^{-2} a 10^2 dias e (b) de 10^{-1} a 10^1 dias

Nessa figura são mostradas as curvas, em escalas logarítmicas, para idades t' de 1, 2, 3, 4, 6 e 8 dias, seguindo a ordem crescente indicada pela seta, onde se pode ver que o material se tor-

na mais rígido à medida que a idade t' aumenta. A regressão dessas curvas foi realizada utilizando a função *Curve Fitting Tool* do MatLab, obtendo-se um coeficiente de determinação R^2 igual a 0,9939. As análises com carregamento senoidal consistiram da aplicação de uma tensão e de uma deformação, de acordo com as funções apresentadas a seguir:

$$\sigma(t) = \sigma_0[1 + \text{sen}(\pi t)] \quad (4.1)$$

e

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0[1 + \text{sen}(\pi t)] \quad (4.2)$$

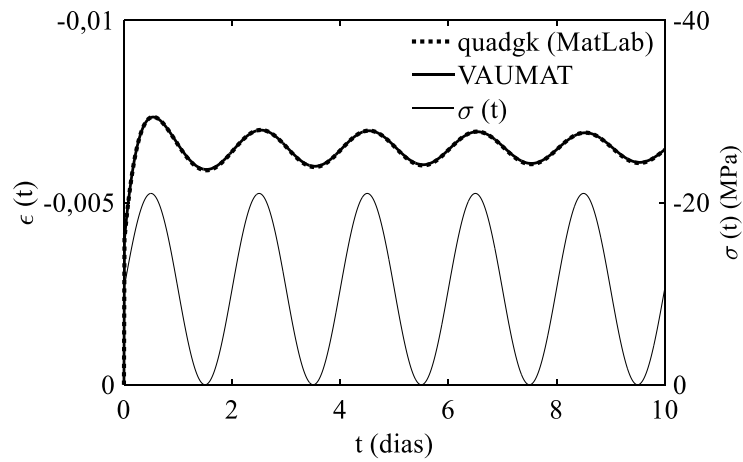
No Abaqus, esses carregamentos foram aplicados em um cilindro de 15 cm de diâmetro por 30 cm de comprimento, simulando um ensaio de compressão. Para comparar com a rotina feita no MatLab, foi considerado um coeficiente de Poisson nulo, uma vez que se queriam apenas as respostas uniaxiais. A rotina implementada no MatLab consistiu na programação do algoritmo apresentado na Seção 3.1, porém resolvendo as integrais das Equações (3.13) e (3.22) pela quadratura de Gauss-Kronrod, usando a função *quadgk*, em vez de aproximá-las pela regra do trapézio.

A *quadgk* realiza a integração numérica de uma função, dentro de um intervalo, utilizando a quadratura adaptativa de Gauss-Kronrod (Hazewinkel, 1994), a qual é uma variação da quadratura de Gauss. Aqui, os pontos de avaliação são escolhidos, para que uma aproximação precisa possa ser calculada, reutilizando a informação produzida pelo cálculo de uma aproximação menos precisa. Além da função, que deve ser introduzida na forma vetorial, e os limites do intervalo de integração, esse recurso do MatLab também permite que se entre com parâmetros de ajuste. Esses parâmetros podem ser: *AbsTol*, que dá a tolerância do erro absoluto; *RelTol*, que é a tolerância do erro relativo; *Waypoints*, onde se entra com pontos onde há descontinuidade na função; e *MaxIntervalCount*, que é o número máximo de intervalos permitidos. Na rotina usada para a verificação da VAUMAT, utilizou-se um valor de 10^{-6} para o parâmetro *AbsTol*.

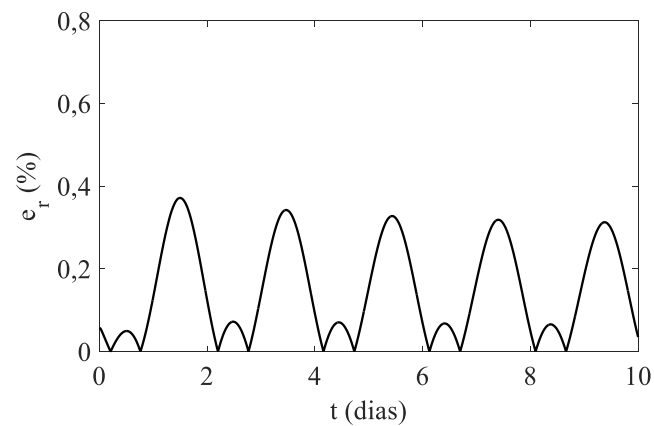
Para os dois exemplos mostrados a diante foi utilizado, tanto no Abaqus quanto no MatLab, um incremento de tempo Δt de 0,01 dia. Para verificar as diferenças entre a VAUMAT e a rotina do MatLab, foram calculados os valores do erro relativo e_r entre elas, o qual foi calculado usando a equação a seguir:

$$e_r = \left[\frac{UMAT - MatLab}{MatLab} \right] 100\% \quad (4.3)$$

As respostas obtidas para o ensaio de fluência, bem como os valores de e_r , são apresentadas na Figura 4.2 a seguir.



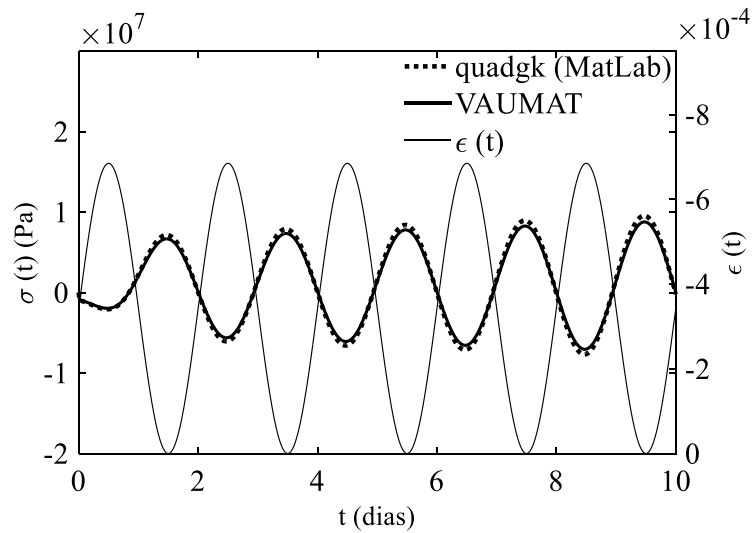
(a)



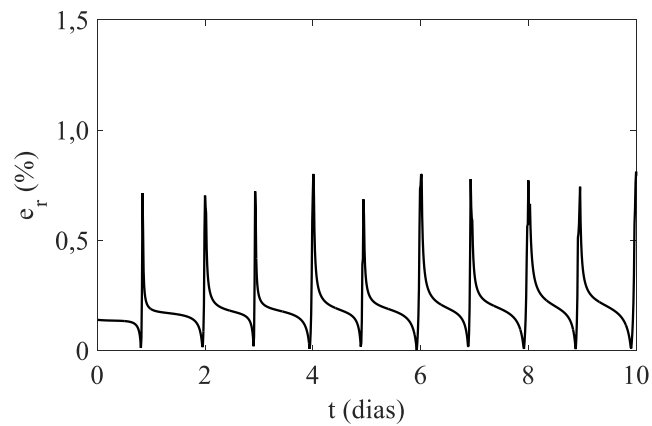
(b)

Figura 4.2 – Resposta de fluência para carregamento senoidal: (a) comparação VAUMAT e MatLab e (b) erro relativo e_r

Pode-se perceber nessa figura que, para o Δt utilizado, a aproximação feita pela regra do trapézio no algoritmo implementado na VAUMAT gera uma diferença insignificante com relação à integração numérica pela quadratura de Gauss-Kronrod. Para esse exemplo, os valores do erro relativo e_r ficaram abaixo de 0,4%. Pode-se perceber um comportamento semelhante na Figura 4.3 a seguir, que mostra os resultados para o ensaio de relaxação realizado e os valores do erro relativo entre a VAUMAT e a rotina do MatLab, o qual apresentou valores abaixo de 1,0%.



(a)



(b)

Figura 4.3 – Resposta de relaxação para carregamento senoidal: (a) comparação VAUMAT e MatLab e (b) erro relativo e_r

4.2 - VALIDAÇÃO COM EXPERIMENTOS

Para validar então a VAUMAT, foram simulados os ensaios apresentados por Atrushi (2003) e por Silva Junior (2017), ambos de fluência no concreto sob compressão. Para o primeiro, foram comparados os resultados de deformação medidos em corpos de prova cilíndricos para as idades t' de 1, 3 e 8 dias. Já para o segundo, foram comparadas as curvas de fluência $J(t, t')$ obtidas para as idades t' de 1, 3 e 7 dias. Nas seções seguintes são apresentados os resultados das duas comparações.

4.2.1 - Comparação com ensaios de Atrushi (2003)

Para simular os ensaios de Atrushi (2003), foram usados cilindros de 15 cm de diâmetro por 30 cm de comprimento. A malha de elementos finitos utilizada nas simulações foi feita de forma estruturada com elementos tridimensionais tetraédricos quadráticos de 10 nós (C3D10). Como condições de contorno, consideraram-se os cilindros simplesmente apoiados em uma base e com o carregamento aplicado de forma distribuída na base oposta. A Figura 4.4 a seguir mostra a malha e as condições de contorno utilizadas nas simulações.

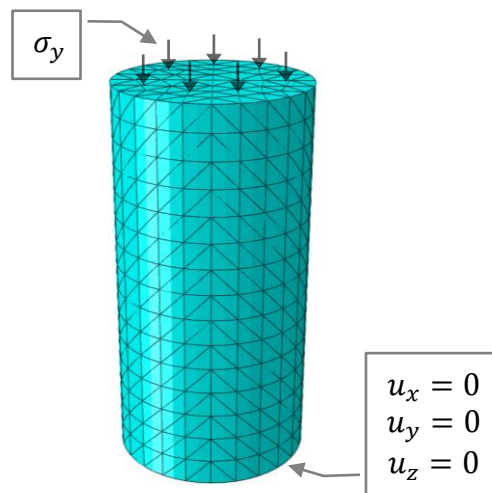


Figura 4.4 – Malha e condições de contorno usadas nas simulações de Atrushi (2003)

Os ensaios realizados por Atrushi (2003) apresentaram idades diferentes de aplicação do carregamento, levando em consideração a resistência à compressão do concreto utilizado em cada idade e aplicando apenas 40% desse valor. Essa consideração foi feita porque assume-se que até 40% da resistência do concreto a fluência é linearmente dependente das tensões aplicadas. A Tabela 4.1 a seguir mostra os valores das cargas aplicadas e as respectivas tensões, para cada valor de t' .

Tabela 4.1 – Carregamento aplicado para cada idade t'

t' (dias)	P (kN)	σ (MPa)
1	-181	-10,2
3	-403	-22,8
8	-523	-29,6

Nas simulações realizadas no Abaqus foram aplicados esses mesmos valores de tensão para cada t' analisado. Como parâmetros de entrada para a VAUMAT foram usados os coeficientes da Eq. (3.12), obtidos da regressão das curvas da Figura 4.1. Considerou-se um valor de

0,20 para ν e foi utilizado um valor de Δt igual a 0,01 dia. A Figura 4.5 a seguir mostra os resultados comparados com os de Atrushi (2003), para t' igual a 1 dia.

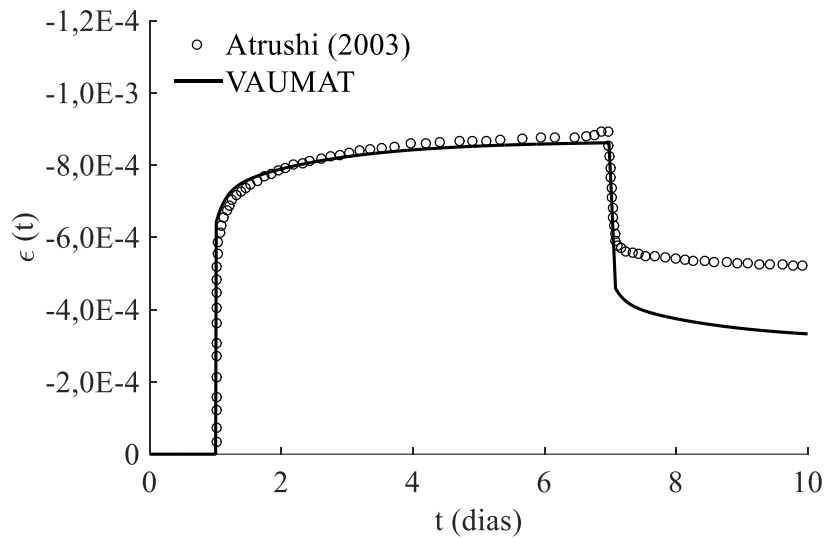


Figura 4.5 – Deformações de fluência para $t' = 1$ dia

Procurou-se reproduzir os ensaios também com a retirada das tensões aplicadas, assim como apresentado por Atrushi (2003), a fim de se verificar o comportamento da VAUMAT durante o descarregamento. Como se pode ver nessa figura, a VAUMAT conseguiu aproximar bem da curva experimental durante a etapa de carregamento, diferindo porém, os resultados para o descarregamento do modelo. Esse comportamento também é verificado para o ensaio com t' igual a 3 dias, como mostrado na Figura 4.6 a seguir.

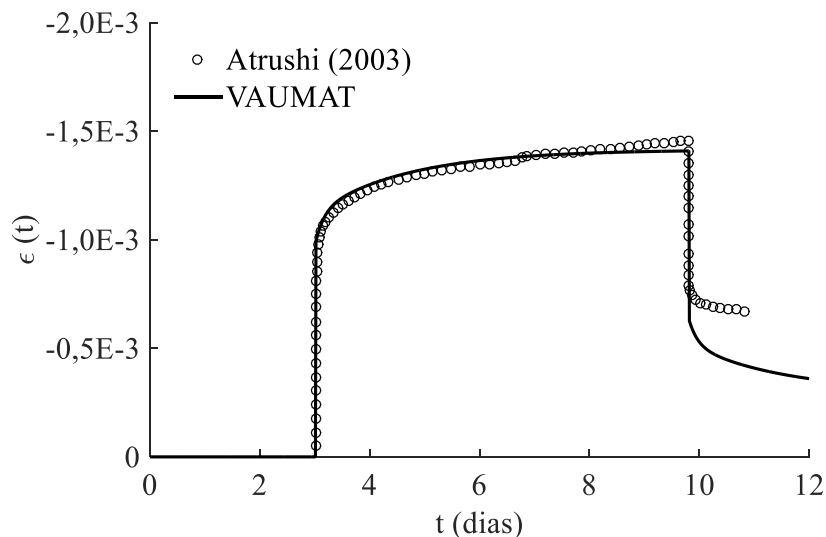


Figura 4.6 – Deformações de fluência para $t' = 3$ dias

Essa diferença pode ser resultante do fato de as curvas $J(t, t')$ apresentadas por Atrushi (2003) (Figura 2.8), e utilizadas para a regressão apresentada na Figura 4.1, estarem situadas em um intervalo de tempo pequeno. Em consequência, a extrapolação feita pela regressão na Figura 4.1 pode não ser capaz de simular bem o comportamento do material durante o descarregamento. Já para o ensaio com t' igual a 8 dias, Atrushi (2003) não apresenta a curva para o descarregamento, sendo então apresentada na Figura 4.7 apenas a comparação dos resultados obtidos enquanto se manteve o carregamento aplicado.

Com os resultados apresentados nessas últimas três figuras, pode-se ver que a VAUMAT apresenta um bom comportamento quando comparada com os resultados experimentais de Atrushi (2003).

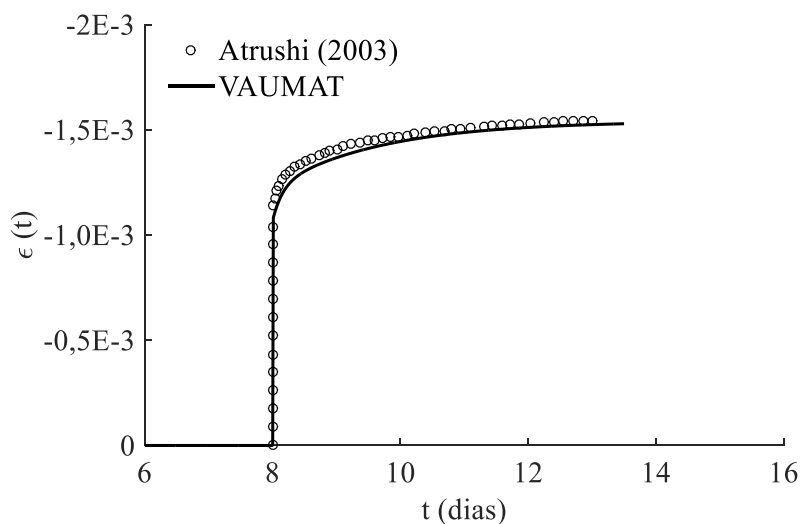


Figura 4.7 – Deformações de fluência para $t' = 8$ dias

4.2.2 - Comparação com ensaios de Silva Junior (2017)

Para simular os ensaios de Silva Junior (2017), foram usados cilindros de 10 cm de diâmetro por 20 cm de comprimento. A malha de elementos finitos utilizada nas simulações foi feita de forma estruturada com elementos tridimensionais hexaédricos quadráticos de 20 nós (C3D20). Como condições de contorno, consideraram-se os cilindros simplesmente apoiados em uma base e com o carregamento aplicado de forma distribuída na base oposta. A Figura 4.8 a seguir mostra a malha e as condições de contorno utilizadas nas simulações.

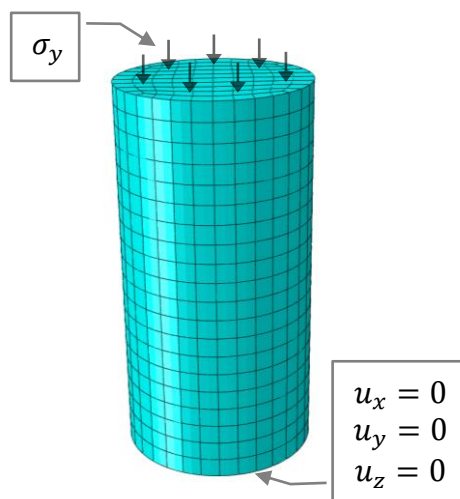


Figura 4.8 – Malha e condições de contorno usadas nas simulações de Silva Junior (2017)

Os ensaios realizados por Silva Junior (2017) para fluência no concreto apresentaram idades diferentes de aplicação do carregamento, a saber, 1, 3 e 7 dias, e tiveram duração $t - t'$ de aproximadamente 90 dias. Nesta pesquisa, foram comparados os ensaios realizados por Silva Junior (2017) para a mistura identificada por ele como REF 0,367, que se trata de um concreto convencional com relação água/cimento de 0,367. Silva Junior (2017) não apresenta os valores das cargas aplicadas, então foi levada em consideração a resistência à compressão do concreto utilizado em cada idade para a aplicação da carga, usando apenas 40% desse valor. A Tabela 4.2 a seguir mostra os valores das resistências para cada idade e as respectivas tensões aplicadas.

Tabela 4.2 – Resistências da mistura REF 0,367 e tensões aplicadas para cada idade t'

t' (dias)	f_c (MPa)	σ (MPa)
1	31,2	-12,4
3	40,8	-16,3
7	49,9	-19,9

Para a realização dessas simulações, foram consideradas as curvas $J(t, t')$ obtidas por Silva Junior (2017). Essas curvas foram interconvertidas em curvas $E(t, t')$ e foram regredidas utilizando-se a Eq. (3.12), para que se pudesse usar o algoritmo incremental apresentado na Seção 3.1. A Figura 4.9 a seguir mostra essas curvas regredidas.

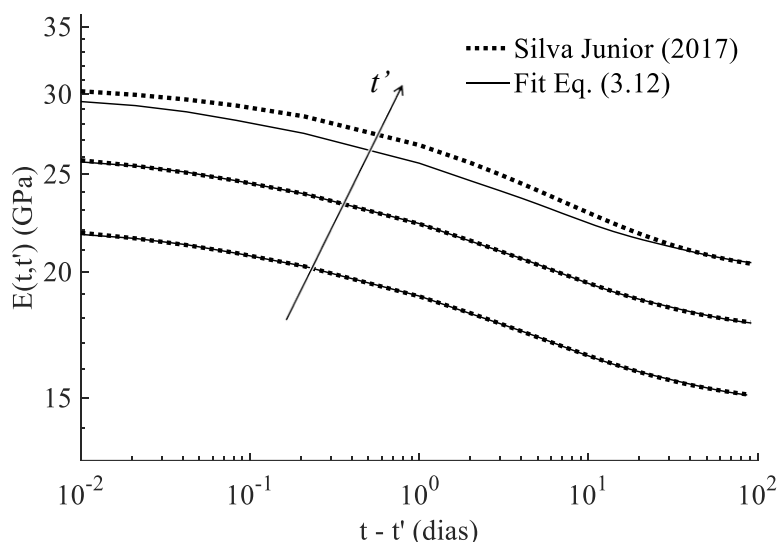


Figura 4.9 – Regressão curvas $E(t, t')$ obtidas de Silva Junior (2017)

Nessa figura são mostradas as curvas, em escalas logarítmicas, para valores t' de 1, 3 e 7 dias, seguindo a ordem crescente indicada pela seta. A regressão dessas curvas foi realizada utilizando a função *Curve Fitting Tool* do MatLab, obtendo-se um coeficiente de determinação R^2 igual a 0,9986. Como parâmetros de entrada para a VAUMAT foram usados os coeficientes da Eq. (3.12), obtidos da regressão das curvas da Figura 4.9. Considerou-se ainda um valor de 0,20 para ν e foi utilizado um valor de Δt constante igual a 0,01 dia para todas as simulações.

Ao final das simulações realizadas, os deslocamentos obtidos no topo do cilindro foram então divididos pelo seu comprimento inicial, obtendo-se os valores das deformações específicas. Esses valores foram divididos pela tensão inicialmente aplicada, obtendo-se assim as deformações específicas por unidade de tensão em cada modelo, resultando em curvas de fluência. A Figura 4.10 a seguir mostra os resultados comparados com os de Silva Junior (2017). Nessa figura os valores são apresentados, em escalas logarítmicas, para as três idades de t' , seguindo a ordem crescente, 1, 3 e 7 dias, de acordo com o sentido indicado pela seta.

Com os resultados apresentados na Figura 4.10, pode-se ver que a VAUMAT apresenta um bom comportamento quando comparada com os resultados experimentais de Silva Junior (2017).

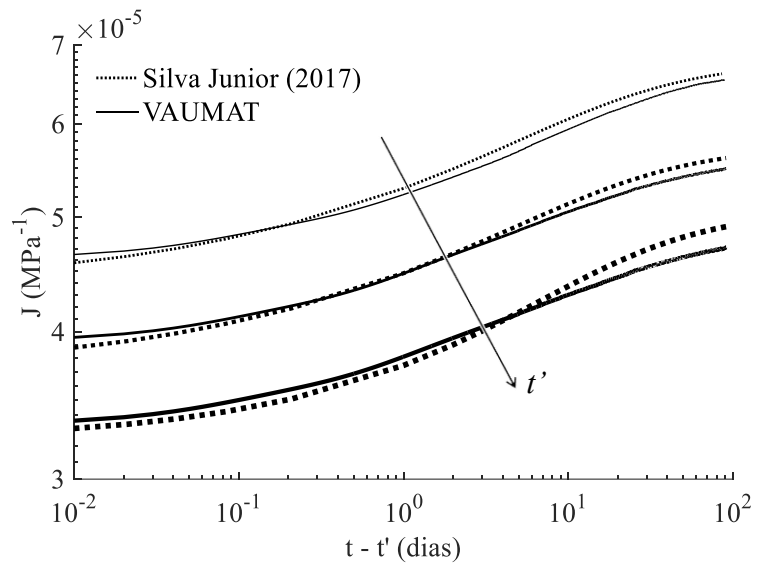


Figura 4.10 – Resultados da função fluência para 1, 3 e 7 dias

5 - APLICAÇÕES

Este capítulo dedica-se a aplicações da VAUMAT em simulações tridimensionais mais complexas. Primeiro, ela foi utilizada para a obtenção da função $J(t, t')$ homogeneizada, a partir do ensaio de um material composto por uma matriz viscoelástica e inclusões elásticas. Isso foi feito para se analisar o comportamento da VAUMAT juntamente com outros materiais da biblioteca do Abaqus. Aqui também são apresentadas as simulações de uma ponte em concreto protendido, considerando diferentes datas de aplicação dos carregamentos e verificando o comportamento da VAUMAT para análises de longos períodos de tempo. Por fim, é apresentada uma análise de sensibilidade com experimento fatorial, para verificar o efeito de cada um dos coeficientes da Eq. (3.12) na média das deflexões da ponte simulada.

5.1 - SIMULAÇÃO DE TESTES DE FLUÊNCIA EM MATERIAIS COMPÓSITOS

Geralmente, materiais compósitos são constituídos por uma matriz polimérica e inclusões em forma de fibras, mas há também materiais onde a matriz é viscoelástica com envelhecimento e possui inclusões com geometria diferenciada, como o concreto. Aqui, apresenta-se uma forma de encontrar o módulo $J(t, t')$ homogeneizado para um material composto por uma matriz viscoelástica e inclusões elásticas, utilizando o MEF e o Abaqus. Com isso, pretende-se apenas apresentar mais uma possível aplicação para a VAUMAT, desenvolvida nesta pesquisa.

5.1.1 - Obtenção do módulo $J(t, t')$ homogeneizado

Para a obtenção do módulo $J(t, t')$ homogeneizado foram realizadas simulações em cilindros de 15 cm de diâmetro por 30 cm de comprimento, mantendo-se sua base inferior apoiada e aplicando-se uma tensão constante no topo, simulando um ensaio de compressão axial. Foram consideradas duas geometrias diferentes de inclusões dentro do cilindro, uma com dimensão máxima (D_{max}) de 19 mm e um volume de 1200 mm³, e a outra com D_{max} de 37,5 mm e volume de 19500 mm³. Foram também utilizadas três porcentagens diferentes de inclusões com relação ao volume do cilindro, a fim de verificar sua influência nos valores da função $J(t, t')$ do modelo. As geometrias e as distribuições geométricas das inclusões dentro do cilindro foram colocadas de forma aleatória, uma vez que se pretendeu apenas comparar o comportamento à fluência dos modelos com inclusões em relação àquele sem inclusões. Além disso, conforme apresentado por Lavergne *et al.* (2015), a distribuição e a forma das inclusões não

têm influência considerável no comportamento à fluência de modelos desse tipo. A Tabela 5.1 a seguir mostra as porcentagens das inclusões utilizadas nas análises.

Tabela 5.1 – Porcentagens das inclusões utilizadas nos modelos

Modelo	D_{max} da inclusão		Total
	19 mm	37,5 mm	
M1	0,00%	0,00%	0,00%
M2	7,36%	5,73%	13,09%
M3	0,00%	21,71%	21,71%
M4	12,34%	16,56%	28,90%

Já a Figura 5.1 a seguir apresenta as disposições das inclusões dentro do cilindro.

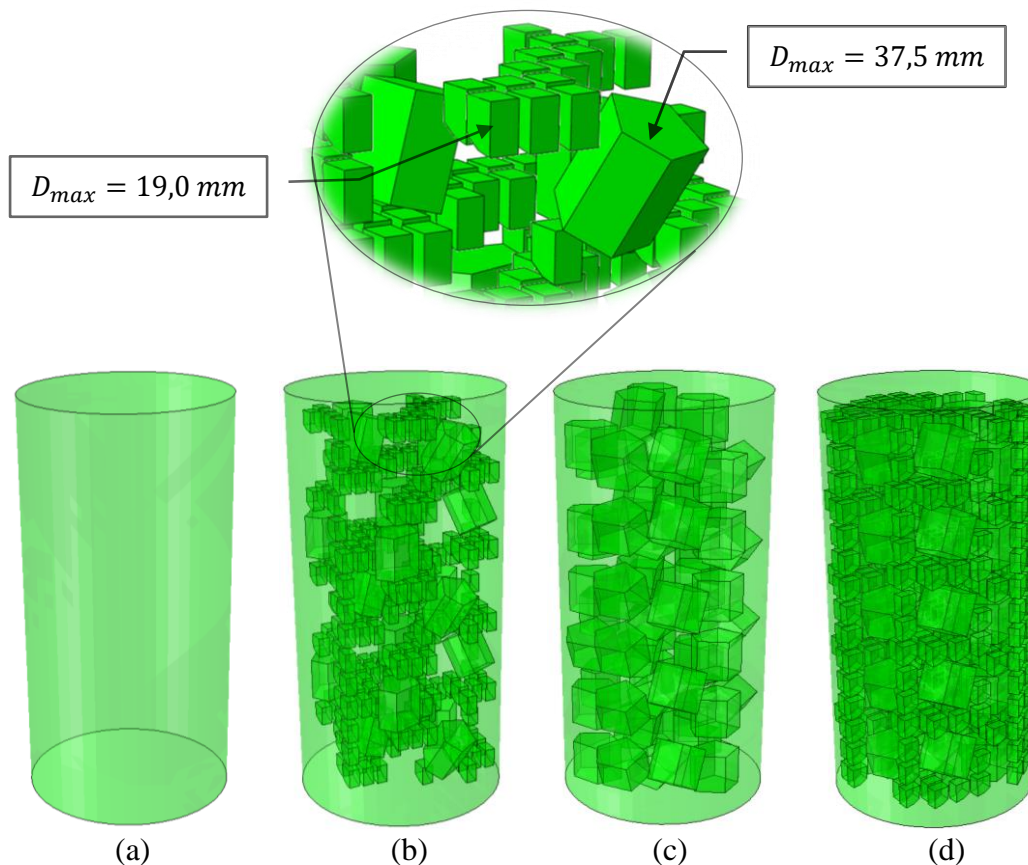
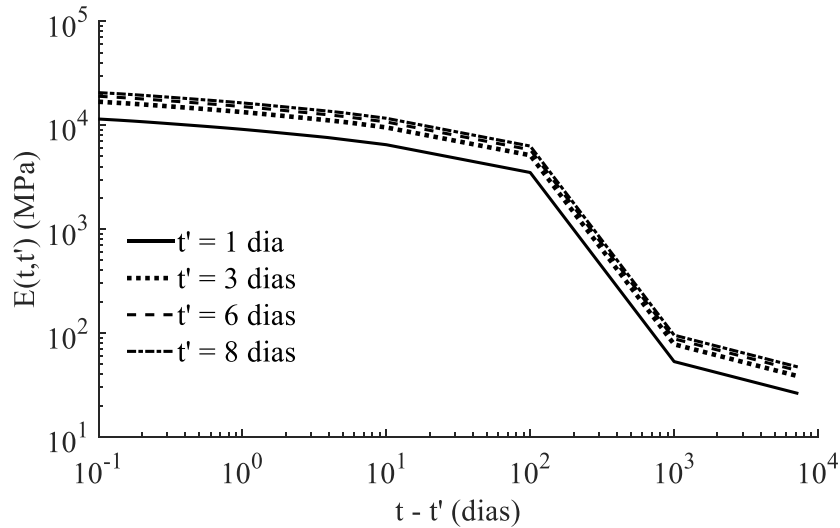
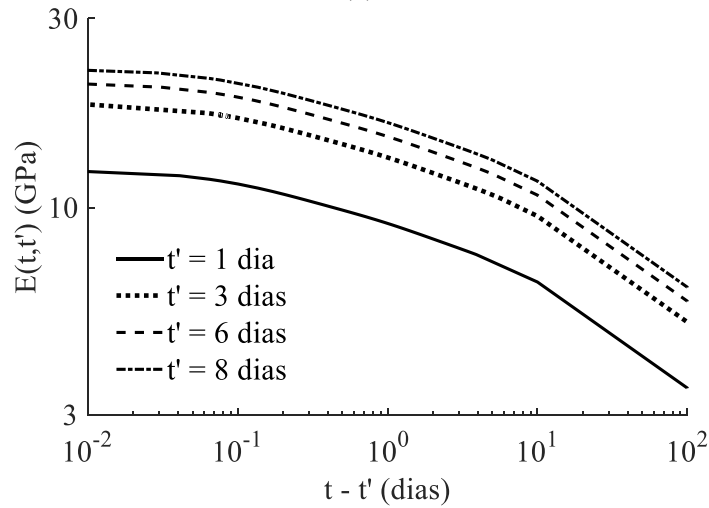


Figura 5.1 – Disposição geométrica das inclusões: (a) M1; (b) M2; (c) M3; (c) M4.

Para a modelagem das propriedades da matriz foram propostas curvas para a função de relaxação $E(t, t')$ para algumas idades t' . Essas curvas foram então regredidas utilizando-se a Eq. (3.12), para se poder utilizar o algoritmo incremental apresentado na Seção 3.1, assim como foi feito nos exemplos apresentados no Capítulo 4. A Figura 5.2 a seguir mostra essas curvas, sendo os valores apresentados em escalas logarítmicas.



(a)



(b)

Figura 5.2 – Curvas $E(t, t')$ do material utilizado na matriz: (a) $t - t'$ de 10^{-1} até 10^4 dias e (b) $t - t'$ de 10^{-2} até 10^2 dias

As inclusões foram modeladas como um material elástico, com módulo de elasticidade E igual a 80 GPa e, tanto para a matriz quanto para as inclusões, foi considerado um coeficiente ν igual a 0,20. Os testes foram realizados para idades t' de 1, 3 e 8 dias e os carregamentos foram aplicados por um tempo médio de 6 dias. Nos três testes foi aplicada uma tensão de compressão constante, no topo do cilindro, de 10 MPa.

Para a modelagem no Abaqus, as inclusões foram inseridas usando a opção *constraint tie*, a qual gera um contato rígido entre as faces de diferentes geometrias, simulando uma aderência perfeita entre a matriz e as inclusões. Foram considerados elementos hexaédricos lineares com 8 nós (C3D8) na malha das inclusões e tetraédricos quadráticos com 10 nós (C3D10) na ma-

lha do cilindro. Ao final das simulações realizadas, os deslocamentos obtidos no topo do cilindro foram então divididos pelo seu comprimento inicial, obtendo-se os valores das deformações específicas. Esses valores foram divididos pela tensão inicialmente aplicada, obtendo-se assim as deformações específicas por unidade de tensão em cada modelo, resultando em curvas de fluência. A Figura 5.3 a seguir mostra os resultados para t' igual a 1 dia, em escalas logarítmicas.

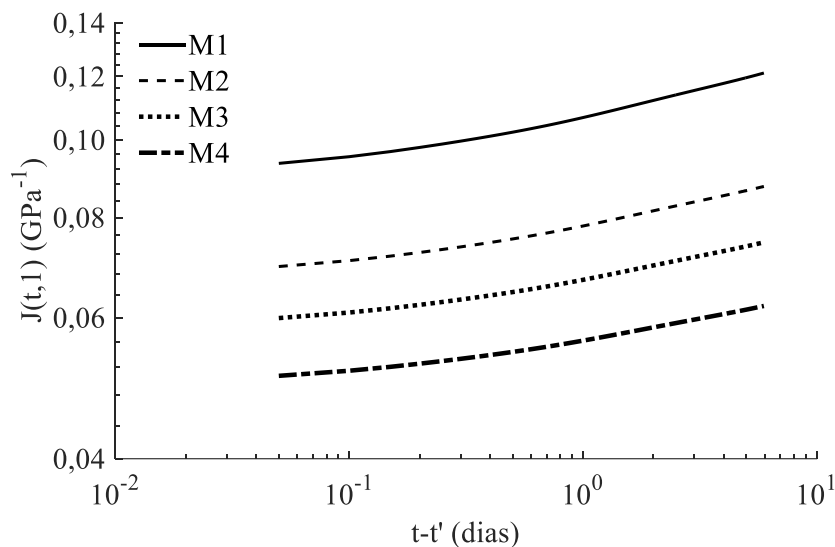


Figura 5.3 – Curvas de $J(t, t')$ homogeneizados para $t' = 1$ dia

Como pode-se perceber nessa figura, a adição de inclusões nos modelos reduz de forma considerável os valores da função $J(t, t')$, diminuindo à medida em que se aumentam as porcentagens utilizadas. Esse comportamento se dá por conta da rigidez considerada para as inclusões, a qual chega a ser dez vezes maior que a rigidez da matriz, depois de alguns dias sob carregamento. O mesmo comportamento pode ser observado na Figura 5.4, a qual mostra os resultados para as outras idades t' , também em escalas logarítmicas. Nessa figura, os valores são mostrados de forma normalizada, com relação ao valor instantâneo da função de fluência, obtida no modelo M1, para t' igual a 1 dia. Colocando dessa forma, tem-se uma visão melhor da influência do envelhecimento, bem como do aumento na porcentagem das inclusões, no valor de $J(t, t')$.

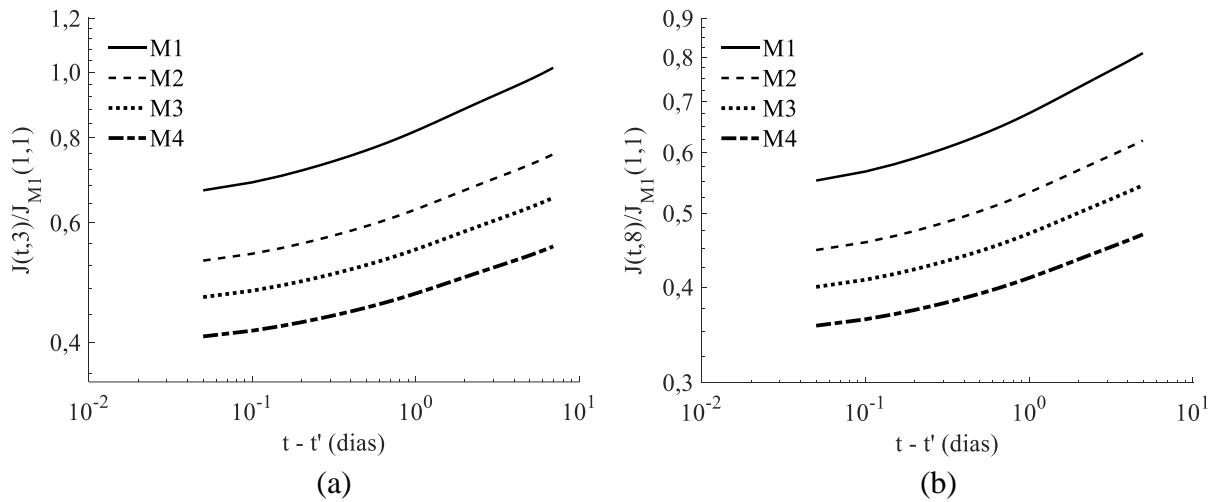


Figura 5.4 – Curvas de $J(t, t')$ homogeneizados normalizados: (a) $t' = 3$ dias; (b) $t' = 8$ dias.

Como mostrado nessa figura, o material homogeneizado se torna mais rígido tanto com o aumento da idade t' quanto com o aumento nas porcentagens de inclusões elásticas. Nota-se que, para t' igual a três dias, por exemplo, o modelo M1, para valores baixos de $t - t'$, tem sua rigidez cerca de 30% maior (Figura 5.4 (a)). Esse aumento na rigidez cresce para 60%, quando se considera 28,90% de inclusões, como se percebe pela curva M4 da Figura 5.4 (a). Já para t' igual a oito dias (Figura 5.4 (b)), esses valores mudam para 45 e 65%, respectivamente, indicando que, nessas condições, o envelhecimento tem uma maior influência quando não há inclusões elásticas. Isso pode ser considerado visto que, no modelo M4, o volume de material viscoelástico é menor, uma vez que se colocam as inclusões no lugar da matriz. Com isso, pode-se ver que a VAUMAT apresenta um bom comportamento para obtenção da função $J(t, t')$ homogeneizada, a partir das propriedades da matriz e das inclusões, de materiais viscoelásticos compostos. Essa metodologia pode ser aplicada para a obtenção das curvas $J(t, t')$ do concreto, quando se conhecerem apenas as propriedades da argamassa e dos agregados, descartando a necessidade de se realizar ensaios de fluência para o concreto.

5.2 - SIMULAÇÃO EM ESTRUTURA 3D (PONTE KOROR-BABELDAOB)

Para a realização desse exemplo foi modelada a ponte Koror-Babeldaob, construída em 1977, ligando as ilhas de Koror e Babeldaob na República de Palau, ilustrada na Figura 5.5. Tal ponte apresentou deflexões excessivas e entrou em colapso 19 anos após sua construção, tendo sido alvo de pesquisas e trabalhos publicados acerca dos motivos de sua ruína, como em Bažant *et al.* (2010) e Bažant *et al.* (2012a,b).

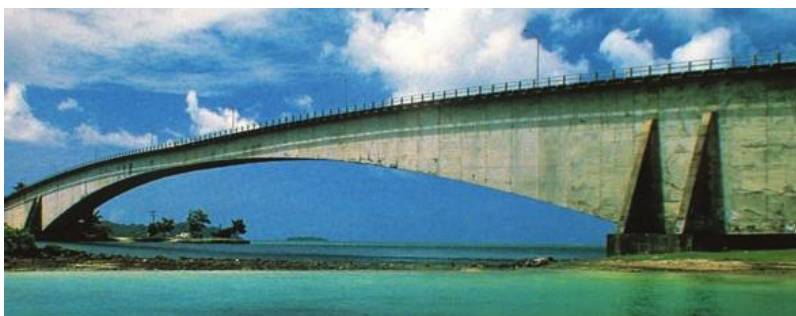


Figura 5.5 – Ponte Koror-Babeldaob (Bažant *et al.*, 2010)

A ponte analisada consiste de um vão principal de 241 m, o qual é formado por dois balanços simétricos conectados por uma rótula. Há também um vão de 72,2 m em cada lado do vão principal, com a finalidade de balancear os momentos nos pilares principais, resultando em um comprimento total da ponte de 385,4 m. Com uma seção vazada, do tipo viga caixão, a altura da seção transversal da ponte varia entre 14,17 m, nos pilares principais, e 3,66 m, no meio do vão principal. As espessuras das lajes também variam, ficando a superior entre 0,43 m e 0,28 m, e a inferior entre 1,15 m e 0,18 m. Comparadas com a altura da seção transversal, as paredes laterais têm uma espessura muito pequena, apenas 0,36 m. A Figura 5.6 a seguir mostra as seções transversais da ponte nos apoios principais e no meio do vão principal.

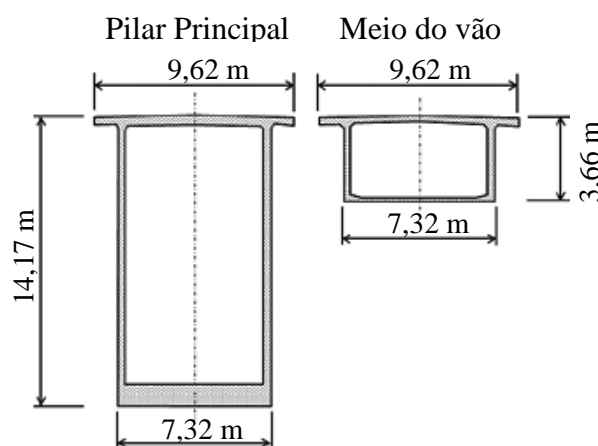


Figura 5.6 – Seções transversais da ponte analisada. Adaptado de Bažant *et al.* (2010)

De acordo com Bažant *et al.* (2012a) a densidade do concreto utilizado na construção dessa ponte era de 2325 kg/m^3 , e a laje superior era coberta por um pavimento de concreto com uma espessura média de 76 mm e uma densidade de 2233 kg/m^3 . Para modelar as propriedades viscoelásticas do concreto foi necessário encontrar o seu módulo de relaxação a partir da interconversão da função de fluência apresentada por Bažant *et al.* (2012b), dada pelo Modelo B3 (Eq. (2.29)). Aqui, foram considerados os mesmos parâmetros utilizados por Bažant *et al.* (2012b) para a criação das curvas de fluência do concreto e posterior interconversão em cur-

vas de relaxação $E(t, t')$ para algumas idades t' . Essas curvas foram então regredidas utilizando-se a Eq. (3.12), e os coeficientes usados como dados de entrada na VAUMAT para a realização das análises. A Figura 5.7 a seguir mostra as curvas $E(t, t')$ e a sua regressão, sendo os valores apresentados em escalas logarítmicas.

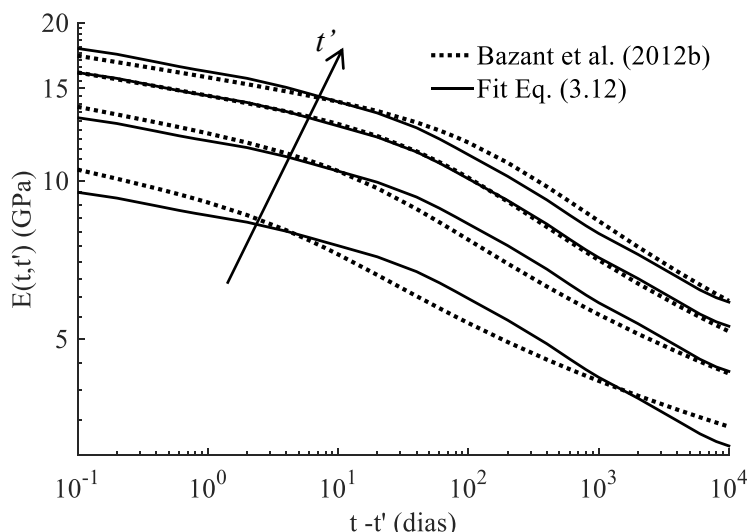


Figura 5.7 – Regressão curvas $E(t, t')$ do concreto utilizado na ponte

Nessa figura são mostradas as curvas para idades t' de 7, 28, 90 e 210 dias, seguindo a ordem crescente indicada pela seta. A regressão dessas curvas foi realizada utilizando a função *Curve Fitting Tool* do MatLab, obtendo-se um coeficiente de determinação R^2 igual a 0,9923. Ainda segundo Bazant *et al.* (2012b), o coeficiente de Poisson do concreto utilizado na ponte tinha um valor de aproximadamente 0,21, baseado em testes realizados *in situ*, e esse valor foi utilizado nas análises no *software* Abaqus.

Dadas as dimensões da ponte analisada e, considerando as suas simetrias geométrica e de condições de contorno, foi modelada e analisada apenas uma metade da ponte. As análises das deflexões da ponte foram realizadas considerando o peso próprio do concreto e o carregamento distribuído sobre a laje superior devido ao pavimento de concreto existente. Não foram consideradas as armaduras da ponte, pois pretendeu-se analisar apenas a influência da idade de aplicação dos carregamentos nas deflexões e o comportamento da VAUMAT, não sendo essas análises dependentes da presença das armaduras no modelo.

A malha de elementos finitos considerada nas análises foi feita utilizando-se um elemento tridimensional tetraédrico quadrático com 10 nós, o C3D10, gerada automaticamente pelo Abaqus. Para verificar o tamanho do elemento que resultaria em uma malha mais eficaz, foram realizados testes elásticos utilizando diferentes quantidades de elementos e comparando

as deflexões resultantes. Foram então calculados os valores do erro relativo e_r entre as deflexões para diferentes tamanhos de malhas, com relação à deflexão de referência δ_r obtida com uma malha contendo 61543 elementos, de acordo com a seguinte equação:

$$e_r = \left[\frac{\delta - \delta_r}{\delta_r} \right] 100\% \quad (5.1)$$

A Figura 5.8 a seguir mostra os valores de e_r encontrados.

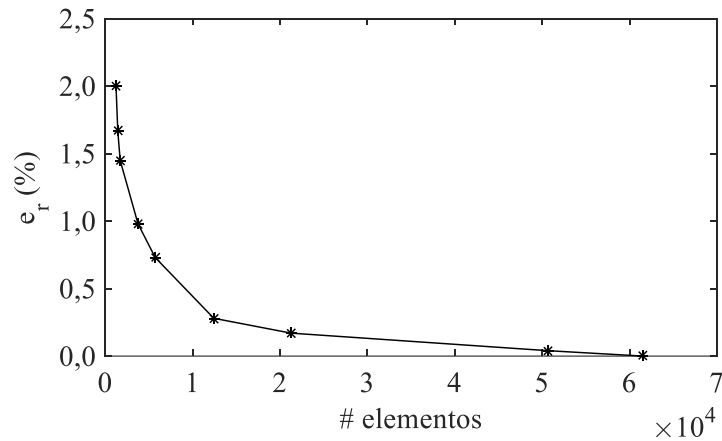


Figura 5.8 – Erro relativo entre malhas com diferentes quantidades de elementos

A partir desses testes realizados, optou-se por utilizar uma malha com 12416 elementos, uma vez que, aumentando o número de elementos para 61543, a diferença entre as deflexões medidas no meio do vão principal da ponte foi de apenas 0,28%. A Figura 5.10 a seguir mostra a geometria e a malha de elementos finitos utilizada nas análises, podendo-se ver que foi modelada apenas uma metade da ponte, devido às suas simetrias.

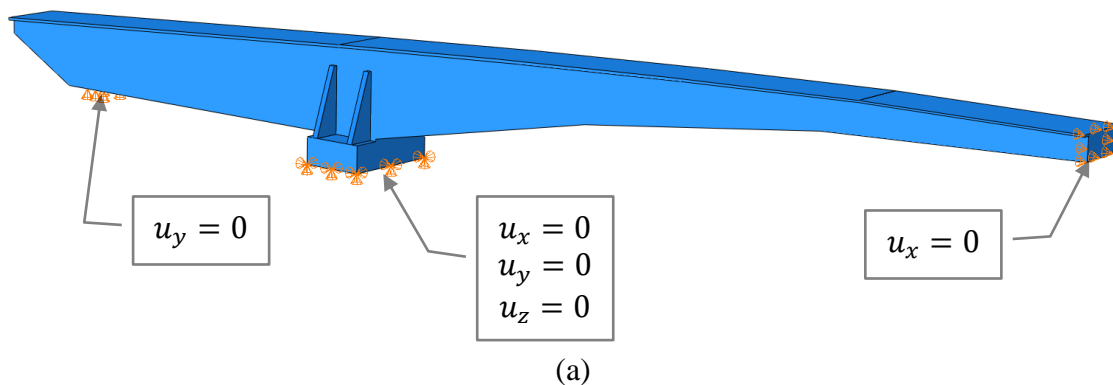


Figura 5.9 – Características da ponte modelada: (a) geometria e condições de contorno, (b) corte longitudinal e (c) malha utilizada nas análises

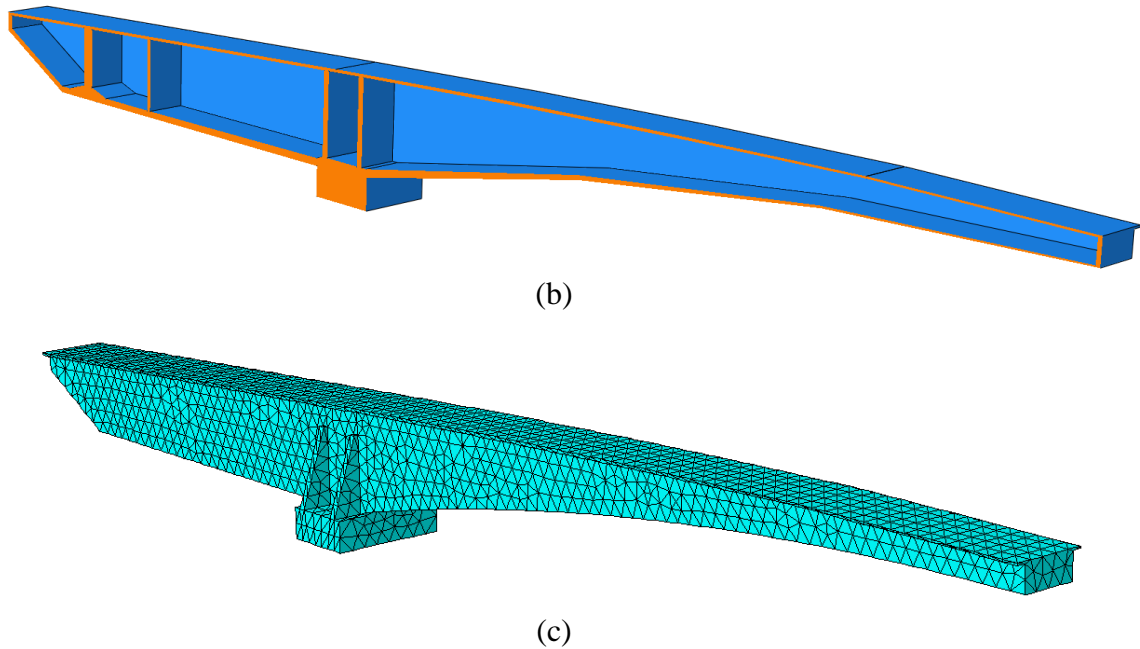


Figura 5.10 (continuação) – Características da ponte modelada: (a) geometria e condições de contorno, (b) corte longitudinal e (c) malha utilizada nas análises

5.2.1 - Análise das deflexões da ponte

Foram realizadas simulações da ponte modelada para três idades diferentes de t' , a saber, 7, 90, e 210 dias. As análises foram feitas considerando-se um tempo sob carregamento $t - t'$ equivalente a 20 anos, ou seja, 7300 dias. Por ser um tempo de análise muito grande, optou-se por dividir as simulações em 5 *steps*, utilizando valores crescentes de Δt , a fim de diminuir o tempo de cada simulação. Como é esperado que as deflexões tenham maior variação durante idades baixas de carregamento, foi considerado um Δt_{var} assumindo valores de 1 a 10 dias durante a primeira metade do tempo das análises. Durante o restante do tempo utilizou-se um Δt_{var} variando de 50 a 100 dias. A Figura 5.11 apresenta os resultados das deflexões obtidas no meio do vão principal da ponte, para as três idades de t' . Aqui, procurou-se verificar quantas vezes as deflexões aumentam ao longo do tempo, e quantas vezes elas diminuem à medida que se aumenta a idade de aplicação da carga. Por isso, as deflexões foram normalizadas com relação à deflexão instantânea $\delta(7,7)$, apresentada na aplicação do carregamento para um t' igual a 7 dias.

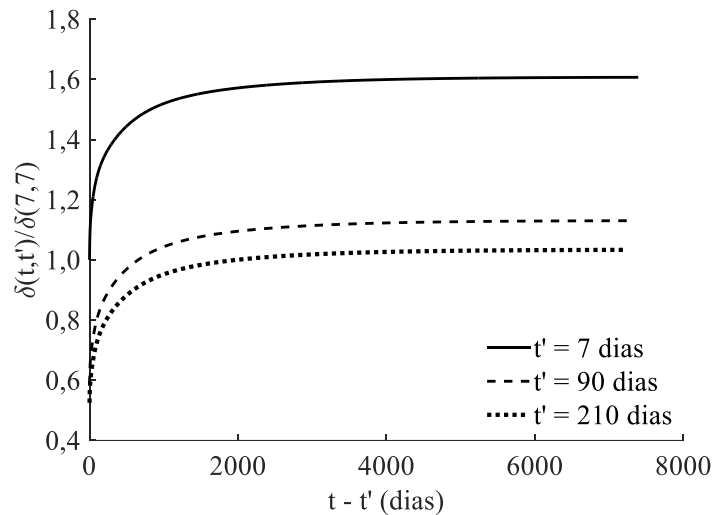


Figura 5.11 – Deflexões da ponte normalizadas com relação a $\delta(7,7)$

Como se percebe nessa figura, a deflexão após 20 anos sob carregamento chega a 1,61 vezes o seu valor no momento da aplicação da carga, quando se considera t' com valor de 7 dias. Já para idades t' de 90 e 210 dias, essa deflexão chega a 1,13 e 1,03 vezes o valor inicial, indicando uma diminuição de 48 e 58%, respectivamente, nas deflexões finais, com relação aos valores obtidos para t' igual a sete dias. Esse comportamento é devido ao envelhecimento do material, que faz com que ele fique mais rígido à medida que se aumenta a idade de aplicação do carregamento. As curvas da Figura 5.11 indicam também a evolução do envelhecimento do material, uma vez que a variação dos resultados de t' igual a 7 dias para t' igual a 90 dias é bem maior que a variação entre as curvas de t' igual a 90 dias e t' igual a 210 dias. Isso se dá porque as propriedades do concreto evoluem mais rapidamente em baixas idades, tendo um envelhecimento mais lento para idades mais avançadas.

Com a finalidade de testar a sensibilidade dos resultados obtidos com relação aos valores de Δt_{var} utilizados, as simulações foram refeitas considerando-se frações dos incrementos, de modo a se obter uma convergência para os valores das deflexões da ponte. Para isso, foram considerados os valores de $0,2\Delta t_{var}$, $0,05\Delta t_{var}$, $0,01\Delta t_{var}$ e $0,005\Delta t_{var}$ em cada *step* das análises. A Figura 5.12 a seguir mostra os resultados para a idade t' de 7 dias, também normalizados por $\delta(7,7)$.

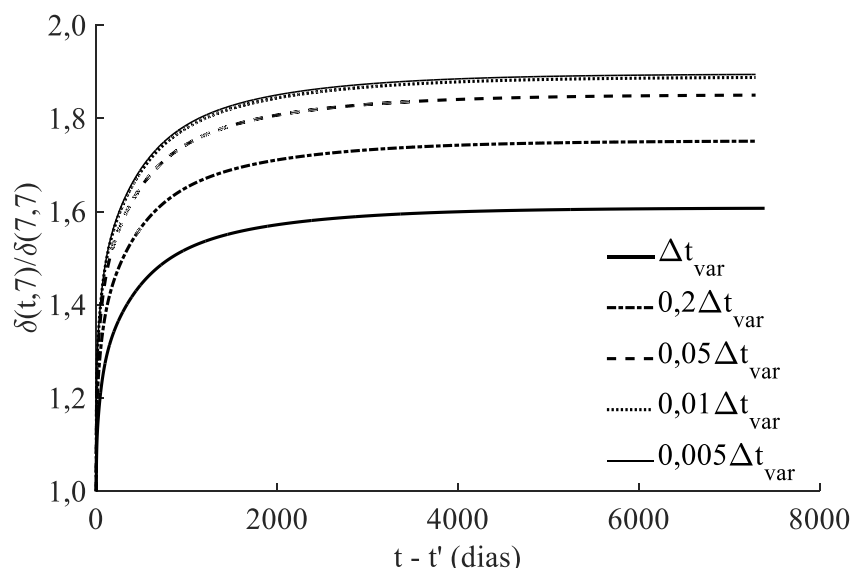


Figura 5.12 – Convergência das deflexões para diferentes valores de Δt , para t' de 7 dias

Como mostrado nessa figura, há uma diferença considerável nas deflexões quando se diminui o valor de Δt_{var} , indicando que o algoritmo incremental implementado é altamente dependente do valor de Δt adotado. Isso se dá por conta das simplificações adotadas nas Eq. (3.13) e (3.22), onde o valor de Δt influencia diretamente na aproximação das integrais dessas equações, obtendo-se resultados mais exatos para valores menores de Δt . Contudo, o modelo constitutivo desenvolvido e a VAUMAT, implementada com o algoritmo recursivo, mostraram-se com um bom desempenho nas análises realizadas, mesmo utilizando uma geometria complexa e em simulações de várias décadas de carregamento.

5.2.2 - Análise de sensibilidade com experimento fatorial

Análises fatoriais são utilizadas para investigar a influência de um conjunto de variáveis de entrada no comportamento de uma dada resposta de saída. A principal vantagem no uso desta técnica é que os diversos parâmetros de um modelo podem ser variados simultaneamente, ao invés de se analisar um por vez. Esta estratégia permite analisar tanto o efeito da variação de um fator isoladamente, quanto a interação mútua de diversos fatores em uma dada resposta. Neste estudo, foram considerados os coeficientes da Eq. (3.12) como sendo variáveis que influenciam na deflexão, ao longo do tempo, da ponte analisada na Seção 5.2.1. Para isso, foi utilizada uma regressão das curvas apresentadas na Figura 5.7, com dois termos nos somatórios da Eq. (3.12), totalizando em nove coeficientes, os quais são mostrados na Tabela 5.2, com seus valores médios (μ), desvios padrão (s) e coeficientes de variação.

Tabela 5.2 – Parâmetros estatísticos dos coeficientes analisados

Variável	Coeficiente	μ	s	Coeficiente de variação
X_1	E_∞	2,65E+07	5,30E+06	0,20
X_2	E_1	9,69E+06	1,74E+06	0,18
X_3	E_2	1,96E+07	4,14E+06	0,21
X_4	ρ_1	1,85E+00	7,25E-01	0,39
X_5	ρ_2	1,27E+02	2,07E+01	0,16
X_6	β_1	3,21E+03	6,42E+02	0,20
X_7	β_2	3,79E+03	6,82E+02	0,18
X_8	ω_1	1,66E+01	3,08E+00	0,19
X_9	ω_2	1,15E+03	2,38E+02	0,21

Aqui, cada coeficiente é considerado como uma variável X_i , as quais foram usadas para compor um polinômio de segundo grau que representasse um modelo de regressão ajustado para as respostas de deflexão da ponte analisada. O polinômio utilizado apresenta o seguinte formato:

$$\hat{Y} = a_0 + \sum_{i=1}^9 a_i X_i + \sum_{i=1}^9 a_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^8 \sum_{j>i}^9 a_{ij} X_i X_j \quad (5.2)$$

Onde \hat{Y} representa a função das deflexões ao longo do tempo, com respeito às variáveis X_i , a_0 corresponde à média das deflexões, a_i dá o efeito linear e a_{ii} o efeito quadrático das variáveis X_i , e a_{ij} é o efeito da interação entre as variáveis analisadas. Nesse caso, no terceiro termo da Eq. (5.2), os sub-índices i e j são sempre diferentes. Os coeficientes ajustados a_i , a_{ii} e a_{ij} dão uma ideia quantitativa de quão significativa é a mudança na média da resposta observada \hat{Y} , dada uma variação no valor da variável X_i . Por exemplo, para o caso estudado, o coeficiente a_1 é o efeito da variação em E_∞ no valor médio das deflexões da ponte. Já o coeficiente a_{22} dá o efeito do termo quadrático de E_1 e o a_{34} o efeito da interação entre os fatores E_2 e ρ_1 na média dessas deflexões. Assim, um coeficiente a positivo significa que, à medida que o valor da variável correspondente aumenta, a resposta média de \hat{Y} também aumenta.

Como foram consideradas nove variáveis, o polinômio completo tem 55 coeficientes: um independente, nove lineares (X_i), nove quadráticos (X_i^2) e 36 cruzados ($X_i X_j$). Foram então realizadas simulações da ponte modelada anteriormente, com combinações aleatórias de valores para as variáveis de entrada X_i , de acordo com o número de termos do polinômio, mais uma combinação das médias, totalizando 56 rodadas. Essas simulações foram realizadas para uma idade t' de 7 dias, e foram aferidas as deflexões no vão central da ponte para as idades t de 7,

28 e 1000 dias. Para cada grupo de resultados de t foram ajustados coeficientes a , de forma a se conseguir o efeito das variáveis analisadas ao longo do histórico de carregamento. Esses coeficientes foram então normalizados com relação a a_0 , para se obter o efeito relativo $e_{f\ rel}$ de cada um deles, sendo utilizada a seguinte equação:

$$e_{f\ rel} = \left[\frac{a}{a_0} \right] 100\% \quad (5.3)$$

Os efeitos normalizados resultantes são apresentados nas figuras seguintes, estando aqueles relacionados com os termos lineares do polinômio \hat{Y} na Figura 5.13. Como se pode ver nessa figura, E_∞ é o parâmetro de maior contribuição para diminuir as respostas de deflexões, aumentando sua importância ao longo do tempo de carregamento. Já os coeficientes β_i , os quais estão relacionados com o envelhecimento do material, são os mais relevantes para o aumento das deflexões nas três idades, também aumentando sua contribuição com o tempo. Esse é um comportamento inesperado, uma vez que o envelhecimento torna o material mais rígido, esses coeficientes não deveriam ter tanta influência no aumento das deflexões. Ainda na Figura 5.13, pode-se perceber que os coeficientes relacionados com os exponenciais na Eq. (3.12), a saber, ρ_j e ω_i , têm contribuições opostas: quando um contribui para aumentar as deflexões o outro contribui para diminuí-las.

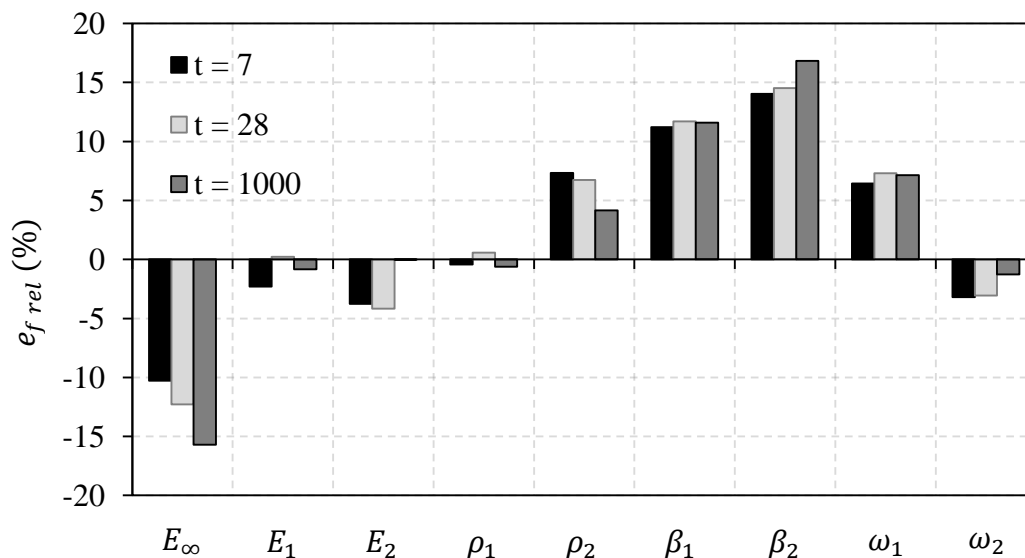


Figura 5.13 – Efeitos relativos, $e_{f\ rel}$, relacionados aos coeficientes lineares (a_i) de \hat{Y}

A Figura 5.14 adiante apresenta os efeitos relativos correspondentes aos termos quadráticos de \hat{Y} . Em geral, os coeficientes dos termos quadráticos têm menor magnitude em relação aos

lineares, o que fica claro comparando-se as influências dos termos dessa figura com aquelas mostradas na Figura 5.13.

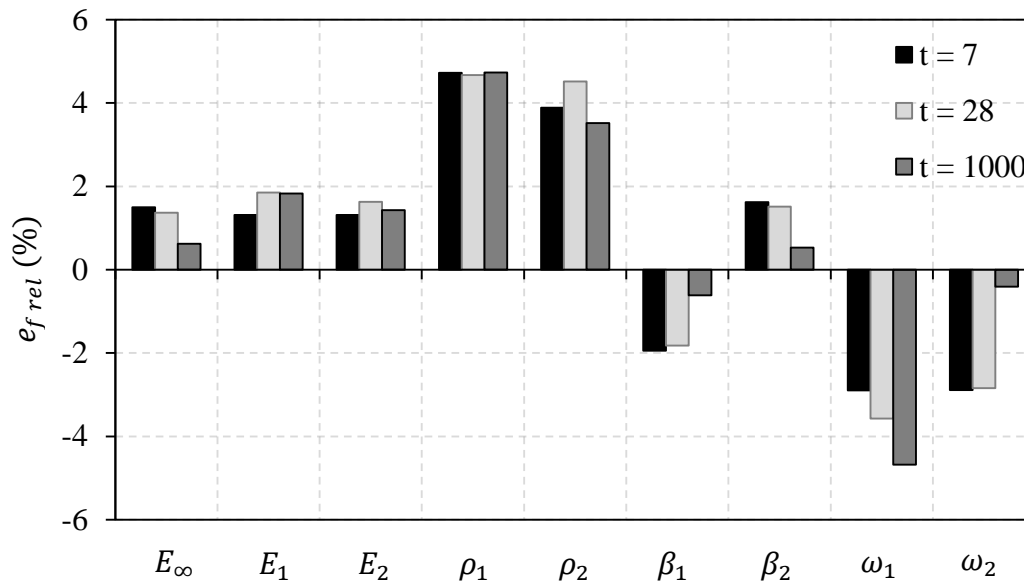


Figura 5.14 – Efeitos relativos, $e_{f\ rel}$, relacionados aos coeficientes quadráticos (a_{ii}) de \hat{Y}

Verifica-se também na Figura 5.14, que a dependência quadrática das deflexões para os valores de ρ são as dependências mais relevantes. Pode-se ver ainda, que o termo quadrático de ω_1 mostra crescente influência com o passar do tempo, indicando uma maior curvatura para tempos maiores. Os valores maiores do $e_{f\ rel}$ para ρ e ω podem ser explicados por eles estarem nos termos exponenciais da Eq. (3.12). Comparando novamente as Figura 5.14 e Figura 5.13, nota-se que os coeficientes com maior influência linear, E_∞ , E_1 , E_2 , β_1 e β_2 , têm baixa influência quadrática, sendo o valor da deflexão diretamente proporcional a esses valores, para todos os t .

Por último, os efeitos correspondentes às interações entre as variáveis analisadas são apresentados na Figura 5.15. Nesta figura, verifica-se que a influência das interações entre as variáveis E_∞ e ω_1 , E_∞ e ω_2 , e também β_1 e ω_1 , cresce com o tempo, enquanto a influência da interação entre ρ_2 e β_1 decresce ao longo do tempo. Comparando com as duas figuras anteriores, percebe-se que alguns coeficientes que apresentaram pouca influência linear ou quadrática, exercem efeitos consideráveis quando interagem com outros coeficientes. Ou seja, variáveis que apresentam baixos $e_{f\ rel}$ lineares e quadráticos, exercem $e_{f\ rel}$ relevantes quando combinadas com outras, como no caso de E_1 , ρ_1 e ω_2 . Além disso, verifica-se que a magnitude dos efeitos das variáveis juntas é comparável com aquela de algumas dependências lineares, vistas na Figura 5.13.

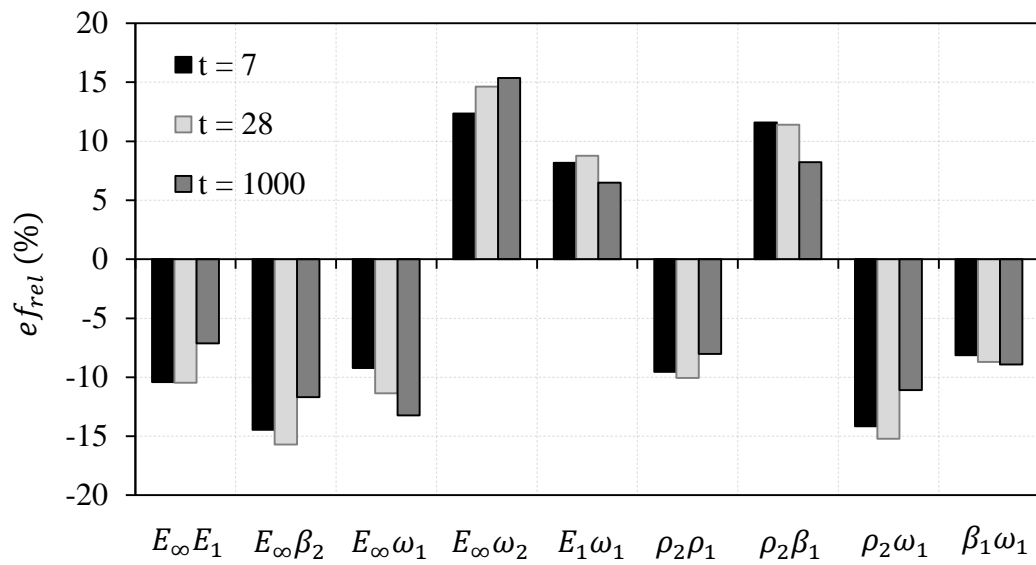


Figura 5.15 – Efeitos relativos, $e_{f_{rel}}$, relacionados aos coeficientes a_{ij} de \hat{Y}

6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 - CONCLUSÕES

Esta dissertação tratou da formulação de um modelo constitutivo viscoelástico com envelhecimento para o concreto, baseado em séries de Prony, e implementação no *software* comercial Abaqus. Para isso, foi desenvolvida uma sub-rotina de usuário, a qual foi nomeada de VAUMAT, em linguagem de programação Fortran, utilizando um algoritmo incremental recursivo, que descarta a necessidade de armazenamento de todo o histórico de solicitações ao longo do tempo. A verificação do algoritmo foi feita através da comparação com integrações diretas realizadas em uma rotina no MatLab, e a validação da VAUMAT foi feita comparando-a com resultados experimentais encontrados na literatura. Foram ainda realizadas simulações para encontrar o módulo $J(t, t')$ homogeneizado de um material, e também no cálculo das deflexões de uma estrutura tridimensional com geometria complexa. Os resultados obtidos comprovaram a eficiência do modelo e da VAUMAT implementados, na consideração do envelhecimento em análises quase-estáticas de fluência e relaxação.

O modelo implementado apresentou resultados satisfatórios em análises viscoelásticas para diferentes idades de aplicação do carregamento t' . Por ser um modelo explícito, observou-se que seu comportamento é altamente dependente do valor dos incrementos de tempo Δt considerados. Porém, uma vez utilizando valores pequenos de Δt , obtém-se resultados bastante confiáveis nas análises. Observou-se também que esse modelo capta bem o efeito do envelhecimento do material, sendo uma ótima ferramenta para análises de fluência do concreto. Este fato se confirma ao analisarem-se os gráficos que comparam os resultados das simulações no Abaqus com dados experimentais obtidos na literatura, para diferentes valores de t' .

As simulações para obtenção do módulo $J(t, t')$ homogeneizado mostraram a eficiência da VAUMAT quando usada em conjunto com outros tipos de material da biblioteca do Abaqus, uma vez que se obteve o comportamento esperado para os modelos com inclusões elásticas. Nesses casos, o modelo viscoelástico com envelhecimento reagiu bem à interação com o comportamento elástico das inclusões, mostrando ser uma opção para a modelagem do concreto, quando se conhecer apenas as propriedades da matriz e dos agregados. Já as simulações da ponte, apresentadas na Seção 5.2.1, mostraram a eficiência da VAUMAT para modelos tridimensionais complexos, bem como para longos períodos de carregamento. Os resultados

para este caso evidenciam também a influência do envelhecimento nas deflexões finais de estruturas de concreto, deixando claro o potencial de contribuição da VAUMAT para análises desse tipo.

Por fim, a análise fatorial de sensibilidade dos coeficientes do modelo viscoelástico desenvolvido mostrou a importância de cada um desses termos, bem como a influência das interações entre eles, nas respostas finais da estrutura. Conclui-se, portanto, que a VAUMAT implementada, considerando o modelo constitutivo proposto baseado em séries de Prony, e também o algoritmo incremental recursivo utilizado, é uma ferramenta poderosa, possibilitada pelo Abaqus, para análises de estruturas de concreto via MEF.

6.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros são sugeridos os seguintes tópicos:

- Modificar a VAUMAT para que se possa utilizá-la com multiprocessamento, de modo a diminuir o tempo de análise;
- Modificar a VAUMAT implementando leis dano, de forma a se utilizá-la em análises até a ruptura do material;
- Adaptar a VAUMAT para a modelagem de materiais viscoplásticos;
- Acrescentar na VAUMAT o cálculo de energia de deformação e a divisão das deformações nas parcelas instantânea, elástica, viscosa e plástica;
- Acrescentar na VAUMAT o cálculo das deformações por retração do concreto;
- Adaptar a VAUMAT para a consideração dos efeitos da temperatura.

REFERÊNCIAS

Al-Rub, R. K. A., You, T., Masad, E. A., Little, D. N. “*Mesomechanical modeling of the thermo-viscoelastic, thermo-viscoplastic, and thermo-viscodamage response of asphalt concrete*”. International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics, v. 3, n. 1-4, p. 14-33, 2011.

American Concrete Institute Committee 209 (ACI). “*Guide for modeling and calculating shrinkage and creep in hardened concrete*”. ACI Rep. 209.2R-08, ACI, Farmington Hills, MI, 2008.

Atrushi, D. S. “*Tensile and Compressive Creep of Early Age Concrete: Testing and Modeling*”. Doctoral Thesis. Department of Civil Engineering. The Norwegian University of Science and Technology. Trondheim, Norway, 2003.

Bathe, K. J. “*Finite Element Procedures*”. New Jersey, Prentice-Hall, 1996.

Bažant, Z. P., Baweja, S. “*Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures – model B3*”. Materials and Structures, v. 28, n. 6, pp. 357-365, 1995.

Bažant, Z. P., Hubler, M. H., Jirásek, M. “*Improved Estimation of Long-Term Relaxation Function from Compliance Function of Aging Concrete*”. Journal of Engineering Mechanics, v. 139, n. 2, pp. 146-152, 2013.

Bažant, Z. P., Hubler, M. H., Yu., Q. “*Pervasiveness of Excessive Segmental Bridge Deflections: Wake-up Call for Creep*”. ACI Structural Journal, v. 108, n. 6, pp. 766-774, 2011.

Bažant, Z. P., Jirásek, M., Hubler, M. H., Carol, I. “*RILEM draft recommendation: TC-242-MDC multi-decade creep and shrinkage of concrete: material model and structural analysis. model B4 for creep, drying shrinkage and autogenous shrinkage of normal and high-strength concretes with multi-decade applicability*”. Materials and structures, v. 48, n. 4, p. 753-770, 2015.

Bažant, Z. P., Panula, L. “*Practical prediction of time dependent deformations of concrete*”. Materials and Structures, Partes I e II, v. 11, n. 65, pp. 307-328, 1978.

Bažant, Z. P. “*Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method*”. ACI Journal, v. 69, n. 20, pp. 212-217, 1972.

Bažant, Z. P., Yu, Q., Li, G.-H. “*Excessive Long-Time Deflections of Prestressed Box Girders. I: Record-Span Bridge in Palau and Other Paradigms*”. Journal of Structural Engineering, v. 138, n. 6, pp. 676-686, 2012a.

Bažant, Z. P., Yu, Q., Li, G. H. “*Excessive Long-Time Deflections of Prestressed Box Girders. II: Numerical Analysis and Lessons Learned*”. Journal of Structural Engineering, v. 138, n. 6, pp. 687-696, 2012b.

Bažant, Z. P., Yu, Q., Li, G.-H., Klein, G., Křístek, V. “*Excessive Deflections of Record-Span Prestressed Box Girder: Lessons Learned from the Collapse of the Koror-Babeldaob Bridge in Palau*”. ACI Concrete International, v. 32, n. 6, pp. 44-52, 2010.

Chazal, C., Pitti, R. M. “*Incremental Constitutive Formulation for Time Dependent Materials: Creep Integral Approach*”. Mechanical of Time-Dependent Materials, v. 15, pp. 239-253, 2011.

Chazal, C., Pitti, R. M. “*Viscoelastic Incremental Formulation Using Creep and Relaxation Differential Approaches*”. Mechanical of Time-Dependent Materials, v. 14, pp. 173-190, 2010.

Christensen, R. M. “*Theory of Viscoelasticity: An Introduction*”. 2 ed, Academic Press, 1982.

Cook, R. D. “*Finite Element Modeling for Stress Analysis*”. John Wiley & Sons, 1995.

Darabi, M. K., Al-Rub, R. K. A., Masad, E. A., Huang, C. W., Little, D. N. “*A thermo-viscoelastic–viscoplastic–viscodamage constitutive model for asphaltic materials*”. International Journal of Solids and Structures, v. 48, n. 1, p. 191-207, 2011.

Dean, G. D., McCartney, L. N., Mera, R., Urquhart, J. M. “*Modeling nonlinear viscoelasticity in polymers for design using finite element analysis*”. Polymer Engineering & Science, v. 51, n. 11, p. 2210-2219, 2011.

Dunne, F., Petrinic, N. “*Introduction to computational plasticity*”. New York, Oxford University Press, 2005.

Fédération internationale du béton (*fib*). Draft of FIB model code, FIB, Lausanne, Switzerland, 2010.

Ferry, J. D. “*Viscoelastic Properties of Polymers*”. John Wiley & Sons, 1980.

- Fish, J., Belytschko, T. *“A First Course in Finite Elements”*. John Wiley & Sons, 2007.
- Ghazlan, G., Caperaa, S., Petit, C. *“An Incremental Formulation for the Linear Analysis of Thin Viscoelastic Structures Using Generalized Variables”*. International Journal for Numerical Methods In Engineering, v. 38, pp. 3315-3333, 1995.
- Grasley, Z. C., Lange, D. A. *“Constitutive modeling of the aging viscoelastic properties of portland cement paste”*. Mechanics of Time-Dependent Materials, v. 11, n. 3-4, p. 175-198, 2007.
- Hazewinkel, M. *“Gauss–Kronrod quadrature formula”*. Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers, 1994.
- Hedegaard, B. D., Shield, C. K., French, C. E. W. *“Smearred-bar model for viscoelastic analysis of uncracked reinforced concrete structures”*. Journal of Structural Engineering, v. 141, n. 7, p. 04014167, 2014.
- Huang, Y. H. *“Pavement Analysis and Design”*. 2 ed., New Jersey, Prentice Hall, 2004.
- Japan Society of Civil Engineers (JSCE). *“Standard specification for design and construction of concrete structure”*. JSCE, Tokyo, 1991.
- Lakes, R. *“Viscoelastic Materials”*. Cambridge, Cambridge University Press, 2009.
- Lavergne, F., Sab, K., Sanahuja, J., Bornert, M., Toulemonde, C. *“Investigation of the effect of aggregates’ morphology on concrete creep properties by numerical simulations”*. Cement and Concrete Research, v. 71, p. 14-28, 2015.
- Marques, S. P. C., Creus, G. J. *“Computational Viscoelasticity”*. Springer, 2012.
- Park, S. W., Schapery, R. A. *“Methods of Interconversion Between Linear Viscoelastic Material Functions. Part I - A Numerical Method Based on Prony Series”*. International Journal of Solids and Structures, v. 36, pp. 1653–1675, 1999.
- Reddy, J. N. *“An Introduction to the Finite Element Method”*. 3 ed., Mc Graw Hill, 2006.
- Silva Junior, P. F. *“Estudo da estabilidade dimensional de concretos de alta resistência com adição de polímero superabsorvente e nanopartículas de sílica”*. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília. Brasília, Brasil, 2017.

Taylor, R. L., Pister, K. S., Goudreau, G. L. “*Thermomechanical analysis of viscoelastic solids*”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 2, pp. 45-49, 1970.

Tunç, B., Özüpek, Ş. “*Implementation and validation of a three dimensional damaging finite strain viscoelastic model*”. International Journal of Solids and Structures, v. 102, p. 275-285, 2016.

Xu, C., Su, C. “*Development of an Effective Method for Calculations related to Creep*”. Arabian Journal for Science and Engineering, p. 1-11, 2017.

Yun, K. S., Park, J. B., Jung, G. D., Youn, S. K. “*Viscoelastic constitutive modeling of solid propellant with damage*”. International Journal of Solids and Structures, v. 80, p. 118-127, 2016.

Yu, Q., Bazant, Z. P., Wendner, R. “*Improved algorithm for efficient and realistic creep analysis of large creep-sensitive concrete structures*”. ACI Structural Journal, v. 109, n. 5, p. 665, 2012.

Zocher, M. A., Groves, S. E., Allen, D. H. “*A Three-Dimensional Finite Element Formulation for Thermoviscoelastic Orthotropic Media*”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 40, pp. 2267-2288, 1997.