Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos com automorfismos cujos pontos fixos são Engel

por

Danilo Sanção da Silveira

Brasília

2018

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos com automorfismos cujos pontos fixos são Engel

por

Danilo Sanção da Silveira †

sob orientação do

Prof. Dr. Pavel Shumyatsky – UnB

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, PPGMat–UnB, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

†O autor contou com apoio financeiro da Capes durante o doutorado sanduíche.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SSI587g

Silveira, Danilo Sanção da
Grupos com automorfismos cujos pontos fixos são Engel / Danilo Sanção da Silveira; orientador Pavel Shumyatsky. -- Brasília, 2018.
69 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Arquitetura e Urbanismo) - Universidade de Brasília, 2018.

1. Grupos finitos. 2. Grupos profinitos. 3. Elementos Engel. 4. Automorfismos. 5. Pontos fixos de automorfismos. I. Shumyatsky, Pavel , orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos com automorfismos cujos pontos fixos são Engel

por

Danilo Sanção da Silveira [†]

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, PPGMat – UnB, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de

Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Examinada e aprovada por:

Comissão Examinadora:

Prof. Dr Pavel Shumyatsky– Orientador (MAT-UnB)

Emerson Ferreira de Melo

Prof. Dr. Emerson Ferreira de Melo (MAT-UnB)

Prof. Dr. Mikhaiolo Dokuchaev (USP)

Ana Cristina Vieira

Profa. Dra. Ana Cristina Vieira (UFMG)

Brasília, 28 de junho de 2018

[†]O autor contou com apoio financeiro da Capes durante o doutorado sanduíche.

Dedicatória

Para minha esposa Andréa.

Agradecimentos

Nestas próximas duas páginas deste trabalho, gostaria de agradecer a algumas pessoas e instituições, dentre as muitas que me ajudaram a realizá-lo.

Ao meu orientador Prof. Pavel Shumyatsky pela confiança, amizade, ensinamentos, dedicação e disposição de sempre. Por sempre acreditar na minha capacidade, muitas vezes, até mais que eu mesmo. Sem sua orientação e colaboração esta tese não teria se tornado realidade. Considero-me privilegiado por ter tido este convívio com ele durante estes últimos quatro anos, e sem dúvida foram anos de muito crescimento pessoal e profissional. Sou eternamente grato a tudo que ele me proporcionou.

À Profa. Cristina Acciarri, pela amizade, ensinamentos, dedicação, paciência e pela colaboração durante meu doutorado.

Aos membros da banca e suplente, Profa. Ana Cristina Vieira, Prof. Emerson Ferreira de Melo, Prof. Mikhailo Dokuchaev e Prof. Raimundo de Araújo Bastos Júnior por aceitarem prontamente o convite para avaliação deste trabalho e pelas valiosas sugestões e comentários que ajudaram substancialmente a diminuir imprecisões e erros de digitação presentes na primeira versão desta tese.

À minha esposa ♡Andréa♡, pelo amor, paciência, compreensão, apoio incondicional. Sem ela tudo teria sido mais difícil. Muito obrigado amor da minha vida!

Aos meus familiares, que contribuíram de maneira significativa para minha educação ao longo da minha vida. Em especial, aos meus pais Rafael e Isabel. São eles as principais razões para o meu sucesso.

Ao professor Igor Lima e às professoras Ana Vieira e Viviane Silva pela sugestão e incentivo à minha vinda para o doutorado na UnB.

À meu querido tio Clemente (*in memorian*).

À meu amigo Yerko, pelas sempre agradáveis conversas sobre a vida, pelas discussões sobre matemática, pela ajuda com exames de qualificação e minha ida para Itália no doutorado sanduíche. Certamente, sem a ajuda dele meu doutorado sanduíche teria sido muito difícil, quiça inviável. Meu muito obrigado!

À meu amigo Marcos Duarte pelas boas conversas durante um café e outro e também pela prontidão em ajudar com a diagramação deste trabalho e problemas técnicos com LaTeX.

À todos meus amigos, que mesmo estando longe me acompanharam nessa jornada e que torceram por esse resultado, em especial, Gabriel, Rafael, Carlos, Juliano, Eduardo, Celso, Farley, Vitor, Luiz, Frederico, Monique, Joselmo, Lia, Mariana, Junior, João, Celso Silveira e Elcio.

A todos meus professores durante o mestrado na UFMG pelo aprendizado, em especial, Profa. Ana Cristina Vieira que foi minha orientadora de mestrado e Prof. Michel Spira que foi meu orientador na especialização, pela dedicação, ensinamentos e confiança sempre presente no início dessa caminhada. Basicamente, minha carreira como matemático começou e criou corpo com estes queridos mestres e amigos.

A todos meus professores durante o doutorado na UnB e todos funcionários do Mat/UnB.

Aos amigos que fiz no decorrer dos anos de doutorado e que contribuíram de alguma forma para a conclusão deste trabalho, em especial, Poj, Wirinda, Agenor, Alex, Bruno, Martino, Raimundo, Jean, Josimar, Valter e Elton.

À Profa. Eloisa Michela Detomi pela receptividade durante meu doutorada sanduíche na Itália.

À CAPES pelo apoio financeiro durante meu doutorado sanduíche na *Università degli Studi di Padova* na Itália.

À IMTec/UFG por possibilitar meu afastamento das atividades docentes para que pudesse dedicar exclusivamente a este trabalho.

À FAPDF pelo apoio financeiro à participações em congressos.

À UnB, pela infraestrutura e recursos oferecidos para a realização deste trabalho.

Peço desculpas àqueles que injusta e involuntariamente tenham sido omitidos.

Meus sinceros agradecimentos a todos.

"Se não puder voar, corra.

Se não puder correr, ande.

Se não puder andar, rasteje,

mas continue em frente

de qualquer jeito".

Martin Luther King

Resumo

Sejam q um número primo e A um adequado q-grupo abeliano elementar agindo coprimamente sobre um grupo finito ou profinito G. Mostramos que se para cada $a \in A^{\#}$ os elementos nos centralizadores $C_G(a)$ satisfazem alguma condição de Engel, então o grupo todo G satisfaz uma condição de Engel similar. Mais precisamente, obtivemos os seguintes resultados.

Sejam q um número primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^2. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo finito G e assuma que todo elemento em $C_G(a)$ é n-Engel em G para cada $a \in A^{\#}$. Então G é k-Engel para algum inteiro positivo $\{n, q\}$-limitado k.

Sejam q um número primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^3. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo finito G e assuma que o centralizador $C_G(a)$ é n-Engel para cada $a \in A^{\#}$. Então G é k-Engel para algum inteiro positivo $\{n, q\}$-limitado k

Uma versão profinita não quantitativa do primeiro resultado também foi obtida.

Palavras-chave: Grupos Finitos, Grupos Profinitos, Elementos Engel, p-Grupos *Powerful*, Automorfismos, Centralizadores, Pontos Fixos de Automofismos, Anéis de Lie, Álgebras de Lie.

Abstract

Let q be a prime and A an elementary abelian q-group acting coprimely on a finite or profinite group G. We show that if for all $a \in A^{\#}$ the elements in centralizers $C_G(a)$ satisfy some natural Engel condition, then the whole group G satisfies similar condition. More precisely, the following results are obtained.

Let q be a prime, n a positive integer and A an elementary abelian group of order q^2. Suppose that A acts coprimely on a finite group G and assume that for each $a \in A^{\#}$ every element of $C_G(a)$ is n-Engel in G. Then the group G is k-Engel for some $\{n, q\}$-bounded number k.

Let q be a prime, n a positive integer and A an elementary abelian group of order q^3. Suppose that A acts coprimely on a finite group G and assume that for each $a \in A^{\#}$ the centralizer $C_G(a)$ is n-Engel. Then the group G is k-Engel for some $\{n, q\}$-bounded number k.

A profinite non-quantitative version of the first result is also obtained.

Keywords: Finite Groups, Profinite Groups, Engel Elements, Powerful p-Groups, Automorphisms, Centralizers, Fixed Points of Automophisms, Lie Rings, Lie Algebras.

Lista de Símbolos

$[x,_n y]$	$[[x,y],_{n-1} y]$
$A^{\#}$	$A - \{1\}$
(m,n)	máximo divisor comum de m e n
$[x,y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$
$\mathbb{F}_p$	corpo com p elementos
$\gamma_k(G)$	k-ésimo termo da série central inferior de G
$\langle S\rangle$	subgrupo gerado pelos elementos de S
$\Phi(G)$	subgrupo de Frattini de G
$\pi(n)$	conjunto de todos primos que dividem n
$C_G(a)$	centralizador de a em G
$D_i(G)$	i-ésimo termo da série central p-dimensional de G
G'	subgrupo comutador $[G,G]$
$G^{(k)}$	k-ésimo termo da série derivada de G
G^k	subgrupo gerado pelo conjunto das k-ésimas potências dos elementos de G
$H \leq G$, $H \trianglelefteq G$	H é um subgrupo de G, H é um subgrupo normal de G
$HP(G)$	radical de Hirsch-Plotkin de G
$L(G)$	anel de Lie associado a G usando a série central inferior
$L_p(G)$	subálgebra gerada pela primeira componente homogênea da álgebra de Lie associada a G usando a série central p-dimensional
p,q	números primos
$rk(G)$	posto de G

Conteúdo

Introdução

Seja a um automorfismo de um grupo G. Dizemos que a *centraliza* um elemento $g \in G$ se $g^a = g$, onde g^a representa a imagem de g via a. Dizemos ainda que g é um *ponto fixo* de a em G. O conjunto de todos os elementos em G centralizados por a é um subgrupo de G e será indicado por $C_G(a)$, isto é,

$$C_G(a) = \{g \in G : g^a = g\}.$$

O subgrupo $C_G(a)$ será chamado de *subgrupo dos pontos fixos* de a ou *centralizador* de a ou simplesmente *centralizador*, quando não houver risco de ambiguidade.

Este trabalho tem como direção de pesquisa o seguinte problema:

Seja A um grupo de automorfismos de um grupo G. Qual a influência que a estrutura dos centralizadores $C_G(a)$, onde $a \in A \setminus \{1\}$, tem sobre a estrutura de G?

Ao longo de todo trabalho, a menos que se afirme explicitamente o contrário, a letra A será reservada para indicar um subgrupo finito de automorfismos de um grupo G. Além disso, diremos que A age (por automorfismos) *coprimamente* sobre o grupo finito G quando $(|A|, |G|) = 1$.

Atualmente, são conhecidos muitos resultados evidenciando que a estrutura dos centralizadores $C_G(a)$ tem influência sobre a estrutura de G. Por exemplo, um célebre resultado de J. G. Thompson [51] assegura que se G é um grupo finito admitindo um automorfismo a de ordem prima q tal que $C_G(a) = 1$, então G é nilpotente. Ainda neste contexto, um resultado de G. Higman [22] garante também que a classe de nilpotência de G é limitada superiormente por uma função $h(q)$, dependendo somente de q.

Sabe-se ainda, que a influência da estrutura dos centralizadores $C_G(a)$ é especialmente forte quando a ação de A sobre G é *coprima*, isto é, se $(|A|, |G|) = 1$. Neste caso, já existem muitos avanços no problema acima que tratam de solubilidade, ordem e posto [19], expoente [32], nilpotência [54], [46] e [39], leis positivas [48], comprimento de Fitting [52], etc.

Seguindo a solução positiva do Problema Restrito de Burnside [60, 61, 64] foi descoberto que o expoente dos centralizadores $C_G(a)$ têm forte impacto sobre o expoente de G. Relembramos que um grupo G é dito de *expoente* n se $x^n = 1$ para todo $x \in G$ e n é o menor inteiro positivo com esta propriedade. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema KS. (**E. I. Khukhro e P. Shumyatsky, [32]**) *Sejam q um número primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^2. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo finito G e assuma que $C_G(a)$ tem expoente dividindo n para cada $a \in A^{\#}$. Então o expoente de G é $\{n, q\}$-limitado.*

Aqui e ao longo deste trabalho $A^{\#}$ denotará o conjunto de elementos não triviais de A. Usaremos a expressão "$\{a, b, \dots\}$-limitado" para abreviar "limitado superiormente por uma função dependendo somente dos parâmetros $a, b, \dots$".

A prova do resultado acima envolve muitas ideias profundas. Em particular, resultados Lie-teóricos de E. I. Zelmanov obtidos na solução positiva do Problema Restrito de Burnside [60, 61, 64] são combinados com a teoria de p-grupos *powerful* desenvolvida por A. Lubotzky e A. Mann [37], uma versão finita e quantitativa do critério de M. Lazard para um grupo pro-p finitamente gerado ser p-ádico analítico [33] obtida por E. I. Khukhro e P. Shumyatsky [32], e um resultado de Y. A. Bahturin e M. V. Zaicev em álgebras de Lie admitindo um grupo de automorfismos cuja subálgebra dos pontos fixos satisfaz uma identidade polinomial [7].

No contexto de grupos profinitos, todos os conceitos usuais da teoria de grupos são interpretados topologicamente. Por exemplo, dizemos que H é subgrupo de um grupo profinito G quando H for um subgrupo fechado de G, neste caso, escrevemos $H \leq G$. Dizemos que um subgrupo $H \leq G$ é gerado por um conjunto S se H é gerado topologicamente por S. Dizemos que φ é um automorfismo de um grupo profinito quando φ for um automorfismo contínuo. Dizemos que um grupo de automorfismos A age *coprimamente* sobre um grupo profinito G se A é finito enquanto que G é isomorfo a um limite inverso de grupos finitos cujas ordens são relativamente primas com a ordem de A.

Dizemos que um grupo G é *localmente finito* se cada subgrupo finitamente gerado de G é finito e dizemos também que um grupo é *periódico* se todos seus elementos têm ordem finita. Usando um teorema de redução de J. S. Wilson [57], E. I. Zelmanov mostrou que um grupo profinito é localmente finito se, e somente se, é periódico [62]. Uma versão profinita (não quantitativa) do Teorema KS foi obtida em [47].

Teorema. (**P. Shumyatsky, [47]**) *Sejam q um número primo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^2. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo profinito G e assuma que $C_G(a)$ é periódico para cada $a \in A^{\#}$. Então G é localmente finito.*

Neste trabalho tratamos a situação onde os centralizadores $C_G(a)$ constituem-se de elementos Engel. Antes de enunciar nosso primeiro resultado vamos definir o conceito de elemento Engel e grupo Engel. Sejam n um inteiro não negativo e G um grupo (possivelmente infinito). Se $x, y \in G$, o comutador $[x,_n y]$ é definido indutivamente pelas regras:

$$[x,_0 y] = x, \quad [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy, \quad [x,_n y] = [[x,_{n-1} y], y]$$

Um elemento $g \in G$ é dito um *elemento Engel* (à esquerda) se para cada $x \in G$ existe um inteiro n, possivelmente dependendo de g e x, tal que $[x,_n g] = 1$. Dizemos que G é um *grupo Engel* se todos elementos de G são elementos Engel. Se existe um inteiro n dependendo somente de g tal que $[x,_n g] = 1$ para todo $x \in G$, então dizemos que g é um *elemento n-Engel*. Por fim, dizemos que G é um *grupo n-Engel* se todos elementos de G são elementos n-Engel.

Note que todo grupo finito Engel é também um grupo n-Engel para algum inteiro positivo n. Entretanto, existem grupos Engel infinitos que não são n-Engel para nenhum inteiro positivo n. Temos ainda que todo grupo nilpotente de classe n é um grupo n-Engel. M. Zorn [65] provou que a recíproca também vale no contexto de grupos finitos, isto é, que todo grupo finito n-Engel é nilpotente. Entretanto, isso não se verifica para grupos infinitos em geral [40, Theorem 34.62]. Sabe-se também que grupo Engel não precisa ser localmente nilpotente [14]. Cabe aqui ressaltar que, para um inteiro positivo fixo n, o conjunto de elementos n-Engel não é um subgrupo em geral. De fato, o produto entrelaçado *standard* $C_2 \wr (C_2 \times C_2)$ é um grupo 3-Engel que pode ser gerado por elementos 2-Engel. Em [10], V. V. Bludov apresentou um exemplo de um grupo não Engel gerado por elementos Engel (para detalhes veja [9]). Note que esse exemplo mostra que o produto de dois elementos Engel pode não ser um elemento Engel. Vale ressaltar ainda que podemos construir um grupo localmente finito 3-Engel de expoente 5 que é não solúvel [8]. Um problema bem conhecido neste contexto é o seguinte.

Problema [B. I. Plotkin-1950, [31] Problem 14.70] *Será que todo grupo n-Engel é localmente nilpotente?*

Embora este problema não tenha sido objeto de estudo deste trabalho de tese, acredito que vale a pena gastar algumas linhas para destacar alguns avanços neste contexto. Este problema pode ser abordado por duas maneiras: uma abordagem é estudar grupos n-Engel para diferentes valores de n. A resposta do problema acima tem resposta positiva se $n \leq 4$. Se $n = 1$, então o grupo é abeliano. O caso $n = 2$ foi mostrado por Levi [34]. H. Heineken [21] mostrou o caso $n = 3$. O caso $n = 4$ foi mostrado em dois trabalhos independentes, por G. Havas e M. R. Vaughan-Lee [20] e depois por G. Traustason [53]. A segunda maneira é investigar o problema em certas classes de grupos. É conhecido que um grupo n-Engel é localmente nilpotente se adicionalmente ele for: finito [65], solúvel [16], satisfaz a condição maximal [6], linear [13], residualmente finito [55], profinito [58], compacto [38], ordenado [27], localmente graduado [28] e se todos subgrupos são subnormais [50]. Mencionamos ainda que há uns 8 anos Eliyahu Rips e Arye Juhasz anunciaram que o problema tem solução negativa para todo $n \geq 40$. Porém, até agora nenhuma demonstração deste fato foi publicado.

O primeiro resultado que obtivemos é análogo ao Teorema KS.

Teorema A. *Sejam q um número primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^2. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo finito G e assuma que todo elemento em $C_G(a)$ é n-Engel em G para cada $a \in A^{\#}$. Então G é k-Engel para algum inteiro positivo $\{n, q\}$-limitado k.*

A demonstração do Teorema A usa essencialmente os métodos desenvolvidos na demonstração do Teorema KS. Entretanto, na prova do Teorema A há diferenças significativas. Afinal, na prova do Teorema A tivemos que trabalhar também com anéis de Lie (álgebras de Lie sobre $\mathbb{Z}$) em vez de trabalhar apenas com álgebras de Lie sobre um corpo, como foi feito na prova do Teorema KS. Ao trabalhar com anéis de Lie provamos resultados neste contexto com interesse independente da Teoria de Grupos (ver Teoremas 2.1.6 e 2.1.11)

Dizemos que um grupo é *localmente nilpotente* se cada subgrupo finitamente gerado é nilpotente. Um importante teorema de J. S. Wilson e E. I. Zelmanov [58] garante que um grupo profinito é localmente nilpotente se, e somente se, é Engel. Combinando este resultado com as técnicas desenvolvidas para demonstrar o Teorema KS, obtivemos uma versão profinita (não quantitativa) do Teorema A.

Teorema B. *Sejam q um número primo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^2. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo profinito G e assuma que todo elemento em $C_G(a)$ é Engel em G para cada $a \in A^{\#}$. Então G é localmente nilpotente.*

Se, no Teorema A, relaxarmos as hipóteses que todo elemento em $C_G(a)$ é n-Engel em G e requerer em vez disso que todo elemento em $C_G(a)$ é n-Engel em $C_G(a)$, rapidamente vemos que o resultado não pode ser assegurado. Em [3], pode ser encontrado um exemplo de um grupo finito não nilpotente G admitindo um grupo de automorfismos coprimos não cíclico de ordem quatro A tal que $C_G(a)$ é abeliano para cada $a \in A^{\#}$. Neste mesmo exemplo, o leitor poderá notar ainda que tal grupo G admite uma involução τ tal que todo elemento em $C_G(\tau)$ é 2-Engel. Desta forma, no Teorema A, a hipótese que A é abeliano elementar de ordem q^2 não pode ser substituída por A é cíclico de ordem q, pois um famoso teorema devido a Zorn garante que grupo finito Engel é necessariamente nilpotente. Entretanto, obtivemos o seguinte resultado.

Teorema C. *Sejam q um número primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^3. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo finito G e assuma que $C_G(a)$ é n-Engel para cada $a \in A^{\#}$. Então G é k-Engel para algum inteiro positivo $\{n, q\}$-limitado k.*

Em [3], uma versão profinita do Teorema C foi obtida.

Teorema D. (**C. Acciarri e P. Shumyatsky, [3]**) *Sejam q um número primo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^3. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo profinito G e assuma que $C_G(a)$ é Engel para cada $a \in A^{\#}$. Então G é localmente nilpotente.*

Também provamos resultados importantes em anéis de Lie. Eles têm um papel fundamental nas demonstrações dos Teoremas A e C os quais utilizam métodos Lie-teóricos.

Teorema 2.1.6 *Sejam L um anel de Lie e A um grupo finito de automorfismos de L tal que $C_L(A)$ satisfaz a identidade polinomial $f \equiv 0$. Além disso, assuma que L é* *gerado por um conjunto A-invariante contendo m elementos tal que cada comutador nos geradores é ad-nilpotente com índice no máximo n. Então existem inteiros positivos e, c dependendo somente de $|A|, f, m$ e n, tais que $e\gamma_c(L) = 0$.*

Teorema 2.1.11 *Sejam F o anel de Lie livre em um conjunto enumerável de geradores livres e f um elemento de F (polinômio de Lie) tal que $f \notin pF$ para todo primo p. Suponha que L é um anel de Lie gerado pelos elementos $a_1, \dots, a_m$ tal que cada comutador nos geradores é ad-nilpotente com índice no máximo n. Assuma que L satisfaz a identidade $f \equiv 0$. Então L é nilpotente com classe $\{f, m, n\}$-limitada.*

Observamos que os principais resultados obtidos nesta tese foram publicados em [49] e [4]. Mais precisamente, os Teoremas A, 2.1.6 e 2.1.11 foram publicados em [49] e os Teoremas B e C foram publicados em [4].

Em linhas gerais, a estrutura deste trabalho foi dividida da seguinte maneira:

Capítulo 1. Apresentamos brevemente alguns conceitos para facilitar a leitura do texto. Incluindo os conceitos de palavras de grupos, grupos profinitos, p-grupos *powerful*, ações coprimas de automorfismos e condições de Engel. Também citamos quase todos os resultados da Teoria de Grupos que serão requeridos nas demonstrações dos principais resultados. Este capítulo não contém resultados de autoria do autor desse trabalho.

Capítulo 2. Primeiramente, apresentamos resultados associados à álgebras de Lie sobre um corpo e provamos resultados análogos para anéis de Lie. Depois, descrevemos brevemente técnicas Lie-teóricas e resultados associados.

Capítulo 3. É dedicado às demonstrações dos Teoremas A, B e C.

Capítulo 4. Apresentamos sem provas outros resultados obtidos durante meu doutorado. Tais resultados foram publicado em [5].

Brasília, 28 de junho de 2018

Danilo Sanção da Silveira

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos terminologias e alguns resultados da Teoria de Grupos que serão utilizados ao longo do texto.

1.1 Conceitos Básicos de Grupos

Uma *palavra de grupo*, ou simplesmente *palavra*, é um elemento não trivial do grupo livre $F = F(X)$, onde $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é um conjunto de geradores livres.

Sejam G um grupo e $w = w(x_1, \ldots, x_n)$ uma palavra. Dizemos que G satisfaz a identidade $w \equiv 1$ se $w(g_1, \ldots, g_n) = 1$ para todos $g_1, \ldots, g_n \in G$. Quando for o caso, podemos dizer também que G satisfaz a lei $w \equiv 1$.

A seguir, vamos definir palavras que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

- Seja k um inteiro positivo. Definimos a palavra γ_k da seguinte forma:

$$\gamma_1(x_1) = x_1, \gamma_2(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2,$$

  e para $k \geq 2$,

$$\gamma_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}) = [[x_1 \ldots, x_k], x_{k+1}].$$

  A palavra γ_k é chamada *comutador simples de peso* k (normado à esquerda). Dizemos que um grupo G é *nilpotente de classe* k se, e somente se, G satisfaz a lei $\gamma_{k+1} \equiv 1$ e k é o menor inteiro satisfazendo esta propriedade. Uma propriedade importante de grupos nilpotentes que utilizaremos sem referência especial é que um grupo finito nilpotente é o produto direto de seus subgrupos de Sylow. Para mais detalhes consulte [43] ou [30].

Para dois subconjuntos M, N de um grupo G definimos o subgrupo $[M, N] = \langle [m, n] : m \in M, n \in N \rangle$. Quando $M = N = G$, o subgrupo $[G, G]$ é chamado *subgrupo comutador* de G. Ele também poderá ser indicado por G'.

Seja k um inteiro positivo. Para cada grupo G, definimos o subgrupo $\gamma_k(G)$ da seguinte forma:

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_k(G) = [\gamma_{k-1}(G), G], \text{ para } k \geq 2.$$

Sabemos que $\gamma_k(G) = \langle [g_1, \dots, g_k] : g_1, \dots, g_k \in G \rangle$. Além disso, tais subgrupos formam uma série

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \gamma_3(G) \cdots \qquad (*)$$

tal que os fatores $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ são centrais, isto é, $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G) \leq Z(G/\gamma_{i+1}(G))$, para cada $i \geq 1$. Tal série é chamada *série central inferior de G*. Outra propriedade importante dos termos da série $(*)$ é que $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$, para todo par de inteiros $i, j \geq 1$.

- Seja k um inteiro não negativo. Definimos a palavra δ_k da seguinte forma:

$$\delta_0(x_1) = x_1, \delta_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$$

e para $k \geq 1$,

$$\delta_{k+1}(x_1, \dots, x_{2^{k+1}}) = [\delta_k(x_1, \dots, x_{2^k}), \delta_k(x_{2^k+1}, \dots, x_{2^{k+1}})].$$

A palavra δ_k é chamada *palavra derivada de peso k*. Dizemos que um grupo G é *solúvel com comprimento derivado k* se, e somente se, G satisfaz a lei $\delta_k \equiv 1$, e k é o menor inteiro satisfazendo esta propriedade. Para mais detalhes consulte [43] ou [30].

Para cada grupo G, definimos o k-ésimo subgrupo derivado de G, que é comumente denotado por $G^{(k)}$, da seguinte forma:

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}], \text{ para } k \geq 1.$$

É bastante conhecido que $G^{(k)} = \langle \delta_k(g_1, \ldots, g_{2^k}) : g_1, \ldots, g_{2^k} \in G \rangle$.

Seja $d \in \mathbb{N}$. Dizemos que um grupo G é *d-gerado* se G possui um subconjunto X com d elementos tal que $G = \langle X \rangle$. Neste caso, quando a quantidade de geradores não for importante, dizemos simplesmente que G é *finitamente gerado*. Note que um subgrupo de um grupo finitamente gerado pode não ser finitamente gerado, como acontece com o produto entrelaçado *standard* $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, que é um grupo 2-gerado que possui um subgrupo que não é finitamente gerado. Entretanto temos o seguinte resultado.

Teorema 1.1.1 ([43], 6.1.8(ii)) *Seja G um grupo m-gerado. Se H é um subgrupo de G com índice finito n, então H pode ser gerado por $(m-1)n + 1$ elementos.*

Denotamos por $d(G)$ o menor número de elementos de G que são necessários para gerar o grupo G. O *posto* de um grupo G é definido como sendo

$$rk(G) := max\{d(H) : H \leq G\}.$$

O resultado a seguir é bastante conhecido. Ele segue do simples fato que se N é um subgrupo normal de um grupo finito G tal que N é n-gerado e G/N é m-gerado, então G é $(m+n)$-gerado.

Proposição 1.1.2 *Sejam G um grupo finito e N um subgrupo normal de G. Então*

$$rk(G) \leq rk(G/N) + rk(N).$$

1.2 Grupos Profinitos

Nesta seção abordaremos rapidamente uma importante e atual classe de grupos topológicos que é a classe dos grupos profinitos. Embora algumas definições básicas não sejam fornecidas aqui, o leitor não familiarizado com o tema poderá consultar, por exemplo, [56], [12] ou [42] para maiores detalhes. Em suma, aqui fornecemos apenas alguns conceitos sobre este tópico com o intuito de facilitar a leitura, e fixar notações e terminologias.

A classe dos grupos profinitos, em certo sentido, pode ser vista como uma extensão da classe dos grupos finitos. Desta forma, muitos dos teoremas que são verdadeiros para grupos finitos também valem (com adequadas adaptações) para grupos profinitos, tais como Teorema de Lagrange [56, Proposition 2.1.2], Teoremas de Sylow [56, Proposition 2.2.2], etc. Começaremos introduzindo alguns conceitos, terminologias e notações a respeito de grupos topológicos. Para isso, assumimos que o leitor tenha conhecimentos básicos de topologia.

Definição 1.2.1 *Um grupo topológico é um conjunto que é simultaneamente um grupo e um espaço topológico, para o qual a aplicação*

$$G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto gh^{-1}$$

é contínua, onde $G \times G$ é equipado com a topologia produto.

No contexto de grupos topológicos, dizemos que H é subgrupo de um grupo topológico G quando H for um subgrupo fechado de G, neste caso, escrevemos $H \leq G$. Dizemos que um subgrupo $H \leq G$ é gerado por um conjunto S se H é gerado topologicamente por S. Dizemos que φ é um automorfismo de um grupo topológico quando φ for um automorfismo contínuo. Além disso, escrevemos $H \leq_o G$ e $H \triangleleft_o G$ para denotar que H é um subgrupo aberto e subgrupo aberto normal de G, respectivamente.

Dizemos que um conjunto G é um *grupo compacto* quando G for um grupo topológico e G visto como um espaço topológico é um espaço compacto.

O seguinte resultado é bastante útil quando lidamos com grupos compactos.

Proposição 1.2.2 ([56], Lemma 0.3.1(c)) *Se G é um grupo compacto, então todo subgrupo aberto de G tem índice finito.*

A seguir definimos o que vem a ser um grupo profinito.

Definição 1.2.3 *Dizemos que um conjunto G é um grupo profinito se G é um grupo topológico compacto Hausdorff cujos subgrupos abertos formam uma base de vizinhanças da identidade.*

Note que todo grupo finito equipado com a topologia discreta é um grupo profinito.

De acordo com o próximo resultado, podemos caracterizar os grupos profinitos usando o conceito de *limite inverso* de um sistema inverso de grupos finitos. Para nossos propósitos esta abordagem é bastante útil. Para maiores detalhes sobre a definição e propriedades de limite inverso consulte [56] ou [42].

Dizemos que uma família $\mathcal{I}$ de subgrupos normais de um grupo arbitrário G é uma *base filtrada* se para cada par $K_1, K_2 \in \mathcal{I}$ existe um subgrupo $K_3 \in \mathcal{I}$ tal que $K_3 \subseteq K_1 \cap K_2$. Observe que se G é um grupo profinito então o conjunto $\{N : N \triangleleft_o G\}$ é uma base filtrada.

Teorema 1.2.4 ([56], Theorem 1.2.5) *Seja G um grupo profinito. Se $\mathcal{I}$ é uma base filtrada de subgrupos normais de G tal que $\bigcap_{N\in\mathcal{I}} N = 1$, então*

$$G \cong \varprojlim_{N\in\mathcal{I}} G/N$$

Aqui vale ressaltar que o limite inverso $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} G_i$ de um sistema inverso de grupos finitos $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ é isomorfo a um subgrupo fechado do produto cartesiano $\prod_{i\in\mathcal{I}} G_i$, onde consideramos os grupos finitos G_i equipados com a topologia discreta e o produto cartesiano com a topologia produto. Desta forma, se queremos mostrar que G pertence a uma determinada variedade, então é suficiente mostrar que cada grupo G_i pertence a tal variedade.

Além de grupos profinitos, usando o conceito de limite inverso, podemos definir o que é um grupo pro-$\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma classe de grupos finitos , da seguinte maneira.

Definição 1.2.5 *Sejam G um grupo topológico e $\mathcal{C}$ uma classe de grupos finitos fechada para subgrupos e produto direto. Dizemos que G é um grupo pro-$\mathcal{C}$ se G é isomorfo (como grupo topológico) a um limite inverso de grupos que pertence à classe $\mathcal{C}$, isto é, $G \cong \varprojlim G_i$, onde os subgrupos G_i pertencem à $\mathcal{C}$.*

Assim, um grupo profinito G é um grupo pro-$\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é a classe de todos os grupos finitos.

Observação 1.2.6 *1. Seja p um primo. Se $\mathcal{C}$ é a classe dos p-grupos finitos e G é um grupo pro-$\mathcal{C}$, então também dizemos que G é um grupo pro-p.*

2. *Se $\mathcal{C}$ é a classe dos grupos nilpotentes finitos e G é um grupo pro-$\mathcal{C}$, então também dizemos que G é um grupo pronilpotente. Quando for o caso, temos [56, Proposition 2.4.3] que G é isomorfo ao produto cartesiano de seus subgrupos de Sylow, que em particular, são grupos pro-p, onde p percorre todos os primos que dividem a ordem de G (no sentido de número supernatural).*

Proposição 1.2.7 ([56], Proposition 4.1.1) *Sejam G um grupo profinito, H um subgrupo de G e $X \subseteq H$. Então X gera H (topologicamente) se, e somente se, XN/N gera HN/N para todo $N \lhd_o G$.*

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema da Base de Burnside [43, 5.3.2]. No caso em que o grupo G é um grupo pro-p, a prova segue da Proposição 1.2.7. Podemos usar este resultado mais à frente sem citá-lo explicitamente.

Teorema 1.2.8 *Seja G um p-grupo finito (ou um grupo pro-p) gerado por um conjunto X. Se G é m-gerado, então existem elementos $x_1, \ldots, x_m \in X$ tais que $G = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$.*

O teorema a seguir é conhecido como Teorema da Categoria de Baire e é uma ferramenta muito útil para lidar com grupos profinitos.

Teorema 1.2.9 ([26], Theorem 35, p. 200) *Sejam G é um grupo profinito e $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ uma família enumerável de conjuntos fechados tal que $G = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Então pelo menos um subconjunto A_i contendo um conjunto aberto não vazio.*

Em verdade, o que vamos utilizar é uma consequência bem conhecida do teorema acima. Para conveniência do leitor vamos dar os principais passos de sua demonstração.

Corolário 1.2.10 *Sejam G um grupo profinito e $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ uma família enumerável de conjuntos fechados tal que $G = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Então, existem um inteiro positivo l, um elemento g em G e um subgrupo aberto H de G tal que $gH \subseteq A_l$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.2.9, existe um inteiro l tal que A_l contém um conjunto aberto não vazio U. Então, existe $g \in U$, tal que $g^{-1}U$ é aberto. Assim, [56, Lemma 0.1.1(c)] garante que $g^{-1}U = \cup_{i \geq 1} S_i$ onde cada conjunto S_i é simultaneamente aberto e fechado. Desta forma, existe um inteiro m tal que $1 \in S_m$. Então, pelo [56, Lemma

0.3.2], existe um subgrupo $H \leq_o G$ tal que $H \subseteq S_m$. Consequentemente, $gH \subseteq U \subseteq A_l$. ■

1.3 Condições de Engel

Sejam n um inteiro não negativo e G um grupo (possivelmente infinito). Se $x, y \in G$, o comutador $[x,_n y]$ é definido indutivamente pelas regras:

$$[x,_0 y] = x, \quad [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy, \quad [x,_n y] = [[x,_{n-1} y], y]$$

Um elemento $g \in G$ é dito um *elemento Engel* (à esquerda) se para cada $x \in G$ existe um inteiro n, possivelmente dependendo de g e x, tal que $[x,_n g] = 1$. Dizemos que G é um *grupo Engel* se todos elementos de G são elementos Engel. Se existe um inteiro n dependendo somente de g tal que $[x,_n g] = 1$ para todo $x \in G$, então dizemos que g é um *elemento n-Engel*. Por fim, dizemos que G é um *grupo n-Engel* se todos elementos de G são elementos n-Engel.

Observamos que no contexto de grupos finitos, todo grupo Engel é um grupo n-Engel para algum inteiro positivo n, onde n depende do grupo G. Entretanto, podemos construir grupos Engel infinitos que não são n-Engel para nenhum inteiro positivo n. De fato, seja $\pi = \{p_1, p_2, \ldots\}$ o conjunto de todos os números primos ordenados pela ordem usual e considere G_i o produto entrelaçado *standard* $C_{p_i} \wr C_{p_i}$, onde C_{p_i} é o grupo cíclico de ordem p_i. Podemos verificar que cada grupo $C_{p_i} \wr C_{p_i}$ é um p_i-grupo finito p_i-Engel (ver [35, Theorem 6.2]). Assim, o produto direto $\prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ é um grupo Engel, mas não é um grupo n-Engel para nenhum $n > 0$.

O próximo resultado mostra que a condição de Engel é equivalente a nilpotência em grupos finitos.

Teorema 1.3.1 (M. Zorn, [65]) *Todo grupo finito Engel é nilpotente.*

A condição de finitude no teorema acima não pode ser descartada, pois $C_p \wr C_p^{\infty}$ é um p-grupo $(p+1)$-Engel, mas não é nilpotente uma vez que tem centro trivial (ver [40, p. 58, 24.23]). Aqui, a notação C_p^{∞} representa o p-grupo abelino elementar de posto infinito.

O próximo resultado mostra que a condição de Engel é equivalente a nilpotência local de grupos profinitos.

Teorema 1.3.2 (J. S. Wilson, E. I. Zelmanov, [58]) *Um grupo profinito é localmente nilpotente, se e somente se, é Engel.*

E. I. Zelmanov observou em [63] que a classe de nilpotência de um grupo finito n-Engel é limitada em termo de n e do número de geradores de G.

Teorema 1.3.3 (E. I. Zelmanov, [63]) *Seja G é um grupo finito m-gerado n-Engel. Então a classe de nilpotência de G é $\{m, n\}$-limitada.*

Uma demonstração deste resultado pode ser obtida combinando o Teorema 2.1.11 com o Lema 2.2.9 do próximo capítulo.

Em trabalhos independentes, K. A. Hirsch [23] e B. I. Plotkin [41] provaram que o produto de dois subgrupos normais localmente nilpotentes é um subgrupo normal localmente nilpotente. Desta forma, em cada grupo G existe um único subgrupo normal maximal localmente nilpotente contendo todos os subgrupos normais localmente nilpotentes de G. Mais tarde, K. W. Gruenberg [17] nomeou tal subgrupo por *radical de Hirsch-Plotkin*. Denotaremos este subgrupo por $HP(G)$. Observamos que dado um grupo G todo elemento em $HP(G)$ é um elemento Engel de G. R. Baer provou que a inclusão contrária é produzida na classe dos grupos que satisfazem a condição maximal, isto é, se todo conjunto não vazio de subgrupos de G, parcialmente ordenado pela inclusão, possui um elemento maximal. Note que, todo grupo finito satisfaz a condição maximal.

Teorema 1.3.4 ([43], 12.3.7) *Seja G um grupo satisfazendo a condição maximal. Então $HP(G)$ é nilpotente. Além disso, o conjunto de todos elementos Engel coincide com o subgrupo $HP(G)$.*

Para finalizar a seção, citamos dois resultados importantes devido a K. W. Gruenberg.

Teorema 1.3.5 ([43], 12.3.3) *Seja G um grupo solúvel. Então o conjunto de todos elementos Engel coincide com o subgrupo $HP(G)$.*

Dizemos que um grupo é linear se ele é pode ser imerso em um grupo de matrizes com entradas em um corpo.

Teorema 1.3.6 (K. W. Gruenberg, [18], Theorem 0) *Seja G um grupo linear. Então o conjunto de todos elementos Engel coincide com o subgrupo $HP(G)$.*

1.4 p-Grupos Finitos *Powerful*

Ao longo deste trabalho precisaremos do conceito de p-grupos finitos *powerful*[1]. Estes grupos foram introduzidos por A. Lubotzky e A. Mann em [37]. A teoria dos p-grupos finitos *powerful* é governada pela interação entre os comutadores e as p-ésimas potências do grupo em questão. Veremos também que os p-grupos finitos *powerful* compartilham de muitas propriedades que os grupos abelianos possuem.

Nesta seção vamos tratar rapidamente sobre essa classe de grupos. Todos as demonstrações dos resultados citados nesta seção podem ser encontradas em [37], [30] e [12].

Dado um grupo G e um inteiro positivo i, reservamos as notações G^i para o subgrupo de G gerado por todas as i-ésimas potências de elementos em G e $\gamma_i(G)$ para o i-ésimo termo da série central inferior de G. Além disso, a letra p denotará um número primo.

Definição 1.4.1 *Dizemos que um p-grupo finito G é powerful se $G^p \geq [G, G]$ quando $p \neq 2$ (ou $G^4 \geq [G, G]$ quando $p = 2$).*

Observamos que $G^2 \geq [G, G]$ para todo 2-grupo G. Isto indica a necessidade de se fazer a distinção entre $p \neq 2$ e $p = 2$ na definição acima.

Note que todo p-grupo finito abeliano é *powerful*. Um exemplo simples de 2-grupo não *powerful* é o diedral de ordem 8, ou melhor, o grupo D_4 cuja apresentação é dada por

$$D_4 = \langle a, b | a^4 = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle.$$

Dada a natureza da Definição 1.4.1, não há motivos para esperar que subgrupo de p-grupo *powerful* é novamente p-grupo *powerful*, conforme mostra o exemplo a seguir.

[1]Evitamos fazer a tradução do termo *powerful p-group* para p-grupo potente, porque na literatura também existe outro conceito denominado *potent p-group*.

Considere o grupo $G = D_4 \times C_8$, onde C_8 é o grupo cíclico de ordem 8 gerado pelo elemento c. Considere o seguinte subgrupo normal $N = \langle a^2c^4 \rangle$ de G. Agora note que o grupo quociente $K = G/N$ é um 2-grupo *powerful* que contém o subgrupo $\langle aN, bN \rangle$ que por sua vez é isomorfo ao diedral D_4.

A seguir vamos enunciar resultados que serão úteis nas demonstrações dos Teorema A e C.

Proposição 1.4.2 ([37], Propositions 1.1, 1.7, 1.6, 4.1.6 e 4.1.7) *Seja G um p-grupo finito powerful.*

1. *Para cada inteiro positivo i, temos que os subgrupos $\gamma_i(G)$ e G^i também são powerful.*

2. *Se $n_1, \ldots, n_s$ são inteiros positivos, então $[G^{n_1}, \ldots, G^{n_s}] \leq \gamma_s(G)^{n_1 \cdots n_s}$.*

3. *Para cada inteiro positivo k, temos $G^{p^k} = \{g^{p^k} : g \in G\}$. Em particular, $(G^{p^i})^{p^j} = G^{p^{i+j}}$, para todo par de inteiros positivos i e j.*

Observamos que segue do item 3 acima que se G é um p-grupo finito *powerful* e k um inteiro positivo, então $G^{pk} = (G^p)^k$. Assim, se p^α é a maior p-potência na fatoração de k, então $G^k = G^{p^\alpha}$.

Proposição 1.4.3 ([37], Theorems 1.9, 1.11 e 1.12) *Seja $G = \langle g_1, \ldots, g_d \rangle$ um p-grupo finito powerful.*

1. *Para cada inteiro positivo k, temos $G^{p^k} = \langle g_1^{p^k}, \ldots, g_d^{p^k} \rangle$.*

2. *$G = \langle g_1 \rangle \cdots \langle g_d \rangle$, isto é, G é o produto dos subgrupos cíclicos $\langle g_i \rangle$, onde $i = 1, \ldots, d$.*

3. *G tem posto no máximo d.*

1.5 Automorfismos de Grupos

Relembramos que ao longo de todo trabalho, a menos que se afirme explicitamente o contrário, a letra A será reservada para indicar um subgrupo finito do grupo de automorfismos de um grupo G. Além disso, dizemos que A age *coprimamente* sobre um grupo finito G quando $(|A|,|G|) = 1$, e dizemos ainda que A age coprimamente sobre um grupo profinito G quando A é finito enquanto que G é isomorfo a um limite inverso de grupos finitos cujas ordens são relativamente primas com a ordem de A. Em ambos os casos acima, se $\varphi \in A$ dizemos que φ é um automorfismo coprimo.

A seguir, citamos um resultado bem conhecido que será muito requerido ao longo deste trabalho.

Lema 1.5.1 ([15] Theorem 5.3.16, 6.2.4, [44] Lemma 3.2) *Se A é um grupo de automorfismos abeliano não-cíclico agindo coprimamente sobre um grupo finito (ou profinito) G, então G é gerado pelos subgrupos da forma $C_G(a)$, onde $a \in A^{\#}$. Se, além disso, G for um p-grupo finito (ou grupo pro-p), então $G = \prod_{a\in A^{\#}} C_G(a)$.*

No lema acima a notação $\prod$ significa produto de grupos, onde se entende que previamente foi escolhido uma ordem para os subgrupos $C_G(a)$, com a percorrendo em $A^{\#}$.

Dados $\varphi \in Aut(G)$ e N um subgrupo normal φ-invariante de um grupo G, podemos construir um automorfismo $\overline{\varphi}$ sobre o quociente G/N de maneira natural, bastando para isso considerar a seguinte ação: $\overline{\varphi}(gN) = \varphi(g)N$. Tal automorfismo $\overline{\varphi}$ é chamado *automorfismo induzido* por φ sobre G/N e com abuso de notação, será indicado simplesmente por φ.

O próximo lema é crucial neste trabalho. Sob certas condições, ele relaciona os pontos fixos de um grupo de automorfismos com os pontos fixos do grupo de automorfismos induzidos.

Lema 1.5.2 ([15], 6.2.2(iv) e [44], Lemma 3.2) *Sejam G um grupo finito (ou profinito) e A é um grupo finito de automorfismos de G agindo coprimamente sobre G. Se N é um subgrupo normal A-invariante de G, então $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$.*

Para finalizar a seção, citamos dois resultados que serão requeridos na demonstração do Teorema C.

Teorema 1.5.3 (J. N. Ward, [54]) *Sejam q um primo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^3 agindo coprimamente sobre um grupo finito G e assuma que cada centralizador $C_G(a)$ é nilpotente para cada $a \in A^{\#}$. Então G é nilpotente.*

O próximo resultado é a versão quantitativa do teorema anterior.

Teorema 1.5.4 (P. Shumyatsky, [46]) *Sejam q um primo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^3 agindo coprimamente sobre um grupo finito G e assuma que cada centralizador $C_G(a)$ é nilpotente com classe no máximo c para cada $a \in A^\#$. Então G é nilpotente com classe $\{q, c\}$-limitada.*

Capítulo 2

Métodos Lie-teóricos

Este capítulo foi dividido em duas partes. Na primeira parte, apresentamos definições e algumas propriedades de álgebras de Lie. Também provamos resultados em anéis de Lie de interesse independente da teoria de grupos, como os Teoremas 2.1.6 e 2.1.11. Terminologias usadas e não definidas nesta parte podem ser encontradas em [30, 29] e [25]. Na segunda parte, apresentamos métodos Lie-teóricos e resultados relacionados que são usados ao longo do texto.

2.1 Anéis e Álgebras de Lie

Um *anel de Lie* L é um anel não associativo sem unidade cuja multiplicação (ou colchete de Lie) será denotada por $[\cdot, \cdot]$ e que satisfaz os axiomas a seguir:

- Anticomutatividade: $[a, a] = 0$, para todo $a \in L$;
- Identidade de Jacobi: $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$, para todos $a, b, c \in L$.

Seja K um anel associativo comutativo com unidade. Um anel de Lie L que também é um K-módulo (à esquerda) satisfazendo as igualdades:

- $k[a, b] = [ka, b] = [a, kb]$ para todos $a, b \in L$ e para todo $k \in K$,

é chamado *álgebra de Lie sobre* K, ou K*-álgebra de Lie*, ou simplesmente *álgebra de Lie* quando não houver risco de ambiguidade. Observamos que todo anel de Lie é também uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{Z}$. Ao longo desta seção, a menos que se afirme o contrário, K denotará um anel associativo comutativo com unidade e L uma K-álgebra de Lie.

Um exemplo muito importante de álgebra de Lie pode ser construído a partir de uma álgebra associativa como a seguir. Seja A uma K-álgebra associativa. Definindo um produto $[\cdot,\cdot]$ em A regido pela lei $[x,y]=xy-yx$, para cada par $x,y\in A$, podemos verificar A equipado com este produto é uma K-álgebra de Lie.

Seja $X\subseteq L$. Por um *comutador* (ou *monômio de Lie*) nos elementos de X entendemos cada elemento de L que pode ser obtido como um produto de Lie nos elementos do conjunto X com algum sistema de colchetes de Lie. Podemos ainda definir um *comutador de peso* $1,2,\ldots$ nos elementos de X da seguinte maneira. Os comutadores de peso 1 nos elementos de X são todos os elementos de X. Dizemos que l é um comutador de peso t nos elementos de X se $l=[l_1,l_2]$ onde l_1,l_2 são comutadores que têm pesos menores, digamos t_1,t_2 respectivamente, satisfazendo $t=t_1+t_2$.

A seguir, definimos uma importante classe de comutadores. Seja k um inteiro positivo e $x_1,\ldots,x_k,x,y$ elementos de L. Os comutadores $[x_1,\ldots,x_k]$ e $[x,_k y]$ são definidos recursivamente como se segue:

$$[x_1]=x_1;\quad [x_1,\ldots,x_k]=[[x_1,\ldots,x_{k-1}],x_k],$$

$$[x,_0 y]=x;\quad [x,_k y]=[[x,_{k-1} y],y].$$

Um elemento $a\in L$ é chamado *ad-nilpotente* se existe um inteiro positivo $n=n(a)$ tal que $[x,_n a]=0$ para todos $x\in L$. Se n é o menor inteiro positivo com esta propriedade, então dizemos que a é *ad-nilpotente com índice* n.

Uma K-*subálgebra* de Lie de L é um subconjunto fechado segundo todas as operações, e I é um *ideal* se I é um K-módulo e $[a,b]\in I$ para todo $a\in I$ e todo $b\in L$. Um K-*automorfismo* de L é uma bijeção de L nela mesma que é também um K-homomorfismo. Quando não houver risco de ambiguidade, podemos omitir a letra K nas definições acima.

A K-subálgebra de Lie gerada por um conjunto $X\subseteq L$ será denotada por $\langle X\rangle$ e constitui-se de todas as K-combinações lineares de todos os monômios de Lie nos elementos de X. Denotamos por $span_K\{X\}$ o K-módulo gerado por X. Além disso, para cada $n\in\mathbb{Z}$, denotamos por nX o conjunto $\{nx : x\in X\}$.

Sejam A, B subconjuntos de L. Definimos

$$[A, B] := span_K\{[a, b] : a \in A, b \in B\}.$$

Observamos ainda que se A e B são ideais então $[A, B]$ também é um ideal.

De uma forma geral, se $A_1, \dots, A_s$ são subconjuntos de L, então temos

$$[A_1, \dots, A_s] = [[A_1, A_2], A_3, \dots, A_s] = span_K\{[a_1, \dots, a_s] : a_i \in A_i\}.$$

Se todos os conjuntos $A_1, \dots, A_s$ são ideais, então $[A_1, \dots, A_s]$ também é um ideal. Assim como em grupos, um caso importante é quando $A_1 = \cdots = A_s = L$, onde usamos uma notação especial, a saber,

$$\gamma_s(L) = [\underbrace{L, \dots, L}_{s}].$$

Dizemos que L é nilpotente de classe c se $[x_1, \dots, x_{c+1}] = 0$ para todos elementos $x_1, \dots, x_{c+1} \in L$ (ou equivalentemente, se $\gamma_{c+1}(L) = 0$) e c é o menor inteiro satisfazendo esta propriedade. Análogo ao que foi feito para grupos, também podemos definir o conceito de solubilidade de uma álgebra de Lie (ver detalhes em [29, 30] ou [25]).

Denote por F a K-álgebra de Lie livre nos geradores livres $x_1, x_2 \dots$. Seja $f \equiv f(x_1, \dots, x_n)$ um elemento não nulo de F. Dizemos que uma K-álgebra de Lie L satisfaz a identidade polinomial $f \equiv 0$ se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para cada n-upla $a_1, \dots, a_n \in L$. Quando for o caso, também dizemos que L é PI (do termo em inglês *polynomial identity*). Dizemos ainda que a K-álgebra de Lie L é n-Engel se L satisfaz a identidade n-Engel $[x,_n y] \equiv 0$.

O próximo teorema é o principal resultado da parte Lie-teórica na solução positiva do Problema Restrito de Burnside. Ele foi primeiramente anunciado por E. I. Zelmanov em [61] e uma prova detalhada foi publicada recentemente em [64].

Teorema 2.1.1 (E. I. Zelmanov, [64]) *Seja L uma álgebra de Lie sobre um corpo e suponha que L satisfaz uma identidade polinomial. Se L pode ser gerada por um conjunto finito X tal que todo comutador nos elementos de X é ad-nilpotente, então L é nilpotente.*

O próximo teorema foi provado por Bahturin e Zaicev para gruposf finitos solúveis A [7] e depois estendido por Linchenko para o caso geral [36]. Ele fornece um importante critério para que uma álgebra de Lie satisfaça uma identidade polinomial.

Teorema 2.1.2 (Y.A. Bahturin - M. V. Zaicev, [7] V. Linchenko, [36]) *Seja L uma álgebra de Lie sobre um corpo K. Assuma que A é um grupo finito de automorfismos de L tal que a subálgebra dos pontos fixos $C_L(A)$ satisfaz uma identidade polinomial. Assuma além disso que a característica de K é 0 ou coprima com a ordem de A. Então L satisfaz uma identidade polinomial.*

Aqui, $C_L(A)$ significa a subálgebra dos pontos fixos de A em L, ou seja,

$$C_L(A) = \{l \in L | l^a = l, \text{ para todo } a \in A^{\#}\}.$$

Ambos os Teoremas 2.1.1 e 2.1.2 admitem as seguintes respectivas versões quantitativas.

Teorema 2.1.3 (E. I. Khukhro, P. Shumyatsky, [32, 45]) *Seja L uma álgebra de Lie sobre um corpo K gerada por $a_1, \ldots, a_m$. Suponha que L satisfaz uma identidade polinomial $f \equiv 0$ e que cada comutador nos geradores $a_1, \ldots, a_m$ é ad-nilpotente com índice no máximo n. Então L é nilpotente com classe $\{f, K, m, n\}$-limitada.*

Teorema 2.1.4 (E. I. Khukhro, P. Shumyatsky, [32, 45]) *Seja L uma álgebra de Lie como no Teorema 2.1.2 e assuma que $C_L(A)$ satisfaz a identidade polinomial $f \equiv 0$. Então L satisfaz uma identidade polinomial com grau $\{|A|, f, K\}$-limitado.*

Combinando os Teoremas 2.1.3 e 2.1.4 o seguinte corolário pode ser obtido.

Corolário 2.1.5 *Sejam L uma álgebra de Lie sobre um corpo K e A um grupo finito de automorfismos de L tal que $C_L(A)$ satisfaz a identidade polinomial $f \equiv 0$. Suponha que a característica de K é 0 ou coprima com a ordem de A. Assuma ainda que L é gerada por um conjunto A-invariante com m elementos em que cada comutador nos geradores é ad-nilpotente com índice no máximo n. Então L é nilpotente com classe $\{|A|, f, K, m, n\}$-limitada.*

Para nossos propósitos precisaremos trabalhar também com anéis de Lie e não apenas só com álgebras de Lie sobre um corpo. Assim, obtivemos o seguinte resultado para anéis de Lie, que é similar ao Corolário 2.1.5.

Teorema 2.1.6 *Sejam L um anel de Lie e A um grupo finito de automorfismos de L tal que $C_L(A)$ satisfaz a identidade polinomial $f \equiv 0$. Além disso, assuma que L é gerado por um conjunto A-invariante contendo m elementos tal que cada comutador nos geradores é ad-nilpotente com índice no máximo n. Então existem inteiros positivos e, c dependendo somente de $|A|, f, m$ e n, tais que $e\gamma_c(L) = 0$.*

Demonstração: Tendo em vista que o conjunto de geradores de L é A-invariante, todo automorfismo $\alpha \in A$ induz uma permutação nos geradores de L. Seja $L_{\mathbb{Q}}$ a álgebra de Lie livre nos geradores livres $x_1, \ldots, x_m$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais e seja $L_{\mathbb{Z}}$ o subanel de Lie de $L_{\mathbb{Q}}$ gerado por $x_1, \ldots, x_m$. Para cada $\alpha \in A$ seja ϕ_α o automorfismo de $L_{\mathbb{Q}}$ (ou de $L_{\mathbb{Z}}$) tal que $x_i^{\phi_\alpha} = x_{\pi(i)}$ onde π é a permutação que α induz sobre os geradores de L. A aplicação que leva $\alpha \in A$ para ϕ_α induz uma ação natural de A sobre $L_{\mathbb{Q}}$ (ou sobre $L_{\mathbb{Z}}$) por automorfismos.

Seja I o ideal de $L_{\mathbb{Z}}$ gerado por todos os valores de f em elementos de $C_{L_{\mathbb{Z}}}(A)$ e por todos elementos da forma $[u, {}_n v]$, onde u percorre $L_{\mathbb{Z}}$ e v percorre o conjunto de todos comutadores nos geradores $x_1, \ldots, x_m$. Pelo Corolário 2.1.5, $L_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}I$ é nilpotente com classe $\{|A|, f, m, n\}$-limitada, digamos $c - 1$.

Se $y_1, \ldots, y_c$ são elementos (não necessariamente distintos) do conjunto $\{x_1, \ldots, x_m\}$, segue que o comutador $[y_1, \ldots, y_c]$ pertence a $\mathbb{Q}I$ e por isso, ele pode ser escrito na forma

$$[y_1, \ldots, y_c] = \sum_i q_i f_i w_i,$$

onde q_i são números racionais, f_i são elementos da forma $[u, {}_n v]$ como definidos acima ou valores de f em elementos de $C_{L_{\mathbb{Z}}}(A)$ e $f_i w_i$ são elementos de $L_{\mathbb{Z}}$ obtidos multiplicando (várias vezes) f_i com produtos nos geradores livres $x_1, \ldots, x_m$.

Considere e sendo o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos coeficiente q_i tomados sobre todas as possíveis escolhas de $y_1, \ldots, y_c$ em $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Então $e[y_1, \ldots, y_c] \in I$ para toda escolha de $y_1, \ldots, y_c$. Portanto, $e\gamma_c(L_{\mathbb{Z}}) \leq I$.

Por fim, observamos que existe um homomorfismo natural de $L_{\mathbb{Z}}/I$ para L para o qual cada automorfismo ϕ_α induz o automorfismo α de L. Consequentemente, $e\gamma_c(L) = 0$. Isso completa a demonstração. ■

A seguir, citamos um famoso resultado devido a E. I. Zelmanov.

Teorema 2.1.7 (E. I. Zelmanov, [59]) *Toda álgebra de Lie sobre um corpo de característica zero satisfazendo a identidade n-Engel $[x,_n y] \equiv 0$ é nilpotente de classe $\{n\}$-limitada.*

Corolário 2.1.8 (R. G. Burns, O. Macedonska, Y. Medevedev, [11]) *Seja L um anel de Lie satisfazendo a condição n-Engel $[x,_n y] \equiv 0$. Então existem inteiros positivos e e c, dependendo somente de n, tais que $e\gamma_c(L) = 0$.*

Observamos que a identidade

$$\sum_{\sigma \in S_n} [y, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] \equiv 0$$

é conhecida como *identidade n-Engel linearizada.* Note que podemos concluir diretamente do corolário acima o seguinte resultado.

Corolário 2.1.9 *Seja L um anel de Lie satisfazendo a identidade n-Engel linearizada. Então existem inteiros positivos e e c, dependendo somente de n, tais que $e\gamma_c(L) = 0$. Em particular, a subálgebra eL é nilpotente com classe no máximo c.*

Mais adiante (ver Observação 2.2.10), combinando o corolário acima com métodos Lie-teóricos obtemos uma versão quantitativa do Teorema de Zorn 1.3.1, desde que os primos que dividem a ordem do grupo sejam suficientemente grandes. Este fato é bem conhecido, entretanto, aqui damos uma demonstração alternativa para ele.

O lema a seguir será muito útil nas demonstrações dos principais resultados envolvendo álgebras de Lie.

Lema 2.1.10 (E. I. Khukhro, P. Shumyatsky, [32]) *Sejam L uma álgebra de Lie e H uma subálgebra de L gerada por m elementos $h_1, \ldots, h_m$ tais que cada comutador nos geradores h_i é ad-nilpotente em L com índice no máximo n. Se H é nilpotente com classe c, então existe um inteiro positivo $\{c, m, n\}$-limitado u tal que $[L, \underbrace{H, \ldots, H}_{u}] = 0$.*

Em geral, o Teorema 2.1.1 não[1] pode ser estendido para o caso onde L é somente um anel de Lie (ao invés de uma álgebra de Lie sobre um corpo). Contudo, podemos estender tal resultado no caso particular onde a identidade polinomial $f \equiv 0$ é a identidade n-Engel linearizada. Mais precisamente, combinando os Teoremas 2.1.6 e 2.1.3 com o Lema 2.1.10 o seguinte resultado pode ser obtido.

Teorema 2.1.11 *Sejam F o anel de Lie livre em um conjunto enumerável de geradores livres e f um elemento de F (polinômio de Lie) tal que $f \notin pF$ para todo primo p. Suponha que L é um anel de Lie gerado pelos elementos $a_1, \ldots, a_m$ tal que cada comutador nos geradores é ad-nilpotente com índice no máximo n. Assuma que L satisfaz a identidade $f \equiv 0$. Então L é nilpotente com classe $\{f, m, n\}$-limitada.*

Seja L uma álgebra de Lie. Uma *derivação* de L é uma aplicação linear $\delta : L \to L$ satisfazendo $\delta([x, y]) = [x, \delta(y)] + [\delta(x), y]$. Fixando $y \in L$, o operador adjunto $ady : L \to L$ definido por $ady(x) = [x, y]$ é um exemplo de derivação que será útil na demostração abaixo.

Demonstração do Teorema 2.1.11: Pela Proposição 2.1.6 aplicada com $A = 1$, existem inteiros positivos e e c, dependendo somente de f, m e n, tais que $e\gamma_c(L) = 0$. Considere $M = eL$ e note que M é um ideal nilpotente de L cuja classe de nilpotência é limitada em termos de f, m e n. Seja d o comprimento derivado de M. Usaremos indução sobre d. Suponha primeiro que $M = 0$. Então L é uma soma direta de suas componentes primárias L_p, onde p percorre os primos divisores de e. Assim, é suficiente mostrar que a classe de nilpotência de cada L_p é limitada em termos de f, m e n e então, sem perda de generalidade, podemos assumir que $e = p^k$ para um primo p. Note que k é um número $\{f, m, n\}$-limitado. O quociente L/pL pode ser visto como uma álgebra de Lie sobre o corpo com p elementos e então ele tem classe de nilpotência $\{f, m, n\}$-limitada pelo Teorema 2.1.3. Consequentemente, existe um número $\{f, m, n\}$-limitado c_1 tal que $\gamma_{c_1}(L) \leq pL$. Isso implica que $\gamma_{kc_1}(L) \leq p^k L = 0$.

Assuma agora que $M \neq 0$ e seja D o último termo não trivial da série derivada de M. Por indução, $\bar{L} = L/D$ é nilpotente com classe $\{f, m, n\}$-limitada. O anel $\bar{L}$ age naturalmente sobre D por derivações e assim podemos construir o produto semidireto

[1] Veja na próxima seção a construção de um anel de Lie associado a um grupo usando a série central inferior e pense no anel de Lie associado ao primeiro grupo de Grigorchuk.

de $\overline{L}$ e D. Com isso, o Lema 2.1.10 mostra que para algum número $\{f,m,n\}$-limitado u temos que $[D, \underbrace{\bar{L},\dots,\bar{L}}_{u}] = 0$. Logo, podemos concluir que L é nilpotente com classe $\{f,m,n\}$-limitada. Isso completa a demonstração. ■

Estendendo o anel base

Sejam L um anel de Lie, A um grupo finito de automorfismos de L e $\varphi \in A$ um automorfismo de ordem n. Seja ω uma raiz primitiva n-ésima da unidade. Podemos considerar o anel de Lie $\overline{L} = L \otimes \mathbb{Z}[\omega]$ com φ (ou A) agindo naturalmente sobre $\overline{L}$. O subgrupo aditivo do anel de Lie $\overline{L}$ definido por

$$^{i}\overline{L} = \{l \in \overline{L} : l^{\varphi} = \omega^{i} l\}$$

é chamado φ-componente com respeito a ω^{i}. Os elementos das φ-componentes são ditos φ-homogêneos.

Lema 2.1.12 ([29], Lemma 4.1.1) *Mantendo a terminologia acima, temos:*

1. *A seguinte inclusão é produzida*

$$n\overline{L} \subseteq^{0} \overline{L} +^{1} \overline{L} + \cdots +^{n-1} \overline{L}.$$

2. *Se $l_0 + l_1 + \cdots + l_{n-1} = 0$, onde $l_i \in^{i} \overline{L}$, então $nl_i = 0$, para todo $i \leq n-1$.*

3. *Se o grupo aditivo de L é livre de n-torção, isto é , se para todo $l \in L$ a igualdade $nl = 0$ implica que $l = 0$, então a soma das φ-componentes no item (1) é soma direta.*

Observamos que $[^{i}\overline{L},^{j}\overline{L}] \subseteq^{i+j} \overline{L}$, onde $i+j$ é calculado módulo n. Em particular, a soma $^{0}\overline{L} +^{1} \overline{L} + \cdots +^{n-1} \overline{L}$ é um subanel de $\overline{L}$.

Ainda mantendo a terminologia acima, definimos o conceito de autovetor comum para A no anel de Lie $\overline{L}$ como a seguir.

Definição 2.1.13 *Um elemento $x \in \overline{L}$ será chamado "autovetor" comum para A se para cada $a \in A$ existe um inteiro não negativo s tal que $x^{a} = \omega^{s} x$.*

Observamos que se $x, y \in L$ são autovetores comuns para A, então o comutador $[x, y]$ também é um autovetor comum para A.

Por fim, quando estivermos trabalhando com uma álgebra de Lie sobre um corpo iremos precisar do seguinte resultado.

Teorema 2.1.14 ([24], Theorem 6.5.8) *Sejam $T_1, \ldots, T_n$ operadores lineares diagonalizáveis sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Se os operadores $T_1, \ldots, T_n$ comutam dois a dois, então existe uma base de V na qual cada vetor é um autovetor para cada um dos operadores $T_1, \ldots, T_n$.*

2.2 Anel de Lie Associado a um Grupo

Dado um grupo G, existem muitas maneiras de associar um anel de Lie a G (veja [25, 29, 45]). Para conveniência do leitor iremos descrever brevemente as construções que usamos neste trabalho. Para nossos propósitos é suficiente considerar que G é um grupo finito ou profinito.

Uma série de subgrupos para G

$$G = G_1 \geq G_2 \geq \cdots \qquad (*)$$

é dita uma *N-série* se ela satisfaz a seguinte condição $[G_i, G_j] \leq G_{i+j}$ para todos i, j. Note que cada N-série é central, ou seja, $G_i/G_{i+1} \leq Z(G/G_{i+1})$ para todo i.

Dada uma N-série $(*)$, considere $L^*(G)$ sendo a uma soma direta dos grupos abelianos $L_i^* := G_i/G_{i+1}$. Para cada $i \geq 1$, o grupo abeliano L_i^* é dito a i-ésima componente homogênea e seus elementos são ditos elementos homogêneos. Por um lado, a comutação em G induz uma operação binária $[,]$ (comumente chamada *produto de Lie*) em $L^*(G)$. Para elementos homogêneos $xG_{i+1} \in L_i^*, yG_{j+1} \in L_j^*$ a operação é definida por

$$[xG_{i+1}, yG_{j+1}] = [x, y]G_{i+j+1} \in L_{i+j}^*$$

e então estendida para elementos arbitrários de $L^*(G)$ por linearidade. Por outro lado, a operação do grupo G induz naturalmente uma operação binária $+$ em $L^*(G)$ da seguinte forma:

$$xG_i, yG_i \in G_i/G_{i+1}, \quad xG_i + yG_i = xyG_i.$$

Observamos que colchetes são usados tanto para comutador no grupo G quanto para produto de Lie em $L^*(G)$.

Usando leis de comutadores de grupos podemos verificar que as operações definidas acima estão bem definidas e que $L^*(G)$ equipado com as operações $+$ e $[,]$ é um anel de Lie (consulte [30, Theorem 6.2] para detalhes). Assim, $L^*(G)$ é chamado de *anel de Lie associado a G usando a série* $(*)$.

Uma N-série $(*)$ é chamada de *N_p-série* se $G_i^p \leq G_{pi}$ para todo $i \geq 1$. Um exemplo importante de uma N_p-série é o caso onde a série $(*)$ é a *série central p-dimensional*, também conhecida como *série de Zassenhaus-Jennings-Lazard*, cuja série é dada pelos subgrupos

$$D_i(G) := \prod_{jp^k \geq i} \gamma_j(G)^{p^k},$$

para cada $i \geq 1$ (consulte [25, p. 250] para mais detalhes). Observe que se todos os quocientes G_i/G_{i+1} de uma N-series $(*)$ têm expoente primo p, então $L^*(G)$ pode ser visto como uma álgebra de Lie sobre o corpo com p elementos $\mathbb{F}_p$.

No caso onde a série $(*)$ é a série central inferior de G escreveremos $L(G)$ para o anel de Lie associado a G. No caso em que a série $(*)$ é a série central p-dimensional de G escreveremos $L_p(G)$ para a subálgebra gerada pela primeira componente homogênea G_1/G_2 da $\mathbb{F}_p$-álgebra de Lie associada a G.

Seja H um subgrupo G. Para uma N-série (N_p-série) como $(*)$ escrevemos

$$L^*(G,H) := \bigoplus_{j\geq 1} \frac{(G_j \cap H)G_{j+1}}{G_{j+1}}.$$

Observação 2.2.1 *Observamos que $L^*(G,H)$ é um subanel (subálgebra) de $L^*(G)$. Além disso, $L^*(G,H)$ é isomorfo ao anel (álgebra) de Lie associada a H usando a N-série (N_p-série) $H = H \cap G_1 \geq H \cap G_2 \geq \cdots$.*

Quando a série $(*)$ é a série central p-dimensional, nós escrevemos

$$L_p(G,H) := L_p(G) \cap L^*(G,H).$$

De maneira natural cada automorfismo de G induz um automorfismo sobre $L^*(G)$. Se G é finito (ou profinito) e α é um automorfismo coprimo de G, então o subanel (subálgebra) dos pontos fixos de α em $L^*(G)$ é isomorfa ao anel (álgebra) de Lie associada ao grupo $C_G(\alpha)$ via a N-série formada pela interseções de $C_G(\alpha)$ com a N-série (N_p-série) (*) (consulte [45] para mais detalhes). Mais precisamente, temos o seguinte.

Observação 2.2.2 *Se o grupo A age coprimamente sobre G, então*

$$L^*(G, C_G(A)) = C_{L^*(G)}(A) \text{ e } L_p(G, C_G(A)) = C_{L_p(G)}(A).$$

O resultado a seguir é bastante conhecido e poderá ser utilizado sem uma referência especial.

Teorema 2.2.3 ([30], Theorem 6.9, Lemma 6.7) *Suponha que G é um grupo nilpotente.*

1. *Então $L(G)$ é nilpotente e a classe de nilpotência de $L(G)$ é igual a classe de G.*

2. *Se G é finito, então $|G| = |L(G)|$.*

3. *$L(G)$ é gerado por $G/\gamma_2(G)$.*

4. *Seja c um inteiro positivo. Então $\gamma_c(L(G)) = \bigoplus_{i\geq c} \gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$.*

O próximo resultado, sob certas condições, mostra as informações que podem ser obtidas de um p-grupo finito G sabendo que a álgebra de Lie $L_p(G)$ é nilpotente.

Teorema 2.2.4 (E. I. Khukhro, P. Shumyatsky, [32]) *Seja G um p-grupo finito d-gerado. Se $L_p(G)$ é nilpotente de classe c, então G possui um subgrupo característico powerful com índice $\{p, c, d\}$-limitado.*

Seja G um grupo profinito. Lembramos que para cada $H \leq G$, denotamos por $d(H)$ o menor número de elementos necessários para gerar H. Dizemos que G tem *posto finito* se

$$rk(G) := max\{d(H) : H \leq G\} < \infty.$$

Proposição 2.2.5 ([12], Proposition 3.11) *Seja G um grupo profinito. Então*

$$rk(G) = max\{rk(G/N) : N \lhd_o G\}.$$

Teorema 2.2.6 ([12], Theorem 7.19) *Todo grupo pro-p de posto finito é linear.*

O próximo resultado é bem conhecido e pode ser obtido combinando um teorema de Lazard (ver detalhes [33, A.1 in Appendice e Sections 3.1 e 3.4 no Ch. III] ou [12, 1.(k) e 1.(o) no Interlude A]) com um teorema devido à Lubotzky-Mann [37, Theorem 2.1]. Contudo, aqui fornecemos uma demonstração muito simples para tal resultado.

Teorema 2.2.7 *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado. Se $L_p(G)$ é nilpotente, então G é um grupo linear.*

Demonstração: Assuma que G é um grupo pro-p gerado por d elementos tal que $L_p(G)$ é nilpotente de classe c. Seja $N \lhd_o G$. Então G/N é um p-grupo finito d-gerado tal que $L_p(G/N)$ é nilpotente com classe no máximo c. Com isso, podemos concluir do Teorema 2.2.4 que G/N possui um subgrupo H/N característico *powerful* com índice $\{p, c, d\}$-limitado. Combinando o Teorema 1.1.1 com a Proposição 1.4.3(3) decorre que H/N tem posto $\{p, c, d\}$-limitado. Pela Proposição 1.1.2, podemos deduzir que G/N tem posto $\{p, c, d\}$-limitado. Uma vez que este argumento pode ser repetido para cada subgrupo normal aberto, podemos concluir da Proposição 2.2.5 que G tem posto finito. Logo o resultado segue pelo Teorema 2.2.6. ■

O próximo resultado é um fato bem conhecido e que será útil no decorrer deste trabalho. Para conveniência do leitor, iremos descrever alguns passos da sua demonstração, a qual usa o seguinte fato.

Observação 2.2.8 *Sejam n um inteiro positivo e F o grupo livre nos geradores livres x, y, z. Por indução sobre n podemos verificar a seguinte igualdade:*

$$[xz, {}_n y] = [x, {}_n y][z, {}_n y]v(x, y, z)$$

onde v é o produto de comutadores de peso no mínimo $n+2$, sendo que tais comutadores envolvem as variáveis x, z e envolve ainda y pelo menos n vezes.

Lema 2.2.9 *Seja G é um grupo n-Engel. Se $G = G_1 \geq G_3 \geq \cdots$ é uma N-série para G, então o anel de Lie $L^*(G)$ satisfaz a identidade n-Engel linearizada*

$$\sum_{\sigma \in S_n} [y, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] \equiv 0. \tag{2.1}$$

Demonstração: Sejam $y, x_1, \ldots, x_n \in G$. Expandindo a equação abaixo

$$1 = [y, \underbrace{x_1 \cdots x_n, \ldots, x_1 \cdots x_n}_{n}]$$

obtemos

$$1 = \left(\prod_{\sigma \in S_n} [y, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] \right) .z$$

onde z é um produto de comutadores envolvendo todos $y, x_1, \ldots, x_n$ e pelo menos um deles aparece no mínimo duas vezes. Visto que a identidade (2.1) é multilinear, para mostrar que $L^*(G)$ satisfaz (2.1) é suficiente mostrar que o conjunto de todos elementos homogêneos satisfazem tal identidade. Para isso, seja $L_i^* = G_i/G_{i+1}$ para todo inteiro i e escolha arbitrariamente os elementos $v = bG_{j+1} \in L_j^*, u_1 = a_1 G_{i_1+1} \in L_{i_1}^*, \ldots, u_n = a_n G_{i_n+1} \in L_{i_n}^*$. Para cada $\sigma \in S_n$ o produto de Lie $[v, u_1, \ldots, u_n]$ pertence a $L_{j+i_1+\cdots+i_n+1}^*$. Portanto

$$\sum_{\sigma \in S_n} [v, u_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] = \overbrace{\prod_{\sigma \in S_n} [y, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]}^{1} G_{j+i_1+\cdots+i_n+1} = 0.$$

Isso completa a demonstração. ■

Observação 2.2.10 *Seja G é um grupo finito n-Engel. Decorre do Teorema 1.3.1 que G é nilpotente. Além disso, pelo lema acima $L(G)$ satisfaz a identidade n-Engel linearizada. O Corolário 2.1.9 garante que existem inteiros positivos e, c dependendo somente de n, tais que $e\gamma_c(L(G)) = 0$. Assim, se $\pi(|G|) \cap \pi(e) = \emptyset$, então G é nilpotente de classe no máximo $c - 1$. Em particular, a classe de nilpotência de um grupo finito n-Engel G é n-limitada se os primos que dividem $|G|$ são suficientemente grandes.*

O próximo lema é essencialmente devido a J. S. Wilson e E. I. Zelmanov.

Lema 2.2.11 (J. S. Wilson, E.I. Zelmanov, [58]) *Seja G um grupo profinito e $g \in G$ um elemento Engel. Seja $L^*(G)$ a álgebra de Lie associada a G usando a série central p-dimensional para algum primo p. Então a imagem de g em $L^*(G)$ é ad-nilpotente.*

No lema acima, a expressão "a imagem de g em $L^*(G)$" significa o elemento $gD_{i+1} \in L^*(G)$ tal que $g \in D_i \backslash D_{i+1}$.

Capítulo 3

Principais Resultados

Neste capítulo iremos lidar com as demonstrações dos Teoremas A, B e C, citados na introdução.

3.1 Demonstração do Teorema A

Nesta seção iremos nos concentrar na demonstração do Teorema A. Para conveniência do leitor enunciamos tal resultado a seguir.

Teorema A. *Sejam q um número primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^2. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo finito G e assuma que todo elemento em $C_G(a)$ é n-Engel em G para cada $a \in A^{\#}$. Então G é k-Engel para algum inteiro positivo $\{n, q\}$-limitado k.*

O lema abaixo é a versão quantitativa do Teorema 1.3.5 e será útil na demonstração do Teorema A.

Lema 3.1.1 *Seja G um grupo solúvel com comprimento derivado d. Se G pode ser gerado por m elementos n-Engel, então G é nilpotente com classe $\{d, m, n\}$-limitada.*

Demonstração: Primeiramente, note que o Teorema 1.3.5 garante que cada grupo satisfazendo as hipóteses deste lema é nilpotente. No que se segue, suponha por absurdo que o lema é falso. Então, para cada inteiro positivo i podemos escolher um grupo G_i satisfazendo as hipóteses do lema e tendo classe de nilpotência no mínimo i. Em cada grupo G_i fixamos geradores $g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{im}$ que são elementos n-Engel. No produto cartesiano dos grupos G_i considere o subgrupo D gerado pelos m elementos abaixo

$$g_1 = (g_{11}, g_{21}, \ldots), \ \ldots, g_m = (g_{1m}, g_{2m} \ldots).$$

Por construção D é um grupo solúvel gerado por m elementos n-Engel. Logo, o Teorema 1.3.5 assegura que D é nilpotente, digamos de classe c. Entretanto, observamos que cada um dos grupos G_i é isomorfo a um quociente de D. Desta forma, cada um dos grupos G_i é nilpotente com classe no máximo c. Mas isso contradiz a escolha dos grupos G_i, onde $i \geq 1$. ■

Para provar o Teorema A, iremos precisar do seguinte resultado sobre anéis de Lie associados a grupos. Lembramos que $L(G)$ é o anel de Lie associado a G usando a série central inferior e $L_p(G)$ é a subálgebra de Lie gerada pela primeira componente homogênea da álgebra de Lie associada a G usando a série central p-dimensional.

Proposição 3.1.2 *Seja G um grupo m-gerado satisfazendo as hipóteses do Teorema A. Então:*

1. *Existem números inteiros positivos e, c dependendo somente de m, n e q, tais que $e\gamma_c(L(G)) = 0$.*
2. *Seja p um número primo que divide a ordem de G. Então $L_p(G)$ é nilpotente com classe $\{p, q, m, n\}$-limitada.*

Demonstração: Inicialmente vamos provar o item (1). A grosso modo, o roteiro da prova é estender o anel $L(G)$ adequadamente para que possamos aplicar a Proposição 2.1.6.

Segue pelo Lema 1.5.1 que G é gerado pelos centralizadores $C_G(a)$, onde $a \in A^{\#}$. Por hipótese, todos elementos nos centralizadores $C_G(a)$ são Engel. Combinando estes dois fatos com o Teorema 1.3.4 resulta que G é nilpotente. Portanto G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow. Consequentemente, sem perda de generalidade, podemos assumir que G é um p-grupo finito. Sejam $\gamma_j = \gamma_j(G)$, $L_j = \gamma_j/\gamma_{j+1}$ e

$$L = L(G) = \bigoplus_{j \geq 1} L_j.$$

Considere $A_1, \dots, A_{q+1}$ sendo todos os $q+1$ subgrupos maximais distintos de A. Considere ainda $L_{ij} = C_{L_j}(A_i)$. Segue pelo Lema 1.5.1 que cada subgrupo A-invariante é gerado pelos centralizadores dos subgrupos A_i's. Por esse motivo, para cada j temos

$$L_j = \sum_{i=1}^{q+1} L_{ij}.$$

Além disso, segue pelo Lema 1.5.2 que para cada $l \in L_{ij}$ existe um elemento $x \in \gamma_j \cap C_G(A_i)$ tal que $l = x\gamma_{j+1}$. Por hipótese, x é um elemento n-Engel em G, logo l é ad-nilpotente em L de índice no máximo n. Assim,

$$\text{cada elemento em } L_{ij} \text{ é ad-nilpotente em } L \text{ com índice no máximo } n. \tag{3.1}$$

Por hipótese, G é gerado por m elementos e portanto o grupo aditivo L_1 também é gerado por m elementos. Combinando isso com os Teoremas 2.2.3(3) e 1.2.8, o anel de Lie L é gerado por no máximo m elementos ad-nilpotentes, todos eles pertencendo a L_{i1} para algum i. Entretanto, não podemos garantir que todo comutador de Lie nos geradores de L está novamente em algum L_{ij} e consequentemente será também ad-nilpotente.

Para superar esta dificuldade vamos estender o anel base de L por uma raiz da unidade. Seja ω uma raiz primitiva q-ésima da unidade e considere o produto tensorial $\overline{L} = L \otimes \mathbb{Z}[\omega]$. A ideia é trocar L por $\overline{L}$ e provar que existem inteiros positivos e, c dependendo somente de m, n e q, tais que $e\gamma_c(\overline{L}) = 0$, o que implicará $e\gamma_c(L(G)) = 0$, pois existe uma imersão natural do anel L no anel $\overline{L}$ bastando para isso identificar L com $L \otimes 1$. Observamos ainda que se um elemento $l \in L$ é ad-nilpotente em L com índice, digamos r, então o "mesmo" elemento $l \otimes 1$ é ad-nilpotente em $\overline{L}$ com mesmo índice r.

Seja $\overline{L}_j = L_j \otimes \mathbb{Z}[\omega]$ para $j = 1, 2, \dots$. Consideraremos $\overline{L}$ como um anel de Lie. Desta forma, $\overline{L} = \langle \overline{L}_1 \rangle$. Visto que o subgrupo aditivo L_1 é gerado por m elementos, resulta que o subgrupo aditivo $\overline{L}_1$ é gerado por $(q-1)m$ elementos.

O grupo A age sobre $\overline{L}$ de maneira natural e temos ainda que $\overline{L}_{ij} = C_{\overline{L}_j}(A_i)$, onde $\overline{L}_{ij} = L_{ij} \otimes \mathbb{Z}[\omega]$. Iremos provar agora a seguinte afirmação.

$$\text{Cada elemento em } \overline{L}_{ij} \text{ é ad-nilpotente em } \overline{L} \text{ com índice } \{n, q\} - \text{limitado.} \qquad (3.2)$$

De fato, escolha $y \in \overline{L}_{ij}$ e escreva

$$y = x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \cdots + \omega^{q-2} x_{q-2}$$

para elementos adequados $x_s \in L_{ij}$. Em vista do fato (3.1) temos que cada somando $\omega^s x_s$ é ad-nilpotente em $\overline{L}$ com índice no máximo n. Seja H o subanel de $\overline{L}$ gerado pelos elementos $x_0, \omega x_1, \omega^2 x_2, \ldots, \omega^{q-2} x_{q-2}$. Vamos provar que H é nilpotente com classe $\{n, q\}$-limitada. Note que $H \leq C_{\overline{L}}(A_i)$ uma vez que $\omega^s x_s \in C_{\overline{L}}(A_i)$ para todo $s = 1, \ldots, q-2$. Um comutador de peso t nos elementos $x_0, \omega x_1, \omega^2 x_2, \ldots, \omega^{q-2} x_{q-2}$ tem a forma $\omega^t x$, para algum $x \in L_{ij_0}$, onde $j_0 = tj$. Por (3.1), o elemento x é ad-nilpotente em L com índice no máximo n e portanto podemos deduzir que $\omega^t x$ é ad-nilpotente em $\overline{L}$ com índice no máximo n. Tendo em vista que $C_G(A_i)$ é n-Engel, podemos combinar o Lema 2.2.9 com as Observações 2.2.1 e 2.2.2 para obter que $C_L(A_i)$ satisfaz a identidade n-Engel linearizada. Esta identidade é multilinear e por isso ela também é satisfeita por

$$C_L(A_i) \otimes \mathbb{Z}[\omega] = C_{\overline{L}}(A_i).$$

Visto que $H \leq C_{\overline{L}}(A_i)$, segue que a identidade também é satisfeita por H. Posto isso, o Teorema 2.1.11 garante que H é nilpotente com classe $\{n, q\}$-limitada. Pelo Lema 2.1.10, existe um inteiro positivo v, dependendo somente de n e q, tal que

$$[\overline{L}, \underbrace{H, \ldots, H}_{v}] = 0.$$

Visto que $y \in H$, podemos concluir que y é ad-nilpotente em $\overline{L}$ com índice $\{n, q\}$-limitado. Isto prova a afirmação (3.2).

Relembre que um elemento $x \in \overline{L}$ será chamado "autovetor" comum para A se para cada $a \in A$ existe um inteiro não negativo s tal que $x^a = \omega^s x$. Tendo em vista que $(|A|, |G|) = 1$, o Lema 2.1.12 assegura que o grupo aditivo do anel de Lie $\overline{L}$ é gerado por autovetores comuns para A. Já observamos que o subgrupo aditivo $\overline{L}_1$ é gerado por $(q-1)m$ elementos. Consequentemente, o anel de Lie $\overline{L}$ é gerado por no máximo $(q-1)qm$ autovetores comuns para A. Também é verdade que o anel de Lie $\overline{L}$ é gerado por um conjunto A-invariante de no máximo $(q-1)q^3m$ autovetores comuns para A.

Visto que A é não-cíclico, cada autovetor comum para A está contido no centralizador $C_{\overline{L}}(A_i)$ para algum i. Além disso, cada comutador nos autovetores comuns para A é novamente um autovetor comum para A. Desta forma, se $l_1, \ldots, l_s \in \overline{L}_1$ são autovetores comum para A e que geram $\overline{L}$, então cada comutador nestes geradores pertence a algum $\overline{L}_{ij}$ e portanto, pela afirmação (3.2), é ad-nilpotente em $\overline{L}$ com índice $\{n, q\}$-limitado. Além disso, como mencionado acima, para cada i, a subálgebra $C_{\overline{L}}(A_i)$ satisfaz a identidade n-Engel linearizada. Portanto, pela Proposição 2.1.6, existem inteiros positivos e, c dependendo somente de m, n e q tais que $e\gamma_c(\overline{L}) = 0$. Consequentemente, $e\gamma_c(L) = 0$. Isso completa a demonstração do item (1).

As demonstrações das afirmações (1) e (2) são similares. A demonstração do item (2) pode ser obtida simplesmente trocando todo recurso da Proposição 2.1.6 na prova do item (1) pelo recurso do Corolário 2.1.5. ■

Agora estamos prontos para lidar com a demonstração do Teorema A.

Demonstração do Teorema A: Seja G um grupo satisfazendo as hipóteses do Teorema A. Queremos mostrar que G é k-Engel para algum número $\{n, q\}$-limitado k. Segue pelo Lema 1.5.1 que G é gerado pelos centralizadores $C_G(a)$, onde $a \in A^{\#}$. Por hipótese, todos elementos nos centralizadores $C_G(a)$ são Engel. Combinando estes dois fatos com o Teorema 1.3.4 resulta que G é nilpotente. Escolha arbitrariamente $x, y \in G$. Para concluir a demonstração é suficiente mostrar que o subgrupo $\langle x, y\rangle$ é nilpotente com classe $\{n, q\}$-limitada. Posto isso, sem perda de generalidade, podemos assumir que nenhum subgrupo próprio A-invariante de G contém ambos elementos x e y. Em outras palavras, assumiremos que

$$G = \langle x^A, y^A \rangle.$$

Portanto, o grupo G pode ser gerado por $2q^2$ elementos. Todo subgrupo de Sylow de G satisfaz estas hipóteses e portanto sem perda de generalidade podemos assumir que G é um p-grupo para algum primo $p \neq q$. Combinando o Lema 1.5.1 com o Teorema 1.2.8

podemos assumir além disso que G é gerado por no máximo $2q^2$ elementos n-Engel. Tendo em vista o Lema 3.1.1, para completar a demonstração basta mostrar que o comprimento derivado de G é $\{n,q\}$-limitado.

Seja $L = L(G)$. Pela Proposição 3.1.2(1), existem inteiros positivos e, c dependendo somente de n e q tais que $e\gamma_c(L) = 0$. Se p não divide e, temos $\gamma_c(L) = 0$ e então o Teorema 2.2.3(1) garante que G é nilpotente com classe no máximo $c-1$. Portanto, neste caso a prova está completa. Assim, no que se segue podemos assumir que p divide e.

Prosseguiremos a demonstração considerando primeiramente o caso particular em que G é um p-grupo *powerful*. Seja $R = G^e$ e assuma que $R \neq 1$. Pela Proposição 1.4.2(3) podemos supor que e é uma p-potência. Além disso, pela Proposição 1.4.2(1), R é *powerful*. Observamos que aplicando os itens (2) e (3) do Teorema 1.4.2 podemos deduzir que, se $p \neq 2$, então temos

$$[R,R] \leq [G,G]^{e^2} \leq G^{pe^2} = R^{pe},$$

e se $p = 2$, temos

$$[R,R] \leq R^{4e}.$$

Seja $L_1 = L(R)$. Combinando as Proposições 1.4.3(3) e 3.1.2(1) podemos deduzir que $e\gamma_c(L_1) = 0$. Com isso, o Teorema 2.2.3(4) implica que $\gamma_c(R)^e \leq \gamma_{c+1}(R)$. Tendo em vista que R é *powerful*, se $p \neq 2$, obtemos que

$$\gamma_c(R)^e \leq \gamma_{c+1}(R) = [R', \underbrace{R, \ldots, R}_{c-1}] \leq [R^{pe}, \underbrace{R, \ldots, R}_{c-1}] \leq \gamma_c(R)^{pe},$$

e se $p = 2$, obtemos que

$$\gamma_c(R)^e \leq \gamma_c(R)^{4e}.$$

Consequentemente, em ambos os casos temos $\gamma_c(R)^e = 1$, pois R é um p-grupo. Pelas Proposições 1.4.2(1) e 1.4.3(3), $\gamma_c(R)$ é *powerful* e gerado por no máximo $2q^2$ elementos, logo podemos deduzir da Proposição 1.4.3(2) que $\gamma_c(R)$ é um produto de no máximo $2q^2$ subgrupos cíclicos. Por isso, a ordem de $\gamma_c(R)$ é no máximo e^{2q^2}. Logo, o comprimento derivado de R é $\{n,q\}$-limitado. Relembre que G é um p-grupo *powerful* e $R = G^e$.

Repetindo o mesmo argumento para o grupo quociente G/R decorre que o comprimento derivado de G é $\{n, q\}$-limitado. Deste modo, provamos o resultado desejado no caso onde G é um p-grupo *powerful*.

Finalmente, vamos provar o caso geral. Seja G um p-grupo finito gerado por no máximo $2q^2$ elementos n-Engel satisfazendo as hipóteses do Teorema A. Pela Proposição 3.1.2(2) a álgebra de Lie $L_p(G)$ é nilpotente com classe $\{n, q\}$-limitada. Com isso, o Teorema 2.2.4 assegura que G possui um subgrupo *powerful* característico, digamos K, com índice $\{n, q\}$-limitado. Pelo que vimos acima, o comprimento derivado de K é $\{n, q\}$-limitado. Consequentemente, o comprimento derivado de G é $\{n, q\}$-limitado também. Isto completa a demonstração. ■

3.2 Demonstração do Teorema B

Nesta seção iremos lidar com a demonstração do Teorema B que é a versão profinita não quantitativa análoga ao Teorema A. Para conveniência do leitor enunciamos tal resultado a seguir.

Teorema B *Sejam q um número primo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^2. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo profinito G e assuma que todos elementos em $C_G(a)$ são Engel em G para cada $a \in A^\#$. Então G é localmente nilpotente.*

Um resultado necessário para provar o Teorema B é o seguinte.

Proposição 3.2.1 (C. Acciarri e P. Shumyatsky, [3], Proposition 2.6) *Assuma que um grupo finito A age coprimamente sobre um grupo profinito G tal que $C_G(A)$ é Engel. Então, para cada primo p, a álgebra de Lie $L_p(G)$ satisfaz uma identidade polinomial multilinear.*

A seguir, provaremos o Teorema B no caso particular onde G é um grupo pro-p.

Proposição 3.2.2 *Seja G um grupo pro-p satisfazendo as hipóteses do Teorema B. Então G é localmente nilpotente.*

Demonstração: Tendo em vista que todo conjunto finito de G está contido em um subgrupo finitamente gerado A-invariante, sem perda de generalidade, podemos assumir que G é finitamente gerado. Observado isso, para provar a proposição, será suficiente mostrar que G é nilpotente.

Denotaremos por $D_j = D_j(G)$ os termos da série central p-dimensional de G. Considere $L = L_p(G)$ e $L_j = L \cap (D_j/D_{j+1})$. Com isso, temos $L = \oplus_{j \geq 1} L_j$.

O grupo A age naturalmente sobre L. Considere $A_1, \ldots, A_{q+1}$ todos os subgrupos maximais distintos de A. Seja $L_{ij} = C_{L_j}(A_i)$. Pelo Lema 1.5.1, para cada j temos

$$L_j = \sum_{i=1}^{q+1} L_{ij}.$$

Além disso, segue pelo Lema 1.5.2, que para cada $l \in L_{ij}$ existe um elemento $x \in D_j \cap C_G(A_i)$ tal que $l = xD_{j+1}$. Por hipótese x é Engel em G, logo, o Lema 2.2.11 assegura que l é ad-nilpotente em L. Portanto,

$$\text{todo elemento em } L_{ij} \text{ é ad-nilpotente em } L. \tag{3.3}$$

Seja ω uma raiz primitiva q-ésima da unidade e $\overline{L} = L \otimes \mathbb{F}_p[\omega]$. Aqui $\mathbb{F}_p$ denotará o corpo com p elementos. Observamos que $\overline{L}$ pode ser visto como uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}_p$ ou como uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}_p[\omega]$. De maneira natural, podemos identificar a $\mathbb{F}_p$-álgebra L com a $\mathbb{F}_p$-subálgebra $L \otimes 1$ de $\overline{L}$.

Seja $\overline{L}_j = L_j \otimes \mathbb{F}_p[\omega]$. Então $\overline{L} = \langle \overline{L}_1 \rangle$ e $\overline{L}$ é a soma direta das componentes homogêneas $\overline{L}_j$. O grupo A age naturalmente sobre $\overline{L}$ e com isso temos $\overline{L}_{ij} = C_{\overline{L}_j}(A_i)$, onde $\overline{L}_{ij} = L_{ij} \otimes \mathbb{F}_p[\omega]$. A seguir, vamos mostrar a seguinte afirmação.

$$\text{Cada elemento } y \in \overline{L}_{ij} \text{ é ad-nilpotente em } \overline{L}. \tag{3.4}$$

Seja $y \in \overline{L}_{ij}$. Visto que $\overline{L}_{ij} = L_{ij} \otimes \mathbb{F}_p[\omega]$, podemos escrever

$$y = x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 \cdots + \omega^{q-2} x_{q-2}$$

para adequados elementos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{q-2} \in L_{ij}$. Em vista de (3.3) temos que cada somando $\omega^s x_s$ é ad-nilpotente em $\overline{L}$. Considere H a subálgebra de $\overline{L}$ gerada por x_0,

$\omega x_1, \omega^2 x_2, \ldots, \omega^{q-2} x_{q-2}$. Queremos mostrar que H é nilpotente.

Note que $H \subseteq C_{\overline{L}}(A_i)$. Um comutador de peso t nos geradores de H tem a forma $\omega^s x$ para algum $x \in L_{im}$, onde $m = tj$. Por (3.3) o elemento x é ad-nilpotente, logo tal comutador é ad-nilpotente. Pela Proposição 3.2.1, L satisfaz uma identidade polinomial multilinear. Esta identidade multilinear é também satisfeita por $\overline{L}$ e portanto ela também é satisfeita por H, pois $H \subseteq C_{\overline{L}}(A_i)$. Assim, pelo Teorema 2.1.1 H é nilpotente. Agora, o Lema 2.1.10 garante a existência de um inteiro positivo v tal que

$$[\overline{L}, \underbrace{H, \ldots, H}_{v}] = 0.$$

Isso prova (3.4), pois $y \in H$.

Observe que por hipótese A é abeliano e o corpo base de $\overline{L}$ é agora um corpo de fatoração para A. Combinando estes fatos com o Teorema 2.1.14 podemos deduzir que toda componente $\overline{L}_j$ decompõe-se como soma direta de auto-espaços comuns para A. Em particular, $\overline{L}_1$ é gerado por um número finito de autovetores comuns para A, pois G é um grupo pro-p finitamente gerado. Consequentemente, $\overline{L}$ é gerada por um número finito de autovetores comuns para A, todos eles pertencendo a $\overline{L}_1$. Por hipótese, A é não-cíclico, logo todo autovetor comum para A está contido no centralizador $C_{\overline{L}}(A_i)$ para algum $i \leq q+1$.

Observamos ainda que cada comutador em autovetores comuns é novamente um autovetor comum para A. Portanto, se $l_1, l_2, \ldots \in \overline{L}_1$ são autovetores comuns para A que são geradores para $\overline{L}$, então todo comutador nestes geradores pertence a algum $\overline{L}_{ij}$ e portanto, pelo fato (3.4), é ad-nilpotente.

Visto que $\overline{L}$ satisfaz uma identidade polinomial, segue do Teorema 2.1.1 que $\overline{L}$ é nilpotente. Como a álgebra L pode ser imersa em $\overline{L}$, podemos deduzir que L também é nilpotente.

De acordo com o Teorema 2.2.7 a nilpotência de L é equivalente a G ser linear. Pelo Teorema 1.3.6 em todo grupo linear o radical de Hirsch-Plotkin $HP(G)$ coincide com o conjunto de elementos Engel. Por fim, o Lema 1.5.1 combinado com o Teorema 1.2.8 garante que G é gerado por um número finito de elementos Engel, e portanto, podemos concluir que G é nilpotente. Isso conclui a demonstração. ■

O lema abaixo é uma versão profinita quantitativa do Teorema A. Ele será necessário na demonstração do caso geral do Teorema B.

Lema 3.2.3 *Sejam q um número primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^2. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo profinito G e assuma que todos elementos em $C_G(a)$ são n-Engel em G para cada $a \in A^{\#}$. Então G é k-Engel para algum número $\{q, n\}$-limitado k.*

Demonstração: Seja $\mathcal{I}$ o conjunto de todos subgrupos normais abertos A-invariantes de G. Note que se $N \in \mathcal{I}$ e $Q = G/N$, o grupo A age coprimamente sobre Q e pelos Lemas 1.5.1 e 1.5.2, Q é gerado pelos centralizadores

$$C_Q(a) = C_G(a)N/N,$$

com $a \in A^{\#}$. Então, segue pelo Teorema A que Q é k-Engel para algum número $\{q, n\}$-limitado k. Por fim, pelo Teorema 1.2.4 temos que $G \cong \varprojlim_{N \in \mathcal{I}} G/N$ e o resultado segue. ■

Como usual, para um grupo profinito G denotamos por $\pi(G)$ o conjunto dos números primos divisores das ordens das imagens contínuas homomórficas finitas de G. Seja π um conjunto de números primos. Dizemos que G é um π-grupo se $\pi(G)$ está contido em π e G é um π'-grupo se $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$. Denotamos por $O_\pi(G)$ o π-subgrupo normal maximal de G e por $O_{\pi'}(G)$ o π'-subgrupo normal maximal de G.

Agora estamos prontos para lidar com a demonstração do caso geral do Teorema B.

Demonstração do Teorema B: Seja $\mathcal{I}$ o conjunto de todos subgrupos normais abertos A-invariantes de G. Pelo Teorema 1.2.4, $G \cong \varprojlim_{N \in \mathcal{I}} G/N$. Observamos que se $N \in \mathcal{I}$ e $Q = G/N$ o grupo A age coprimamente sobre Q de maneira natural, e pelos Lemas 1.5.1 e 1.5.2, Q é gerado pelos centralizadores

$$C_Q(a) = C_G(a)N/N.$$

Com isso, segue do Teorema 1.3.4 que Q é nilpotente. Uma vez que este argumento vale para cada $N \in \mathcal{I}$, podemos concluir que G é pronilpotente e portanto G é isomorfo ao produto cartesiano de seus subgrupos de Sylow.

Seja $a \in A^{\#}$. Para cada número inteiro positivo i definimos o conjunto

$$S_i = \{(x, y) \in G \times C_G(a) : [x,_i y] = 1\}.$$

Note que estes conjuntos são fechados em $G \times C_G(a)$ e $G \times C_G(a) = \cup_{i \geq 1} S_i$. Pelo Corolário 1.2.10, podemos encontrar um subgrupo aberto $H \leq_o G$, elementos $u \in G, v \in C_G(a)$ e um inteiro positivo n tal que $[ul,_n vk] = 1$ para todo $l \in H$ e todo $k \in H \cap C_G(a)$. Pela Proposição 1.2.2, $[G : H]$ é finito. Assim, seja $[G : H] = m$ e considere $\pi_1 = \pi(m)$ sendo o conjunto dos primos que dividem m. Denote $O_{\pi_1'}(G)$ por T. Tendo em vista que T é isomorfo a imagem de H em $G/O_{\pi_1}(G)$, podemos verificar que todo elemento $x \in C_T(a)$ é n-Engel em T.

Note que o subgrupo aberto H, o conjunto π_1 e o inteiro n dependem somente da escolha do elemento $a \in A^{\#}$, por isso, iremos denota-los por H_a, π_a e n_a, respectivamente. Podemos escolher tais H_a, π_a e n_a para todo $a \in A^{\#}$. Posto isso, considere

$$\pi = \cup_{a \in A^{\#}} \pi_a, \; n = max\{n_a : a \in A^{\#}\} \text{ e } R = O_{\pi'}(G).$$

Note que π é um conjunto finito. A escolha do conjunto π garante que para cada $a \in A^{\#}$ todo elemento do centralizador $C_R(a)$ é n-Engel em R. Decorre do Lema 3.2.3 que R é k-Engel para algum inteiro adequado k. Consequentemente, pelo Teorema 1.3.2, o subgrupo R é localmente nilpotente. Sejam $p_1, \ldots, p_r$ sendo todos os primos contidos em π e $P_1, \ldots, P_r$ são os correspondentes subgrupos de Sylow de G. Então

$$G = P_1 \times \ldots \times P_r \times R$$

e portanto para completar a demonstração é suficiente mostrar que cada subgrupo P_i é localmente nilpotente. Mas isso segue imediatamente da Proposição 3.2.2. Isto completa a demonstração. ■

3.3 Demonstração do Teorema C

Nesta seção iremos nos concentrar na demonstração do Teorema C. Para conveniência do leitor enunciamos tal resultado a seguir.

Teorema C. *Sejam q um número primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^3. Suponha que A age coprimamente sobre um grupo finito G e assuma que $C_G(a)$ é n-Engel para cada $a \in A^{\#}$. Então G é k-Engel para algum inteiro positivo $\{n,q\}$-limitado k.*

Para provar o Teorema C, precisaremos do seguinte resultado sobre anéis de Lie associados a grupos.

Proposição 3.3.1 *Seja G um grupo m-gerado satisfazendo as hipóteses do Teorema C.*

1. *Então existem inteiros positivos e, c dependendo somente de m, n e q, tais que $e\gamma_c(L(G)) = 0$;*

2. *Se p é um primo que divide a ordem de G, então $L_p(G)$ é nilpotente com classe $\{m,n,p,q\}$-limitada.*

Assim como na Proposição 3.1.2, as demonstrações das afirmações (1) e (2) são similares. Daremos a prova apenas da primeira afirmação. A demonstração do item (2), com mudanças adequadas, pode ser obtida trocando o recurso do Teorema 2.1.6 na prova do item (1) pelo recurso do Corolário 2.1.5.

Demonstração: Inicialmente, vamos reduzir o problema para o caso onde G é um p-grupo. Por um lado, o Teorema 1.3.1 garante que cada centralizador $C_G(a)$, com $a \in A^{\#}$ é nilpotente, pois cada centralizador é n-Engel por hipótese. Por outro, segue pelo Teorema 1.5.3 que G é nilpotente. Consequentemente, sem perda de generalidade, podemos assumir que G é um p-grupo para algum primo $p \neq q$.

Sejam $A_1 \dots, A_s$ todos os subgrupos maximais distintos de A. Note que s é um número $\{q\}$-limitado. Denotaremos por $\gamma_j = \gamma_j(G)$, $L_j = \gamma_j/\gamma_{j+1}$ e

$$L = L(G) = \bigoplus_{j \geq 1} L_j.$$

O grupo A age naturalmente sobre L. Visto que cada subgrupo A_i é não cíclico, segue pelo Lema 1.5.1 que $L = \sum_{a \in A_i^{\#}} C_L(a)$ para todo inteiro positivo $i \leq s$. Considere $L_{ij} = C_{L_j}(A_i)$. Assim, para cada inteiro positivo j temos

$$L_j = \sum_{1 \leq i \leq s} L_{ij}.$$

Além disso, o Lema 1.5.2 assegura que para cada elemento $l \in L_{ij}$ existe $x \in \gamma_j \cap C_G(A_i)$ tal que $l = x\gamma_{j+1}$. Por hipótese, x é um elemento n-Engel em $C_G(a)$ para todo $a \in A_i^{\#}$, logo o elemento l é ad-nilpotente em $C_L(a)$ com índice no máximo n, para todo $a \in A_i^{\#}$. Visto que $L = \sum_{a \in A_i^{\#}} C_L(a)$, podemos deduzir a seguinte afirmação

$$\text{todo elemento } l \in L_{ij} \text{ é ad-nilpotente em } L \text{ com índice no máximo } n. \tag{3.5}$$

A partir daqui, o leitor poderá notar que a prova é muito similar a demonstração da Proposição 3.1.2(1), por isso os detalhes serão omitidos. ■

Agora estamos prontos para lidar com a demonstração do Teorema C.

Demonstração do Teorema C: Seja G um grupo satisfazendo as hipóteses do Teorema C. Queremos mostrar que G é k-Engel para algum número $\{n, q\}$-limitado k. Escolha arbitrariamente $x, y \in G$. Para concluir a demonstração é suficiente mostrar que o subgrupo $\langle x, y \rangle$ é nilpotente com classe $\{n, q\}$-limitada. Posto isso, sem perda de generalidade podemos assumir que

$$G = \langle x^A, y^A \rangle.$$

Portanto, o grupo G pode ser gerado por $2q^3$ elementos.

O Teorema 1.3.1 garante que cada centralizador $C_G(a)$, com $a \in A^{\#}$ é nilpotente, pois cada centralizador é n-Engel por hipótese. Com isso, o Teorema 1.5.3 implica que G é nilpotente. Consequentemente, sem perda de generalidade, podemos assumir que G é um p-grupo para algum primo $p \neq q$.

Seja $L = L(G)$. Pela Proposição 3.3.1(1), existem inteiros positivos e, c dependendo somente de n e q tais que $e\gamma_c(L) = 0$. Se p não divide e, temos $\gamma_c(L) = 0$ e então o Teorema 2.2.3(1) assegura que G é nilpotente com classe no máximo $c - 1$. Portanto, neste caso a prova está completa. Assim, no que se segue também podemos assumir que p é um número $\{n, q\}$-limitado.

Decorre da Proposição 3.3.1(2) que $L_p(G)$ é nilpotente com classe $\{n, q\}$-limitada. Então, o Teorema 2.2.4 assegura que G possui um subgrupo *powerful* característico P com índice $\{n, q\}$-limitado. Pelo Teorema 1.1.1, P possui um número $\{n, q\}$-limitado de geradores. Visto que P é *powerful*, o Teorema 1.4.3(3) garante que o posto de P é $\{n, q\}$-limitado. Portanto, pela Proposição 1.1.2 o posto de G também é $\{n, q\}$-limitado. Isso implica que cada centralizador $C_G(a)$ pode ser gerado por um número $\{n, q\}$-limitado de elementos para cada $a \in A^{\#}$. Visto que cada centralizador $C_G(a)$ é n-Engel, podemos concluir pelo Teorema 1.3.3 que cada centralizador $C_G(a)$ é nilpotente com classe $\{n, q\}$-limitada. Por fim, o Teorema 1.5.4 implica que G é nilpotente com classe $\{n, q\}$-limitada. Isso completa a demonstração. ■

Capítulo 4

Considerações Finais

Encerramos este trabalho enunciando alguns resultados que também foram obtidos durante o doutorado do autor deste trabalho. O leitor irá notar que estes resultados generalizam os Teoremas A, B, C e D. Suas respectivas demonstrações podem ser consultadas em [5].

Denotamos por $\gamma_i(G)$ o i-ésimo termo da série central inferior de um grupo G e por $G^{(i)}$ o i-ésimo termo da série derivada de G. Foi mostrado em [19] e depois em [1, 2] que se o posto do grupo abeliano elementar A é suficientemente grande, então resultados de natureza similar ao Teorema KS (ver na Introdução) podem ser obtidos quando assumimos condições nos elementos pertencendo a $\gamma_i(C_G(a))$ ou $C_G(a)^{(i)}$ em vez de elementos em $C_G(a)$. Neste mesmo espírito, estendemos os Teoremas A e C como a seguir.

Teorema E. *Sejam q um número primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^r, com $r \geq 2$, agindo coprimamente sobre um grupo finito G.*

1. *Se todos os elementos em $\gamma_{r-1}(C_G(a))$ são n-Engel em G para cada $a \in A^{\#}$, então $\gamma_{r-1}(G)$ é k-Engel para algum inteiro positivo $\{n, q, r\}$-limitado k.*

2. *Se, para algum inteiro positivo d tal que $2^d \leq r-1$, todos elementos no d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ são n-Engel em G para cada $a \in A^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é k-Engel para algum inteiro positivo $\{n, q, r\}$-limitado k.*

Teorema F. *Sejam q um número primo, n um inteiro positivo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^r, com $r \geq 3$, agindo coprimamente sobre um grupo finito G.*

1. *Se todos os elementos em $\gamma_{r-2}(C_G(a))$ são n-Engel em $C_G(a)$ para cada $a \in A^{\#}$, então $\gamma_{r-2}(G)$ é k-Engel para algum inteiro positivo k $\{n, q, r\}$-limitado k.*

2. *Se, para algum inteiro positivo d tal que $2^d \leq r-2$, todos elementos no d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ são n-Engel em $C_G(a)$ para cada $a \in A^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é k-Engel para algum inteiro positivo $\{n, q, r\}$-limitado k.*

Sejam H, K subgrupos de um grupo profinito G. Denotamos por $[H, K]$ o subgrupo fechado de G gerado por todos comutadores da forma $[h, k]$, com $h \in H$ e $k \in K$. Assim, podemos definir indutivamente os seguintes subgrupos de G:

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_k(G) = [\gamma_{k-1}(G), G], \text{ para } k \geq 2 \text{ e}$$

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}], \text{ para } k \geq 1.$$

Também provamos versões profinitas não quantitativas análogas aos Teoremas D e E, conforme abaixo.

Teorema G. *Sejam q um número primo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^r, com $r \geq 2$, agindo coprimamente sobre um grupo profinito G.*

1. *Se todos os elementos em $\gamma_{r-1}(C_G(a))$ são Engel em G para cada $a \in A^{\#}$, então $\gamma_{r-1}(G)$ localmente nilpotente.*

2. *Se, para algum inteiro positivo d tal que $2^d \leq r-1$, todos elementos no d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ são Engel em G para cada $a \in A^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é localmente nilpotente.*

Teorema H. *Sejam q um número primo e A um grupo abeliano elementar de ordem q^r, com $r \geq 3$, agindo coprimamente sobre um grupo profinito G.*

1. *Se todos os elementos em $\gamma_{r-2}(C_G(a))$ são Engel em $C_G(a)$ para cada $a \in A^{\#}$, então $\gamma_{r-2}(G)$ localmente nilpotente.*

2. *Se, para algum inteiro positivo d tal que $2^d \leq r-2$, todos elementos no d-ésimo grupo derivado de $C_G(a)$ são Engel em $C_G(a)$ para cada $a \in A^{\#}$, então o d-ésimo grupo derivado $G^{(d)}$ é localmente nilpotente.*

Bibliografia

[1] C. Acciarri, P. Shumyatsky, Fixed points of coprime operator groups, *J. Algebra* **342** (2011) 161–174.

[2] C. Acciarri, P. Shumyatsky, Centralizers of coprime automorphisms of finite groups, *Ann. Mat. Pura Appl.* **193** (2014) 317–324.

[3] C. Acciarri, P. Shumyatsky, Profinite groups and the fixed points of coprime automorphisms, *J. Algebra*, **452** (2016) 188–195.

[4] C. Acciarri, P. Shumyatsky, D. S. Silveira, On groups with automorphisms whose fixed points are Engel, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **197** (2017) 307–316.

[5] C. Acciarri, D.S. Silveira, Profinite groups and centralizers of coprime automorphisms whose elements are Engel, *J. Group Theory*, **21** (2018) 485–509.

[6] R. Baer, Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen, *Math. Ann.*,**133** (1957) 256–270.

[7] Y. A. Bahturin, M. V. Zaicev, Identities of graded algebras, *J. Algebra*, **205** (1998) 1–12.

[8] S. Bachmuth and H. Y. Mochizuki, Third Engel groups and the Macdonald-Neumann conjecture, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **5** (1971) 379–386.

[9] L. Bartholdi, *Algorithmic Decidability of Engel's Property for Automaton Groups.* In: Kulikov A., Woeginger G. (eds) Computer Science – Theory and Applications. CSR 2016. Lecture Notes in Computer Science, vol 9691. Springer (2016) 29–40.

[10] V. V. Bludov, An example of not Engel group generated by Engel elements, *A Conferencein Honor of Adalbert Bovdi's 70th Birthday,* November 18–23, 2005, Debrecen, Hungary, (2005) 7–8. http://old.math.unideb.hu/bovdiconf.

[11] R. G. Burns, O. Macedonska, Y. Medevedev. *Groups Satisfying Semigroup Laws, and Nilpotent-by-Burnside Varieties. J. Algebra*, **195** (1997) 510–525 .

[12] J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann, D. Segal, *Analytic Pro-p Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).

[13] M. S. Garascuk, D. A. Suprunenko, Linear groups with Engel's condition, *Dokl. Akad. Nauk BSSR*,**6** (1962) 277–280.

[14] E. S. Golod, Some problems of Burnside type, *Amer. Math. Soc. Trans.*, Ser. 2 **84** (1969) 83–88.

[15] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row, New York, (1968).

[16] K. W. Gruenberg, Two theorems on Engel groups, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **49** (1953) 377–380.

[17] K. W. Gruenberg, The upper central series in soluble groups, *Illinois J. Math.*, **5** (1961) 436–466.

[18] K. W. Gruenberg, The Engel structure of linear groups, *J. Algebra*, **3** (1966) 291–303.

[19] R. Guralnick, P. Shumyatsky, Derived subgroups of fixed points, *Isr. J. Math.* **126** (2001) 345–362.

[20] G. Havas, M. R. Vaughan-Lee, 4-Engel groups are locally nilpotent, *Internat. J. Algebra Comput*, **15** (2005) 649–682.

[21] H. Heineken, Engelsche Elemente der Lange drei,*Illionis J. Math.*, **5** (1961) 681–707.

[22] G. Higman, Groups and Lie rings having automorphisms without non-trivial fixed points, *J. London Math. Soc.*, **32** (1957) 321–334.

[23] K. A. Hirsch, Über lokal-nilpotente Gruppen, *Math. Z.*, **63** (1955) 290–294.

[24] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, 2nd Edition, Prentice–Hall Inc., Upper Saddle River, (1971).

[25] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite Groups II*, Springer-Verlag, Berlin, (1982).

[26] J. L. Kelly, *General Topology*, Van Nostrand, Toronto, New York, London, (1955).

[27] Y. K. Kim, A. H. Rhemtulla, Orderable groups satisfying an Engel condition. Ordered algebraic structures,*Kluwer Acad. Publ., Dordrecht,* (1993) 73–79.

[28] Y. Kim, A. H. Rhemtulla, On locally graded groups, in: Proceedings of the Third International Conference on Group Theory, Pusan, Korea 1994, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1995) 189—197.

[29] E. I. Khukhro, *Nilpotent Groups and their Automorphisms*, de Gruyter–Verlag, Berlin, (1993).

[30] E. I. Khukhro. *p-Automorphisms of Finite p-Groups.* Cambridge University Press, (1998).

[31] E. I. Khukhro, V.D. Mazurov, eds., *Kourovka Notebook,* 18th Edition. Novosibirsk, (2016).

[32] E. I. Khukhro, P. Shumyatsky, Bounding the exponent of a finite group with automorphisms, *J. Algebra*, **212** (1999) 363–374.

[33] M. Lazard, Groupes Analytiques p-Adiques, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **26**, Paris, (1965) 389–603.

[34] F. W. Levi, Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions, *J. Indian Math. Soc.*, **6** (1942) 87–97.

[35] H. Liebeck, Concerning nilpotent wreath products, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **58** (1962) 443–451.

[36] V. Linchenko, Identities of Lie algebras with actions of Hopf algebras, *Comm. Algebra*, **25** (1997) 3179–3187.

[37] A. Lubotzky, A. Mann, Powerful p-groups. I, II, *J. Algebra*, **105** (1987) 484–515.

[38] Y. Medvedev, On compact Engel groups, *Israel J. Math.*, **135** (2003) 147–156.

[39] E. Melo, P. Shumyatsky, Finite groups and their coprime automorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **145** (2017) 3755–3760.

[40] H. Neumann, *Varieties of groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, (1967).

[41] B. I. Plotkin, On some criteria of locally nilpotent groups, *Uspekhi Mat. Nauk* (1954) 181–186.

[42] L. Ribes, P. Zalesskii *Profinite Groups*, 2nd Edition Springer Verlag, Berlin-New York, (2010).

[43] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, (1996).

[44] P. Shumyatsky, Centralizers in groups with finiteness conditions, *J. Group Theory*, **1** (1998) 275–282.

[45] P. Shumyatsky, Applications of Lie ring methods to group theory, in *Nonassociative Algebra and Its Applications*, (Eds R. Costa et al.), Marcel Dekker, New York, (2000) 373–395.

[46] P. Shumyatsky, Finite groups and the fixed points of coprime automorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129** (2001) 3479–3484.

[47] P. Shumyatsky, Coprime automorphisms of profinite groups, *Quart. J. Math.*, **53** (2002) 371–376.

[48] P. Shumyatsky, Positive laws in fixed points *Trans. Amer. Math. Soc.,* **356** (2004) 2081–2091.

[49] P. Shumyatsky, D. S. Silveira, On finite groups with automorphisms whose fixed points are Engel, *Arch. Math.*, **106** (2016) 209–218.

[50] H. Smith, Bounded Engel groups with all subgroups subnormal, *Comm. Alg.*, **30**(2) (2002) 907–909.

[51] J. G. Thompson, Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **45** (1959) 578–581.

[52] J. G. Thompson, Automorphisms of solvable groups, *J. Algebra*, **1** (1964) 259–267.

[53] G. Traustason, On 4-Engel groups, *J. Algebra*,**178**, (1995) 414–429.

[54] J. N. Ward, On finite groups admitting automorphisms with nilpotent fixed-point group, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **5** (1971) 281–282.

[55] J. S. Wilson, Two-generator conditions for residually finite groups, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **23** (1991) 239–248.

[56] J. S. Wilson, *Profinite Groups*, Clarendon Press, Oxford, (1998).

[57] J. S. Wilson, On the structure of compact torsion groups, *Monatsh. Math.*, **96** (1983) 57–66.

[58] J. S. Wilson, E. I. Zelmanov, Identities for lie algebras of pro-p groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **81** (1992) 103–109.

[59] E. I. Zelmanov, *Engel Lie Algebras.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, **292** (1987) 265–268.

[60] E. I. Zelmanov, Lie methods in the theory of nilpotent groups, in *Groups '93 Galaway/ St Andrews*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995) 567–585.

[61] E. I. Zelmanov, *Nil rings and periodic groups*, The Korean Math. Soc. Lecture Notes in Math., Seoul, (1992).

[62] E. I. Zelmanov, On periodic compact groups, *Israel J. Math.*, **77** (1992) 83–95.

[63] E. I. Zelmanov, On some problems of group theory and Lie algebras, *Math. USSR Sb.* **66** (1990) 159–168.

[64] E. I. Zelmanov, Lie algebras and torsion groups with identity, *J. Comb. Algebra*, **1** (2017) 289–340.

[65] M. Zorn, Nilpotency of finite groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42** (1936) 485–486.

Índice