



**PROJETO DE CONTROLADORES PID ROBUSTOS
PARA SISTEMAS POLITÓPICOS SUJEITOS À
ATRASSO INCERTO: UMA ABORDAGEM LMI**

GUILHERME ALEKSANDERS DE OLIVEIRA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PROJETO DE CONTROLADORES PID ROBUSTOS
PARA SISTEMAS POLITÓPICOS SUJEITOS À
ATRASSO INCERTO: UMA ABORDAGEM LMI**

GUILHERME ALEKSANDERS DE OLIVEIRA

Orientador: PROF. DR. EDUARDO STOCKLER TOGNETTI, ENE/UNB

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**PUBLICAÇÃO PGEA.DM - 701/2018
BRASÍLIA-DF, 30 DE JULHO DE 2018.**

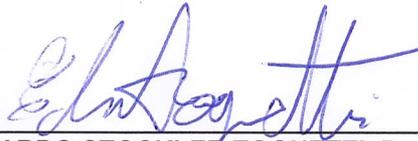
**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PROJETO DE CONTROLADORES PID ROBUSTOS PARA
SISTEMAS POLITÓPICOS SUJEITOS À ATRASO INCERTO: UMA
ABORDAGEM LMI”**

GUILHERME ALEKSANDERS DE OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:



**EDUARDO STOCKLER TOGNETTI, Dr., ENE/UNB
(ORIENTADOR)**



**JOSÉ ALFREDO VARGAS, Dr., ENE/UNB
(EXAMINADOR INTERNO VINCULADO AO PROGRAMA)**



**EUGÊNIO LIBÓRIO FEITOSA FORTALEZA, Dr., ENM/UNB
(EXAMINADOR INTERNO NÃO VINCULADO AO PROGRAMA)**

Brasília, 30 de julho de 2018.

FICHA CATALOGRÁFICA

DE OLIVEIRA, GUILHERME ALEKSANDERS

Projeto de controladores PID robustos para sistemas politópicos sujeitos à atraso incerto: uma abordagem LMI [Distrito Federal] 2018.

xv, 67p., 201x297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia).

Departamento de Engenharia Elétrica

1. Controle Robusto

2. Desigualdades Matriciais Lineares

3. PID

4. Parâmetros com Incerteza

I. ENE/FT/UnB

II. Título (Série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DE OLIVEIRA, G. A. (2018). Projeto de controladores PID robustos para sistemas politópicos sujeitos à atraso incerto: uma abordagem LMI. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Publicação PPGEA.DM-701/2018, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 67p.

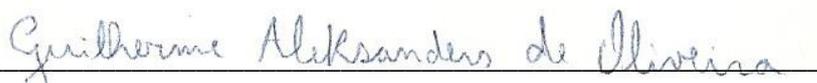
CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Guilherme Aleksanders de Oliveira

TÍTULO: Projeto de controladores PID robustos para sistemas politópicos sujeitos à atraso incerto: uma abordagem LMI.

GRAU: Mestre ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de Mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de Mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.



Guilherme Aleksanders de Oliveira

Departamento de Engenharia Elétrica (ENE) – FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Universitário Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 – Brasília – DF – Brasil

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus que permitiu tudo isso acontecer.

Aos meus pais Hamanda e Marcos e à minha irmã Laryssa que me fortaleceram e me apoiaram por todo meu percurso.

A todos os meus familiares e amigos que me apoiaram neste caminho.

Às pessoas que me ajudaram nessa jornada em uma nova cidade. Em especial à Sebastiana e à Ezenir por me acolherem em suas casas.

Ao meu orientador, pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha jornada, o meu muito obrigado.

RESUMO

PROJETO DE CONTROLADORES PID ROBUSTOS PARA SISTEMAS POLITÓPICOS SUJEITOS À ATRASO INCERTO: UMA ABORDAGEM LMI

Autor:Guilherme Aleksanders de Oliveira

Orientador: Eduardo Stockler Tognetti

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação
Brasília, Julho de 2018**

O objetivo desta pesquisa é sintetizar controladores Proporcional-Integrais (PI) e Proporcional-Integrais-Derivativos (PID) robustos para sistemas contínuos no tempo politópicos SISO (do inglês *single input, single output*) com atraso no tempo incerto e parâmetros incertos. Foi desenvolvida uma extensão de Parada et al [1] para sistemas de segunda ordem com atraso incerto utilizando sistemas politópicos, como critério de desempenho é avaliada a variação máxima do atraso para determinado controlador. Também é apresentado um procedimento de modelagem para representar funções de transferências incertas com atraso para um sistema politópico em espaço de estados tal que os ganhos dos controladores PI ou PID são obtidos como um problema de realimentação de estados. As novas condições de desigualdades matriciais lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities* ou LMIs) são propostas baseados em um funcional Lyapunov-Krasovskii e no Lema de Finsler. Como critério de performance, são avaliados o custo \mathcal{H}_∞ garantido e alocação de polos robusta para decaimento mínimo. Exemplos numéricos ilustram a efetividade da proposta abordada.

Palavras-chave: Controladores PI e PID; controle robusto; Desigualdades Matriciais Lineares; realimentação de estados; teoria de Lyapunov; parâmetros com incerteza.

ABSTRACT

ROBUST PID CONTROLLERS DESIGN FOR POLYTOPIC SYSTEMS WITH UNCERTAIN DELAY: A LMI APPROACH

Author:Guilherme Aleksanders de Oliveira

Supervisor: Eduardo Stockler Tognetti

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação
Brasília, July of 2018**

The main goal of this research is to design robust Proportional-Integral (PI) and Proportional-Integral-Derivative (PID) controllers for continuous-time polytopic single-input and single-output (SISO) systems subject to uncertain delay and uncertain parameters. It was made an extension of Parada et al [1] to second order systems with uncertain delay using polytopic systems, as performance criteria the maximum delay range of the controller is evaluated. Therefore, a modelling procedure is presented to represent uncertain affine transfer functions with time-delay to a polytopic state-space form such that the PI or PID gains are obtained as a state feedback problem. New Linear Matrix Inequalities (LMIs) delay-dependent conditions are proposed based on a Lyapunov-Krasovskii type functional and Finsler Lemma. As performance criteria, \mathcal{H}_∞ guaranteed cost and robust pole placement for minimum decay rate is considered. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: PI and PID controller; robust control; Linear Matrix Inequalities; state-feedback; Lyapunov theory; uncertain parameters.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	3
2.1	SISTEMAS LINEARES	3
2.2	INCERTEZAS PARAMÉTRICAS	4
2.3	DESIGUALDADE MATRICIAIS LINEARES	5
2.4	LEMA DE FINSLER	6
2.5	ESTABILIDADE DE UM SISTEMA	7
2.5.1	TEOREMA DE LYAPUNOV	7
2.5.2	D-ESTABILIDADE	8
2.5.3	FUNCAIS DE LYAPUNOV-KRASOVSKII	8
2.5.4	NORMA H_∞	9
2.5.5	DESIGUALDADE INTEGRAL NO PROBLEMA DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASO	9
2.6	REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	9
2.6.1	D-ESTABILIDADE PARA SISTEMAS INCERTOS	10
2.6.2	D-ESTABILIDADE PARA SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO	11
3	PROJETO DE PID ROBUSTO PARA SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM COM ATRASO INCERTO	12
3.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	12
3.2	PROJETO DO CONTROLADOR PID	15
3.3	EXEMPLO NUMÉRICO	16
4	PROJETO DE PID ROBUSTO PARA SISTEMAS COM INCERTEZAS POLITÓPICAS	20
4.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	20
4.1.1	SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM COM ATRASO	20
4.1.2	SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM COM ATRASO	22
4.1.3	CONTROLADORES PID COM FILTRO NA AÇÃO DERIVATIVA	23
4.2	RESULTADOS	25
4.3	EXEMPLOS NUMÉRICOS	28

5 CONCLUSÃO	33
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	34
APÊNDICES.....	36
A ARTIGO SUBMETIDO	I

LISTA DE TABELAS

3.1 Exemplo 1 - Máxima variação do atraso (μ_{max})	17
---	----

LISTA DE FIGURAS

3.1	Diagrama de Blocos do Sistema em Malha Fechada	14
3.2	Região de alocação dos polos do sistema.....	14
3.3	Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador projetado pelo Teorema 4, FSM14 [2] e MS16 [3] com os parâmetros $\delta = 0.85, \alpha = 0.1, \tau = 0.1$	17
3.4	Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador projetado pelo Teorema 4, FSM14 [2] e MS16 [3] com os parâmetros $\delta = 0.49, \alpha = 0.1, \tau = 0.15$	18
3.5	Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador projetado pelo Teorema 4, FSM14 [2] e MS16 [3] com os parâmetros $\delta = 0.34, \alpha = 0.1, \tau = 0.2$	18
3.6	Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador projetado pelo Teorema 4, FSM14 [2] e MS16 [3] com os parâmetros $\delta = 0.26, \alpha = 0.1, \tau = 0.25$	19
4.1	Sistema em malha fechada com (4.6) e (4.5).	22
4.2	Sistema de malha fechada com (4.9) e (4.8).	23
4.3	Resposta degrau do sistema nominal em malha fechada com o controlador PID projetado pelo Corolário 6.....	29
4.4	Resposta degrau do sistema nominal em malha fechada com o controlador PID projetado pelo Teorema 5.....	29
4.5	Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador PID projetado pelo Teorema 5 para todos os valores extremos dos parâmetros incertos.	30
4.6	Diagrama de Bode da função de transferência nominal da entrada de referência para o erro de rastreamento com o controlador PID projetado pelo Teorema 5.	30
4.7	Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador PI projetado pelo Teorema 7 para todos os valores extremos dos parâmetros incertos (apenas D-estabilidade).	31
4.8	Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador PI projetado pelo Teorema 7 para todos os valores extremos dos parâmetros incertos (D-estabilidade e minimização do custo \mathcal{H}_∞).	32

Capítulo 1

Introdução

Os mais comuns controladores utilizados na indústria são o Proporcional-Integral (PI) e Proporcional-Integral-Derivativo (PID), correspondendo a mais de 90% dos circuitos instalados [4]. Embora muitas técnicas clássicas de sintonia de PID, como as regras de Ziegler e Nichols (1942) [5] e o IMC, do inglês *internal model controller* ainda são largamente utilizadas, alguns problemas demandam o estudo de novas técnicas de sintonia que alcancem um critério de performance mais restrito para uma gama de sistemas dinâmicos com termos não lineares, incertezas e parâmetros variantes no tempo. Neste contexto, abordagens baseadas no uso de LMIs para projeto de controladores PI e PID tem recebido atenção da comunidade de controle por ser capaz de lidar com uma vasta gama de problemas em análise, performance e síntese de sistemas lineares [6, 7, 8, 9, 1].

Muitos trabalhos tem abordado o problema de projeto de controladores PID como um projeto de controladores de realimentação de saída [7, 8, 10, 4, 11, 12]. Em Gonçalves [10, 4], o projeto de controladores PID é resolvido como um problema de otimização dinâmica de realimentação e em Zhang [7, 8, 11, 12], os ganhos do PID são obtidos através de uma lei de controle de realimentação estática da saída. Alguns dos trabalhos mencionados acima podem lidar com sistemas incertos politópicos ou poliédricos [10, 4, 12].

O projeto de realimentação de saída é conhecido por ser um problema não convexo e algum conservadorismo sempre é introduzido se comparado com condições de projeto de realimentação de estados. Alguns trabalhos convertem o controlador PID para projetar um problema de realimentação de estados [6, 13, 14, 1] onde o ganho estático contém todos os parâmetros do controlador PID. Infelizmente, nas abordagens apresentadas em [13, 14, 1] apenas incertezas limitadas por norma são permitidas visto que o ganho do controlador depende dos parâmetros do sistema. Em Ge[6], modelos politópicos são permitidos, mas os resultados são muito conservativos.

O afinamento de controladores PID para sistemas de segunda ordem incerto com atraso no tempo conhecido é apresentado em [1]. O caso de atraso no tempo incerto e restrições da norma \mathcal{H}_∞ é tratada em [14] por meio do Funcional Lyapunov-Krasovskii. A minimização

das normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 para sistemas politópicos é apresentada em Gonçalves[4], entretanto os ganhos do PID são obtidos de um problema de otimização não convexo multi-objetivo.

A maioria dos processos industriais pode ser satisfatoriamente aproximada por uma função de transferência de segunda ordem com atraso no tempo. A principal contribuição deste trabalho é propor condições LMI para o projeto de controladores PI e PID robustos para sistemas incertos de primeira ordem e segunda ordem SISO (do inglês *Single Input, Single Output*) com atraso no tempo.

Os ganhos dos controladores são obtidos como um problema de realimentação de estados por meio de condições LMI que garantem a D-estabilidade para uma região aberta no semiplano esquerdo do plano complexo e a minimização do custo garantido \mathcal{H}_∞ da função de transferência da referência para o erro de rastreamento.

No capítulo 3, é realizada uma extensão do trabalho de Parada et al. [1] considerando incerteza no atraso do sistema.

No capítulo 4, o modelamento proposto para dinâmicas incertas em um modelo no espaço de estados com parâmetros pertencendo ao produto Cartesiano de Simplexes e o desenvolvimento de condições LMI permitem o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Pelo conhecimento do autor, esta é a primeira vez que um controlador PID é projetado como um problema de realimentação de estados para sistemas politópicos com funções de Lyapunov dependentes de parâmetros.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma. O capítulo 1 traz a motivação, o uso, objetivos, principal contribuição e descrição do trabalho, o capítulo 2 é composto pela fundamentação matemática contemplando todas as ferramentas utilizadas para se desenvolver os resultados obtidos nos capítulos 3 e 4. Por último, o Apêndice contém o artigo feito com os resultados deste trabalho.

Capítulo 2

Fundamentos Matemáticos

2.1 Sistemas Lineares

Um sistema dinâmico linear pode ser representado na forma de uma Equação de Transferência ou em espaço de estados. Estas representações podem ser encontradas em [15].

A representação de um sistema em espaço de estados, se dá da seguinte forma. Seja

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (2.2)$$

onde a Equação (2.1) é a equação de estado e a Equação (2.2) é a equação de saída. Se as funções vetoriais f e/ou g envolverem explicitamente a variável t , então o sistema será dito variante no tempo. Se as Equações (2.1) e (2.2) forem linearizadas em torno da trajetória de operação, resultam as seguintes equações lineares para o estado e para a saída:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.3)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.4)$$

onde $A(t)$ é dita a matriz de estado, $B(t)$ a matriz de entrada, $C(t)$ a matriz de saída e $D(t)$ a matriz de transmissão direta.

Se as funções vetoriais f e g não envolverem, explicitamente, a variável t , o sistema é dito invariante no tempo. Neste caso, as Equações (2.3) e (2.4) podem ser simplificadas para a

forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.5)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.6)$$

A Equação (2.5) é a equação de estado de sistemas lineares e invariantes no tempo. A Equação (2.6) é a equação de saída do mesmo tipo de sistema.

No que se segue, será mostrado como obter a função de transferência de um sistema monovariável a partir das equações no espaço de estados.

Considere-se o sistema cuja função de transferência é dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad (2.7)$$

A Equação (2.8) relaciona a Equação 2.7 da Função de Transferência em termos de A, B, C e D.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.8)$$

Observe-se que o segundo membro da Eq. (2.8) envolve $|sI - A|^{-1}$. Em conseqüência, $G(s)$ pode ser escrito sob a forma

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|sI - A|}$$

onde $Q(s)$ é um polinômio em s . Portanto, $|sI - A|$ é igual ao polinômio característico de $G(s)$. Em outras palavras, os autovalores de A são idênticos aos pólos de $G(s)$ para o caso em que a realização (2.5)-(2.6) é mínima.

2.2 Incertezas Paramétricas

Um sistema pode apresentar parâmetros incertos (fixos ou variantes no tempo, com taxas de variação conhecidas ou então com taxas de variação arbitrárias). Existem diversas formas de se representar incertezas paramétricas de um sistema. A representação politópica é utilizada neste trabalho.

A representação politópica pode ser obtida pela combinação convexa dos valores extremos das incertezas, ou seja, as matrizes do sistema são construídas no vértice do politopo

como mostrado em (2.9).

$$\dot{x} = A(\alpha)x; \quad A(\alpha) \in \mathcal{A} \quad (2.9)$$

em que $A(\alpha)$ é a matriz de um sistema cujo os parâmetros incertos são pertencentes a um domínio politópico, ou seja, escrita como a combinação convexa de N vértices conhecidos.

$$\mathcal{A} = \{A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \alpha \in \Lambda_N\} \quad (2.10)$$

tal que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ é um vetor de parâmetros invariantes no tempo que pertence ao simplex unitário, $\alpha \in \Lambda_N$, dado por

$$\Lambda_N = \left\{ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (2.11)$$

2.3 Desigualdade Matriciais Lineares

Desigualdade Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) são ferramentas matemáticas amplamente aplicadas em teoria de controle. Seu surgimento provavelmente ocorreu há mais de cem anos atrás, com os trabalhos de Lyapunov. Contudo, até recentemente havia poucos algoritmos para solução numérica das LMI's. Durante os últimos 20 anos, o desenvolvimento de sofisticados algoritmos numéricos tornou possível a solução de LMI's de um modo eficiente (são os chamados algoritmos de pontos interiores). Esses algoritmos exploram a convexidade dos problemas LMI para obter resultados numéricos confiáveis.

Formular um problema em termos de LMI's equivale a resolver o problema. A equação diferencial $\dot{x} = Ax$ é estável (trajetórias iniciando em qualquer ponto convergem para $x = 0$) se, e somente se, existir $P = P'$ tal que

$$P > 0; A'P + PA < 0 \quad (2.12)$$

Empilhando as variáveis de decisão (incógnitas) em um único vetor $x \in \mathbb{R}^m$, pode-se

re-escrever uma LMI na forma

$$F(x) \triangleq F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_m F_m > 0 \quad (2.13)$$

com $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ matrizes constantes simétricas. Note que $F(x) > 0$ significa que $F(x)$ deve ser definida positiva para todo x , ou seja, $y'F(x)y > 0$ para todo vetor $y \neq 0$.

A LMI $F(x) > 0$ é equivalente a um conjunto de n desigualdades polinomiais em x , obtidas impondo-se que os menores principais líderes de $F(x)$ devem ser todos positivos.

A LMI $F(x) > 0$ é uma restrição convexa, isto é, o conjunto

$$\{x : F(x) > 0\} \quad (2.14)$$

é um conjunto convexo.

Desigualdades não convexas podem ser convertidas em LMIs por meio do complemento de Schur.

$$\begin{bmatrix} Q(X) & S(X) \\ S(X)' & R(X) \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow R(X) > 0, Q(X) - S(X)R(X)^{-1}S(X)' > 0 \quad (2.15)$$

2.4 Lema de Finsler

O Lema de Finsler pode ser utilizado para expressar condições de estabilidade (como as condições de Lyapunov) em termos de desigualdades matriciais.

Este Lema introduz novas variáveis (μ, \mathcal{X}) em condições que envolvem apenas \mathcal{Q}, \mathcal{B} e \mathcal{B}^\perp possibilitando a exploração de novos graus de liberdade na análise de sistemas incertos, a eliminação de variáveis e de não linearidades, de estender condições de análise para a síntese de controladores e filtros.

Lema 1 (Lema de Finsler[16]) *Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$ e \mathcal{B}^\perp uma base para o espaço nulo de \mathcal{B} (isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$)*

Então, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $w' \mathcal{Q} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B} w = 0$
- (ii) $\mathcal{B}^{\perp'} \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp < 0$
- (iii) $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}' \mathcal{B} < 0$
- (iv) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0$

Prova:

[(i) \Rightarrow (ii)] *Todo w tal que $\mathcal{B}w = 0$ pode ser escrito como $w = \mathcal{B} \perp y$. Portanto,*

$$w' \mathcal{Q} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B}w = 0 \Rightarrow y' \mathcal{B}' \mathcal{Q} \mathcal{B} \perp y < 0, \forall y \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}' \mathcal{Q} \mathcal{B} \perp < 0$$

[(ii) \Rightarrow (i)] $\mathcal{B}' \mathcal{Q} \mathcal{B} \perp < 0 \Rightarrow y' \mathcal{B}' \mathcal{Q} \mathcal{B} \perp y < 0, \forall y \neq 0 \Rightarrow w' \mathcal{Q} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B}w = 0$

[(iii) \Rightarrow (ii)], [(iv) \Rightarrow (ii)] *Multiplicando à esquerda por $\mathcal{B}' \perp$ e à direita por $\mathcal{B} \perp$, recupera-se $\mathcal{B}' \mathcal{Q} \mathcal{B} \perp < 0$*

[(ii) \Rightarrow (iii)] *A matriz \mathcal{B} pode ser escrita como $\mathcal{B} = \mathcal{B}_L \mathcal{B}_R$ com $\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_R$ de rank completo. Então, defina $\mathcal{D} = \mathcal{B}'_R (\mathcal{B}_R \mathcal{B}'_R)^{-1} (\mathcal{B}'_L \mathcal{B}_L)^{-1/2}$ e note que*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}' \\ \mathcal{B}' \perp \end{bmatrix} (\mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}' \mathcal{B}) \begin{bmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{B} \perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}' \mathcal{Q} \mathcal{D} - \mu I & \mathcal{D}' \mathcal{Q} \mathcal{B} \perp \\ \mathcal{B}' \perp \mathcal{Q} \mathcal{D} & \mathcal{B}' \perp \mathcal{Q} \mathcal{B} \perp \end{bmatrix}$$

Como por hipótese (ii) é verificado $\mathcal{X} = -\frac{\mu}{2} \mathcal{B}'$ satisfaz a condição (iv).

□

2.5 Estabilidade de um Sistema

O sistema linear contínuo no tempo descrito por $\dot{x} = Ax$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é assintoticamente estável se qualquer uma das condições abaixo for verificada:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$, para condição inicial $x(0)$ arbitrária
- $\max_i \operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0, i = 1, \dots, n$

2.5.1 Teorema de Lyapunov

A estabilidade de $\dot{x} = Ax$ (ou simplesmente a estabilidade de A) pode ser também investigada por meio de uma função de Lyapunov $v(x)$. Para que o sistema seja assintoticamente estável, duas condições devem ser verificadas:

- $v(x) > 0 \forall x \neq 0$
- $\dot{v}(x) < 0 \forall x \neq 0$ solução de $\dot{x} = Ax$

Escolhendo como candidata à função de Lyapunov uma função quadrática $v(x) = x' P x$, com $P = P'$ a determinar, tem-se

- $v(x) = x' P x > 0 \forall x \neq 0 \Leftrightarrow P > 0$
- $\dot{v}(x) = \dot{x}' P x + x' P \dot{x} = x' (A' P + P A) x < 0 \Leftrightarrow A' P + P A < 0$

Portanto, para determinar se A é estável, basta procurar uma solução factível $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para o problema (LMI's):

$$P > 0; A'P + PA > 0 \quad (2.16)$$

Teorema 2 *Os autovalores de A têm parte real negativa se e somente se para qualquer matriz simétrica definida positiva Q a equação de Lyapunov*

$$A'P + PA = -Q \quad (2.17)$$

tiver uma única solução $P = P' > 0$.

2.5.2 D-estabilidade

Outra forma de se analisar a estabilidade de um sistema é através da D-estabilidade. Uma região \mathcal{D} no plano complexo pode ser descrita como

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : R_{11} + R_{12}z + R'_{12}z^* + R_{22}zz^* < 0\} \quad (2.18)$$

com $R_{11} = R'_{11} \in \mathbb{R}^{d \times d}, R_{22} = R'_{22} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ submatrizes de $R \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$ dada por

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R'_{12} & R_{22} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

sendo que d é a ordem da região. Assumindo-se $R_{22} \geq 0$, tem-se que \mathcal{D} representa regiões convexas simétricas em relação ao eixo real.

$$\lambda_i(A) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists P = P' > 0 : R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA) + R'_{12} \otimes (A'P) + R_{22} \otimes A'PA < 0 \quad (2.20)$$

2.5.3 Funcionais de Lyapunov-Krasovskii

Os funcionais do tipo Lyapunov-Krasovskii são utilizados na literatura de controle robusto como funções de Lyapunov para sistemas que contém atraso no tempo.

O funcional utilizado no artigo é descrito nas Equações (2.21) e (2.22)

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t) + \int_{t-\tau}^t x(\Theta)'Qx(\Theta)d\Theta + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\Theta)'P\dot{x}(\Theta)d\Theta d\beta \quad (2.21)$$

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + x(t)'x(t) - x_d'Qx_d + \tau\dot{x}(t)'P\dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\Theta)'P\dot{x}(\Theta)d\Theta \quad (2.22)$$

onde $x_d = x(t - \tau)$.

2.5.4 Norma H_∞

A norma H_∞ é definida como a norma da magnitude máxima de $H(jw)$, ou seja, a máxima resposta de pico a uma entrada senoidal de amplitude unitária.

Para um sistema SISO a norma H_∞ é de acordo com a Equação (2.23)

$$\|H\|_\infty \triangleq \|H\|_{rms-gn} = \sup_{\mathbb{R}\{s\}>0} |H(s)| \quad (2.23)$$

Para um sistema MIMO a norma H_∞ é de acordo com a Equação (2.24)

$$\|H\|_\infty \triangleq \|H\|_{rms-gn} = \sup_{\mathbb{R}\{s\}>0} \sigma_{max}(H(s)) = \sup_{w>0} \sigma_{max}(H(jw)) \quad (2.24)$$

2.5.5 Desigualdade Integral no Problema de Estabilidade de Sistemas com Atraso

Lema 3 [17] Para qualquer matriz constante $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $M = M' > 0$, um escalar $\rho > 0$, uma função vetorial $\omega : [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que as integrações a seguir são bem definidas, então

$$\rho \int_0^\rho \omega'(\beta)M\omega(\beta)d\beta \geq \left(\int_0^\rho \omega(\beta)d\beta \right)' M \left(\int_0^\rho \omega(\beta)d\beta \right) \quad (2.25)$$

2.6 Realimentação de Estados

Considere o sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m \quad (2.26)$$

Uma lei de controle de realimentação de estados é dada por $u(t) = Kx(t)$ resultando no

sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (2.27)$$

A dinâmica em malha fechada $(A+BK)$ é estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov $P = P' > 0$ tal que

$$(A + BK)'P + P(A + BK) < 0 \quad (2.28)$$

Por transformação

$$P^{-1}((A+BK)'P + P(A+BK))P^{-1} = P^{-1}A' + AP^{-1} + P^{-1}K'B' + BKP^{-1} < 0 \quad (2.29)$$

Fazendo uma mudança de variáveis $W = P^{-1}, Z = KW$

$$AW + WA' + BZ + Z'B' < 0 \quad (2.30)$$

Portanto, existe K tal que $(A+BK)$ é estável se e somente se existirem $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que

$$W > 0; AW + WA' + BZ + Z'B' < 0 \quad (2.31)$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por $K = ZW^{-1}$

2.6.1 D-estabilidade para sistemas incertos

O sistema linear invariante no tempo $\dot{x} = Ax$ é D-estável se e somente se todos os autovalores de A pertencem a sub-região $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ do plano complexo.

Uma sub-região \mathcal{D} do plano complexo é denominada uma região LMI se existem matrizes $L = L'$ e M tais que

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + s^*M' < 0\} \quad (2.32)$$

em que $s = \sigma + j\omega$

O sistema $\dot{x} = Ax$ é D-estável se e somente se existe uma matriz simétrica definida positiva P tal que

$$L \otimes P + M \otimes (PA) + M' \otimes (A'P) < 0 \quad (2.33)$$

Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \dots \cap \mathcal{D}_l$ a intersecção de regiões LMIs dadas, o sistema $\dot{x} = Ax$ é D-estável se e somente se existe uma matriz simétrica definida positiva P tal que $L_i \otimes P + M_i \otimes (PA) + M_i' \otimes (A'P) < 0, i = 1, \dots, l$ em que $\mathcal{D}_i = \{s \in \mathbb{C} : L_i + sM_i + s^*M_i' < 0\}, i = 1, \dots, l$.

Seja o sistema politópico $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t)$ em que $(A, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(A_i, B_i), \alpha \in \Lambda_N$.

Para uma dada região LMI $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^-$, se existir uma matriz simétrica definida positiva $W = W' > 0$ e uma matriz Z tais que as seguintes LMIs são factíveis

$$L \otimes W + M \otimes (A_i W + B_i Z) + M' \otimes (W A_i' + Z' B_i') < 0, i = 1, \dots, N \quad (2.34)$$

então o sistema politópico com o ganho de realimentação de estados $K = ZW^{-1}$ é \mathcal{D} -estável.

2.6.2 D-estabilidade para sistemas com atraso no tempo

A garantia da alocação de polo na região desejada pode ser obtida como mostrado em Mao e Chu [18], isto é, seja a equação característica do sistema de malha fechada

$$F(s) = \det(sI - A(\alpha) - B(\alpha)Ke^{-s\tau(\alpha)}) \quad (2.35)$$

e

$$\begin{aligned} H(\epsilon) &= F(\epsilon - \delta) = \det(\epsilon I - \delta I - A(\alpha) - B(\alpha)Ke^{-(\epsilon - \delta)\tau(\alpha)}) \\ &= \det(\epsilon I - A_\delta(\alpha) - B_\delta(\alpha)Ke^{\epsilon\tau(\alpha)}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde $A_\delta(\alpha) = A(\alpha) + \delta I$ e $B_\delta(\alpha) = B(\alpha)e^{\delta\tau(\alpha)}$. Portanto, se as raízes de $H(\epsilon) = 0$ satisfazem $\Re(\epsilon) < 0$, então tem-se $\Re(s) < -\delta$ para raízes de $F(s)$.

Capítulo 3

Projeto de PID robusto para Sistemas de Segunda Ordem com Atraso Incerto

Neste capítulo pretende-se estender o trabalho de Parada et al. [1] considerando incerteza no atraso do sistema.

3.1 Definição do Problema

Considere o sistema de segunda ordem com atraso no tempo incerto com a seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} e^{-\tau(\alpha)s} \quad (3.1)$$

em que a_0 , a_1 , b_0 e b_1 são parâmetros do sistema e $\tau(\alpha)$ representa o atraso incerto do sistema pertencente a um domínio politópico, ou seja, escrita como a combinação convexa de 2 vértices conhecidos.

$$\tau(\alpha) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \tau_i \quad (3.2)$$

tal que $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, com $\tau_1 = \tau_{min}$ e $\tau_2 = \tau_{max}$, e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ é um vetor de parâmetros invariantes no tempo que pertence ao simplex unitário, $\alpha \in \Lambda_2$, definido em (2.11).

O sistema (3.1) pode ser reescrito na seguinte representação no espaço de estados aumentado da Equação (3.3).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(\alpha)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

em que $y(t)$ é a saída, o vetor de estados $x(t)$ é dado por $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \int y(t)]'$, e as matrizes A, B e C são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & a_1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A equivalência das expressões podem ser provadas obtendo a transformada de Laplace da Equação (3.1) com as matrizes definidas acima na Equação (3.4).

O controlador que se deseja projetar é da forma

$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (3.5)$$

e a lei de controle dada por

$$u(t) = \begin{bmatrix} k_p & k_i & k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + k_d b_1 \dot{x}_2(t) \quad (3.6)$$

ou

$$u(t) = KFx(t) \quad (3.7)$$

com

$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_p}{a-k_d b_1} & \frac{k_d}{a-k_d b_1} & \frac{k_i}{a-k_d b_1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$F = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ -b_1 a_0 & b_0 - b_1 a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

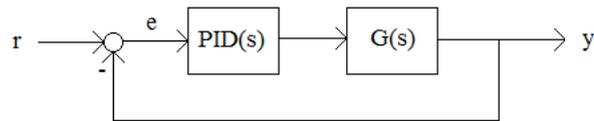


Figura 3.1: Diagrama de Blocos do Sistema em Malha Fechada

A região na qual se deseja alocar os polos do sistema em malha fechada é uma região aberta à esquerda de $-\delta$, com $\delta > 0$, isto é, a região que contém os números complexos $s = x + jy$ tais que $x < -\delta$, como mostrado na Figura 3.2. Observe que uma região aberta para a localização dos polos é necessária visto que o polinômio característico do sistema em malha fechada terá o termo devido ao atraso resultando em um número infinito de polos.

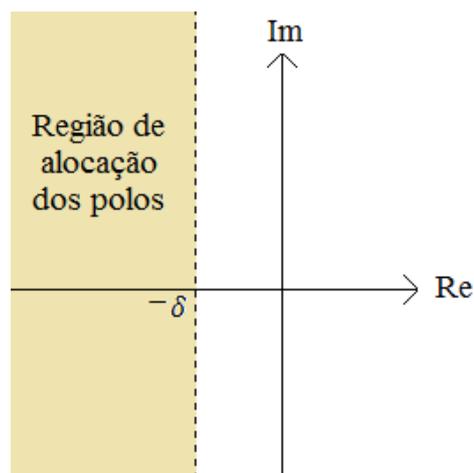


Figura 3.2: Região de alocação dos polos do sistema

3.2 Projeto do Controlador PID

Teorema 4 Se existirem matrizes simétricas positivas definidas $R, M \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ e $L \in \mathfrak{R}^{1 \times 3}$, tal que, para um dado $\tau(\alpha) > 0$ e um dado $\delta > 0$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \tau(\alpha)^2[\theta(\gamma)B]L + \tau(\alpha)R & \tau(\alpha)^2R(A + \delta I)' & \tau(\alpha)R'C' \\ * & -\tau(\alpha)^2M - \tau(\alpha)R & \tau(\alpha)^2L'[\theta(\gamma)B]' & 0 \\ * & * & -\tau(\alpha)R & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{11} = \tau(\alpha)^2R(A + \delta I)' + (A + \delta I)R + M - \tau R$$

$$e \theta(\gamma) = \gamma_1 e^{\delta \tau_1} + \gamma_2 e^{\delta \tau_2}, \gamma \in \Lambda_2$$

então o sistema de malha fechada (3.3) é assintoticamente estável e possui os polos com parte real alocados na região à esquerda de $-\delta$. Os parâmetros do PID são dados por:

$$k_p = \frac{k_1}{1 + k_2 b_1}, k_i = \frac{k_2}{1 + k_2 b_1}, k_d = \frac{k_3}{1 + k_2 b_1} \quad (3.11)$$

$$\text{em que } K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = L(FR)^{-1}$$

Prova Considere o funcional Lyapunov-Krasovskii

$$v_{dd}(x(t)) = x(t)'Px(t) + \int_{t-\tau}^t x(\theta)'Qx(\theta)d\theta + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\theta)'P\dot{x}(\theta)d\theta d\beta \quad (3.12)$$

com

$$\dot{v}_{dd}(x(t)) = \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + x(t)'Qx(t) - x_d'Qx_d + \tau_\alpha \dot{x}(t)'P\dot{x}(t) + \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)'P\dot{x}(\theta)d\theta \quad (3.13)$$

onde $x_d = x(t - \tau)$

Usando o Lema 3, o termo integral do lado direito da expressão acima pode ser substituído por um limitante superior

$$\frac{1}{\tau} \dot{z}(t)'P\dot{z}(t), \dot{z}(t) = \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)d\theta = x(t) - x_d(t) \quad (3.14)$$

portanto

$$\dot{v}_{dd}(x(t)) \leq \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + x(t)'Qx(t) - x_d'Qx_d + \tau_\alpha \dot{x}(t)'P\dot{x}(t) - \frac{1}{\tau} \dot{z}(t)'P\dot{z}(t) \quad (3.15)$$

Utilizando o *Bounded Real Lemma* [19] e o funcional $v_{dd}(\cdot)$, definido acima, e impondo $\dot{v}_{dd} + y'y - \lambda^2 w'w < 0$ chega-se em (3.10).

□

A principal desvantagem desta técnica de projeto de controladores PID é a dependência dos ganhos do controlador em relação aos parâmetros do sistema, como pode-se observar em (3.8), impedindo o projeto do controlador para o caso de incertezas paramétricas expressas na forma politópica. Uma alternativa explorada em Parada et al. [1] é o uso de incertezas estruturadas, uma forma mais conservadora que a representação politópica. Para superar este problema, uma nova técnica de modelagem e de projeto foi proposta e será apresentada no próximo capítulo.

3.3 Exemplo Numérico

Dado o sistema (3.3) e $\tau(\alpha) = \tau_0 \pm \mu, \mu \in [0, \mu_{max}]$, $a_0 = 1, a_1 = 0.4, b_0 = 1, b_1 = 0$, tal que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0.4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Foram testadas quatro situações em que o atraso varia em torno de um valor fixo τ_0 variando a margem μ até chegar ao μ_{max} de cada algoritmo, sendo Teorema 4 o algoritmo desenvolvido neste trabalho. Os gráficos referentes a cada μ_{max} se encontram em sequência e a comparação dos valores de μ_{max} em função de τ_0 para cada método é mostrada na Tabela 3.1.

Método	τ_0	μ_{max}
Teorema 4	0.1	0.0605
	0.15	0.1295
	0.2	0.1832
	0.25	0.2130
FSM14[2]	0.1	0.0509
	0.15	0.076
	0.2	0.1026
	0.25	0.1368
MS16[3]	0.1	0.0864
	0.15	0.1360
	0.2	0.1888
	0.25	0.2523

Tabela 3.1: Exemplo 1 - Máxima variação do atraso (μ_{max})

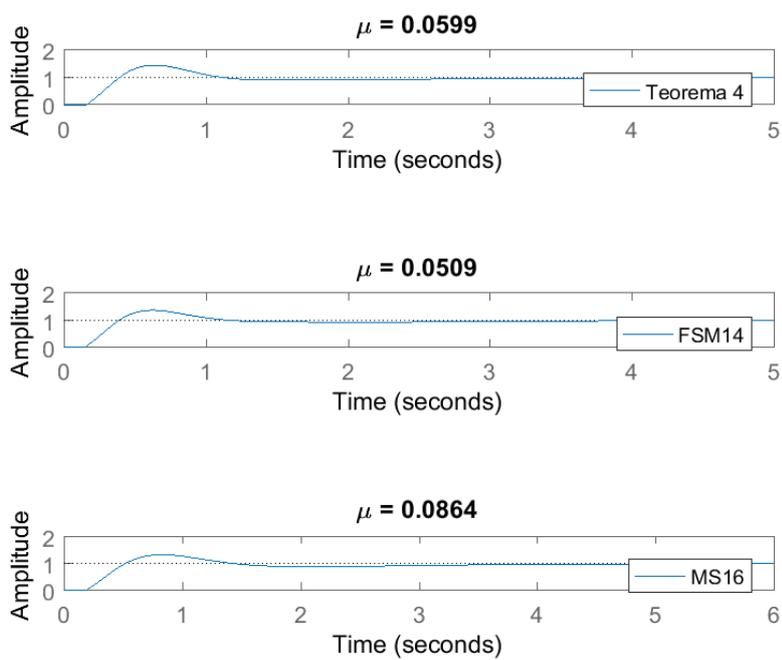


Figura 3.3: Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador projetado pelo Teorema 4, FSM14 [2] e MS16 [3] com os parâmetros $\delta = 0.85, \alpha = 0.1, \tau = 0.1$

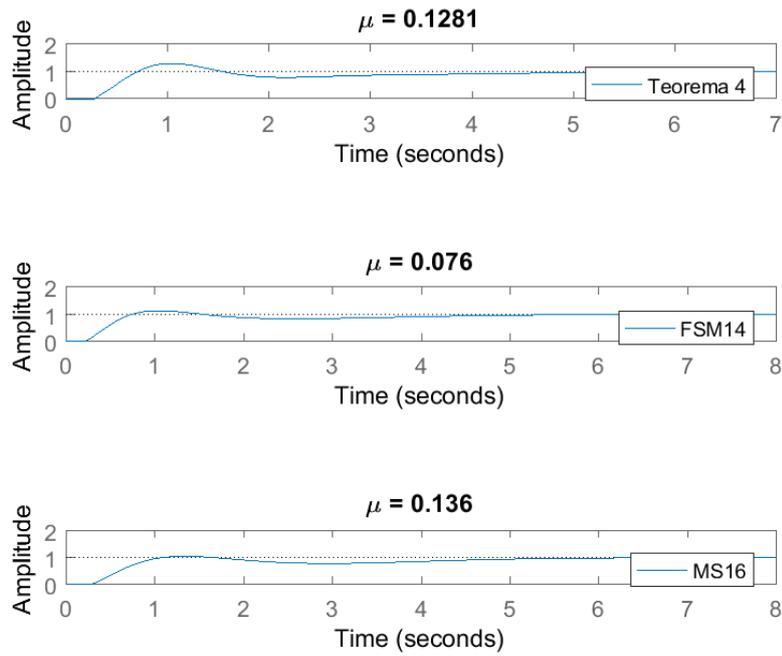


Figura 3.4: Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador projetado pelo Teorema 4, FSM14 [2] e MS16 [3] com os parâmetros $\delta = 0.49, \alpha = 0.1, \tau = 0.15$

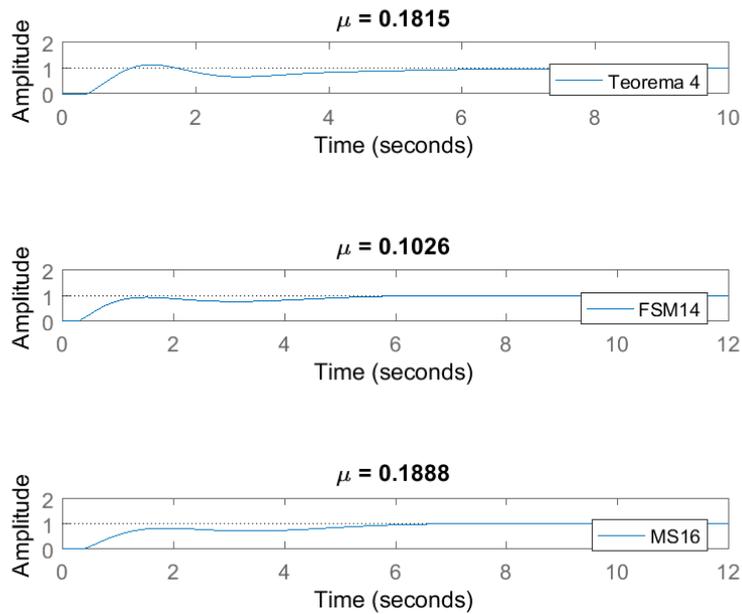


Figura 3.5: Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador projetado pelo Teorema 4, FSM14 [2] e MS16 [3] com os parâmetros $\delta = 0.34, \alpha = 0.1, \tau = 0.2$

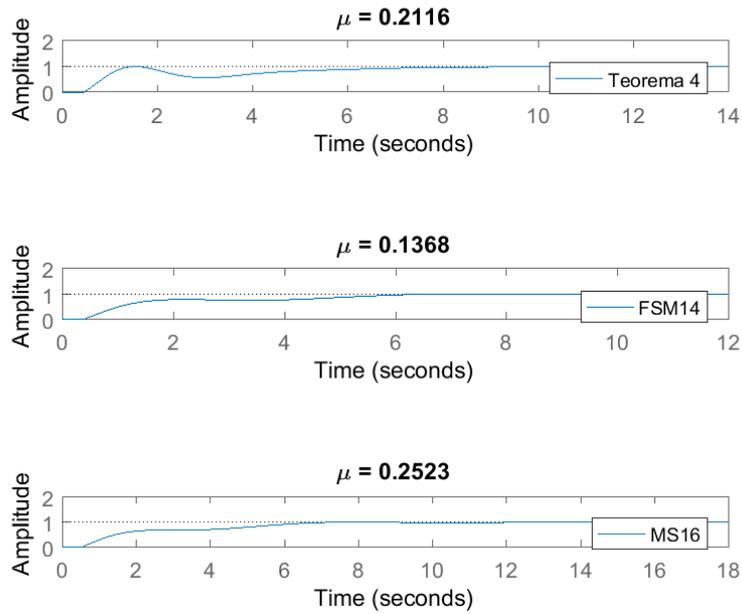


Figura 3.6: Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador projetado pelo Teorema 4, FSM14 [2] e MS16 [3] com os parâmetros $\delta = 0.26$, $\alpha = 0.1$, $\tau = 0.25$

Analisando as Figuras 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 observa-se que o Teorema 4 possui maior sobressinal e tempo de acomodação que as outras duas técnicas comparadas, obtendo um resultado factível para uma faixa de atrasos maior que o algoritmo FSM14 [2] e uma faixa menor se comparado ao algoritmo MS16 [3]. Uma explicação para tal fato poderia ser devido ao algoritmo MS16 [3] utilizar um funcional Lyapunov-Krasovskii mais expandido, com cinco somatórios ao invés dos três utilizados para o desenvolvimento do Teorema 4.

Capítulo 4

Projeto de PID robusto para Sistemas com Incertezas Politópicas

Neste capítulo é apresentado um procedimento de modelagem para representar funções de transferências incertas com atraso para um sistema politópico em espaço de estados tal que os ganhos dos controladores PI ou PID são obtidos como um problema de realimentação de estados. As novas condições LMIs são propostas baseados em um funcional Lyapunov-Krasovskii e no Lema de Finsler. Como critério de performance, são avaliados o custo \mathcal{H}_∞ garantido e alocação de polos robusta para decaimento mínimo. Exemplos numéricos ilustram a efetividade da proposta abordada. A principal contribuição do procedimento de modelagem e projeto propostos é a não dependência dos parâmetros do sistema na recuperação do controlador permitindo tratar incertezas politópicas no sistema.

4.1 Definição do Problema

Considere o seguinte problema:

Problema 1 *Projetar controladores PI e PID robustos para sistemas politópicos invariantes no tempo com atraso incerto dado como uma função de transferência de primeira e segunda ordem ou como uma realização politópica no espaço de estados de ordem n .*

4.1.1 Sistemas de Primeira Ordem com Atraso

Considere o sistema de primeira ordem com atraso SISO

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0(\theta)}{s + a_0(\theta)} e^{-\tau(\theta)s} \quad (4.1)$$

onde $U(s)$ é o sinal de entrada, $Y(s)$ a saída controlada, $a_0(\theta)$, $b_0(\theta)$ são os parâmetros dos sistemas e $\tau(\theta)$ é o atraso. Todos os parâmetros são afins e dependentes de parâmetros, i.e.,

$$a_0(\theta) = a_0 + \theta_1, \quad b_0(\theta) = b_0 + \theta_2, \quad \tau(\theta) = \tau + \theta_3$$

onde a_0 , b_0 e τ são valores conhecidos e os parâmetros θ são limitados e invariantes no tempo,

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i], \quad \underline{\theta}_i < \bar{\theta}_i, \quad \underline{\theta}_3 > -\tau, \quad i = 1, \dots, M, \quad (4.2)$$

com $M = 3$.

Seja o simplex unitário (de dimensão N) dado por

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\} \quad (4.3)$$

Definição 1 (Multi-Simplex) Um multi-simplex Ω_N , $N = (N_1, \dots, N_m)$ é definido como o produto Cartesiano de m simplexes com dimensões N_i , $i = 1, \dots, m$, i.e., $\Omega_N = \Lambda_{N_1} \times \dots \times \Lambda_{N_m}$. Um dado elemento α de Ω_N é decomposto como $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ e cada α_i é decomposto na forma $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iN_i})$, $i = 1, \dots, m$.

Por exemplo, seja $\Omega_{(2,2,2)} = \Lambda_2 \times \Lambda_2 \times \Lambda_2 \triangleq \Omega_{2\mathbb{I}_3}$, onde

$$\mathbb{I}_q \triangleq \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{q\text{-times}}, \quad q \in \mathbb{N}^+, \quad \vartheta \mathbb{I}_q \triangleq \underbrace{(\vartheta, \vartheta, \dots, \vartheta)}_{q\text{-times}}$$

Então, um elemento genérico de $\Omega_{2\mathbb{I}_3}$ pode ser escrito como $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ com $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}) \in \Lambda_2$, $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}) \in \Lambda_2$ e $\alpha_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}) \in \Lambda_2$.

O objetivo das seguintes manipulações é construir um novo espaço no domínio dos parâmetros convexos onde o sistema com parâmetros afim dependentes (4.1) é representado.

Para explorar os benefícios e vantagens da representação multi-simplex, as seguintes mudanças de variáveis são aplicadas

$$\alpha_{i1} = \frac{\theta_i - \underline{\theta}_i}{\Delta\theta_i}, \quad \alpha_{i2} = 1 - \alpha_{i1}, \quad \alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) \in \Lambda_2, \quad i = 1, \dots, M, \quad (4.4)$$

com $\Delta\theta_i = \bar{\theta}_i - \underline{\theta}_i$, levando à $\theta_i = \alpha_{i1}\Delta\theta_i + \underline{\theta}_i$, $i = 1, \dots, M$, $M = 3$. Note que, com esta escolha particular, os novos parâmetros $\alpha = (\alpha_i, \dots, \alpha_M)$ pertencem ao multi-simplex $\Omega_{2\mathbb{I}_3}$. O sistema (4.1) pode ser escrito no espaço dos parâmetros α como

$$G(s) = \frac{b_0(\alpha)}{s + a_0(\alpha)} e^{-\tau(\alpha)s}. \quad (4.5)$$

O objetivo é projetar o controlador PI robusto na forma paralela

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (4.6)$$

tal que o sistema em malha fechada, dado pela Figura 4.1, é assintoticamente estável.

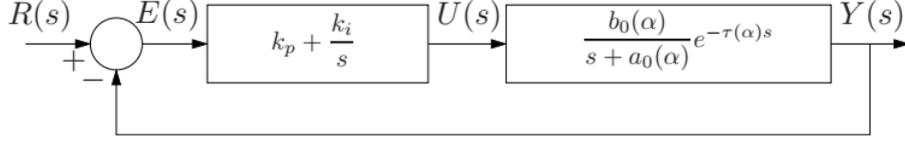


Figura 4.1: Sistema em malha fechada com (4.6) e (4.5).

Observe que o sistema de malha fechada na Figura 4.1 é

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t)a_0(\alpha) + b_0(\alpha)k_p \dot{y}(t - \tau(\alpha)) + b_0(\alpha)k_i y(t - \tau(\alpha)) = b_0(\alpha)k_p \dot{r}(t - \tau(\alpha)) + b_0(\alpha)k_i r(t - \tau(\alpha)).$$

Escolhendo, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = -b_0(\alpha)k_p x_2(t - \tau(\alpha)) - a_0(\alpha)x_2(t) - b_0(\alpha)k_i x_1(t - \tau(\alpha)) + r(t - \tau(\alpha))$ e $y(t) = b_0(\alpha)k_p x_2(t) + b_0(\alpha)k_i x_1(t)$, o sistema de malha fechada com (4.6) e (4.5) é

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)v(t - \tau(\alpha)) + B_w r(t - \tau(\alpha)) \\ v(t) &= Kx(t) \\ e(t) &= -C(\alpha)v(t) + d_w r(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $e(t) = r(t) - y(t)$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_0(\alpha) \end{bmatrix}, & B(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -b_0(\alpha) \end{bmatrix}, & B_w &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ K &= \begin{bmatrix} k_i & k_p \end{bmatrix}, & C &= b_0(\alpha), & d_w &= 1. \end{aligned}$$

Observe que o problema de projeto do controlador PI (4.6) foi reformulado como um problema de realimentação de estados $v(t) = Kx(t)$ dado em (4.7).

4.1.2 Sistemas de Segunda Ordem com Atraso

Considere um sistema SISO afim dependente de parâmetros de segunda ordem expresso no domínio α

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0(\theta)}{s^2 + a_1(\theta)s + a_0(\theta)} e^{-\tau(\theta)s}. \quad (4.8)$$

com parâmetros

$$a_0(\theta) = a_0 + \theta_1, \quad b_0(\theta) = b_0 + \theta_2, \quad \tau(\theta) = \tau + \theta_3, \quad a_1(\theta) = a_1 + \theta_4$$

em que a_0 , a_1 , b_0 e τ são conhecidos e o parâmetro θ é limitado e invariante no tempo como em (4.2), com $M = 4$.

Seja o controlador PID

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s. \quad (4.9)$$

Seguindo os mesmos passos, o sistema de malha fechada é mostrado na Figura 4.2.

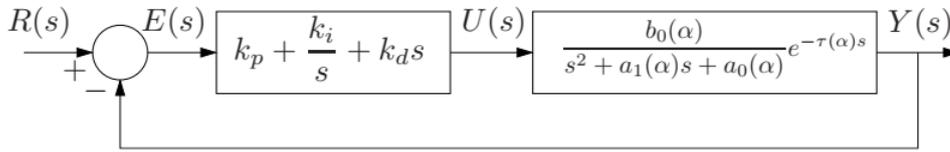


Figura 4.2: Sistema de malha fechada com (4.9) e (4.8).

O sistema de malha fechada com (4.9) e (4.8) representada no multi-simplex α pode ser reescrita como (4.7) onde

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_0(\alpha) & -a_1(\alpha) \end{bmatrix}, \quad B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_0(\alpha) \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p & k_d \end{bmatrix}, \quad C = b_0(\alpha)$$

Como pode ser visto, o design dos ganhos do PID pode ser descrito como um problema de realimentação de estados com lei de controle dada em (4.7).

4.1.3 Controladores PID com filtro na ação derivativa

Considere o caso de projetar um controlador PID para o sistema (4.5). Neste caso, o sistema de malha fechada é adequado e há uma dependência não-linear nos ganhos do PID da matriz de transmissão direta. Para contornar este problema, o seguinte controlador PID com filtro na ação derivativa é considerado

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d \frac{Ns}{s + N} \quad (4.10)$$

que representa uma derivada ideal filtrada por primeira ordem mais constante de tempo $1/N$ [20]. Em aplicações industriais, o uso de controladores PID filtrados é padrão em muitos fabricantes.

O sistema de malha fechada (4.7) tem matrizes dadas por

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_0(\alpha)N & -(a_0(\alpha) + N) \end{bmatrix}, \quad B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -b_0(\alpha)N & -b_0(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$C(\alpha) = b_0(\alpha) \begin{bmatrix} 1 & N \end{bmatrix}$$

e um ganho de realimentação de estados

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p & k_d \\ 0 & k_i & k_p \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

O controlador PID filtrado (4.10) pode também ser usado para sistemas de segunda ordem com zero incerto e atraso

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1(\alpha)s + b_0(\alpha)}{s^2 + a_1(\alpha)s + a_0(\alpha)} e^{-\theta(\alpha)s} \quad (4.12)$$

As matrizes para o sistema em espaço de estados (4.7) e o ganho de realimentação de estados são dados, respectivamente, por

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_0(\alpha)N & -(a_0(\alpha) + a_1(\alpha)N) & -(a_1(\alpha) + N) \end{bmatrix},$$

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -b_0(\alpha)N & -b_0(\alpha) - b_1(\alpha)N & -b_1(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$C(\alpha) = \begin{bmatrix} b_0(\alpha)N & b_0(\alpha) + b_1(\alpha)N & b_1(\alpha) \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$$

e

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p & k_d & -N^{-1}k_d \\ 0 & k_i & k_p & k_d \\ 0 & 0 & k_i & k_p \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Observe que o parâmetro N deve ser informado *a priori* e restrições particulares nas variáveis das matrizes que sintetizam K são necessárias. Para isto utilizamos o Lema 1.

4.2 Resultados

O seguinte Teorema provê condições LMI para a estabilidade assintótica de sistemas de malha fechada.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)Kx(t - \tau(\alpha)) + B_w r(t - \tau(\alpha)) \\ e(t) &= -C(\alpha)Kx(t) + d_w r(t).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Como um critério de performance a condição proposta irá minimizar o custo \mathcal{H}_∞ da função de transferência de $r(t)$ para $e(t)$ em (4.14).

Para especificações de decaimento, os polos do sistema de malha fechada são colocados na região $\Re(s) < -\delta$ (\mathcal{D} -estabilidade), como mostrado na Seção 2.6.2.

Os ganhos do controlador são obtidos pela matriz K . Assim, as seguintes condições recuperam os ganhos do PI (4.6) para o sistema (4.1), ganhos do PID (4.9) para o sistema (4.8) e ganhos do PID filtrado (4.10) para os sistemas (4.1) e (4.12).

Teorema 5 *Se existem matrizes simétricas positivas definidas $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\mu > 0$, e um dado escalar $\delta > 0$ tal que*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \tau(\alpha)^2 B_\delta(\alpha)Z + \tau(\alpha)W & \tau(\alpha)^2 W A_\delta(\alpha)' & -\tau(\alpha)Z' C' & \tau(\alpha)B_w \\ \star & -\tau(\alpha)^2 X(\alpha) - \tau(\alpha)W & \tau(\alpha)^2 Z' B_\delta(\alpha)' & 0 & 0 \\ \star & \star & -\tau(\alpha)W & 0 & \tau(\alpha)B_w \\ \star & \star & \star & -I & d_w \\ \star & \star & \star & \star & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.15}$$

$\Gamma_{11} = \tau(\alpha)^2 W(A_\delta(\alpha)' + A_\delta(\alpha)R + X(\alpha) - \tau(\alpha)W A_\delta(\alpha) = A(\alpha) + \delta I$ e $B_\delta(\alpha) = e^{\delta\tau(\alpha)}B(\alpha)$ então o sistema de malha fechada (4.14) é assintoticamente estável com $K = ZW^{-1}$ com o custo garantido de \mathcal{H}_∞ dado por $\mu^{1/2}$ e a taxa de decaimento mínima δ .

Prova A prova para as linhas seguintes é apresentada em [13].

Os seguintes resultados consideram apenas \mathcal{D} -estabilidade.

Corolário 6 *Se existem matrizes simétricas positivas definidas $W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ e um dado escalar $\delta > 0$ tal qual*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \tau(\alpha)^2 B_\delta(\alpha)Z + \tau(\alpha)W & \tau(\alpha)^2 W A_\delta(\alpha)' \\ \star & -\tau(\alpha)^2 X(\alpha) - \tau(\alpha)W & \tau(\alpha)^2 Z' B_\delta(\alpha)' \\ \star & \star & -\tau(\alpha)W \end{bmatrix} < 0 \tag{4.16}$$

$\Gamma_{11} = \tau(\alpha)^2 W(A(\alpha) + \delta I)' + (A(\alpha) + \delta I)R + X(\alpha) - \tau(\alpha)W$ então o sistema de malha fechada (4.14) é assintoticamente estável com $K = ZW^{-1}$ e taxa de decaimento mínima δ .

Observação 1 Para impor as restrições (4.11) e (4.13), algumas restrições devem ser impostas nas variáveis que sintetizam o ganho de realimentação de estados. No Teorema 5 e 6, $W = wI$, $w \in \mathbb{R}$, $w > 0$, e Z tem a mesma estrutura que (4.11) e (4.13), que é,

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix} \text{ and } Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & -N^{-1}z_3 \\ 0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix},$$

respectivamente, com $k_i = z_1 w^{-1}$, $k_p = z_2 w^{-1}$, $k_d = z_3 w^{-1}$.

Observe que, neste caso, a matriz de Lyapunov é muito conservadora. O Teorema 7 é uma contribuição importante pois as restrições são imposta nas variáveis com folga e a matriz de Lyapunov matrix pode ser dependente de parâmetros e dada por $W(\alpha)$.

Teorema 7 Se existem matrizes simétricas positivas definidas $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, escalares λ_1, λ_2 e $\mu > 0$, e um dado escalar $\delta > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \tau(\alpha)(W(\alpha) - A_\delta(\alpha)Q + Q') & \tau(\alpha)(Q' - B_\delta(\alpha)Z) \\ \star & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \star & \star & \Gamma_{33} \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ & 0 & -B_w \\ & 0 & -\tau(\alpha)B_w \\ & \lambda_1 Z' C(\alpha)' & -\tau(\alpha)(B_w + \lambda_2 Z' C(\alpha)') \\ & 2\lambda_1 I + I & -\lambda_1 d_w + \lambda_2 I \\ & \star & -\mu I - 2\lambda_2 d_w I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.17)$$

com

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \tau(\alpha)W(\alpha) + Q(\alpha) + Q(\alpha)' \\ \Gamma_{22} &= -\tau(\alpha)^2(A_\delta(\alpha)Q + Q'A_\delta(\alpha)' - X(\alpha)) - \tau(\alpha)W(\alpha) \\ \Gamma_{23} &= \tau(\alpha)W(\alpha) - \tau(\alpha)^2(B_\delta(\alpha)Z + Q'A_\delta(\alpha)') \\ \Gamma_{33} &= -\tau(\alpha)W(\alpha) - \tau(\alpha)^2(B_\delta(\alpha)Z + Z'B_\delta(\alpha)' + X(\alpha)) \end{aligned}$$

então o sistema de malha fechada (4.14) é assintoticamente estável com $K = ZQ^{-1}$ e o custo garantido do \mathcal{H}_∞ dado por $\mu^{1/2}$ e taxa de decaimento mínima δ .

Prova Considere o funcional Lyapunov-Krasovskii

$$\begin{aligned} v_{dd}(x(t)) &= x(t)'P(\alpha)x(t) + \int_{t-\tau}^t x(\theta)'Y(\alpha)x(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\theta)'P(\alpha)\dot{x}(\theta)d\theta d\beta \end{aligned} \quad (4.18)$$

então

$$\begin{aligned} \dot{v}_{dd}(x(t)) &= \dot{x}(t)'P(\alpha)x(t) + x(t)'P(\alpha)\dot{x}(t) + x(t)'Y(\alpha)x(t) \\ &- x(t - \tau(\alpha))'Y(\alpha)x(t - \tau(\alpha)) + \tau\dot{x}(t)'P(\alpha)\dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)'P(\alpha)\dot{x}(\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Usando o Lema 3, a igualdade

$$\int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)d\theta = x(t) - x(t - \tau(\alpha))$$

e a condição "Bounded Real Lemma"[19] $\dot{v}_{dd}(x(t)) + e_d'e_d - \mu^2 w_d'w_d < 0$ tem-se

$$\begin{aligned} \dot{v}_{dd} &\leq \dot{x}'P(\alpha)x + x'P(\alpha)\dot{x} + x'Y(\alpha)x - x_d'Y(\alpha)x_d + \tau\dot{x}'P(\alpha)\dot{x} \\ &- \frac{1}{\tau}x'P(\alpha)x - \frac{1}{\tau}x'P(\alpha)x_d + \frac{1}{\tau}x_d'P(\alpha)x - \frac{1}{\tau}x_d'P(\alpha)x_d + e_d'e_d - \mu^2 w_d'w_d < 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

com $x_d = x(t - \tau(\alpha))$, $e_d = e(t - \tau(\alpha))$ e $w_d = w(t - \tau(\alpha))$.

Observe que (4.20) é equivalente a

$$\xi'D\xi < 0, \quad \forall \xi : \mathcal{B}\xi = 0 \quad (4.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \xi &\triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}' & x' & x_d' & e_d' & w_d' \end{bmatrix}' \\ \mathcal{B} &\triangleq \begin{bmatrix} I & -A(\alpha) & -B(\alpha)K & 0 & -B_w \\ 0 & 0 & C(\alpha)K & I & -d_w \end{bmatrix} \\ \mathcal{D} &\triangleq \begin{bmatrix} \tau P(\alpha) & P(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ \star & Y(\alpha) - \frac{1}{\tau}P(\alpha) & \frac{1}{\tau}P(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & \star & -Y(\alpha) - \frac{1}{\tau}P(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & I & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\mu^2 I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pelo Lema 1, (4.21) é equivalente a

$$\mathcal{D} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0.$$

Escolhendo

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} F' & F' & F' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}'$$

tem-se

$$\mathcal{D} + \begin{bmatrix} F + F' & -FA_\delta(\alpha) + F' & -FB_\delta(\alpha)K + F' \\ \star & -FA_\delta(\alpha) - A_\delta(\alpha)'F' & -FB_\delta(\alpha)K - A_\delta(\alpha)'F' \\ \star & \star & -FB_\delta(\alpha)K - K'B_\delta(\alpha)'F' \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ 0 & -FB_w & \\ 0 & -FB_w & \\ \lambda_1 K'C(\alpha)' & -FB_w + \lambda_2 K'C(\alpha)' & \\ 2\lambda_1 I & -\lambda_1 d_w + \lambda_2 & \\ \star & -2\lambda_2 d_w & \end{bmatrix} < 0. \quad (4.22)$$

Multiplicando antes e depois a inequação por $T = \text{diag}(\tau(\alpha)F^{-1}, \tau(\alpha)F^{-1}, \tau(\alpha)F^{-1}, I, I)$ e pela sua transposta, e definindo a transformação de variável $W(\alpha) = F^{-1}P(\alpha)F^{-T}$, $X(\alpha) = F^{-1}Y(\alpha)F^{-T}$, $Q = F^{-T}$, $Z = KF^{-T}$, é obtido (4.17).

4.3 Exemplos Numéricos

A aplicabilidade do método proposto é ilustrado por exemplos numéricos visando o projeto de controladores PI e PID. As rotinas computacionais foram programadas no Matlab 7.10 (R2010a), utilizando Yalmip [21] e SeDuMi [22], em um computador pessoal equipado com um Intel Core i7 CPU (3.40GHz), 8GB RAM. Para manejar o problema de dimensão infinita descrito pelas condições de parâmetros dependentes dos Teoremas 5 e 7, a otimização de variáveis são fixadas como matrizes dependentes de parâmetros e a positividade das inequações é verificada testando um conjunto finito de LMIs que são obtidas diretamente pela ROLMIP (Robust LMI Parser) toolbox [23]. Os ganhos formulados apresentados em sequência foram truncados com quatro dígitos decimais.

Exemplo 1 Considere o processo incerto adaptado de [13] e dado por (4.8) com $a_0 = 0.0476$, $a_1 = 0.4762$, $b_0 = 0.2857$, $\tau = 1$ sujeito a incertezas com limites

$$\theta_1 \in [-0.0019, 0.0019], \theta_2 \in [-0.0238, 0.0238], \theta_3 \in [-0.0286, 0.0286], \theta_4 \in [-0.50, 0.50].$$

Os ganhos do PID obtidos pelo Corolário 6 e Teorema 5 com $\delta = 0.1$ são, respectivamente,

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p & k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3043 & 1.5742 & 2.2648 \end{bmatrix}$$

e

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p & k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0752 & 0.7415 & 1.5744 \end{bmatrix}.$$

A resposta degrau do sistema nominal em malha fechada é mostrada nas Figuras 4.3 e

4.4. Observe que o critério de performance \mathcal{H}_∞ contribuiu com menor sobressinal e menor tempo de acomodação. A robustez é avaliada pela resposta degrau para todos os valores extremos dos parâmetros incertos com controlador PID obtido pelo Teorema 5.

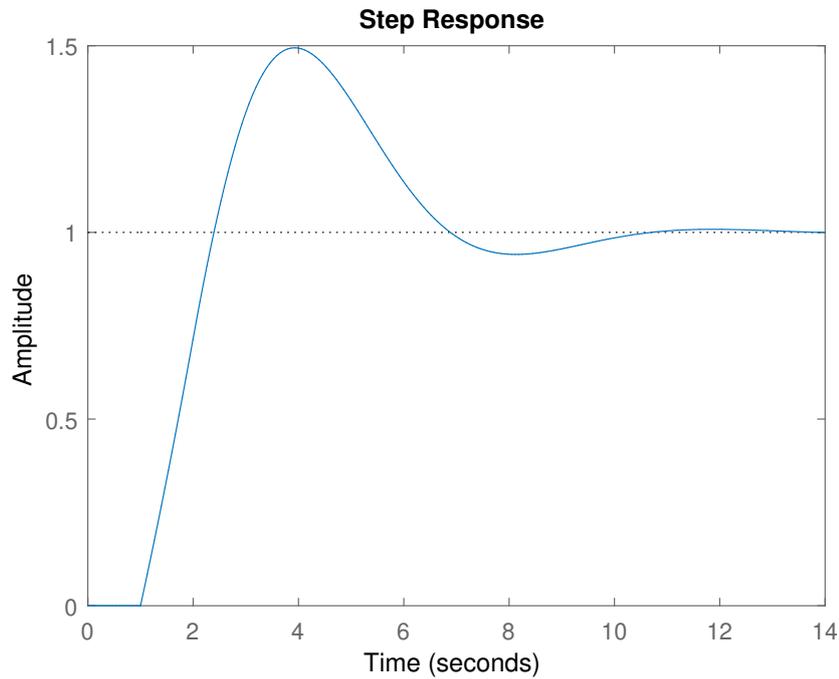


Figura 4.3: Resposta degrau do sistema nominal em malha fechada com o controlador PID projetado pelo Corolário 6.

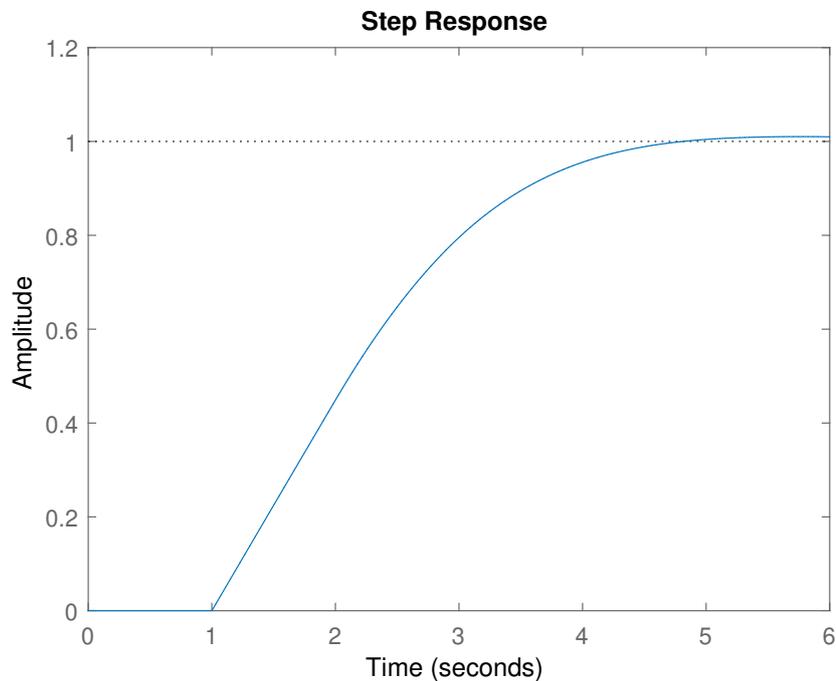


Figura 4.4: Resposta degrau do sistema nominal em malha fechada com o controlador PID projetado pelo Teorema 5.

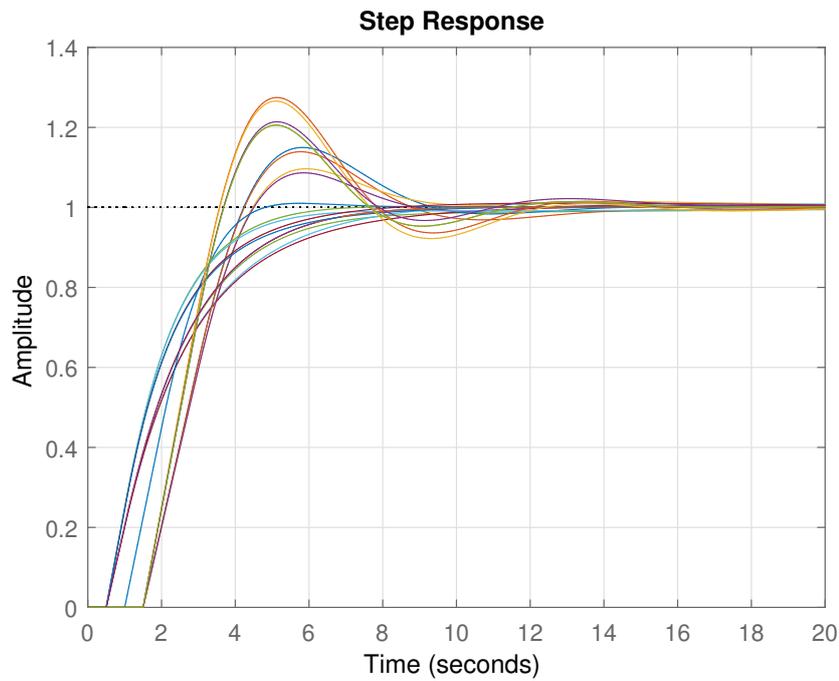


Figura 4.5: Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador PID projetado pelo Teorema 5 para todos os valores extremos dos parâmetros incertos.

A Figura 4.6 mostra o diagrama de Bode da função de transferência nominal da entrada de referência para o erro de rastreamento com o controlador PID projetado pelo Teorema 5. O custo \mathcal{H}_∞ garantido obtido com o Teorema 5 é 1.9089 (5.6157 dB). Note que, o custo \mathcal{H}_∞ obtido do diagrama de Bode é 3.56 dB devido aos domínios incertos.

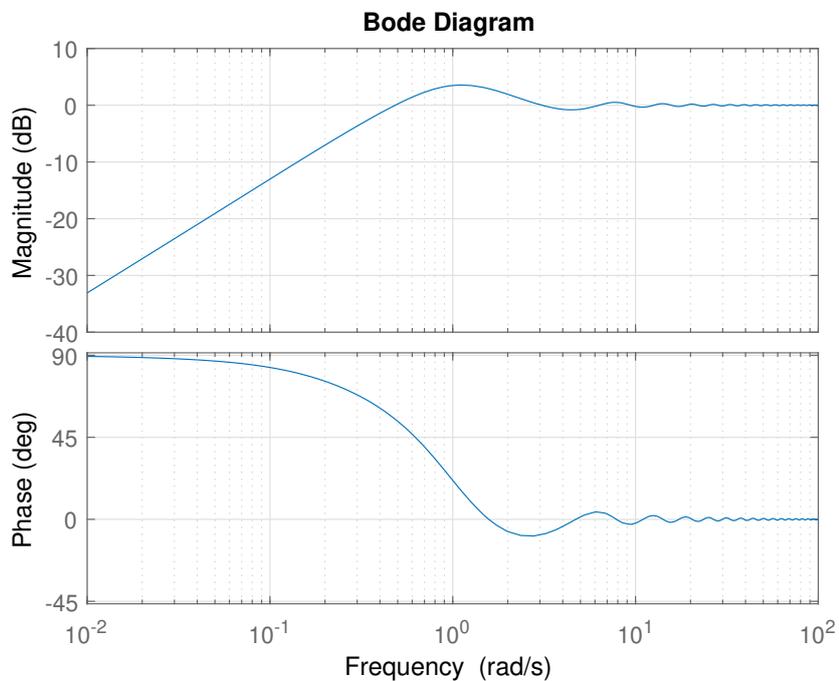


Figura 4.6: Diagrama de Bode da função de transferência nominal da entrada de referência para o erro de rastreamento com o controlador PID projetado pelo Teorema 5.

Exemplo 2 Considere o projeto do controlador PI robusto (4.6) para o processo de primeira

ordem incerto dado por (4.1) com $a_0 = 1$, $b_0 = 0.2$, $\tau = 0.1$ sujeito a incertezas limitadas

$$\theta_1 \in [-0.04, 0.04], \theta_2 \in [-0.002, 0.002], \theta_3 \in [-0.005, 0.005],$$

e $\delta = 1$. Corolário 6 e Teorema 5 não foram factíveis. Os ganhos PI obtidos pelo Teorema 7 considerando apenas a D-estabilidade (bloco de matrizes (3×3) de (4.17)) e minimização do custo \mathcal{H}_∞ (condição (4.17)) são, respectivamente,

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.5978 & 1.5324 \end{bmatrix}$$

e

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.8202 & 6.3052 \end{bmatrix}.$$

com custo \mathcal{H}_∞ garantido dado por 1.2099.

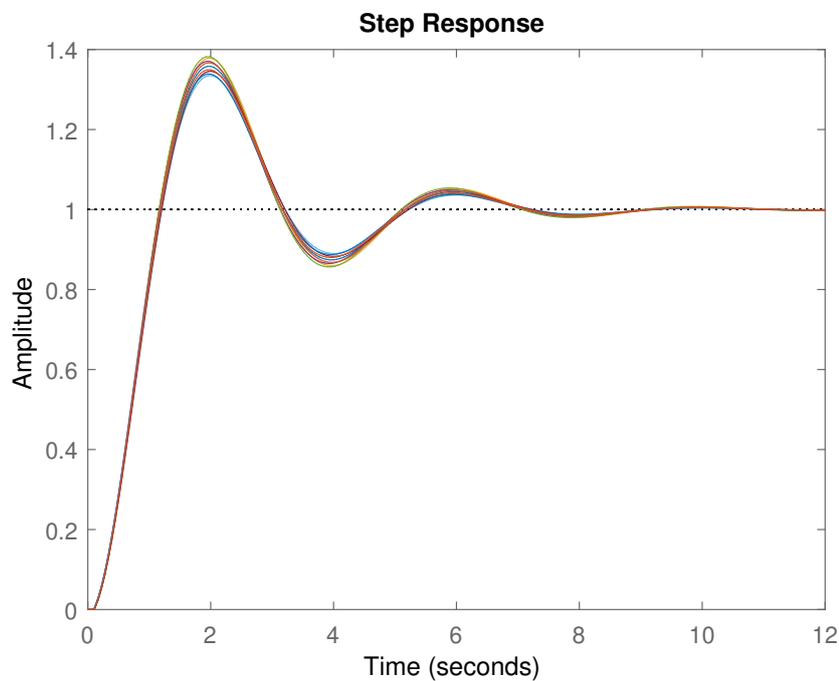


Figura 4.7: Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador PI projetado pelo Teorema 7 para todos os valores extremos dos parâmetros incertos (apenas D-estabilidade).

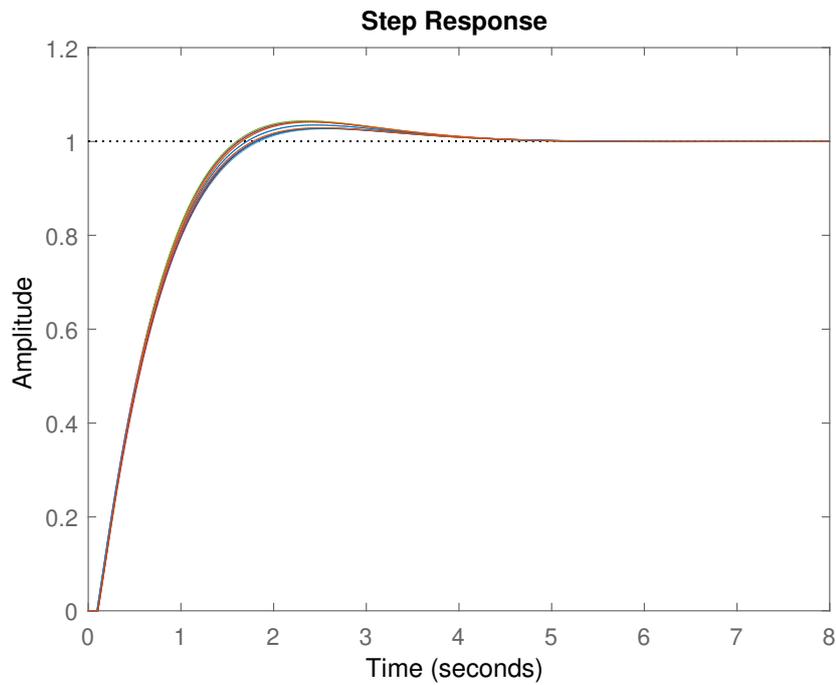


Figura 4.8: Resposta degrau do sistema em malha fechada com o controlador PI projetado pelo Teorema 7 para todos os valores extremos dos parâmetros incertos (D-estabilidade e minimização do custo \mathcal{H}_∞).

As simulações no tempo mostram robustez e melhor performance (menor sobressinal e menor tempo de acomodação) quando o custo \mathcal{H}_∞ garantido é informado.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho foram criadas técnicas para implementação de um controle PID visando um controle robusto o suficiente para comportar as características de sistemas com parâmetros incertos.

Partindo de Lemas existentes na literatura foi realizada um estudo sobre a técnica existente e proposto um novo teorema para o projeto de um controlador PID para sistemas com atraso no tempo incerto.

A partir de uma reformulação do sistema utilizado no processo para sistemas com atraso no tempo incerto foi possível expandir o resultado para sistemas com parâmetros incertos.

Como principal contribuições deste trabalho temos a possibilidade de representação politópica das incertezas paramétricas do sistema e do atraso no projeto de controladores PI e PID robustos, através de uma lei de realimentação de estados. As técnicas atuais que fazem uso da realimentação de estados não permitem incertezas politópicas ou fazem o projeto do controlador com um problema de realimentação de saída, sendo mais conservador que a realimentação de estados.

Para os trabalhos futuros, recomenda-se:

- Utilizar um funcional expandido de Lyapunov-Krasovskii para verificar a melhoria da técnica utilizada;
- Considerar saturação no sinal de controle;
- Expandir a técnica para o controle de sistemas com ordens maiores.

Referências Bibliográficas

- [1] PARADA, M. et al. Robust PI and PID design for first- and second order processes with zeros, time-delay and structured uncertainties. *International Journal of Systems Science*, v. 48, n. 1, p. 95–106, 2016.
- [2] FENILI, E. P.; SOUZA, F. O.; MOZELLI, L. A. Sintonia de pid via lmis: Imposicao de tempo de acomodacao em sistemas com retardo no tempo incerto. *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*, p. 1127–1134, 2014.
- [3] MOZELLI, L. A.; SOUZA, F. de O. Pid design via lmis: Improved transient response with robustness to uncertain time-delay. In: *Recent Results on Time-Delay Systems*. [S.l.]: Springer, 2016. p. 267–286.
- [4] GONCALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. A novel approach for h_2/h_∞ robust pid synthesis for uncertain systems. *Journal of process control*, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 19–26, 2008.
- [5] ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *trans. ASME*, v. 64, n. 11, 1942.
- [6] GE, M.; CHIU, M.-S.; WANG, Q.-G. Robust pid controller design via lmi approach. *Journal of process control*, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 3–13, 2002.
- [7] ZHENG, F.; WANG, Q.-G.; LEE, T. H. On the design of multivariable pid controllers via lmi approach. *Automatica*, Elsevier, v. 38, n. 3, p. 517–526, 2002.
- [8] LIN, C.; WANG, Q.-G.; LEE, T. H. An improvement on multivariable pid controller design via iterative lmi approach. *Automatica*, Elsevier, v. 40, n. 3, p. 519–525, 2004.
- [9] HUANG, X.; HUANG, B. Multi-loop decentralized pid control based on covariance control criteria: An lmi approach. *ISA Transactions*, v. 43, n. 1, p. 49 – 59, 2004. ISSN 0019-0578.
- [10] GONCALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C. H_2 / H_∞ robust pid synthesis for uncertain systems. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 4375–4380.

- [11] ZHANG, H.; SHI, Y.; MEHR, A. Robust static output feedback control and remote PID design for networked motor systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 58, n. 12, p. 5396–5405, December 2011.
- [12] HUI, Z.; YANG, S.; SAADAT, M. A. Robust PID control for multivariable networked control systems with disturbance / noise attenuation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 22, n. 2, p. 183–204, 2012.
- [13] PARADA, M. et al. Robust pid design for second-order processes with time-delay and structured uncertainties. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 4614–4619, 2011.
- [14] MOZELLI, L. A.; SOUZA, F. O. Pid tuning under uncertain conditions: robust lmi design for second-order plus time-delay transfer functions. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 46, n. 3, p. 120–125, 2013.
- [15] OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003. (4. ed.).
- [16] SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, D. E. *A unified algebraic approach to control design*. [S.l.]: CRC Press, 1997.
- [17] GU, K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems. In: IEEE. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 2000. p. 2805–2810.
- [18] MAO, W.-J.; CHU, J. D-stability for linear continuous-time systems with multiple time delays. *Automatica*, Elsevier, v. 42, n. 9, p. 1589–1592, 2006.
- [19] BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: Siam, 1994.
- [20] ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. The future of pid control. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 9, n. 11, p. 1163–1175, November 2001.
- [21] LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE. *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*. [S.l.], 2004. p. 284–289.
- [22] STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- [23] AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. D.; PERES, P. L. Robust lmi parser: A computational package to construct lmi conditions for uncertain systems. In: SN. *XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012)*. [S.l.], 2012. p. 2298–2305.

APÊNDICES

Apêndice A

Artigo submetido

LMI-based robust PID design for SISO polytopic systems
with uncertain delay

Eduardo S Tognetti¹, Guilherme A de Oliveira

*Department of Electrical Engineering, University of Brasilia – UnB, 70910-900, Brasília,
DF, Brazil*

Abstract

The problem of designing robust Proportional-Integral (PI) and Proportional-Integral-Derivative (PID) controllers for continuous-time polytopic single-input and single-output (SISO) systems subject to uncertain delay is addressed. A modelling procedure is presented to represent uncertain affine transfer functions with time-delay to a polytopic state-space form such that the PI or PID gains are obtained as a state feedback problem. New Linear Matrix Inequalities (LMIs) delay-dependent conditions are proposed based on a Lyapunov-Krasovskii type functional and Finsler Lemma. As main novelty, parameter-dependent Lyapunov functions are allowed in the robust state feedback PID synthesis problem. As performance criteria, \mathcal{H}_∞ guaranteed cost and robust pole placement for minimum decay rate is considered. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: PI and PID controller; robust control; Linear Matrix Inequalities; state-feedback; Lyapunov theory.

1. Introduction

Proportional-Integral (PI) and Proportional-Integral-Derivative (PID) controllers are the most common control element used in the industry, accounting for more than 90% of the regulatory loops [1]. Although many classical PID

¹Corresponding author: estognetti@ene.unb.br

5 tuning techniques, such as the Ziegler and Nichols rules (1942) and the inter-
nal model controller (IMC), are still largely used, some problems demand the
study of new design techniques that meet more stringent performance criteria
for several classes of dynamic systems with nonlinear terms, uncertainties and
time-varying parameters. In this context, approaches based on the use of Linear
10 Matrix Inequalities (LMIs) for designing PID controller have received the at-
tention of control community for being capable of dealing with a wide range of
problems of analysis, performance, and synthesis of linear systems [2, 3, 4, 5, 6].

Many works have addressed the problem of design PID controllers as an
output feedback controller design [3, 4, 7, 8, 9, 10]. In [7, 8], the design of
15 PID controllers is solved as a dynamic feedback optimization problem and in
[3, 4, 9, 10], PID gains are obtained from a static output feedback control
law. Some of the aforementioned works can deal with polytopic or polyhedral
uncertain systems [7, 8, 10].

The output feedback design is known to be a non convex problem and some
20 conservatism is always introduced comparing with state feedback design condi-
tions. Some works convert the PID controller design to a state feedback problem
[2, 11, 12, 6] where the static gain contains all the PID controller parameters.
Unfortunately, in the approaches presented in [11, 12, 6] only norm bounded un-
certainties are allowed since the control gain depends on the parameters of the
25 system. In [2], polytopic models are allowed however the results are very conser-
vative. The tuning of PID controllers for uncertain second order systems with
known time delay is presented in [6]. The case of uncertain time delay and con-
straints of the \mathcal{H}_∞ norm is treated in [12] by means of the Lyapunov-Krasovskii
type functional. The minimization of \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 norms for polytopic sys-
30 tems is presented in [8], however the PID gains are obtained from a non-convex
multi-objective optimization problem.

Most industrial processes can be satisfactorily approximated by first and
second-order transfer functions with time delay. The main contribution of this
work is to propose LMI conditions for the design of robust PI and PID controllers
35 for first and second-order polytopic single-input and single-output (SISO) sys-

tems with uncertain time delay. The controller gains are obtained as a state feedback problem by means of LMI conditions that guarantee the D-stability for an open region on the left side of the complex plane and the minimization of the \mathcal{H}_∞ guaranteed cost of the transfer function from the reference to the tracking error. The proposed modeling of the uncertain dynamics in a state space model with parameters belonging to the Cartesian product of simplexes and the developed LMI conditions allow the use of parameter-dependent Lyapunov functions. For the author's knowledges, this is the first time that PID controllers are designed as a state feedback problem for polytopic systems with parameter-dependent Lyapunov functions.

2. Problem statement

This paper considers the following problem:

Problem 1. *To design robust PI and PID controllers for continuous-time polytopic SISO systems with uncertain time-delay given as first and second order transfer function or as a polytopic state-space realization of order n .*

2.1. First-order time-delay systems

Consider the first order SISO system with time-delay

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0(\theta)}{s + a_0(\theta)} e^{-\tau(\theta)s} \quad (1)$$

where $U(s)$ is the input signal, $Y(s)$ the controlled output, $a_0(\theta)$, $b_0(\theta)$ are the parameters of the systems and $\tau(\theta)$ is the time-delay. All parameters are affine parameter-dependent, i.e.,

$$a_0(\theta) = a_0 + \theta_1, \quad b_0(\theta) = b_0 + \theta_2, \quad \tau(\theta) = \tau + \theta_3$$

where a_0 , b_0 and τ are known nominal values and parameters θ are bounded and time-invariant,

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i], \quad \underline{\theta}_i < \bar{\theta}_i, \quad \underline{\theta}_3 > -\tau, \quad i = 1, \dots, M, \quad (2)$$

with $M = 3$.

Let the unit simplex (of dimension N) be given by

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (3)$$

Definition 1 (Multi-Simplex). A multi-simplex Ω_N , $N = (N_1, \dots, N_m)$ is defined as the Cartesian product of m simplexes with dimensions N_i , $i = 1, \dots, m$,
i.e., $\Omega_N = \Lambda_{N_1} \times \dots \times \Lambda_{N_m}$. A given element α of Ω_N is decomposed as
 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ and each α_i is decomposed in the form $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iN_i})$,
 $i = 1, \dots, m$.

For instance, let $\Omega_{(2,2,2)} = \Lambda_2 \times \Lambda_2 \times \Lambda_2 \triangleq \Omega_{2\mathbb{I}_3}$, where

$$\mathbb{I}_q \triangleq \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{q\text{-times}}, \quad q \in \mathbb{N}^+, \quad \vartheta \mathbb{I}_q \triangleq \underbrace{(\vartheta, \vartheta, \dots, \vartheta)}_{q\text{-times}},$$

then, a generic element of $\Omega_{2\mathbb{I}_3}$ can be written as $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ with $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}) \in \Lambda_2$, $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}) \in \Lambda_2$ and $\alpha_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}) \in \Lambda_2$.

The objective of the following manipulations is to construct a new convex parameter space domain where the affine parameter-dependent system (1) is represented. In order to explore the benefits and advantages of the multi-simplex representation, the following change of variables are applied

$$\alpha_{i1} = \frac{\theta_i - \underline{\theta}_i}{\Delta\theta_i}, \quad \alpha_{i2} = 1 - \alpha_{i1}, \quad \alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) \in \Lambda_2, \quad i = 1, \dots, M, \quad (4)$$

with $\Delta\theta_i = \bar{\theta}_i - \underline{\theta}_i$, yielding $\theta_i = \alpha_{i1}\Delta\theta_i + \underline{\theta}_i$, $i = 1, \dots, M$. Note that, with this particular choice, the new parameters $\alpha = (\alpha_i, \dots, \alpha_M)$ belong to the multi-simplex $\Omega_{2\mathbb{I}_3}$. System (1) can be written in the α -parameter space as

$$G(s) = \frac{b_0(\alpha)}{s + a_0(\alpha)} e^{-\tau(\alpha)s}. \quad (5)$$

The objective is to design a robust PI controller in the parallel form

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (6)$$

such that the closed-loop system, depicted by Figure 1, is asymptotically stable.

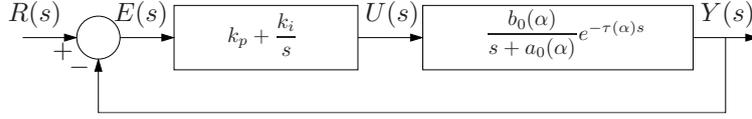


Figure 1: Closed loop system with (6) and (5).

Observe that, from the closed loop system in Figure 1, one has

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \dot{y}(t)a_0(\alpha) + b_0(\alpha)k_p\dot{y}(t - \tau(\alpha)) + b_0(\alpha)k_i y(t - \tau(\alpha)) \\ = b_0(\alpha)k_p\dot{r}(t - \tau(\alpha)) + b_0(\alpha)k_i r(t - \tau(\alpha)). \end{aligned}$$

By choosing, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = -b_0(\alpha)k_p x_2(t - \tau(\alpha)) - a_0(\alpha)x_2(t) - b_0(\alpha)k_i x_1(t - \tau(\alpha)) + r(t - \tau(\alpha))$ and $y(t) = b_0(\alpha)k_p x_2(t) + b_0(\alpha)k_i x_1(t)$, the closed-loop system with (6) and (5) is represented in the state-space form with a state feedback control law, given as

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)v(t - \tau(\alpha)) + B_w r(t - \tau(\alpha)) \\ v(t) &= Kx(t) \\ y(t) &= C(\alpha)v(t) \\ e(t) &= -C(\alpha)v(t) + d_w r(t) \end{aligned} \tag{7}$$

where $e(t) = r(t) - y(t)$, $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(\alpha) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $B_w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $d_w \in \mathbb{R}$, with

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_0(\alpha) \end{bmatrix}, & B(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -b_0(\alpha) \end{bmatrix}, & B_w &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ K &= \begin{bmatrix} k_i & k_p \end{bmatrix}, & C(\alpha) &= b_0(\alpha), & d_w &= 1. \end{aligned}$$

2.2. Second-order time-delay systems

Consider a affine parameter-dependent second order SISO system with time-delay

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0(\theta)}{s^2 + a_1(\theta)s + a_0(\theta)} e^{-\tau(\theta)s}. \tag{8}$$

with parameters

$$a_0(\theta) = a_0 + \theta_1, \quad b_0(\theta) = b_0 + \theta_2, \quad \tau(\theta) = \tau + \theta_3, \quad a_1(\theta) = a_1 + \theta_4$$

where a_0 , a_1 , b_0 and τ are known nominal values and parameters θ are bounded and time-invariant as in (2), with $M = 4$.

Let the PID controller

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s. \quad (9)$$

65 Following the same steps, the closed-loop system is showed in Figure 2.

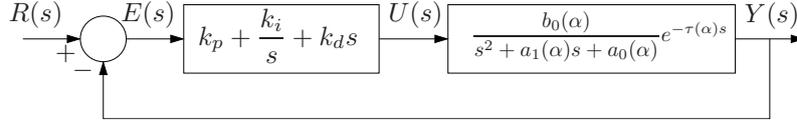


Figure 2: Closed loop system with (9) and (8).

The closed-loop system with (9) and (8) represented in the multi-simplex can be rewritten as (7) with

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_0(\alpha) & -a_1(\alpha) \end{bmatrix}, \quad B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_0(\alpha) \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p & k_d \end{bmatrix}, \quad C(\alpha) = b_0(\alpha), \quad d_w = 1.$$

As can be seen, the design of the PI and PID gains can be stated as a state-feedback design problem with control law $v(t) = Kx(t)$.

2.3. Filtered PID controllers

Consider the case of designing a PID controller for system (5). In this case, the closed-loop system is proper and there is a nonlinear dependence on the PID gains in the direct transmission matrix. To circumvent this issue, the following filtered PID controller is considered

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d \frac{Ns}{s + N} \quad (10)$$

70 that represents a ideal derivative filtered by a first order with time constant $1/N$ [13]. In industrial applications, the use of filtered PID controllers is standard in many manufacturers.

The closed-loop system (7) for the first-order process (5) has matrices given by

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_0(\alpha)N & -(a_0(\alpha) + N) \end{bmatrix}, \quad B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -b_0(\alpha)N & -b_0(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$C(\alpha) = b_0(\alpha) \begin{bmatrix} 1 & N \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}', \quad d_w = 1,$$

and the state-feedback gain

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p & k_d \\ 0 & k_i & k_p \end{bmatrix}. \quad (11)$$

The filtered PID controller (10) may also be used for the second-order systems with uncertain zero and time-delay

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1(\alpha)s + b_0(\alpha)}{s^2 + a_1(\alpha)s + a_0(\alpha)} e^{-\tau(\alpha)s}. \quad (12)$$

The matrices for state space system (7) and the state-feedback gain are given, respectively, by

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_0(\alpha)N & -(a_0(\alpha) + a_1(\alpha)N) & -(a_1(\alpha) + N) \end{bmatrix},$$

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -b_0(\alpha)N & -b_0(\alpha) - b_1(\alpha)N & -b_1(\alpha) \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C(\alpha) = \begin{bmatrix} b_0(\alpha)N & b_0(\alpha) + b_1(\alpha)N & b_1(\alpha) \end{bmatrix}, \quad d_w = 1,$$

and

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p & k_d & -N^{-1}k_d \\ 0 & k_i & k_p & k_d \\ 0 & 0 & k_i & k_p \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Observe that the parameter N must be informed *a priori* and particular constraints on the matrix variables that synthesize K are necessary. The presented modelling procedure can be extended for strict proper SISO systems of any
75 order. The following result are needed.

Lemma 1 (Finsler's Lemma [14]). *For a vector $x \in \mathbb{R}^n$ and two matrices $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$, the following statements are equivalent:*

1. $x' \mathcal{D} x < 0, \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0, \mathcal{B}x = 0\}$
- 80 2. $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{D} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0$

3. Main Results

The following theorem provides LMI conditions for asymptotically stability of the closed-loop system obtained from (7), given as

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)Kx(t - \tau(\alpha)) + B_w r(t - \tau(\alpha)) \\ e(t) &= -C(\alpha)Kx(t) + d_w r(t). \end{aligned} \tag{14}$$

As performance criteria the proposed condition will minimize the \mathcal{H}_∞ cost of the transfer function from $r(t)$ to $e(t)$ in (14).

For decay rate specifications, the poles of the closed-loop system are placed in the region $\Re(e(s)) < -\delta$ (\mathcal{D} -stability). The guarantee of pole allocation in the desired region can be obtained as shown in [15], that is, let the characteristic equation of the closed-loop system

$$F(s) = \det(sI - A(\alpha) - B(\alpha)Ke^{-s\tau(\alpha)}) \tag{15}$$

and

$$\begin{aligned} H(\epsilon) &= F(\epsilon - \delta) = \det(\epsilon I - \delta I - A(\alpha) - B(\alpha)Ke^{-(\epsilon - \delta)\tau(\alpha)}) \\ &= \det(\epsilon I - A_\delta(\alpha) - B_\delta(\alpha)Ke^{\epsilon\tau(\alpha)}) \end{aligned} \tag{16}$$

where $A_\delta(\alpha) = A(\alpha) + \delta I$ and $B_\delta(\alpha) = B(\alpha)e^{\delta\tau(\alpha)}$. Thus, if the roots of
85 $H(\epsilon) = 0$ satisfy $\Re(\epsilon) < 0$, then one has $\Re(s) < -\delta$ for roots of $F(s)$.

The controller gains are obtained from matrix K . Therefore, the following condition recovers PI gains (6) for system (1), PID gains (9) for system (8) or filtered PID gains (10) for systems (1) and (12).

Theorem 2. *If there exist symmetric positive definite matrices $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and a matrix $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mu > 0$, and a given scalar $\delta > 0$ such that*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \tau(\alpha)^2 B_\delta(\alpha)Z + \tau(\alpha)W & \tau(\alpha)^2 W A_\delta(\alpha)' & -\tau(\alpha)Z' C' & \tau(\alpha)B_w \\ \star & -\tau(\alpha)^2 X(\alpha) - \tau(\alpha)W & \tau(\alpha)^2 Z' B_\delta(\alpha)' & 0 & 0 \\ \star & \star & -\tau(\alpha)W & 0 & \tau(\alpha)B_w \\ \star & \star & \star & -I & d_w \\ \star & \star & \star & \star & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

$\Gamma_{11} = \tau(\alpha)^2 (W A_\delta(\alpha)' + A_\delta(\alpha)W + X(\alpha)) - \tau(\alpha)W$, $A_\delta(\alpha) = A(\alpha) + \delta I$ and $B_\delta(\alpha) = e^{\delta\tau(\alpha)} B(\alpha)$, then the closed-loop (14) is asymptotically stable with $K = ZW^{-1}$, with the \mathcal{H}_∞ guaranteed cost given by $\mu^{1/2}$ and minimum decay rate δ .

Proof. The proof following the lines presented in [6]. \square

The following result considers only \mathcal{D} -stability to assure minimum decay rate δ .

Corollary 3. *For a given scalar $\delta > 0$, if there exist symmetric positive definite matrices $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and a matrix $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \tau(\alpha)^2 B_\delta(\alpha)Z + \tau(\alpha)W & \tau(\alpha)^2 W A_\delta(\alpha)' \\ \star & -\tau(\alpha)^2 X(\alpha) - \tau(\alpha)W & \tau(\alpha)^2 Z' B_\delta(\alpha)' \\ \star & \star & -\tau(\alpha)W \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$\Gamma_{11} = \tau(\alpha)^2 (W A_\delta(\alpha)' + A_\delta(\alpha)W + X(\alpha)) - \tau(\alpha)W$, then the closed-loop (14) is asymptotically stable with $K = ZW^{-1}$ with minimum decay rate δ .

Remark 1. *To impose the structure (11) and (13), some constraints must be imposed in the variables that synthesize the state feedback gain. In Theorem 2*

and Corollary 3, $W = wI$, $w > 0$, and Z has the same structure of (11) and (13), that is,

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & -N^{-1}z_3 \\ 0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix},$$

respectively, with $k_i = z_1 w^{-1}$, $k_p = z_2 w^{-1}$, $k_d = z_3 w^{-1}$.

Observe that, in this case, the Lyapunov matrix is very restrictive. Theorem 4 is an important contribution since the constraints are imposed in the slack variables and the Lyapunov matrix can be parameter-dependent with no constraints.

Theorem 4. *If there exist symmetric positive definite matrices $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and matrices $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, a scalar $\mu > 0$, and given scalars λ_1, λ_2 and $\delta > 0$, such that*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \tau(\alpha)(Q' - B_\delta(\alpha)Z) & 0 & -B_w \\ \star & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & -\tau(\alpha)B_w \\ \star & \star & \Gamma_{33} & \lambda_1 Z' C(\alpha)' & -\tau(\alpha)(B_w + \lambda_2 Z' C(\alpha)') \\ \star & \star & \star & 2\lambda_1 I + I & -\lambda_1 d_w + \lambda_2 I \\ \star & \star & \star & \star & -\mu I - 2\lambda_2 d_w I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

with

$$\Gamma_{11} = \tau(\alpha)W(\alpha) + Q(\alpha) + Q(\alpha)', \quad \Gamma_{12} = \tau(\alpha)(W(\alpha) - A_\delta(\alpha)Q + Q')$$

$$\Gamma_{22} = -\tau(\alpha)^2(A_\delta(\alpha)Q + Q'A_\delta(\alpha)' - X(\alpha)) - \tau(\alpha)W$$

$$\Gamma_{23} = \tau(\alpha)W(\alpha) - \tau(\alpha)^2(B_\delta(\alpha)Z + Q'A_\delta(\alpha)')$$

$$\Gamma_{33} = -\tau(\alpha)W(\alpha) - \tau(\alpha)^2(B_\delta(\alpha)Z + Z'B_\delta(\alpha)' + X(\alpha))$$

then the closed-loop (14) is asymptotically stable with $K = ZQ^{-1}$ with the \mathcal{H}_∞ guaranteed cost $\mu^{1/2}$ and minimum decay rate δ .

Proof. Consider the Lyapunov-Krasovskii functional

$$\begin{aligned} v_{dd}(x(t)) &= x(t)'P(\alpha)x(t) + \int_{t-\tau}^t x(\theta)'Y(\alpha)x(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\theta)'P(\alpha)\dot{x}(\theta)d\theta d\beta \end{aligned} \quad (20)$$

then

$$\begin{aligned} \dot{v}_{dd}(x(t)) &= \dot{x}(t)'P(\alpha)x(t) + x(t)'P(\alpha)\dot{x}(t) + x(t)'Y(\alpha)x(t) \\ &- x(t-\tau(\alpha))'Y(\alpha)x(t-\tau(\alpha)) + \tau\dot{x}(t)'P(\alpha)\dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)'P(\alpha)\dot{x}(\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (21)$$

By using the lemma presented in [16], the equality

$$\int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)d\theta = x(t) - x(t-\tau(\alpha))$$

and the Bounded Real Lemma [17] condition $\dot{v}_{dd}(x(t)) + e_d'e_d - \mu^2 w_d'w_d < 0$, one has

$$\begin{aligned} \dot{v}_{dd} &\leq \dot{x}'P(\alpha)x + x'P(\alpha)\dot{x} + x'Y(\alpha)x - x_d'Y(\alpha)x_d + \tau\dot{x}'P(\alpha)\dot{x} \\ &- \frac{1}{\tau}x'P(\alpha)x - \frac{1}{\tau}x'P(\alpha)x_d + \frac{1}{\tau}x_d'P(\alpha)x - \frac{1}{\tau}x_d'P(\alpha)x_d + e_d'e_d - \mu^2 w_d'w_d < 0 \end{aligned} \quad (22)$$

105 with $x = x(t)$, $x_d = x(t-\tau(\alpha))$, $e_d = e(t-\tau(\alpha))$ and $w_d = w(t-\tau(\alpha))$.

Observe that (22) is equivalent to

$$\xi'D\xi < 0, \quad \forall \xi : \mathcal{B}\xi = 0 \quad (23)$$

where

$$\begin{aligned} \xi &\triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}' & x' & x_d' & e_d' & w_d' \end{bmatrix}' \\ \mathcal{B} &\triangleq \begin{bmatrix} I & -A(\alpha) & -B(\alpha)K & 0 & -B_w \\ 0 & 0 & C(\alpha)K & I & -d_w \end{bmatrix} \\ \mathcal{D} &\triangleq \begin{bmatrix} \tau P(\alpha) & P(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ \star & Y(\alpha) - \frac{1}{\tau}P(\alpha) & \frac{1}{\tau}P(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & \star & -Y(\alpha) - \frac{1}{\tau}P(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & I & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\mu^2 I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

By Lemma 1, (23) is equivalent to

$$\mathcal{D} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0.$$

Choosing

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} F' & F' & F' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}',$$

one has

$$\mathcal{D} + \begin{bmatrix} F + F' & -FA_\delta(\alpha) + F' & -FB_\delta(\alpha)K + F' \\ \star & -FA_\delta(\alpha) - A_\delta(\alpha)'F' & -FB_\delta(\alpha)K - A_\delta(\alpha)'F' \\ \star & \star & -FB_\delta(\alpha)K - K'B_\delta(\alpha)'F' \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ & 0 & -FB_w \\ & 0 & -FB_w \\ & \lambda_1 K'C(\alpha)' & -FB_w + \lambda_2 K'C(\alpha)' \\ & 2\lambda_1 I & -\lambda_1 d_w + \lambda_2 \\ & \star & -2\lambda_2 d_w \end{bmatrix} < 0. \quad (24)$$

Pre- and pos-multiplying (24) by $T = \text{diag}(F^{-1}, \tau(\alpha)F^{-1}, \tau(\alpha)F^{-1}, I, I)$ and by its transpose, and defining the variable transformations $W(\alpha) = F^{-1}P(\alpha)F^{-T}$, $X(\alpha) = F^{-1}Y(\alpha)F^{-T}$, $Q = F^{-T}$, $Z = KF^{-T}$, one obtains (19). \square

Remark 2. Observe that Theorem 4 represents a less conservative condition
 110 comparing with existing results of PID designing by a state feedback control
 law since it allows parameter-dependent Lyapunov functions and presents extra
 slack variables. A bisection search must be made to find scalars λ_1 and λ_2 that
 represent extra degrees of freedom. Note that, it is necessary that $\lambda_1 < -0.5$.

Remark 3. Time-varying parameters may also be addressed by Theorem 4 by
 115 imposing a constant Lyapunov matrix, i.e., $W(\alpha) = W$. If the upper bounds
 of the time-derivative of the parameters are known, the term $\dot{W}(\alpha)$ may be
 handled by known techniques that models the space where the time derivatives

may belong [18]. When the parameters are measured in real time, gain-scheduled control gains $K(\alpha)$ are possible by imposing a parameter dependency in $Z(\alpha)$.

120 4. Numerical examples

The applicability of the proposed method is illustrated by numerical examples regarding the design of PI and PID controllers. The computational routines were programmed in Matlab 7.10 (R2010a), using Yalmip [19] and SeDuMi [20], in a personal computer equipped with an Intel Core i7 CPU
 125 (3.40GHz), 8GB RAM. To handle the infinite dimensional problem described by the parameter-dependent conditions, the optimization variables are fixed as parameter-dependent matrices and the negativity of the inequalities is verified by testing a finite set of LMIs that are directly obtained by ROLMIP (Robust LMI Parser) toolbox [21]. The synthesized gains presented in the sequel were
 130 truncated with four decimal digits.

Example 1. Consider the problem of designing the PID controller (9) for the uncertain process adapted from [6] and given by (8) with $a_0 = 0.0476$, $a_1 = 0.4762$, $b_0 = 0.2857$, $\tau = 1$, and subject to uncertainties with bounds $\theta_1 \in [-0.0019, 0.0019]$, $\theta_2 \in [-0.0238, 0.0238]$, $\theta_3 \in [-0.0286, 0.0286]$ and $\theta_4 \in$
 135 $[-0.50, 0.50]$.

The PID gains obtained by Corollary 3 and Theorem 2 with $\delta = 0.1$ are, respectively,

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p & k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3043 & 1.5742 & 2.2648 \end{bmatrix}$$

and

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p & k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0752 & 0.7415 & 1.5744 \end{bmatrix}.$$

The step response of the nominal closed-loop system is showed in Figures 3 and 4. Observe that the \mathcal{H}_∞ performance criterion contributed with less overshooting and smaller settling time. The robustness is evaluated by the step response for all extreme values of the uncertain parameters with PID controller
 140 obtained by Theorem 2.

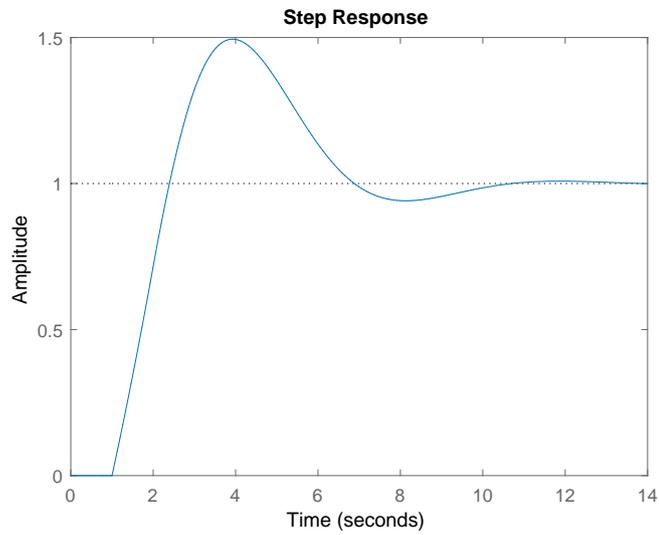


Figure 3: Step response of the nominal closed-loop system with the PID controller designed by Corollary 3.

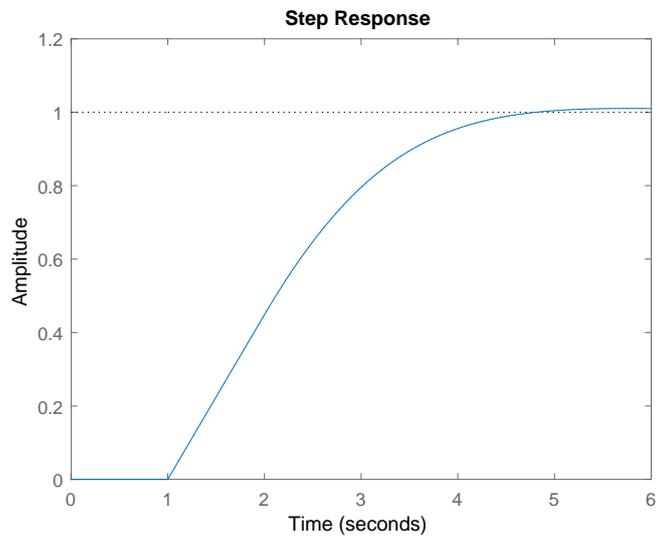


Figure 4: Step response of the nominal closed-loop system with the PID controller designed by Theorem 2.

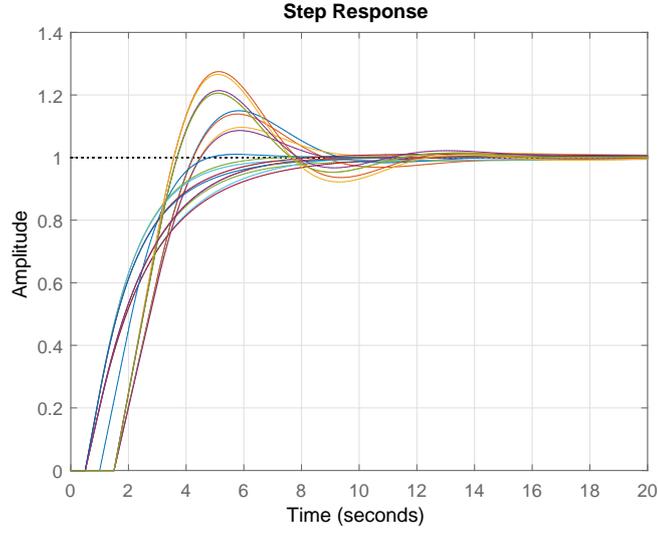


Figure 5: Step response of the closed-loop system with the PID controller designed by Theorem 2 for all the extreme values of the uncertain parameters.

Figure 6 shows the Bode response of the nominal transfer function from the input reference to the tracking error with the PID controller designed by Theorem 2. The obtained \mathcal{H}_∞ guaranteed cost with Theorem 2 is 1.9089 (5.6157 dB). Note that, the \mathcal{H}_∞ cost obtained from the Bode diagram is 3.56 dB due the uncertain domain.

Example 2. Consider the design of the robust PI controller (6) for the first-order uncertain process given by (1) with $a_0 = 1$, $b_0 = 0.2$, $\tau = 0.1$ subject to uncertainties with bounds

$$\theta_1 \in [-0.04, 0.04], \quad \theta_2 \in [-0.002, 0.002], \quad \theta_3 \in [-0.005, 0.005],$$

and $\delta = 1$. Corollary 3 and Theorem 2 were not feasible. The PI gains obtained by Theorem 4 considering only D -stability (matrix block (3×3) of (19)) and \mathcal{H}_∞ cost minimization (condition (19)) are, respectively,

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.5978 & 1.5324 \end{bmatrix}$$

and

$$K = \begin{bmatrix} k_i & k_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.8202 & 6.3052 \end{bmatrix}.$$

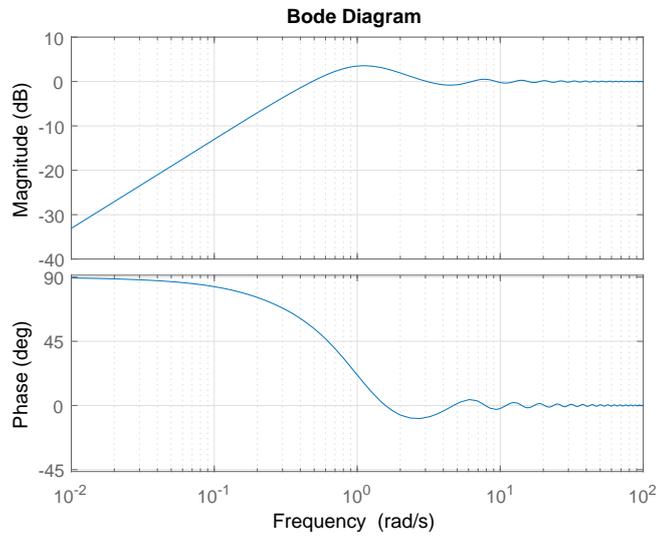


Figure 6: Bode response of the nominal transfer function from the input reference to the tracking error with the PID controller designed by Theorem 2.

with \mathcal{H}_∞ guaranteed cost given by 1.2099.

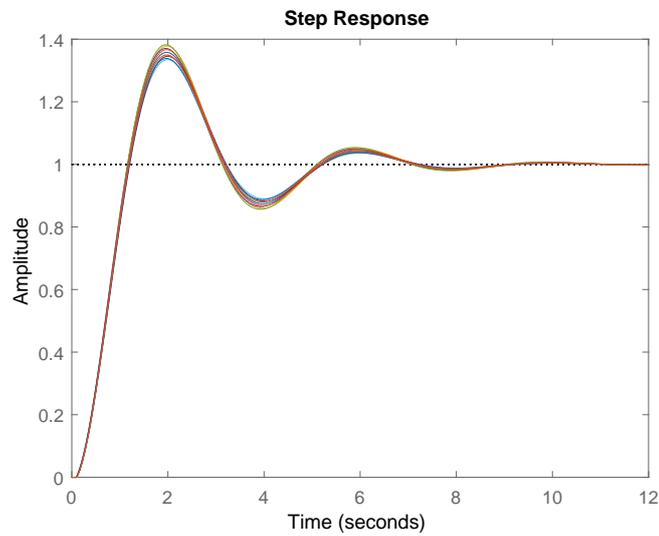


Figure 7: Step response of the closed-loop system with the PI controller designed by Theorem 4 for all the extreme values of the uncertain parameters (only D-stability).

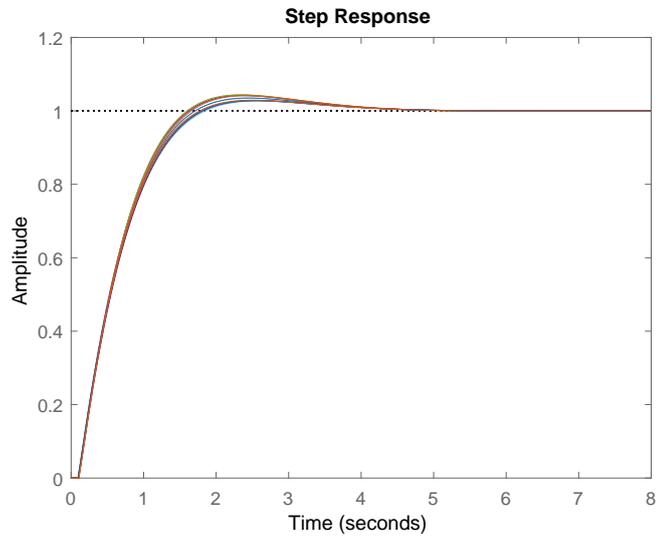


Figure 8: Step response of the closed-loop system with the PI controller designed by Theorem 4 for all the extreme values of the uncertain parameters (D-stability and \mathcal{H}_∞ cost minimization).

The time simulations shows robustness and better performance (less overshooting and smaller settling time) when the \mathcal{H}_∞ guaranteed cost is addressed.

5. Conclusion

150 In this work, a novel approach is proposed to design robust PI and PID controllers for continuous-time SISO systems subject to uncertain delay. The methodology allows, as a new contribution, polytopic type uncertainties and parameter-dependent Lyapunov functions in the PID state feedback problem. The numerical examples demonstrated the effectiveness of the conditions with
 155 \mathcal{H}_∞ guaranteed cost and robust pole placement for minimum decay rate.

6. Acknowledgements

This work was supported by the Brazilian agencies CAPES, CNPq and FAPDF.

References

- 160 [1] E. N. Gonçalves, R. M., R. H. C. Takahashi, A novel approach for H_2/H_∞ robust PID synthesis for uncertain systems, *Journal of process control* 18 (1) (2008) 19–26.
- [2] M. Ge, M. Chiu, Q. Wang, Robust PID controller design via LMI approach, *J. Process Control* 21 (2002) 3–13.
- 165 [3] F. Zheng, Q. Wang, T. H. Lee, On the design of multivariable PID controllers via LMI approach, *Automatica* 38 (2002) 517–526.
- [4] C. Lin, Q.-G. Wang, T. H. Lee, An improvement on multivariable pid controller design via iterative lmi approach, *Automatica* 40 (3) (2004) 519–525. doi:<https://doi.org/10.1016/j.automata.2003.10.008>.
- 170 [5] X. Huang, B. Huang, Multi-loop decentralized pid control based on covariance control criteria: An lmi approach, *ISA Transactions* 43 (1) (2004) 49 – 59. doi:[https://doi.org/10.1016/S0019-0578\(07\)60019-6](https://doi.org/10.1016/S0019-0578(07)60019-6).
- [6] M. Parada, D. Sbarbaro, R. A. Borges, P. L. D. Peres, Robust PI and PID design for first- and second order processes with zeros, time-delay and structured uncertainties, *International Journal of Systems Science* 48 (1) 175 (2016) 95–106. doi:10.1080/00207721.2016.1160453.
- [7] E. N. Goncalves, R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, H_2 / H_∞ robust pid synthesis for uncertain systems, in: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006, pp. 4375–4380.
- 180 [8] E. N. Goncalves, R. H. T. Reinaldo M. Palhares, A novel approach for robust pid synthesis for uncertain systems, *Journal of Process Control* 18 (1) (2008) 19 – 26.
- [9] H. Zhang, Y. Shi, A. Mehr, Robust static output feedback control and remote PID design for networked motor systems, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 58 (12) (2011) 5396 –5405.
- 185

- [10] Z. Hui, S. Yang, M. A. Saadat, Robust PID control for multivariable networked control systems with disturbance / noise attenuation, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 22 (2) (2012) 183–204. doi:10.1002/rnc.1688.
- 190 [11] M. Parada, R. A. Borges, D. Sbarbaro, P. L. D. Peres, Robust PID design for second-order processes with time-delay and structured uncertainties., in: *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Vol. 18, 2011, pp. 4614–4619.
- [12] L. A. Mozelli, F. O. Souza, PID tuning under uncertain conditions: robust
195 LMI design for second-order plus time-delay transfer functions, in: *11th Workshop on Time-Delay Systems, Part of 2013 IFAC Joint Conference*, 2013, pp. 120–125.
- [13] K. Astrom, T. Hagglund, *PID Controllers*, International Society for Measurement and Control, 1995.
- 200 [14] R. E. Skelton, T. Iwasaki, K. Grigoriadis, *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*, Taylor & Francis, Bristol, PA, 1998.
- [15] W.-J. M. J. Chu, D-stability for linear continuous-time systems with multiple time delays, *Automatica* 42 (9) (2006) 1589–1592.
- [16] K. Gu, An integral inequality in the stability problem of time-delay systems,
205 in: *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 3, IEEE, 2000, pp. 2805–2810.
- [17] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- 210 [18] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, Selective \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 19 (5) (2011) 890–900. doi:10.1109/TFUZZ.2011.2150229.

- 215 [19] J. Löfberg, YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, in: Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des., Taipei, Taiwan, 2004, pp. 284–289.
- [20] J. F. Sturm, Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Method Softw.* 11 (1–4) (1999) 625–653, <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- 220 [21] C. M. Agulhari, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems, in: XIX CBA, Campina Grande, PB, Brasil, 2012, pp. 2298–2305.