



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Instituto de Exatas

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Aproximação das equações e curvas utilizadas por Niemeyer em Brasília

Estudos de casos

JULIANO CRISPIM ROCHA DA SILVA

Brasília

2018

JULIANO CRISPIM ROCHA DA SILVA

Aproximação das equações e curvas utilizadas por Niemeyer em Brasília

Estudos de casos

Dissertação de mestrado profissional (PROFMAT), apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo

Brasília - DF

2018

Ca Crispim, Juliano
Aproximação das equações e curvas utilizadas por Niemeier
Estudos de casos / Juliano Crispim; orientador Antônio
Melo. -- Brasília, 2018.
101 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Brasília. 2. Curvas. 3. Cônicas. 4. Superfícies de
Revolução. 5. Niemeier. I. Melo, Antônio, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Aproximação das equações e curvas utilizadas por Niemeyer em Brasília
Estudos de casos

por

Juliano Crispim Rocha da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 28 de junho de 2018.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo – FUP/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Rui Seimetz MAT/UnB



Prof. Dr. Sival Braga de Freitas – SEEDF

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a Deus e a minha família, sem vocês não seria possível nada disso acontecer. Obrigado por sempre me incentivar a estudar e buscar meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares por sempre incentivarem meus estudos.

Ao João Carlos pelo apoio e conversas sobre arquitetura.

Ao Diego Faria pela ajuda com as fotos.

Aos os professores do PROFMAT que colaboraram para a minha formação pelas aulas ministradas.

Ao meu orientador Prof. Dr. Antônio Luiz Melo, por todo apoio, incentivo, dedicação, paciência e orientação que me conduziram à conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas de curso que compartilharam horas de estudos e dividiram momentos de felicidade e ansiedade ao longo desse projeto.

À CAPES pelo apoio financeiro. À Universidade de Brasília onde tive a oportunidade de concluir minha graduação e também ao PROFMAT.

Resumo

Este trabalho propõe possíveis aproximações das formas, expressões e equações das curvas e superfícies utilizadas na construção dos monumentos e edifícios de Brasília. Apresenta um breve histórico relativo à história e construção da cidade e também alguns tópicos matemáticos básicos como cônicas e superfícies de revolução para um melhor entendimento dos estudos de casos. Os monumentos arquitetônicos escolhidos foram a Catedral, Congresso Nacional (cúpulas da Câmara dos Deputados e Senado Federal), Museu Nacional e Palácio da Alvorada (colunas).

Palavras-chave: Brasília; Curvas; Cônicas; Superfícies de Revolução; Niemeyer.

Abstract

This work proposes possible approximations of the equations of curves and surfaces used in the construction of monuments and buildings in Brasília. It presents a brief history concerning the history and construction of the city. We also defined mathematic topics as conic and surfaces of revolution for a better understanding of the case studies. The architectural monuments chosen were the Cathedral, National Congress (domes of the Chamber of Deputies and Federal Senate), National Museum and Alvorada Palace (columns).

Keywords: Brasilia; Curves; Conics; Surfaces of Revolution; Niemeyer.

Sumário

Introdução.....	14
Capítulo 1 - Aspectos históricos de Brasília	16
1.1 Lucio Costa	17
1.2 Joaquim Cardozo.....	19
1.3 Oscar Niemeyer.....	20
1.4 Juscelino Kubitschek.....	25
1.5 Concreto armado	29
Capítulo 2 – Alguns elementos de Geometria Analítica.....	31
1.1 Cônicas.....	31
2.1.1 Circunferência	32
2.1.2 Elipse	34
2.1.3 Hipérbole.....	37
2.1.4 Parábola	40
2.2 Superfícies de Revolução	43
2.2.1 Elipsoide de revolução.....	44
2.2.2 Esfera.....	45
2.2.3 Hiperboloide de revolução	46
2.2.4 Paraboloides de revolução	48
2.2.5 Cone de revolução.....	50
2.2.6 Cúpula de revolução	51
Capítulo 3 - Estudos de casos.....	53
3.1 A Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida de Brasília.....	53
3.1.1 Histórico	53
3.1.2 Geometria	55
3.1.3 Equação	56
3.2 Congresso Nacional (Senado e Câmara).....	58
3.2.1 Histórico	58
3.3 Senado Federal	60
3.3.1 Geometria	61
3.3.2 Equação	62
3.4 Câmara dos Deputados.....	64

3.4.1 Geometria	65
3.4.2 Equação	70
3.5 O Museu Nacional Honestino Guimarães.....	77
3.5.1 Histórico	77
3.5.2 Geometria	80
3.5.3 Equação	85
3.6 Palácio da Alvorada.....	92
3.6.1 Histórico	92
3.6.2 Geometria	93
3.6.3 Equação	94
Considerações Finais.....	99
Referências.....	100

Lista de Figuras

FIGURA 1- A CRIAÇÃO DO PLANO PILOTO.	18
FIGURA 2 - PALÁCIO DO ITAMARATY	22
FIGURA 3 - TEMPLO DE HATSHEPSUT	22
FIGURA 4 - TEMPLO DE HATSHEPSUT, VISTA FRONTAL.	23
FIGURA 5 - QUARTEL GENERAL DO EXÉRCITO.	23
FIGURA 6 - QUARTEL GENERAL DO EXÉRCITO COM OBELISCO.....	24
FIGURA 7 -TEMPLO DE LUXOR.....	24
FIGURA 8 - MEMORIAL JK.....	27
FIGURA 9 - MASTABA DO FARAÓ SHEPSESKAF, CHAMADA “MASTABA EL FARA ´UN” (C. 2510 A.C.), DA 4.A DINASTIA, SAKARA, VALE FUNERÁRIO DE MÊNFIGS, EGITO.....	27
FIGURA 10 - ANTIGO PRÉDIO DA COMPANHIA ENERGÉTICA DE BRASÍLIA.....	28
FIGURA 11 - COMPLEXO FUNERÁRIO DO GRANDE REI ZOSER (DJOSER), 2750 A.C, SAKARA.....	28
FIGURA 12 - EXTRAÇÃO DAS CÔNICAS ATRAVÉS DE SEÇÕES PLANAS EM UM CONE RETO.....	31
FIGURA 13 - CIRCUNFERÊNCIA COM CENTRO C(A,B) E RAIOS R.....	33
FIGURA 14 - ELIPSE E SEUS ELEMENTOS.	34
FIGURA 15 - ELIPSE E SEUS ELEMENTOS.	35
FIGURA 16 - HIPÉRBOLE E SEUS ELEMENTOS	37
FIGURA 17 - HIPÉRBOLE COM AS COORDENADAS DOS PONTOS.....	38
FIGURA 18 - PARÁBOLA E SEUS ELEMENTOS.....	41
FIGURA 19 - PARÁBOLA COM AS COORDENADAS DOS PONTOS.	42
FIGURA 20 - ELIPSOIDE DE REVOLUÇÃO	44
FIGURA 21 - ESFERA.....	46
FIGURA 22 - HIPERBOLOIDE DE REVOLUÇÃO	47
FIGURA 23 - PARABOLOIDE DE REVOLUÇÃO.....	49
FIGURA 24 - CONE DE REVOLUÇÃO	50
FIGURA 25 - PARALELOS E MERIDIANOS.....	51
FIGURA 26 - ESTRUTURA DE HIPERBOLOIDES.	53
FIGURA 27 - CATEDRAL.....	54
FIGURA 28 - ESTRUTURA DA CATEDRAL DE BRASÍLIA (AUTOCAD)	55
FIGURA 29 - CONSTRUÇÃO DA CATEDRAL METROPOLITANA DE BRASÍLIA, 1959.....	56
FIGURA 30 - HIPERBOLOIDE.....	57
FIGURA 31- HIPERBOLÓIDE (GEOGEBRA)	58
FIGURA 32 - TRONCO DO HIPERBOLÓIDE CORRESPONDENTE À CATEDRAL.....	58
FIGURA 33 - VISTA AÉREA DA PRAÇA DOS TRÊS PODERES. BRASÍLIA, 1960.....	59
FIGURA 34 - CONGRESSO NACIONAL	60
FIGURA 35 - CÚPULA DO SENADO, ARQUIVO NACIONAL	61
FIGURA 36 - TIPOS DE CÚPULA DE REVOLUÇÃO. FONTE: GOMEZ TREMARI,1979 “DISEÑO ESTRUCTURAL SIMPLIFICADO”.	61
FIGURA 37 - CÚPULA DO SENADO – CORTE.....	62
FIGURA 38 - CÚPULA DO SENADO - ANEL DE BASE E REPRESENTAÇÃO PARCIAL DA CASCA.	62
FIGURA 39 - PARABOLOIDE CORRESPONDENTE AO SENADO (GEOGEBRA).	64
FIGURA 40 - CÚPULA DO SENADO.....	64
FIGURA 41- CÚPULA DA CÂMARA DOS DEPUTADOS, EM FASE DE CONCRETAGEM, COM OS MINISTÉRIOS AO FUNDO. BRASÍLIA, 1959.	65
FIGURA 42 - CÚPULA INVERTIDA, COMPOSIÇÃO COM UM ELIPSOIDE E UM TRONCO DE CONE.....	66

FIGURA 43 CIRCUNFERÊNCIA QUE DETERMINA O ARCO DA COBERTURA.....	66
FIGURA 44 - RETA TANGENTE A UMA CURVA E O ÂNGULO EM RELAÇÃO A HORIZONTAL.....	67
FIGURA 45 - RETA TANGENTE EM ÂNGULO NULO, CURVA POUSADA HORIZONTAL.....	67
FIGURA 46 - SIMULAÇÃO E COMPARAÇÃO ENTRE OS PERFIS GEOMÉTRICOS DA CURVA PARABÓLICA E DA CURVA ELÍPTICA.....	68
FIGURA 47 - ILUSTRAÇÃO DA GERATRIZ A PARTIR DE UM SEGMENTO DA CURVA DE UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL E CONTATO DE SEGUNDA ORDEM.....	69
FIGURA 48 - PROJETO ESTRUTURAL COMPLETO, COM A CÚPULA REBAIXADA.....	69
FIGURA 49 - GEOMETRIA DAS CÚPULAS DO CONGRESSO NACIONAL.....	70
FIGURA 50 - CÚPULA DA CÂMARA – CORTE.....	70
FIGURA 51 - ELIPSE E CONE INVERTIDO.....	71
FIGURA 52 - RETA R TANGENTE A ELIPSE (GEOGEBRA).....	72
FIGURA 53 - ELIPSOIDE DE REVOLUÇÃO, VISTA FRONTAL. (GEOGEBRA).....	73
FIGURA 54 - ELIPSOIDE DE REVOLUÇÃO, VISTA DE CIMA. (GEOGEBRA).....	73
FIGURA 55 - CONE DE REVOLUÇÃO, VISTA FRONTAL. (GEOGEBRA).....	74
FIGURA 56 - ELIPSOIDE DE REVOLUÇÃO E CONE DE REVOLUÇÃO (GEOGEBRA).....	74
FIGURA 57 - CIRCUNFERÊNCIA FORMADA PELA INTERSECÇÃO DO ELIPSOIDE DE REVOLUÇÃO E CONE DE REVOLUÇÃO, VISTA FRONTAL (GEOGEBRA).....	75
FIGURA 58 - CIRCUNFERÊNCIA FORMADA PELA INTERSECÇÃO DO ELIPSOIDE DE REVOLUÇÃO E CONE DE REVOLUÇÃO, VISTA DE CIMA (GEOGEBRA).....	75
FIGURA 59 - DELIMITAÇÃO DA PARTE DO TRONCO DE CONE E A PARTE DO ELIPSOIDE.....	76
FIGURA 60 - JUNÇÃO DA PARTE DO TRONCO DE CONE E A PARTE DO ELIPSOIDE PARA FORMAR A CÚPULA.....	76
FIGURA 61 - DESENHO CORRESPONDENTE À CÚPULA DA CÂMARA DOS DEPUTADOS.....	77
FIGURA 62 - CÚPULA DA CÂMARA DOS DEPUTADOS.....	77
FIGURA 63 - MUSEU DE BRASÍLIA (DÉCADA DE 70) – MAQUETE 1ª VERSÃO.....	78
FIGURA 64 - MUSEU DE BRASÍLIA (1986) – MAQUETE DA 2ª VERSÃO.....	78
FIGURA 65 - MUSEU DE BRASÍLIA (1999) – 3ª VERSÃO – FACHADA.....	79
FIGURA 66 - MUSEU DE BRASÍLIA (1999) – VERSÃO DE 40 METROS DE CÚPULA COM ABERTURA NO TOPO – CORTE – ESTRUTURA SIMPLES.....	79
FIGURA 67 - MUSEU DE BRASÍLIA (2006) – VERSÃO CONSTRUÍDA – CORTE – RAMPA RETA.....	79
FIGURA 68 - MUSEU DE BRASÍLIA (2006) VERSÃO CONSTRUÍDA – CORTE – SOBREPOSIÇÃO DE DUAS FORMAS: TRONCO DE CONE (EM AZUL) E CÚPULA.....	80
FIGURA 69 - MUSEU DE BRASÍLIA (2006) – CORTE – ACESSO PRINCIPAL COM ACESSO SIMULTÂNEO AO TÉRREO E AO PRIMEIRO PAVIMENTO.....	81
FIGURA 70 - ESCORAMENTO DAS VIGAS RADIAS 1.....	81
FIGURA 71 - ESCORAMENTO DAS VIGAS RADIAS 2.....	82
FIGURA 72 - CORTE ESQUEMÁTICO DO ARCO GERADOR DA CÚPULA DO MUSEU NACIONAL.....	82
FIGURA 73 - PLANTA DE COBERTURA.....	83
FIGURA 74 - PERTURBAÇÃO DE BORDA.....	83
FIGURA 75 - A. EXECUÇÃO DAS FUNDAÇÕES E DO ANEL DE COMPRESSÃO NA BASE DA CÚPULA. B. EXECUÇÃO DA BASE DA CÚPULA – PAREDE DUPLA.....	84
FIGURA 76 - VIGAS RADIAIS DO PAVIMENTO, DISPOSTAS A CADA 15°.....	84
FIGURA 77 - LAGE DO PAVIMENTO DE EXPOSIÇÕES CONCRETADA.....	85
FIGURA 78 - CONE E CIRCUNFERÊNCIA.....	85
FIGURA 79 - RETA R TANGENTE A CIRCUNFERÊNCIA. (GEOGEBRA).....	87
FIGURA 80 - ESFERA, VISTA FRONTAL (GEOGEBRA).....	88
FIGURA 81 - CONE DE REVOLUÇÃO, VISTA FRONTAL (GEOGEBRA).....	89
FIGURA 82 - CIRCUNFERÊNCIA FORMADA PELA INTERSECÇÃO DA ESFERA E CONE DE REVOLUÇÃO, VISTA FRONTAL (GEOGEBRA).....	89

FIGURA 83 - SOBREPOSIÇÃO DA PARTE DO TRONCO DE CONE E A PARTE DA ESFERA PARA FORMAR A CÚPULA, VISTA FRONTAL (GEOGEBRA).	90
FIGURA 84 - SOBREPOSIÇÃO DA PARTE DO TRONCO DE CONE E A PARTE DA ESFERA PARA FORMAR A CÚPULA, VISTA DE CIMA (GEOGEBRA).	90
FIGURA 85 - DELIMITAÇÃO DA PARTE DO TRONCO DE CONE E A PARTE DA ESFERA.....	91
FIGURA 86 - JUNÇÃO DA PARTE DO TRONCO DE CONE E A PARTE DA ESFERA PARA FORMAR A CÚPULA.	91
FIGURA 87- DESENHO DA CÚPULA DO MUSEU DE BRASÍLIA.	91
FIGURA 88 - MUSEU DE BRASÍLIA.....	92
FIGURA 89 - CONSTRUÇÃO DO PALÁCIO DO ALVORADA.....	93
FIGURA 90 - SIMULAÇÃO DA ADOÇÃO DE CURVAS PARA AS COLUNAS.....	93
FIGURA 91 - COLUNAS, DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DA FORMA DA EQUAÇÃO POLINOMIAL DE QUARTO GRAU E PONTOS DETERMINADOS. FONTE: ARQUIVO PÚBLICO DO DISTRITO FEDERAL.	94
FIGURA 92 - GRÁFICO 1 DA EQUAÇÃO POLINOMIAL DE QUARTO GRAU Y (GEOGEBRA).....	95
FIGURA 93 - GRÁFICO 2 DA EQUAÇÃO POLINOMIAL DE QUARTO GRAU Y (GEOGEBRA).....	95
FIGURA 94 - GRÁFICO DA EQUAÇÃO POLINOMIAL DE QUARTO GRAU G (GEOGEBRA).....	96
FIGURA 95 - GRÁFICOS DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS Y (VERDE) E G (AZUL). (GEOGEBRA).	97
FIGURA 96 - PARTE DOS GRÁFICOS DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS Y (VERDE) E G (AZUL)QUE COMPÕEM A COLUNA. (GEOGEBRA).....	97
FIGURA 97 - SOBREPOSIÇÃO DO GRÁFICO FORMADO POR PARTES DOS GRÁFICOS Y E G NAS COLUNAS DO PALÁCIO DO ALVORADA	98
FIGURA 98 -COLUNAS DO PALÁCIO DO ALVORADA.....	98

Introdução

O Modernismo foi um movimento artístico e cultural que teve seu início na Europa e começou a se difundir no Brasil a partir da primeira década do século XX. Segundo Luciana Murta (2018) o movimento deu início a uma nova fase estética na qual ocorreu a integração de tendências que já vinham surgindo, abandonando as tradições que vinham sendo seguidas, tanto na literatura quanto nas artes. Apesar da grande repercussão que a Arquitetura e Arte Moderna obtiveram, vale ressaltar que o Movimento Moderno não se limitou a essas duas áreas. Foi um movimento cultural global que envolvia vários aspectos, entre eles sociais, tecnológicos, econômicos e artísticos.

O Modernismo foi introduzido no Brasil pela influência de arquitetos estrangeiros adeptos do movimento, mas o estilo se tornou conhecido e aceito mundialmente pelos grandes trabalhos de arquitetos brasileiros, como Oscar Niemeyer e Lúcio Costa. Os projetos modernistas tinham como fundamento o racionalismo e funcionalismo, além de características como formas geométricas definidas e falta de ornamentação – a própria obra é considerada um ornamento na paisagem. Tinha como conceito também o uso de pilotis com a finalidade de liberar o espaço sob o edifício, painéis de vidro contínuos nas fachadas ao invés de janelas tradicionais e a concepção de integração da arquitetura com o paisagismo, e com as outras artes plásticas através do emprego de painéis de azulejo decorados, murais e esculturas.

Oscar Niemeyer revoluciona a arquitetura com a construção de Brasília (1956-1960), um canteiro experimental deste novo estilo inovador na concepção de formas estruturais, realizáveis em grande parte pelo gênio criador do engenheiro Joaquim Cardozo. Juscelino Kubitschek, prefeito de Belo Horizonte, convocou Oscar Niemeyer para os projetos de arquitetura da cidade e quando eleito presidente do Brasil, em 1955, teve como meta a transferência da capital do Rio de Janeiro para o centro do país, convidando mais uma vez Niemeyer para ser o Chefe de Departamento de Urbanismo e Arquitetura da nova cidade. Brasília toma forma no plano urbanístico desenhado por Lúcio Costa e na genialidade criativa de Niemeyer, que imprime a sua marca nos principais monumentos arquitetônicos, construídos, em grande parte, nos quatro anos que antecederam à inauguração da cidade.

Segundo Costa (1985) o projeto de Brasília ordena o espaço baseado nas escalas de uso, dentro da qual cada função urbana cria estruturas morfológicas próprias e identificáveis: a “monumental coletiva” (edifícios públicos), a “residencial-cotidiana” (superquadras), a “gregária-concentrada” (espaço de lazer), e a “bucólica” (extensas áreas livres, arborizadas).

Brasília é considerada um museu a céu aberto visto que por onde se passa é possível encontrar traços do modernismo em seus edifícios e monumentos espalhados pela cidade.

Neste trabalho será feito um apanhado geral dos aspectos históricos de Brasília, desde o sonho de Bosco à sua construção de fato. Será ressaltado alguns dos principais personagens responsáveis por sua idealização e segundo Luande (2013) suas influências de civilizações antigas como o Egito, para o projeto dos edifícios e monumentos da cidade. Para melhor compreensão do leitor, em um dos capítulos será apresentado alguns elementos de geometria analítica Reis (1996) como as cônicas, quádricas e as superfícies de revolução. Esses conceitos são pré-requisitos matemáticos para o entendimento do estudo de casos dos Monumentos Arquitetônicos que serão explorados. No tópico que envolve cônicas, destacaremos a circunferência, elipse, hipérbole e parábola e suas equações reduzidas. No tópico de quádricas e superfícies de revolução, serão abordados apenas algumas dessas superfícies - aquelas que são necessárias para o entendimento do estudo de casos.

O trabalho evidencia como a Matemática é uma ciência que permeia vários campos de estudos, passando pela História, Arquitetura, Engenharia, Artes, Física, dentre outros. O objetivo é encontrar as expressões algébricas das superfícies e curvas que mais se aproximam das formas e estruturas utilizadas por Niemeyer. Diante das poucas informações encontradas, foram escolhidos monumentos da cidade de grande relevância histórica que tivessem o maior número de informações e dados para possibilitar a construção dessas superfícies e curvas, buscando encontrar as equações que as representam para assim construir seu gráfico e poder comparar com as formas de cada monumento. Considerando esses critérios, os monumentos escolhidos foram a Catedral, Congresso Nacional (cúpulas da Câmara e Senado), Museu Nacional e Palácio da Alvorada (colunas).

O trabalho busca atingir a todos que tenham interesse por matemática de uma forma aplicada a arquitetura juntamente com a história de Brasília e aos professores que buscam ensinar uma matemática aplicada com exemplos concretos, onde os alunos possam ver a beleza da matéria além da sala de aula.

Capítulo 1 - Aspectos históricos de Brasília

Neste capítulo será feito um apanhado geral dos aspectos históricos de Brasília, desde o Sonho de Bosco à sua construção de fato. Ressaltaremos alguns dos principais personagens para a idealização de Brasília e suas influências em civilizações antigas para o projeto dos edifícios e monumentos da cidade.

Em agosto de 1883, Dom Bosco, como é mais conhecido, teve uma visão profética que fazia uma viagem à América do Sul, onde jamais visitou. No sonho, ele passou por várias terras entre a Colômbia e o sul da Argentina, conhecendo vários povos e avistando riquezas. Ao chegar à região entre os paralelos 15° e 20°, viu um local especial, onde, nas palavras de um anjo que o acompanhava em sua visão, apareceria “a terra prometida” e que seria “uma riqueza inconcebível”.

Entre os graus 15 e 20 havia uma enseada bastante longa e bastante larga, que partia de um ponto onde se formava um lago. Disse então uma voz repetidamente: -Quando se vierem a escavar as minas escondidas no meio destes montes, aparecerá aqui a terra prometida, de onde jorrará leite e mel. Será uma riqueza inconcebível. (“Memórias Biográficas de São João Bosco”, padre Lemoyne, vol.16, ps.394 e 395, Torino, 1935).

Tais palavras são consideradas por muitos como uma profecia da construção de Brasília. São os relatos de um sonho de São João Bosco, santo italiano fundador da Congregação dos Salesianos. Setenta e sete anos depois do sonho, era inaugurada no Planalto Central brasileiro a cidade de Brasília, exatamente dentro do intervalo de coordenadas geográficas mencionado na visão de Dom Bosco e emoldurada pelo Lago Paranoá. Mas há quem diga que a proposta de construir Brasília no interior do País teria partido de José Bonifácio de Andrada e Silva, que, em carta à Corte, em Lisboa, sugere “criar uma cidade central no interior do Brasil, para assento da Regência que poderá ser em 15° de latitude, em sítio sadio, ameno, fértil, e junto a algum rio navegável...”

Em 1822, a ideia de José Bonifácio de Andrada e Silva é aprovada pelos deputados brasileiros e o nome “Brasília” é sugerido por ele próprio, anonimamente um ano mais tarde. Em 1933 reunidos na Grécia os maiores urbanistas do mundo, tinham como tema a “cidade funcional” baseados principalmente na visão francesa liderada por Le Corbusier. As conclusões finais recomendavam que a cidade devia ser concebida de modo funcional, ou seja, uma perfeita separação entre áreas residenciais, lazer e trabalho com as necessidades do homem sendo

claramente colocadas e resolvidas. A Carta de Atenas recomendou privilegiar as áreas verdes com baixa densidade construtiva limitando a altura dos edifícios. Esta Carta influenciou desde então várias gerações de arquitetos. Brasília é a mais notável expressão dessas recomendações.

Ela foi construída com o intuito de transferir a capital na época o Rio de Janeiro, para o interior do país. Um dos principais motivos para essa transferência foi povoar a região central a fim de levar o desenvolvimento para além da costa do país. Para este grande feito, foi lançado um Concurso Nacional do Plano Piloto da Nova Capital do Brasil em 30 de setembro de 1956. Concorreram 26 projetos, dos quais 16 foram eliminados em uma seleção prévia.

1.1 Lucio Costa

O projeto aprovado de Lucio Costa foi muito questionado pela sua simplicidade que por muitos arquitetos não passava de um esboço. Mas justamente a simplicidade e originalidade nas soluções propostas pelo arquiteto foram o que o fez vencedor do concurso.

Desejo inicialmente desculpar-me perante a direção da Companhia Urbanizadora e a Comissão Julgadora do Concurso pela apresentação sumária do partido aqui sugerido para a nova Capital, e também justificar-me.

Não pretendia competir e, na verdade, não concorro — apenas me desvencilho de uma solução possível, que não foi procurada, mas surgiu, por assim dizer, já pronta.

Compareço, não como técnico devidamente aparelhado, pois nem sequer disponho de escritório, mas como simples "maquis" do urbanismo, que não pretende prosseguir no desenvolvimento da idéia apresentada, se não eventualmente, na qualidade de mero consultor. E se procedo assim candidamente, é porque me amparo num raciocínio igualmente simplório: se a sugestão é válida, estes dados, conquanto sumários na sua aparência, já serão suficientes, pois revelarão que, apesar da espontaneidade original ela foi, depois, intensamente pensada e resolvida; se não o é, a exclusão se fará mais facilmente e não terei perdido o meu tempo nem tomado o tempo de ninguém... (Relatório do Plano Piloto de Brasília para o concurso em 1957, 1991, p.21).

O arquiteto Lúcio Costa nasceu em Toulon, França, em 27 de fevereiro de 1902, filho de brasileiros em serviço no exterior. Após retornar ao Brasil, em 1917, estudou pintura e arquitetura na Escola Nacional de Belas Artes no Rio de Janeiro, diplomando-se em 1924. Entre a realização de várias obras, em 1956, participa do concurso para o projeto da nova capital do país. É o vencedor e prepara todo o projeto urbanístico. Trabalhou junto com Joaquim Cardozo,

Oscar Niemeyer, entre outros, e no dia 21 de abril de 1960 Brasília era inaugurada. O Plano Piloto de Brasília deveria partir de uma cruz – o “sinal da Cruz”. Segundo historiadores, essa cruz deveria corresponder a um ato de posse da terra. Conforme havia prometido, Juscelino Kubitschek diz à Nação em data de *21 de abril de 1960*:

[...]Neste dia – 21 de abril – consagrado ao alferes Joaquim José da Silva Xavier, o Tiradentes, ao centésimo trigésimo oitavo ano da independência e septuagésimo primeiro da República, declaro, sob a proteção de Deus, inaugurada a cidade de Brasília, Capital dos Estados Unidos do Brasil.

(Trecho do discurso de Ano novo do presidente, Rio de Janeiro, 21 de dezembro de 1960.)

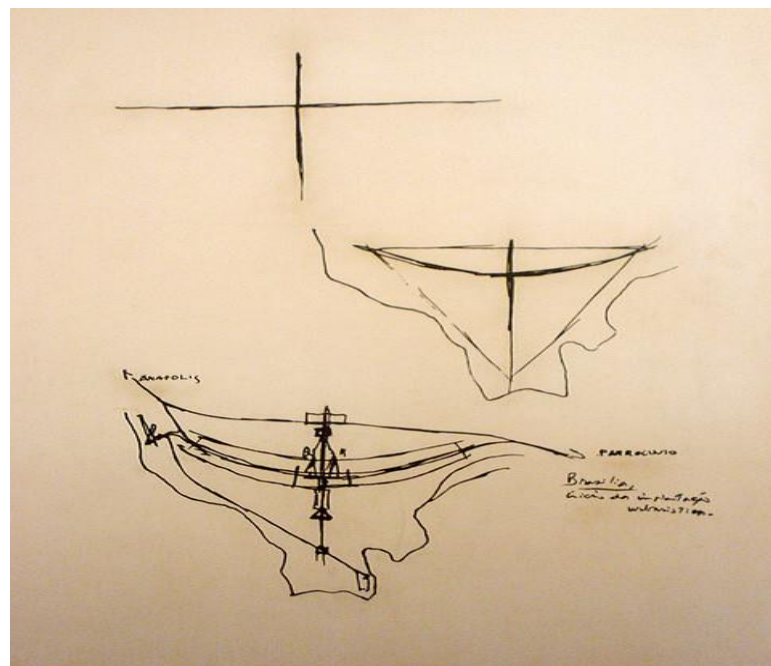


Figura 1- A criação do Plano Piloto. Fonte: COSTA, Lucio. Relatório do Plano Piloto. Brasília, 1957.

Segundo Guerra (2005), Lucio Costa procurou adaptar os eixos ao escoamento natural das águas, à topografia local, arqueando um dos eixos para limitá-lo no triângulo definido para a área urbana. Os edifícios não foram todos logo imediatamente desenhados, mas sua localização foi determinada de forma precisa. O Plano Piloto aplicou propositadamente os princípios do rodoviarismo com a exclusão de cruzamentos, enfatizando pistas centrais de velocidade e pistas laterais para trânsito local.

A cidade com corpo de pássaro de Lucio Costa é, desde o nascimento, um ícone da arquitetura moderna e sua fama percorreu o mundo tendo como marcas registradas, além do

traçado urbanístico peculiar, os edifícios de formas instigadoras de Oscar Niemeyer. Inaugurando um novo tempo na história do País, Brasília despontou como símbolo de um horizonte de possibilidades políticas e sociais.

O desejo do arquiteto de fazer da nova capital um marco diferenciado da arquitetura moderna, apoiado irrestritamente pelo presidente Juscelino Kubitschek e por todo o grupo de técnicos que o acompanhou, contou com a genialidade e a ousadia de um profissional obstinado pela engenharia e pelas artes, Joaquim Cardozo. Mas, apesar disso, ele é frequentemente ignorado nos abundantes textos e publicações sobre a obra de Niemeyer e a respeito de Brasília.

1.2 Joaquim Cardozo

Joaquim Maria Moreira Cardozo (1897- 1979), foi engenheiro, poeta, editor, desenhista e calculista dos mais importantes monumentos de Oscar Niemeyer. Cidadão recifense de origem humilde, superou com seu brilhantismo qualquer descompasso de formação que porventura tenha tido em relação aos profissionais que se destacavam na área à época, em geral advindos de classes sociais mais abastadas e graduados em renomadas escolas no exterior. Joaquim Cardozo foi um elo definitivo na cadeia de fatores que levaram a obra de Niemeyer ao patamar de reconhecimento que possui, em especial no que tange àquele período.

A convicção de Oscar Niemeyer no uso das formas curvas, substituindo as formas retangulares tão comuns nas construções mais antigas por curvas com características diferenciáveis, é de domínio público, sendo quase a declaração de honra de seu trabalho, expressa em suas palavras:

[...] Não é o ângulo reto que me atrai. Nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre e sensual. A curva que encontro nas montanhas do meu país, na mulher preferida, nas nuvens do céu e nas ondas do mar. De curvas é feito todo o universo. O universo curvo de Einstein...". (Niemeyer, Oscar, 2000, *As Curvas do Tempo: as memórias de Oscar Niemeyer*. Londres: Phaidon, ps. 169 e 170)

É em Brasília que o traço livre e generoso do arquiteto encontra sua expressão privilegiada, influenciada pelos sonhos e intenções político-ideológicas das equipes envolvidas. O próprio Niemeyer confessa:

[...] mas foi em Brasília, nos palácios da nossa Capital, que a forma plástica mais me

preocupou, desejo de encontrar nova solução estrutural que os caracterizasse. São as colunas recurvadas, acabando em ponta, que os fazem leves e vazados como que apenas tocando o solo. Na concepção desses palácios, preocupou-me também a atmosfera que dariam à Praça dos Três Poderes. Não a pretendia fria e técnica, com a pureza clássica, dura, já esperada das linhas retas. Desejava vê-la, ao contrário, plena de formas, sonho e poesia...". (Palavras de Niemeyer, Rebello, 2007)

Segundo Rebello (2007) as colunas dos palácios, a volumetria da Catedral e as cúpulas do Congresso Nacional, como símbolos de uma nacionalidade em expansão, foram um desafio para além de sua expressão ideológica. A complexidade estática das formas propostas, contrapondo os esforços atuantes às características resistentes do material, impunha a necessidade de uma concepção estrutural inovadora.

O envolvimento de Joaquim Cardozo com o projeto foi forte, no enfrentamento dos problemas científicos e construtivos que envolveram a resolução dessas e outras obras igualmente singulares, custando-lhe inúmeras vezes críticas acirradas por parte de profissionais e entidades ligados à engenharia estrutural.

Movia-se pela vontade de viabilizá-las e pela motivação de fazer dessas os conceitos básicos da engenharia e da técnica construtiva brasileiras, frente a um mundo tecnológico em desenvolvimento e sob o domínio de algumas poucas potências internacionais. Sempre rebelde e inconformado com toda e qualquer tendência de bajulação que pudesse ser manifestada pelos brasileiros em relação aos princípios estrangeiros, Joaquim Cardozo pregava a importância de uma soberania nacional no tocante ao conhecimento, voltada à resolução adequada de nossos problemas sociais.

Além da adesão irrestrita aos preceitos da arquitetura moderna, sem dúvida o sentido nacionalista ligava fortemente Joaquim Cardozo a Oscar Niemeyer. Por isso, nutriu seu trabalho na busca de soluções para os intrincados problemas estruturais que lhe permitiram contribuir para a consolidação de uma cultura arquitetônica brasileira de repercussão internacional.

1.3 Oscar Niemeyer

Oscar Niemeyer (1907-2012) foi um arquiteto brasileiro e possui mais de 600 projetos em todo o mundo. É um dos maiores representantes da arquitetura moderna da história. Tem como característica principal o uso do concreto armado para as suas construções, com seu estilo inconfundível. Nasceu no bairro de Laranjeiras, no Rio de Janeiro, no dia 15 de dezembro de

1907. Em 1929, entrou para a Escola Nacional de Belas Artes no Rio de Janeiro, onde formou-se engenheiro arquiteto, em 1934. Inicia-se na profissão como estagiário no escritório de Lúcio Costa e Carlos Leão. Em 1936, foi designado para colaborar com o arquiteto suíço, Le Corbusier¹, que estava participando do projeto do Ministério da Educação do Rio de Janeiro. Em 1940, Niemeyer teve a oportunidade de conhecer, o então prefeito de Belo Horizonte, Juscelino Kubitschek. Convidado pelo político, realiza seu primeiro grande projeto, o Conjunto da Pampulha, formado por um Cassino, a Casa de Baile, o Clube e a Igreja de São Francisco de Assis ou Igreja da Pampulha.

Em 1956, a convite do então Presidente da República, Oscar Niemeyer realiza vários projetos para a cidade de Brasília, a nova capital do Brasil. Entre eles o Palácio da Alvorada, o Palácio do Planalto, o Palácio do Itamaraty, o Congresso Nacional, a Catedral, a Praça dos Três Poderes, o Superior Tribunal Federal, a Universidade de Brasília, o Memorial JK e o Teatro Nacional.

Segundo o professor Francisco Lauande²:

A genialidade de Oscar Niemeyer é a qualidade mais enaltecida tanto pelos arquitetos quanto pelo público em geral. Entretanto, os que compreendem o valor do seu legado esquecem muitas vezes de enfatizar que o seu talento nato teve como primeiro aliado o conhecimento sobre arquitetura. As obras arquitetônicas primordiais para os palácios e monumentos em Brasília registram, sobretudo, a cultura arquitetônica que Niemeyer demonstrou dominar, e que potencializou sua capacidade criativa. Ele era, antes de tudo, um homem culto e de grande sensibilidade. Sua genialidade foi apenas um meio para o uso de tais faculdades, que independem da qualidade de gênio.

(Lauande, 2013, artigo disponível em www.vitruvius.com.br)

Os palácios de Niemeyer em Brasília, sob a ótica da arquitetura como símbolo, representam um país que ainda está por surgir: mais justo socialmente. Suas obras estavam e estão à frente do tempo.

Juscelino Kubitschek percebendo a importância do momento histórico, sabia que as obras arquitetônicas perpetuariam sua marca como estadista, e que Niemeyer era o único nome capaz de interpretar isso, traduzindo o feito político em arquitetura.

¹ Le Corbusier (La Chaux-de-Fonds, 6 de Outubro de 1887 — Roquebrune-Cap-Martin, 27 de Agosto de 1965) foi um arquiteto, urbanista, escultor e pintor de origem suíça e naturalizado francês em 1930 que também deixou seu legado em Brasília como o paisagismo do Parque da Cidade, entre outros.

² Francisco Lauande Jr é formado em Arquitetura e Urbanismo pela Universidade de Brasília. Mestre em Teoria, História e Crítica pela Universidade de Brasília. Professor do Curso de Arquitetura e Urbanismo da Universidade Católica de Brasília.

Nos monumentos e palácios de Brasília, Niemeyer lançou mão de referências extraídas das arquiteturas secular e milenar. Segundo Luande (2013) ele interpretou tipos de edifícios criados pelas civilizações antigas de acordo com cada um dos temas tratados. Pela cidade, pode-se ver referências gregas, romanas e principalmente egípcias.

Considerando o conjunto – palácio e anexo – percebe-se a relação compositiva que existe entre eles: o anexo cumpre a função de pano de fundo para o palácio.



Figura 2 - Palácio do Itamaraty, Fonte de Milton Ramos, Acervo do arquiteto.

Niemeyer, recorrendo à cultura do Egito Antigo, lançou mão do mesmo artifício (figura-fundo) utilizado no templo construído para a rainha-faraó Hatshepsut construído a frente das falésias



Figura 3 - Templo de Hatshepsut. Foto do autor.



Figura 4 - Templo de Hatshepsut, vista frontal. Foto do autor

No projeto para o Palácio do Planalto, acontece mais uma interpretação das insinuações formais registradas por Lucio Costa. Delas, Niemeyer apropria-se da ideia para a rampa e o parlatório.

O Quartel General do Exército, no Setor Militar Urbano é uma obra tardia. O conjunto, grandioso e austero, numa sequência de edifícios em paralelo, remete às fortificações das primeiras civilizações da antiguidade, com suas muralhas erguidas para a proteção de palácios e templos.



Figura 5 - Quartel General do Exército. Foto do autor.

Entre o quartel e a rua a frente, estão: uma grande cobertura em concreto tendendo a uma forma elíptica que recebe um palanque; e um obelisco – uma releitura dos obeliscos egípcios que eram incorporados aos templos em suas entradas.



Figura 6 - Quartel General do Exército com obelisco. Foto do autor



Figura 7 -Templo de Luxor, foto do autor.

1.4 Juscelino Kubitschek

Juscelino Kubitschek nasceu em Diamantina – MG, em 12 de setembro de 1902. A primeira profissão que exerceu foi de telegrafista até formar-se em Medicina, em 1927. Tornou-se cirurgião e, em Paris, especializou-se em urologia. Em 1933, Kubitschek assumiu a chefia do gabinete civil do interventor Benedito Valadares no governo do Estado de Minas Gerais. Em 1935, Juscelino assumiu o cargo de Deputado Federal do qual foi deposto com o Golpe de 1937 com a implantação do Estado Novo. Assim, voltou a atuar como médico no Hospital Militar de Belo Horizonte.

Em fevereiro de 1940, Juscelino Kubitschek foi nomeado prefeito de Belo Horizonte, função que assumiu a revelia, pois pretendia continuar exercendo o ofício de médico. Atuou concomitantemente nas funções de médico e de prefeito. Somente em 1945 abandonou a medicina para atuar exclusivamente como político, nesse ano também atuou intensamente na formação do Partido Social Democrático (PSD). Em Belo Horizonte realizou importantes obras de infraestrutura e construiu o conjunto arquitetônico da Pampulha projetado por Oscar Niemeyer.

No final do ano de 1954, Juscelino e as lideranças do PSD decidiram lançar a candidatura dele à presidência do país. Em 31 de janeiro de 1956 toma posse como presidente da República do Brasil.

A fundação de Brasília, no dia 21 de abril de 1960, não significou apenas a construção de mais uma cidade planejada. Todo o projeto do plano-piloto continha um significado profundamente místico e cuja origem era claramente egípcia.

Por volta de 1930, Juscelino, quando ainda era um jovem estudante, viajou pelo Mediterrâneo e visitou a cidade de Tell El-Amarna, a Akhetaton. Essa visita definiria parte da história de nosso País. Ali, em meio às areias quentes do deserto, surgiu a semente da cidade que, um dia, seria chamada de Brasília.

O livro “*Brasília Secreta*” da egiptóloga Iara Kerns e do empresário Ernani Figueras Pimentel, publicado pela Editora Pórtico, mostra claramente essas intrigantes relações entre Akhenaton e Juscelino, bem como entre Akhetaton (a cidade sagrada) e Brasília.

[...]Levado pela admiração que tinha por esse autocrata visionário, Akhenaton, cuja existência quase lendária eu surpreendera através das minhas leituras em Diamantina,

aproveitei minha estada no Egito para fazer uma excursão até o local, onde existira Tell El-Amarna/Akhetaton.”

[...]vi os alicerces da que havia sido a capital do Médio Império do Egito. A cidade media oito quilômetros de comprimento por dois de largura. À margem leste do Nilo, jardins verdejantes haviam sido plantados e, atrás deles, subindo a encosta da rocha, erguera-se o palácio do Faraó, ladeado pelo grande templo”.

[...]tudo ruínas! O grande sonho do Faraó-Herege convertido num imenso montão de pedras, semi-enterrado na areia!”

(Palavras de Juscelino em “Meu Caminho para Brasília”, JK, p.111)

Akhenaton ou também chamado de Aquenáton foi um grande faraó da XVIII Dinastia egípcia, que governou por 16 anos, de 1352 a 1336 a.C. Nasceu no ano de 1372 a.C. e faleceu em 1336 a.C. Foi casado com Nefertiti, que, segundo historiadores, teve grande influência política no reinado do faraó Akhenaton. Foi o governante que admitiu pela primeira vez na história da humanidade a noção de um Deus único – Aton, representado pelo disco solar. Akhenaton mudou a capital do Egito, que antes do seu reinado era Tebas (hoje chamada Luxor), para uma nova cidade que mandou erguer à qual nomeou de Akhetaton (ou Amarna).

Tell el-Amarna é o nome atual em árabe da cidade construída por Akhenaton para funcionar como a nova capital do Antigo Egito durante o reinado do faraó, em homenagem a ATON, a principal divindade adorada pelo faraó. Está situada na margem oriental (Leste) do rio Nilo na província egípcia de Al Minya, a cerca de 312 quilômetros ao sul da cidade do Cairo.

Hoje, podemos perceber que o sonho faraônico de Juscelino Kubitschek concretizou-se. Até mesmo uma pirâmide mortuária foi construída para acolher seus restos mortais – a sua “múmia”. Seu túmulo, na mais pura tradição faraônica, fica acima do solo, inteiramente talhado em pedra, com seu volume em forma de tronco de pirâmide e tem a estrutura muito parecida com a de um mausoléu egípcio.



Figura 8 - Memorial JK. Foto do autor.

Veja como o memorial é parecido com uma mastaba, túmulo onde eram sepultados importantes faraós.



Figura 9 - Mastaba do faraó Shepseskaf, chamada “Mastaba el Fara’ un” (c. 2510 a.C.), da 4.a Dinastia, Sakara, Vale funerário de Mênfis, Egito. Foto do autor.

O que não dá para negar é que Brasília está cheia de prédios em forma de pirâmide. O prédio da Companhia Energética de Brasília, por exemplo, hoje demolido.



Figura 10 - Antigo prédio da Companhia energética de Brasília. Autor desconhecido.

O edifício lembra muito a estrutura egípcia conhecida como pirâmide de Sakara:



Figura 11 - Complexo Funerário do Grande rei Zoser (Djoser), 2750 A.C, Sakara. Foto do autor

1.5 Concreto armado

As estruturas, até o final do século XIX, ficaram condicionadas à pedra, com um peso próprio altíssimo, em torno de 8 toneladas/m². A introdução de novos materiais na arquitetura, juntamente com o estudo das formas geométricas de suas superfícies, possibilitou a grande aventura estrutural do século XX, alcançando estruturas extremamente delgadas, as membranas, cujo peso é inferior aos agentes atmosféricos a que estão submetidas.

Segundo Porto (2015), o primeiro destes materiais a propiciar o que chamamos de uma revolução na parte estrutural foi o concreto armado, material que se molda às formas projetadas, aos volumes mais diversos, às curvas não menos audaciosas. Nenhum material de construção conseguiu tanta diversidade de aplicação: estruturas ousadas, coberturas, lajes ritmadas, paredes de sustentação, esculturas, espessuras, texturas e cores num jogo lúdico e estimulante para tirar deste material tudo o que ele pode oferecer.

Com o concreto armado, novas formas surgiram na arquitetura. A curva apareceu diferente e a preocupação em reduzir apoios para obtenção de grandes espaços livres e de uma arquitetura mais leve e surpreendente originou problemas estruturais mais complexos, exigindo uma completa interação entre o arquiteto e o engenheiro calculista. No caso de Niemeyer, pode-se dizer que a sua obra está, nos primeiros 30 anos, intrinsecamente ligada à genialidade do engenheiro calculista Joaquim Cardozo (1897-1978) e nos últimos 30 anos a de José Carlos Süssekind.³

Diferente de Santiago Calatrava⁴, que se baseia na natureza para elaborar as suas esculturas, estudando o caminho das forças para obter a forma com o consumo mínimo de material, Niemeyer parte direto do modelo escultórico para propor a sua arquitetura. Mas concorda com Calatrava na importância que o desenho desempenha nesta arte, afirmando que “para ser um bom arquiteto é necessário saber escrever, de forma a defender com clareza as idéias do projeto, mas, sobretudo, saber desenhar” (Niemeyer, 1992, p.92). O desenho é a base de tudo. No de Niemeyer, o traço contém o talento de um criador, as formas surgem imbuídas de um apuro estrutural, mesmo que não tenham sido pensadas em sua totalidade.

Conceber uma obra significa necessariamente pensar uma intenção de estrutura. Toda construção pressupõe uma estrutura, um material e uma técnica que a caracteriza. Assim,

³ José Carlos Süssekind (Rio de Janeiro, 1947) é um engenheiro calculista, responsável pelo cálculo de diversas obras de Oscar Niemeyer ao longo das décadas de 70 até os últimos trabalhos de Niemeyer.

⁴ Santiago Pevsner Calatrava Valls (Valência, 28 de julho de 1951) é um arquiteto e engenheiro espanhol cujo trabalho tem se tornado bastante popular nas últimas décadas

estrutura e arquitetura nascem juntas no momento do projeto. Segundo Porto (2015) embora óbvio, trata-se de um aspecto nem sempre consciente de quem projeta, como se a estrutura pudesse vir a posteriore. Niemeyer sempre teve consciência disto, em sua arquitetura não é possível distinguir forma e estrutura. Quando a estrutura está pronta, a arquitetura também está. Também não se pode mais desvincular a arquitetura da engenharia, as duas fazem parte de um mesmo processo de criação.

Embora não fosse a única opção, o concreto armado era a técnica mais utilizada em todo o mundo para construção de estruturas. Esta solução surgiu da necessidade de mesclar a resistência à compressão e durabilidade da pedra com as características do aço. O resultado é um material que tem como vantagens poder assumir qualquer forma com rapidez e facilidade, além de proporcionar ao metal uma proteção contra a corrosão.

A união do concreto com a armadura de aço cria um componente resistente às tensões de compressão e tração devido às características dos dois materiais. Porém, para um bom desempenho do concreto armado, não basta apenas combiná-los, é preciso que exista aderência entre eles, ou seja, o trabalho de resistir às tensões tem que ser realizado de maneira conjunta.

Dentre as principais vantagens do concreto armado está o fato de ele ser econômico, já que conta com matéria-prima com custo não muito alto, e da relativa rapidez na construção. Como é um material que necessita de equipamentos simples para preparo, transporte, adensamento e vibração, não exige mão de obra muito especializada. É uma estrutura durável, impermeável se dosada de forma correta e que resiste ao fogo, às influências atmosféricas, ao desgaste mecânico, ao choque e vibrações.

Capítulo 2 – Alguns elementos de Geometria Analítica

Neste capítulo trabalharemos com alguns conteúdos básicos de geometria analítica, em especial com dois tópicos: as cônicas e as superfícies de revolução. Ambos são pré-requisitos para o entendimento do estudo de caso dos Monumentos que serão explorados no próximo capítulo. No tópico que envolve cônicas, definiremos circunferência, elipse, hipérbole e parábola e encontraremos suas equações reduzidas. No tópico de superfícies de revolução, abordaremos apenas algumas dessas superfícies, as quais necessitaremos para um melhor entendimento dos estudos de casos. O assunto dos dois tópicos não é exaustivo, mas será apresentado brevemente os elementos necessários para a compreensão do trabalho.

2.1 Cônicas

Por volta do século III a.C., mais precisamente de 262 a.C. a 200 a.C. viveu um matemático chamado Apolônio de Perga, conhecido como o “Grande Geômetra”. Embora bem menos reconhecido que Euclides e Arquimedes, é um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Assim como os “Elementos” de Euclides substituíram textos anteriores com propostas semelhantes, o tratado sobre “Cônicas” de Apolônio superou todos os rivais nesse campo, inclusive escritos do próprio Euclides. A obra “Cônicas” de Apolônio é composta de oito livros e nessa obra o matemático aborda as seções cônicas: Elipse, Hipérbole e Parábola a partir de um cone de duas folhas simplesmente variando a inclinação do plano de secção.

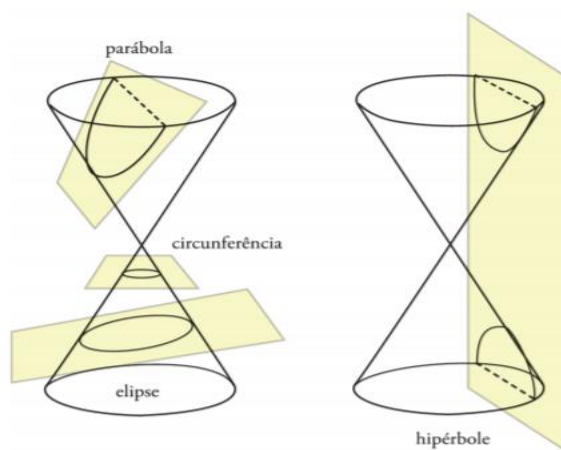


Figura 12 - Extração das cônicas através de seções planas em um cone reto

Pode-se obter as equações cartesianas dessas curvas no plano cartesiano estudando-se uma equação polinomial do segundo grau em duas incógnitas. Uma equação do segundo grau nas incógnitas x e y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

define de maneira implícita uma curva no plano xOy constituída do conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem a equação. Entretanto, nem sempre uma equação do segundo grau representa uma curva suave.

Por exemplo:

- a equação $x^2 + y^2 = 1$ represente a circunferência com centro na origem e raio 1;
- a equação $x^2 + y^2 = 0$ representa apenas um ponto (a origem $(0, 0)$);
- a equação $x^2 + y^2 = -1$ não representa nada (pois não existe nenhum ponto (x, y) que satisfaça esta equação. Outra maneira de dizer isso é que ela representa o conjunto vazio).
- a equação $x^2 - y^2 = 0$ representa duas retas que se interceptam na origem (as retas de equações $y = x$ e $y = -x$).

Por outro lado, os tipos de curvas no plano que uma equação do segundo grau pode representar são em número limitado. Dependendo dos valores dos coeficientes $A, B, C, D, E, e F$ a curva poderá ser uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole, uma parábola ou um caso degenerado que pode ser o conjunto vazio, um ponto, uma reta ou um par de retas. Não há outras possibilidades.

2.1.1 Circunferência

Uma circunferência é definida como o conjunto dos pontos que são equidistantes de um ponto fixo C que chamaremos de centro, e essa distância de C a um ponto qualquer P da circunferência é chamada de raio, que geralmente denotamos por r .

Mais formalmente podemos definir uma circunferência como:

Definição: Dados um ponto fixo C (centro) de um plano e uma constante r (raio), chamamos de circunferência o conjunto de pontos P do plano tal que $d(P, C) = r$.

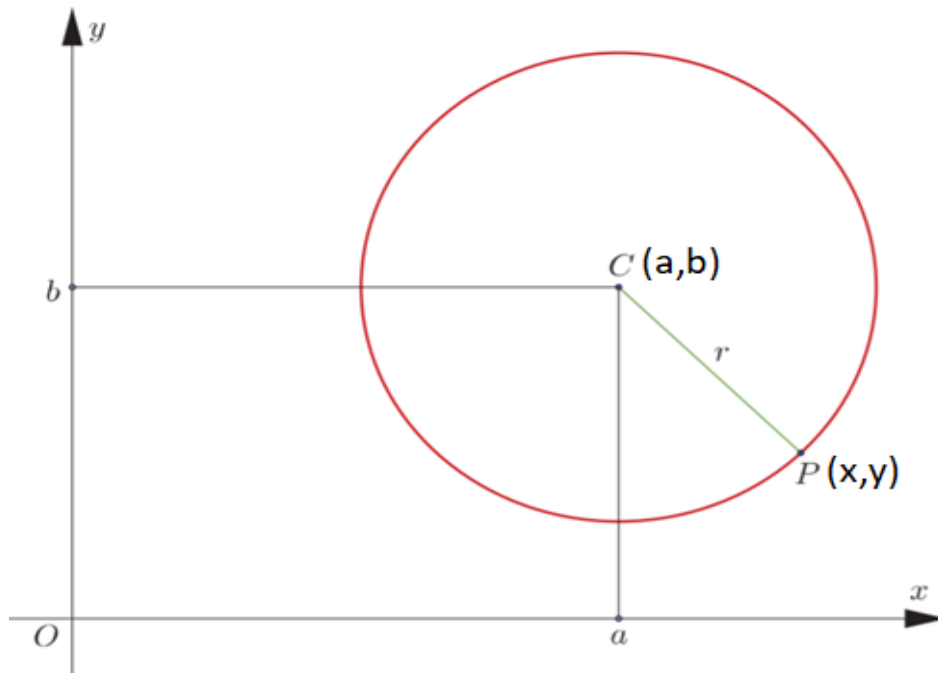


Figura 13 - Circunferência com centro $C(a,b)$ e raio r .

2.1.1.1 Equação reduzida da circunferência

Para obtermos a equação de uma circunferência λ considere um ponto $P(x,y)$ da circunferência $C(a,b)$ o centro e r o raio. Temos que a distância de P a C é sempre a constante r ,

$$d(P, C) = r \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Elevando-se ao quadrado os dois lados de última expressão obtemos

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1)$$

Esta última equação é que chamamos de equação reduzida ou equação canônica da circunferência.

2.1.2 Elipse

A elipse, como figura geométrica, é o conjunto de todos os pontos no plano, tais que a soma de suas distâncias a dois pontos distintos fixados, chamados de focos da elipse, é uma constante positiva dada, maior que a distância entre os pontos.

Mais formalmente podemos definir uma elipse como:

Definição: Dados dois pontos fixos F_1 e F_2 de um plano, tais que $d(F_1, F_2) = 2c$, com $c > 0$, chamamos de elipse o conjunto de pontos P do plano tal que

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a, \text{ com } 2a > 2c.$$

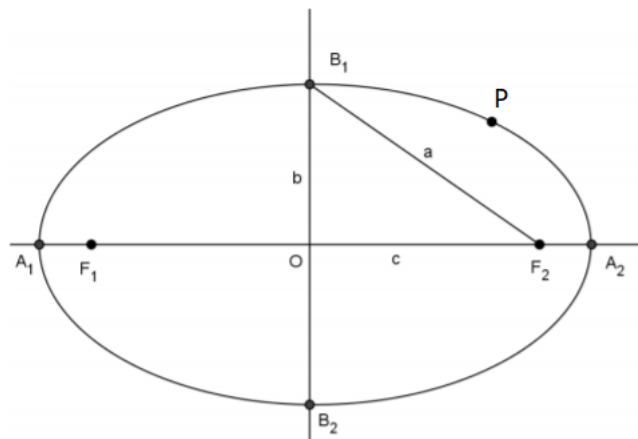


Figura 14 - Elipse e seus elementos.

Elementos da Elipse:

- Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da elipse;
- A distância entre os focos F_1 e F_2 de valor $2c$ é a distância focal; O centro O é o ponto médio de segmento focal $\overline{F_1F_2}$;
- vértices A_1 e A_2 : interseção da elipse com a reta focal $\overleftrightarrow{F_1F_2}$;
- vértices B_1 e B_2 : interseção da elipse com a mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$;
- eixo maior: segmento $\overline{A_1A_2}$ de medida $2a$;
- eixo menor: segmento $\overline{B_1B_2}$ de medida $2b$;
- excentricidade: o número $e = \frac{c}{a}$ com $0 < e = \frac{c}{a} < 1$.

2.1.2.1 Equação reduzida da elipse

Podemos determinar a equação da elipse, centrada na origem com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas, pela definição, ou seja, dado um ponto $P(x, y)$ de uma elipse com focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

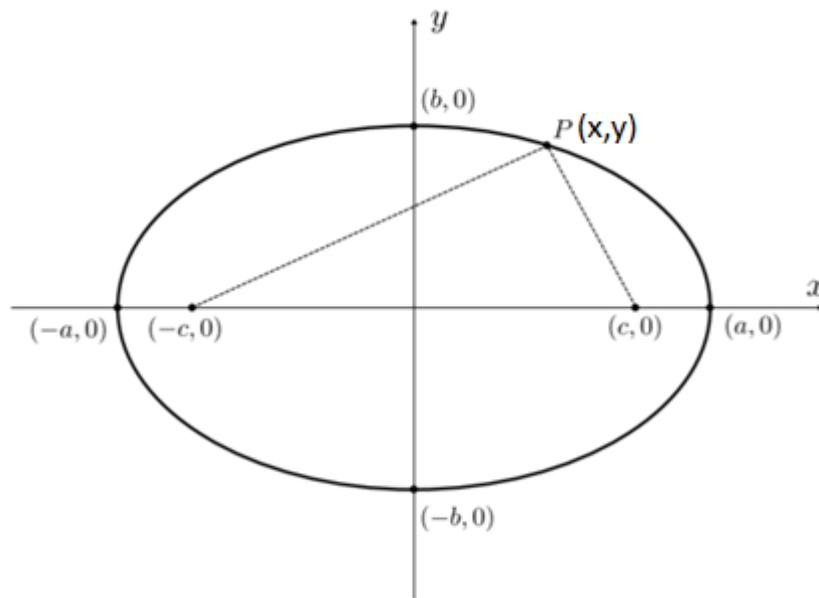


Figura 15 - Elipse e seus elementos.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado obtemos,

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ 4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado, tem-se

$$\begin{aligned}
 a^4 - 2cxa^2 + c^2x^2 &= a^2[(x - c)^2 + y^2] \Rightarrow \\
 a^4 - 2cxa^2 + c^2x^2 &= a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] \Rightarrow \\
 a^4 - 2cxa^2 + c^2x^2 &= a^2x^2 - 2cxa^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow \\
 a^4 + c^2x^2 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow \\
 c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \Rightarrow \\
 (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Utilizando o fato que, $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow -b^2 = c^2 - a^2$, voltando e substituindo em (2), obtemos

$$-b^2x^2 - a^2y^2 = -b^2a^2$$

Dividindo-se os dois membros dessa última igualdade por $-b^2a^2$ chegamos à equação da elipse centrada na origem e com eixo real paralelo ao eixo das abscissas, a qual é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

De maneira análoga podemos determinar que a equação da elipse centrada na origem e com eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas é dada por

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Agora, se a elipse possuir centro qualquer $C(m, n)$ fora da origem do sistema cartesiano, basta usar um novo sistema de coordenadas cartesianas $x'Cy'$ obtido pela translação,

$$\begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - n \end{cases}$$

Portanto, a equação da elipse com centro $C(m, n)$ e eixo maior paralelo ao eixo das abscissas é dada por

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

e a equação da elipse com centro $C(m, n)$ e eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas é dada por

$$\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1$$

2.1.3 Hipérbole

A hipérbole, como uma figura geométrica, é o conjunto de todos os pontos no plano, tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos distintos fixados é uma constante positiva dada, menor que a distância entre os dois pontos.

Mais formalmente podemos definir uma elipse como:

Definição: Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano, tais que, $d(F_1, F_2) = 2c$, com $c > 0$, chama-se hipérbole o conjunto de pontos P do plano cujas diferenças, em módulo, das distâncias são iguais a uma constante $2a$, com $0 < 2a < 2c$. Ou seja,

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$$

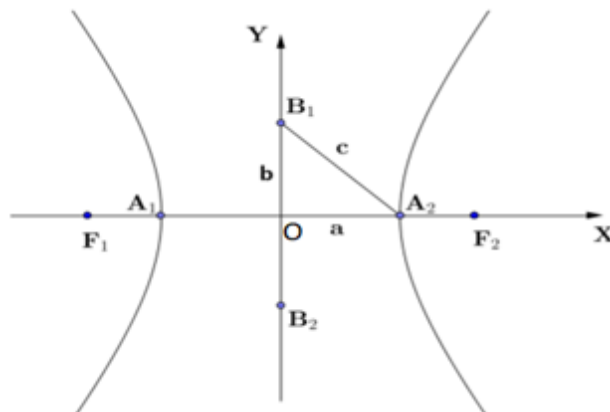


Figura 16 - Hipérbole e seus elementos

Elementos da Hipérbole:

- Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da hipérbole;
- A distância entre os focos F_1 e F_2 de valor $2c$ é a distância focal;
- O centro O é o ponto médio de segmento focal $\overline{F_1F_2}$;
- vértices A_1 e A_2 : interseção da hipérbole com a reta focal $\overleftrightarrow{F_1F_2}$;
- B_1 e B_2 : pontos do eixo imaginário (eixo que está sobre a mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$);
- O segmento $\overline{A_1A_2}$ de medida $2a$ é chamado de eixo real da hipérbole;
- O segmento $\overline{B_1B_2}$ de medida $2b$ é chamado de eixo imaginário da hipérbole;
- excentricidade: o número $e = \frac{c}{a}$ com $e = \frac{c}{a} > 1$.

2.1.3.1 Equação reduzida da hipérbole

Primeiro vamos considerar a hipérbole centrada na origem do sistema cartesiano e com eixo real sobre o eixo das abscissas.

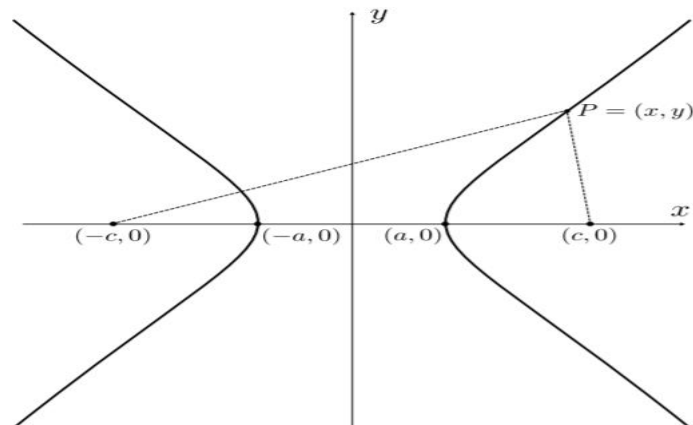


Figura 17 - Hipérbole com as coordenadas dos pontos.

Para determinar as equações vamos partir da propriedade que define as hipérboles. Dado um ponto $P(x, y)$ de uma hipérbole com focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

$$|d(P, F1) - d(P, F2)| = 2a \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= \pm 2a \Rightarrow \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado,

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow \\ 4xc - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado, e efetuando algumas simplificações básicas temos

$$\begin{aligned} (xc - a^2)^2 &= \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow \\ x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 &= a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \Rightarrow \\ x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow \\ x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \end{aligned}$$

ou

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (3)$$

Substituindo $b^2 = c^2 - a^2$ em (3), obtemos

$$\begin{aligned} (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \\ \frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \end{aligned}$$

Portanto, a equação da hipérbole centrada na origem e com eixo real paralelo ao eixo das abscissas é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, encontramos que a equação da hipérbole centrada na origem e com eixo real paralelo ao eixo das ordenadas é dada por

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Agora, se as hipérbolas possuírem centro qualquer $C(m, n)$, fora da origem do sistema cartesiano, basta aplicar um novo sistema de coordenadas cartesianas, $x'Cy'$ e fazer uma translação,

$$\begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - n \end{cases}$$

Portanto, a equação da hipérbole com centro $C(m,n)$ e eixo maior paralelo ao eixo das abscissas é dada por

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

e a equação da hipérbole com centro $C(m,n)$ e eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas é dada por

$$\frac{(x - m)^2}{b^2} - \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1$$

2.1.4 Parábola

A parábola é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma reta fixada e de um ponto fixado que não está na reta. A reta é chamada de diretriz e o ponto de foco da parábola.

Mais formalmente podemos definir uma elipse como:

Definição: Fixado um ponto F e uma reta r de um plano, com F não pertencendo a r , chamamos de parábola o conjunto dos pontos P desse plano equidistantes de F e r . Ou seja,

$$d(P, r) = d(P, F).$$

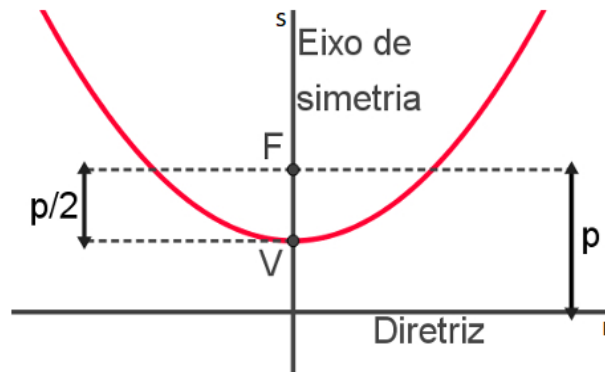


Figura 18 - Parábola e seus elementos

Elementos da parábola:

- O ponto F é o foco da parábola;
- A reta r é a diretriz da parábola;
- A reta s que passa por F e é perpendicular a diretriz da parábola é o eixo de simetria;
- O ponto V : intersecção da parábola com o eixo de simetria é o vértice;
- A distância p do foco à diretriz é chamada de parâmetro da parábola;
- A razão entre a distância de um ponto P da parábola ao foco e à diretriz é chamada de excentricidade da parábola. Como essas distâncias são sempre iguais, a excentricidade da parábola é sempre 1.

2.1.4.1 Equação reduzida da parábola

Para obter a equação da parábola vamos utilizar o fato que a distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ a uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$ é dado por

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

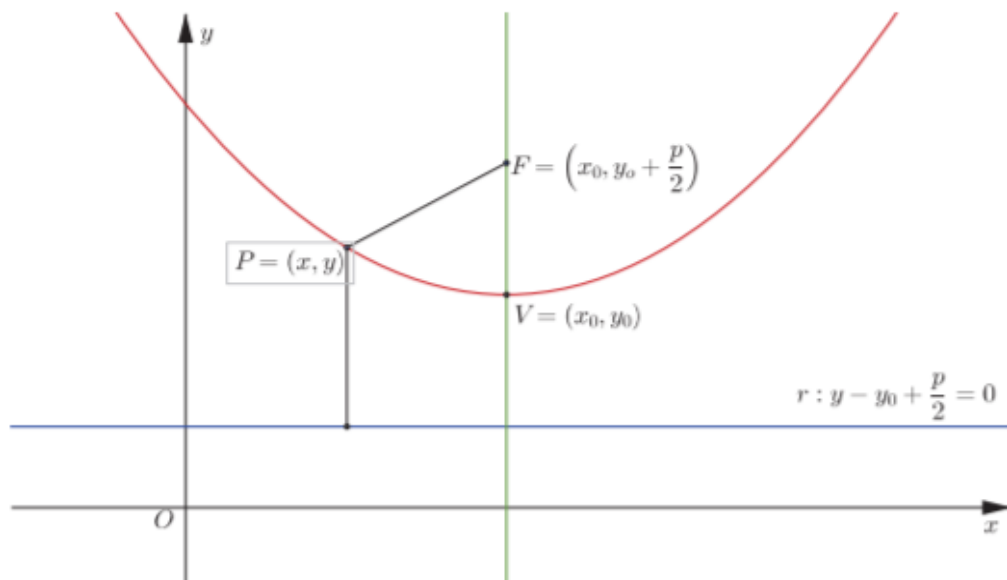


Figura 19 - Parábola com as coordenadas dos pontos.

Primeiro vamos considerar uma parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, parâmetro p , diretriz paralela ao eixo das abscissas e com a concavidade voltada para o sentido positivo. Então, o foco F dessa parábola tem coordenadas $F = (x_0, y_0 + \frac{p}{2})$, e a reta diretriz r tem equação

$$y = y_0 - \frac{p}{2} \Rightarrow y - y_0 + \frac{p}{2} = 0$$

Com as condições dadas acima vamos utilizar a propriedade da definição da parábola

$$d(P, F) = d(P, r) \Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0 - \frac{p}{2})^2} = \left| y - y_0 + \frac{p}{2} \right|$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= \left(\left| y - y_0 + \frac{p}{2} \right| \right)^2 \Rightarrow \\ (x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2 + \frac{p^2}{4} - py + py_0 - 2yy_0 &= y^2 + y_0^2 + \frac{p^2}{4} + py - py_0 - 2yy_0 \Rightarrow \\ (x - x_0)^2 - py + py_0 &= py - py_0 \Rightarrow (x - x_0)^2 = 2py - 2py_0 \end{aligned}$$

Portanto, a equação da parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas e com concavidade voltada para o sentido positivo é dada por

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad (4)$$

Analogamente, podemos obter a equação dos outros três casos de parábolas com diretriz paralela aos eixos das coordenadas cartesianas:

- Equação da parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas e com concavidade voltada para o sentido negativo

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

- Equação da parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas e com concavidade voltada para o sentido positivo

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

- Equação da parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas e com concavidade voltada para o sentido negativo

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

2.2 Superfícies de Revolução

Uma equação do 2º grau em três variáveis é uma equação do tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (5)$$

Definição 1: O conjunto dos pontos do espaço, correspondentes aos ternos ordenados (x, y, z) , que são soluções de uma equação quadrática em três variáveis da forma da equação (5), é denominado superfície quádrlica, ou simplesmente, quádrlica.

Algumas quádrlicas têm uma simetria com relação a um determinado eixo, tornando suas formas com um design mais plástico – adequadas para se usar em construções – e suas equações mais simplificadas. Essas quádrlicas são conhecidas como as Superfícies de Revolução.

Definição 2: Superfície de revolução é a superfície gerada pela rotação ou revolução de uma curva plana ou cônica em torno de um de seus eixos ou em torno de uma reta fixa pertencente ao plano da curva plana ou cônica. A reta fixa ou eixo em torno da(o) qual rotacionou a curva plana ou cônica é denominada de eixo da superfície e a curva plana ou cônica é a geratriz.

Esferas, elipsoides, hiperboloides, paraboloides, cilindros (do 2º grau), cones (do 2º grau) são as superfícies quádrlicas mais conhecidas.

2.2.1 Elipsoide de revolução

Segundo (Reis, 1996), a superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos é o que chamamos de elipsoide de revolução.

Para deduzirmos a equação canônica desta superfície, vamos considerar a equação da elipse, no plano xz como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad x \neq 0 \quad (6)$$

e que a rotação se dê em torno do eixo z .

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da superfície. Então P pertence a uma circunferência descrita por um ponto Q da elipse, ao girar em torno do eixo z . Se R é o centro de tal circunferência, em função das coordenadas de $P(x,y,z)$, as coordenadas de R e Q são $R(0,0,z)$ e $Q(x_1,0,z)$.

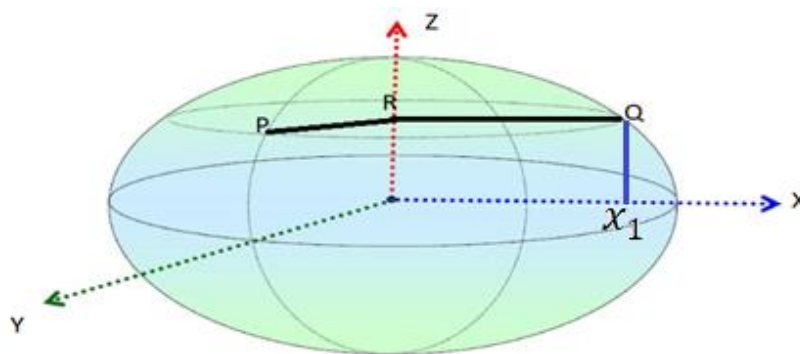


Figura 20 - Elipsoide de revolução

Substituindo Q na equação (2) temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Como $\overline{PR} = \overline{QR}$ podemos elevar ao quadrado ambos os lados

$$\begin{aligned} \overline{PR}^2 &= \overline{QR}^2 \\ (\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2})^2 &= (\sqrt{(x_1-0)^2 + (0-0)^2 + (z-z)^2})^2 \\ x^2 + y^2 &= x_1^2. \end{aligned}$$

Substituindo x_1 , encontramos a equação do elipsoide desejado:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (7)$$

Agora, se o elipsoide possuir centro qualquer $C(x_0, y_0, z_0)$, fora da origem do sistema cartesiano, devemos fazer uma translação de modo que o centro esteja na posição correta. Essa transformação pode ser obtida pela transformação dada por

$$T(x, y, z) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

Portanto, a equação do elipsoide com centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo das abscissas é dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} = 1$$

2.2.2 Esfera

A superfície gerada pela rotação de uma circunferência em torno de um de seus eixos é o que chamamos de esfera. Podemos dizer que a esfera é um caso particular do elipsoide de revolução em que **a** e **b** são iguais.

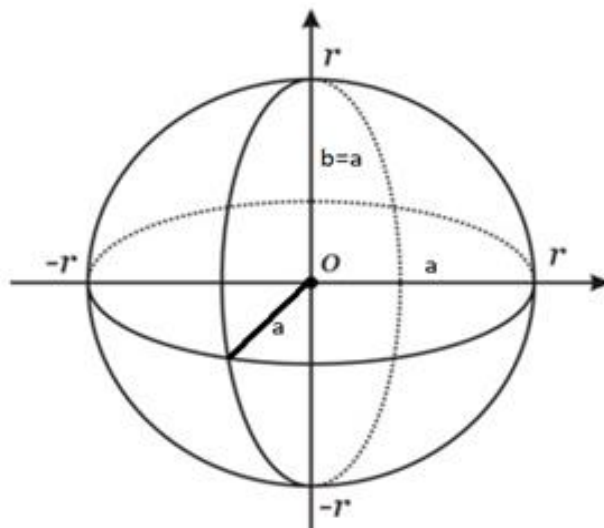


Figura 21 - Esfera

Logo a equação canônica da esfera será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Considerando a como sendo o raio da circunferência que foi rotacionada em torno do eixo z temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (8)$$

Essa é a equação reduzida da esfera com centro $O(0,0,0)$ e raio r .

Agora, se a esfera possuir centro qualquer $C(x_0, y_0, z_0)$, fora da origem do sistema cartesiano, devemos fazer uma translação de modo que o centro esteja na posição correta. Essa transformação pode ser obtida pela transformação dada por

$$T(x, y, z) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

Portanto, a equação da esfera com centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo das abscissas é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

2.2.3 Hiperboloide de revolução

A superfície gerada pela rotação de uma hipérbole em torno de um de seus eixos é o que chamamos de hiperboloide de revolução.

2.2.3.1 Hiperboloide de revolução de uma folha

Essa superfície é obtida quando efetuamos a rotação da hipérbole em torno de seu eixo imaginário. Para deduzirmos a equação canônica desta superfície, vamos considerar a equação da hipérbole, no plano xz , isto é,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad x \neq 0 \quad (9)$$

com a rotação em torno do eixo z .

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da superfície. Então P pertence a uma circunferência descrita por um ponto Q da hipérbole, ao girar em torno do eixo z . Se R é o centro de tal circunferência, em função das coordenadas de $P(x,y,z)$, as coordenadas de R e Q são $R(0,0,z)$ e $Q(x_1,0,z)$.

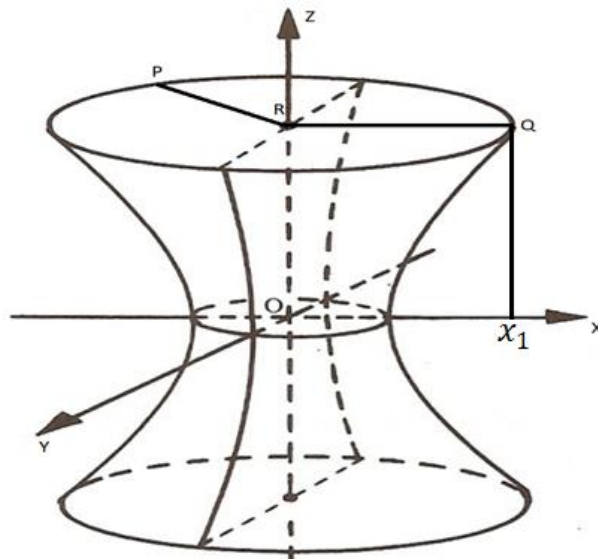


Figura 22 - Hiperboloide de revolução

Substituindo Q na equação (4) temos

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Como $\overline{PR} = \overline{QR}$ podemos elevar ao quadrado ambos os lados

$$\overline{PR}^2 = \overline{QR}^2$$

$$(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2})^2 = (\sqrt{(x_1-0)^2 + (0-0)^2 + (z-z)^2})^2$$

$$x^2 + y^2 = x_1^2$$

Substituindo x_1 , encontramos a equação do hiperboloide desejado:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (10)$$

Agora, se o hiperboloide possuir um centro qualquer $C(x_0, y_0, z_0)$, diferente da origem do sistema cartesiano, devemos fazer uma translação de modo que o centro esteja na posição correta. Essa transformação pode ser obtida pela transformação dada por

$$T(x, y, z) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

obtemos que a equação do hiperboloide de rotação de uma folha com centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e rotação em torno do eixo imaginário é dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(z - z_0)^2}{b^2} = 1$$

2.2.4 Parabolóide de revolução

A superfície gerada pela rotação de uma parábola em torno de um de seus eixos é o que chamamos de parabolóide de revolução. Para deduzirmos a equação canônica desta superfície, vamos considerar a equação da parábola, no plano xz como sendo

$$(x - x_0)^2 = 2p(z - z_0), \quad x \neq 0 \quad (6)$$

e que a rotação se dê em torno do eixo z .

Considerando que o vértice da parábola é a origem, temos que $V(x_0, y_0) = V(0, 0)$.

Sendo assim,

$$x^2 = 2pz, \quad x \neq 0$$

Para facilitar os cálculos, usaremos $p=1/2$. Logo a equação que usaremos da parábola será

$$z = x^2 \quad (11)$$

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da superfície. Então P pertence a uma circunferência descrita por um ponto Q da parábola, ao girar em torno do eixo z . Se R é o centro de tal circunferência, em função das coordenadas de $P(x,y,z)$, as coordenadas de R e Q são $R(0,0,z)$ e $Q(x_1,0,z)$.

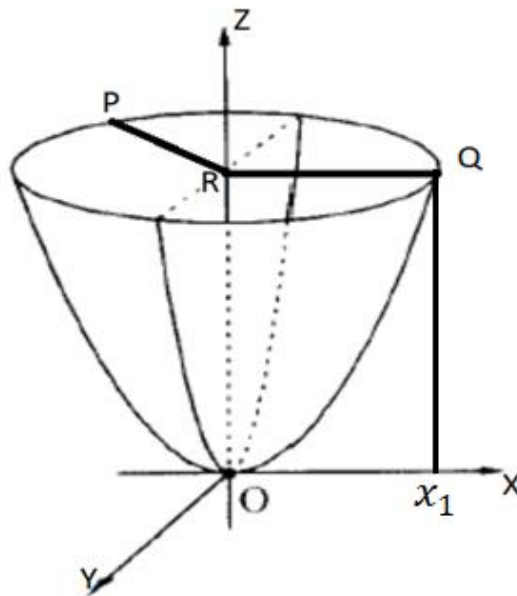


Figura 23 - Parabolóide de revolução

Substituindo Q na equação (7) temos

$$z = x_1^2$$

Como $\overline{PR} = \overline{QR}$ podemos elevar ao quadrado ambos os lados

$$\overline{PR}^2 = \overline{QR}^2$$

$$(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2})^2 = (\sqrt{(x_1-0)^2 + (0-0)^2 + (z-z)^2})^2$$

$$x^2 + y^2 = x_1^2$$

Substituindo x_1 , encontramos a equação do parabolóide desejado:

$$z = x^2 + y^2 \tag{12}$$

2.2.5 Cone de revolução

É a superfície gerada pela rotação de uma reta (geratriz) em torno de outra (eixo do cone) que a intercepta. Para deduzirmos a equação canônica desta superfície, vamos considerar a reta r (geratriz), o eixo do cone para facilitar os cálculos será o eixo z e o plano xz contém a reta r . A reta r é da forma

$$x = m'z, \quad y=0 \quad (13)$$

onde m' é a tangente do ângulo formado pela reta r e o eixo z .

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da superfície. Então P pertence a uma circunferência descrita por um ponto Q , ao girar em torno do eixo z . Se R é o centro de tal circunferência, em função das coordenadas de $P(x,y,z)$, as coordenadas de R e Q são $R(0,0,z)$ e $Q(x_1,0,z)$.

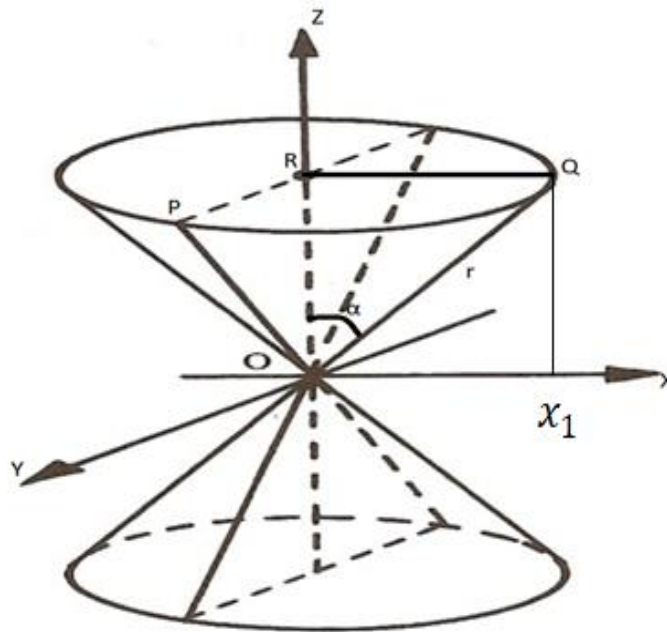


Figura 24 - Cone de revolução

Substituindo Q na equação (9) temos

$$x_1 = m'z$$

Como $\overline{PR} = \overline{QR}$ podemos elevar ao quadrado ambos os lados

$$\overline{PR}^2 = \overline{QR}^2$$

$$(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2})^2 = (\sqrt{(x_1-0)^2 + (0-0)^2 + (z-z)^2})^2$$

$$x^2 + y^2 = x_1^2$$

Substituindo x_1 , encontramos a equação do cone desejado:

$$x^2 + y^2 = (m')^2 z^2 \quad (14)$$

2.2.6 Cúpula de revolução

Uma cúpula é formada pela sucessão radial dos arcos, uma estrutura resistente pela forma, suficientemente delgadas para não desenvolver tensões apreciáveis de flexão, mas também suficientemente grossa para resistir a cargas de compressão. Se seccionada por planos horizontais apresenta círculos denominados paralelos. Quando seccionadas por planos verticais que passam pelo centro dos paralelos, apresenta os arcos meridianos que têm a mesma forma do arco que lhe deu origem, conforme a Figura 24.

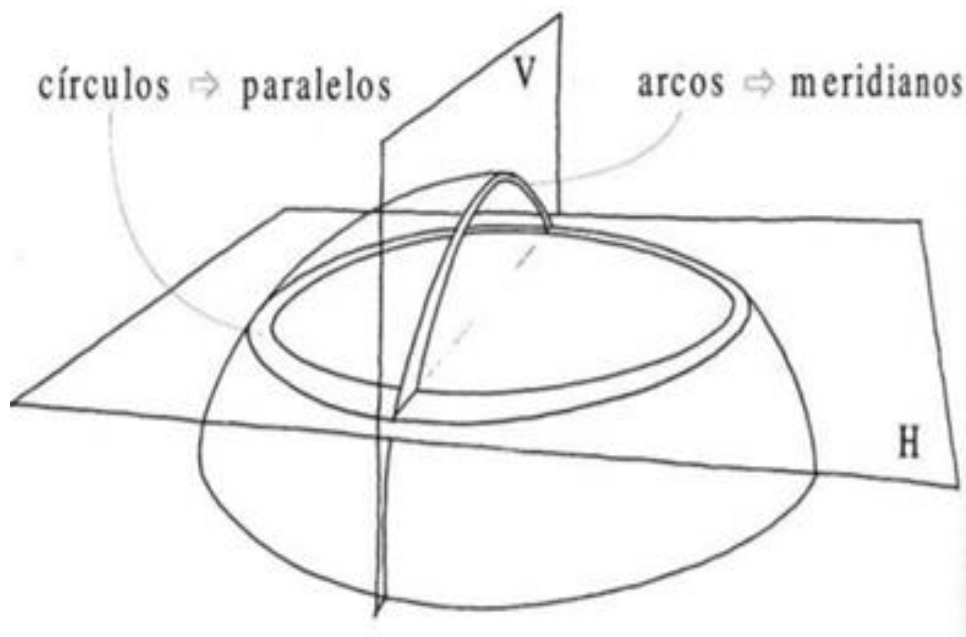


Figura 25 - Paralelos e meridianos. Fonte: Rebello,2000.

Os paralelos comportam-se como anéis de travamento dos arcos dos meridianos e, por isso as cúpulas apresentam um comportamento funicular para qualquer tipo de carregamento,

exceto cargas pontuais. Isso se deve ao fato de os paralelos não permitirem livre deformação dos arcos meridianos. Com isso, para qualquer carregamento, exceto cargas concentradas, os arcos meridianos trabalharão sempre com forças de compressão, permitindo vencer grandes vãos com cúpulas de pequenas espessuras. De um modo geral uma cúpula pode ser formada por um pedaço de um elipsoide ou de um parabolóide ou de uma esfera.

Capítulo 3 - Estudos de casos

Neste capítulo iremos analisar os monumentos escolhidos como estudo de casos, buscando encontrar as equações que se aproximam das curvas e superfícies utilizadas por Niemeyer em Brasília.

3.1 A Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida de Brasília

3.1.1 Histórico

Foi o primeiro monumento a ser criado em Brasília. Sua construção teve início em 12 de setembro de 1958. Sua estrutura ficou pronta em 1960, onde aparecia apenas a área circular de setenta metros de diâmetro, da qual se elevam dezesseis colunas de concreto em um formato hiperboloide, pesando 90 toneladas cada uma.



Figura 26 - Estrutura de hiperboloides. Fonte: Marcel Gautherot.

Em 31 de maio de 1970, foi inaugurada de fato, já nesta data com os vidros externos transparentes.



Figura 27 - Catedral. Disponível em <http://postselos.blogspot.com.br/2013/08/br-0030-catedral-de-brasilia.html>

É na Catedral Nossa Senhora Aparecida (1958/1970) que o purismo da forma se faz marcante, a ponto de muitos considerarem este projeto como o mais espetacular do ponto de vista estrutural e, mesmo Niemeyer, ao falar dela, salienta o caráter inusitado da obra, dizendo tratar-se de uma catedral “diferente de todas as catedrais do mundo, uma expressão da técnica do concreto armado e do pré-fabricado. Suas colunas foram concretadas no chão, para depois criarem juntas o espetáculo arquitetural” (NIEMEYER, 2004, p. 153). Neste projeto, arte e técnica se fundem e não é possível distinguir onde começa a estrutura e onde acaba a arquitetura.

3.1.2 Geometria

A concepção estrutural da Catedral de Brasília é fruto das possibilidades técnicas do concreto armado e dos conhecimentos do engenheiro Joaquim Cardozo, que elaborou os cálculos na época de sua construção. Os 21 ramos de hipérboles de 40 metros de altura, inicialmente propostos por Niemeyer, foram reduzidos, por questões de estética, para 16 pilares de 30 metros. Da mesma forma, o anel de concreto de base, imaginado inicialmente com 70 metros de diâmetro, apoiado no chão e servindo de alicerce, e a coroa no topo, que seria o outro ponto de apoio para garantir a amarração e rigidez da estrutura, foram alterados por questão de estabilidade: a base ficou com 60 metros de diâmetro e o anel do topo com 6,8 metros de diâmetro foi deslocado a 10 metros abaixo deste, ressaltando a leveza e a transparência da estrutura.

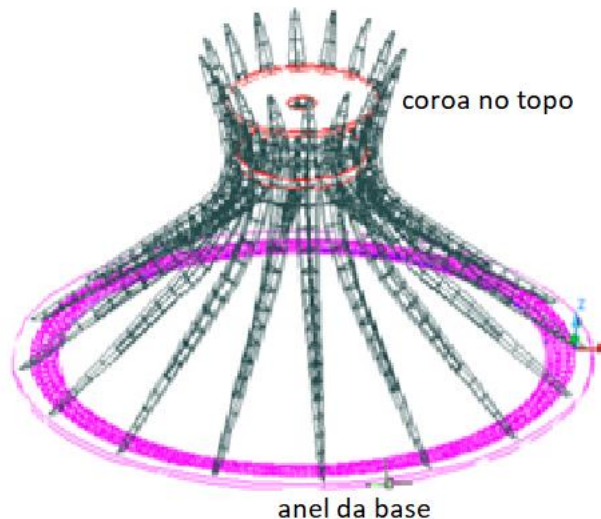


Figura 28 - Estrutura da Catedral de Brasília(AutoCAD). Fonte: Pessoa, 2002

Para a execução da estrutura as formas dos pilares foram construídas no próprio canteiro, com o auxílio de desenhos em escala real, pois a secção dos pilares varia ao longo de todo seu comprimento.



Figura 29 - Construção da Catedral Metropolitana de Brasília, 1959. Foto de Marcel Gautherot/Acervo IMS

3.1.3 Equação

A Catedral foi idealizada com o formato de um tronco de uma quádrica, mais especificamente, um hiperboloide de revolução de uma folha com eixo de rotação (eixo z) vertical.

Observemos inicialmente que sendo a equação de um hiperboloide de revolução em torno do eixo dos z é dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde o valor a corresponde ao raio da menor circunferência obtida pela intersecção do hiperboloide com o plano horizontal $z = 0$.

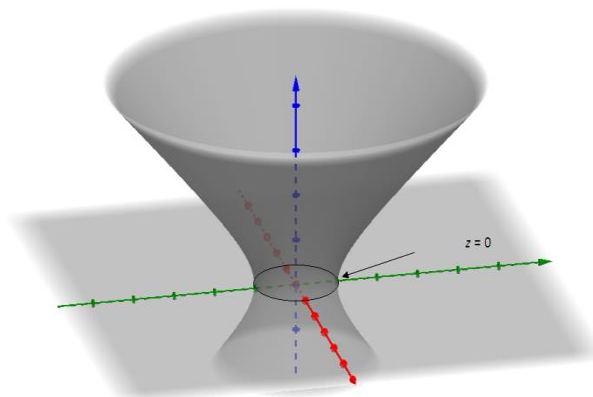


Figura 30 - Hiperboloide

e o valor de c é uma constante que depende da excentricidade da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que foi rotacionada em torno do eixo dos z para se obter o hiperboloide.

Na Catedral de Brasília a menor circunferência obtida pela intersecção do hiperboloide com o plano horizontal tem diâmetro aproximadamente igual 6,8 metros e posicionados a uma altura aproximada de 30 metros de altura. Utilizando essas medidas podemos usar em metros a distância do raio igual a a . Dessa forma o raio da circunferência é igual a 3,4 metros, isto é, $a = 3,4$. Por outro lado, estando o círculo de raio mínimo situado a uma altura de 30 metros do solo, devemos fazer uma translação vertical desse eixo de modo que o círculo mínimo esteja na posição correta. Essa transformação pode ser obtida pela transformação dada por

$$T(x, y, z) = (x, y, z - 30)$$

Nessas novas coordenadas a expressão do hiperboloide torna-se

$$\frac{x^2}{3,4^2} + \frac{y^2}{3,4^2} - \frac{(z - 30)^2}{c^2} = 1 \quad (15)$$

Para obtermos o valor de c basta observar que o plano xOy corresponde ao solo. Na Catedral, a circunferência da base no edifício tem diâmetro igual a 60 metros.

Usando essas informações conclui-se que a equação (15) com $z = 0$ é a equação de uma circunferência centrada na origem $(0,0)$ do plano xOy de raio igual a 30 metros, isto é,

$$\frac{x^2 + y^2}{11,56} - \frac{900}{c^2} = 1$$

A equação acima pode ser ainda expressa por $x^2 + y^2 = 11,56 \left(1 + \frac{900}{c^2}\right)$

onde

$$11,56 \left(1 + \frac{900}{c^2}\right) = 900$$

$$\left(1 + \frac{900}{c^2}\right) = 77,85$$

$$c^2 = \frac{900}{76,85}$$

Portanto, podemos aproximar o valor de c por 3,4. Daí, obtemos a equação

$$x^2 + y^2 - (z - 30)^2 = 11,56$$

com coordenadas expressas em metros, cujo gráfico no espaço gera uma figura cujo tronco de altura da catedral gera uma figura bem próxima da Catedral de Brasília.

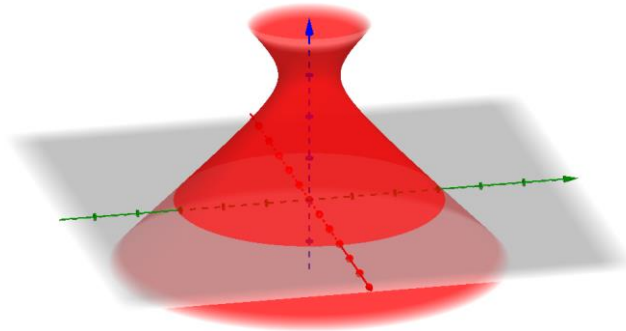


Figura 31- Hiperbolóide (geogebra)

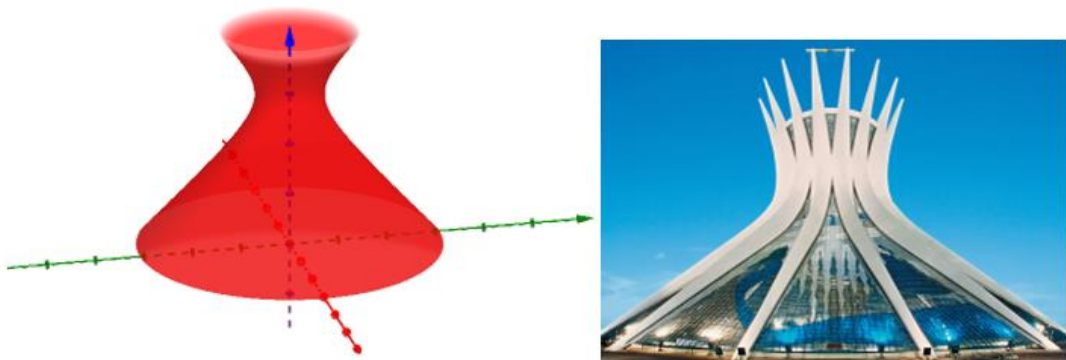


Figura 32 - Tronco do Hiperbolóide correspondente à Catedral.

3.2 Congresso Nacional (Senado e Câmara)

3.2.1 Histórico

O mais sóbrio dos palácios, o Congresso Nacional (Palácio Nereu Ramos) é um dos cartões postais da cidade, inaugurado em 1960. Um dos três edifícios monumentais que definem a Praça dos Três Poderes, sendo os demais o Supremo Tribunal Federal e o Palácio do Planalto.



Figura 33 - Vista aérea da Praça dos Três Poderes. Brasília, 1960. Foto: Marcel Gautherot/IMS.

Oscar Niemeyer optou por separar as duas casas, Senado e Câmara dos Deputados, criando cinco volumes. Dois volumes verticais e uma estrutura metálica, interligados por passarelas, os anexos principais do congresso, conhecidos como “H”, que foram construídos para serem os mais altos edifícios do Plano Piloto, com 28 andares. Um volume horizontal, que fica abaixo do nível das vias do Eixo Monumental. Esse nivelamento da cobertura do palácio com as avenidas se deve a intenção do arquiteto de integrar o Congresso Nacional na Praça dos Três Poderes, fazendo isso visualmente, já que ao se aproximar do Congresso, é possível enxergar, por entre as cúpulas, a praça. Além disso, essa solução permitiu liberar a vista do horizonte e destacar os dois principais elementos do projeto: as cúpulas – demonstrando a hierarquia que Niemeyer queria imprimir ao conjunto (NIEMEYER, 2000).

As formas geométricas idealizadas por Oscar Niemeyer para o Congresso Nacional sofreram algumas pequenas modificações durante o processo de execução da obra, com o intuito de resolver problemas estruturais ou problemas relacionados ao design e à beleza da obra, ficando seus principais dados matemáticos definidos pelo Engenheiro Joaquim Cardozo da seguinte forma:

[...] a cúpula correspondente ao Senado, no Parlamento, é um parabolóide de revolução apoiado sobre as vigas da grande plataforma da cobertura; a que corresponde, no mesmo edifício, à Câmara dos Deputados, é um

conjunto constituído – enumerando-se de baixo para cima – de uma casca limitada pela superfície de uma zona de elipsoide de revolução, abaixo de equador; tangente a esta primeira está uma segunda, limitada pela superfície de um tronco de cone invertido; no ponto de tangência das duas, para sustentar o forro do plenário da Câmara, insere-se uma terceira casca limitada por uma calota esférica. Não só a tem a forma de uma zona de elipsoide, como a de calota esférica, ofereceram várias dificuldades, sendo que esta última extremamente rebaixada (relação flecha/corda de 1/14) foi calculada pela fórmula de Gravina para este tipo de casca.

(Joaquim Cardozo 196?, p.2)



Figura 34 - Congresso Nacional <http://blogs.diariodonordeste.com.br/robertomoreira/politica/recesso-junino-no-congresso-nacional/>

3.3 Senado Federal

As cúpulas adotadas no Congresso Nacional são denominadas cúpulas de revolução, como já visto no capítulo 2, superfícies obtidas a partir do giro de determinada seção arqueada em torno de um eixo central. No caso específico do Senado, a seção escolhida foi a de um segmento de parábola.

3.3.1 Geometria



Figura 35 - Cúpula do Senado, Arquivo Nacional.

Nos primeiros registros, as cúpulas adotadas por Niemeyer para o Palácio do Congresso são formas resultantes de trechos de curvas parabólicas

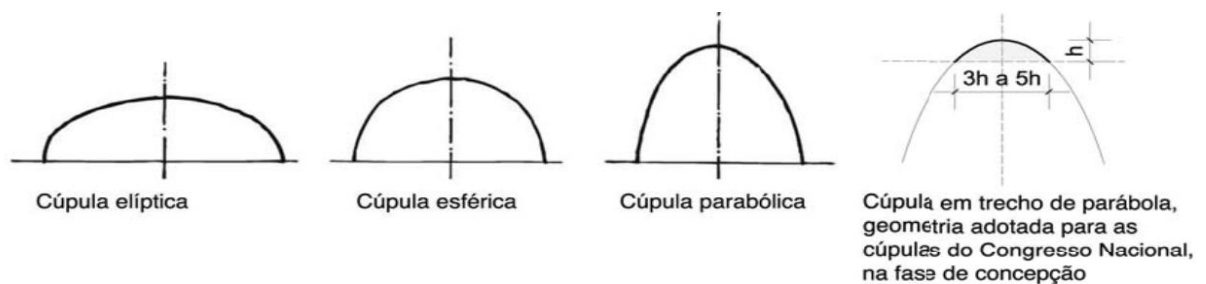


Figura 36 - Tipos de cúpula de revolução. Fonte: Gomez Tremari,1979 “Diseño estructural simplificado”. Fonte: Elcio,2014

Segundo (Elcio, 2014), a forma adotada para a cúpula do Senado atende ao comportamento característico das cúpulas, de produzirem momentos fletores de pequeno valor em trechos curtos próximos ao anel da base, o que permite dimensionar espessura mínima para o restante da estrutura.

De acordo com os estudos feitos, a solução geométrica para o Senado vai de encontro com a proposta da arquitetura de cúpula em revolução definida por um trecho de curva

parabólica, com vértice limitado pela altura de 9,85m e com pontos extremos determinados pelo diâmetro de 39m.

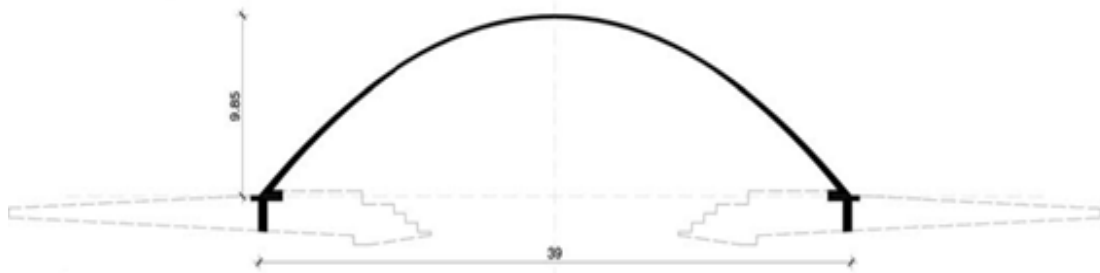


Figura 37 - Cúpula do Senado – Corte. Fonte: Elcio, 2014

A solução para o formato da estrutura é obtida tirando proveito dos potenciais de resistências que a forma oferece e que possibilita vencer grandes vãos com uso mínimo de material. Dessa maneira, a casca tem espessura mínima de 14cm nos meridianos superiores e aumenta para 50cm na região máxima de compressão na base de contato com a plataforma, de modo a definir a transmissão de cargas verticais somente ao ponto de contato e aos apoios.

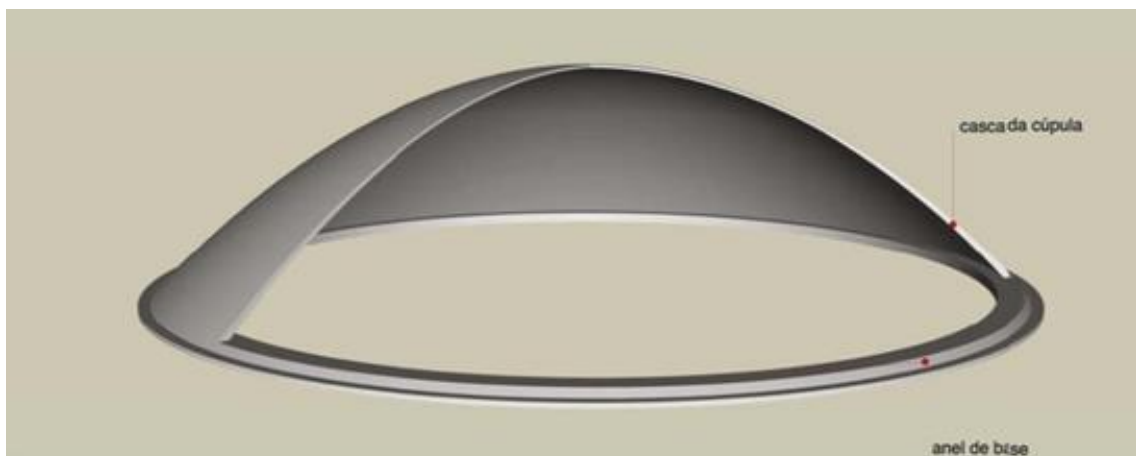


Figura 38 - Cúpula do Senado - Anel de base e representação parcial da casca. Fonte: Elcio, 2014

3.3.2 Equação

A estrutura fica então com o formato de um tronco de uma quádrlica, mais especificamente, um parabolóide de revolução de uma folha com eixo de rotação (eixo z) vertical. Para um melhor entendimento, faz-se necessário, encontrar a equação da parábola que

quando rotacionada em torno do eixo z , gera a imagem do parabolóide que se quer encontrar. Como a equação de uma parábola com concavidade voltada para baixo no plano xOz é dada em metros por

$$z = -ax^2 + bx + c$$

temos, considerando os dados fornecidos pelo Engenheiro Joaquim Cardozo, que $c = 9,85$. Considerando o eixo de simetria da parábola como sendo o eixo z , tem-se $b = 0$. Logo:

$$z = -ax^2 + 9,85$$

A equação de um parabolóide de revolução em torno do eixo dos z para essa situação é dada por

$$z = c - ax^2 - ay^2$$

onde o quociente $\frac{c}{a}$ corresponde ao quadrado do raio da maior circunferência obtida pela intersecção do parabolóide com o plano horizontal $z = 0$. No caso da cúpula do Senado, o raio da maior circunferência é $r = 19,5$. Logo:

$$\frac{c}{a} = r^2$$

$$\frac{9,85}{a} = (19,5)^2$$

$$a = \frac{9,85}{380,25}$$

$$a = 0,0259$$

Portanto, a equação do parabolóide de revolução é da forma

$$z = 9,85 - 0,0259x^2 - 0,0259y^2$$

cujo gráfico no geogebra pode ser dado pela figura 39. A cúpula corresponde a parte localizada acima do plano horizontal (em cinza).

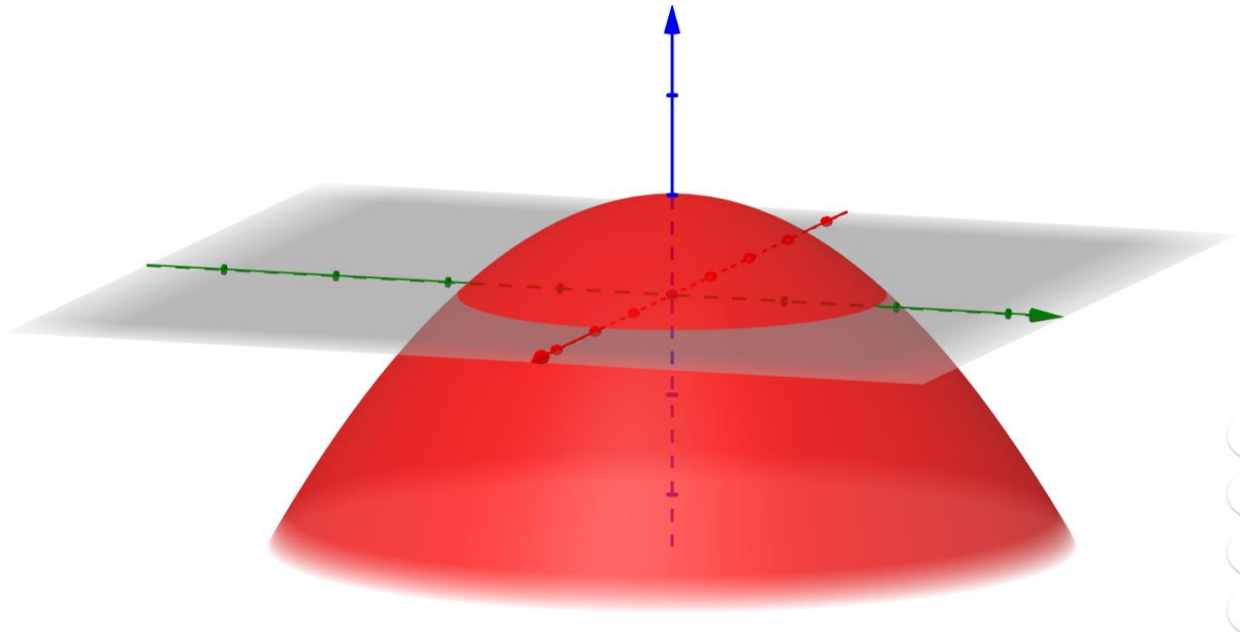


Figura 39 - Parabolóide correspondente ao Senado (geogebra).

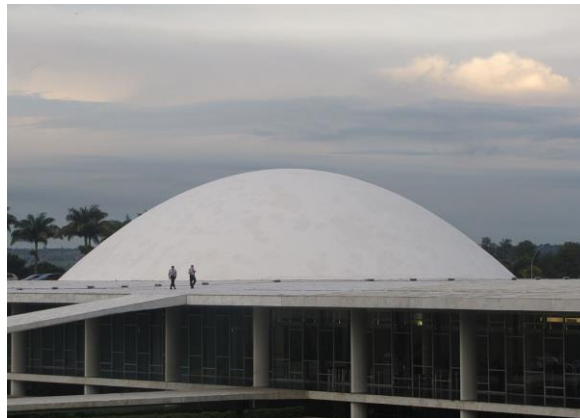


Figura 40 - Cúpula do Senado. Foto do autor.

3.4 Câmara dos Deputados

Em determinada passagem, Joaquim Cardozo relata as dificuldades encontradas na execução da cúpula da Câmara dos Deputados e comenta algumas das ideias para a solução geométrica da forma.

Era propósito meu, para essa mesma cúpula do Congresso de Brasília a que me referi mais de uma vez, experimentá-la também em modelo reduzido, e o Dr. Ferry Borges, chefe da seção de estruturas do Laboratório de Engenharia Civil de Lisboa se propôs a executar esses ensaios; infelizmente o tempo que se perdeu para situar da melhor forma possível a composição geométrica desse sistema de cascas, de conformidade

com os desejos do arquiteto não deu margem a que se pudesse esperar um exame dessa natureza; o arquiteto Oscar Niemeyer desejava que a cúpula ficasse dando a impressão de estar simplesmente pousada sobre a laje da esplanada; procuramos nós os engenheiros que executamos esse trabalho, adaptar ao desenho fornecido pelo arquiteto um parabolóide de revolução cuja geratriz fosse curva parabólica do quinto grau, com um contacto de 2ª ordem ao longo de uma linha paralela à linha de contorno da esplanada; a equação obtida trouxe porém dificuldades ao próprio uso das equações da casca em regime de membrana; a forma final adotada para a superfície média foi a de uma zona de elipsóide de revolução possuindo um tronco de cone tangente segundo uma circunferência de determinada cota.

(Cardozo, A construção de Brasília, 196?)

3.4.1 Geometria



**Figura 41- Cúpula da Câmara dos Deputados, em fase de concretagem, com os ministérios ao fundo. Brasília, 1959.
Foto: Marcel Gautherot/IMS.**

A solução geométrica para a Câmara, de acordo com os relatos, demandou pesquisas e tempo para a melhor adequação entre forma plástica pretendida e comportamento estrutural viável. A utilização do arcabouço matemático para o problema buscou, portanto, abranger duas

premissas: a adequação de um desenho geométrico que atendesse ao intento arquitetônico e, simultaneamente, o desenvolvimento de ferramentas que viabilizassem o cálculo estrutural.

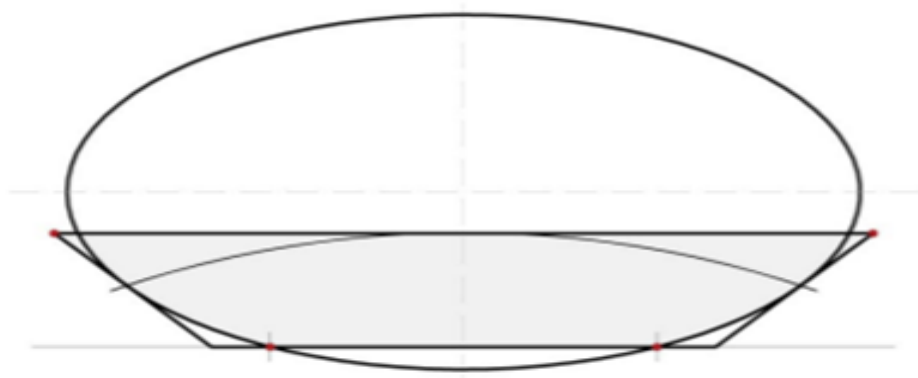


Figura 42 - Cúpula invertida, composição com um elipsoide e um tronco de cone.

Segundo Elcio (2014), a partir desses registros e das representações da cúpula que definem os pontos de contato com a plataforma e a circunferência superior determinada, pode-se inferir algumas especulações e avaliar tanto a diferença entre o modelo da curva parabólica, similar à do Senado e que correspondia ao modelo inicial de concepção arquitetônica, quanto às outras propostas consideradas pela engenharia.

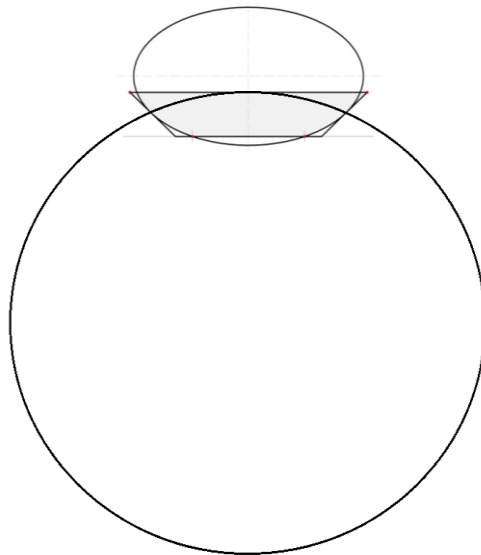


Figura 43 Circunferência que determina o arco da cobertura. Fonte: Elcio, 2014 (adaptada)

Importante, também, relembrar os conceitos matemáticos vinculados ao problema principal. A reta tangente a uma curva, em determinado ponto, pode ser associada à derivada

da equação matemática dessa mesma curva para o ponto dado. Segundo Anton (2007, p.179), podemos pensar em função derivada como uma função que produz inclinações em uma reta tangente, as quais podem definir entre essa reta, por exemplo, um eixo horizontal qualquer.

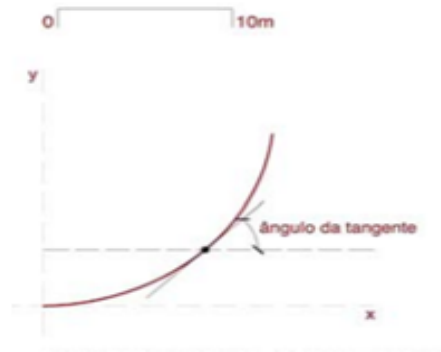


Figura 44 - Reta tangente a uma curva e o ângulo em relação a horizontal. Fonte: Elcio, 2014.

No caso em questão, trata-se da reta tangente à curva da cúpula na plataforma. O segmento, por sua vez, determina o ângulo com o plano horizontal de cobertura, ângulo de entrada do volume da cúpula na plataforma. Do ponto de vista ideal, para o projeto de arquitetura, quanto menor este ângulo, maior a impressão de cúpula pousada sobre a plataforma, ou seja, em grande media, a percepção visual dependeria da forma adotada. Mais precisamente, tratava-se da seleção de um perfil curvo que definisse uma reta tangente – naquele ponto de contato – com o menor ângulo possível (figura 45).

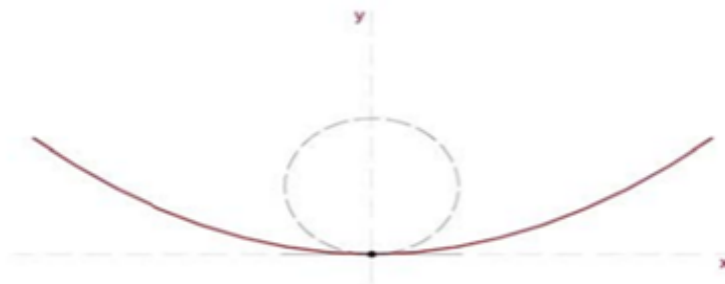


Figura 45 - Reta tangente em ângulo nulo, curva pousada horizontal. Fonte: Elcio, 2014

A curva parabólica prevista para o Senado encontra-se entre um dos modelos exemplificados para as cúpulas de rotação e, de certo, contava com o domínio dos engenheiros na aplicação matemática do cálculo estrutural. Inicialmente, também esboçada na arquitetura para a cúpula invertida, aparentemente, essa curva foi modelo que não se enquadrou nas

exigências geométricas na fase de desenvolvimento. Uma das razões pode estar relacionada ao ângulo de entrada resultante, que não atenderia às pretensões dos projetos.

Ao simular a outra curva cônica – a curva elíptica, também corrente para as cúpulas em revolução, delimitada pelos mesmos pontos de que a parabólica original – pode-se perceber que o desenho resulta em uma reta tangente que apresenta menor ângulo de entrada do que aquele da curva parabólica. Em consequência, a curva elíptica aproxima o seu ponto de inflexão do eixo horizontal, de modo a reduzir a noção de intersecção entre as formas e sugerir menor contato, ou seja, a cúpula dá a impressão de estar pousada na plataforma.

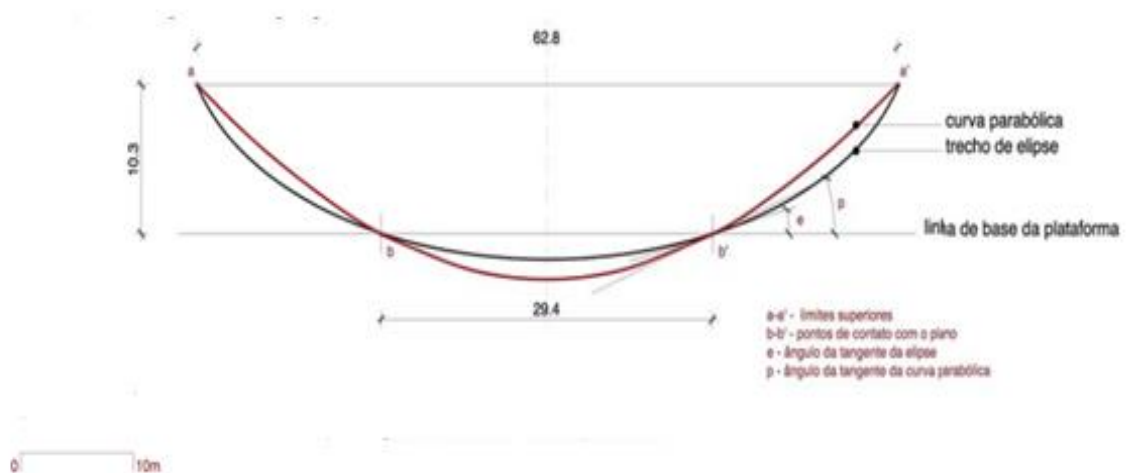


Figura 46 - Simulação e comparação entre os perfis geométricos da curva parabólica e da curva elíptica. Fonte: Elcio, 2014

Uma outra opção, conforme descrita por Cardozo, resultaria da rotação do segmento de uma equação polinomial de quinto grau com um contato de segunda ordem, ou seja, um contato de curva com a plataforma determinado pela reta tangente resultante de uma derivada de segunda ordem a partir da equação obtida. A forma geométrica era próxima da intenção pretendida, favorecendo a leitura de leveza da cúpula, mas as dificuldades de adequação da ferramenta matemática para o cálculo da casca segundo o regime da membrana – no qual são consideradas apenas as tensões de tração e compressão – são descritas pelo engenheiro como os principais motivos para o descarte da ideia.

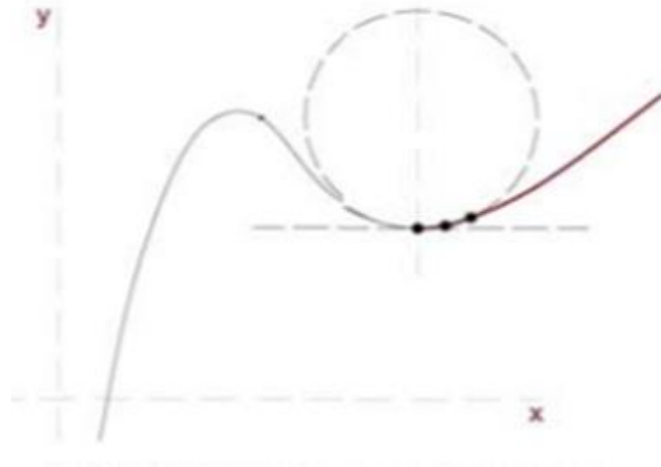


Figura 47 - Ilustração da geratriz a partir de um segmento da curva de uma equação polinomial e contato de segunda ordem. Fonte: Elcio, 2014

A simulação elaborada pela curva elíptica, embora atenda a dois requisitos importantes, evidentemente não se aplica à curva original imaginada. Nesse sentido, pode-se compreender a decisão de limitar o uso da curva elíptica ao trecho essencial e a complementação de forma com o tronco de cone.

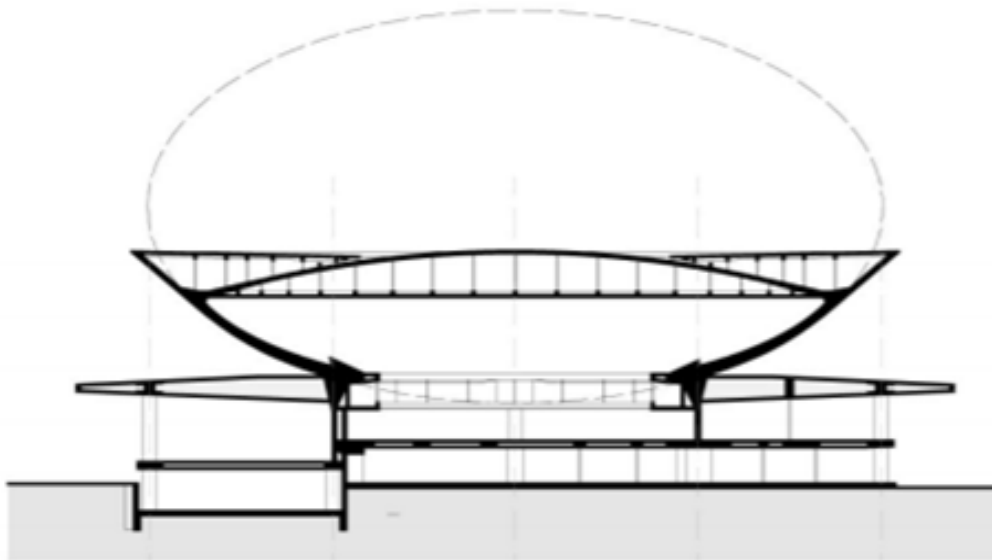


Figura 48 - Projeto estrutural completo, com a cúpula rebaixada. Fonte: Elcio, 2014.

O perfil combinado, além de contribuir para a percepção pretendida, resultou em composição que aproximou o desenho da cúpula invertida do modelo parabólico adotado para o Senado de e assegurou o diálogo entre esses dois volumes.

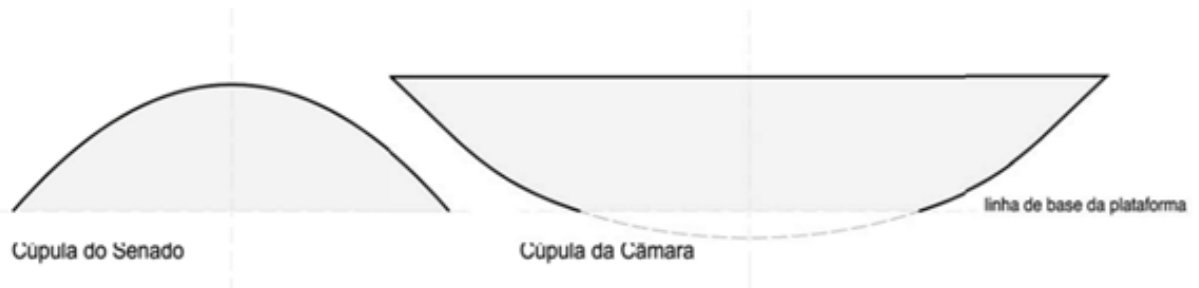


Figura 49 - Geometria das cúpulas do Congresso Nacional. Fonte: Arquivo Público do Distrito Federal

3.4.2 Equação

Com toda a pesquisa feita pela equipe de engenharia, a solução encontrada foi a de uma casca limitada pela superfície de uma zona de elipsoide de revolução, tangente a esta a superfície de um tronco de cone invertido onde no ponto de tangência das duas, insere-se uma terceira casca limitada por uma calota esférica para sustentar o forro do plenário da Câmara.

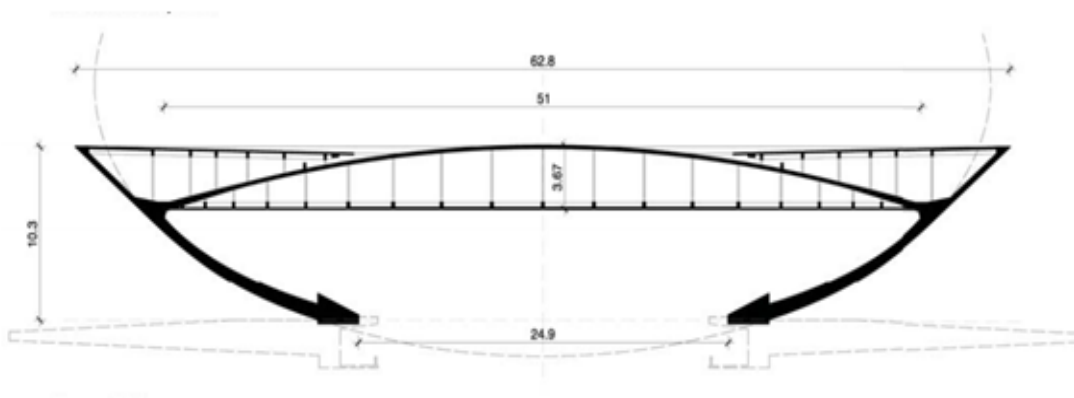


Figura 50 - Cúpula da Câmara – corte. Fonte: Elcio, 2014.

Para encontrar matematicamente a forma que se aproxima da cúpula, temos que encontrar as equações da elipse e da geratriz do cone invertido.

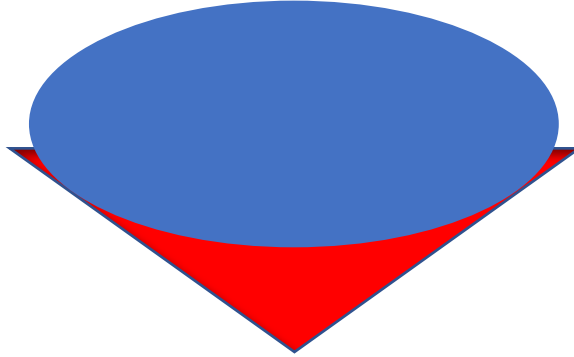


Figura 51 - Elipse e cone invertido

Analisando a figura 50, vamos considerar $a = 30\text{m}$, $b = 16\text{m}$ e o no plano cartesiano xOz o centro $C(14,4;0)$. A equação de uma elipse nesse sistema cartesiano é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. Assim, considerando os valores acima deduzimos que a equação cartesiana da elipse que procuramos é:

$$\frac{x^2}{900} + \frac{(z - 14,4)^2}{256} = 1$$

A geratriz do cone será a reta r tangente que passa pelo ponto $P(25,5 ; 6,63)$, de acordo com figura 52. A reta procurada é portanto da forma

$$r: z - 6,63 = m(x - 25,5),$$

onde $m = z' = \frac{dz}{dx}$ no ponto de tangência P . Derivando implicitamente com relação à variável x a equação da elipse, em que $z = z(x)$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{900} + \frac{2(z - 14,4)z'}{256} &= 0 \\ \frac{x}{900} + \frac{(z - 14,4)z'}{256} &= 0 \\ z' &= -\frac{256x}{900(z - 14,4)} \end{aligned}$$

Substituindo x e y pelas coordenadas do ponto P

$$z' = -\frac{256.25,5}{900(6,63 - 14,4)} = \frac{6528}{6993} = 0,93$$

Logo $m = 0,93$. Substituindo na reta r temos:

$$r: z - 6,63 = 0,93.(x - 25,5)$$

$$r: z = 0,93.x - 23,715 + 6,63$$

$$r: z = 0,93.x - 17,1$$

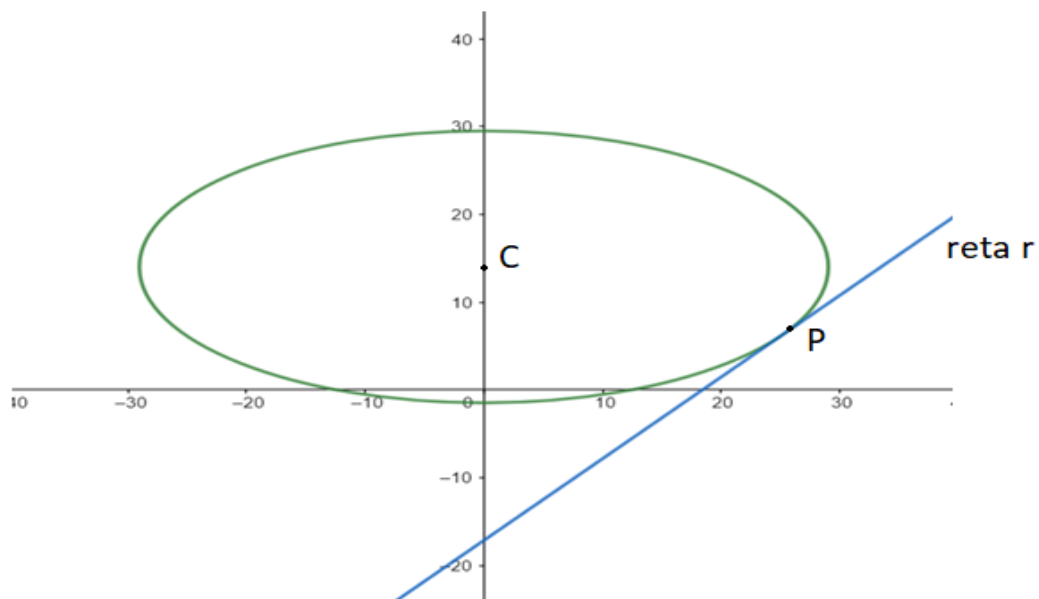


Figura 52 - Reta r tangente a elipse (geogebra)

Com os dados que se tem agora, iremos encontrar as equações das quádricas formadas pelo elipsoide de revolução e o cone de revolução tangente. Para encontrar a equação da superfície do elipsoide girada em torno do eixo z , vamos considerar a equação de elipsoide sendo da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. Como o centro da elipse não é a origem, devemos fazer uma translação vertical desse eixo de modo que o centro esteja na posição correta. Essa transformação pode ser obtida pela transformação dada por

$$T(x, y, z) = (x, y, z - 14,4)$$

Logo a equação do elipsoide será:

$$\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{900} + \frac{(z - 14,4)^2}{256} = 1$$



Figura 53 - Elipsoide de revolução, vista frontal. (geogebra)

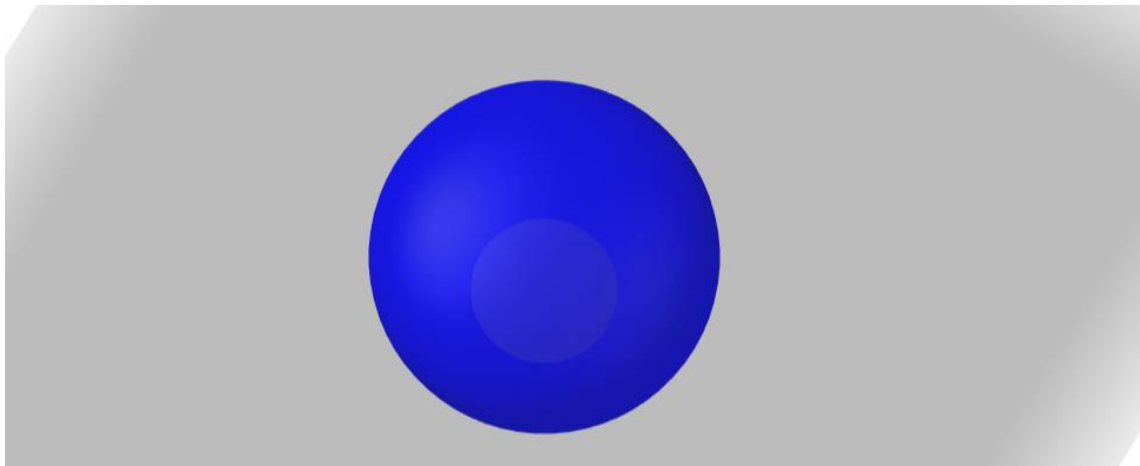


Figura 54 - Elipsoide de revolução, vista de cima. (geogebra)

Sabendo que a equação de um cone de revolução é da forma $x^2 + y^2 = (m')^2 z^2$, sendo que m' é a tangente do ângulo que a geratriz do cone faz com o eixo z e m é igual a tangente do ângulo que a geratriz do cone faz com o eixo x , temos que $m' = \frac{1}{m}$. Como $m = 0,93$, temos que $m' = 1,075$. Como o vértice do cone invertido não é a origem, devemos fazer uma translação vertical desse eixo de modo que o vértice esteja na posição correta. Essa transformação pode ser obtida pela transformação dada por

$$T(x, y, z) = (x, y, z + 17,1)$$

Logo a equação do cone de revolução será:

$$x^2 + y^2 = 1,15(z + 17,1)^2$$

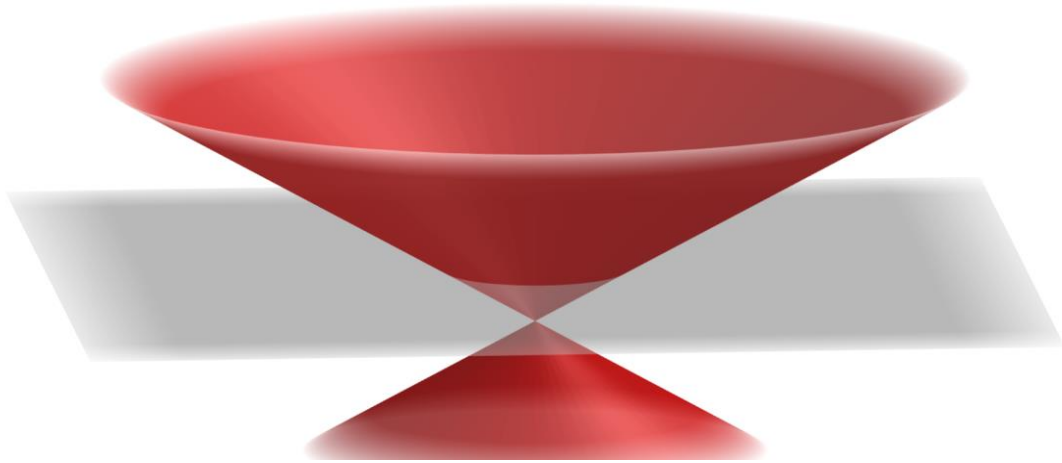


Figura 55 - cone de revolução, vista frontal. (geogebra)

Para formar o sólido de revolução que dá o formato da cúpula, temos que tomar como base a circunferência formada pela intersecção entre o cone e o elipsoide de revolução.

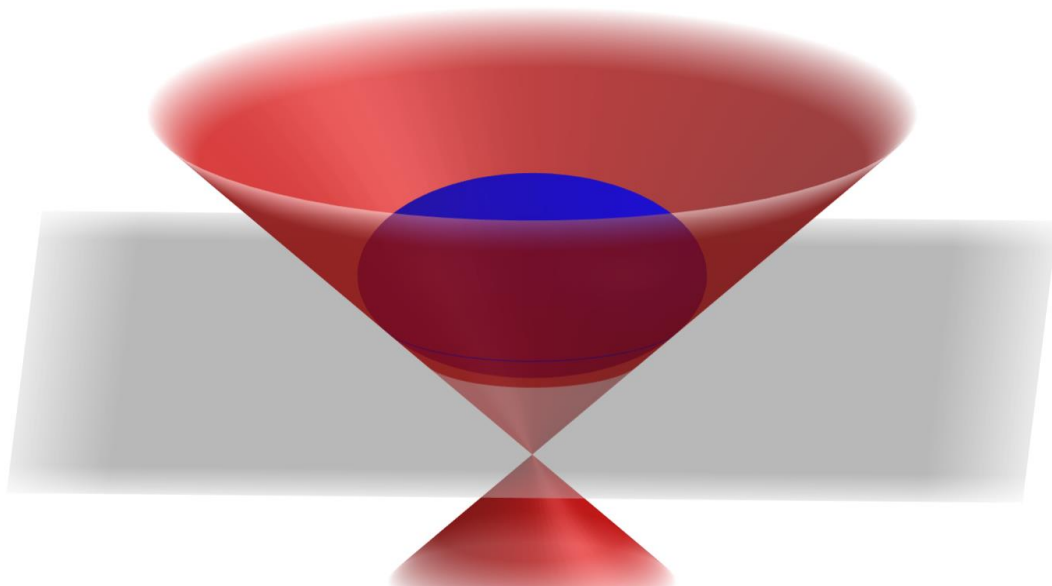


Figura 56 - Elipsoide de revolução e cone de revolução (geogebra)

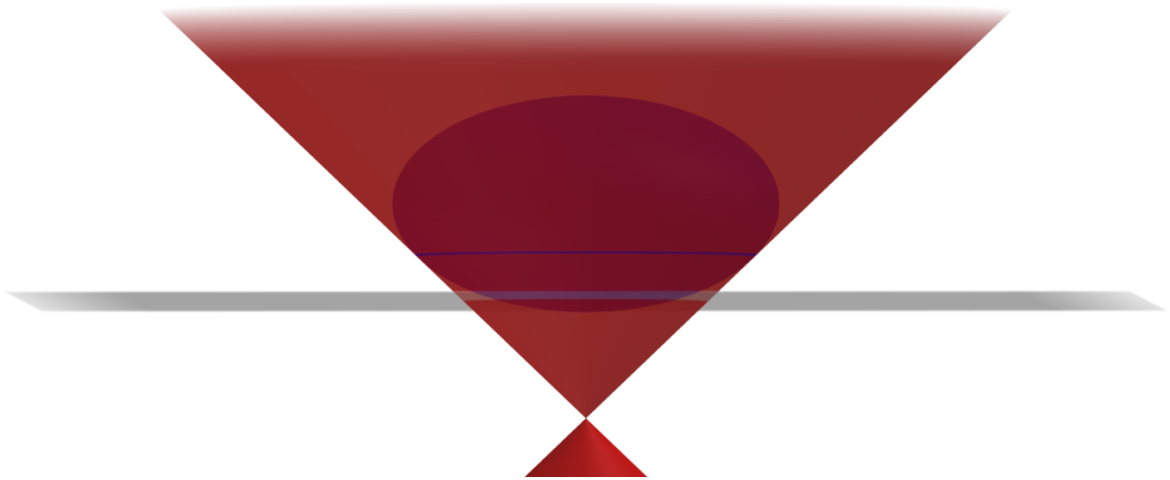


Figura 57 - Circunferência formada pela intersecção do elipsoide de revolução e cone de revolução, vista frontal (geogebra)

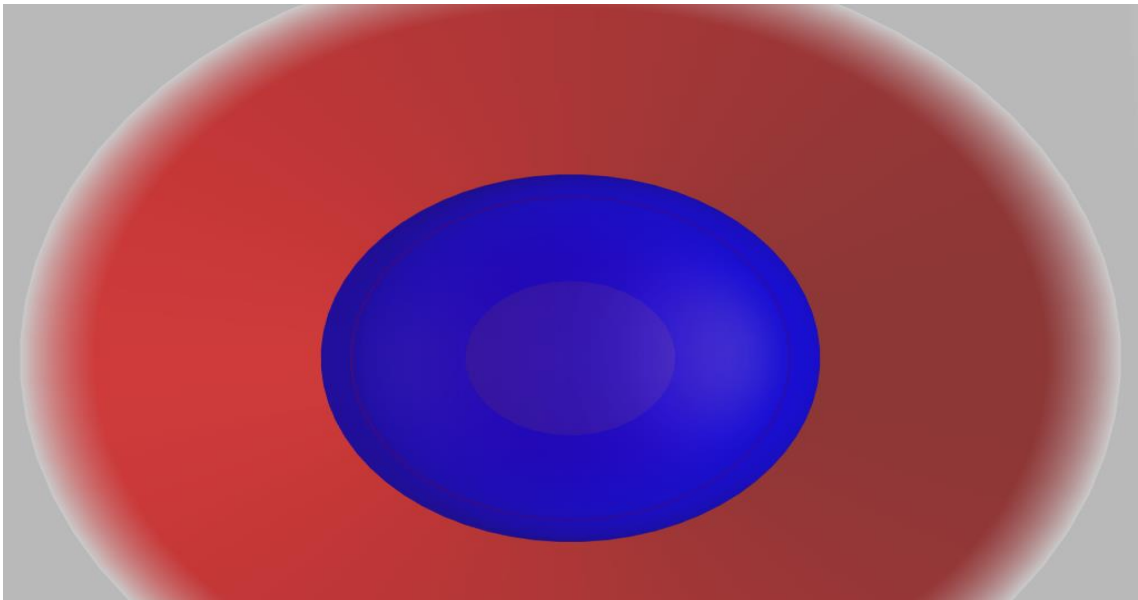


Figura 58 - Circunferência formada pela intersecção do elipsoide de revolução e cone de revolução, vista de cima (geogebra)

Da plataforma até a circunferência a forma considerada é a do elipsoide, e da circunferência até o topo da cúpula será considerado o tronco de cone.

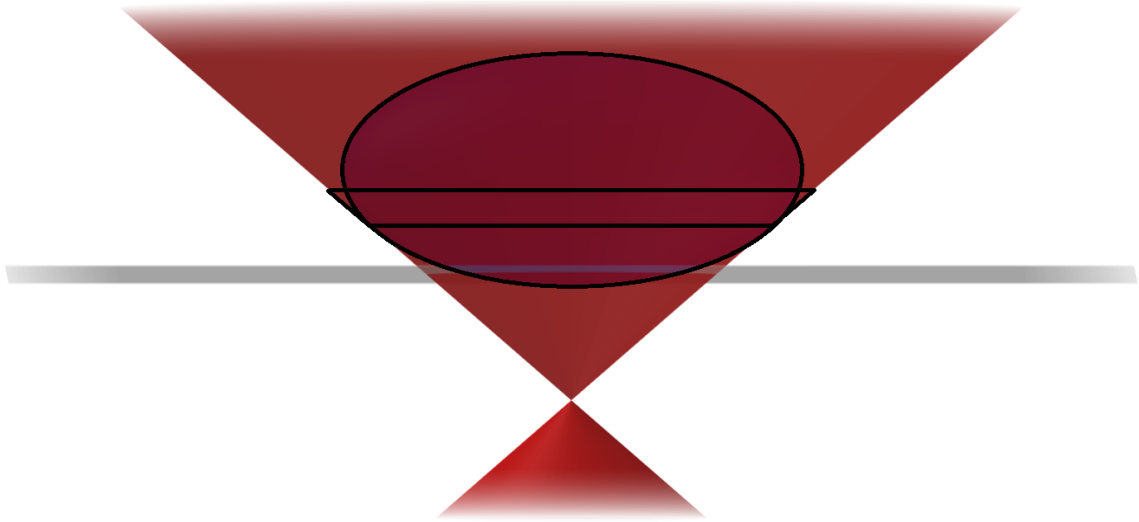


Figura 59 - Delimitação da parte do tronco de cone e a parte do elipsoide

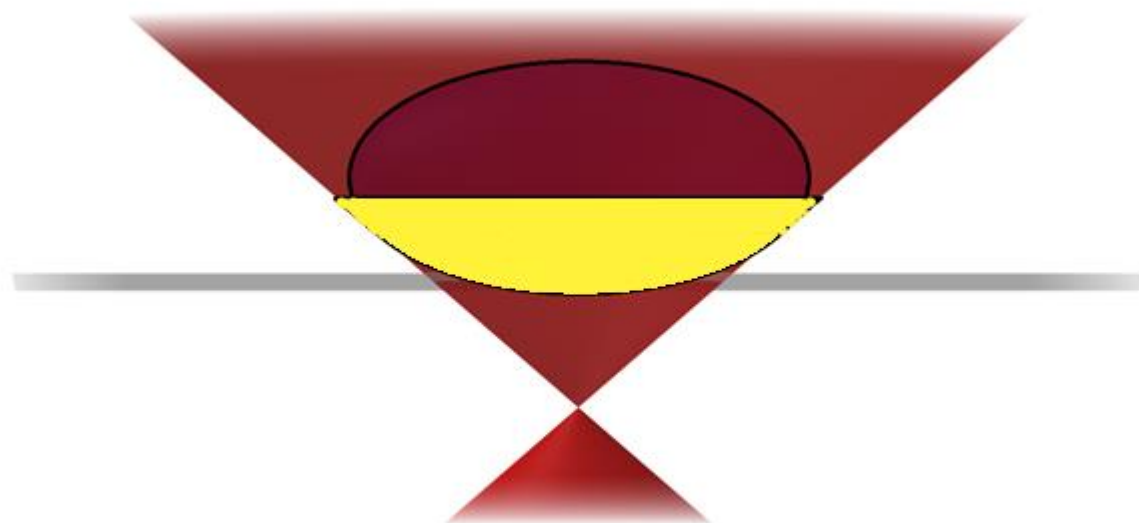


Figura 60 - Junção da parte do tronco de cone e a parte do elipsoide para formar a cúpula.



Figura 61 - Desenho correspondente à cúpula da Câmara dos Deputados.



Figura - 62 Cúpula da Câmara dos Deputados. Foto do autor.

3.5 O Museu Nacional Honestino Guimarães

3.5.1 Histórico

O Museu Nacional Honestino Guimarães em Brasília, conhecido apenas como Museu Nacional, faz parte do Conjunto Cultural da República João Herculino, complexo que também abriga a Biblioteca Nacional Leonel de Moura Brizola. Sua inauguração aconteceu em 15 de dezembro de 2006, mas sua história começa muito antes, já nos planos de Lúcio Costa para a Nova Capital.

O projeto arquitetônico concebido por Oscar Niemeyer para esse edifício foi desenvolvido para substituir um projeto originalmente criado em 1970 e que, por ser de uma estrutura mais ousada, foi considerado muito caro e posteriormente substituído por um projeto mais simples e barato. Esse primeiro projeto para o museu era bem diferente do que foi construído. Tratava-se de um edifício de 180 metros de comprimento com dois balanços de 70 metros para cada lado, suspenso na cobertura através de tirantes, e seria, provavelmente, um

recorde na história do concreto armado (SUSSEKIND, 2002). Mas esse projeto ficou apenas no papel.

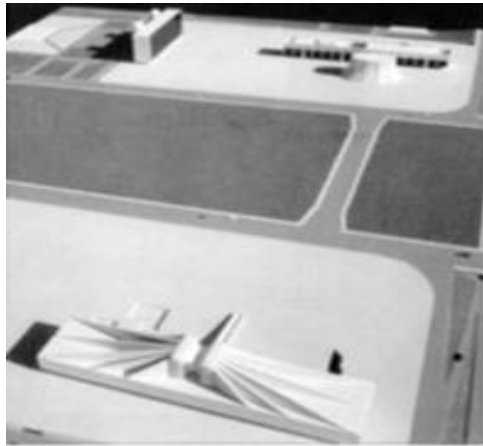


Figura 63 - Museu de Brasília (década de 70) – maquete 1ª versão. Katinsky, Rio de Janeiro, 1991.

Em 1986, uma nova versão é publicada pela revista *Módulo* (1986), para o mesmo terreno. Nela o edifício retangular é substituído por um circular de 55 metros de raio, suspenso por núcleo central e vigas estruturais.

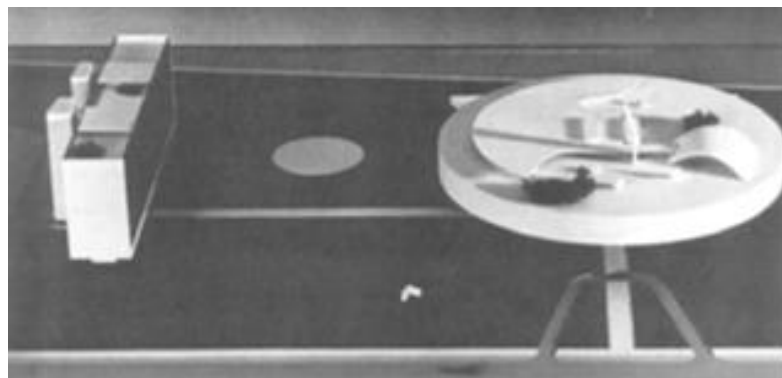


Figura 64 - Museu de Brasília (1986) – maquete da 2ª versão. Niemeyer, *Módulo*, Rio de Janeiro, n°89/90.

Em 1999, Oscar Niemeyer foi novamente chamado para rerepresentar um projeto para o Conjunto Cultural. O projeto do museu foi refeito. Propôs-se uma cúpula de 40 metros de diâmetro e seu acesso se daria por uma rampa curva virada para a esplanada (SERAPIÃO, 2007). Essa cúpula abrigaria, além do museu, um restaurante panorâmico com jardim, o que induziria a duas aberturas assimétricas na parte superior da cúpula. Além disso, o projeto inicial teria janelas circulares na porção intermediária para iluminação dos espaços internos.

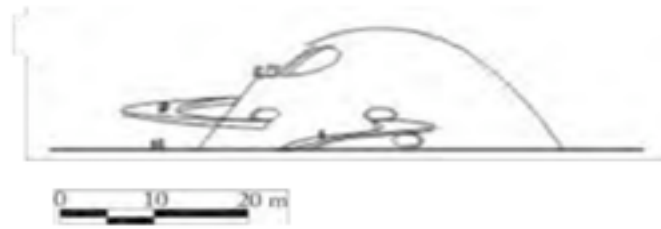


Figura 65 - Museu de Brasília (1999) – 3ª versão – fachada. Governo do Distrito Federal – Secretaria de Estado de Cultura. Conjunto Cultural da República.

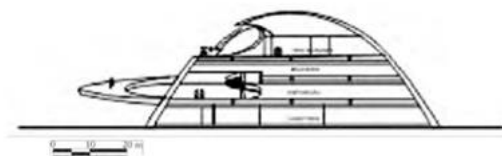


Figura 66 - Museu de Brasília (1999) – versão de 40 metros de cúpula com abertura no topo – corte – estrutura simples. Governo do Distrito Federal – Secretaria de Estado de Cultura. Conjunto Cultural da República.

Uma nova versão, agora definitiva, foi proposta por volta de 2002. Nela, Niemeyer decidiu dobrar o tamanho da cúpula, segundo ele por notar, após estudos de uma maquete que representava quase toda a Esplanada dos Ministérios, que a escala desse edifício estava muito pequena diante do conjunto (SUSSEKIND, 2002), fazendo com que a cúpula passasse a ter o diâmetro de 80 metros.

Foi então que, em 15 de dezembro de 2006, data em que se comemorava o 99º aniversário de Oscar Niemeyer, o Museu Nacional Honestino Guimarães foi inaugurado, com a exposição *Niemeyer por Niemeyer* na qual eram expostas fotografias e desenhos das principais obras do arquiteto em seus mais de 70 anos de carreira.

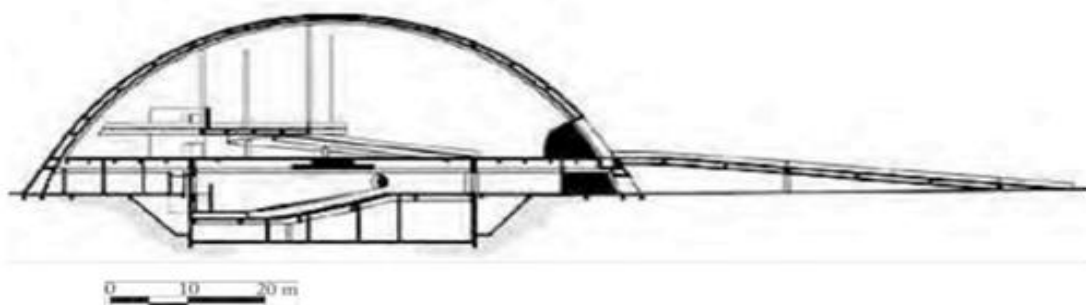


Figura 67 - Museu de Brasília (2006) – versão construída – corte – rampa reta. Projeto Design. Duas obras levam Niemeyer ao Planalto Central, nº 326,207, p.61

3.5.2 Geometria

O projeto estrutural concebido pelo engenheiro Carlos Henrique da Cruz Lima⁵ definiu uma estrutura composta basicamente por uma cobertura em casca dupla com nervuras radiais e circunferenciais, que apresenta externamente duas formas geométricas distintas: entre o piso térreo e o pavimento de exposições a casca tem a forma de um tronco de cone, com 76,0 m de diâmetro na base, complementado por um setor esférico que atinge uma altura total de 26,40 m. Já a casca interna mantém a forma de um setor esférico desde o pavimento térreo até o topo.

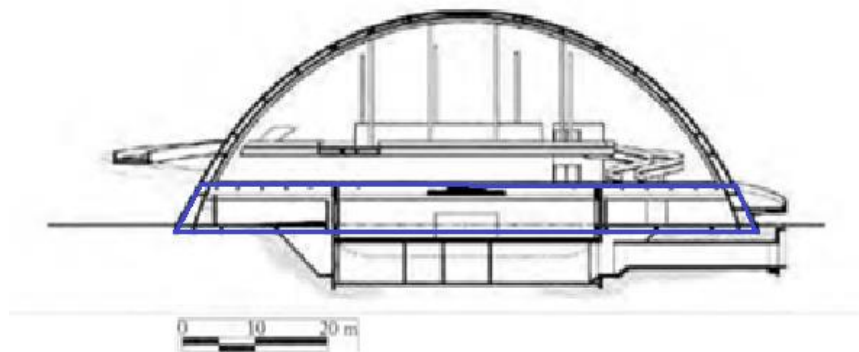


Figura 68 - Museu de Brasília (2006) versão construída – corte – sobreposição de duas formas: tronco de cone (em azul) e cúpula. Projeto Design. Duas obras levam Niemeyer ao Planalto Central, nº 326,207, p.55.

De acordo com o engenheiro Carlos Henrique, a principal razão para a utilização de uma casca dupla foi a necessidade de uma rigidez que resistisse aos esforços de flexão impostos pelos tirantes da estrutura do mezanino, pelas vigas do piso de exposições, e em maior grau, pela grande rampa externa engastada. A solução estrutural permitiu que se formasse um colchão de ar entre as cascas de concreto, que contribui significativamente na redução da carga térmica no interior da estrutura, de maneira a melhorar a eficiência do sistema de ventilação instalado.

O pavimento térreo é formado por um nível horizontal em forma de coroa circular que recebe todas as salas destinadas a trabalhos específicos de museologia, além de um auditório de 80 lugares, e uma área central, com piso inclinado, destinado ao grande auditório acarpetado de 700 lugares.

⁵ Carlos Henrique da Cruz Lima, engenheiro chefe do projeto Museu de Brasília.

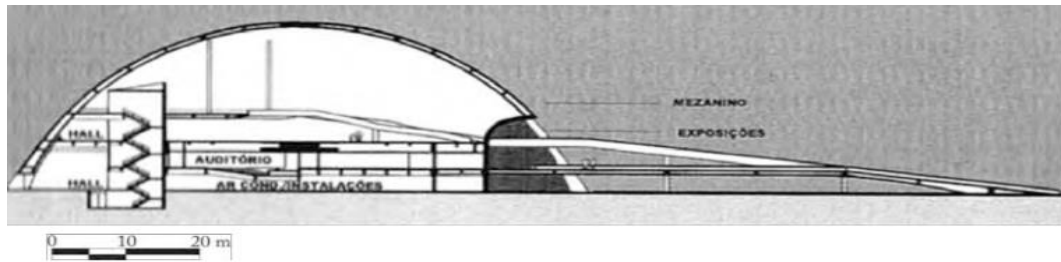


Figura 69 - Museu de Brasília (2006) – corte – acesso principal com acesso simultâneo ao térreo e ao primeiro pavimento. Niemeyer, Minha Arquitetura 1937-2004. Rio de Janeiro: Revan, 2004, p.274.

As paredes dos dois auditórios, revestidas por lambris, recebem um recheio de lã de vidro e compensado de madeira como forma de proteção acústica. Logo acima, o grande pavimento de exposições, elevado 5,15 m em relação ao térreo, tem sua laje apoiada sobre a parede cilíndrica do auditório com 35 m de raio, por meio de aparelhos de apoio em neoprene. "A estrutura é encimada por vigas radiais dispostas a cada 15° que convergem para um maciço central onde se cruzam os cabos de protensão", explica Carlos Henrique. Além do apoio central, a laje também é ligada estruturalmente à casca periférica.



Figura 70 - Escoramento das vigas radiais 1. Fonte: Via Engenharia.



Figura 71 - Escoramento das vigas radiais 2. Fonte: Via Engenharia.

Estudos técnicos de engenharia mostram que para uma cúpula estar totalmente comprimida, ela deve ter uma abertura angular de aproximadamente 104° , isto é, a transição entre os esforços de compressão e tração se ocorre com 52° (considerando um ângulo medido do topo para a base) (Rebello, 2000). No Museu Nacional, Niemeyer e Sussekind utilizaram deste princípio para gerar a forma da cúpula, a angulação no caso do Museu é de cerca de 58° , como pode ser observado na Figura 72.

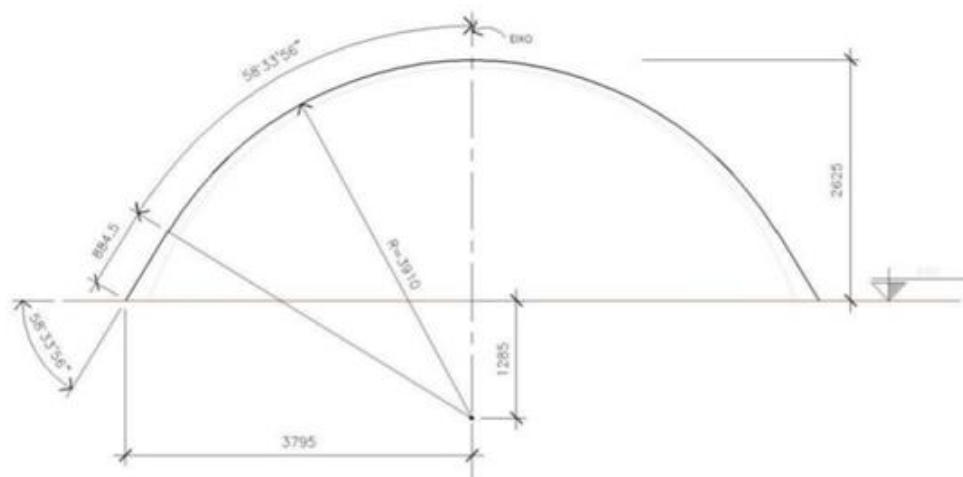


Figura 72 - Corte esquemático do arco gerador da cúpula do Museu Nacional. Fonte: Casuarina Consultoria LTDA.

A planta de formas da cobertura do Museu Nacional evidencia a presença da sucessão dos arcos paralelos, como já visto, compondo a cúpula (Figura abaixo).

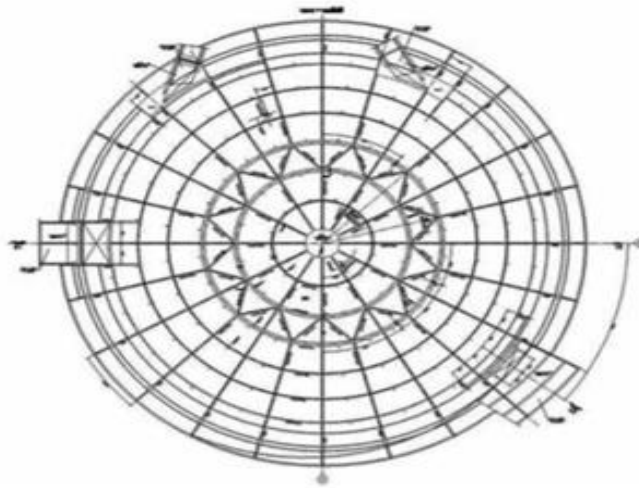


Figura 73 - Planta de cobertura. Fonte: Casuarina Consultoria LTDA.

Apesar do desempenho da cúpula ser ideal apenas para cargas distribuídas uniformemente, Oscar Niemeyer aplicou, no último piso, um mezanino apoiado em tirantes fixados nos arcos da cobertura. Esta decisão gerou esforços pontuais bem definidos no conjunto, o que, por sua vez, geraram esforços de flexão na estrutura. Nesse caso, como a cúpula não apresenta somente esforços de compressão, os esforços de flexão geram grandes esforços horizontais nos apoios causando uma tendência da cúpula aumentar de tamanho na base. Essa tendência gera um efeito chamado de “Perturbação de Borda” (REBELLO, 2000). A perturbação de borda (Figura abaixo) é o aparecimento de momento fletor na borda da cúpula, indicado por uma brusca mudança na curvatura, já que não há possibilidade de deslocamentos na base do arco.

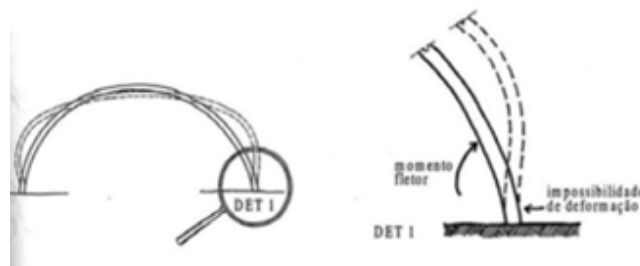


Figura 74 - Perturbação de borda. Fonte: Rebello, 2000.

Para combater esse fenômeno, José Carlos Sussekind se valeu de duas soluções. Primeiro, como pode ser notado na foto da Figura 75.a, ele utilizou um grande anel de

compressão na base da cúpula e, além disso, também aumentou a espessura da cúpula junto ao apoio, usando inclusive uma parede dupla nessa região (Figura 75.b).

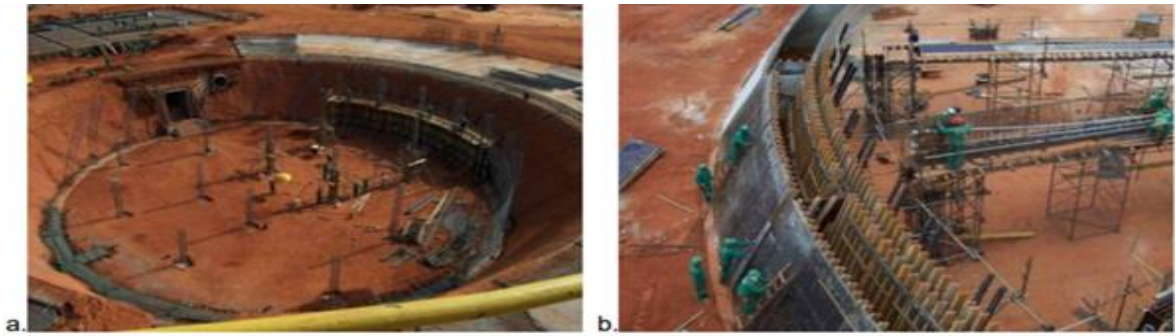


Figura 75 - a. Execução das Fundações e do Anel de compressão na base da cúpula. b. Execução da base da cúpula – parede dupla. Fonte: Via Engenharia.

Outro grande desafio para o engenheiro José Carlos Sussekind foi a grande laje do pavimento de exposições, pois esta laje de 80 metros de diâmetro não possui nenhum apoio central, deixando livre todo o diâmetro do meridiano. Isto permite total liberdade para a instalação dos auditórios no pavimento inferior. Esse desafio apareceu no momento em que o arquiteto Oscar Niemeyer resolveu dobrar o tamanho da cúpula, dobrando também o tamanho da laje. Este grande vão foi possível graças ao conjunto de vigas radiais (Figura 76) que, nas extremidades se apoiam nos arcos da cúpula e, no centro, comprimem um maciço de concreto suspenso.



Figura 76 - Vigas radiais do pavimento, dispostas a cada 15°. Fonte: Via Engenharia.



Figura 77 - Laje do pavimento de exposições concretada. Fonte: Via Engenharia.

3.5.3 Equação

Para encontrar matematicamente a forma que se aproxima da cúpula, temos que encontrar as equações da circunferência e da geratriz do cone.

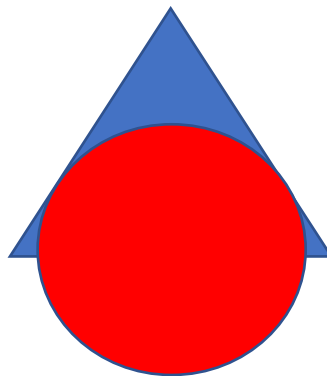


Figura 78 - Cone e circunferência

Vamos considerar o raio da circunferência que forma o setor esférico como sendo $r = 39,1$ e o centro $C(0;-12,85)$. A equação de uma circunferência é da forma

$$(x - a)^2 + (z - b)^2 = r^2$$

Logo a circunferência que procuramos é:

$$x^2 + (z + 12,85)^2 = 1528,81$$

Tomando a geratriz do cone como a reta r , e que o raio do tronco de cone é $R= 38\text{m}$, o ângulo que essa reta faz com o eixo x é de aproximadamente 60° , como já visto. O ponto de tangência será no encontro do tronco de cone com o setor esférico. Como o tronco de cone tem altura de $5,15\text{m}$, e utilizando $\text{tg}60^\circ = 1,73$ temos que:

$$\text{tg}60^\circ = \frac{5,15}{x}$$

$$x = 2,97 \cong 3\text{m}$$

Logo o ponto de tangência é $P(35;5,15)$. A reta procurada é da forma

$$r: z - 5,15 = m(x - 35),$$

onde $m = -\text{tg}60^\circ$. Logo, Substituindo na reta r temos:

$$r: z - 5,15 = -1,73.(x - 35)$$

$$r: z = -1,73.x + 60,55 + 5,15$$

$$r: z = 1,73.x + 65,7$$

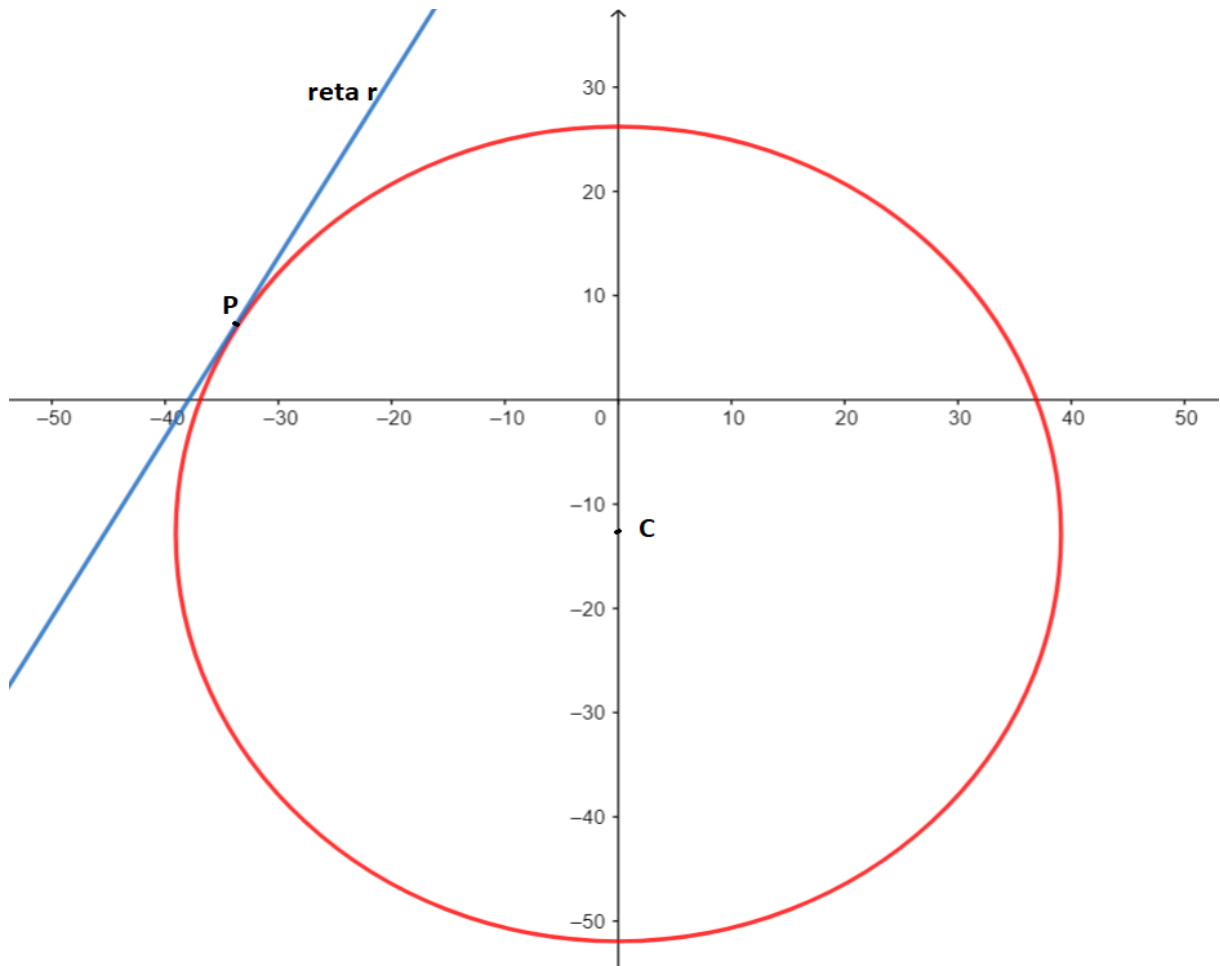


Figura 79 - Reta r tangente a circunferência. (geogebra)

Com os dados acima vamos encontrar as equações das quádricas formadas pela esfera e o cone de revolução tangente. Para encontrar a equação da superfície da esfera girada em torno do eixo z , vamos considerar a equação da forma $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Como o centro da esfera não é a origem, devemos fazer uma translação vertical desse eixo de modo que o centro esteja na posição correta. Essa transformação pode ser obtida pela transformação dada por

$$T(x, y, z) = (x, y, z + 12,85)$$

Logo a equação da esfera será:

$$x^2 + y^2 + (z + 12,85)^2 = 1528,81$$

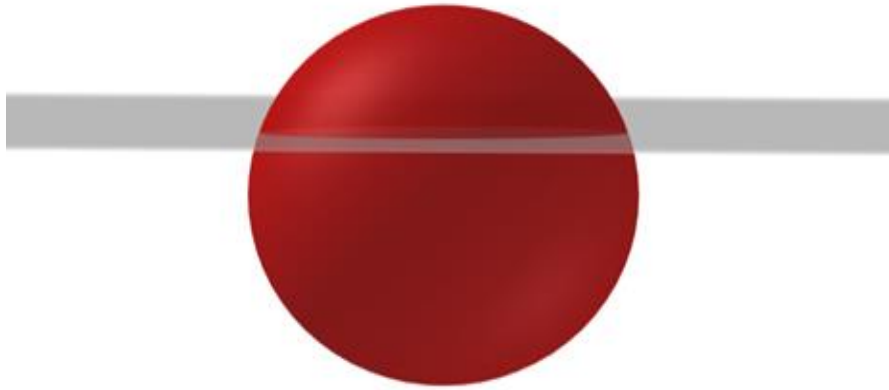


Figura 80 - Esfera, vista frontal (geogebra)

Sabendo que a equação de um cone de revolução é da forma $x^2 + y^2 = (m')^2 z^2$, sendo que m' é a tangente do ângulo que a geratriz do cone faz com o eixo z e que m é a tangente do ângulo que a geratriz do cone faz com o eixo x , temos que $m' = \frac{1}{m}$. Como $m = 1,73$, temos que $m' \cong 0,58$. Como o vértice do cone invertido não é a origem, devemos fazer uma translação vertical desse eixo de modo que o vértice esteja na posição correta, isto é, dada por

$$T(x, y, z) = (x, y, z - 65,36)$$

Logo a equação do cone de revolução será:

$$x^2 + y^2 = 0,34(z - 65,36)^2$$

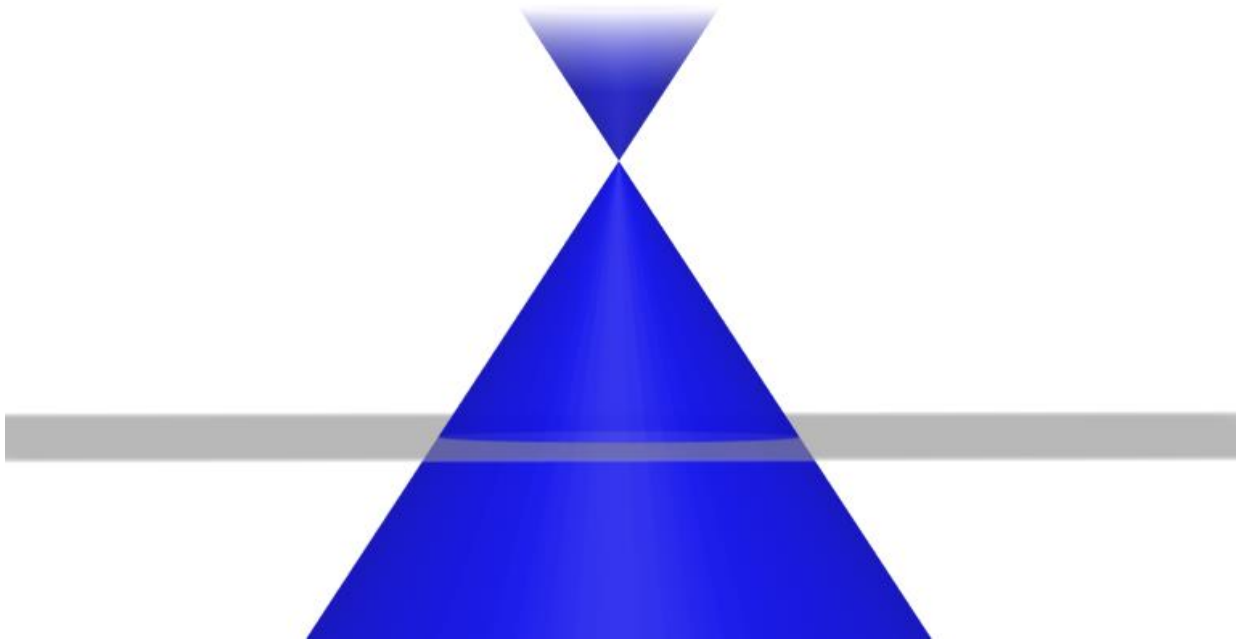


Figura 81 - Cone de revolução, vista frontal (geogebra)

Para formar o sólido de revolução que dá o formato da cúpula, temos que tomar como base a circunferência formada pela intersecção entre o cone de revolução e a esfera.

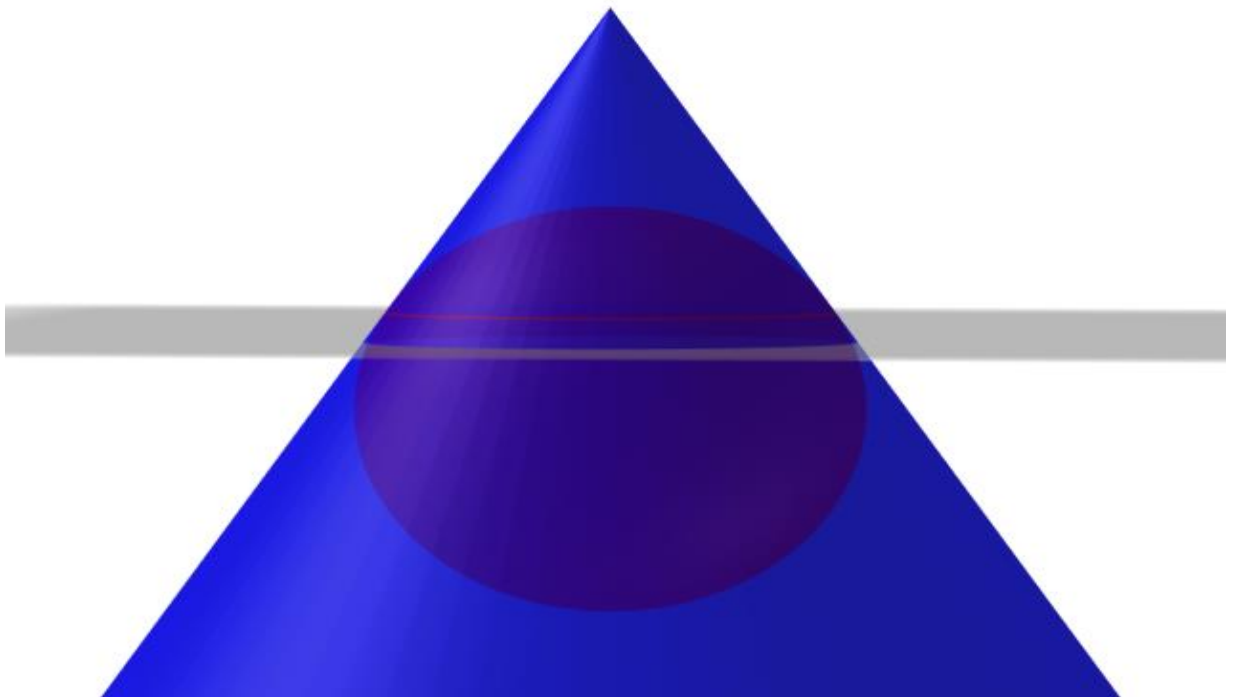


Figura 82 - Circunferência formada pela intersecção da esfera e cone de revolução, vista frontal (geogebra)

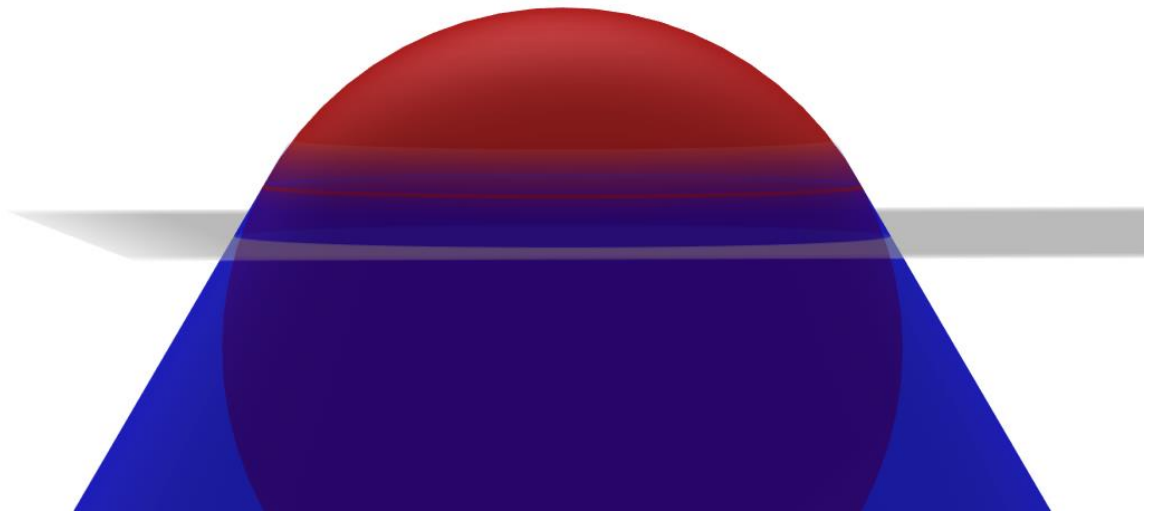


Figura 83 - Sobreposição da parte do tronco de cone e a parte da esfera para formar a cúpula, vista frontal (geogebra).

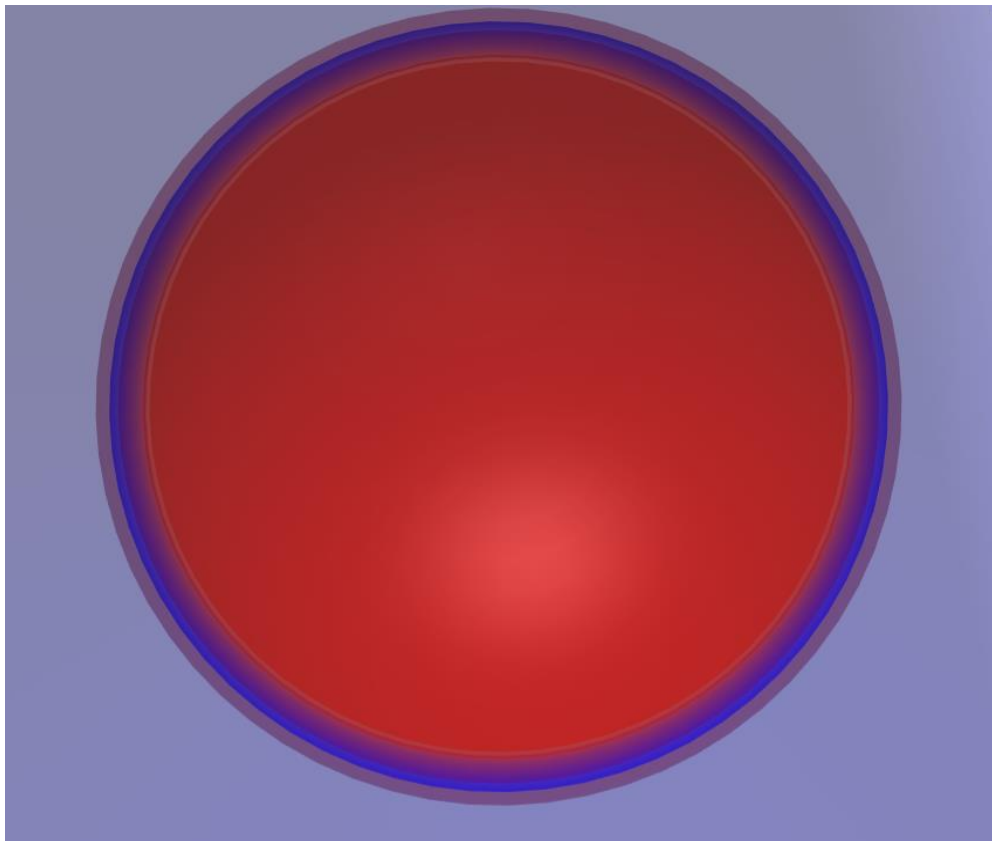


Figura 84 - Sobreposição da parte do tronco de cone e a parte da esfera para formar a cúpula, vista de cima (geogebra).

Do chão até a circunferência a forma considerada é o tronco de cone, e da circunferência até o topo da cúpula será considerado a esfera.

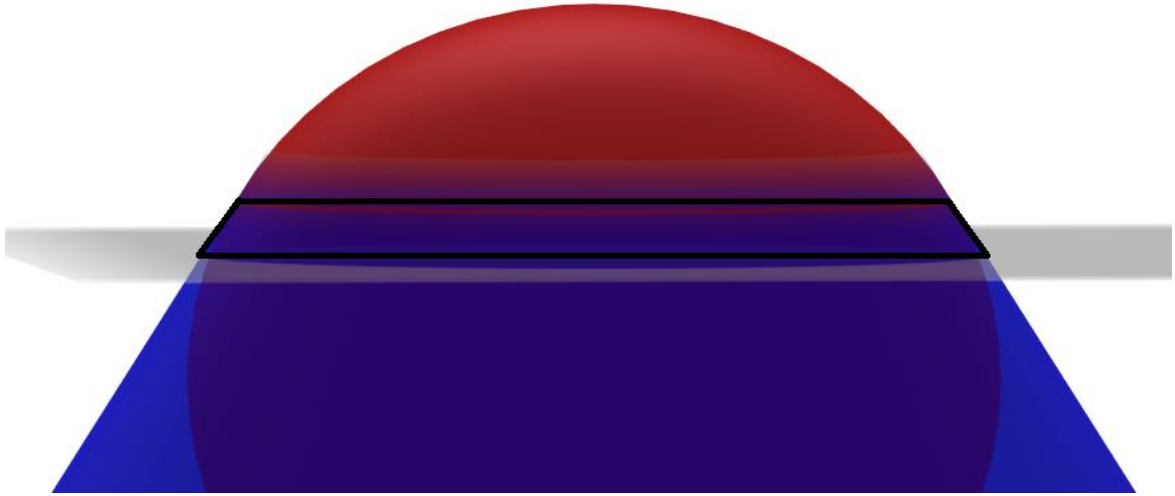


Figura 85 - Delimitação da parte do tronco de cone e a parte da esfera.

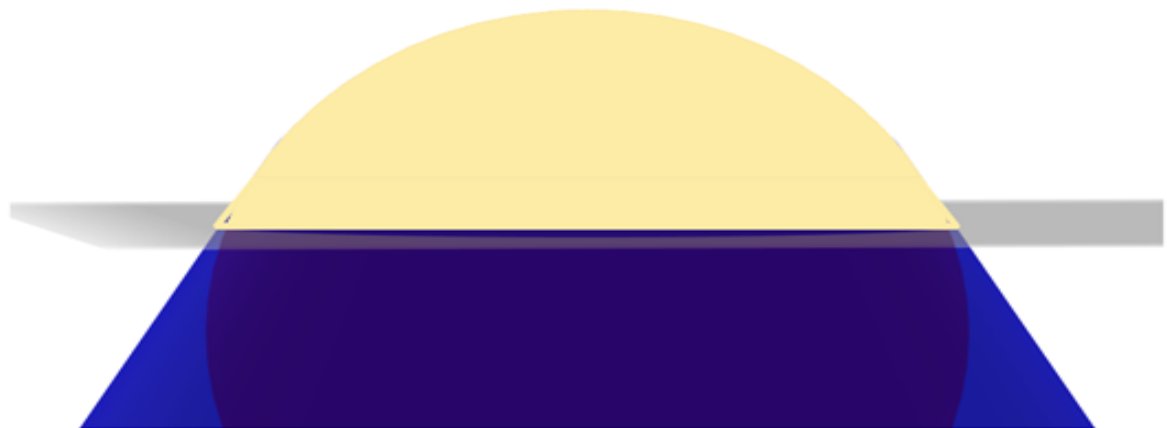


Figura 86 - Junção da parte do tronco de cone e a parte da esfera para formar a cúpula.



Figura 87- Desenho da cúpula do Museu de Brasília.



Figura 88 - Museu de Brasília. Foto do autor.

3.6 Palácio da Alvorada

3.6.1 Histórico

Nas colunas da fachada, revelam-se duas preocupações que concorrem para a leitura de leveza do elemento: uma relacionada à elaboração da geometria da forma e outra aos vínculos indicados na arquitetura.

Acerca da forma, os desenhos de arquitetura não registram definições dos elementos; assim, fica a cargo das anotações na disciplina de estruturas a solução final a ser executada em obra. Essa atribuição no caso dos palácios foi assumida pela engenharia com propósitos claramente definidos de ajustar o desenho elaborado de modo a harmonizar as premissas da arquitetura com as necessidades de equilíbrio estrutural e de contemplar o conhecimento relacionado à adequação geométrica, que, segundo Cardozo (1958, p.3), constituía-se como funcionamento para as especulações das composições arquitetônicas.

[...] nas construções de Brasília [...], o sentido de molduração foi intuitiva e perfeitamente alcançada pelo arquiteto Niemeyer; notem-se os campos de tangência e de curvatura que, podem ser definidos nas fachadas dos Palácios da Alvorada, da Justiça e do Planalto, numa espécie de irradiação geométrica, possuindo sua fonte nos pilares cujas formas e disposição foram criadas para efeito de molduramento que, como a antiga, a clássica, também produz jogos de luz e sombra.

3.6.2 Geometria

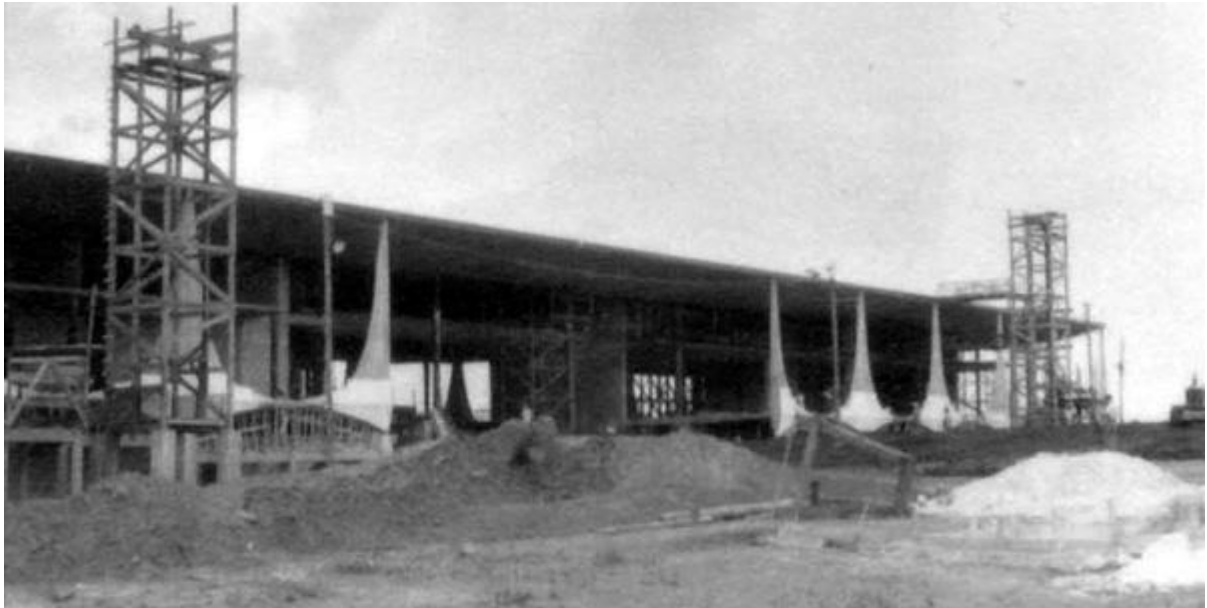


Figura 89 - Construção do Palácio do Alvorada, Arquivo Público do DF.

A forma geométrica das colunas foi composta como resultado da combinação de curvas em arco com um segmento de curva. Ao serem consideradas as mesmas condições, é possível especular algumas alternativas que resultariam na forma das colunas, como por exemplo a partir de curvas cônicas. A adoção da curva parabólica seria um desenho aproximado da primeira coluna elaborada para o Palácio Presidencial, com acréscimo considerável de massa à coluna; a curva elíptica aproximar-se-ia da forma apresentada, mas apresentaria a inconveniência de aparente estreitamento antes do ponto desejado de transição.

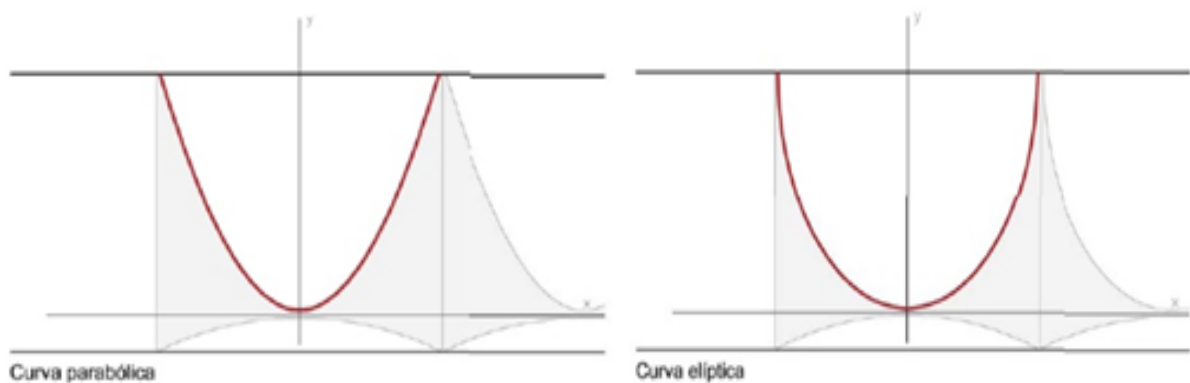


Figura 90 - Simulação da adoção de curvas para as colunas. Elcio, 2014.

3.6.3 Equação

Depois de muitos estudos, a forma encontrada para a curva foi de determinada equação polinomial de grau quatro, cujos eixos coincidem com o do intercolúnio e com o plano intermediário do edifício.

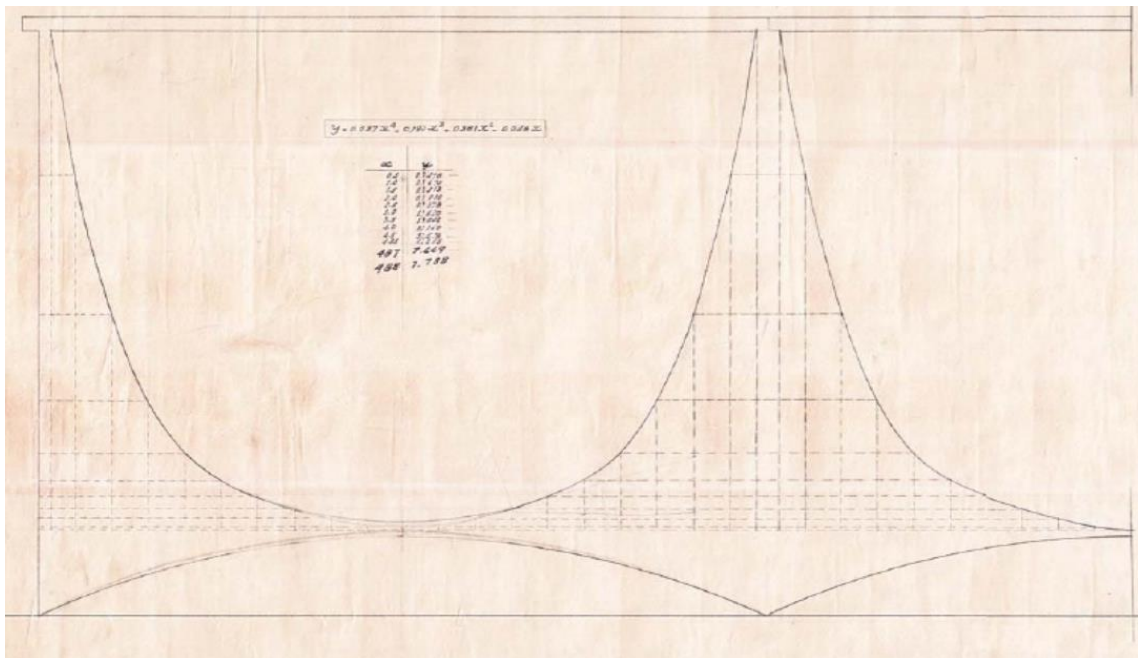


Figura 91 - Colunas, definição da geometria da forma da equação polinomial de quarto grau e pontos determinados.
Fonte: Arquivo Público do Distrito Federal.

A equação encontrada foi $y = 0,037x^4 - 0,190x^3 + 0,381x^2 - 0,048x$.

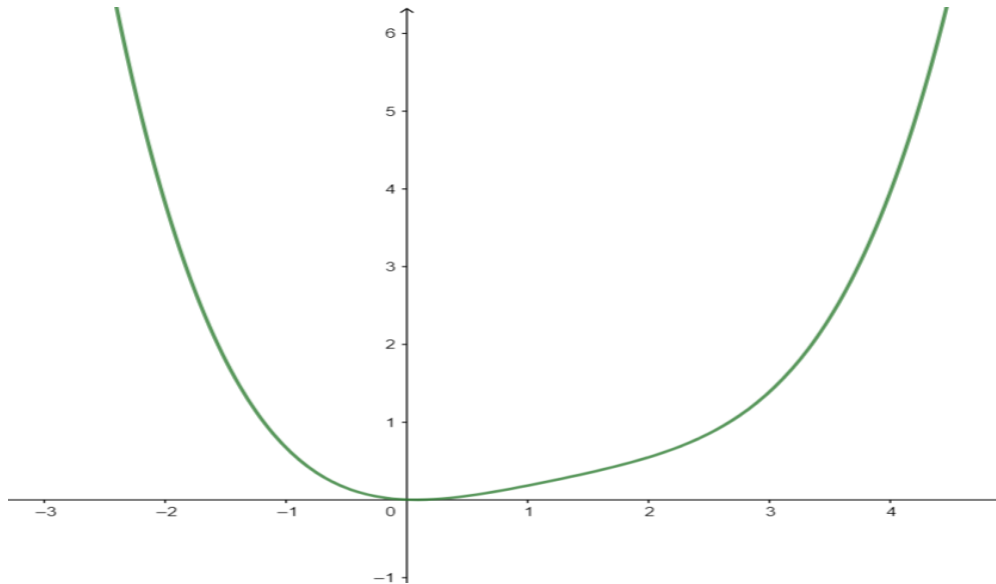


Figura 92 - Gráfico 1 da equação polinomial de quarto grau $y = 0,037x^4 - 0,190x^3 + 0,381x^2 - 0,048x$ (geogebra)

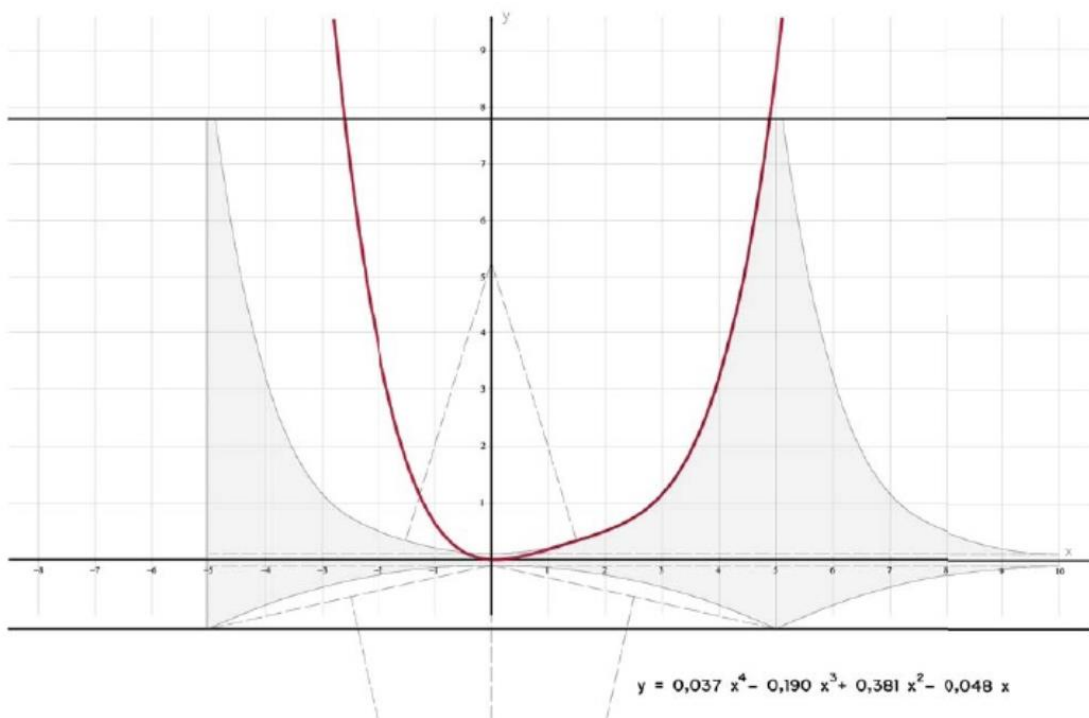


Figura 93 - Gráfico 2 da equação polinomial de quarto grau $y = 0,037x^4 - 0,190x^3 + 0,381x^2 - 0,048x$ (geogebra). Elcio, 2014.

Para encontrar matematicamente a forma que se aproxima da coluna, considerando que

$$F_1(x) = y = 0,037x^4 - 0,190x^3 + 0,381x^2 - 0,048x,$$

temos que encontrar $F_2(x) = g$, tal que $F_1(x) = F_2(-x)$. Logo,

$$F_2(x) = g = 0,037x^4 + 0,190x^3 + 0,381x^2 + 0,048x$$

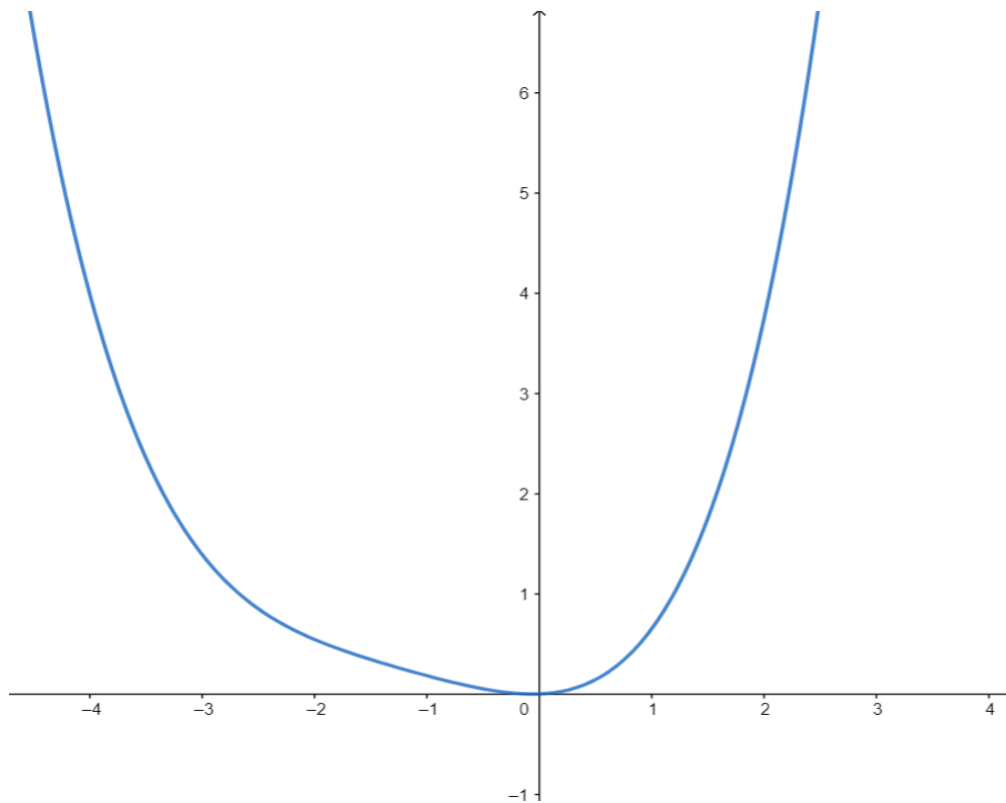


Figura 94 - Gráfico da equação polinomial de quarto grau $g = 0,037x^4 + 0,190x^3 + 0,381x^2 + 0,048x$ (geogebra).

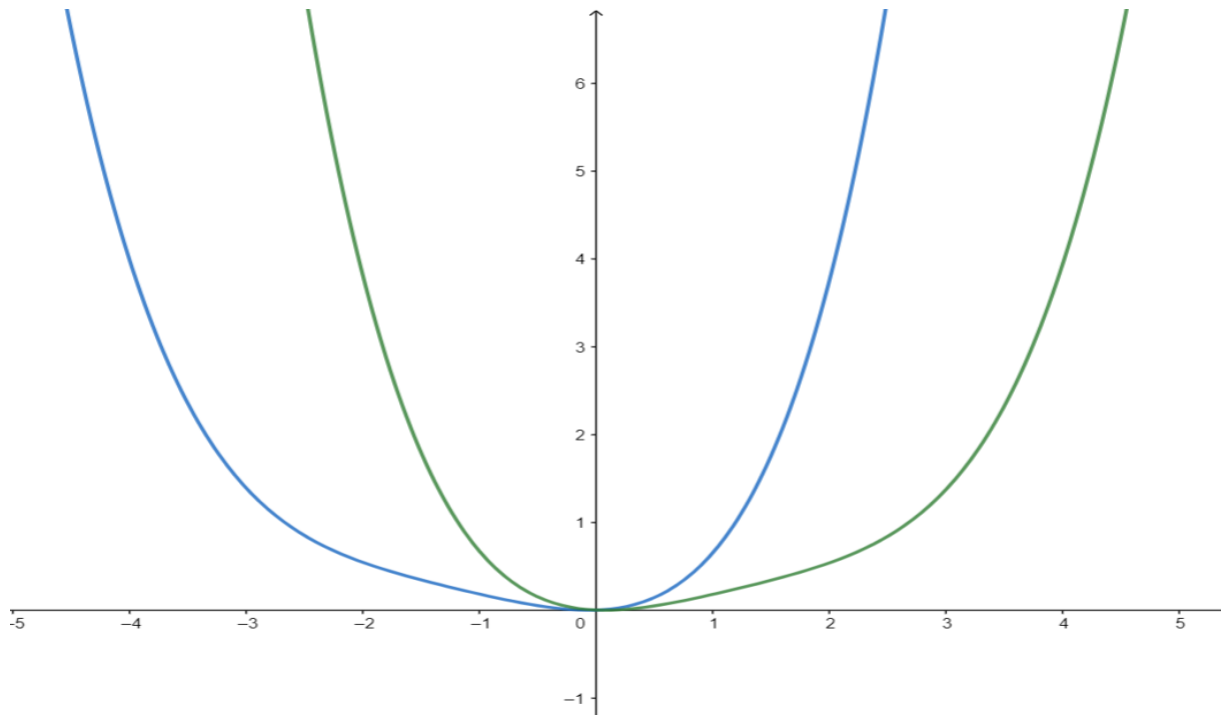


Figura 95 - Gráficos das equações polinomiais y (verde) e g (azul). (geogebra).

A forma da coluna será parte do gráfico de y , para $x > 0$ e parte do gráfico de g , para $x < 0$. Logo, a coluna utilizada no Palácio do Alvorada é da forma:

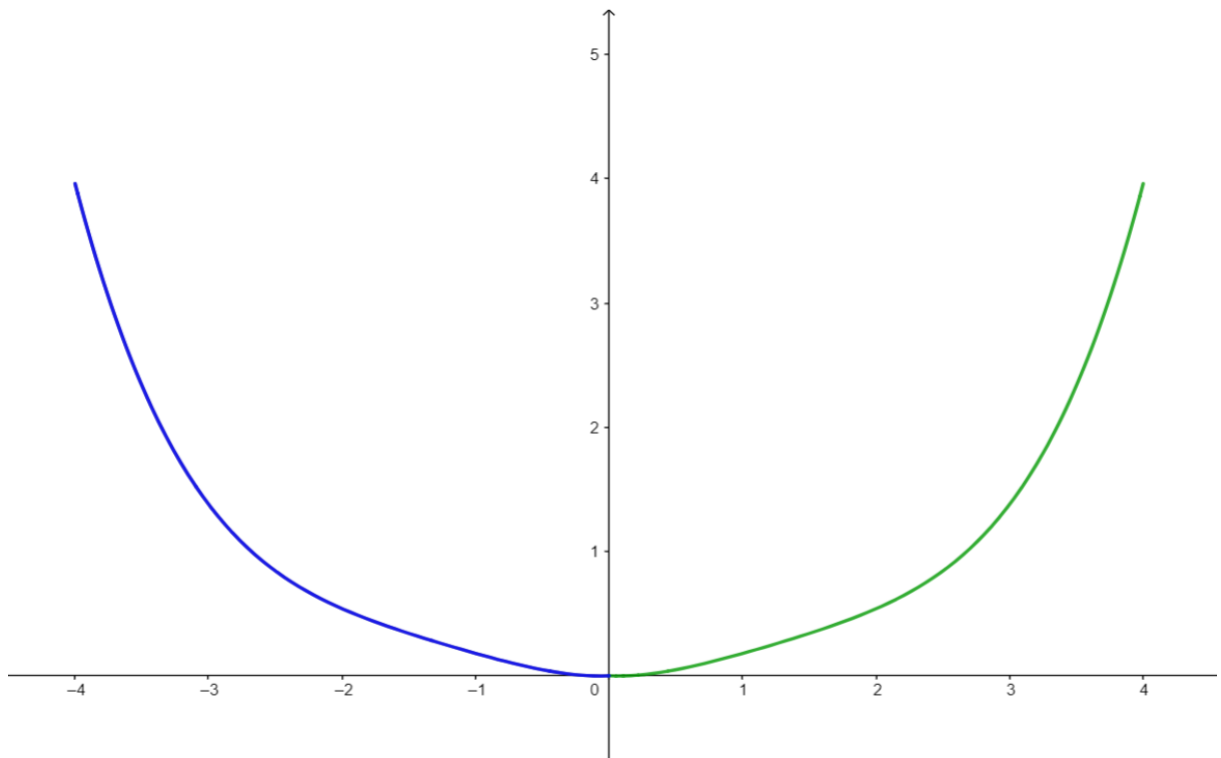


Figura 96 - Parte dos gráficos das equações polinomiais y (verde) e g (azul) que compõem a coluna. (geogebra)



Figura 97 - Sobreposição do gráfico formado por partes dos gráficos y e g nas colunas do Palácio do Alvorada. Foto do autor.



Figura 98 -Colunas do Palácio do Alvorada. Foto do autor.

Considerações Finais

Nesta dissertação foi apresentado um aspecto geral da história e construção de Brasília bem como os personagens e suas influências que participaram desse feito arquitetônico que é a cidade. Diante das curvas e formas que foram utilizadas nos monumentos arquitetônicos fez-se necessário a apresentação de algumas definições sobre as cônicas, quádricas e as superfícies de revolução.

Com os dados obtidos pela pesquisa, foram encontradas as equações que mais se aproximam das superfícies utilizadas para a construção do gráfico e comparação com a forma original. O que o trabalho nos mostra é que apesar de parecer curvas simples vistas em um primeiro momento, a busca pela perfeição estética e beleza torna a matemática por trás das obras muito mais complexa, onde muitas vezes faz-se necessário sobreposições de curvas para alcançar o objetivo pretendido. A genialidade de Niemeyer e a leveza nas linhas e curvas aparentemente simples faz com que Brasília se torne um museu a céu aberto, onde é notório a matemática pulsando por toda a cidade.

Assim como Brasília é uma cidade em que a matemática salta aos olhos mesmo para quem não a domine, espero que esse trabalho sirva como meio de inspiração para os professores que buscam ensinar uma matemática aplicada com exemplos concretos, onde os alunos possam ver a beleza da matéria além da sala de aula. Pesquisas de campo, oficinas para a construção de algumas dessas superfícies com os alunos ou até mesmo o estudo de outros monumentos da cidade são exemplos de como envolver o aluno com a matéria.

Referências

- [1]ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. 8. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. V.1, 680 p.
- [2]CARDOZO, Joaquim. A Construção de Brasília. Rio de Janeiro, [195_?/196_?]. 4p. <http://www.joaquimcardozo.com/paginas/joaquim/poemas/arquitetura/brasilvia.pdf>.
- [3]E. CERIA, Memorie Biografiche di S. Giovanni Bosco, vol. 16, Società Editrice Internazionale, ps. 394 e 395, Torino, 1935.
- [4]GUERRA, Graciete. Disponível em repositorio.unb.br/bitstream/10482/9987/1/2011_GracieteGuerraCosta.pdf
- [5]KERNS ,Iara e PIMENTEL, Ernani Figueras ,Brasília Secreta, editora Pórtico, 2000.
- [6]LAUANDE,Francisco,2013.
Disponível em www.vitruvius.com.br/revistas/read/projetos/13.147/4668.
- [7]MURTA, Luciana, 2018.
Disponível em <https://discutindoarquitetura.wordpress.com/modernismo1/>
- [8]NIEMEYER, Oscar, 2000, As Curvas do Tempo: as memórias de Oscar Niemeyer. Londres: Phaidon, ps. 169 e 170.
- [9]NIEMEYER, Oscar. Meu sócia e eu. Rio de Janeiro: Editora Revan, 1992, p. 92.
- [10]NIEMEYER, Oscar. Minha Arquitetura. Editora Revan, 2000, 3ª edição, Rio de Janeiro, Dezembro de 2000.
- [11]NIEMEYER, Minha Arquitetura 1937-2004. Rio de Janeiro: Revan, 2004, p.274.
- [12]NIEMEYER, Oscar, 2004, op. cit., p. 153.
- [13]NIEMEYER. Duas obras levam Niemeyer de ao Planalto Central, nº 326,207, ps. 55 e 61.
- [14]PORTO, Cláudia Estrela. Disponível em [//periodicos.unb.br/index.php/paranoa/article/viewFile/19743/15180](http://periodicos.unb.br/index.php/paranoa/article/viewFile/19743/15180)

- [15]REBELLO, Y. C. P. A Concepção Estrutural e a Arquitetura. Zigurate, 2000, São Paulo.
- [16]REBELLO,2007. Palavras de Niemeyer, Rebello, 2007. Disponível em <http://au17.pini.com.br/arquitetura-urbanismo/165/a-historia-do-engenheiro-e-calculista-joaquim-cardozo-67588-1.aspx>.
- [17]REIS, Silva, 1996. 2ª edição. Geometria Analítica. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
- [18]SERAPIÃO, Fernando. Museu Nacional Honestino Guimarães, Brasília. Revista Projeto Design, edição 326 Abril de 2007.
- [19]SUSSEKIND, José Carlos; Niemeyer, Oscar. Conversa de Amigos: correspondências entre Oscar Niemeyer e José Carlos Sussekind. Ed. Revan, Rio de Janeiro, 2002.
- [20]Trecho do discurso de Ano novo do presidente, Rio de Janeiro, 21 de dezembro de 1960.