



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTUDO DO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE
DOGHRI: APLICAÇÃO AO MODELO ELASTOPLÁSTICO
DE CHABOCHE**

Por,

Edson José Alves de Souza Júnior

Brasília, 02 de julho de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

ESTUDO DO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE DOGHRI: APLICAÇÃO AO MODELO ELASTOPLÁSTICO DE CHABOCHE

Edson José Alves de Souza Júnior

DISSERTAÇÃO DE Mestrado submetida ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências Mecânicas.

APROVADA POR:

Prof. Fábio Comes de Castro, D.Sc. (ENM/UnB)
(Orientador)

Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (ENC/UnB)
(Examinador Externo)

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, D.Sc. (ENM/UnB)
(Examinador Interno)

Brasília/DF, 02 de julho de 2018.

FICHA CATALOGRÁFICA

JOSÉ ALVES DE SOUZA JÚNIOR, EDSON

Estudo do método de integração numérica de Doghri: Aplicação ao modelo elastoplástico de Chaboche.

[Distrito Federal] 2018.

xi, 68 p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2018)

Dissertação de mestrado – Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|-------------------------|--|
| 1. Modelo constitutivo | 2. Integração numérica |
| 3. Plasticidade cíclica | 4. Endurecimento cinemático não linear |

I – ENM/FT/UnB

II – ENM-DM 284/2018

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SOUZA JÚNIOR, E. J. A. de., (2018) Estudo do método de integração numérica de Doghri: Aplicação ao modelo elastoplástico de Chaboche. Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM-284/2018, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 68 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Edson José Alves de Souza Júnior.

TÍTULO:) Estudo do método de integração numérica de Doghri: Aplicação ao modelo elastoplástico de Chaboche.

GRAU: Mestre

ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Edson José Alves de Souza Júnior

Av. Pau Brasil, lote 04, Apto 104

71916-500 Brasília – DF – Brasil.

*Dedico este trabalho à minha família,
principalmente os que estão
diariamente vivenciando minhas
dificuldades e me apoiando de forma
incondicional.*

Agradecimentos

Primeiramente, à minha família pelo apoio incondicional em todos momentos.

Ao professor Fábio Comes de Castro pela orientação, compreensão e paciência, mesmo nos momentos mais turbulentos em minha vida.

Ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas da Universidade de Brasília.

Aos colegas de estudo pelos bons momentos de discussão.

Resumo

O método de Doghri para integração implícita de um modelo de plasticidade do tipo Armstrong-Frederick caracteriza-se pela determinação do passo de Newton-Raphson por meio de fórmulas explícitas. Essa característica do método o torna, em princípio, mais eficiente do ponto de vista computacional do que esquemas de integração que requerem a inversão de matrizes, ou de um método de solução de sistemas lineares, para o cálculo do passo de Newton-Raphson. Neste trabalho, o algoritmo de Doghri é implementado em uma sub-rotina UMAT do Abaqus tendo em vista avaliar sua eficiência quando comparado ao algoritmo de integração disponibilizado no Abaqus. A avaliação foi realizada por meio de simulações em um corpo em forma de cubo submetido a deformação biaxial prescrita e em um corpo cilíndrico com entalhe circunferencial em U submetido a força axial e torque prescritos. Foram estudados carregamentos não proporcionais com trajetórias elíptica e em forma de cruz. Os resultados obtidos levaram a conclusão que não há diferença significativa entre os tempos de processamento das simulações que empregaram o algoritmo de integração de Doghri e o algoritmo disponibilizado no Abaqus.

Palavras-chave: Modelo constitutivo, Plasticidade cíclica, Endurecimento cinemático não linear, Integração numérica implícita.

Abstract

The method developed by Doghri for the implicit integration of an Armstrong-Frederick type plasticity model is characterized by computation of the Newton-Raphson steps by means of explicit (or closed-form) expressions. In principle, this feature of the algorithm makes it attractive in terms of computational efficiency as compared to general integration schemes that involves matrix inversions or the solution of linear systems to determine the Newton-Raphson step. In this work, Doghri algorithm is implemented as a user subroutine UMAT in Abaqus to evaluate its computational efficiency when compared with Abaqus built-in integration algorithm. The evaluation was based on numerical simulations carried out on a cube subjected to biaxial strains and a U-notched shaft subjected to combined axial-torsion loading. Elliptical and cross-shaped loading paths were investigated in this study. The numerical results revealed no significant difference between the computation times of the simulations carried out with Doghri algorithm and Abaqus built-in algorithm.

Keywords: Constitutive model, Cyclic plasticity, Nonlinear kinematic hardening, Implicit numerical integration.

Sumário

1 Introdução	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Objetivos.....	3
1.3 Organização do trabalho.....	3
2 Modelagem do comportamento elastoplástico sob carregamento cíclico	5
2.1 Relação entre tensão e deformação elástica	5
2.2 Superfície de escoamento plástico.....	6
2.3 Regra de evolução da deformação plástica	7
2.4 Regras de endurecimento cinemático	8
2.5 Condição de complementaridade de Kuhn-Tucker.....	10
2.6 Condição de persistência.....	11
2.7 Resumo do modelo elastoplástico de Chaboche	11
3 Algoritmo de integração numérica para modelos de plasticidade cíclica	13
3.1 Revisão da literatura.....	13
3.2 Integração numérica do modelo de Chaboche pelo método de Doghri.....	16
3.3 Determinação do operador tangente consistente.....	22
3.4 Resumo do algoritmo de integração implícita do modelo de Chaboche pelo método de Doghri	25
4 Testes Numéricos	28
4.1 Elemento hexaédrico de 8 nós submetido à deformação uniaxial monotônica..	29
4.2 Elemento hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória circular	31
4.3 Elemento hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória do tipo cruz.....	33
4.4 Corpo cilíndrico com entalhe submetido à força axial e torque com ângulo de fase de 90°.....	37
4.5 Corpo cilíndrico com entalhe submetido à força axial e torque com trajetória do tipo cruz.....	40
5 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	44
5.1 Conclusões	44
5.2 Sugestões para trabalhos futuros	45
Referências bibliográficas	46
Apêndice – Código da sub-rotina UMAT para integração implícita do modelo de Chaboche pelo método de Doghri	49

Lista de Figuras

Figura 4.1 – Condições de contorno para elemento finito hexaédrico de 8 nós submetido à deformação axial monotônica.	29
Figura 4.2 – Elemento finito hexaédrico de 8 nós submetido à deformação axial. Resposta tensão-deformação obtida por simulação numérica versus solução exata para o modelo de Chaboche com (a) $M = 1$ e (b) $M = 5$	30
Figura 4.3 – Elemento finito hexaédrico de 8 nós submetido à deformação axial. Convergência das iterações de Newton-Raphson do algoritmo implícito de integração numérica para o caso $N_{inc} = 1$. A linha horizontal preta indica a tolerância do critério de convergência.	31
Figura 4.4 – Condições de contorno para elemento finito hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória circular.	31
Figura 4.5 – Deformação biaxial com trajetória circular, discretizada com $\Delta t = 0,05$. 32	
Figura 4.6 – Tensões em um elemento hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória circular, discretizada com $\Delta t = 0,05$ (Fig. 4.5). Simulações realizadas com o modelo de Chaboche com $M = 1$	33
Figura 4.7 – Tensões em um elemento hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória circular, discretizada com $\Delta t = 0,001$. Simulações realizadas com o modelo de Chaboche (a) presente no Abaqus e (b) implementado na sub-rotina UMAT, pra $M = 5$	33
Figura 4.8 – Condições de contorno para elemento finito hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória tipo cruz.	34
Figura 4.9 – (a) Deformação biaxial com trajetória do tipo cruz (OABO → OCDO → OEFO → OGHO) discretizada em 221 pontos; (b) Tensões em um elemento hexaédrico de 8 nós simuladas com o modelo de Chaboche com $M = 1$	35
Figura 4.10 – Tensões em um elemento hexaédrico de 8 nós submetido à trajetória de deformação biaxial do tipo cruz discretizada em 2381 pontos. Simulações obtidas com o modelo de Chaboche (a) presente no Abaqus e (b) implementado na sub-rotina UMAT, para $M = 5$	35
Figura 4.11 – Simulações em um elemento hexaédrico de 8 nós utilizando o modelo de Chaboche com $M = 5$. (a) Trajetória das deformações prescritas, constituída de 3581 pontos e (b) trajetória das tensões simuladas; (c) Trajetória das tensões prescritas e (d) trajetória das deformações simuladas.	36

Figura 4.12 – Corpo de prova com entalhe em U submetido à força axial e torque com ângulo de fase de 90°: (a) dimensões do corpo em milímetros; (b) condições de contorno; (c) trajetória de carregamento e (d) malha de elementos finitos.	38
Figura 4.13 – Laços tensão-deformação na raiz do entalhe do corpo submetido a força axial e torque com ângulo de fase de 90°. Simulação realizada com o modelo de Chaboche, $M = 1$	39
Figura 4.14 – Laços tensão-deformação na raiz do entalhe do corpo submetido a força axial e torque com ângulo de fase de 90°. Simulação realizada com o modelo de Chaboche, $M = 5$	40
Figura 4.15– Força axial e torque com trajetória do tipo cruz (OABO → OCDO → OEFO → OGHO) discretizada em 581 pontos.	41
Figura 4.16– Laços tensão-deformação na raiz do entalhe do corpo submetido a trajetória de carregamento do tipo cruz. Simulação realizada com o modelo de Chaboche, $M = 5$	42

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Constantes do material para o caso $M = 1$	29
Tabela 4.2 – Constantes do material para o caso $M = 5$	29
Tabela 4.3 – Comparação do custo computacional entre simulação utilizando algoritmo de Doghri (UMAT) e algoritmo presente no Abaqus	43

Lista de Quadros

Quadro 2.1 – Resumo do modelo constitutivo com superfície de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Chaboche.	11
Quadro 2.2 – Algoritmo de integração implícita do modelo de Chaboche pelo método de Doghri	25

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

\mathbb{C}	Tensor de elasticidade (4ª ordem)
E	Módulo de Young
f	função de escoamento
G	Módulo de cisalhamento
H	Módulo tangente consistente (contínuo)
\mathbb{I}	Tensor identidade (4ª ordem)
J	Módulo tangente consistente (Jacobiano)
J_2	Segundo invariante do tensor das tensões desviadoras
k_1, k_2	Parâmetros da regra de endurecimento cinemático
p	Deformação plástica equivalente
S	Tensor das tensões desviadoras
S^*	Tensor das tensões desviadoras (tentativa)
t	pseudotempo

Símbolos Gregos

$\Delta\lambda$	Incremento do multiplicador plástico
$\Delta p, \delta p$	Incremento da deformação plástica equivalente
$\Delta\epsilon^p$	Incremento da deformação plástica
$\delta\beta$	Incremento do tensor das tensões relativas do método de Newton-Raphson
$\delta\sigma$	Incremento do tensor tensão do método de Newton-Raphson
$\delta\epsilon$	Incremento do tensor deformação do método de Newton-Raphson
$\delta\mathbf{a}^{(i)}$	Incremento do tensor das tensões cinemáticas do método de Newton-Raphson
$\dot{\lambda}$	Multiplicador plástico

α	Tensor de endurecimento cinemático
ε	Tensor das deformações lineares
ε^e	Tensor das deformações elásticas
ε^p	Tensor das deformações plásticas
β	Tensor tensão relativos
σ	Tensor tensão
σ_0	Tensão de escoamento
σ^*	Tensor das tensões (tentativa)

Subscritos/Sobrescritos

n	instante inicial
$n+1$	instante final

Siglas

UMAT	User material subroutine
------	--------------------------

1 Introdução

1.1 Motivação

Componentes mecânicos que operam sob carregamentos cíclicos estão sujeitos à falha por fadiga. No projeto desses componentes, a previsão da vida à fadiga é geralmente realizada em duas etapas. Primeiro, determina-se as histórias das tensões e deformações e, em seguida, elas são usadas como dados de entrada em um modelo de dano por fadiga. Estudos (Jiang *et al.*, 2007; Mamiya *et al.*, 2014) indicam que existem modelos capazes de prever de forma satisfatória a vida à fadiga caso as tensões e deformações sejam determinadas de forma suficientemente acurada, tal como ocorre em um corpo tubular de parede fina submetido a força axial e torque. Em problemas de fadiga encontrados na prática da engenharia, entretanto, a determinação das tensões e deformações de forma acurada é bastante difícil devido à complexidade da geometria dos componentes, do carregamento aplicado e do comportamento cíclico do material.

O método dos elementos finitos é uma ferramenta com a capacidade de simular as tensões e deformações em componentes com geometria complexa e submetidos a condições de carregamento quaisquer. Entretanto, para que as tensões e deformações simuladas sejam suficientemente acuradas é necessário o uso de uma relação constitutiva adequada. Atualmente existem modelos constitutivos (Zhang e Jiang, 2008) capazes de descrever diversos dos comportamentos característicos observados em metais sob carregamento cíclico, tais como o efeito Bauschinger, endurecimento/amolecimento cíclico, endurecimento adicional devido a carregamento não proporcional e fluência cíclica.

Apesar dos avanços nos modelos de plasticidade cíclica ocorrido nas últimas décadas, os aplicativos comerciais de elementos finitos mais utilizados (por exemplo, o Abaqus) ainda não incorporaram os modelos mais recentes. Vale ressaltar ainda que a análise elastoplástica

incremental de um componente pode resultar em um tempo de simulação alto, sobretudo para histórias de carregamento longas. Isso porque os algoritmos de integração requerem, geralmente, operações de inversão de matrizes ou soluções numéricas de sistemas para determinação das aproximações sucessivas do método de Newton-Raphson.

O presente trabalho insere-se dentro de um projeto mais amplo, que envolve a implementação numérica de modelos de plasticidade cíclica ainda não disponíveis no pacote de elementos finitos Abaqus e/ou de estratégias de integração numérica de modelos elastoplásticos que reduzam o custo computacional das simulações.

Doghri (1993) desenvolveu um algoritmo de integração implícita para o modelo de plasticidade de Armstrong e Frederick (1966) no qual os passos das iterações locais de Newton-Raphson são calculados por meio de fórmulas explícitas. Devido a essa característica, o algoritmo de Doghri é, em princípio, mais eficiente do ponto de vista numérico do que esquemas de integração que requerem a inversão de matrizes ou de um método de solução de sistemas lineares para o cálculo do passo de Newton-Raphson.

De acordo com Wang *et al.* (2000), o algoritmo desenvolvido por Doghri foi implementado no pacote de elementos finitos Abaqus. Porém, o algoritmo é limitado ao modelo original de Armstrong e Frederick que possui um único tensor de endurecimento cinemático. É possível utilizar no Abaqus um modelo de plasticidade no qual o tensor de endurecimento cinemático é decomposto de forma aditiva em múltiplas partes, conforme proposto por Chaboche (1986) tendo em vista aprimorar o modelo original de Armstrong e Frederick. Entretanto, a documentação do Abaqus não informa de forma clara como é feita a integração numérica do modelo de Chaboche.

A ideia do presente trabalho é implementar no Abaqus o modelo de Chaboche utilizando o método de integração numérica de Doghri e verificar, por meio de simulações numéricas, se essa implementação reduz ou não o custo computacional quando comparado ao modelo de

Chaboche já implementado no Abaqus. Além disso, o conhecimento e experiência adquiridos no presente trabalho servirão de base para a implementação numéricas de modelos de plasticidade cíclica mais sofisticados tais como, por exemplo, os desenvolvidos por Jiang e Sehitoglu (1996) e Jiang e Kurath (1997).

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é avaliar o custo computacional do algoritmo de integração numérica proposto por Doghri, quando aplicado ao modelo de plasticidade cíclica de Chaboche. Os objetivos específicos são: (i) desenvolver um sub-rotina UMAT no pacote de elementos finitos Abaqus para a integração numérica implícita do modelo Chaboche pelo método de Doghri; (ii) comparar o custo computacional de simulações numéricas realizadas com a sub-rotina desenvolvida neste trabalho com a já implementada no Abaqus, para o caso de um corpo cilíndrico com entalhe em U submetido a força axial e torque com trajetórias elíptica e do tipo cruz.

1.3 Organização do trabalho

A presente dissertação está estruturada em cinco capítulos. O primeiro capítulo descreve a motivação e os objetivos do trabalho. O segundo capítulo descreve a formulação do modelo de plasticidade cíclica de Chaboche. O terceiro capítulo apresenta uma breve revisão dos algoritmos de integração numérica desenvolvidos nas duas últimas décadas e o método de integração numérica de Doghri aplicado a esse modelo. No quarto capítulo são realizados testes numéricos com um elemento hexaédrico submetido a histórias de carregamento uniaxial e biaxial, tendo em vista checar a implementação numérica da sub-rotina UMAT, bem como são conduzidos testes numéricos com um cilindro com entalhe submetido a força axial e momento torçor, com o objetivo de comparar o custo computacional das simulações numéricas realizadas

com a sub-rotina desenvolvida e com a já implementada no Abaqus. O quinto capítulo apresenta as conclusões deste trabalho e algumas sugestões de trabalhos futuros ao tema abordado.

2 Modelagem do comportamento elastoplástico sob carregamento cíclico

Este capítulo é dedicado à apresentação formulação das relações constitutivas que descrevem o comportamento elastoplástico de um material metálico submetido a carregamento cíclico. Esta formulação requer a definição da lei de comportamento do material no regime elástico, de uma superfície de escoamento plástico, de uma regra de evolução para a deformação plástica, de uma regra que descreva o endurecimento cíclico do material, da condição de complementaridade de Kuhn-Tucker e da condição de persistência. Estes seis aspectos que definem um modelo elastoplástico serão abordados nas subseções 2.1 a 2.6, respectivamente. A subseção seguinte apresenta um resumo das relações constitutivas do modelo elastoplástico que é o foco deste trabalho, o modelo de Chaboche. Para uma descrição detalhada da modelagem do comportamento elastoplástico cíclico de materiais metálicos, o leitor pode consultar, por exemplo, os artigos de Chaboche (1986), Jiang e Kurath (1996), Jiang e Zhang (2008) e Zhang e Jiang (2008) e os livros de Lemaitre e Chaboche (1990) e Kang e Kan (2017).

2.1 Relação entre tensão e deformação elástica

Considera-se que o sólido sofre deformações infinitesimais e, portanto, o tensor das deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}$, admite a seguinte decomposição aditiva:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.1)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ são os tensores das deformações elásticas e plásticas, respectivamente. Assume-se ainda que o comportamento elástico do material seja linear e isotrópico. Nesse contexto, a relação entre o tensor tensão, $\boldsymbol{\sigma}$, e o tensor das deformações elásticas obedece à lei de Hooke generalizada, que pode ser expressa na forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.2)$$

onde

$$\mathbb{C} = K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G\mathbb{I}^{\text{dev}} \quad (2.3)$$

Nas expressões acima, \mathbb{C} é o tensor de rigidez elástica de 4ª ordem, \mathbf{I} é o tensor identidade de 2ª ordem, o símbolo \otimes denota o produto tensorial e $\mathbb{I}^{\text{dev}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$. Os constantes do material K e G denotam os módulos volumétrico e de cisalhamento, respectivamente.

2.2 Superfície de escoamento plástico

Considera-se que o comportamento do material é elástico se o tensor das tensões estiver no interior de um conjunto denominado *domínio elástico*. O contorno do domínio elástico constitui uma superfície no espaço das tensões de dimensão seis, denominada *superfície de escoamento plástico*, que é definida pela função

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 \quad (2.4)$$

onde o tensor \mathbf{a} define o centro do domínio elástico no espaço das tensões. Assume-se neste trabalho que a forma e o tamanho da superfície de escoamento plástico não mudam à medida que o material é deformado plasticamente. Considera-se apenas que a superfície de escoamento plástico pode transladar no espaço das tensões.

O presente estudo limita-se a função de escoamento plástico de von Mises, segundo a qual o escoamento plástico do material é insensível à tensão hidrostática e ao terceiro invariante do tensor das tensões. Dentro desse contexto, a função de escoamento plástico é expressa da seguinte forma:

$$f(\mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) = \|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\| - c = 0 \quad (2.5)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ é um tensor desviador chamado tensor de endurecimento cinemático e c é uma constante do material.

A determinação da constante c pode ser feita aplicando-se o modelo a um estado uniaxial de tensão, o que resulta na relação $c = \sqrt{2/3} \sigma_0$ onde σ_0 é a tensão de escoamento uniaxial. Logo, a função de escoamento plástico de von Mises pode ser escrita como:

$$f(\mathbf{S}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\| - \sigma_0 = 0 \quad (2.6)$$

2.3 Regra de evolução da deformação plástica

Uma regra de evolução da deformação plástica, também chamada regra de fluxo plástico, estabelece a relação entre a taxa da deformação plástica e a taxa do tensor tensão. A regra mais utilizada para metais assume que a taxa da deformação plástica é colinear à normal exterior à superfície de escoamento plástico no ponto correspondente ao estado de tensão:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \mathbf{N} \quad (2.7)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ é a taxa do tensor das deformações plásticas, $\dot{\lambda}$ é um escalar denominado multiplicador plástico e \mathbf{N} é o vetor normal a superfície de escoamento plástico (chamado vetor de fluxo plástico) definido por

$$\mathbf{N} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.8)$$

Para a função de escoamento plástico de von Mises definida por (2.6), o vetor de fluxo plástico é expresso como:

$$\mathbf{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}}{\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\|} \quad (2.9)$$

Substituindo (2.9) em (2.7), é possível estabelecer que a taxa da deformação plástica equivalente definida por

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P\| \quad (2.10)$$

é igual ao multiplicador plástico:

$$\dot{p} = \dot{\lambda} \quad (2.11)$$

2.4 Regras de endurecimento cinemático

O fenômeno de endurecimento caracteriza-se pela mudança do domínio elástico do material em decorrência da evolução das deformações plásticas que nele atuam. A modelagem matemática desse fenômeno é realizada, em geral, por meio da mudança da forma, do tamanho e da posição da superfície de escoamento plástico no espaço das tensões. No presente estudo, a modelagem do endurecimento do material é feita somente por meio da translação do centro da superfície de escoamento plástico, ou seja, definindo-se uma regra para a evolução do tensor de endurecimento cinemático, α . Essa escolha é motivada pelas observações experimentais obtidas por Jiang e Zhang (2008) – a partir de ensaios em diferentes materiais metálicos submetidos a diversas condições de carregamento cíclico – que indicam que o comportamento plástico cíclico não pode ser modelado de forma apropriada por meio do aumento do tamanho da superfície de escoamento plástico, ou seja, utilizando-se uma regra de endurecimento isotrópico.

No que se segue, apresenta-se de forma breve as regras de endurecimento cinemático desenvolvidas por Prager (1955, 1956) e Armstrong e Frederick (1966). Aborda-se ainda a regra de endurecimento cinemático proposta por Chaboche (1979), que é a utilizada no presente trabalho. Formulações mais avançadas de modelos de endurecimento cinemático podem ser encontradas em Bari e Hassan (2000), Zhang e Jiang (2008) e Kang e Kan (2017) e nas referências citadas por eles.

Prager (1955, 1956) assumiu que a taxa do tensor de endurecimento cinemático fosse proporcional à taxa do tensor das deformações plásticas:

$$\dot{\alpha} = k \dot{\epsilon}^p \quad (2.12)$$

onde k é uma constante do material. O modelo desenvolvido por Prager na década de 1950 representou um avanço importante na descrição do comportamento plástico cíclico, pois permitiu modelar a mudança na tensão de escoamento plástico quando ocorre uma reversão do

sentido do carregamento, fenômeno conhecido como efeito Bauschinger. Entretanto, o modelo de Prager apresenta várias inconsistências quando comparado com o comportamento elastoplástico cíclico observado em metais. Por exemplo, em um ensaio no qual a deformação axial é controlada, observa-se que os ramos superior e inferior do laço de histerese são não lineares, enquanto que o modelo de Prager prevê um comportamento bilinear. No caso de um ensaio cíclico axial controlado por tensão e com presença de tensão média trativa, o modelo de Prager prevê que o material irá acomodar elasticamente (*elastic shakedown*), embora observe-se o fenômeno de fluência cíclica (*ratcheting*). Essas inconsistências entre o comportamento do modelo de Prager e as observações experimentais, além de outras constatadas em carregamentos biaxiais, são discutidas em detalhe por Bari e Hassan (2000).

Armstrong e Frederick (1966) propuseram uma regra de endurecimento cinemático não linear que consiste no acréscimo de um termo de saturação à relação proposta por Prager, conforme a seguinte expressão:

$$\dot{\alpha} = k_1 \dot{\epsilon}^p - k_2 \alpha \dot{p} \quad (2.13)$$

onde k_1 e k_2 são constantes do material e \dot{p} é a taxa da deformação plástica equivalente definida em (2.10). A regra de Armstrong e Frederick ainda não é capaz de descrever de forma acurada o laço de histerese estabilizado observado em um material sujeito a deformação axial controlada. Além disso, essa regra de endurecimento cinemático superestima os níveis de deformação plástica observados em ensaios com tensão média controlada, conforme relatado em Bari e Hassan (2000). Apesar das limitações do modelo de Armstrong e Frederick, ele é hoje utilizado como a base para a formulação de regras de endurecimento cinemática que reproduzam de forma mais acurada o comportamento plástico cíclico de metais.

Chaboche e colaboradores (1979, 1986) formularam uma regra de endurecimento cinemático definida por uma soma de regras de Armstrong-Frederick, conforme a seguinte relação:

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^M \dot{\alpha}^{(i)} \quad (2.14)$$

$$\dot{\alpha}^{(i)} = k_1^{(i)} \dot{\epsilon}^p - k_2^{(i)} \alpha \dot{p} \quad (2.15)$$

onde M é o número de termos da decomposição aditiva, e $k_1^{(i)}$ e $k_2^{(i)}$ são constantes do material. Para M maior ou igual a 3, é possível representar de forma razoavelmente acurada o laço de histerese estabilizado proveniente de um ensaio controlado por deformação axial (Chaboche, 1986; Jiang e Kurath, 1996). Porém, o modelo de Chaboche não é capaz de descrever de forma satisfatória alguns dos comportamentos típicos observados em experimentos de fluência cíclica (Jiang e Sehitoglu, 1994; Jiang e Sehitoglu, 1996b; Bari e Hassan, 2000). Conforme discutido por Jiang e Kurath (1997), o modelo de Chaboche também é incapaz de simular o fenômeno de endurecimento adicional induzido por carregamento não proporcional observado em certos materiais, tais como aços inoxidáveis.

2.5 Condição de complementaridade de Kuhn-Tucker

A condição de complementaridade de Kuhn-Tucker estabelece que a evolução da deformação plástica somente pode ocorrer quando o tensor das tensões estiver sobre a superfície de escoamento plástico e, complementarmente, a deformação plástica não poderá evoluir se o tensor das tensões estiver no interior do domínio elástico. Tais restrições são expressas pelas seguintes relações matemáticas:

$$f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0 \quad (2.16)$$

Quando $f < 0$, o tensor das tensões está no interior do domínio elástico e, portanto, o produto $\dot{\lambda} f = 0$ impõe que $\dot{\lambda} = 0$, isto é, não se observa evolução da deformação plástica. Por outro lado, se $\dot{\lambda} > 0$, isto é, se há evolução da deformação plástica, então necessariamente $f = 0$, ou seja, o tensor das tensões deve estar sobre a superfície de escoamento.

2.6 Condição de persistência

A condição de persistência, ou de consistência, é necessária para descrever o que pode ocorrer quando o tensor das tensões está sobre a superfície de escoamento plástico. Ela é expressa pelas seguintes restrições:

$$\text{Se } f = 0, \text{ então } \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{f} \leq 0 \quad \dot{\lambda} \dot{f} = 0 \quad (2.17)$$

Esta condição estabelece que, quando o tensor das tensões está sobre a superfície de escoamento plástico, então: (i) se há deformação plástica ($\dot{\lambda} > 0$) então $\dot{f} = 0$ e, portanto, o tensor das tensões deve permanecer sobre a superfície de escoamento plástico; (ii) se há descarregamento elástico ($\dot{f} < 0$), então não há evolução da deformação plástica ($\dot{\lambda} = 0$).

2.7 Resumo do modelo elastoplástico de Chaboche

As relações constitutivas do modelo elastoplástico de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche, foco do presente estudo, estão resumidas no Quadro 2.1.

Quadro 2.1 – Resumo do modelo constitutivo com superfície de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Chaboche.

1. Decomposição aditiva do tensor das deformações

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

2. Relação elástica, linear e isotrópica

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

$$\mathbb{C} = K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G\mathbb{I}^{\text{dev}}$$

3. Função de escoamento plástico

$$f(\mathbf{S}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\| - \sigma_0 = 0$$

4. Regra de fluxo plástico

$$\mathbf{N} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}}{\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\|}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{p}\mathbf{N}$$

Quadro 2.1 – Resumo do modelo constitutivo com superfície de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Chaboche (continuação).

5. Regra de endurecimento cinemático

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^M \dot{\alpha}^{(i)}$$

$$\dot{\alpha}^{(i)} = k_1^{(i)} \dot{\epsilon}^p - k_2^{(i)} \alpha \dot{p}$$

6. Condição de complementaridade de Kuhn-Tucker

$$f \leq 0, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}f = 0$$

7. Condição de persistência

$$\dot{f} \leq 0, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}\dot{f} = 0 \text{ (se } f = 0)$$

3 Algoritmo de integração numérica para modelos de plasticidade cíclica

3.1 Revisão da literatura

Esta seção apresenta uma revisão da literatura sobre algoritmos de integração numérica para modelos de plasticidade cíclica. O escopo da apresentação restringe-se a modelos elastoplásticos com as seguintes características: a deformação total é pequena; a relação entre tensão e deformação no regime elástico é linear e isotrópica; a taxa de deformação plástica é associada a uma superfície quadrática de escoamento; a taxa de evolução do centro do domínio elástico (regra de endurecimento cinemático) é governada por uma relação do tipo Armstrong–Frederick. Vale mencionar que em muitos dos trabalhos citados na presente revisão a superfície de escoamento de von Mises é utilizada; além disso, alguns pesquisadores incluem no modelo elastoplástico um encruamento isotrópico não linear.

Hartmann e Haupt (1993) propuseram um algoritmo para encontrar a solução do modelo de plasticidade de von Mises com regra de endurecimento cinemático de Armstrong e Frederick (1966). A discretização no tempo do problema evolutivo foi baseada no método implícito de Euler. Por meio de manipulações algébricas, os pesquisadores mostraram que é possível reduzir o problema elastoplástico incremental original (um sistema não linear de equações com 14 incógnitas) à solução de uma única equação não linear para o incremento do multiplicador plástico, $\Delta\lambda$, que pode ser resolvida de forma eficiente pelo método de Newton–Raphson. Como todas as demais quantidades do problema podem ser escritas em função de $\Delta\lambda$, o cálculo desta quantidade implica na obtenção da solução do problema. Vale ressaltar que o algoritmo desenvolvido por Hartmann e Haupt também funciona no caso mais geral em que a regra de endurecimento cinemático é definida como uma soma de relações de Armstrong–Frederick, tal como proposto por Chaboche *et al.* (1979).

No mesmo ano da publicação do artigo de Hartmann e Haupt, Doghri (1993) apresentou um algoritmo para solução do modelo de plasticidade de von Mises com endurecimento cinemático de Armstrong e Frederick. O algoritmo de Doghri também empregava o método implícito de Euler para discretização no tempo das relações constitutivas em taxas e, por meio de manipulações algébricas, o pesquisador mostrou que o problema elastoplástico discretizado no tempo reduz-se a encontrar as incógnitas $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}$ e p (\mathbf{S} é o tensor das tensões desviadoras, $\boldsymbol{\alpha}$ é o tensor de endurecimento cinemático e p é a deformação plástica acumulada) por meio da resolução de um sistema formado por 7 equações não lineares. Doghri propôs o uso do método de Newton–Raphson para resolver o sistema de equações não lineares e demonstrou que as aproximações sucessivas fornecidas pelo método podem ser calculadas com fórmulas explícitas. Como o método não requer a inversão de matrizes ou a solução de sistemas lineares para obter as aproximações sucessivas, Doghri observou que ele poderia ser mais eficiente do ponto de vista numérico que outros algoritmos disponíveis na literatura. Nesse contexto, cabe ressaltar que Doghri não fez nenhuma referência ao trabalho de Hartmann e Haupt (1993), o que é de se esperar uma vez que os artigos de Doghri e de Hartmann e Haupt foram publicados na mesma edição e volume do periódico *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

Hopperstad e Remseth (1995) propuseram um algoritmo implícito de integração numérica para uma classe de modelos elastoplásticos constituída de uma superfície quadrática de escoamento, endurecimento cinemático do tipo Armstrong–Frederick e endurecimento isotrópico não linear (ambos decompostos de forma aditiva em múltiplos termos). A discretização no tempo das relações constitutivas foi feita empregando-se o método implícito de Euler, e o método da decomposição (Matthies, 1989) foi utilizado para resolver o problema elastoplástico incremental, que foi reduzido à obtenção da solução de uma equação não linear cuja incógnita é o incremento do multiplicador plástico. Os pesquisadores mostraram por meio

de testes numéricos que valores de tensão com boa exatidão podem ser obtidos com passos de deformação da ordem da deformação de escoamento do material. Os testes numéricos estudados envolveram (i) a aplicação de histórias de deformação biaxial não proporcional em uma placa em estado homogêneo de deformação e (ii) uma placa com furo submetida a dois ciclos de deslocamento axial. Deve-se ressaltar que as simulações elastoplásticas foram realizadas considerando um material descrito por regras de endurecimento isotrópico e cinemático não linear compostas por dois termos.

Kobayashi e Ohno (2002) desenvolveram um algoritmo original para integração numérica de uma classe de modelos elastoplásticos constituída pela função de escoamento de von Mises e por uma regra de endurecimento cinemático mais geral que a desenvolvida por Armstrong e Frederick (1966) e Chaboche *et al.* (1979). Esta regra engloba, a partir de uma relação apropriada do termo de recuperação dinâmica, a regra de endurecimento cinemático desenvolvida por Ohno e Wang (1993, 1994) e a proposta por Ohno e Abdel-Karim (2000). Seguindo as linhas do trabalho de Hartmann e Haupt (1993), Kobayashi e Ohno mostraram que o problema elastoplástico original (discretizado no tempo) reduz-se a obtenção da solução de uma equação não linear cuja incógnita é o incremento da deformação plástica acumulada. Ao invés do método de Newton–Raphson, os pesquisadores desenvolveram um algoritmo para solução da equação não linear baseado no método de substituições sucessivas combinado com o método de Aitken para acelerar a convergência do processo iterativo. Vale salientar que os autores demonstraram que o método de substituições sucessivas proposto converge caso o segundo do termo da regra de endurecimento cinemático não seja maior que o primeiro.

Ohno *et al.* (2013) desenvolveram um algoritmo implícito de integração numérica para modelos de plasticidade cíclica com função de escoamento de von Mises, regra não linear de endurecimento isotrópico e regra de endurecimento cinemático cuja generalidade contempla, por exemplo, as regras propostas por Ohno e Wang (1993) e Jiang e Sehitoglu (1996). O método

implícito de Euler foi usado na discretização no tempo das relações constitutivas e os pesquisadores mostraram, por meio de manipulações algébricas, que o problema pode ser reduzido a encontrar a solução de uma equação não linear cuja incógnita é o tensor das deformações plásticas. O método de Newton–Raphson foi usado para resolver a equação não linear. Uma característica atrativa do algoritmo é que sua estrutura permite a sua aplicação tanto a um estado tridimensional de tensões quanto a um estado plano de tensões. O algoritmo foi testado considerando-se uma placa submetida a três diferentes histórias monotônicas de deformação (tração, cisalhamento e tração-tração) e uma placa com furo submetida a tração constante e flexão cíclica. Em todas essas simulações elastoplásticas, o algoritmo mostrou-se estável inclusive quando incrementos de carregamento pouco refinados foram utilizados.

O estudo desenvolvido por De Angelis e Taylor (2016) apresentou um método de integração numérica implícita para o modelo de Chaboche no qual o problema elastoplástico local reduz-se a encontrar a solução de uma equação escalar não linear cuja incógnita é o incremento da deformação plástica acumulada. Os pesquisadores mostraram ainda que essa equação não linear é uma equação do quarto grau, não havendo, portanto, a necessidade de recorrer a métodos iterativos de solução uma vez que as raízes reais positivas dessa equação podem ser calculadas com fórmulas fechadas.

3.2 Integração numérica do modelo de Chaboche pelo método de Doghri

Em modelos elastoplásticos, o processo de atualização das equações constitutivas ocorre por meio de um algoritmo de integração numérica. Isso é necessário porque as soluções analíticas para o problema de valor inicial de equações elastoplástica são geralmente desconhecidas para histórias de deformação complexas (Souza Neto *et al.*, 2008).

Adota-se no presente trabalho o método de Euler implícito para discretizar as equações constitutivas no pseudointervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$. Dado o incremento de deformação total,

$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, e conhecidas as variáveis do modelo constitutivo no instante, t_n , atualizam-se essas variáveis para o instante de tempo seguinte, t_{n+1} . Para simplificar a notação, toda vez que for pertinente o uso do subscrito $n + 1$ será omitido. Assim, por exemplo, o tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ no instante t_{n+1} será representado apenas por $\boldsymbol{\sigma}$. Outra observação sobre notação é que parâmetros que representam o estado tentativa, serão definidos por um asterisco sobrescrito, isto é, $(\)^*$.

O algoritmo de integração numérica divide o problema em preditor elástico e corretor plástico, também conhecido como mapeamento de retorno. No preditor elástico assume-se que não há evolução da deformação plástica e calcula-se o tensor das tensões ao final do pseudointervalo de tempo. Caso esse tensor das tensões não viole o critério de escoamento plástico de von Mises, então a suposição inicial está correta e encerra-se a computação para este incremento, atualizando todas as variáveis plásticas considerando os valores para o instante $n + 1$ igual ao instante inicial. Caso contrário, o estado tentativo é corrigido por meio do mapeamento de retorno descrito a seguir.

A aplicação do método de Euler implícito ao modelo constitutivo descrito no Quadro 2.1 resulta nas seguintes relações constitutivas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* - 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.1)$$

$$f = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - \sigma_0 = 0 \quad (3.2)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta p \mathbf{N} \quad (3.3)$$

$$\Delta\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = k_1^{(i)} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p - k_2^{(i)} \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \Delta p \quad (3.4)$$

Na Eq. (3.2) considera-se que $J_2(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{3/2} \|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\|$ em conformidade com a notação utilizada por Doghri (1993). Entretanto, deve-se observar que essa definição não é a usualmente empregada para o segundo invariante do tensor das tensões.

Seja $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}$. Então, a função de escoamento plástico (2.6) e o vetor de fluxo plástico (2.9) podem ser escritos na forma

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\beta}}{J_2(\boldsymbol{\beta})} \quad (3.5)$$

$$f = J_2(\boldsymbol{\beta}) - \sigma_0 = 0 \quad (3.6)$$

Aplicando o operador \mathbb{I}^{dev} na Eq. (3.1), obtém-se a seguinte relação para o tensor das tensões desviadoras:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^* - 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.7)$$

Subtraindo o tensor de endurecimento cinemático, $\boldsymbol{\alpha}$, dos dois lados da Eq. (3.7), tem-se:

$$\boldsymbol{\beta} - \mathbf{S}^* + 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Inserindo Eq. (3.3) na Eq. (3.4) e isolando $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$, resulta-se em:

$$\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + k_1^{(i)}\Delta p\mathbf{N}}{1 + k_2^{(i)}\Delta p} \quad (3.9)$$

Substituindo o incremento da deformação plástica, Eq. (3.3), e o tensor das tensões cinemáticas, Eq. (3.9), na Eq. (3.8), obtém-se a equação na forma residual:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\beta} - \mathbf{S}^* + 2G\Delta p\mathbf{N} + \sum_{i=1}^M \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + k_1^{(i)}\Delta p\mathbf{N}}{1 + k_2^{(i)}\Delta p} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

O problema então reduz-se a encontrar as incógnitas $\boldsymbol{\beta}$ e p do sistema não linear formado pelas equações residuais Eq. (3.6) e Eq. (3.10):

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}, p) = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

$$f(\boldsymbol{\beta}, p) = 0 \quad (3.12)$$

A solução do sistema de equações será obtida pelo método de Newton-Raphson. Cada iteração do método é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,\boldsymbol{\beta}} & \mathbf{R}_{,p} \\ f_{,\boldsymbol{\beta}} & f_{,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\beta} \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} \\ -f \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{R}_{,\beta}$, $\mathbf{R}_{,p}$, $f_{,\beta}$ e $f_{,p}$ são as derivadas das equações residuais em função das incógnitas β e p .

Assim:

$$\mathbf{R}_{,\beta} = \mathbb{I} + 2G\Delta p \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \beta} + \left(\sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)} \Delta p}{1 + k_2^{(i)} \Delta p} \right) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \beta} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{R}_{,p} = 2G\mathbf{N} + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)} \mathbf{N} - \alpha_n^{(i)} k_2^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \quad (3.15)$$

$$f_{,\beta} = \mathbf{N} \quad (3.16)$$

$$f_{,p} = 0 \quad (3.17)$$

Note que:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \beta} = \frac{1}{J_2(\beta)} \left[\frac{3}{2} \mathbb{I}^{\text{dev}} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \quad (3.18)$$

Mostra-se a seguir que os incrementos $\delta\beta$ e δp do passo de Newton-Raphson podem ser obtidos de forma explícita, ou seja, sem a necessidade de resolver numericamente o sistema de equações lineares, Eq. (3.13). Substituindo a Eq. (3.14) a Eq. (3.17) na Eq. (3.13) tem-se:

$$\mathbf{R} + \left[\mathbb{I} + \left(2G + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)}}{1 + k_2^{(i)} \Delta p} \right) \Delta p \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \beta} \right] \delta\beta + \left[2G\mathbf{N} + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)} \mathbf{N} - \alpha_n^{(i)} k_2^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \right] \delta p \quad (3.19)$$

$$= \mathbf{0} \quad (3.20)$$

$$f + \mathbf{N} \cdot \delta\beta = 0$$

O incremento δp pode ser obtido fazendo-se o produto interno da Eq. (3.19) com vetor de fluxo \mathbf{N} . Isto resulta em:

$$\delta p = \frac{f - \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}}{D} \quad (3.21)$$

onde:

$$D = 3G + \sum_{i=1}^M \frac{\frac{3}{2}k_1^{(i)} - k_2^{(i)}(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)})}{(1 + k_2^{(i)}\Delta p)^2} \quad (3.22)$$

Vale ressaltar que no procedimento de obtenção da Eq. (3.21) fez-se uso das seguintes relações:

$$(i) \ (\mathbb{I}\delta\boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{N} = -f$$

Demonstração: Tem-se que $(\mathbb{I}\delta\boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{N} = \delta\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{N}$. Usando a Eq. (3.20) chega-se na relação (i).

$$(ii) \ \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \delta\boldsymbol{\beta}\right) \cdot \mathbf{N} = 0$$

Demonstração: Tem-se que $\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \delta\boldsymbol{\beta}\right) \cdot \mathbf{N} = \delta\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{N}$. Usando a relação (3.18) conclui-se que

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{N} = \mathbf{0}. \text{ Logo, } \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \delta\boldsymbol{\beta}\right) \cdot \mathbf{N} = \delta\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{0} = 0.$$

Obtém-se a seguir a expressão explícita para o cálculo do incremento $\delta\boldsymbol{\beta}$. Primeiro, deve-se notar que $\delta\boldsymbol{\beta}$ é um tensor desviador. Esta propriedade pode ser obtida aplicando-se o operador traço na Eq. (3.19). Usando este resultado e inserindo a Eq. (3.18) na Eq. (3.19) resulta em:

$$\mathbb{B}\delta\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{R} - \left[2G\mathbf{N} + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)}\mathbf{N} - \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}k_2^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)}\Delta p)^2} \right] \delta p \quad (3.23)$$

onde:

$$\mathbb{B} = \left(1 + \frac{3}{2}g\right)\mathbb{I} - g\mathbf{N}\otimes\mathbf{N} \quad (3.24)$$

e

$$g = \frac{\Delta p}{J_2(\boldsymbol{\beta})} \left(2G + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)}}{1 + k_2^{(i)}\Delta p} \right) \quad (3.25)$$

Note que a inversa de \mathbb{B} pode ser obtida usando o seguinte lema:

Lema. Seja $\mathbb{C} = \mathbb{I} - (1/h)\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ e $h_c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Se $h \neq h_c$, então \mathbb{C} é inversível e a inversa é dada por:

$$\mathbb{C}^{-1} = \mathbb{I} + \frac{1}{h - h_c} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \quad (3.26)$$

Este lema pode ser verificado aplicando-se \mathbb{C} em \mathbb{C}^{-1} .

Usando o lema acima, tem-se que a inversa de \mathbb{B} é expressa por:

$$\mathbb{B}^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}g} (\mathbb{I} + g\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \quad (3.27)$$

Aplicando a Eq. (3.27) na Eq. (3.23) chega-se na seguinte fórmula para o incremento de $\boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\beta} = & -\frac{\mathbf{R} + g(\mathbf{N} \cdot \mathbf{R})\mathbf{N}}{1 + \frac{3}{2}g} - \left[2G + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)}\Delta p)^2} \right] \mathbf{N} \delta p \\ & + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}g} \left[\sum_{i=1}^M \frac{k_2^{(i)} [\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + g(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)})\mathbf{N}]}{(1 + k_2^{(i)}\Delta p)^2} \right] \delta p \end{aligned} \quad (3.28)$$

Portanto, as iterações do método de Newton-Raphson são dadas por:

$$p_{j+1} = p_j + \delta p \quad (3.29)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{j+1} = \boldsymbol{\beta}_j + \delta\boldsymbol{\beta} \quad (3.30)$$

onde os passos δp e $\delta\boldsymbol{\beta}$ são calculados usando-se as expressões (3.21) e (3.28).

Considera-se que a solução do sistema de equações não lineares (3.11) e (3.12) foi encontrada quando os resíduos $\|\mathbf{R}_{j+1}\|$ e $\|f_{j+1}\|$ forem menores que uma determinada tolerância. Os valores iniciais de p e $\boldsymbol{\beta}$ são obtidos assumindo-se que a resposta do material é elástica. Após a convergência do método de Newton-Raphson, p e $\boldsymbol{\beta}$ adquirem os valores do último incremento, isto é, $p = p_j$ e $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_j$ ($j = 1, 2, \dots, j$). As demais variáveis de estado são atualizadas com as seguintes expressões:

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\beta}}{J_2(\boldsymbol{\beta})} \quad (3.31)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta p \mathbf{N} \quad (3.32)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^M \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + k_1^{(i)} \Delta p \mathbf{N}}{1 + k_2^{(i)} \Delta p} \quad (3.33)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.34)$$

3.3 Determinação do operador tangente consistente

O operador tangente consistente é responsável por garantir taxa de convergência quadrática às iterações globais do método de Newton-Raphson (Simo e Taylor, 1985). Após a convergência do algoritmo de integração local, o operador tangente consistente \mathbf{J} é determinado fazendo-se uma perturbação de todas as variáveis em torno na solução obtida no instante t_{n+1} .

Dessa forma:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.35)$$

A derivada de \mathbf{R} e f em relação a $\boldsymbol{\beta}$, p e $\boldsymbol{\varepsilon}$ resulta em:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbb{I} + \left(2G + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)}}{1 + k_2^{(i)} \Delta p} \right) \Delta p \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right] \delta \boldsymbol{\beta} \\ & + \left[2G \mathbf{N} + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)} \mathbf{N} - \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} k_2^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \right] \delta p - 2G \mathbb{I}^{\text{dev}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ & = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{N} \cdot \delta \boldsymbol{\beta} = 0 \quad (3.37)$$

Fazendo o produto interno da Eq. (3.36) com \mathbf{N} e levando em consideração a Eq. (3.37) tem-se a seguinte expressão explícita para δp :

$$\delta p = \frac{2G\mathbf{N} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}}{D} \quad (3.38)$$

onde:

$$D = 3G + \sum_{i=1}^M \frac{\frac{3}{2}k_1^{(i)} - k_2^{(i)}(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)})}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \quad (3.39)$$

Aplicando o operador traço na Eq. (3.36) tem-se que $\text{tr}(\delta \boldsymbol{\beta}) = 0$. Tendo em vista esta relação, pode-se reescrever a equação como:

$$\begin{aligned} \mathbb{B} \delta \boldsymbol{\beta} = & - \left[2G\mathbf{N} + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)} \mathbf{N} - \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} k_2^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \right] \delta p \\ & + 2G \mathbb{I}^{\text{dev}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Usando a expressão de \mathbb{B}^{-1} dada pela Eq. (3.27) obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\beta} = & \frac{2G}{1 + \frac{3}{2}g} (\mathbb{I}^{\text{dev}} + g\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ & - \left[2G + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \right] \mathbf{N} \delta p \\ & + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}g} \left[\sum_{i=1}^M \frac{k_2^{(i)} [\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + g(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}) \mathbf{N}]}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \right] \delta p \end{aligned} \quad (3.41)$$

Derivando a expressão (3.9) e substituindo a relação de $\delta \boldsymbol{\beta}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{\alpha}^{(i)} = & \frac{k_1^{(i)} \mathbf{N} - \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} k_2^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \delta p \\
& + \frac{k_1^{(i)} \Delta p}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)} \frac{1}{J_2(\boldsymbol{\beta})} \left\{ \frac{3}{2} \delta \boldsymbol{\beta} - 2G(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \delta \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\
& + \frac{3}{2} \left[2G + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \right] \mathbf{N} \delta p \\
& \left. - \left[\sum_{i=1}^M \frac{k_2^{(i)} (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}) \mathbf{N}}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \right] \delta p \right\}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

O incremento de tensão pode ser escrito como:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \delta \boldsymbol{\beta} + \delta \boldsymbol{\alpha} + K(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \delta \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.43}$$

Inserindo as expressões de δp , $\delta \boldsymbol{\beta}$ e $\delta \boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ na Eq. (3.43) e realizando manipulações algébricas, a seguinte expressão para o operador tangente consistente é obtida:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} = & \mathbf{H} - \Delta p \frac{(2G)^2}{1 + \frac{3}{2}g} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \Delta p \\
& - \frac{(2G)^2}{\left(1 + \frac{3}{2}g\right) J_2(\boldsymbol{\beta})} \frac{1}{D} \left[\frac{3}{2} \sum_{i=1}^M \frac{k_2^{(i)} \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \right. \\
& \left. - \mathbf{N} \sum_{i=1}^M \frac{k_2^{(i)} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)} \Delta p)^2} \right] \otimes \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

onde:

$$\mathbf{H} = \mathbb{C} - \frac{(2G)^2}{D} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \tag{3.45}$$

3.4 Resumo do algoritmo de integração implícita do modelo de Chaboche pelo método de Doghri

O Quadro 3.1 apresenta um resumo do algoritmo de integração implícita do modelo de Chaboche pelo método de Doghri.

Quadro 3.1 – Algoritmo de integração implícita do modelo de Chaboche pelo método de Doghri

I. Dado $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ e conhecidos valores de variáveis do modelo do material no tempo inicial (t_n), calcula-se o estado tentativo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e*} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \qquad p^* = p_n$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{e*} \qquad \boldsymbol{\alpha}^{(i)*} = \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}$$

II. Verificar admissibilidade plástica

$$f^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}^* - \boldsymbol{\alpha}^*\| - \sigma_0$$

- Se $f^* \leq 0$, então passo será elástico:
 $(\dots) = (\dots)^*$
 FIM
- Se $f^* > 0$, então passo será plástico e algoritmo do mapa de retorno deverá ser acionado.

III. Mapeamento de retorno

Resolver o sistema de equações não-lineares através do método de Newton-Raphson com passos calculados explicitamente.

- Definir variáveis iniciais:

$$p^{(0)} = p_n \qquad \boldsymbol{\alpha}^{(i)(0)} = \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}$$

Quadro 3.1 – Algoritmo para atualização da tensão e demais variáveis com superfície de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Chaboche (continuação).

- Resolver sistema de equações não-lineares para determinar $\boldsymbol{\beta}$ e p :

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \boldsymbol{\beta} - \mathbf{S}^* + 2G\Delta p\mathbf{N} + \sum_{i=1}^M \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + k_1^{(i)}\Delta p\mathbf{N}}{1 + k_2^{(i)}\Delta p} = \mathbf{0} \\ f = J_2(\boldsymbol{\beta}) - \sigma_0 = 0 \end{cases}$$

Determinar explicitamente os incrementos $\delta\boldsymbol{\beta}$ e δp do passo de Newton-Raphson pelas equações:

$$\delta p = \frac{f - \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}}{D}$$

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\beta} = & -\frac{\mathbf{R} + g(\mathbf{N} \cdot \mathbf{R})\mathbf{N}}{1 + \frac{3}{2}g} - \left[2G + \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)}}{(1 + k_2^{(i)}\Delta p)^2} \right] \mathbf{N}\delta p \\ & + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}g} \left[\sum_{i=1}^M \frac{k_2^{(i)} [\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + g(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)})\mathbf{N}]}{(1 + k_2^{(i)}\Delta p)^2} \right] \delta p \end{aligned}$$

- Calcular:

$$p_{j+1} = p_j + \delta p$$

$$\boldsymbol{\beta}_{j+1} = \boldsymbol{\beta}_j + \delta\boldsymbol{\beta}$$

- Verificar convergência

IV. Atualizar outras variáveis:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta p\mathbf{N}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^M \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + k_1^{(i)}\Delta p\mathbf{N}}{1 + k_2^{(i)}\Delta p}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

Quadro 3.1 – Algoritmo para atualização da tensão e demais variáveis com superfície de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Chaboche (continuação).

V. Calcular operador tangente consistente

$$\mathbf{J} = \mathbf{H} - \Delta p \frac{(2G)^2}{1 + \frac{3}{2}g} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\beta}}$$

$$- \Delta p \frac{(2G)^2}{\left(1 + \frac{3}{2}g\right) J_2(\boldsymbol{\beta}) D} \left[\frac{3}{2} \sum_{i=1}^M \frac{k_2^{(i)} \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}}{\left(1 + k_2^{(i)} \Delta p\right)^2} - \mathbf{N} \sum_{i=1}^M \frac{k_2^{(i)} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}}{\left(1 + k_2^{(i)} \Delta p\right)^2} \right] \otimes \mathbf{N}$$

VI. FIM

4 Testes Numéricos

Este capítulo apresenta um conjunto de testes numéricos que visam avaliar o algoritmo de Doghri para integração implícita do modelo de Chaboche. O algoritmo foi incorporado ao programa comercial de elementos finitos Abaqus 6.14 por meio do desenvolvimento da sub-rotina UMAT listada no Apêndice. Todas as simulações numéricas foram realizadas em uma estação de trabalho Dell Precision 7910 equipada com dois processadores Intel Xeon (2.4 GHz) e 128 GB de RAM.

Os primeiros experimentos numéricos foram conduzidos em um cubo de lado unitário, discretizado com um único elemento hexaédrico de 8 nós, e submetido a deformação axial monotônica, a deformação biaxial com trajetória do tipo cruz e a deformação biaxial com trajetória circular. O segundo conjunto de simulações numéricas foram realizados em um corpo cilíndrico com entalhe circunferencial em U, discretizado com elementos hexaédricos de 20 nós e com elementos prismáticos de 15 nós, e submetido a força axial e torque com trajetórias circular e do tipo cruz.

Em todas as simulações numéricas realizadas, adotou-se como critério de parada das iterações locais de Newton-Raphson os seguintes critérios de convergência:

$$\|\mathbf{R}^{(j)}\|/\sigma_0 < 10^{-6} \quad (4.1)$$

$$|f^{(j)}|/\sigma_0 < 10^{-6} \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{R}^{(j)}$ e $f^{(j)}$ são os valores dos resíduos (3.11) e (3.12) correspondentes a iteração (j) do método de Newton-Raphson.

Dois tipos de relações constitutivas foram considerados nas simulações numéricas, um cuja regra de endurecimento cinemático é formada por um único de termo do tipo Armstrong-Frederick ($M = 1$) e outro com cinco termos ($M = 5$). As constantes do material utilizadas nas simulações estão listadas nas Tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1 – Constantes do material para o caso $M = 1$.

Módulo de Young	$E = 210000$ MPa
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,27$
Tensão de escoamento	$\sigma_0 = 225$ MPa
Parâmetros da regra de endurecimento cinemático	$k_1 = 180000$ MPa $k_2 = 1300$

Tabela 4.2 – Constantes do material para o caso $M = 5$.

Módulo de Young	$E = 204000$ MPa
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,27$
Tensão de escoamento	$\sigma_0 = 100$ MPa
Parâmetros da regra de endurecimento cinemático	$k_1^{(1)} = 3128449$ MPa $k_2^{(1)} = 20750$
	$k_1^{(2)} = 188180$ MPa $k_2^{(2)} = 3765$
	$k_1^{(3)} = 64149$ MPa $k_2^{(3)} = 1116$
	$k_1^{(4)} = 26366$ MPa $k_2^{(4)} = 354$
	$k_1^{(5)} = 16664$ MPa $k_2^{(5)} = 77$

4.1 Elemento hexaédrico de 8 nós submetido à deformação uniaxial monotônica

O primeiro experimento numérico foi realizado em um cubo de lado unitário, discretizado com um único elemento hexaédrico de 8 nós com integração completa (tipo C3D8 do Abaqus) e submetido a uma história monotônica de deformação axial, Fig 4.1.

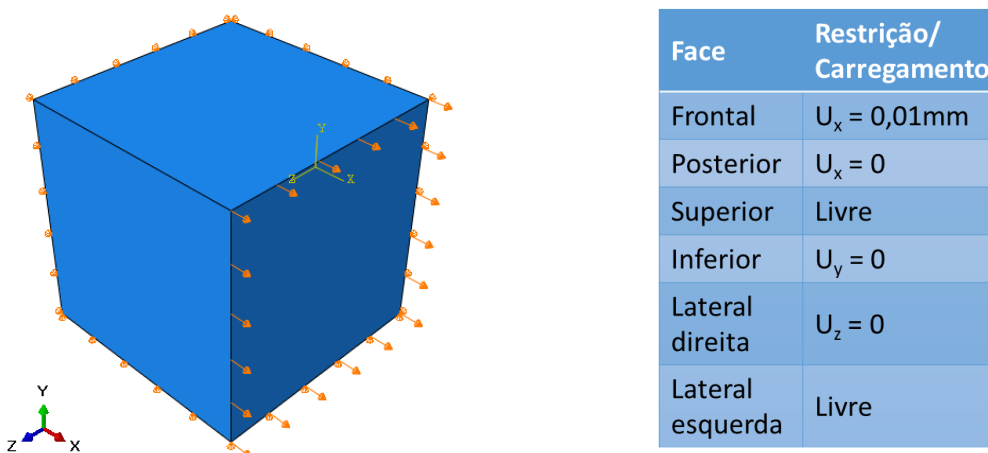


Figura 4.1 – Condições de contorno para elemento finito hexaédrico de 8 nós submetido à deformação axial monotônica.

A deformação aplicada foi discretizada em N_{inc} incrementos e considerou-se os casos $N_{inc} = 1, 5$ e 20 . As tensões obtidas por simulação numérica foram comparadas com a solução exata (Chaboche, 1986) expressa por:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{se } \sigma < \sigma_0 \quad (4.3)$$

$$\sigma = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^M \frac{k_1^{(i)}}{k_2^{(i)}} \left(1 - e^{-k_2^{(i)} \varepsilon^p}\right) + \sigma_0 \quad \text{se } \sigma \geq \sigma_0 \quad (4.4)$$

onde σ é a tensão axial, ε é a deformação axial, E é o módulo de Young e $\varepsilon^p = \varepsilon - \sigma/E$ é deformação plástica axial.

As tensões simuladas e as dadas pela solução exata são comparadas na Fig. 4.2 para os casos $M = 1$ e $M = 5$. Observa-se que as tensões simuladas convergem para a solução exata a medida que o incremento de deformação diminui, o que indica a consistência da solução numérica obtida pelo algoritmo. Na Fig. 4.3 mostra-se, para a simulação na qual o carregamento foi discretizado com $N_{inc} = 1$, os resíduos correspondentes a cada iteração de Newton-Raphson. Pode-se observar que a taxa de convergência das iterações de Newton-Raphson é quadrática quando o resíduo é suficientemente pequeno.

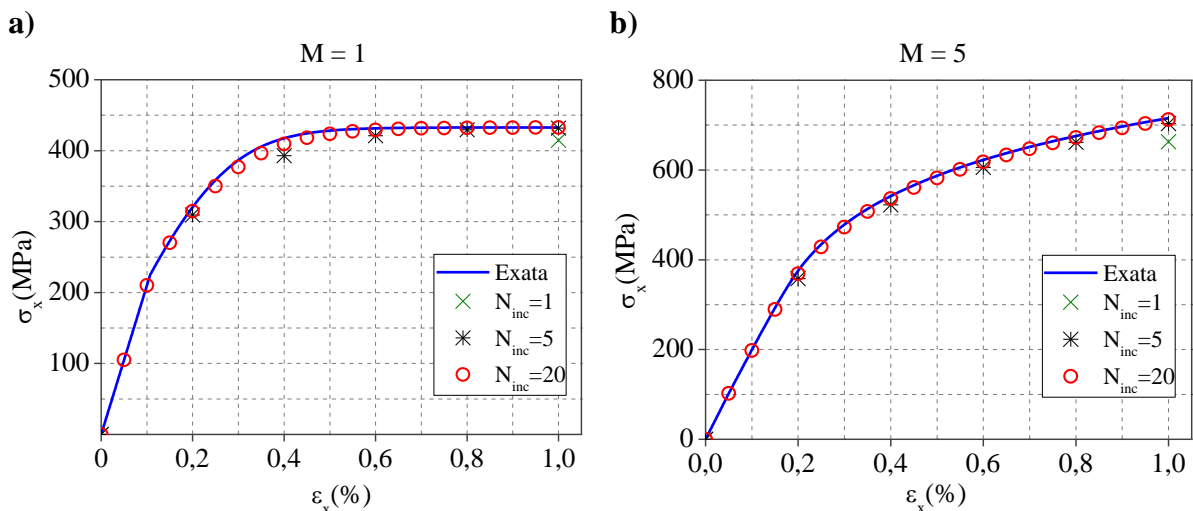


Figura 4.2 – Elemento finito hexaédrico de 8 nós submetido à deformação axial. Resposta tensão-deformação obtida por simulação numérica versus solução exata para o modelo de Chaboche com (a) $M = 1$ e (b) $M = 5$.

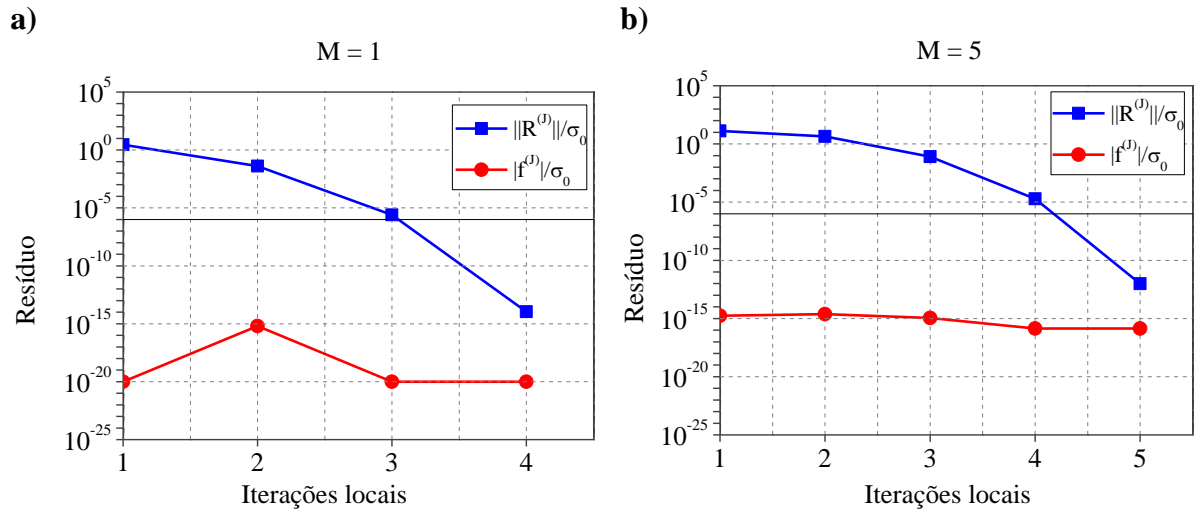


Figura 4.3 – Elemento finito hexaédrico de 8 nós submetido à deformação axial. Convergência das iterações de Newton-Raphson do algoritmo implícito de integração numérica para o caso $N_{inc} = 1$. A linha horizontal preta indica a tolerância do critério de convergência.

4.2 Elemento hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória circular

O presente experimento numérico consiste em submeter o elemento hexaédrico de 8 nós a deformações axiais nas direções x e y , Fig. 4.4, que descrevem a trajetória circular mostrada na Fig. 4.5. As trajetórias de carregamento foram discretizadas considerando-se incrementos de tempo, Δt , iguais a 0,01, 0,05, 0,005 e 0,001. Adotou-se como a solução numérica “exata” os resultados das simulações realizadas com $\Delta t = 0,001$.

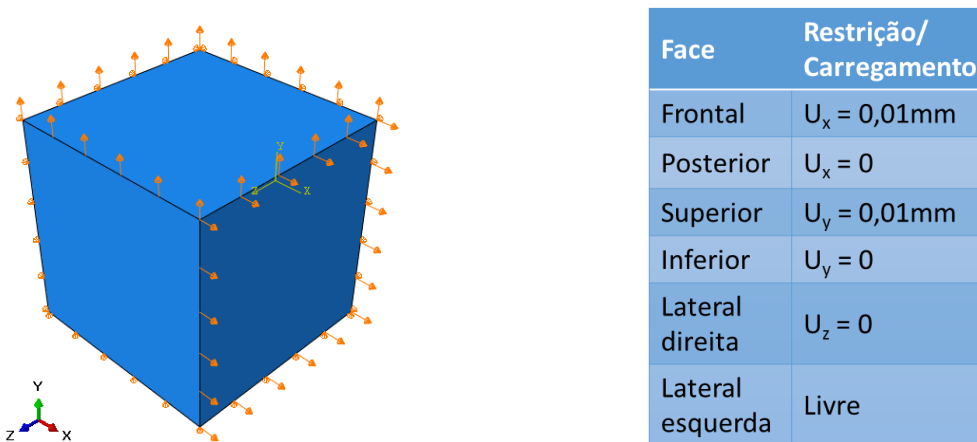


Figura 4.4 – Condições de contorno para elemento finito hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória circular.

A Fig. 4.6. apresenta as tensões simuladas quando o modelo constitutivo de Chaboche com $M = 1$ foi utilizado. Para facilitar a visualização da figura, as simulações conduzidas com $\Delta t = 0,01$ e $0,005$ não foram mostradas. Nenhum problema de convergência foi observado, inclusive para a simulação conduzida com uma discretização do tempo pouco refinada ($\Delta t = 0,01$).

As simulações numéricas realizadas com o modelo de Chaboche com $M = 5$ e incrementos de tempo maiores que $0,005$ foram abortadas devido a problemas de convergência. Levantou-se a hipótese deste problema ter ocorrido por causa de um erro na implementação da sub-rotina UMAT. Por isso, as mesmas simulações foram repetidas usando o modelo de Chaboche presente no Abaqus. Estas simulações também foram abortadas devido aos mesmos problemas de convergência, descartando a hipótese de erros na sub-rotina. Adotando-se um incremento de tempo igual a $0,001$, as simulações foram concluídas com sucesso e as tensões obtidas são mostradas na Fig. 4.7. Observa-se que as tensões calculadas pelas simulações realizadas com o modelo de Chaboche presente no Abaqus e com a sub-rotina UMAT implementada neste trabalho podem ser consideradas idênticas.

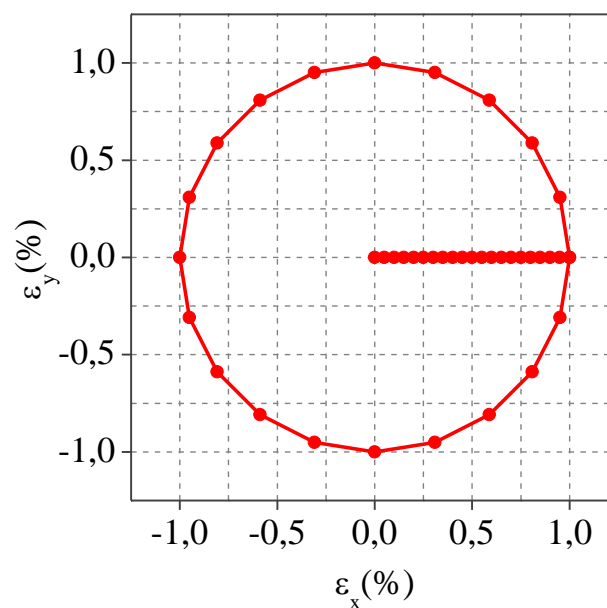


Figura 4.5 – Deformação biaxial com trajetória circular, discretizada com $\Delta t = 0,05$.

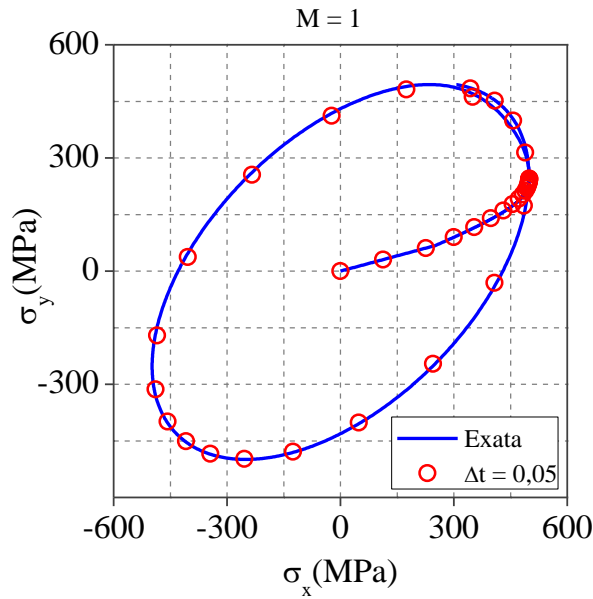


Figura 4.6 – Tensões em um elemento hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória circular, discretizada com $\Delta t = 0,05$ (Fig. 4.5). Simulações realizadas com o modelo de Chaboche com $M = 1$.

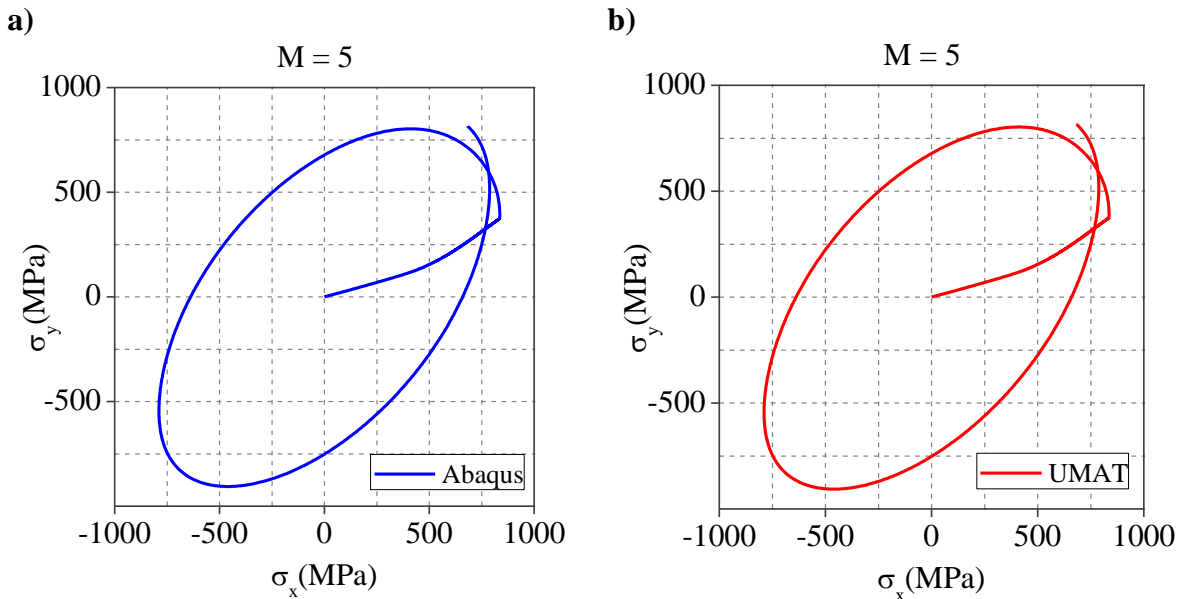
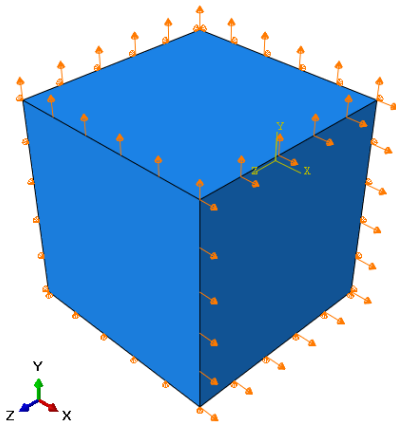


Figura 4.7 – Tensões em um elemento hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória circular, discretizada com $\Delta t = 0,001$. Simulações realizadas com o modelo de Chaboche (a) presente no Abaqus e (b) implementado na sub-rotina UMAT, pra $M = 5$.

4.3 Elemento hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória do tipo cruz

O algoritmo implícito de Doghri também foi analisado considerando-se um elemento hexaédrico de 8 nós submetido à trajetória de deformação biaxial do tipo cruz mostrada na Fig.

4.9a. Essa trajetória de deformação resulta em uma trajetória de tensão bastante complicada, principalmente para $M = 5$, e, por isso, é um teste crítico para avaliar a convergência do algoritmo.



Face	Restrição/ Carregamento
Frontal	$U_x = 0,01\text{mm}$
Posterior	$U_x = 0$
Superior	$U_y = 0,01\text{mm}$
Inferior	$U_y = 0$
Lateral direita	$U_z = 0$
Lateral esquerda	Livre

Figura 4.8 – Condições de contorno para elemento finito hexaédrico de 8 nós submetido à deformação biaxial com trajetória tipo cruz.

Duas simulações foram realizadas com o modelo de Chaboche com $M = 1$, uma na qual a trajetória de deformação foi discretizada em 221 pontos e outra em 1181 pontos, sendo esta considerada a solução numérica “exata”. As trajetórias de tensão obtidas são mostradas na Fig. 4.9b. Cabe ressaltar que nenhum problema de convergência foi observado nas simulações realizadas. Para $M = 5$ e trajetórias de deformação discretizadas em 221, 581 e 1181 pontos, as simulações realizadas com o modelo de Chaboche disponível no Abaqus, e o implementado na sub-rotina UMAT, não foram concluídas devido a problemas de convergência. Quando a trajetória de deformação foi discretizada em 2381 pontos, a análise elastoplástica foi concluída com sucesso e as trajetórias de tensão obtidas são mostradas na Fig. 4.10. Cabe observar que as tensões simuladas com o modelo de Chaboche presente no Abaqus e o implementado na sub-rotina UMAT são indistinguíveis.

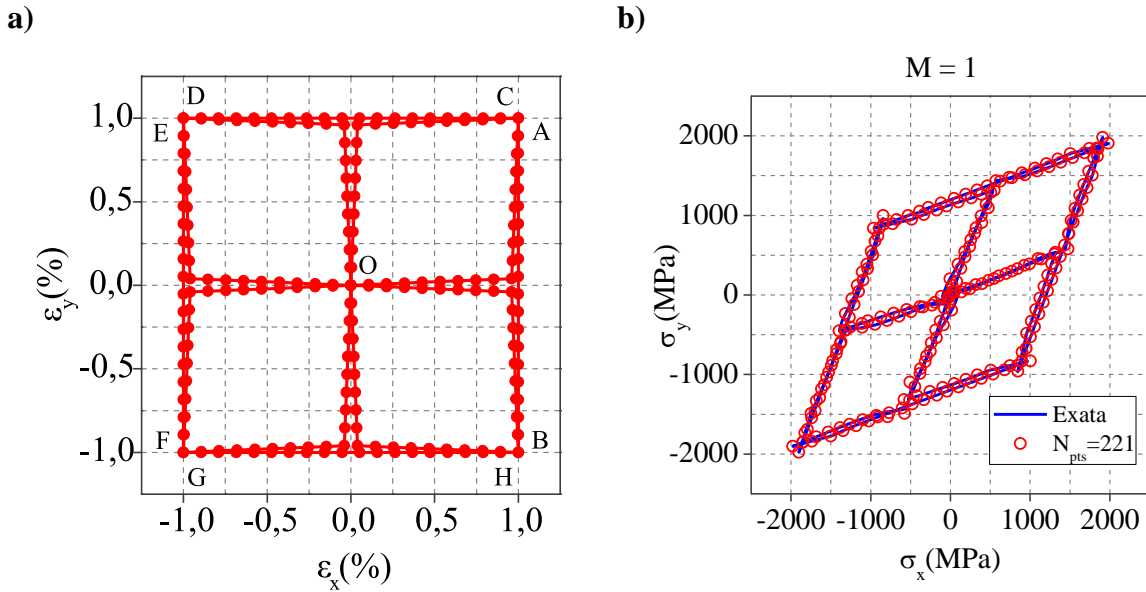


Figura 4.9 – (a) Deformação biaxial com trajetória do tipo cruz (OABO → OCDO → OEFO → OGHO) discretizada em 221 pontos; (b) Tensões em um elemento hexaédrico de 8 nós simuladas com o modelo de Chaboche com $M = 1$.

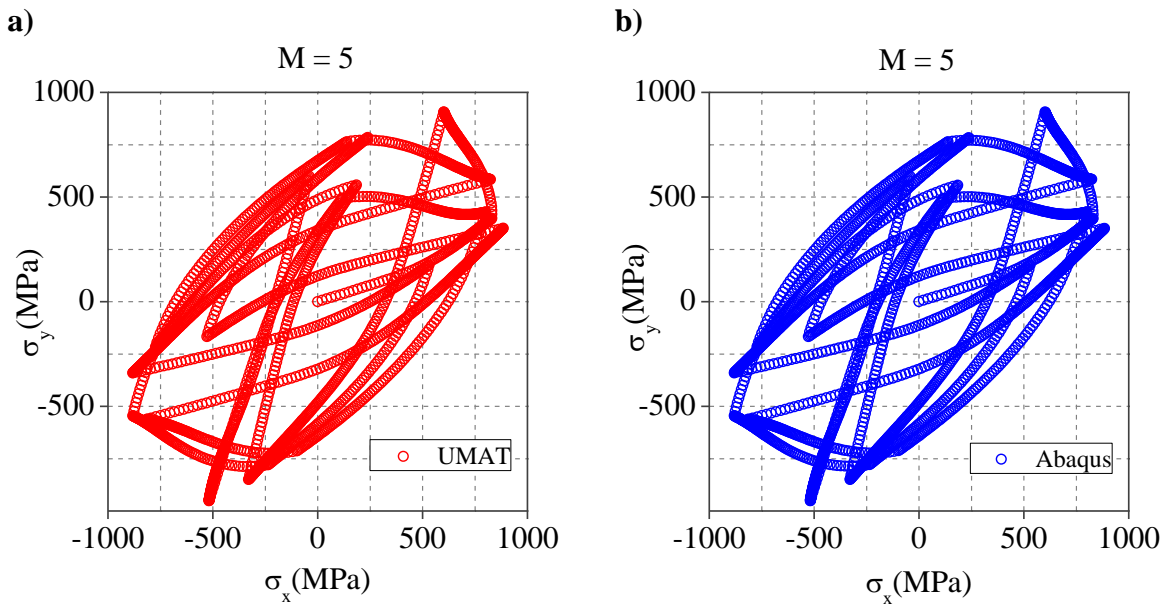


Figura 4.10 – Tensões em um elemento hexaédrico de 8 nós submetido à trajetória de deformação biaxial do tipo cruz discretizada em 2381 pontos. Simulações obtidas com o modelo de Chaboche (a) presente no Abaqus e (b) implementado na sub-rotina UMAT, para $M = 5$.

Socie (1998) propôs o seguinte teste para checar a consistência física de um modelo de plasticidade cíclica: Primeiro, simula-se a história de tensão decorrente da aplicação de uma história de deformação não proporcional. Caso o modelo seja consistente, então ao se aplicar a história de tensão previamente simulada, deve-se ter como resposta a mesma história de

deformação originalmente aplicada. Este tipo de teste foi empregado neste trabalho com o objetivo de verificar a implementação numérica do algoritmo implícito de Doghri. Primeiro, aplicou-se em um elemento hexaédrico de 8 nós a trajetória de deformação biaxial mostrada na Fig. 4.11a.

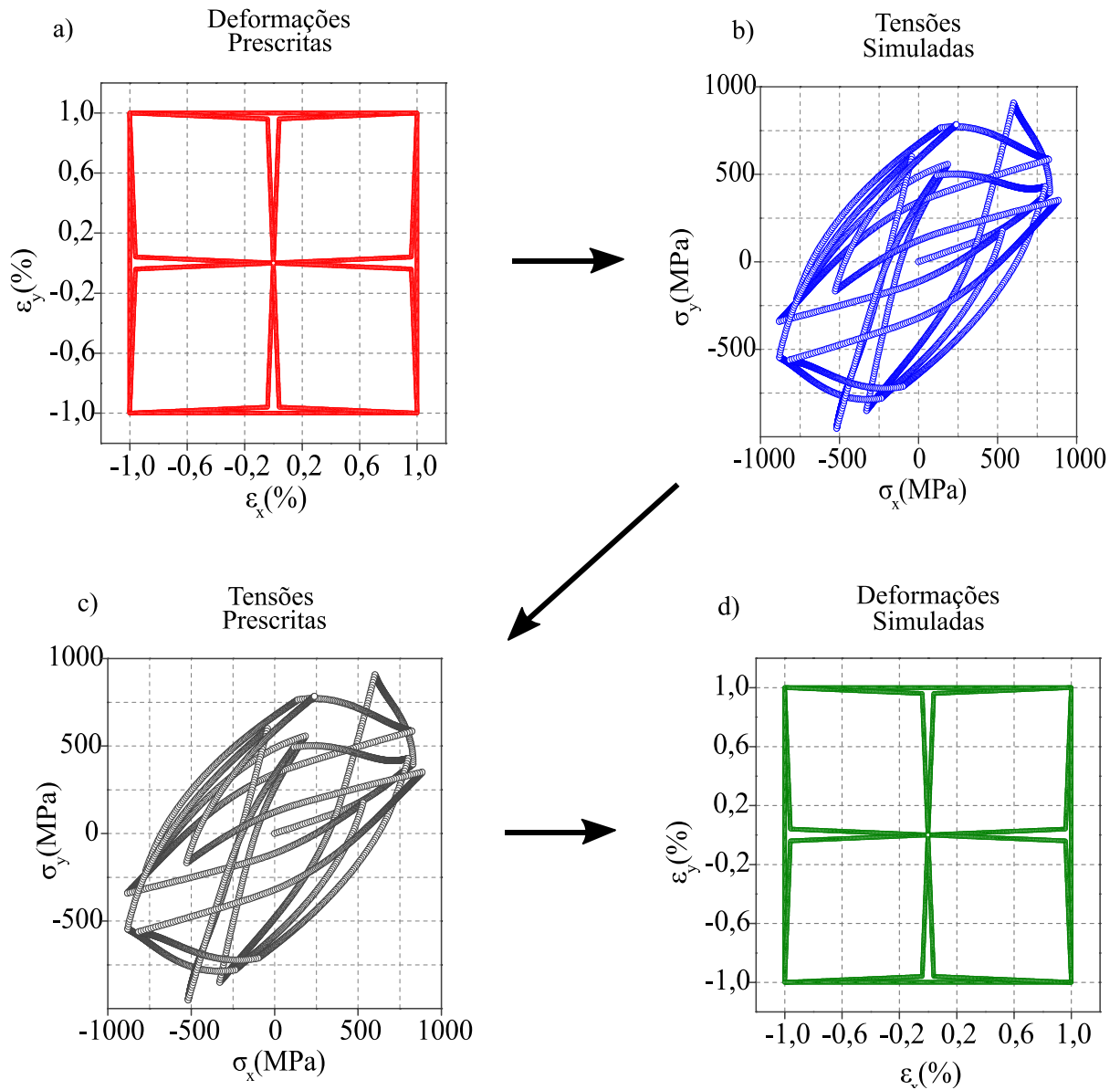
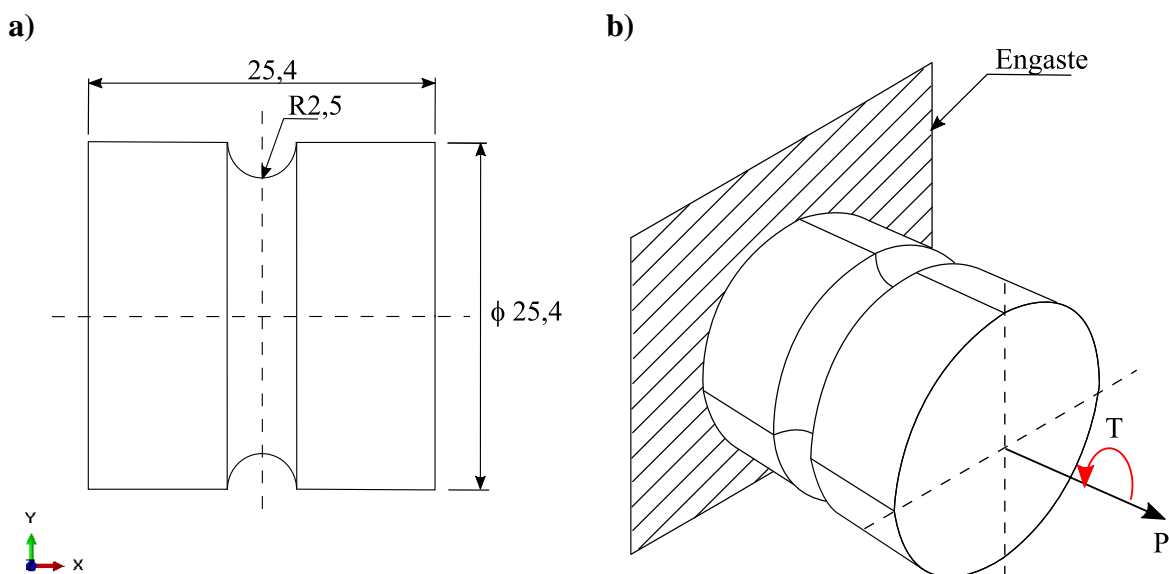


Figura 4.11 – Simulações em um elemento hexaédrico de 8 nós utilizando o modelo de Chaboche com $M = 5$. (a) Trajetória das deformações prescritas, constituída de 3581 pontos e (b) trajetória das tensões simuladas; (c) Trajetória das tensões prescritas e (d) trajetória das deformações simuladas.

A trajetória das tensões simuladas com o modelo de Chaboche com $M = 5$ é mostrada na Fig. 4.11b. Foi realizada então uma outra simulação na qual as tensões simuladas anteriormente foram prescritas no elemento hexaédrico, conforme ilustrado na Fig. 4.11c. A trajetória das deformações simuladas, mostrada na Fig. 4.11d, é idêntica à trajetória de deformações originalmente aplicadas e, portanto, o algoritmo implementado passou com sucesso no teste.

4.4 Corpo cilíndrico com entalhe submetido à força axial e torque com ângulo de fase de 90°

Neste experimento numérico, um corpo cilíndrico com entalhe circunferencial em U, com as dimensões mostradas na Fig. 4.12a, foi submetido a uma força axial, P , e um torque, T , em uma de suas faces e foi engastado na face oposta, conforme ilustrado na Fig. 4.12b. Considerou-se uma história de carregamento com ângulo de fase de 90° , amplitude da força axial de 100 kN e amplitude do torque de 300 N·m. A trajetória do carregamento no diagrama força versus torque é ilustrada na Fig. 4.12c. A trajetória de carregamento foi discretizada em 100 pontos. A malha de elementos do corpo foi composta por 1760 elementos hexaédricos de 20 nós com integração reduzida (C3D20R) e 280 elementos prismáticos de 15 nós com integração completa (C3D15), conforme mostrado na Fig. 4.12d.



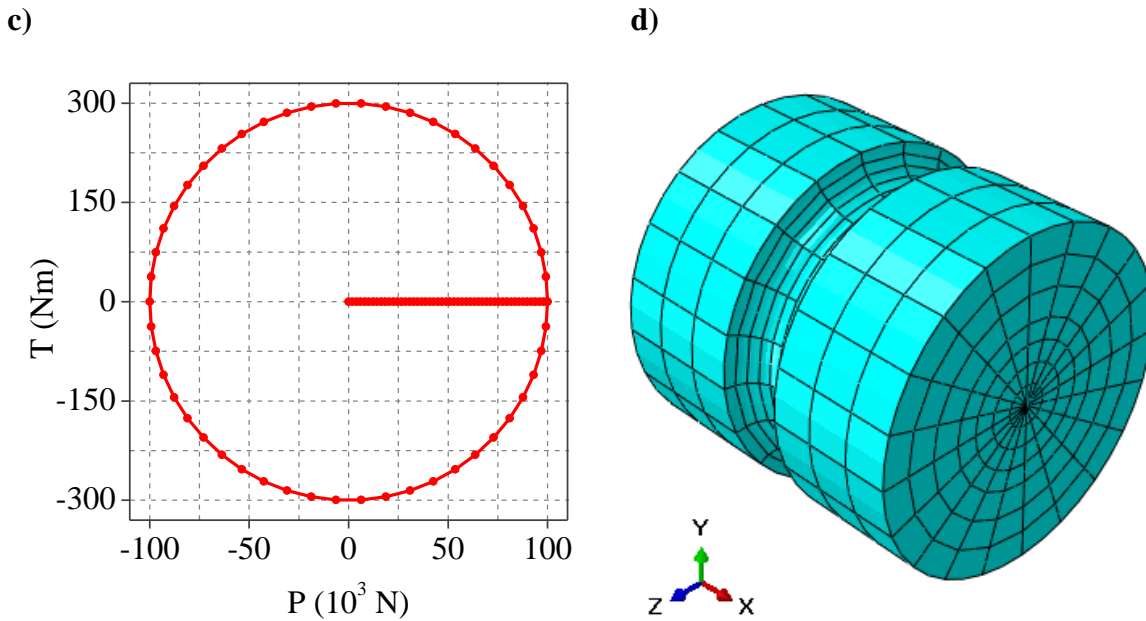


Figura 4.12 – Corpo de prova com entalhe em U submetido à força axial e torque com ângulo de fase de 90°: (a) dimensões do corpo em milímetros; (b) condições de contorno; (c) trajetória de carregamento e (d) malha de elementos finitos.

Para testar o modelo de Chaboche com $M = 1$, implementado na sub-rotina UMAT, foi realizada uma simulação numérica na qual o carregamento foi discretizado com incremento de tempo igual a 0,02, e uma outra simulação com incremento de tempo igual a 0,001, que foi considerada como a solução numérica “exata”. Em ambas as simulações numéricas não ocorreu nenhum problema de convergência. Como o corpo com entalhe em U foi submetido a uma combinação de força axial e torque, há tensões axial, circunferencial e cisalhante no ponto material localizado na raiz do entalhe. Os laços tensão-deformação axial, circunferencial e cisalhante são mostrados nas Figs. 4.13a–c, respectivamente.

Nos testes realizados com o modelo de Chaboche com $M = 5$, implementado na sub-rotina UMAT, as simulações conduzidas com incrementos de tempo iguais a 0,04 e 0,02 foram abortadas devido a problemas de convergência. Para incrementos de tempo de 0,01 e 0,001, as simulações foram concluídas com sucesso. O resultado da simulação numérica com incremento de tempo de 0,001 foi considerado como a solução numérica “exata”. Os laços tensão-deformação axial, circunferencial e cisalhante na raiz do entalhe são mostrados nas Figs. 4.14a–

c, respectivamente. Para checar a implementação da sub-rotina UMAT, foram realizadas as mesmas simulações utilizando o modelo de Chaboche presente no Abaqus. Para incremento de tempo igual a 0,04, a simulação abortou devido a um problema de convergência e para incrementos de 0,02, 0,01 e 0,001 as simulações foram concluídas com sucesso. Cabe ressaltar que os laços tensão-deformação simulados com o modelo de Chaboche presente no Abaqus e o implementado na sub-rotina UMAT foram essencialmente idênticos.

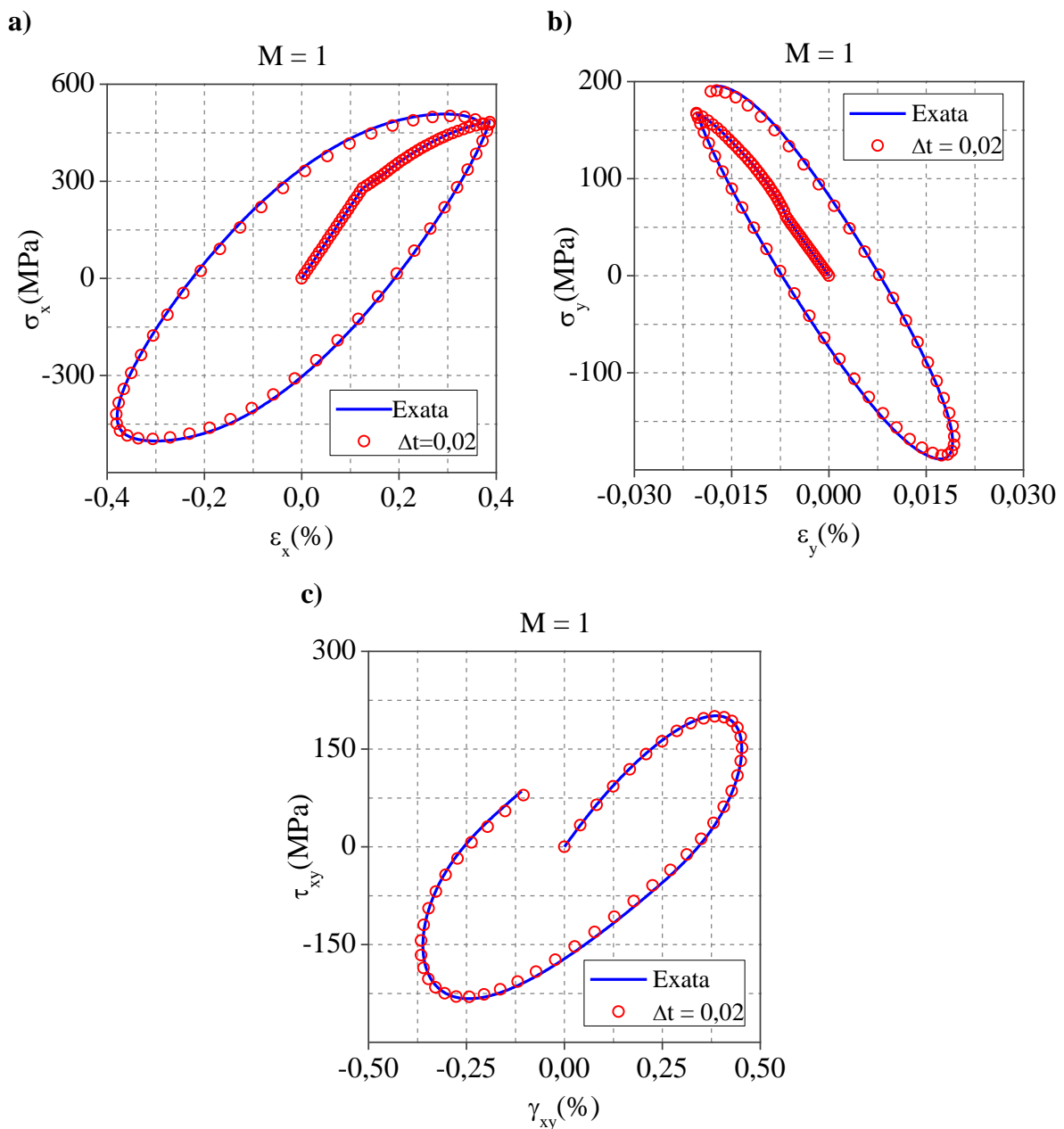


Figura 4.13 – Laços tensão-deformação na raiz do entalhe do corpo submetido a força axial e torque com ângulo de fase de 90° . Simulação realizada com o modelo de Chaboche, $M = 1$.

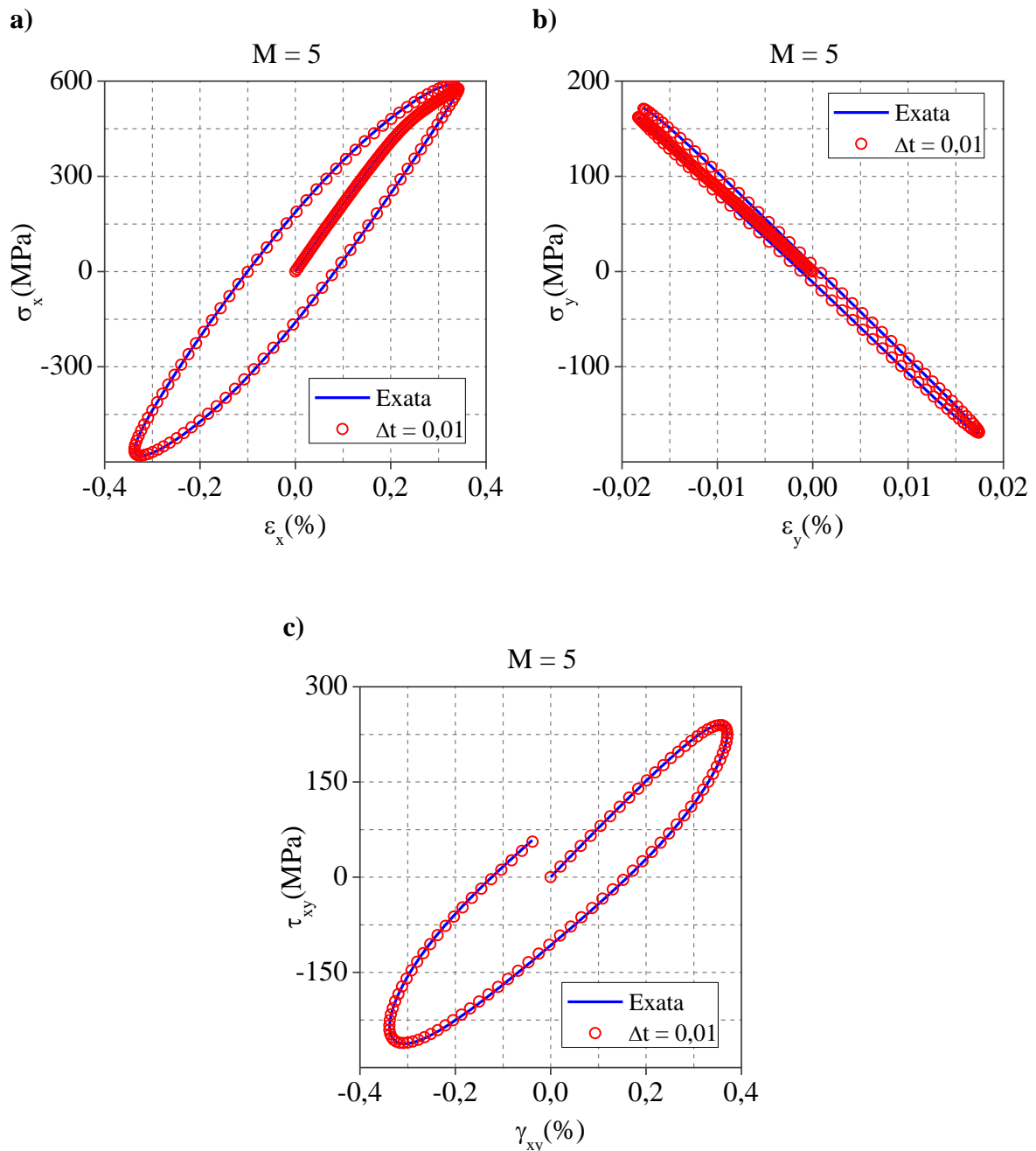


Figura 4.14 – Laços tensão-deformação na raiz do entalhe do corpo submetido a força axial e torque com ângulo de fase de 90° . Simulação realizada com o modelo de Chaboche, $M = 5$.

4.5 Corpo cilíndrico com entalhe submetido à força axial e torque com trajetória do tipo cruz

O objetivo deste teste numérico é comparar os custos computacionais de uma simulação de um modelo de elementos finitos que utiliza o algoritmo de integração numérica do modelo de Chaboche (i) presente no Abaqus e (ii) baseado no método de Doghri, implementado no presente trabalho.

A geometria, condições de contorno e malha do modelo de elementos finitos escolhido para a comparação são aquelas mostradas nas Figs. 4.12a, b e d. A força axial e o torque aplicados seguiram uma trajetória do tipo cruz (Fig. 4.15) que foi discretizada em 581 pontos. Considerou-se o modelo de Chaboche com $M = 5$ e as constantes do material listadas na Tabela 4.2. As tensões e deformações na raiz do entalhe provenientes das simulações com o modelo de Chaboche presente no Abaqus e o implementado neste trabalho são essencialmente idênticas e estão mostradas na Fig. 4.16.

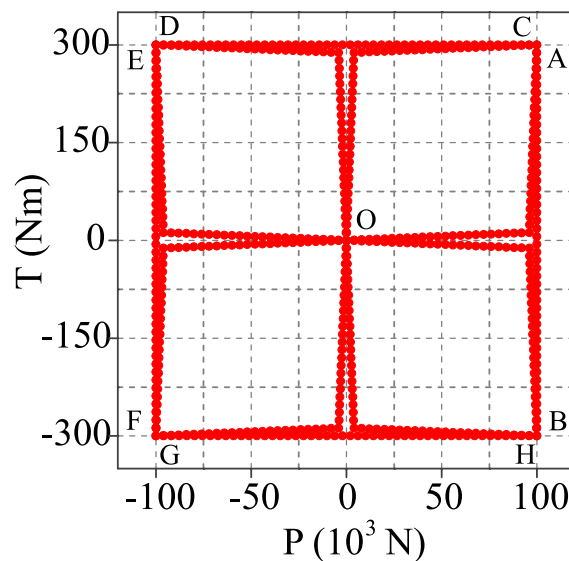


Figura 4.15– Força axial e torque com trajetória do tipo cruz (OABO → OCDO → OEFO → OGHO) discretizada em 581 pontos.

A Tabela 4.3 apresenta os tempos de processamento das simulações numéricas baseadas no algoritmo de Doghri e no algoritmo de integração presente Abaqus. O processamento das simulações foi realizado em paralelo considerando-se 1, 2, 4, 8, 12 e 16 núcleos de processamento da estação de trabalho. Os resultados da Tabela 4.3 indicam que não há diferença significativa entre os custos computacionais das simulações baseadas no algoritmo de Doghri e no algoritmo presente no Abaqus, sendo a maior diferença percentual entre os tempos de processamento igual a 4,35%. A Fig. 3.14 mostra o tempo de processamento das simulações em função da quantidade de núcleos de processamento utilizados. Observa-se que há uma

redução do custo computacional de aproximadamente 4 vezes quando a quantidade de núcleos aumenta de 1 para 8 e que, a partir de 8 núcleos de processamento, o custo computacional permanece praticamente o mesmo.

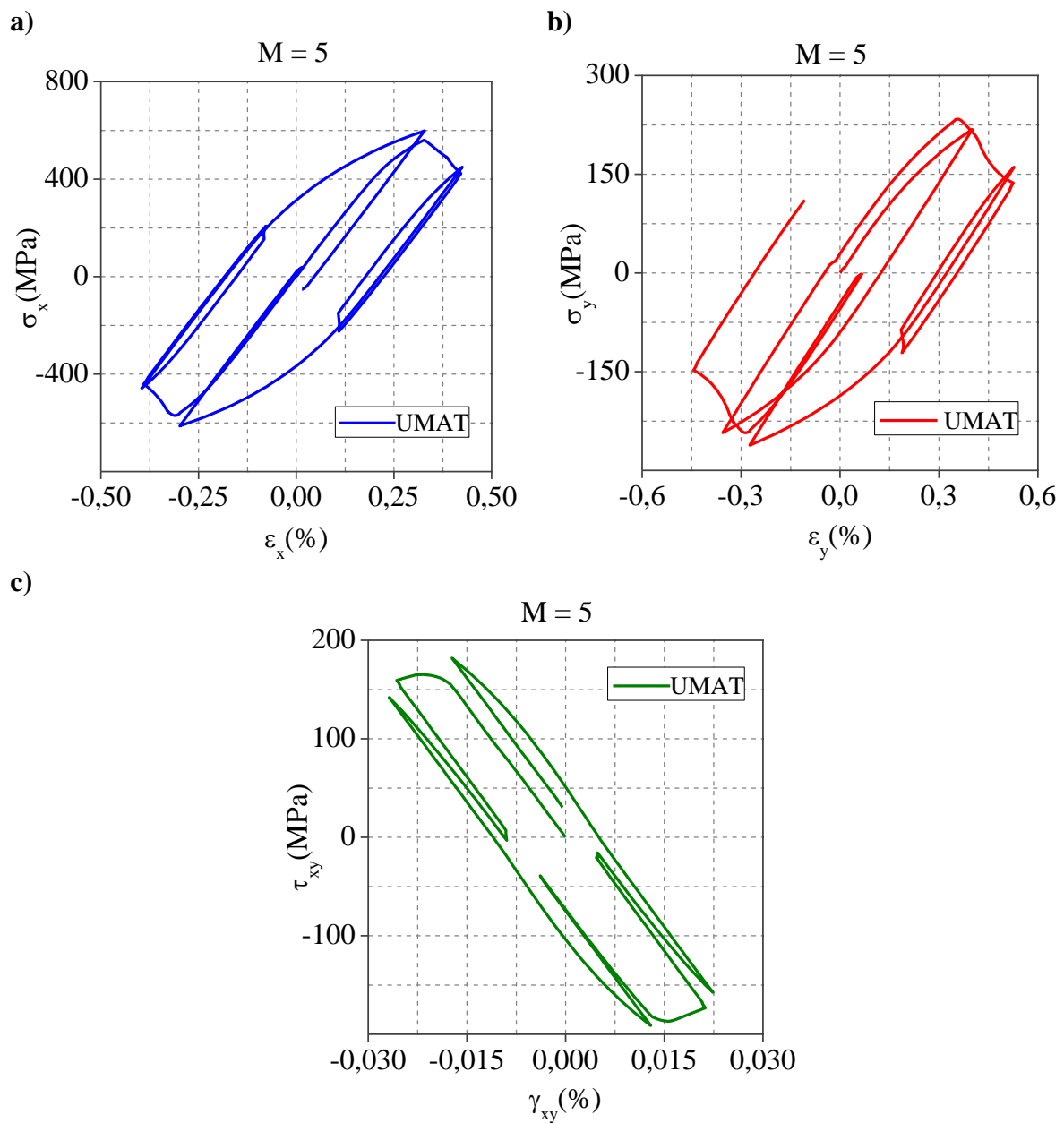


Figura 4.16– Laços tensão-deformação na raiz do entalhe do corpo submetido a trajetória de carregamento do tipo cruz. Simulação realizada com o modelo de Chaboche, $M = 5$.

Tabela 4.3 – Comparação do custo computacional entre simulação utilizando algoritmo de Doghri (UMAT) e algoritmo presente no Abaqus

Quantidade de núcleos de processamento	Tempo (s)		Diferença percentual (%)
	UMAT	Abaqus	
1	1472	1536	4,35
2	860	891	3,60
4	556	569	2,34
8	394	403	2,28
12	398	414	4,02
16	399	409	2,51

5 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

5.1 Conclusões

Neste trabalho, o algoritmo de Doghri para integração implícita do modelo de plasticidade cíclica de Chaboche foi incorporado ao programa Abaqus/Standard por meio do desenvolvimento de uma sub-rotina UMAT. O algoritmo foi verificado mediante a execução de testes numéricos em um elemento hexaédrico de 8 nós submetido a deformação axial monotônica, a deformação biaxial com trajetória circular e a deformação biaxial com trajetória em forma de cruz. Foram ainda realizados testes numéricos em um corpo cilíndrico com entalhe circunferencial em U, discretizado com elementos hexaédricos de 20 nós e elementos prismáticos de 15 nós. O corpo cilíndrico foi submetido a força axial e torque com formas de onda senoidais defasadas de 90° e a força axial e torque com trajetória de carregamento em forma de cruz.

A partir das simulações realizadas, verificou-se que as tensões simuladas com a sub-rotina UMAT e com o algoritmo de integração numérica presente no Abaqus foram essencialmente idênticas. Observou-se também que as iterações de Newton-Raphson, tanto locais quanto globais, convergiram com taxa quadrática. Esses resultados numéricos sugerem que o código da sub-rotina UMAT foi implementado de forma correta. Cabe ressaltar que nem todas as simulações numéricas foram completadas com sucesso devido a problemas de convergência. Todavia, os problemas observados foram detectados tanto nas simulações realizadas com a sub-rotina UMAT quanto com o algoritmo de integração presente no Abaqus.

Observou-se que não há diferença significativa entre os custos computacionais das simulações baseadas no algoritmo de Doghri e no algoritmo presente no Abaqus. Constatou-se também que há uma redução do custo computacional de aproximadamente 4 vezes quando a quantidade de núcleos de processamento aumenta de 1 para 8. Além disso, o custo

computacional permanece praticamente o mesmo quando 8 ou mais núcleos de processamento são empregados.

Nas simulações computacionais envolvendo o modelo de Chaboche com $M = 5$, havia a expectativa de uma redução do tempo de processamento ao se utilizar o algoritmo de integração numérica de Doghri, ao invés do algoritmo presente no Abaqus. Entretanto, essa redução não foi observada. Vale ressaltar que segundo Wang *et al.* (2000) o Abaqus emprega o algoritmo de Doghri somente para o modelo de Armstrong e Frederick, isto é, para $M = 1$. Todavia, a versão do Abaqus citada no artigo de Wang *et al.* é a de 1998. Existe a possibilidade que na versão 6.14 do Abaqus utilizada no presente trabalho o algoritmo de Doghri também seja empregado quando $M > 1$, o que explicaria a não redução observada no custo computacional. Infelizmente, a documentação do Abaqus 6.14 não informa com detalhes como é feita a integração numérica do modelo de Chaboche.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

O modelo de plasticidade cíclica proposto por Jiang e Sehitoglu (1996) permite uma melhor descrição do fenômeno de fluência cíclica (*ratcheting*) quando comparado ao modelo original de Chaboche. Além disso, a incorporação do parâmetro de Tanaka em um modelo do tipo Armstrong-Frederick permite a modelagem do fenômeno de endurecimento adicional devido a não proporcionalidade do carregamento (Jiang e Kurath, 1997). Sugere-se como trabalhos futuros a incorporação desses modelos em uma sub-rotina UMAT do Abaqus, tendo em vista a simulação de tensões e deformações mais realísticas em um componente mecânico sujeito a carregamento cíclico.

Referências bibliográficas

- Abdel-Karim M., 2009. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratcheting. *International Journal of Plasticity*, 25:1560-1587.
- Abdel-Karim, M., Ohno, N., 2000. Kinematic hardening model suitable for ratcheting with steady-state. *International Journal of Plasticity*, 16:225 –240.
- Armstrong, P.J., Frederick, C.O., 1966. A mathematical representation of the multiaxial Baushinger effect. CEGB Report RD/B/N731, Berkeley Nuclear Laboratories: Berkeley, U.K.
- Bari, S., 2001. Constitutive modeling for cyclic plasticity and ratcheting. Tese de Doutorado, North Carolina State University.
- Bari, S., Hassan, T., 2000. Anatomy of coupled constitutive models for ratcheting simulation. *International Journal of Plasticity*, 16:381 – 409.
- Benallal, A., Billardon, R., Doghri, I., 1988. An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4:731 – 740.
- Bensson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J. L., Forest, S., Blétry, M., 2010. *Non-linear mechanics of material*. Springer.
- Cailletaud, G., Chaboche, J. L., 1996. Integration methods for complex plastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133:125–155.
- Chaboche, J.L., 1986. Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 2: 149-188.
- Chaboche, J.L., Dang Van, K., Cordier G., 1979. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel. Em: SMIRT-5, Berlin, L 11/3.
- De Angelis, F., Taylor, R.L., 2016. A nonlinear finite element plasticity formulation without matrix inversions. *Finite Elements in Analysis and Design*, 112:11 – 25;
- Doghri, I., 1993. Fully implicit integration and consistent tangent modulus in elasto-plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:3915–3932.
- Hartmann, S., Haupt, P., 1993. Stress computation and consistent tangent operator using non-linear kinematic hardening models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:3801–3814.
- Hopperstad, O.S., Remseth, S., 1995. A return mapping algorithm for a class of cyclic plasticity models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:549–564.
- Jiang, Y., 1993. Cyclic plasticity with an emphasis on ratcheting. Tese de Doutorado, University of Illinois, Urbana-Champaign.
- Jiang, Y., Hertel, O., Vormwald, M., 2007. An experimental evaluation of three critical plane multiaxial fatigue criteria. *International Journal of Fatigue*, 29:1490–1502.

- Jiang, Y., Kurath, P., 1996. Characteristics of the Armstrong-Frederick type plasticity model. *International Journal of Plasticity*, 12:387-415.
- Jiang, Y., Kurath, P., 1997. Nonproportional cyclic deformation: Critical experiments and analytical modeling. *International Journal of Plasticity*, 13:743-763.
- Jiang, Y., Sehitoglu, H., 1994. Cyclic ratcheting of 1070 steel under multiaxial stress states. *International Journal of Plasticity*, 10:579 – 608.
- Jiang, Y., Sehitoglu, H., 1996a. Modeling of cyclic ratcheting plasticity, Part I: Development of constitutive relations. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 63:720–725.
- Jiang, Y., Sehitoglu, H., 1996b. Modeling of cyclic ratcheting plasticity, Part II: Comparison of Model Simulations with Experiments. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 63:726–733.
- Jiang, Y., Zhang, J., 2008. Benchmark experiments and characteristic cyclic plasticity deformation. *International Journal of Plasticity*, 24:1481-1515.
- Khan, A.S., Huang, S., 1995. *Continuum theory of plasticity*. John Wiley & Sons, Inc.
- Kang, G., Kan, Q., 2017. *Cyclic plasticity of engineering materials: Experiments and models*. John Wiley & Sons Ltd.
- Kobayashi, M., Ohno, N., 2002. Implementation of cyclic plasticity models based on a general form of kinematic hardening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2217–2238.
- Lemaitre, J., Chaboche, J.L. (1990). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge Univ Press.
- Mamiya, E., Castro, F., Malcher, L., Araújo, J., 2014. Multiaxial fatigue life estimation based on combined deviatoric strain amplitudes. *International Journal of Fatigue*, 67:117–122.
- Matthies, H.G., 1989. A decomposition method for the integration of the elastic–plastic rate problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1–11.
- Ohno N, 1998. Constitutive modeling of cyclic plasticity with emphasis on ratcheting. *International Journal of Mechanical Science*, 40:251–261.
- Ohno N, Abdel-Karim M., 2000. Uniaxial ratcheting of 316FR steel at room temperature: Part II; constitutive modeling and simulation. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 122:35–41.
- Ohno N, Tsuda M, Kamei T., 2013. Elastoplastic implicit integration algorithm applicable to both plane stress and three-dimensional stress states. *Finite Elements in Analysis and Design*, 66:1–11.
- Ohno N, Wang J-D., 1993. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part I: formulation and basic features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*, 9:375–390.

- Ohno N, Wang J-D., 1993. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part II; application to experiments of ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*, 9:391–403.
- Ohno N, Wang J-D., 1994. Kinematic hardening rules for simulation of ratcheting behavior. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 13:519–531.
- Prager, W., 1955. The theory of plasticity: A survey of recent achievements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 169, 41–57.
- Prager, W., 1956. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics* 23, 493–496.
- Simo, J. C., Taylor, R. L., 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48: 101–118.
- Simo, J.C., Hughes, T.J.R., 1998. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag New York Inc.
- Socie, S., 1998. An evaluation of methods for estimating fatigue lives under multiaxial nonproportional variable amplitude loading. In: *Low Cycle Fatigue and Elasto-Plastic Behaviour of Materials* (H.-T. Rie and P. Portella, eds.), Elsevier Science Ltd., 205–210.
- Souza Neto, E. A. de, Peric, D., Owen, D. R. J., 2008. *Computational methods for plasticity – Theory and application*. John Wiley & Sons Ltd.
- Wang J-D., Hu, W., Sawyer, J.P.G, 2000. Explicit numerical integration algorithm for a class of non-linear kinematic hardening model. *Computational Mechanics*, 26:140–147.
- Zhang, J., Jiang, Y., 2008. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation of a pure polycrystalline copper. *International Journal of Plasticity*, 24:1890–1915.

Apêndice – Código da sub-rotina UMAT para integração implícita do modelo de Chaboche pelo método de Doghri

```

! -----
! MATERIAL MODEL: ISOTROPIC LINEAR ELASTICITY + VON MISES YIELD SURFACE
+
! CHABOCHE KINEMATIC HARDENING RULE
! AUTHORS: FABIO CASTRO, EDSON SOUZA (UNIVERSITY OF BRASILIA)
! LAST MODIFIED: 19/JANUARY/2018
! -----
SUBROUTINE UMAT (STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD,
1 RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT,
2 STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, CMNAME,
3 NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT,
4 CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, LAYER, KSPT, JSTEP, KINC)
!
! INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
!
! CHARACTER*80 CMNAME
! DIMENSION STRESS (NTENS), STATEV (NSTATV),
1 DDSDE (NTENS, NTENS), DDSDDT (NTENS), DRPLDE (NTENS),
2 STRAN (NTENS), DSTRAN (NTENS), TIME (2), PREDEF (1), DPRED (1),
3 PROPS (NPROPS), COORDS (3), DROT (3, 3), DFGRD0 (3, 3), DFGRD1 (3, 3),
4 JSTEP (4)
! -----
! PARAMETERS AND VARIABLES
! -----
PARAMETER (ZERO=0.0D0, ONE=1.0D0, TWO=2.0D0, THREE=3.0D0, SIX=6.0D0)
PARAMETER (TOL=1.0D-6, TOL2=1.0D-6, M=5)
DIMENSION EPLAS (6), BETAJ (6), FLOWJ (6), RES (6), ALPHA (6)
DIMENSION C1 (M), C2 (M), ALPHAI (6, M), ALPHAIN (6, M), DOTNALPHAIN (M)
DIMENSION OTIMESNN (6, 6), AIDDEV (6, 6), DNDBETA (6, 6), AUX3 (6)
! OPEN(unit=1, file='C:\Temp\report.txt', status='unknown')
! -----
! MATERIAL CONSTANTS
! -----
EMOD=PROPS (1)
ENU=PROPS (2)
SYIELD=PROPS (3)
DO I=1, M
C1 (I)=PROPS (3+I)
C2 (I)=PROPS (3+M+I)
ENDDO
! -----
! ELASTIC STIFFNESS MATRIX
! -----
ELAM=EMOD*ENU / (ONE+ENU) / (ONE-TWO*ENU)
EG=EMOD/TWO / (ONE+ENU)
DO I=1, NTENS
!!! TEMP SET DDSDE = ZERO
DO J=1, NTENS
DDSDE (I, J)=ZERO
ENDDO
ENDDO
DO I=1, NDI
DO J=1, NDI
DDSDE (I, J)=ELAM
ENDDO
DDSDE (I, I)=DDSDE (I, I)+TWO*EG
ENDDO

```

```

DO I=NDI+1,NTENS
  DDSDE(I,I)=EG
ENDDO
! -----
! RECOVER PLASTIC STRAIN, BACKSTRESS^I AND EQUIVALENT PLASTIC STRAIN
! -----
DO I=1,NTENS
  EPLAS(I)=STATEV(I)
ENDDO
DO J=1,M
  DO I=1,NTENS
    ALPHAI(I,J)=STATEV((J*NTENS)+I)
  ENDDO
ENDDO
EQPLAS=STATEV((M+1)*NTENS+1)
! -----
! COMPUTE BACKSTRESS
! -----
DO I=1,NTENS
  ALPHA(I)=ZERO
  DO J=1,M
    ALPHA(I)=ALPHA(I)+ALPHAI(I,J)
  ENDDO
ENDDO
! -----
! COMPUTE TRIAL STRESS
! -----
DO I=1,NTENS
  DO J=1,NTENS
    STRESS(I)=STRESS(I)+DDSDE(I,J)*DSTRAN(J)
  ENDDO
ENDDO
! -----
! CHECK YIELD CONDITION
! -----
SMISES=(STRESS(1)-ALPHA(1)-STRESS(2)+ALPHA(2))**2+
&(STRESS(1)-ALPHA(1)-STRESS(3)+ALPHA(3))**2+(STRESS(2)-ALPHA(2)-
STRESS(3)+ALPHA(3))**2
DO I=NDI+1,NTENS
  SMISES=SMISES+SIX*(STRESS(I)-ALPHA(I))**2
ENDDO
SMISES=SQRT(SMISES/TWO)
IF (SMISES > (ONE+TOL)*SYIELD) THEN
! -----
! COMPUTE BETA AND EQPLAS USING THE NEWTON-RAPHSON
! METHOD WITH EXPLICIT CORRECTORS
! -----
INITIAL VALUES
EQPLASJ=EQPLAS
SHYDRO=(STRESS(1)+STRESS(2)+STRESS(3))/THREE
DO I=1,NDI
  BETAJ(I)=STRESS(I)-SHYDRO-ALPHA(I)
ENDDO
DO I=NDI+1,NTENS
  BETAJ(I)=STRESS(I)-ALPHA(I)
ENDDO
! NEWTON-RAPHSON ITERATIONS
DO J=1,50
! COMPUTE EQUIVALENT VON MISES STRESS
SMISESJ=ZERO
DO I=1,NDI

```



```

        SMISESJ=SMISESJ+(BETAJ(I)**2)
    ENDDO
    DO I=NDI+1,NTENS
        SMISESJ=SMISESJ+(TWO*(BETAJ(I)**2))
    ENDDO
    SMISESJ=SQRT((THREE/TWO)*SMISESJ)
!   COMPUTE FLOW VECTOR
    DO I=1,NTENS
        FLOWJ(I)=(THREE/TWO)*BETAJ(I)/SMISESJ
    ENDDO
!   COMPUTE R
    DP=EQPLASJ-EQPLAS
    DO I=1,NDI
        RES(I)=BETAJ(I) - STRESS(I) + SHYDRO + (TWO*EG*DP*FLOWJ(I))
        DO K=1,M
            RES(I)=RES(I)+((ALPHAI(I,K)+C1(K)*DP*FLOWJ(I))/(ONE+C2(K)*DP))
        ENDDO
    ENDDO
    DO I=NDI+1,NTENS
        RES(I)=BETAJ(I) - STRESS(I) + (TWO*EG*DP*FLOWJ(I))
        DO K=1,M
            RES(I)=RES(I)+((ALPHAI(I,K)+C1(K)*DP*FLOWJ(I))/(ONE+C2(K)*DP))
        ENDDO
    ENDDO
!   COMPUTE F
    FUNCF=SMISESJ-SYIELD
!   CHECK CONVERGENCE
    RESNORM=ZERO
    DO I=1,NDI
        RESNORM=RESNORM+(RES(I)**2)
    ENDDO
    DO I=NDI+1,NTENS
        RESNORM=RESNORM+(TWO*(RES(I)**2))
    ENDDO
    RESNORM=SQRT(RESNORM)

!   IF (J >= 4) THEN
!       WRITE(1,30) J
!       WRITE(1,40) RESNORM
!       WRITE(1,40) ABS(FUNCF)
!   END IF
! 30  FORMAT(i4)
! 40  FORMAT(E10.2)

    IF (RESNORM < TOL2*SYIELD) THEN
        IF (ABS(FUNCF) < TOL2*SYIELD) THEN
            GOTO 100
        ENDIF
    ENDIF
!   COMPUTE NEW APPROXIMATION FOR EQPLAS
    DOTNR=ZERO
    DO I=1,NDI
        DOTNR=DOTNR+FLOWJ(I)*RES(I)
    ENDDO
    DO I=NDI+1,NTENS
        DOTNR=DOTNR+TWO*FLOWJ(I)*RES(I)
    ENDDO
    DO K=1,M
        DOTNALPHAIN(K)=ZERO

```

```

DO I=1,NDI
  DOTNALPHAIN(K)=DOTNALPHAIN(K)+FLOWJ(I)*ALPHAI(I,K)
ENDDO
DO I=NDI+1,NTENS
  DOTNALPHAIN(K)=DOTNALPHAIN(K)+TWO*FLOWJ(I)*ALPHAI(I,K)
ENDDO
ENDDO
DEN=ZERO
DO K=1,M
  DEN=DEN+(((THREE/TWO)*C1(K) -
C2(K)*DOTNALPHAIN(K))/(ONE+C2(K)*DP)**2))
ENDDO
DEN=(THREE*EG)+DEN
DEQPLAS=(SMISESJ-SYIELD-DOTNR)/DEN
EQPLASJ=EQPLASJ+DEQPLAS
! COMPUTE NEW APPROXIMATION FOR BETA
GLC=ZERO
DO I=1,M
  GLC=GLC+(C1(I)/(ONE+C2(I)*DP))
ENDDO
GLC=(DP/SMISESJ)*((TWO*EG)+GLC)
DO I=1,NTENS
  BETAJ(I)=BETAJ(I) -
((ONE/(ONE+(THREE/TWO)*GLC))*(RES(I)+GLC*DOTNR*FLOWJ(I)))
ENDDO
AUX=ZERO      !!!!! TEMP
DO I=1,M
  AUX=AUX+(C1(I)/((ONE+C2(I)*DP)**2))
ENDDO
AUX=(TWO*EG)+AUX
DO I=1,NTENS
  BETAJ(I)=BETAJ(I) - (AUX*FLOWJ(I)*DEQPLAS)
ENDDO
DO I=1,NTENS
  AUX2=ZERO
DO K=1,M
AUX2=AUX2+((C2(K)*(ALPHAI(I,K)+GLC*DOTNALPHAIN(K)*FLOWJ(I)))/((ONE+C2(K)*DP
)**2))
ENDDO
BETAJ(I)=BETAJ(I)+((ONE/(ONE+(THREE/TWO)*GLC))*AUX2*DEQPLAS)
ENDDO
ENDDO
100 CONTINUE
! -----
! STORE ALPHA^I_N
! -----
DO J=1,M      !!!!! TEMP CHECAR SE E NECESSARIO
DO I=1,NTENS
  ALPHAIN(I,J)=ALPHAI(I,J)
ENDDO
ENDDO
! -----
! UPDATE STATE VARIABLES
! -----
DO I=1,NDI
  EPLAS(I)=EPLAS(I)+DP*FLOWJ(I)
ENDDO
DO I=NDI+1,NTENS
  EPLAS(I)=EPLAS(I)+TWO*DP*FLOWJ(I)
ENDDO

```

```

DO J=1,M
  DO I=1,NTENS
    ALPHAI (I,J)=(ALPHAIN (I,J)+C1 (J)*DP*FLOWJ (I))/(ONE+C2 (J)*DP)
  ENDDO
ENDDO
DO I=1,NTENS
  STRESS (I)=ZERO
  DO J=1,NTENS
    STRESS (I)=STRESS (I)+DDSDDE (I,J)*(STRAN (J)+DSTRAN (J)-EPLAS (J))
  ENDDO
  ! WRITE (1,10) STRESS (I)
ENDDO

! 10      FORMAT (F10.0)
! -----
!      COMPUTE ALGORITHMIC TANGENT STIFFNESS
! -----
!      MATRIX OTIMESNN
DO I=1,NTENS
  DO J=1,NTENS
    OTIMESNN (I,J)=FLOWJ (I)*FLOWJ (J)
  ENDDO
ENDDO
!      MATRIX IDEV
DO I=1,NTENS      !!! TEMP SET AIDEV = ZERO
  DO J=1,NTENS
    AIDEV (I,J)=ZERO
  ENDDO
ENDDO
DO I=1,NDI
  DO J=1,NDI
    AIDEV (I,J)=-ONE/THREE
  ENDDO
  AIDEV (I,I)=AIDEV (I,I)+ONE
ENDDO
DO I=NDI+1,NTENS
  AIDEV (I,I)=ONE/TWO
ENDDO
!      MATRIX DNDBETA
DO I=1,NTENS
  DO J=1,NTENS
    DNDBETA (I,J)=(ONE/SMISESJ)*(THREE/TWO)*AIDEV (I,J)-
OTIMESNN (I,J)
  ENDDO
ENDDO
!      N DOT ALPHAIN
DO J=1,M
  DOTNALPHAIN (J)=ZERO
  DO I=1,NDI
    DOTNALPHAIN (J)=DOTNALPHAIN (J)+FLOWJ (I)*ALPHAIN (I,J)
  ENDDO
  DO I=NDI+1,NTENS
    DOTNALPHAIN (J)=DOTNALPHAIN (J)+TWO*FLOWJ (I)*ALPHAIN (I,J)
  ENDDO
ENDDO
!      D AND g
DEN=ZERO
DO J=1,M
  DEN=DEN+(((THREE/TWO)*C1 (J) -
C2 (J)*DOTNALPHAIN (J))/(ONE+C2 (J)*DP)**2)
ENDDO

```

```

DEN=(THREE*EG)+DEN
GLC=ZERO
DO I=1,M
  GLC=GLC+(C1(I)/(ONE+C2(I)*DP))
ENDDO
GLC=(DP/SMISESJ)*(TWO*EG)+GLC
! MATRIX DDSDE
DO I=1,NTENS
  DO J=1,NTENS
    DDSDE(I,J)=DDSDE(I,J)-(((TWO*EG)**2)/DEN)*OTIMESNN(I,J)
  ENDDO
ENDDO
DO I=1,NTENS
  DO J=1,NTENS
    DDSDE(I,J)=DDSDE(I,J)-
DP*(((TWO*EG)**2)/(ONE+(THREE/TWO)*GLC))*DNDBETA(I,J)
  ENDDO
ENDDO
DO I=1,NTENS
  AUX3(I)=ZERO
  DO J=1,M
    AUX3(I)=AUX3(I)+((C2(J)*ALPHAIN(I,J))/(ONE+C2(J)*DP)**2)
  ENDDO
  AUX3(I)=(THREE/TWO)*AUX3(I)
ENDDO
DO I=1,NTENS
  DO J=1,M
    AUX3(I)=AUX3(I)-
((C2(J)*DOTNALPHAIN(J)*FLOWJ(I))/(ONE+C2(J)*DP)**2)
  ENDDO
ENDDO
DO I=1,NTENS
  DO J=1,NTENS
    DDSDE(I,J)=DDSDE(I,J)-
DP*(((TWO*EG)**2)/(ONE+(THREE/TWO)*GLC))*(ONE/(SMISESJ*DEN))*(AUX3(I)*FLOWJ
(J))
  ENDDO
ENDDO
ENDIF
! -----
! STORE STATE VARIABLES
! -----
DO I=1,NTENS
  STATEV(I)=EPLAS(I)
ENDDO
DO J=1,M
  DO I=1,NTENS
    STATEV(NTENS+(J-1)*NTENS+I)=ALPHAI(I,J)
  ENDDO
ENDDO
STATEV(NTENS+(NTENS*M)+1)=EQPLASJ
! -----
RETURN
END

```