Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Geometria Analítica: ensino e aprendizagem de tópicos elementares com apoio de malha quadriculada, Geogebra e Geoplano

Nilson Correia da Silva

Brasília - DF
2018

Nilson Correia da Silva

Geometria Analítica: ensino e aprendizagem de tópicos elementares com apoio de malha quadriculada, Geogebra e Geoplano

Dissertação de mestrado profissional (PROFMAT), apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do título de

Mestre

Orientador: Prof. Dr. Rui Seimetz

Brasilia
2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

	Silva, Nilson Correia da
SSI586g	Geometria Analítica: ensino e aprendizagem de tópicos elementares com apoio de malha quadriculada,Geogebra e Geoplano / Nilson Correia da Silva; orientador Rui Seimetz. - - Brasiília, 2018.
	165p.
	Dissertação (mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) - - Universidade de Brasília, 2018.
	1. Geometria analítica. 2. Escolas públicas do DF. 3. Caderno quadriculado. 4. Geogebra. 5. Geoplano. I. Seimetz, Rui, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Geometria Analítica: ensino e aprendizagem de tópicos elementares com apoio de malha quadriculada, Geogebra e Geoplano

por

Nilson Correia da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 27 de março de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rui Seimetz - Orientador (MAT/UnB)

Prof. Dr.Ronni Geraldo Gomes de Amorim (FGA/UnB)

Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo (MAT/UnB)

Dedicatória

*Dedico este trabalho à minha filha Blenda,
por inspirar-me, a cada dia, a superar
as dificuldades e os obstáculos que
possam surgir em meu caminho.*

Agradecimentos

À minha família, em especial, à minha irmã Vilma pela ajuda na revisão do texto.

À minha esposa Arlete, pela paciência ao aceitar a privação de minha companhia por conta dos estudos.

Ao Professor Doutor Rui Seimetz pela paciência, dedicação e sugestões para a realização deste trabalho.

Aos colegas de escola, em especial à profª Mary Rose pelo apoio e as sugestões para elaboração desta dissertação.

Ao prof. Camilo Evangelista e ao prof. Sebastião Portela pelas ideias debatidas em torno do tema proposto.

À profª Bruna Rodrigues, que abraçou a idéia desse projeto ao trabalhar essa sequência didática em suas turmas de 3ª série.

Aos colegas de curso, afinal as experiências que compartilhamos ao longo desta caminhada foram fundamentais para que este objetivo fosse alcançado.

Aos professores do curso, pelo apoio, paciência e dedicação.

À todos os meus alunos, pois sem a participação deles este trabalho não teria se concretizado.

Enfim, obrigado a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuiram para a realização deste projeto.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma proposta de sequência didática na abordagem da Geometria Analítica (no estudo do ponto, da reta e da circunferência) utilizando como recursos folhas quadriculadas (caderno quadriculado), Geoplano, software *Geogebra*, além de régua, compasso e transferidor. Essa sequência tem sido aplicada em oito turmas de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública, com as quais trabalhamos e uma turma usada como grupo de controle. Quanto ao método de trabalho, inicialmente realiza-se um questionário com os estudantes e, através deste, busca-se traçar o perfil sócio econômico de cada um deles, e levantar suas condições quanto aos conhecimentos básicos de geometria, o que acaba, também, revelando as dificuldades apresentadas pelos estudantes, em relação aos conceitos e definições dos entes geométricos e suas aplicações no plano cartesiano. A partir dessas condições prévias dos alunos, essa proposta de sequência didática pode ser desenvolvida, ao longo do 3º bimestre do ano letivo, na qual, opta-se por uma abordagem mais geométrica (gráfica) do que algébrica, no tratamento dos principais tópicos de geometria analítica, presentes no currículo de Matemática do Ensino Médio das escolas públicas do Distrito Federal. A ideia principal é que cada atividade seja resolvida geometricamente, no caderno quadriculado, para que os alunos consigam, ao final, utilizar soluções analíticas (deduzir fórmulas, por exemplo). Para isso, é importante que as resoluções dos problemas sejam feitas no caderno quadriculado e depois, refeitas no Geogebra. Algumas atividades também podem ser realizadas com o uso do Geoplano e depois, transcritas para a folha quadriculada. Ao final desse processo, é aplicado outro questionário aos alunos para sondar suas impressões quanto às atividades desenvolvidas e aos recursos utilizados e, juntamente com as avaliações formais e os apontamentos e observações feitos ao longo das aulas, verificar o quanto eles evoluíram em relação às condições iniciais neste trabalho, utilizando-se para isto, como parâmetros, as teorias de Hiele e de Ausubel. Por fim, utilizando estes elementos citados além de depoimentos e entrevistas feitas com alunos e professores, como dados, uma análise qualitativa por triangulação de métodos, para avaliar este trabalho, é aplicada e, a partir de seus resultados conclui-se que o objetivo da proposta é alcançado.

Palavras-chave: Geometria analítica, escolas públicas do DF, geogebra, geoplano, Caderno quadriculado e sequência didática.

Abstract

This dissertation aims to present a proposal of a didactic sequence in the approach of Analytical Geometry (in the study of the point, the line and the circunference) using features like checkered sheet, Geoplane, *Geogebra* software, as well as ruler, compass and protractor . This sequence has been applied in eight classes of the 3rd year of high school in a public school, with which we work and a group used as a control group. As for the work method, a questionnaire is initially carried out with the students and, through this one, it is sought to trace the socio-economic profile of each one of them, and to raise their conditions regarding the basic knowledge of geometry, revealing the difficulties presented by the students in relation to the concepts and definitions of the geometric topics and their applications in the Cartesian plane. Based on these students' previous conditions, this proposal for a didactic sequence can be developed during the 3rd bimester of the school year, in which a more geometric (graphic) than algebraic approach is chosen in the treatment of the main topics of geometry, present in the Mathematics curriculum of the High School of the public schools from Federal District. The main idea is that each activity be solved geometrically, in the grid, so that students can, in the end, use analytical solutions (for example, to deduce formulas). For this, it is important that the resolutions of the problems are made on the checkered notebook and then, redone in *Geogebra*. Some activities can also be performed using the Geoplane and then transcribed to the checkered sheet. At the end of this process, another questionnaire is applied to the students to probe their impressions regarding the activities developed and the resources used and, together with the formal evaluations and the notes and observations made throughout the classes, to verify how they evolved in relation to the conditions for that, using as parameters the theories of Hiele and Ausubel. Finally, using these cited elements in addition to testimonials and interviews with students and teachers, as data, a qualitative analysis by triangulation of methods, to evaluate this work, is applied and, from its results, it is concluded that the objective of proposal is reached.

keywords: Analytical geometry, public schools of the Federal District, geogebra, geoplane, checkered notebook and didactic sequence.

Sumario

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Apresentação

Apresento um breve histórico da minha trajetória profissional e acadêmica com intuito de proporcionar o entendimento dos motivos que me levaram à elaboração deste trabalho justificando os caminhos e os pressupostos adotados.

Em 1984 concluí o curso de Licenciatura em Matemática, pelo CEUB[1] e ingressei, por meio de concurso público, na Secretaria de Educação do Estado de Goiás, como professor de Matemática, atuando em uma escola estadual no Novo Gama até 1992, numa realidade que impunha aos professores ministrar aulas em várias outras disciplinas, mesmo não sendo habilitados para as mesmas. No meu caso, algumas vezes, num mesmo ano letivo, tive que dar aulas de Física, Química e Biologia, além da Matemática.

Em 1986, também, por meio de concurso público, entrei na FEDF[2] como professor de Matemática, atuando em uma escola de Ensino Fundamental e a outra de Ensino Médio, até 1998 quando, definitivamente, passei a trabalhar integralmente nesta última escola onde atuo até hoje.

Participei de vários cursos de aperfeiçoamento e de formação continuada, durante minha atuação no magistério, dos quais destaco:

- Geometria de 5ª a 8ª séries – SEEDF/FEDF – 1990 (carga horária de 180 h).
- Aperfeiçoamento em Matemática – UCB – 1994 (180 h).
- Avançando na Prática Interdisciplinar – IDR[3] – 1998 (120 h).
- Especialização para Professores do Ensino Básico – UnB – 2001 (405 h).
- Matemática Comercial e Financeira – Senac – 2002 (180 h).
- Experiências e Problemas em Geometria – UnB – 2006 (240 h).

Em 2002, participei da implantação do projeto *Laboratório de Ensino de Matemática* da escola (LEM), incorporado ao componente curricular PD 1[4]. Havia uma sala própria,

[1]Centro de Ensino Unificado de Brasília. Atualmente, UNICEUB.

[2]FEDF - Fundação Educacional do Distrito Federal, órgão da Secretaria de Educação do DF extinto em 2000 e cujas atribuições passaram à SEEDF.

[3]IDR - Instituto de Desenvolvimento de Recursos Humanos. Orgão já extinto do GDF

[4]PD - Parte Diversificada - é uma disciplina que por meio de projetos, possibilita a cada unidade escolar da rede pública a chance de planejar e concretizar ações que respondam às características e demandas de sua comunidade. Atualmente, atende como PI - Projeto Interdisciplinar.

ambientada, destinada a esse projeto que atendia em cada aula, metade de uma turma enquanto a outra metade era atendida, simultaneamente, no laboratório de Física, de maneira alternada, uma vez a cada semana. Paralelamente, da mesma forma, os laboratórios de Biologia e de Química, incorporados ao PD 2, compartilhavam uma outra turma. Para [27] (p. 112), toda escola deve ter o seu LEM e, na sua construção, é importante, sempre que possível, a participação de alunos, bem como de professores de outras disciplinas.

Nas aulas do laboratório de Matemática os conteúdos eram abordados de forma diferenciada procurando sempre associá-los a situações-problema, com o uso de recursos didáticos como o Geoplano, o teodolito pedagógico (figura 1), entre outros, buscando promover uma aprendizagem mais dinâmica, atrativa e de fácil compreensão, desenvolvendo atividades experimentais, teóricas (e lúdicas), de construção do conhecimento matemático, de modo que o aluno visualizasse na prática os elementos a serem estudados e as relações e aplicações da Matemática no cotidiano, facilitando assim, a abstração e, consequentemente, a formação de conceitos.

Algumas dessas atividades tinham também como objetivo construir, pelos próprios alunos, materiais didáticos que pudessem ser utilizados posteriormente, pois o acervo de materiais do laboratório era limitado e a ideia foi ampliá-lo gradualmente. A figura 2 mostra uma atividade cujo objetivo é calcular, de forma indireta, a altura da caixa d'água da escola utilizando como recursos um teodolito pedagógico, trena, tabela trigonométrica (ou calculadora científica) e conhecimentos básicos de trigonometria.

Figura 1: Teodolito pedagógico
Fonte: O autor, foto

Figura 2: Cálculo da altura da caixa d'água
Fonte: O autor, foto

Infelizmente, esses projetos não puderam prosseguir adiante no ano seguinte, pois a Secretaria de Educação, ao contrário do que havia procedido em 2002, não autorizou a liberação de um professor a mais para atuar em cada um dos PDs. Então, a partir de 2003, os componentes PD 1 e PD 2 assumiram uma nova característica pedagógica em função das demandas da comunidade escolar e eu voltei a atuar com a carga de Matemática, procurando, sempre que possível, tratar os conteúdos dentro da filosofia adotada no laboratório de Matemática.

Durante o ano letivo de 2006, participei do curso "Experiências e Problemas em Geometria", na Universidade de Brasília (UnB), ministrado pela professora Dra. Ana Maria Redolfi de Gandulfo e direcionado a professores do Ensino Básico das escolas públicas do DF. O curso tinha como objetivo a confecção de materiais didáticos para, com isso, promover a implantação de laboratórios de Matemática nas escolas de origem de cada professor. Com esse curso, tive a oportunidade de construir diversos materiais didáticos como geoplanos, poliedros, e outros. Os materiais produzidos nesse curso têm sido utilizados por mim em sala de aula. Participar desse curso foi determinante para que em 2007 e 2008, eu assumisse novamente a carga horária de PD, atuando com uma aula semanal em cada uma das 28 turmas (1º, 2º e 3º anos) no turno matutino da escola. O coordenador pedagógico e eu elaboramos então, um projeto para PD – Matemática (vide apêndice "C") cujo objetivo era desenvolver atividades experimentais, teóricas e lúdicas, de construção do conhecimento matemático, na tentativa de demonstrar as relações e aplicações da Matemática no cotidiano. Solicitamos à Direção da escola que substituísse as cadeiras da minha sala que eram do "tipo universitária" pelo modelo com mesa e cadeira para facilitar o desenvolvimento das atividades de laboratório propostas. Essa foi mais uma tentativa de tornar realidade a implantação do laboratório de Matemática na escola, mas, infelizmente, como não houve um maior envolvimento por parte dos professores da escola, o projeto não prosseguiu adiante. Em 2009, voltei a atuar com a carga de Matemática, permanecendo até hoje, sempre buscando manter, no tratamento dos conteúdos, a mesma filosofia da prática experimental. As figuras 3 e 4 abaixo mostram alguns dos materiais concretos manipuláveis que foram confeccionados no curso "Experiências e Problemas em Geometria", e que até hoje são utilizados nas aulas.

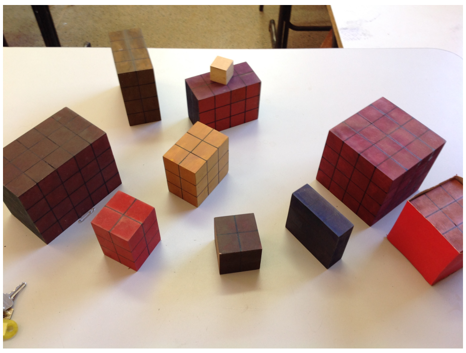


Figura 3: Sólidos para volume. Fonte: O autor, foto.

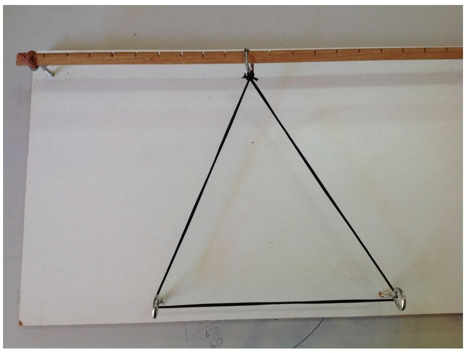


Figura 4: Triângulo com variação do vértice. Fonte: O autor, foto.

Durante esse período procurei tratar a geometria analítica (algebrização da geometria), em particular, e que é tema dessa dissertação, diferentemente da maioria dos livros didáticos, com enfoque mais geométrico abordando de forma gráfica a resolução de problemas, com o uso do caderno quadriculado, principalmente; procurando, com isto, dar maior conteúdo intuitivo aos temas estudados.

Em 2014, ingressei no curso de engenharia da UnB/FGA[5] e lá permaneci por quatro

[5]FGA - Polo de Engenharias da Universidade de Brasília, na cidade do Gama.

períodos, até que em 2016 entrei para o curso de mestrado do Profmat. Considero que esses dois momentos, (além do momento vivenciado no curso de especialização no ano de 2001), foram muito importantes não só do ponto de vista da formação acadêmica, mas também do enriquecimento pedagógico, pois além dos novos conhecimentos adquiridos, estar novamente sentado num banco de sala de aula, vivenciando, sentindo na pele, todas as angústias e frustrações enfrentadas pelos alunos no processo de ensino aprendizagem, possibilita-nos ver, também, "o lado do aluno", algo que havíamos esquecido por estar há anos atuando como professor. De acordo com [36](p. 7), "Para sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou na resolução de problemas". Tal condição permite que tenhamos um olhar diferente sobre o nosso aluno e possamos assim, refletir sobre a nossa prática pedagógica.

Assim, baseado em minha trajetória acadêmica e profissional e, sobretudo, na experiência pedagógica vivenciada com a geometria analítica ao longo desses anos e, também, com o objetivo de propor uma metodologia alternativa para a abordagem da geometria analítica no Ensino Médio é que este trabalho surgiu.

Introdução

Não é de hoje a discussão em torno do processo de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Básico. Dentre os resultados das avaliações externas, o Pisa 2015 [9] constata que 72,25% dos estudantes brasileiros estão abaixo do nível básico de proficiência em Matemática e o próprio rendimento em sala de aula têm sido motivo de preocupação por parte dos especialistas em educação. A partir das situações vivenciadas em sala de aula, acerca do ensino e aprendizagem da Matemática, por mais de trinta anos, este autor tem percebido as dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Médio em compreender os conceitos básicos desta disciplina, assim como a suas aplicações na resolução de problemas (Essas dificuldades podem ser atribuídas a diversos fatores que não serão debatidos neste trabalho). É inegável que há um desinteresse de boa parte dos alunos pelas disciplinas de exatas, o que tem contribuído para o baixo desempenho. Em particular, no estudo de geometria analítica, essas dificuldades acabam impedindo que os estudantes evoluam no processo de ensino aprendizagem.

Este trabalho surge com o objetivo de apresentar uma nova proposta para o ensino de tópicos elementares da geometria analítica do Ensino Médio, por meio de uma sequência didática com enfoque geométrico, a partir de estratégias alternativas que fujam das abordagens meramente algébricas presentes na maioria dos livros didáticos, e assim tentar proporcionar um sentido real aos conceitos matemáticos, e com isso dar significado ao conteúdo aprendido pelo aluno.

Nesta sequência, os conteúdos, bem como as resoluções dos problemas associados a eles, são abordados de forma prioritariamente geométrica utilizando-se para isso caderno quadriculado, não como um mero instrumento de registro das atividades, mas como um importante recurso didático que é. E aliados a ele, são utilizados Geoplano e Geogebra como materiais de apoio. Com isso, pretende-se que o aluno consiga assimilar de maneira significativa os temas ministrados, e assim avançar razoavelmente no seu nível cognitivo.

Quanto ao método de trabalho, inicialmente realiza-se um questionário com os alunos das turmas de 3ºano (uma turma de 3ºano de outro professor será usada como grupo de controle) e, através deste, busca-se traçar o perfil sócio econômico de cada um deles e levantar suas condições quanto aos conhecimentos básicos de geometria. Então, a partir dessas condições e dos conhecimentos prévios dos alunos, elabora-se um planejamento que contemple a proposta de sequência didática a ser desenvolvida, ao longo do 3º bimestre deste ano letivo. Nesta, opta-se por uma abordagem mais geométrica (gráfica) do que algébrica, no tratamento dos principais tópicos de geometria analítica, presentes no currículo de Matemática do Ensino Médio das escolas públicas do Distrito Federal. Cada tópico, em cada aula, é abordado inicialmente de maneira geométrica com o uso do caderno quadriculado e apoio do Geoplano e o Geogebra, para então, estabelecer uma associação algébrica, buscando sempre, tornar as aulas de Matemática mais atraentes e contextualizadas. Ao final final do processo faz-se uma avaliação (conforme descrito no capítulo 5).

Esta dissertação está estruturada em cinco capítulos além das *considerações finais, referências bibliográficas, apêndices, anexos* e a *apresentação* que antecede esta *introdução.* O primeiro capítulo trata da fundamentação teórica que está dividida em três partes, a saber. A primeira parte traz uma visão geral da teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e suas implicações para o ensino e a aprendizagem em sala de aula. A segunda versa sobre modelo de Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. A terceira parte traz uma breve contextualização histórica da origem e autoria da geometria analítica, fazendo referências a Descartes e Fermat, em seguida, descreve os principais tópicos de geometria analítica que serão abordados na sequência didática.

O segundo capítulo apresenta uma descrição detalhada do contexto social e pedagógico da escola bem como as características dessa comunidade, apontando os principais recursos materiais disponíveis para o desenvolvimento do trabalho pedagógico e também suas limitações estruturais. Mostra também, a partir de um questionário aplicado aos alunos envolvidos neste trabalho, o perfil desse alunado, estabelecendo suas condições de aprendizagem e os problemas por eles enfrentados. Pois, é a partir dessas condições que o professor deve elaborar o seu planejamento.

O terceiro capítulo descreve os três principais recursos didáticos utilizados no desenvolvimento desta proposta de sequência didática: o Geogebra, o Geoplano e o caderno quadriculado, ressaltando os benefícios proporcionados pelas suas utilizações. Desse modo, são descritas não somente suas características, mas também as principais aplicações desses materiais no processo educativo, os embasamentos teóricos e as vantagens que justificam a utilização deles.

O quarto capítulo descreve, aula a aula, os procedimentos desenvolvidos na sequência didática proposta por esta dissertação. Sequência que se inicia a partir da aplicação de um questionário para fazer um levantamento sócio educacional dos alunos. Com as informações relativas às condições iniciais o planejamento é feito e o conteúdo proposto é desenvolvido ao longo de vinte e duas aulas por meio de atividades realizadas no caderno quadriculado com apoio do Geoplano e do Geogebra e, ao final, os alunos são submetidos a um segundo questionário.

No quinto capítulo procura-se fazer, por triangulação de métodos, uma análise qualitativa dos resultados, ou seja, uma avaliação da proposta. Para isto consideram-se como elementos para análise as informações obtidas nos dois questionários além das avaliações formais ocorridas durante o processo, observações e anotações feitas, e os depoimentos, entrevistas feitas com professores e alunos e também o grupo de controle.

E, por fim, nas considerações finais é feita uma avaliação acerca do sucesso da proposta, verificando se os objetivos foram alcançados, expondo as principais dificuldades enfrentadas no transcorrer da realização da sequência e também, mostrando as implicações de todo esse processo na futura atuação pedagógica.

Capítulo 1

Fundamentação teórica

Este capítulo traz um apanhado geral acerca das teorias de Ausubel e de Van Hiele, além de descrever um breve histórico sobre a origem e autoria da geometria analítica, bem como os tópicos que serão abordados nesta sequência didática.

1.1 Aprendizagem significativa

Em termos gerais, a aprendizagem se divide em três tipos:

- Aprendizagem cognitiva – É um processo no qual ocorre armazenamento organizado de informações na estrutura cognitiva (mente) do aprendiz.
- Aprendizagem afetiva – É um processo que está relacionado às emoções e sentimentos do indivíduo, e estes aspectos emocionais participam do processo de aprendizagem, e ocorre concomitantemente com a aprendizagem cognitiva.
- Aprendizagem psicomotora – É um processo que está associado a respostas musculares obtidas de treino e prática, e que não descarta a influência da aprendizagem cognitiva na obtenção de habilidades psicomotoras.

A aprendizagem significativa é base da teoria do psicólogo estadunidense David Paul Ausubel, e foi formulada inicialmente na década de 1960, em sua obra "Psicologia Educacional" e, mais tarde, em 1980, recebeu colaboração de Joseph Donald Novak e Helen Hanesian sobre a influência de fatores sociais, cognitivos e afetivos na aprendizagem. De acordo com essa teoria (que focaliza prioritariamente a aprendizagem cognitiva, embora Ausubel reconheça a importância da experiência afetiva), a aprendizagem significativa é um processo onde novas ideias ou conhecimentos se relacionam de maneira não literal (substantiva) e não arbitrária com o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do aprendiz. Em outras palavras, essa interação não arbitrária significa que ela não deve ocorrer com qualquer conhecimento prévio, mas sim com algo especificamente relevante que o aluno já saiba. A este conhecimento prévio, especificamente relevante à uma nova aprendizagem, Ausubel denominava de subsunçor[1] ou ideia âncora. Assim, de acordo com

[1] A palavra "subsunçor" não existe em português; trata-se de uma tentiva de aportuguesar a palavra inglesa "subsumer". Seria mais ou menos inseridor, facilitador ou subordinador.

[31], "a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em *conceitos* ou *proposições relevantes*, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz" (1999, p. 153).

Para [45], "Os subsunçores são estruturas de conhecimento específicos que podem ser mais ou menos abrangentes de acordo com a freqüência com que ocorre aprendizagem significativa em conjunto com um dado subsunçor". O subsunçor permite ao aprendiz dar significado a um novo conhecimento por ele adquirido, seja por recepção ou por descoberta, e a interação entre o conhecimento prévio e o conhecimento adquirido transforma, amplia, reconfigura o subsunçor, tornando-o mais estável cognitivamente, ou seja, o subsunçor se modifica adquirindo novos significados. Nessa linha de pensamento, [32] ressalta:

> É importante reiterar que a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre os conhecimentos prévios e os conhecimentos novos, e que essa interação é não literal e não arbitrária. Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva. (p. 2).

Ainda, de acordo com [41], "A verdadeira aprendizagem se dá quando o aluno (re) constrói o conhecimento e forma conceitos sólidos sobre o mundo, o que vai possibilitá-lo agir e reagir diante da realidade."

Para [1] apud [32](p. 155), a ideia central do processo de aprendizagem significativa é que o material a ser aprendido, seja relacionado de maneira não literal e não arbitrário com algum aspecto especificamente relevante à estrutura cognitiva do aprendiz. Este aspecto pode ser um conceito, uma imagem ou uma proposição, por exemplo, que seja significativo.

Para que ocorra a aprendizagem significativa, uma condição necessária é que o conteúdo a ser aprendido seja relacionável ao que o aprendiz já sabe, de maneira substantiva e não arbitrária (dito *potencialmente significativo*). Isto significa que o material a ser aprendido deve ser suficientemente não arbitrário em si e, também, que haja na estrutura cognitiva de quem aprende os subsunçores adequados para que ocorra esta interação; ou seja, o material didático desenvolvido deve ser, antes de tudo, potencialmente significativo para o aluno.

A outra condição é que haja por parte do aprendiz uma vontade de associar, de maneira não literal e não arbitrária, à sua estrutura cognitiva, esse novo material. Isto significa que, se a intenção do aprendiz for de apenas memorizar arbitrária e literalmente o material a ser aprendido, o processo de aprendizagem e seu produto serão mecânicos; ou seja, aluno deve ter predisposição para aprender.

Em contraposição à aprendizagem significativa há a aprendizagem mecânica, que se caracteriza por uma interação literal e arbitrária entre os novos conhecimentos e os conhecimentos preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz, ou seja, uma aprendizagem praticamente sem significado, puramente memorística, e assim, não determina uma melhor estabilidade cognitiva e, portanto, é facilmente esquecida. Na aprendizagem mecânica há o armazenamento literal, arbitrário e sem significado nem compreensão, o que resulta em aplicações mecânicas a situações conhecidas. Já na aprendizagem significativa, há a incorporação substantiva e não arbitrária de novos conhecimentos, o que implica compreensão, capacidade de explicar, e enfrentar situações novas. Contudo, isso não significa que a aprendizagem significativa não possa ser esquecida. Se um determinado conhecimento deixa de ser usado por muito tempo, se a aprendizagem foi significativa, haverá um esquecimento residual que continua dentro do subsunçor e, portanto, poderá ser reaprendido de maneira fácil e em um tempo relativamente curto. A esse esquecimento natural, Ausubel chamava de "assimilação obliteratora, ou seja, a perda progressiva de dissociabilidade dos novos conhecimentos em relação aos conhecimentos que lhe deram significados, que serviram de ancoradouro cognitivo"[32]. Ao contrário, se a aprendizagem for mecânica esse esquecimento será rápido e praticamente permanente. Entretanto, Ausubel não considera a diferença entre essas duas formas de aprendizagem como uma dicotomia, e sim como um contínuo.

Como avaliar se, de fato, a aprendizagem significativa ocorreu? De acordo com Ausubel, para que a avaliação da aprendizagem significativa seja realmente efetiva, consistente, deve-se buscar soluções de problemas a partir de testes de compreensão, procurando utilizar situações novas, diferentes daquelas presentes no material educativo, ou seja, situações que não sejam familiares ao aluno. Desta forma, poderá constatar, de fato, se o aluno desenvolveu ou não, as habilidades necessárias à obtenção da aprendizagem significativa.

Tendo em vista que a aprendizagem significativa parte de conhecimentos prévios, é importante que o professor retome, durante sua prática em sala de aula, os conceitos já aprendidos, para que estes se constituam mais ampliados e consistentes, tornando-se assim, suporte para que o aprendiz adquira novos conceitos. Portanto, para que haja a busca incessante de uma aprendizagem significativa, é importante que o projeto educativo do professor priorize esses conhecimentos prévios. Pois conforme ([1] apud [10]), "se tivéssemos que reduzir toda psicologia educacional a um único princípio diríamos que o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe, descubra isso e baseie-se nisso seus ensinamentos" .

1.2 A teoria de Van Hiele

Uma situação muito comum em sala de aula, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, é o fato do aluno saber reconhecer um quadrado, mas não saber como defini-lo; ou não entender que o quadrado é, também, um retângulo, ou que um retângulo é, também, um paralelogramo, ou que um paralelogramo é, também, um trapézio, ou que duas retas perpendiculares são, também, retas concorrentes. Esse tipo de comportamento revela o grau de maturidade do pensamento geométrico do aluno. Então, o que fazer para ajudar o aluno a transpor essas barreiras, ou seja, atingir um grau maior de maturidade de pensamento geométrico? "O modelo de Van Hiele de pensamento geométrico pode ser usado para orientar a formação, assim como para avaliar as habilidades do aluno" [26] (p. 1).

A teoria de Van Hiele trata de um modelo, de investigação do desenvolvimento do pensamento geométrico, que reúne as teses de doutorado apresentadas pelo casal de professores holandeses Pierre Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele-Geldof, na Universidade de Utrecht, Holanda, sob a orientação do educador matemático Hans Freudenthal, no final da década de 1950. O casal Van Hiele pesquisou o ensino da Geometria com alunos de 12 e 13 anos, enfatizando a manipulação de figuras [28]. Entretanto, Dina faleceu logo então, e coube a Pierre reformular e desenvolver essa teoria.

> O Modelo de van Hiele, que concebe diversos níveis de aprendizagem geométrica (ou níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico) com as seguintes características: no nível inicial (visualização), as figuras são avaliadas apenas pela sua aparência, a ele pertencem os alunos que só conseguem reconhecer ou reproduzir figuras (através das formas e não pelas propriedades); no nível seguinte (análise) os alunos conseguem perceber características das figuras e descrever algumas propriedades delas; no outro nível (ordenação), as propriedades das figuras são ordenadas logicamente (inclusão) e a construção das definições se baseia na percepção do necessário e do suficiente. As demonstrações podem ser acompanhadas, memorizadas, mas dificilmente elaboradas. Nos dois níveis seguintes estão aqueles que constroem demonstrações e que comparam sistemas axiomáticos. [28].

Nos anos 60, a extinta União Soviética reformulou seu currículo geométrico, utilizando como base a teoria do casal Hiele, mas somente a partir de 1976 quando um professor estadunidense, Izaak Wirzup, começou a divulgar esse modelo, é que este começou a despertar a atenção internacional. Paralelamente a isso, Hans Freudenthal, na Holanda, chamou a atenção sobre o Modelo em seu livro "Mathmathics as an Educational Task"(1973). Com as traduções para o inglês feitas em 1984 por Dorothy Geddes, David Fuys e Rosamond Tischler, cresceu o interesse pelas obras do casal [22].

Esse modelo dividiu o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico em cinco níveis hierárquicos de compreensão (visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor), numerados de 0 a 4, posteriormente nomeados por Allan Hoffer(1979) e renumerados de 1 a 5, com concordância de Van Hiele ([5], p. 23). Além disso, estabelece que, para haver uma evolução significativa de um nível para outro, a maneira como o professor ensina para o aluno é mais importante do que as questões biológicas (como a idade, por exemplo). Por isso, é essencial que o professor saiba combinar a aprendizagem com o nível de pensamento do aluno. Pois, segundo Freudenthal, "quando o ensinamento ocorre em um nível acima ao do estudante, a matéria não é bem assimilada e não fica retida por muito tempo na memória, assim como concepções erradas, quando aprendidas, parecem persistir" [22].

O modelo afirma que o aluno move-se do nível básico (observação), passando pelos níveis intermediários, até chegar ao maior nível (rigor), ou seja, dentro desse processo de desenvolvimento do pensamento geométrico, o aluno não alcança um determinado nível, sem ter, necessariamente passado por nível imediatamente inferior. A seguir, é apresentado um resumo desses níveis de pensamento geométrico.

Nível 0: Visualização ou reconhecimento

Neste nível os alunos reconhecem as figuras de maneira global, pela aparência, sem perceber as partes e propriedades inerentes à figura. Alunos neste estágio conseguem, por exemplo (veja figuras 1.1 e 1.2), reconhecer e diferenciar quadrados de retângulos e até mesmo reproduzi-los numa folha ou na lousa, entretanto, não conseguem perceber que essas figuras têm ângulos retos e lados opostos paralelos.

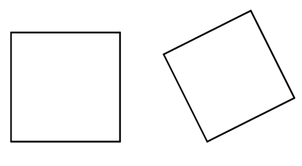


Figura 1.1: Quadrados. Fonte: [26], adaptado.

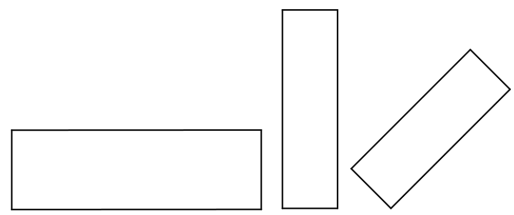


Figura 1.2: Retângulos. Fonte: [26], adaptado.

Nível 1: Análise

Neste nível, os alunos já começam diferenciar as características das figuras, suas partes e propriedades, mas não conseguem explicar as relações entre propriedades, não veem inter-relações entre figuras e não entendem as definições. No exemplo da figura 1.3, "colorindo" ângulos iguais, os alunos poderiam "estabelecer" que ângulos opostos de um paralelogramo, são iguais e, a partir da observação de vários exemplos como esse, poderiam fazer generalizações para as classes dos paralelogramos.

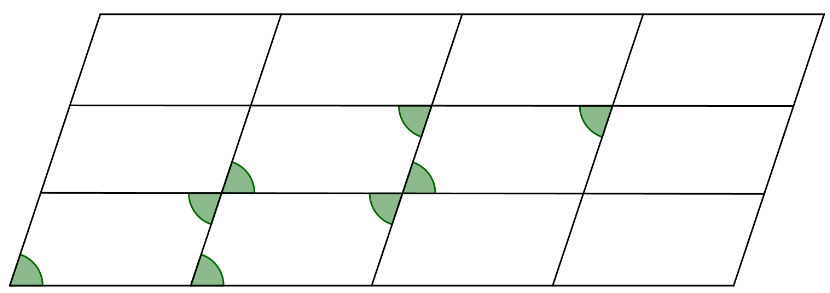


Figura 1.3: paralelogramos. Fonte: [26], adaptado.

Nível 2: Dedução informal

Neste nível, os alunos já começam estabelecer inter-relações de propriedades tanto numa mesma figura (por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são iguais) quanto entre distintas figuras (um quadrado é um retângulo porque tem as mesmas propriedades do retângulo). Assim, eles conseguem deduzir propriedades e reconhecer classes de figuras sem, contudo, compreender a dedução como um todo. Eles conseguem acompanhar demonstrações formais, mas não são capazes de construir uma nova, partindo de premissas diferentes.

Nível 3: Dedução formal
Neste nível, o aluno é capaz de construir demonstrações de mais de uma maneira; compreender a interação das condições necessárias e suficientes; consegue distinguir uma afirmação e sua recíproca.

Nível 4: Rigor
Neste nível, o aluno é capaz de estudar e trabalhar com vários sistemas axiomáticos. A geometria é vista no plano abstrato.

Apesar de ter estabelecido os cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo [22], Van Hiele estaria mais preocupado em dedicar-se aos três primeiros níveis que vão das séries escolares iniciais até o início do Ensino Superior.

1.3 A geometria analítica

A geometria analítica tem como principal característica a interação entre a Geometria e a Álgebra, pois, por exemplo, permite entender as soluções de um sistema linear de duas variáveis por meios de retas num plano, ou seja, dá uma interpretação geométrica a um problema algébrico e permite também que problemas de natureza geométrica tenham solução algébrica, assim, possibilita a representação de figuras geométricas por meio de coordenadas, equações ou inequações.

Há divergências de opinião acerca da autoria e da época do surgimento da geometria analítica, pois, sabe-se que práticas inerentes a esse ramo da matemática, como a ideia de coordenadas (que foi usada pelos egípcios e romanos na agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas), já eram do conhecimento de algumas civilizações antigas. Entretanto, a maioria dos historiadores credita aos franceses, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), o início do estudo sistemático da geometria analítica. [20](p. 383).

Uma das contribuições de Descartes foi sua famosa obra **Discurso sobre o método**, que apresentava ideias que fundamentaram o estudo da geometria analítica. Enquanto isso, Fermat, que trabalhava paralelamente e de forma independente de Descartes, realizou estudos relacionados a equações que representavam curvas matemáticas em um plano. "Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da geometria analítica"[20] (p. 383). A despeito desses aspectos, [39] afirma:

> A geometria analítica como conhecemos atualmente consiste de duas associações recíprocas: (i) dada uma equação, encontrar o lugar geométrico, encon-

> trar a equação que seus pontos satisfazem; e, (ii) dada uma equação, encontrar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. Descartes estudou o primeiro problema, mas Fermat foi pioneiro em atacar o segundo. (p. 257).

Figura 1.4: **René Descartes** (1596-1650). Fonte: [17]

Figura 1.5: **Pierre de Fermat** (1601-1665). Fonte: [21]

O plano cartesiano

No desenvolvimento desse tema é importante lembrar alguns conceitos sobre **plano cartesiano ortogonal**, que consiste em um plano com dois eixos perpendiculares, x e y, que dividem o plano em quatro regiões (quadrantes). O eixo horizontal x é denominado **eixo das abscissas**, e o eixo vertical y é denominado **eixo das ordenadas**. O ponto em que esses eixos se intersectam é denominado **origem** (c.f. a figura 1.6). Também chamado de **sistema de coordenadas cartesianas,** tem como objetivo determinar a localização de pontos no plano cartesiano, por meio de pares ordenados (x, y) .

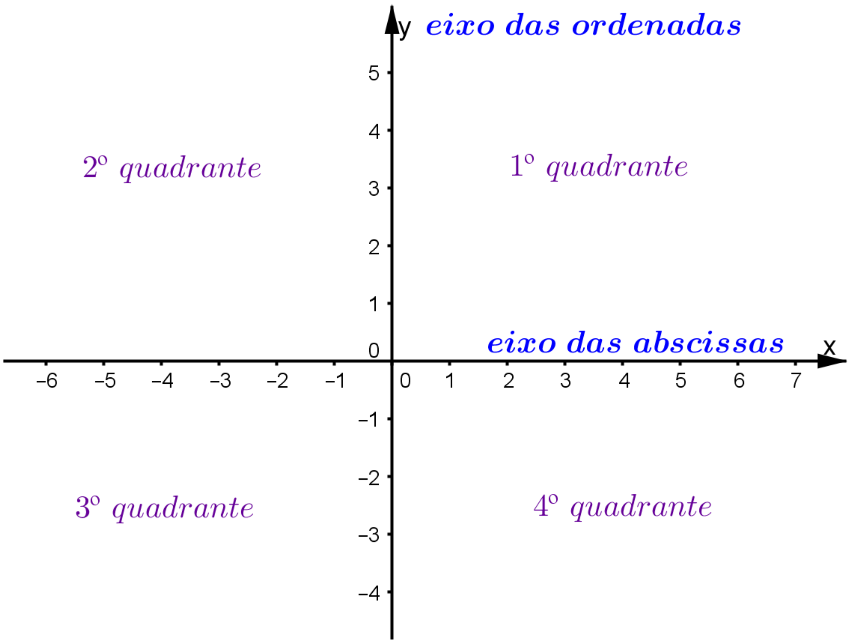


Figura 1.6: Plano cartesiano. Fonte: O autor, produzido no Geogebra.

Finalizamos este capítulo com uma breve lista dos principais tópicos da geometria analítica presentes no currículo do Ensino Médio [18], abordados no desenvolvimento desta sequência didática. São apresentados nesta seção sem nenhum detalhamento, pois, por motivos didáticos, estão descritos de forma detalhada, em cada aula distribuída ao longo do capítulo 4.

- Sistema cartesiano;
- Distância entre dois pontos na reta e dois pontos no plano;
- Cálculo do perímetro de triângulos e polígonos no plano cartesiano (aplicações);
- Condição de alinhamento de três pontos no plano;
- Cálculo da área de triângulos e polígonos no plano cartesiano (aplicações);
- Classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos;
- Determinação do ponto médio de um segmento e do baricentro de um triângulo;
- Equação geral da reta que passa por dois pontos;
- Coeficiente angular (declividade) e ângulo de inclinação da reta;
- Equação reduzida da reta, zero e coeficiente linear;
- Equação da reta dados um ponto e o coeficiente angular;
- Forma segmentária da equação da reta;

- Posições relativas entre retas (condições de paralelismo e de perpendicularismo);
- Intersecção entre duas retas;
- Distância entre ponto e reta;
- Circunferência - equação normal e reduzida;
- Posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências.

Capítulo 2

O contexto da escola

Este capítulo apresenta uma descrição do contexto social e pedagógico da escola, apontando os principais recursos materiais disponíveis para o desenvolvimento do trabalho pedagógico e também suas limitações estruturais. Mostra também o perfil do aluno, estabelecendo sua condição de aprendizagem e os problemas por ele enfrentado.

2.1 Contexto social e pedagógico da escola

Esta proposta foi elaborada, desenvolvida e aplicada no Centro de Ensino Médio 02 do Gama (CEM 02 do Gama), no Distrito Federal, escola onde tenho atuado, em sala de aula, há 31 anos. Escola que está, em número de alunos, entre as maiores do DF, pois atende neste ano de 2017, nos três turnos, 2250 alunos regularmente matriculados (segundo dados da secretaria da escola), distribuídos em 28 turmas no matutino, 28 no vespertino e 10 no noturno, todas na modalidade de Ensino Médio Regular. O ano letivo é dividido em quatro bimestres.

Os recursos oferecidos em cada sala são apenas um quadro de vidro para pincéis, e um armário para guardar o material do professor. A escola dispõe também de caixas acústicas, projetores multimídia (data show) e aparelhos de som, mas em número insuficiente para atender a todos os professores num mesmo turno. Geralmente, os professores que utilizam esses recursos com frequência, tem seu próprio material.

Há na escola Auditório Central com capacidade para 300 pessoas, Cine Teatro, Auditório auxiliar com capacidade para 120 pessoas cada, pátio com palco, cantina pública, lanchonete privada, sala de Educação Física, 30 salas de aula, utilizadas no sistema de salas ambiente no matutino, vespertino e noturno, onde cada professor tem sua própria sala, e os alunos é que se movimentam para mudar de aula, e a carga horária de Matemática é de três aulas semanais de 50 minutos cada. Há também, uma sala ambiente para atividades de leitura e redação, laboratórios de Física e de Química, um Clube de Ciências, uma biblioteca, três quadras poliesportivas (nenhuma coberta) e um campo de futebol (sem grama). Um Laboratório de Informática (LabInf) funciona na escola de forma precária, pois os 32 computadores são antigos e desses, apenas 10 estão em condições de uso. Este fato praticamente inviabiliza qualquer atividade com toda uma turma no LabInf, pois obriga que cada computador seja utilizado, ao mesmo tempo, por pelo menos três alunos.

Além disso, como a escola é inclusiva, ela dispõe de uma Sala de Recursos Generalista, para atendimento de alunos com necessidades educacionais especiais (ANEE), no contra turno, pois os mesmos, num total de 24 estudantes, são enturmados normalmente, em suas respectivas séries. Oferece também, aos alunos com transtorno funcionais, a Sala de Apoio à Aprendizagem, que funciona como polo, pois atende também, a outras escolas próximas. Possui um Serviço de Orientação Educacional (SOE).

Segundo o Currículo em Movimento, da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), em consonância com a Lei de Diretrizes e Base (LDB - Lei 9394/96) em seu art.35, um dos objetivos do Ensino Médio é a consolidação dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento nos estudos. Nesse sentido, a escola, no seu Projeto Político Pedagógico (PPP), reconhece que não pode perder de vista que o seu trabalho também deve caminhar para a construção de oportunidades de inclusão e ascensão social dos estudantes das escolas públicas ao Ensino Superior e ao pós-médio. O acesso à universidade faz parte dessas perspectivas de transformação da realidade social dos alunos, o que revela, em suas ações pedagógicas, um perfil preparatório para a continuidade de estudos posteriores. Conforme [12],

> programas de avaliação e seleção (PAS/UnB[1], Vestibular-UnB e o próprio ENEM[2]) são instrumentos relevantes de transformação social e que devem ser estimulados e incentivados nas escolas públicas. Além do mais, alunos motivados e com objetivos concretos tornam-se mais atuantes, críticos, agentes de um protagonismo juvenil com o poder de transformar a realidade. (p. 17).

Portanto, conforme consta em seu Projeto Político Pedagógico, o CEM 02 do Gama assume como sendo um de seus objetivos, o de incentivar e oferecer condições para que os seus alunos participem dos processos seletivos de acesso ao Ensino Superior, em particular, o ENEM e o PAS/UnB.

> Ainda como resultado dos debates realizados, percebe-se que a comunidade escolar exige maior empenho da escola com relação às avaliações externas, portanto, proporemos também ações facilitadoras e estimuladoras da participação dos alunos no PAS/UnB - Programa de Avaliação Seriada, Vestibular UnB e ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio, assim como outras formas de acesso ao ensino superior. [12]

2.2 Perfil do aluno

O CEM 02 do Gama não atende somente aos alunos da comunidade próxima a ela, mas também, alunos da zona rural do Gama (até 15 km de distância da escola), de Santa

[1]Programa de Avaliação Seriada da Universidade de Brasília
[2]Exame Nacional do Ensino Médio

Maria (10 km) e do entorno sul do Distrito Federal (10 km à 40 km). Esta condição torna o universo dos alunos do CEM 02 do Gama bastante heterogêneo em relação aos conhecimentos adquiridos e também ao processo de aprendizagem ([12], p. 7). Aliás, muitos alunos têm relatado problemas pedagógicos vivenciados em suas escolas de origem, como frequentes trocas de professores numa mesma série, ou mesmo a falta de professor por longos períodos.

Esses alunos abdicam do direito de estudar em escolas próximas as suas residências e escolhem escolas mais distantes, em outras cidades, cuja distância chega, às vezes, a 40 km, como é caso de alunos que moram nos arredores de Luziânia, na perspectiva de fugir dos problemas já citados, na tentativa de obter um ensino de melhor qualidade.

Fizeram parte desta pesquisa os alunos das 08 turmas de 3ª série do matutino com as quais eu trabalho (uma turma de 3ºano de outro professor foi usada como grupo de controle). A partir de um levantamento preliminar realizado com os alunos envolvidos, por meio de um questionário sócio educacional, ficou evidente que, 85% dos alunos possuem computador, 95% possuem smartphone e 97% tem acesso à internet. Nesse levantamento constatou-se que 42% dos alunos moram no entorno ou na zona rural, que 46% reconheceram não ter hábitos de estudos e 36% afirmaram não ter qualquer tipo de acompanhamento ou apoio escolar na realização das tarefas por parte de algum membro da família. Quanto à conhecimentos básicos em geometria plana e plano cartesiano, o questionário mostrou que, do total de alunos, 65% deles apresentaram dificuldades de determinar a posição de um ponto e também, localizar a partir de suas coordenadas, pontos no plano cartesiano. Também constatou-se que 40% deles não conseguem identificar os diferentes tipos de quadriláteros, mesmo quando apresentadas as ilustrações e definições; e quanto a determinação da distância entre dois pontos, 35% não conseguiram determinar a distância entre os pontos quando estes estavam numa reta paralela a um dos eixos coordenados e 70% não obtiveram êxito quando os pontos estavam numa reta diagonal em relação aos eixos coordenados. Por fim, 60% deles apresentaram dificuldades quanto ao uso e aplicação do Teorema de Pitágoras (tema fundamental no desenvolvimento do conteúdo de geometria analítica) na resolução de problemas. Estes resultados são analisados no capítulo 5.

Capítulo 3

Recursos utilizados

Este capítulo versa sobre os três principais recursos didáticos utilizados no desenvolvimento desta proposta de sequência didática: Geogebra, Geoplano e Caderno Quadriculado. Ressalta os benefícios proporcionados pela utilização destes, descreve as características, as principais aplicações no processo educativo, além dos embasamentos teóricos e as vantagens que justificam a utilização deles.

3.1 *Geogebra*

A presença cada vez mais forte da tecnologia na vida dos jovens é uma realidade. Também é inegável os impactos que esse novo perfil de aluno traz ao mundo escolar. Esse novo contexto traz novas responsabilidades tanto para as escolas quanto para os professores, sobre como usar essas tecnologias em prol do ensino aprendizagem pois, afinal de contas, não dá mais para ignorar a importância que o uso desses recursos tem no processo educativo. Nesse processo pedagógico, cabe ao professor o papel de não somente mediar, mas também de incentivar o uso desses recursos, permitindo que o aluno possa sair da sala de aula com plena capacidade de usufruir das possibilidades que o mundo digital oferece. "O acesso às tecnologias digitais e a formação dos estudantes em torno dessas tecnologias são fundamentais e devem ser desenvolvidos, ainda na seara das DCNEM[1], a partir de dimensões da formação humana" [18].

Em relação ao conteúdo matemático desenvolvido neste trabalho, [3] sugere:

> A Geometria Analítica é uma preciosa fonte para introduzir a utilização dos recursos computacionais, tanto para auxiliar o estudo de conceitos da Geometria Analítica através de seus recursos numéricos e gráficos quanto para começar a entender a Matemática envolvida nos programas computacionais. (2011, p. 313).

O *Geogebra* é um software educativo livre, criado pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter, cujo objetivo é auxiliar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Pode-se com ele, desenhar e manipular diferentes figuras geométricas, simulando diversas

[1]Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio

situações, e ao mesmo tempo visualizar as propriedades algébricas dos objetos construídos. O uso de recursos como este, "auxiliam na resolução de problemas, uma vez que permitem construções e efeitos pouco viáveis ou impossíveis de serem realizados apenas com lápis, papel e instrumentos de medição e desenho". ([44], 2016, p. 198). Aliás, como o próprio nome sugere, ele alia a geometria à álgebra. É um software de geometria dinâmica, gratuito, e pode ser obtido no site <www.geogebra.org>. Neste site pode-se, também, obter manuais e exemplos de aplicações e versões atualizadas do software. Como não é objetivo deste trabalho ensinar ao leitor a utilizar o *Geogebra*, as atividades realizadas com o uso deste software serão descritas de forma sucinta, ou seja, sem muitos detalhes. A figura 3.1, a seguir, mostra a tela inical do *Geogebra*.

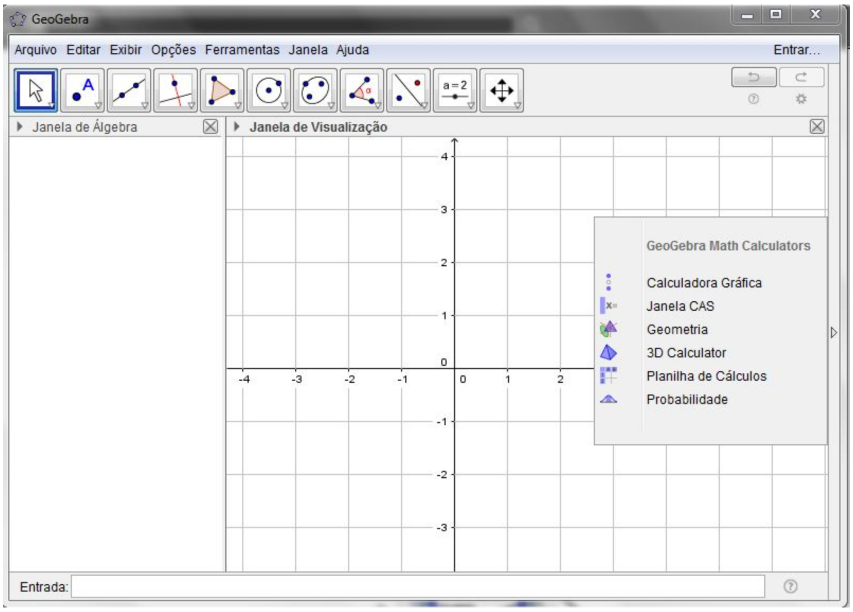


Figura 3.1: *Geogebra* - Interface. Fonte: O autor, produzido no geogebra.

Alguns livros didáticos já trazem como sugestão de atividades complementares o uso do *Geogebra*. A figura 3.2 (retirada de um livro didático do Ensino Médio), mostra a tela inicial do *Geogebra* e algumas de suas funções:

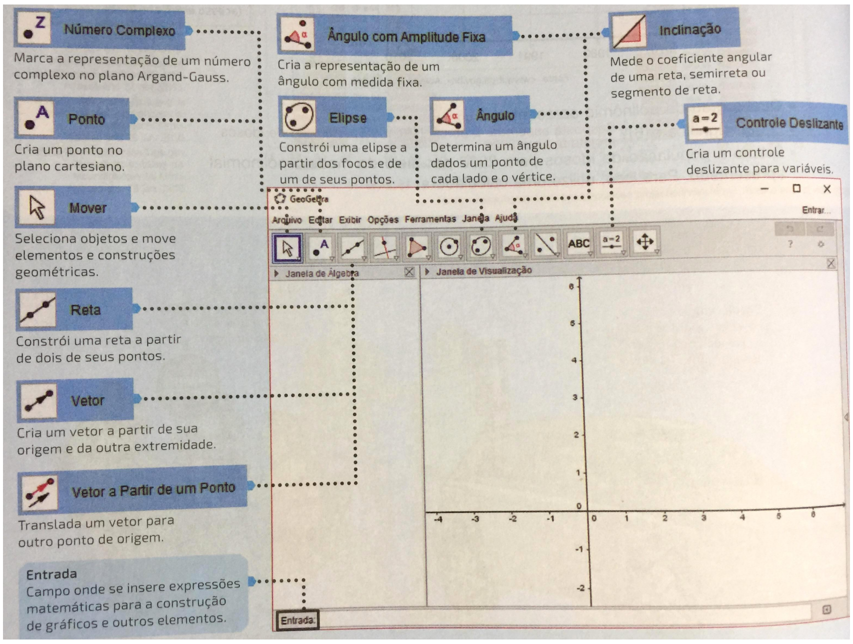


Figura 3.2: *Geogebra* - Algumas funções. Fonte: [44], p. 198

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que orientam os professores na busca de novas abordagens e metodologias de ensino, os recursos didáticos assumem grande importância quando fazem com que o aluno pense sobre e crie hipóteses a respeito dos objetos de aprendizagem.

> Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática. ([7], p. 15).

Apesar da recomendação dos PCNs quanto ao uso dessas tecnologias no processo de ensino aprendizagem, percebe-se que a utilização de softwares educativos, como o *Geogebra*, por parte dos professores de escolas públicas, ainda é muito restrita. Nota-se, em conversas com colegas de escola, que muitos deles desconhecem este software, ou o conhecem de maneira superficial e não se sentem seguros para aplicá-lo em sala de aula. Há ainda os professores que o conhecem, mas não se sentem motivados para utilizá-lo, devido à falta de estrutura que há na escola. O que é lamentável pois, além de ser um recurso didático muito útil no processo de ensino aprendizagem do aluno, o *Geogebra* pode ser, também, um importante aliado do professor nesse processo, na simulação e construção de questões, exercícios e atividades diversas, como pode-se constatar no desenvolvimento deste trabalho.

3.2 Geoplano

Em geral, as aulas de Matemática se resumem a quadro de giz ou pincel, livro didático e caderno, onde o aluno é um mero receptor de conteúdo elaborado, ou seja, ele é um mero agente passivo que não participa da construção do saber. Este fato faz com que as aulas sejam maçantes, e desenvolva no aluno uma apatia pela aprendizagem da Matemática. Instrumentos metodológicos tem sido propostos pelos estudiosos em Educação para o professor utilizá-los em suas atividades didáticas. O uso de materiais manipuláveis em atividades que estabeleça uma interação significativamente relevante entre os novos conhecimentos e aquilo que o aluno já sabe, pode ser uma alternativa interessante para o enfrentamento desse problema. Assim, de acordo com [16],

> Na sala de aula, durante a ação pedagógica, é fundamental o papel que o material didático manipulável pode desempenhar na aprendizagem. Entende-se por materiais didáticos manipuláveis, todos os objetos que solicitam muitos sentidos e que podem ser tocados, modificados, ajustados e manipulados de diferentes formas.

O Geoplano é uma importante ferramenta para o processo de ensino aprendizagem de temas da Geometria plana. O objeto é formado por uma placa de madeira onde são cravados pregos (ou parafusos), formando uma malha composta por linhas e colunas dispostas de modo a formar o chamado geoplano retilíneo ou quadrangular [2]. Segundo [38], o Geoplano foi criado pelo matemático inglês Caleb Gattegno em 1961 e, a partir dele, outros pesquisadores em ensino da Matemática passaram a utilizar esse material como uma ferramenta para o ensino de Geometria Plana elementar e para o ensino de frações, dentre outros. Originalmente constituído de um pedaço de madeira medindo, geralmente, 20 cm de largura e 20 cm de comprimento, com pregos cravados a meia altura formando um quadriculado. A palavra geoplano vem do inglês "geoboards" ou do francês "geoplans" onde "geo" vem de geometria e plano, tábua ou tabuleiro ou superfície plana dando a origem da palavra. Pode ser confeccionado de diversos tamanhos e formas, de acordo com a aplicação. Embora o Geoplano retilíneo seja o mais comum, há também, outros tipos de Geoplanos, dentre eles, o triangular e o circular que, de modo geral, eles são caracterizados pela sua malha, que pode ser quadriculada, triangular, circular, etc.

Geoplano é um importante recurso didático pedagógico, não só no ensino da geometria (área, perímetro, polígonos, etc), mas também da aritmética (frações e número irracionais) e da álgebra, por exemplo. É um instrumento dinâmico, já que permite manipulação das figuras formadas (movimentando, construindo e desfazendo), simulando diversas situações e, desta forma, dando um apoio na representação mental e na abstração dos estudantes. De acordo com [29], ele

> contribui para explorar problemas geométricos e algébricos, possibilitando a aferição de conjecturas e podendo-se registrar o trabalho em papel ou reproduzi-

[2]Há uma versão virtual que pode ser encontrada em (http://www.mathplayground.com/geoboard.html)

> lo em papel quadriculado... é um meio, uma ajuda didática, que oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes. (p. 1)

Segundo ([40]apud [38], p. 2), "em um sentido mais extenso o geoplano constitui um suporte concreto da representação mental, um recurso que leva à realidade idéias (sic) abstratas".

A utilização de materiais didáticos manipuláveis (concretos), como o Geoplano, é de fundamental importância no processo ensino aprendizagem, pois faz com que o aluno visualize e desenvolva alguns conceitos geométricos. Essa ideia vai ao encontro do que diz [27]:

> Palavras não alcançam o mesmo efeito que conseguem os objetos ou imagens, estáticas ou em movimento. Palavras auxiliam, mas não são suficientes para ensinar. [...] o fazer é mais forte que o ver ou ouvir. [...]o "ver com as mãos" é mais popular do que geralmente se supõe. [...] as pessoas precisam "pegar pra ver", como dizem as crianças. Então, não começar o ensino pelo concreto é ir contra a natureza humana. (p. 17-20).

Ainda, segundo [11], "o Geoplano proporciona para a aprendizagem dos alunos um ambiente investigativo, envolvendo assim o professor e o aluno na construção do conhecimento e consequentemente da aprendizagem." Pelo exposto acima, fica evidente a importância desse material no processo ensino aprendizagem da Matemática.

3.2.1 Modelos de Geoplanos

A seguir, são apresentados alguns tipos mais comuns de Geoplano. É importante ressaltar que, no Geoplano utilizam-se elásticos do tipo para amarrar dinheiro, ou também, barbantes, de preferência, com cores variadas.

A figura 3.3 mostra o tipo de Geoplano utilizado em atividades propostas neste trabalho, o retangular que é o modelo mais comum. Existem também, outros modelos, como o geoplano isométrico ou triangular (figura 3.4) e o geoplano circular (figura 3.5).

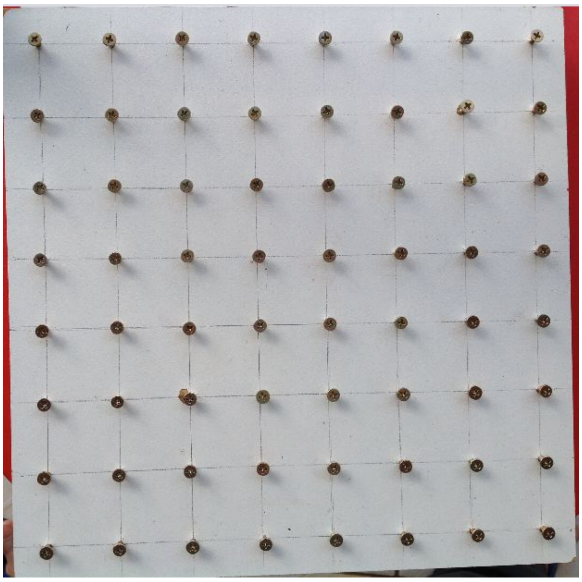


Figura 3.3: Retangular. Fonte: O autor.

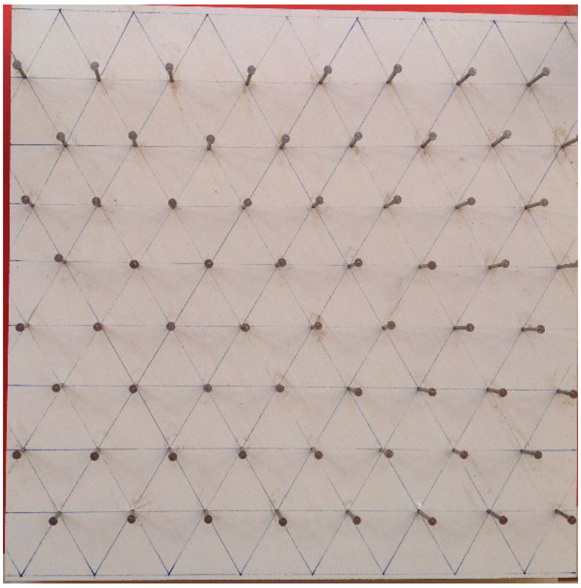


Figura 3.4: Isométrico. Fonte: O autor.

Observação: Estes geoplanos, aqui apresentados, foram construídos durante um curso de confecções de material didático para laboratório de Matemática, "Experiências e Problemas em Geometria"[3], ministrado pela professora Ana Maria Redolfi de Gandulfo, na Universidade de Brasília, em 2006. Foram confeccionados com MDF[4] de $10mm$ de espessura, inicialmente com pregos que mais tarde foram substituídos por parafusos (para obter uma melhor fixação), com dimensões $29cm \times 29cm$, de tal maneira que, se necessário, pode-se agrupar quatro ou mais deles para formar um maior, conforme a figura 3.6.

[3]Neste curso, professores do Ensino Básico das escolas públicas do DF confeccionavam o próprio material didático, para posterior utilização em suas escolas. O custo do material utilizado foi financiado pela UnB.

[4]*Medium Density Fiberboard*, em português, placa de fibra de média densidade. Trata-se de um painel de madeira reconstituída, produzido por meio da aglutinação de fibras de madeira com resinas sintéticas e aditivos. As placas de madeira são coladas umas sobre as outras com resina, e fixadas através de pressão.

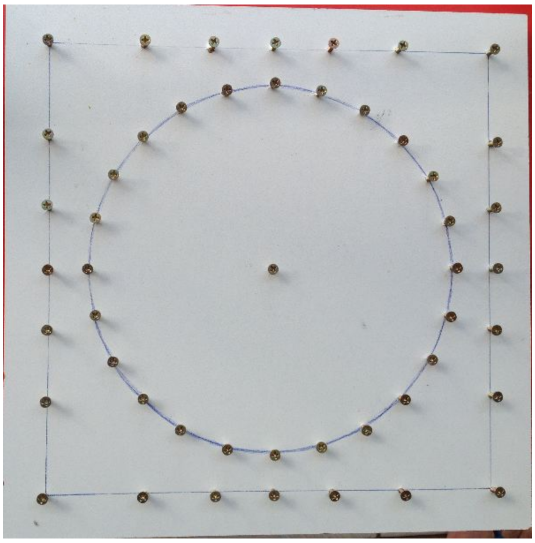


Figura 3.5: Circular. Fonte: O autor.

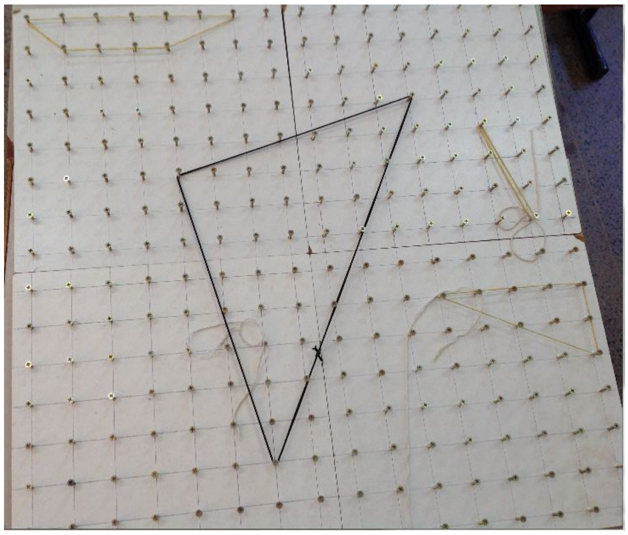


Figura 3.6: Geoplanos. Fonte: O autor.

A figura 3.7 mostra um exemplo de aplicação do Geoplano retilíneo em atividades de geometria analítica (o cálculo da área e do perímetro de um triângulo qualquer no plano cartesiano); e a figura 3.8 mostra os Geoplanos (um geoplano por dupla de alunos) utilizados pelos alunos nas atividades propostas ao longo do desenvolvimento da sequência didática.

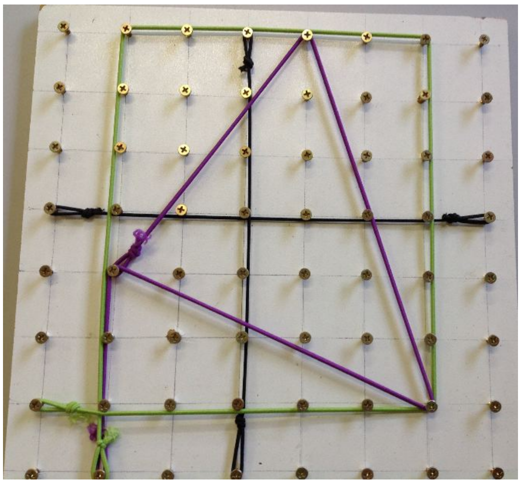


Figura 3.7: Área. Fonte: O autor.

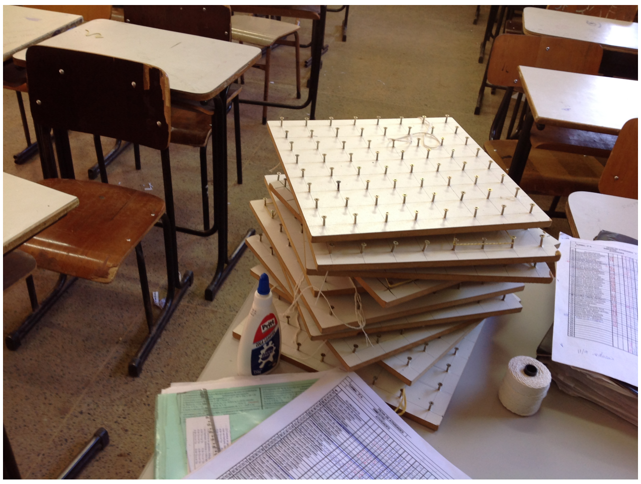


Figura 3.8: Geoplanos usados. Fonte: O autor.

As figuras 3.9 e 3.10 mostram exemplos de aplicação de um Geoplano circular e do triangular, em atividades de trigonometria como, por exemplo, redução ao 1º quadrante, e de geometria como, estudo de polígonos regulares e outros polígonos.

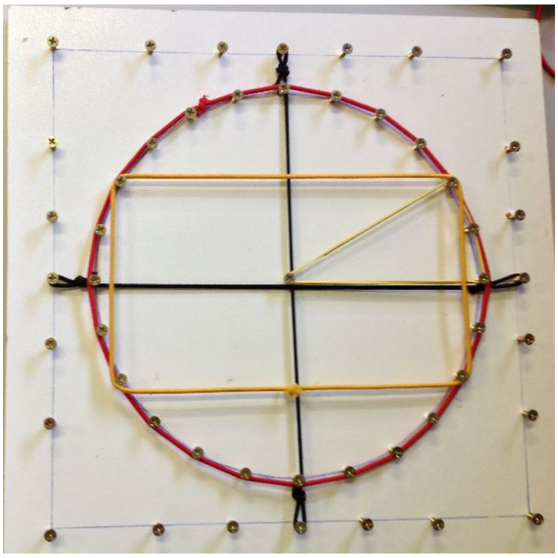


Figura 3.9: 1º quadrante. Fonte: O autor.

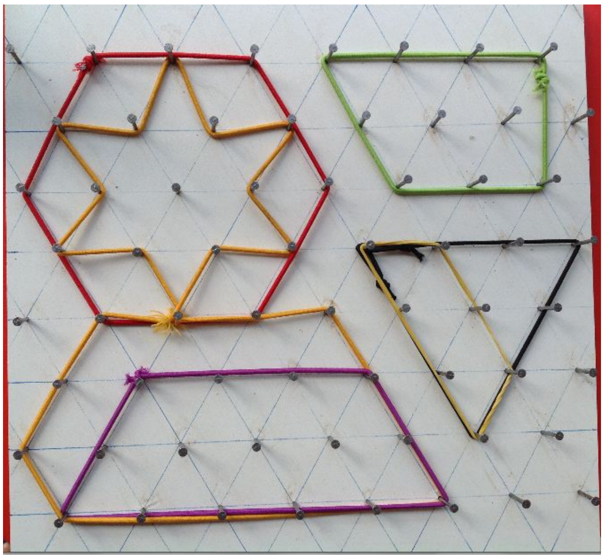


Figura 3.10: Polígonos. Fonte: O autor.

3.3 Caderno Quadriculado

3.3.1 Na Educação Infantil

Na Educação Infantil o caderno quadriculado tem várias utilidades como ajudar a criança a aprimorar a escrita, pois escrevendo dentro dos quadrados, irá limitar e regular a letra, preparando a criança para usar, futuramente, o caderno com pauta com maior segurança, ajudando-a, também, a melhorar sua percepção espacial, conforme ilustram as figuras 3.11 e 3.12.

No início, dependendo das condições da criança em relação à sua coordenação motora, pode-se adotar quadrados maiores que os da folha e, de forma suave, fazer a transição para o quadrado menor, conforme a figura 3.12

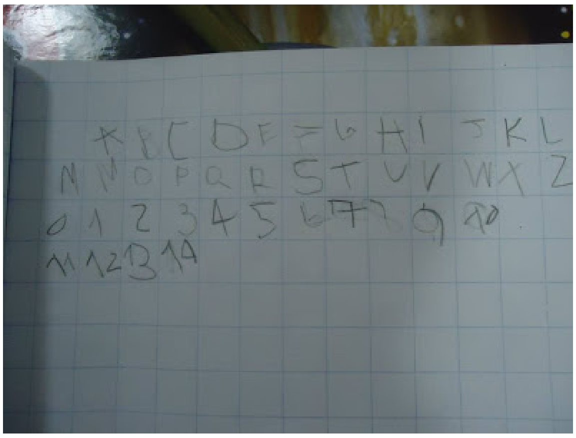


Figura 3.11: Letra criança de 4 anos
Fonte: http://estimulandomeusfilhos.blogspot.com.br/2013/08/super-herois-exercicios-de-coordenacao.html

Figura 3.12: Usando quadrados maiores
Fonte: http://estimulandomeusfilhos.blogspot.com.br/2013/08/super-herois-exercicios-de-coordenacao.html

Na hora de efetuar operações matemáticas básicas, a folha quadriculada será de grande ajuda para que a criança consiga alinhar os algarismos por ordem e classe, conforme ilustram as figuras 3.13 e 3.14.

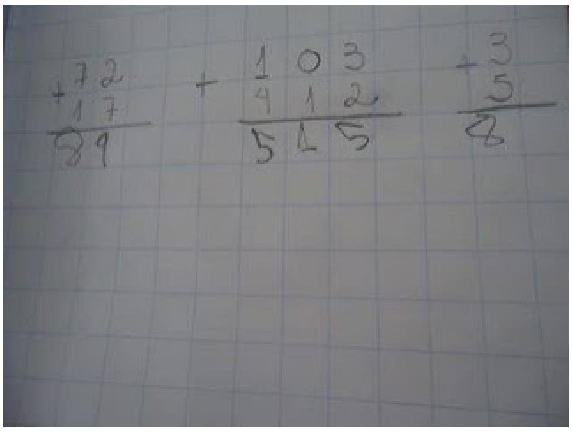


Figura 3.13: Adição
Fonte: http://estimulandomeusfilhos.blogspot.com.br/2013/08/super-herois-exercicios-de-coordenacao.html

Figura 3.14: Executando atividade
Fonte: http://estimulandomeusfilhos.blogspot.com.br/2013/08/super-herois-exercicios-de-coordenacao.html

3.3.2 No Ensino Fundamental II e Médio

Apesar das facilidades que o uso do caderno quadriculado (ou folha quadriculada) pode proporcionar na execução de atividades que envolvam operações com frações, cálculo de área e perímetro de polígonos, construção de gráficos, de tabelas e de desenhos em geral (veja a figura 3.15) e em muitas outras atividades, percebe-se que tanto no Ensino Fundamental II (do 6º ao 9º ano) quanto no Ensino Médio não é dada a devida importância (como ocorre na Educação Infantil) às vantagens que este recurso pode oferecer. Afinal, ele pode ser usado, entre outras coisas, para registrar situações simuladas no Geoplano ou Geogebra ou, independentemente do uso destes dois recursos, registrar qualquer atividade que envolva construções de desenhos geométricos, etc. A figura 3.15 ilustra uma aplicação deste recurso no Desenho Técnico Industrial, mostrando as vistas ortográficas ou ortogonais de uma peça.

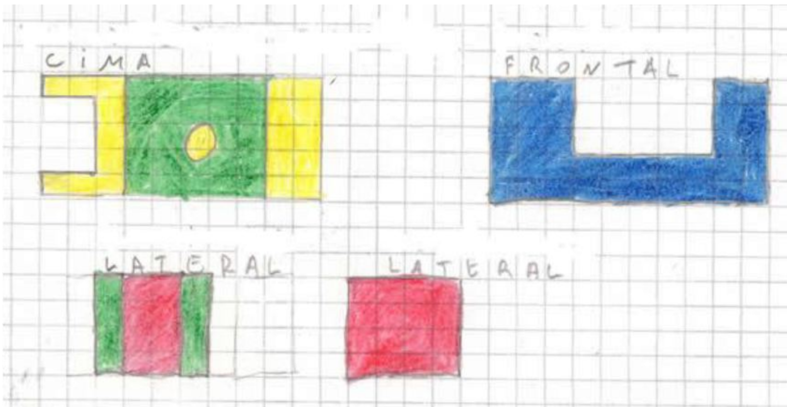
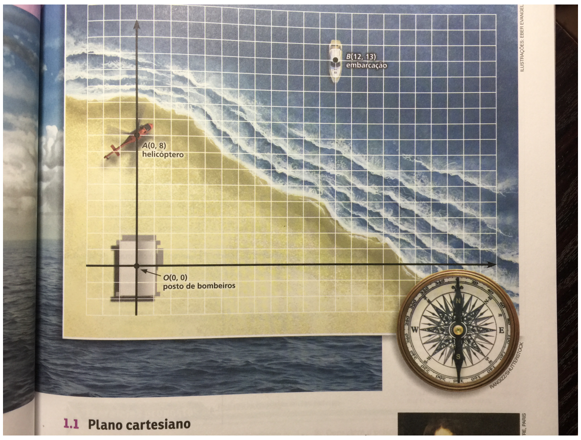


Figura 3.15: Vistas ortográficas. Fonte: [2].

Portanto, é inegável a facilidade que o seu uso proporciona, na construção de gráficos, tabelas e polígonos. Nesta linha de pensamento, [4] indaga:

> Acredita-se que a proposta de utilizar o papel quadriculado contempla a ampla possibilidade de um recurso de baixo custo, acessível e de construção de vários conceitos matemáticos. A partir do papel quadriculado, pode-se introduzir ou reforçar os seguintes conceitos: frações, porcentagem, perímetro, área, diagonal, múltiplos, divisores, menor múltiplo comum e simetria, em diferentes níveis de ensino.(p. 5)

Outro motivo, bastante importante para justificar o uso deste recurso (a folha quadriculada ou o caderno quadriculado), é a forma como algumas avaliações externas, em particular o Enem, abordam as questões de geometria analítica (conforme anexo C), sempre utilizando uma malha quadriculada. Fato este que não é exclusividade das questões de geometria analítica, pois o mesmo ocorre, também, com questões de outros conteúdos e de outras disciplinas, além da Matemática. É também notória a sua utilização nos atuais livros didáticos do Ensino Básico (vide figuras 3.16 e 3.17) e também em livros de nível superior (vide figuras 3.18 e 3.19), fato que não ocorria alguns anos atrás.



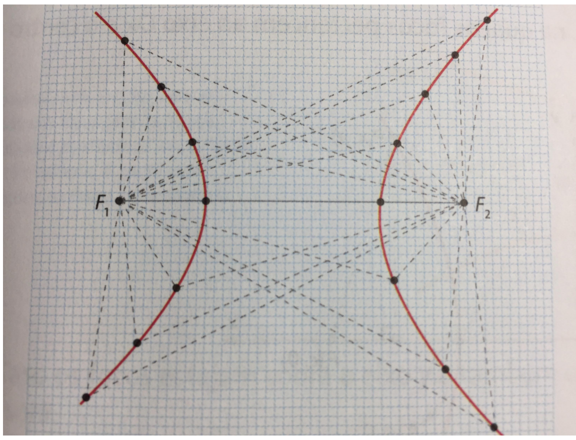
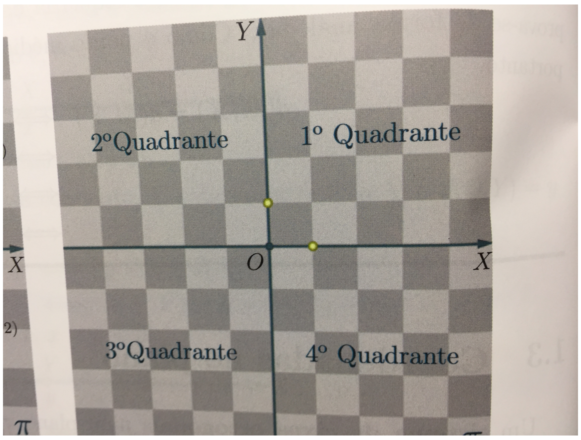


Figura 3.16: Plano cartesiano. Fonte: [24]. Figura 3.17: Hipérbole. Fonte: [14], p. 135



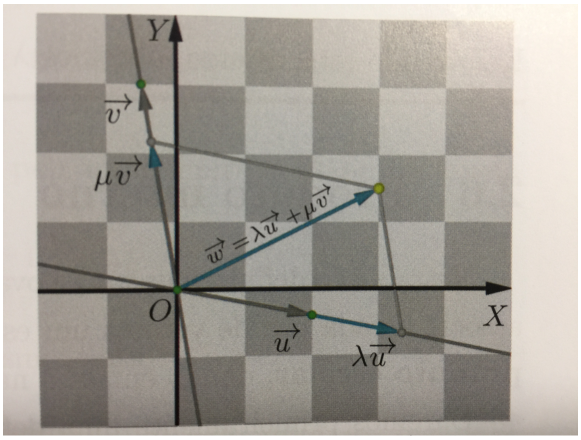


Figura 3.18: Quadrantes. Fonte: [15], p. 6. Figura 3.19: vetores. Fonte: [15], p. 33

Algumas destas questões do ENEM podem ter suas resoluções efetivadas na própria malha quadriculada, de maneira simples e geométrica, como é caso da questão abaixo:

(**Enem 2013 - Adaptado**) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinais às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano, da figura 3.20

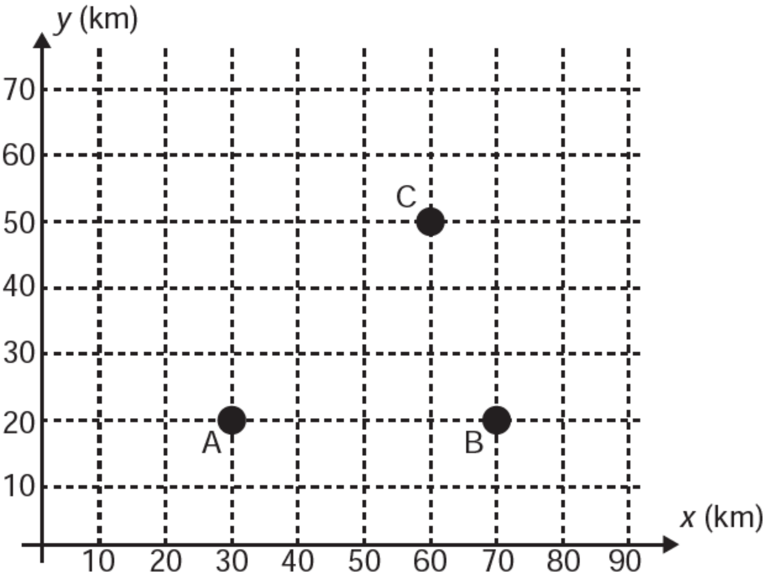


Figura 3.20: Enem 2013 questão 178 cinza

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas
a) (65;35).
b) (53;30).
c) (45;35).
d) (50;20).
e) (50;30).

Solução: Construindo os três triângulos retângulos de catetos 2 e 1,(ou seria 20 e 10), conforme a figura 3.20, as suas hipotenusas terão a mesma medida. Conclui-se então, que o vértice comum aos três triângulos construídos é o ponto procurado. Logo o ponto de coordenadas (50;30) é equidistante das antenas localizadas nos pontos A, B e C. Portanto, a alternativa correta é a letra “e”. A figura 3.21 ilustra geometricamente esta solução.

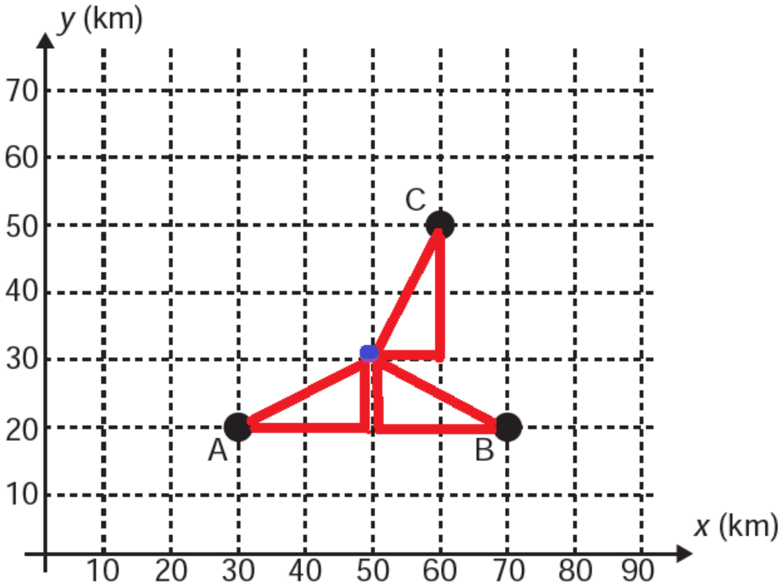


Figura 3.21: Enem 2013 questão 178 Resolução

Procedimentos geométricos como este, além de fornecer a resolução do problema em si, favorece também a percepção espacial de posição e a ideia de equidistância, associando conceitos algébricos, geométricos e aritméticos, proporcionando assim, ao aluno, uma aprendizagem significativa e multidisciplinar.

Existem diversos formatos e tamanhos de caderno quadriculado, (veja as figuras 3.22 e 3.23). Ele pode ser encontrado em formato de espiral ou de brochura, com tamanhos $140mm \times 200mm$, $200mm \times 275mm$, além de outros tamanhos. As quadrículas apresentam dimensões $5mm \times 5mm$, $7mm \times 7mm$ ou $10mm \times 10mm$, entre outras. Embora qualquer um dos modelos e tamanhos citados possa ser utilizado no desenvolvimento deste conteúdo, para um melhor aproveitamento e rendimento das folhas do caderno quadriculado, recomenda-se o tamanho $200mm \times 275mm$, com quadrículas $7mm \times 7mm$, de 96 folhas, e com o formato em espiral que permite um melhor manuseio das folhas. A folha milimetrada (figura 3.24) poderia ser uma alternativa à folha quadriculada, mas como subdivisões da unidade no sistema cartesiano quase não ocorre nesse processo, então é preferível utilizar a folha quadriculada. Uma sugestão válida, neste caso, é o uso da folha pontilhada (figura 3.25).

Figura 3.22: Cadernos. Fonte: O autor.

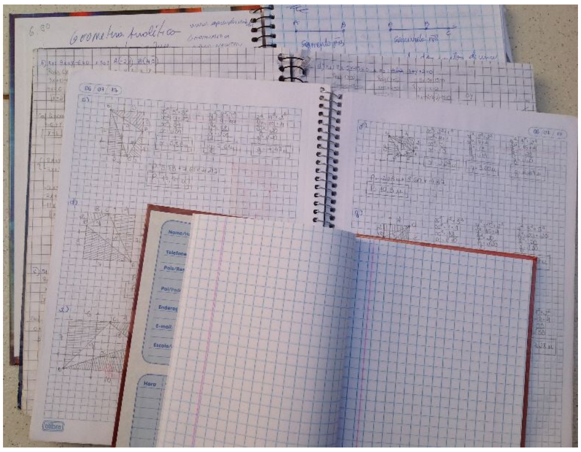


Figura 3.23: Malhas. Fonte: O autor.

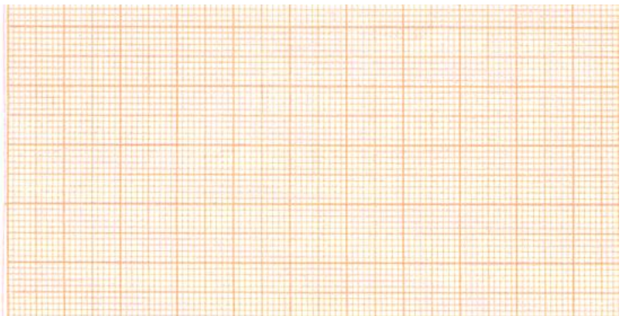


Figura 3.24: Milimetrado. Fonte: O autor, foto

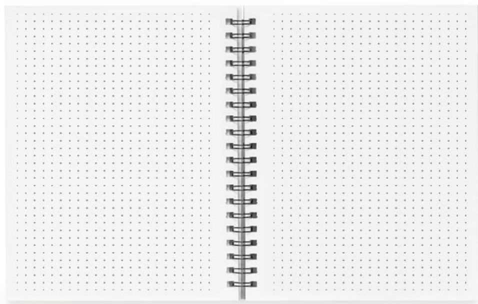


Figura 3.25: Pontilhado. Fonte: O autor, foto.

Além da malha quadriculada, existe também, a malha isométrica ou triangular (que pode ser pontilhada), assim como ocorre com o Geoplano. Esta malha é muito útil na construção de alguns polígonos regulares e, principalmente, na representação gráfica de sólidos geométricos, com vistas em perspectiva, e com isso, contribui para o desenvolvimento da percepção espacial do aluno. Note, nas ilustrações da figura 3.26, como é possível perceber, obter ou construir uma figura espacial como o cubo a partir de uma figura plana como o hexágono. Se no Desenho Técnico Industrial a malha quadriculada facilita a representação das vistas ortográficas de um objeto (c.f. figura 3.15), a malha isométrica facilita a construção da vista em perspectiva, como pode-se ver na figura 3.27.

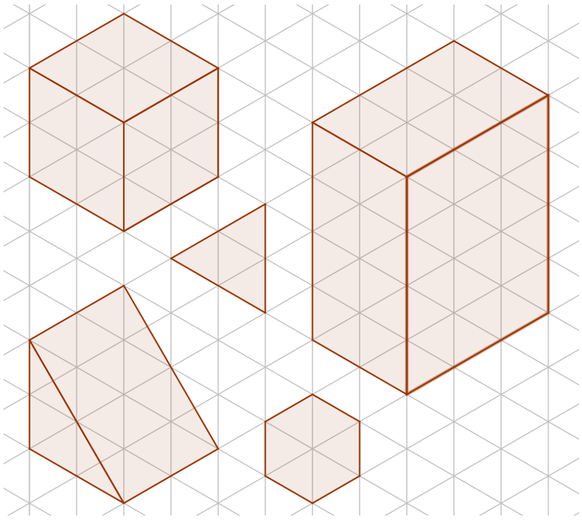


Figura 3.26: Sólidos em perspectiva 1
Fonte: O autor, produzido no Geogebra

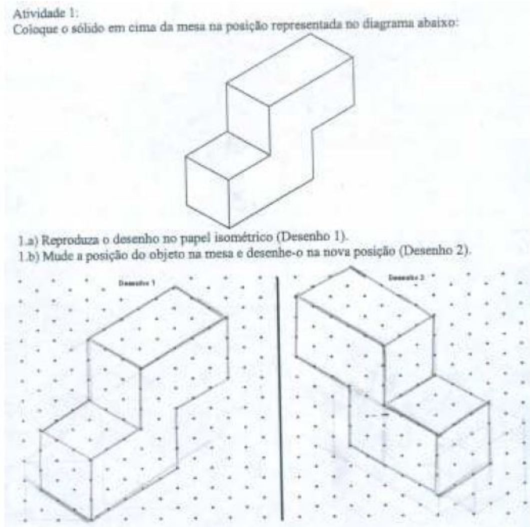


Figura 3.27: Sólidos em perspectiva 2
Fonte: [5], anexos

Entretanto, vale ressaltar que, apesar da importância da utilização de recursos didáticos no processo de ensino aprendizagem, cabe ao professor mediar, gerenciar, determinar o que, o como e o quando da aplicação desses recursos. Ao encontro desse pensamento, [13] afirma:

> Não há dúvidas quanto à importância do professor no processo educativo. Fala-se e propõe-se tanto educação à distância quanto outras tecnologias na educação, mas nada substituirá o professor. [...] O novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos, (p. 73).

Se por um lado o *Geogebra* pode simular situações, na maioria das vezes, impossíveis de se construir com apenas lápis, papel e material de desenho, por outro, o Geoplano como recurso didático pedagógico e manipulável que é, possibilita que o aluno manuseie, visualize, simule e construa situações que servem de apoio para que ele atinja certo nível de abstração e, consequentemente, a formação de conceitos geométricos. Dessa forma nesse processo educativo, com esses dois recursos didáticos, se estabelece uma interação entre a simulação no campo virtual e a manipulação do concreto. Em relação à utilização de material concreto, [27] adverte: "antes de lidarem com objetos matemáticos, as pessoas precisam lidar com objetos físicos. [...] o concreto é necessário para a aprendizagem inicial, embora não seja suficiente para que aconteça a abstração matemática". Ele considera que, para se alcançar a abstração é necessário que se comece pelo concreto, da mesma forma que, para se conseguir o rigor é preciso, inicialmente, abrir mão dele.(p. 19-20).

Portanto, fechando esse "tripé" dos três recursos utilizados no desenvolvimento dessa sequência didática, o caderno quadriculado entra também como facilitador dos registros de todas as situações simuladas, visualizadas, construídas, seja em atividades com o uso do *Geogebra*, ou do Geoplano, seja em qualquer outra atividade que necessite da construção de gráficos, tabelas, polígonos, independente da utilização, ou não, do Geogebra ou Geoplano, pois ele é, por si só, um poderoso recurso didático. Sendo assim, como a Geometria Analítica plana é pautada num Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais e, portanto, num plano quadriculado, a utilização deste recurso (caderno ou folha quadriculada) se faz necessária e oportuna. Daí, em função da abordagem geométrica que será dada no desenvolvimento deste conteúdo, todas as atividades serão feitas, também, no caderno quadriculado.

> A Geometria analítica está fundamentada na ideia de representar os pontos da reta por números reais e os pontos do plano por pares ordenados de números reais [...] é possível tratar algebricamente muitas questões geométricas, como também interpretar de forma geométrica algumas situações algébricas. ([14], p. 69).

Por fim, além do uso desses recursos didáticos, não se deve esquecer de outro aliado importante nesse processo, o livro didático, que é disponibilizado aos alunos da escola pelo PNLD[5], cujo livro atualmente adotado pela escola é o [14].

[5]Programa Nacional do Livro e do Material Didático – Programa, do Ministério da Educação (MEC), de distribuição de livros didáticos, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica.

Capítulo 4

Sequência didática

Neste capítulo descrevem-se os procedimentos, aula a aula, desenvolvidos na sequência didática aplicada ao longo do terceiro bimestre, em turmas de 3ªsérie do Ensino Médio. Nesta, explora-se de forma geométrica, tópicos de Geometria Analítica previstos no Currículo em Movimento da SEEDF, a partir das atividades desenvolvidas durante vinte e duas aulas (com duração de 50 minutos cada).

Sequência didática é um termo em educação, usado para definir um procedimento encadeado de passos, ou etapas ligadas entre si para tornar mais eficiente o processo de aprendizado. Pode ser definida como uma sucessão planejada de atividades progressivas e articuladas entre si, guiadas por um tema, um objetivo geral ou uma produção. De acordo com [35], sequência didática corresponde a um conjunto de atividades articuladas que são planejadas com a intenção de atingir determinado objetivo didático.

Nesta proposta, opta-se por uma abordagem mais geométrica (gráfica) do que algébrica (analítica), quando da explanação de tópicos de geometria analítica presentes no currículo da 3ª série do ensino médio (no estudo do ponto, da reta e da circunferência), e também na resolução dos problemas a eles relacionados. A ideia principal é que cada atividade proposta seja resolvida de forma geométrica, utilizando como principais recursos o geoplano, as folhas quadriculadas (ou caderno quadriculado) e o *software Geogebra* para, enfim, utilizar soluções algébricas e suas aplicações na resolução de problemas. Desta forma é possível trabalhar, ao mesmo tempo, elementos de álgebra, de geometria e até mesmo de aritmética, proporcionando, assim, a integração destes campos da Matemática. Conforme [27],

> Para muitos alunos, essa integração pode ser um apoio para a aprendizagem, pois facilita a percepção do significado de conceitos e símbolos. [...] a presença de figuras exerce importante papel na aprendizagem matemática, porque elas possibilitam aos alunos a visualização do todo, bem como das partes que o compõem e, assim, facilita o desenvolvimento da habilidade mental de operar com as partes sem perder de vista o todo. (p. 70).

Refazer um mesmo problema, mesmo que de outra forma ou método, permite ao aluno reavaliar o resultado final e o caminho percorrido até este, podendo, assim, consolidar o seu conhecimento e, também, aperfeiçoar a sua capacidade de solucionar problemas. [36] (p. 12).

Em muitas das atividades e questões propostas ao longo desse processo procura-se, sempre que possível, contextualizar os problemas pois,

> Aprender Matemática de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno ... ([8], p. 111).

Além disso,

> A contextualização, além de cumprir o papel de facilitar a descrição de uma situação-problema a ser resolvida, de modo a propiciar que a competência ou habilidade a ser avaliada se expresse, tem o papel de motivar o estudante para resolver a atividade proposta... ([37], p. 179).

Observação1: Em função das dificuldades apresentadas quanto ao uso do laboratório de informática, a maioria das atividades com uso do *Geogebra* é apresentada e orientada pelo professor em sala de aula, através de projeção com data show (c.f. figura 4.1), para que os alunos possam fazer em casa, as atividades propostas, e depois enviar ao professor via e-mail.

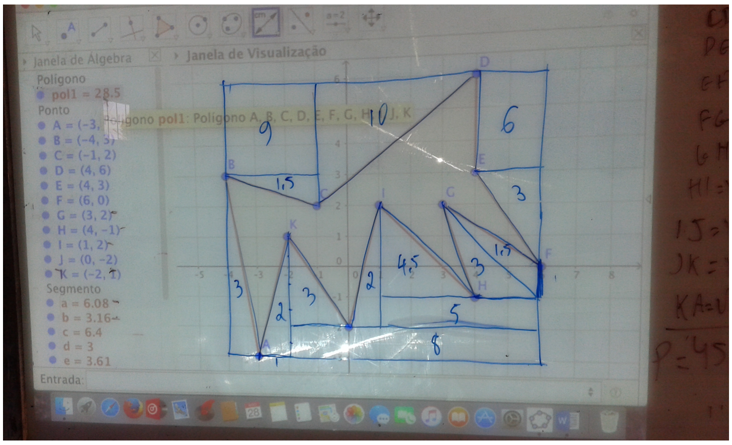


Figura 4.1: Correções. *Geogebra* usando datashow. Fonte: O autor.

Observação 2: Esta sequência de atividades e exercícios não substitue o livro didático, afinal ele é usado como material de apoio e a cada atividade desenvolvida, exercícios e leitura de textos deste livro são indicados aos alunos.

4.1 Aula 01 - Aplicação do questionário

Objetivos: Aplicação do questionário (vide apêndice D) para fazer levantamento do perfil sócio econômico do aluno, e dos seus conhecimentos básicos em geometria plana.

Atividade 01

Aplicação do questionário para fazer levantamento do perfil sócio econômico do aluno, e dos seus conhecimentos básicos em geometria plana.

4.2 Aula 02 - Explorando o sistema cartesiano

Objetivos: Retomar os conceitos básicos envolvendo plano cartesiano (vistos no Ensino Fundamental), como localização de pontos, distância entre pontos na reta, e explorar as dificuldades apresentadas pelo questionário sócio pedagógico.

Desenvolvimento: Após breve explanação sobre sistema cartesiano, na lousa (de forma contextualizada, associando o plano cartesiano ao mapa de uma cidade, ou comparando as coordenadas cartesianas com as coordenadas geográficas, por exemplo – a figura 4.2, com a representação dos paralelos e meridianos, pode ser uma sugestão), os alunos recebem uma folha com a atividade já impressa, e a resolvem na própria folha. Discussões acerca da ordem dos elementos de um par ordenado (x, y), e a relação entre os sinais das coordenadas, e o quadrante ao qual um determinado ponto pertence, são levantadas.

> O emprego de coordenadas no plano serve a dois propósitos que se complementam. O primeiro é, [...], o de atribuir um significado geométrico (e com isto dar maior conteúdo intuitivo) a fatos de natureza numérica, [...], que ganha muito em clareza quando se olha para seu gráfico. ([25], p. 7)

Justificativa: No processo da aprendizagem significativa, o fato mais importante é o conhecimento que o aluno já tem e, a partir dos resultados obtidos no questionário aplicado na aula anterior, e também das observações feitas em sala, nota-se a necessidade de resgatar alguns conceitos geométricos fundamentais para o desenvolvimento desse processo.

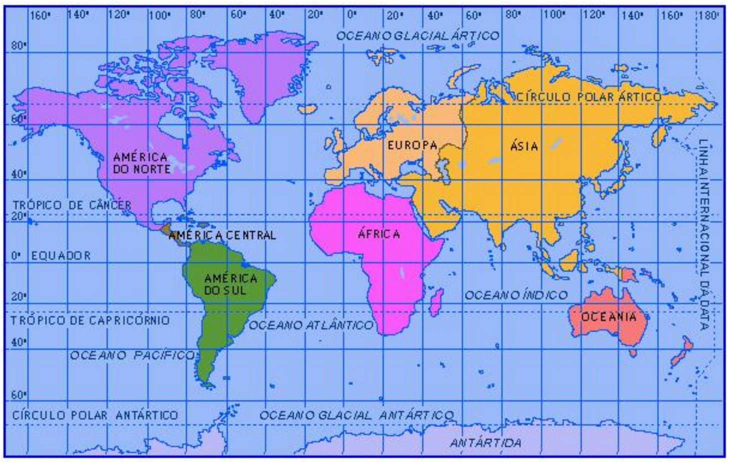


Figura 4.2: Paralelos e meridianos
Fonte: http://colealarcon.blogspot.com.br/2016/10/el-mapa-mundi.html

Além das atividades envolvendo coordenadas geográficas, com o objetivo de resgatar as noções básicas de posição e localização de pontos no plano cartesiano pode-se, também, utilizar a atividade 'Batalha naval geométrica' (sugerida em [33], p. 44) e assim, rever e/ou reforçar os conceitos de geometria plana além, obviamente, de estar trabalhando noção de posição num sistema de coordenadas.

Observação: A notação utilizada no Ensino Médio (presente, também, na maioria dos livros didáticos), para representar um ponto P qualquer e suas coordenadas x e y é $P(x, y)$. Aqui, será usada a notação $P = (x, y)$, até porque a primeira notação não é aceita pelo *geogebra*.

Atividade 02

2.1.Localize no plano cartesiano da figura 4.3, os pontos $P = (-5, -2), Q = (6, -1), R = (4, 0), S = (0, 5), T = (4, 5), U = (-5, 2), V = (4, -2), W = (-1, 6)$ e $Z = (-4, 2)$, e determine a qual quadrante cada um pertence.

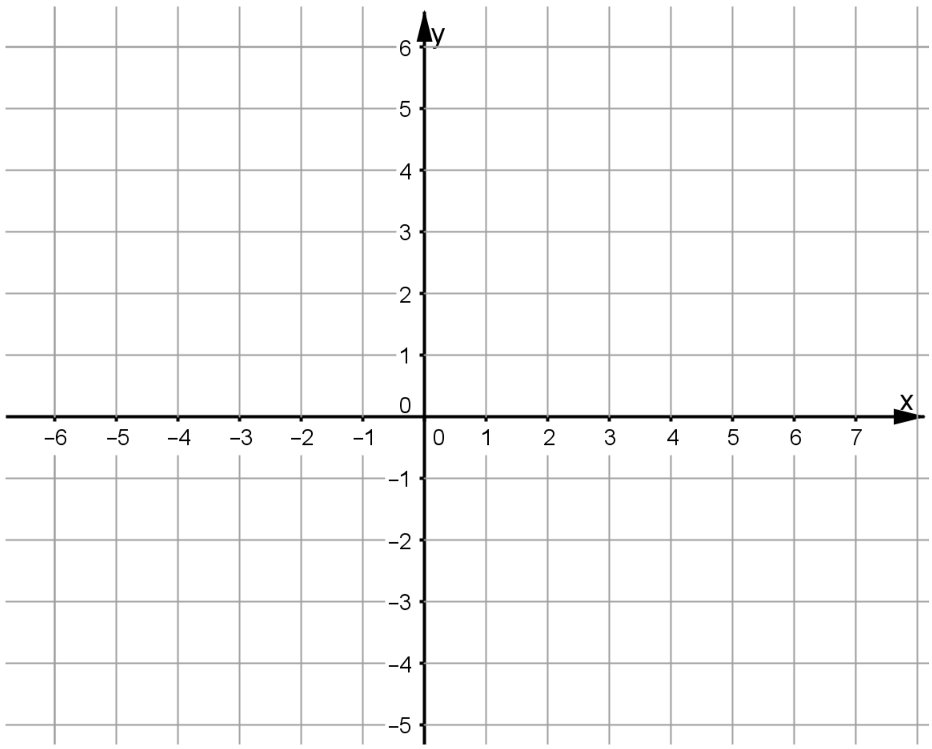


Figura 4.3: Plano Cartesiano 1
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

2.2.Determine as coordenadas dos pontos $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N$ e O, localizados no plano cartesiano da figura 4.4.

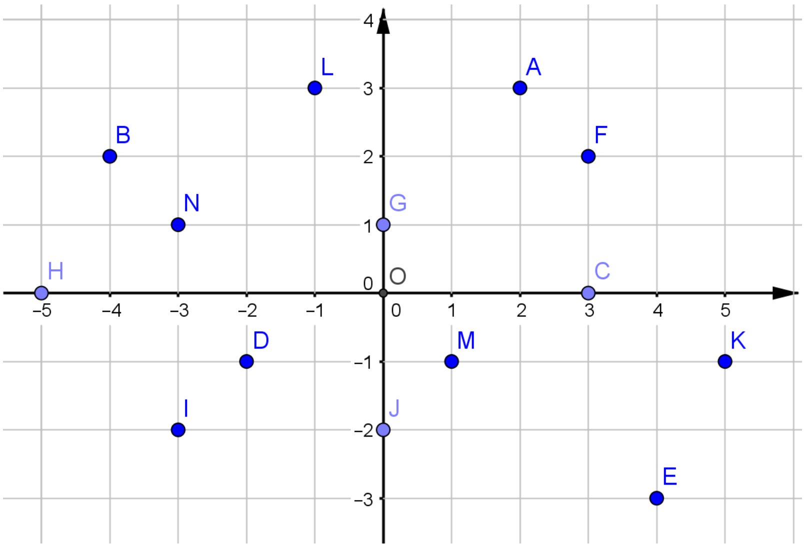


Figura 4.4: Plano Cartesiano 2
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

2.3.Determine, no plano cartesiano da figura 4.5, a distância entre os dois pontos indicados:

a) $d(A, B) =$ b) $d(A, E) =$ c) $d(A, D) =$ d) $d(A, C) =$

e) $d(E, M) =$ f) $d(K, L) =$ g) $d(F, H) =$ h) $d(H, J) =$

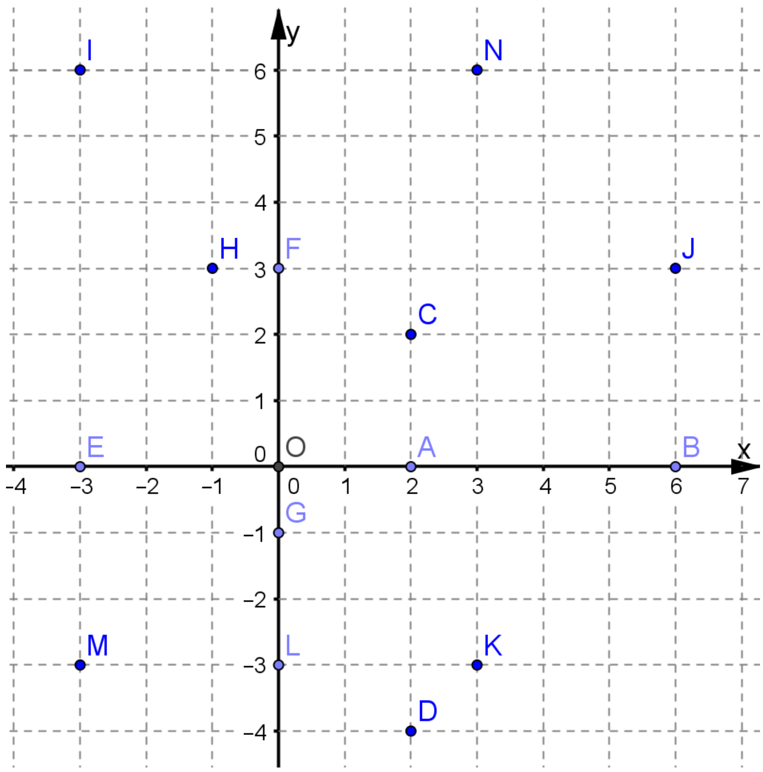


Figura 4.5: Plano Cartesiano 3
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

4.3 Aula 03 - Conhecendo o *Geogebra*

Objetivos: Explorar as primeiras ferramentas do *geogebra*, como "mover", "ponto"e "segmento", e a janela de álgebra e de visualização, por meio do exercício **2.1**.

Desenvolvimento: Esta atividade pode ser realizada no laboratório de informática. Sob orientação do professor, os alunos digitam na caixa de entrada, os pontos P, Q, ..., Z, conforme descrito no exercício **2.1**. Em seguida, usando a ferramenta "ponto", eles clicam na janela de visualização, conforme as posições dos pontos A, B, ..., O, na figura do exercício **2.2**. E enfim, usando a ferramenta "comprimento", determinam as distâncias entre dois pontos, conforme o exercício **2.3**. Com isso, os alunos podem confrontar os resultados obtidos no *Geogebra* com as soluções da atividade 02.

Figura 4.6: Ferramentas: Mover, Ponto e Segmento
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

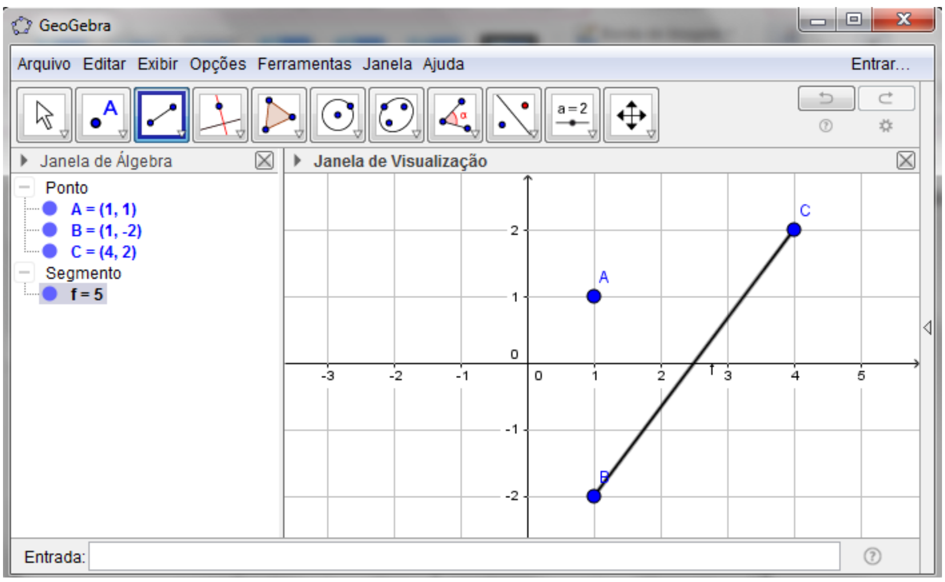


Figura 4.7: Interface Geogebra, Construção do segmento BC
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

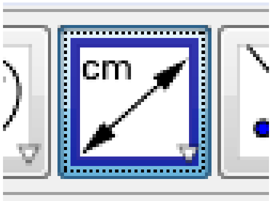


Figura 4.8: Comprimento, distância ou perímetro
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

Atividade 03

A atividade desta aula consiste em refazer, no *Geogebra*, os exercícios **2.1**, **2.2** e **2.3**, conforme já descrito no desenvolvimento.

4.4 Aula 04 - Triângulos no geoplano

Objetivos: Definir uma unidade de medida de comprimento (u) na malha quadriculada, e explorar a aplicação do Teorema de Pitágoras, que será fundamental na construção da fórmula da distância entre dois pontos.

Desenvolvimento: Constróem-se com elásticos, triângulos retângulos no geoplano, e com o auxílio de um cordão, determina-se o valor aproximado da medida da hipotenusa em cada triângulo. Em seguida, transfere-se o desenho para a folha quadriculada e, aplicando o teorema de Pitágoras, determinaram o valor exato da medida da hipotenusa (c.f. figuras 4.9 e 4.10).

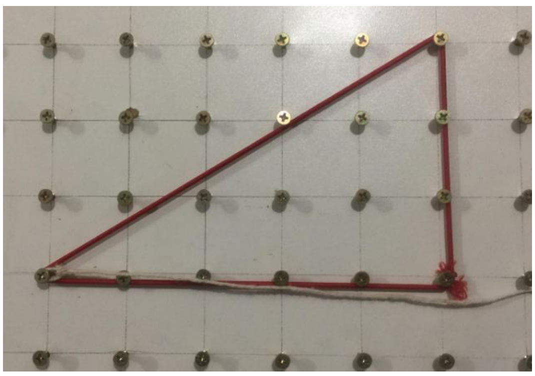


Figura 4.9: A medida da hipotenusa. Fonte: Próprio autor.

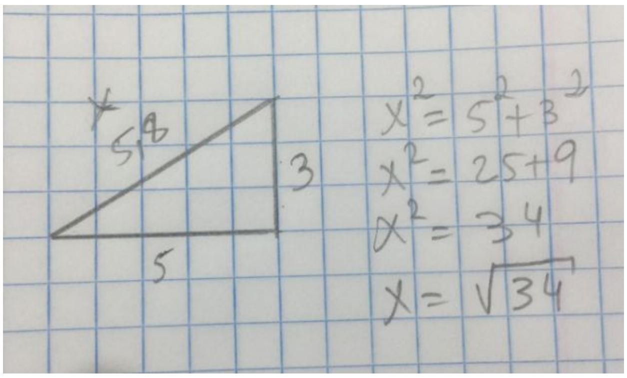


Figura 4.10: Teorema de Pitágoras. Fonte: Próprio autor.

Atividade 04

4.1. Construa no geoplano, triângulos retângulos cujas medidas b e c dos catetos estão indicadas abaixo e, em seguida, usando um barbante, determine o valor aproximado da medida a da hipotenusa.

a) $b = 2u, c = 3u$

b) $b = 1u, c = 3u$

c) $b = 4u, c = 3u$

d) $b = 2u, c = 2u$

e) $b = 5u, c = 3u$

f) $b = 2u, c = 4u$

g) $b = 3u, c = 3u$

h) $b = 2u, c = 5u$

4.2. Agora, transcreva os triângulos do geoplano para a folha quadriculada e, usando o Teorema de Pitágoras, determine o valor exato da medida a da hipotenusa.

4.3. **Desafio**: Construa no geoplano, segmentos cujo comprimento mede:

a) $\sqrt{2}u$

b) $\sqrt{5}u$

c) $\sqrt{32}u$

d) $\sqrt{17}u$

e) $\sqrt{50}u$

f) $\sqrt{26}u$

A seguir, transcreva o desenho para o caderno quadriculado.

4.5 Aula 05 - Distância entre dois pontos

Objetivos: Após finalizar a atividade 04, levar o aluno a observar, deduzir que a distância entre dois pontos equivale ao comprimento do segmento de reta que une esses dois pontos, e assim, por meio da aplicação do Teorema de Pitágoras, obter geometricamente o comprimento desse segmento, e então, generalizar esse processo para a fórmula da distância entre dois pontos no plano.

Desenvolvimento: Inicialmente, propõem-se atividades que seguem o roteiro do tutorial 1, abaixo descrito. Este tutorial, construído no *Geogebra*, é dinâmico, ou seja, pode-se manipular as posições dos pontos e, automaticamente, os valores das medidas dos lados do triângulo ABC se modificam. A seguir, nas figuras 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16, abaixo, estão descritos os passos para a utilização deste tutorial.

Tutorial 1 - Distância entre dois pontos

i. Dados os dois pontos, clique no 1º botão, conforme mostra a figura 4.11;

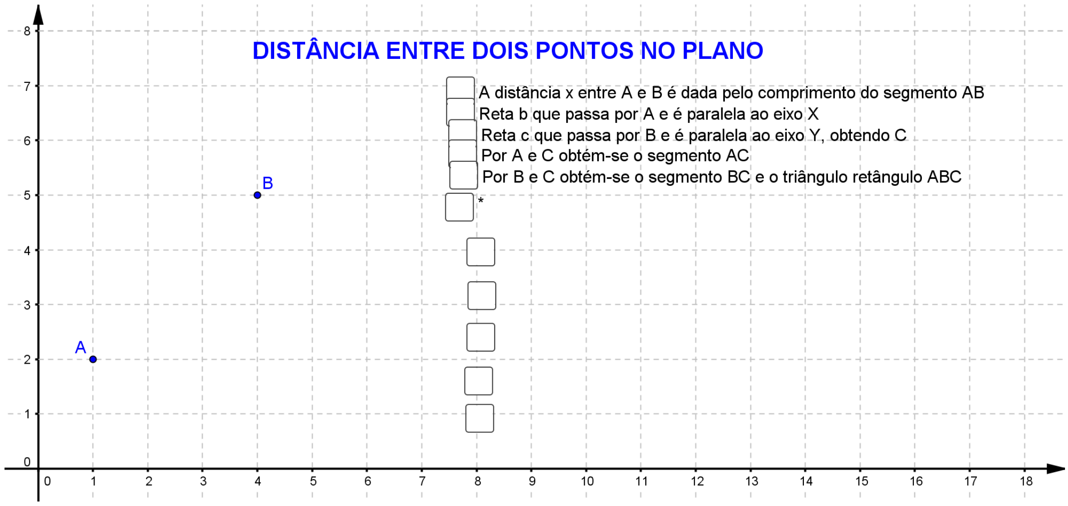


Figura 4.11: Tutorial 1: Distância entre dois pontos
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

ii. ao Clicar no 1º botão, Constrói-se um segmento AB de comprimento x, conforme mostra a figura 4.12;

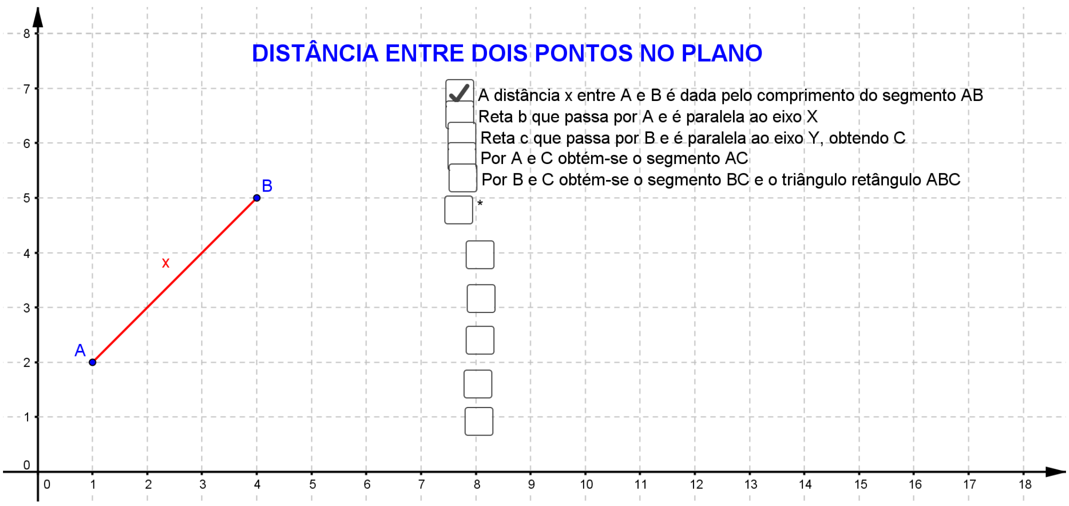


Figura 4.12: Segmento AB de comprimento x
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

iii. Clique no 2º e 3º botões, para construir por A e B, duas retas perpendiculares em C, representadas na figura 4.13 ;

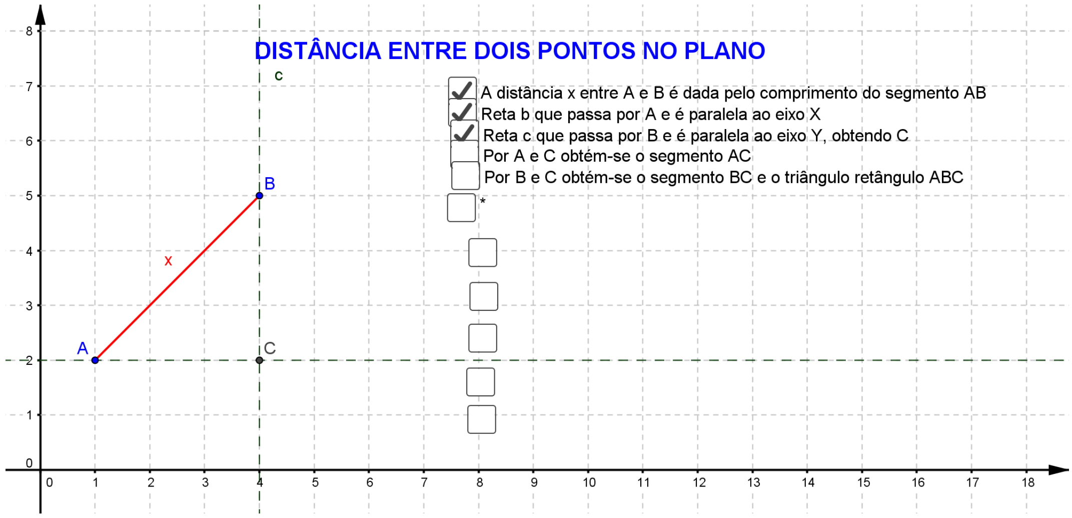


Figura 4.13: Perpendiculares em C
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

iv. Clique nos dois próximos botões, para obter os segmentos AC e BC, mostrados na figura 4.14;

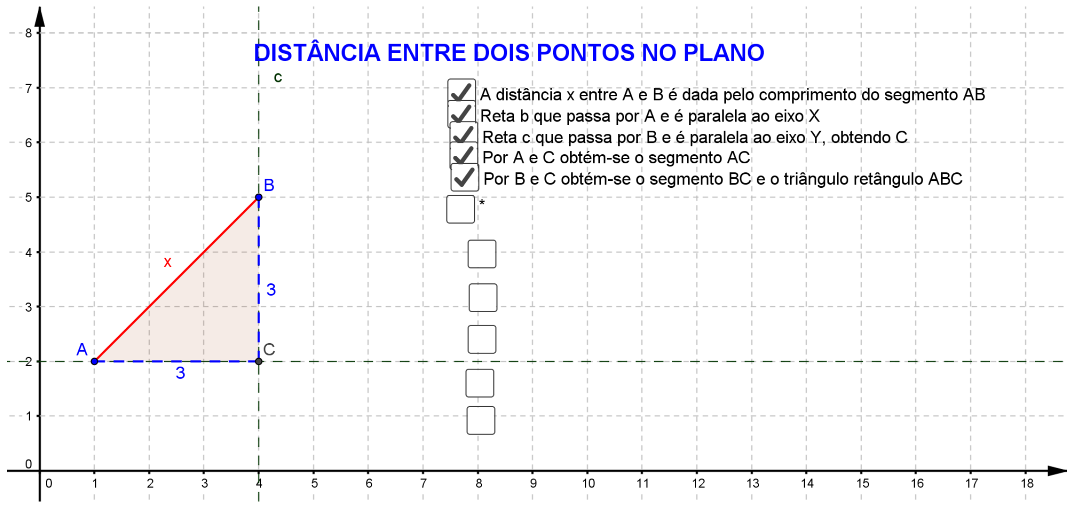


Figura 4.14: Obtendo os segmentos AC e BC;
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

v. Clique nos dois próximos botões, aplica-se o Teorema de Pitágoras, conforme mostra a figura 4.15;

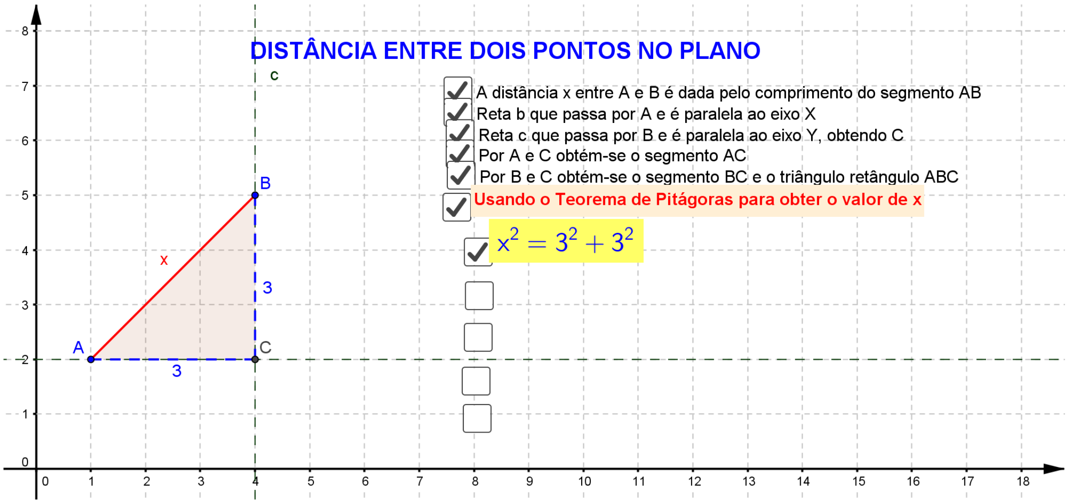


Figura 4.15: Aplicando o Teorema de Pitágoras;
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

vi. Ao clicar nos próximos botões, têm-se as etapas do cálculo do valor de x, e o resultao é mostrado, conforme a figura 4.16;

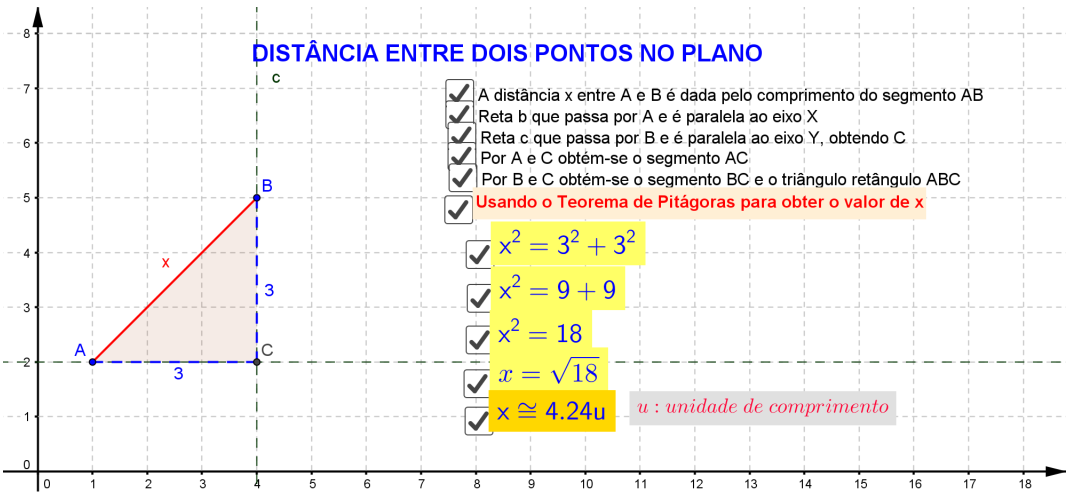


Figura 4.16: Etapas do càlculo do valor de x;
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

Observação: O roteiro de construção deste arquivo tutorial 1 está descrito no apêndice (A.1)

Agora, discute-se a relação entre esse processo de resolução e a origem da fórmula

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \qquad (4.5.1)$$

ou

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \qquad (4.5.2)$$

e então disponibiliza-se aos alunos, o arquivo geogebra da figura 4.17.

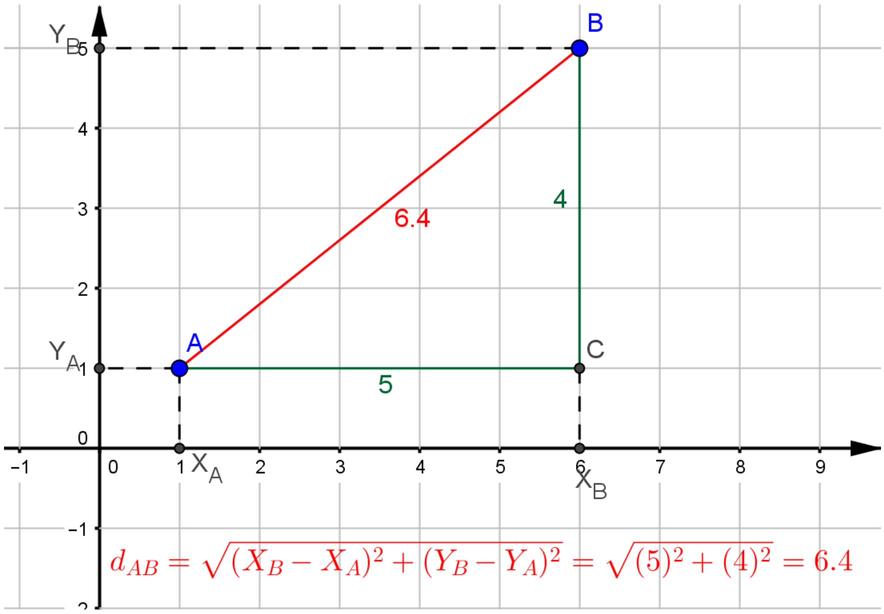


Figura 4.17: Distância entre dois pontos
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

Atividade 05

5.1. Construa na folha quadriculada um sistema cartesiano, determine os pontos A e B descritos abaixo e calcule a distância entre eles (forma geométrica e fórmula).

a) $A = (1, 2), B = (4, 6)$

b) $A = (1, -2), B = (4, 3)$

c) $A = (3, 2), B = (6, 8)$

d) $A = (3, -1), B = (-4, 6)$

e) $A = (6, 2), B = (-4, -2)$

f) $A = (-1, -3), B = (4, 5)$

5.2. Construa na folha quadriculada o triângulo ABC e determine seu perímetro, dados (utilize os processos geométrico e algébrico, usados na atividade **5.1**):

a) $A = (1, 6), B = (-5, 2)$ e $C = (-3, -2)$

b) $A = (1, -2), B = (4, 2)$ e $C = (-3, 4)$

c) $A = (3, 2), B = (-2, 5)$ e $C = (1, -2)$

d) $A = (3, -4), B = (-4, 1)$ e $C = (-1, 3)$

e) $A = (6, 2), B = (-4, -2)$ e $C = (2, 5)$

f) $A = (2, 2), B = (0, 1)$ e $C = (-2, 4)$

Observação: Depois de realizado o exercício **5.1**, disponibiliza-se o arquivo geogebra do tutorial 1 descrito nas figuras 4.11 a 4.16, para que os alunos possam checar suas respostas. Para o exercício **5.2**, disponibiliza-se também, o arquivo tutorial 2, descrito na figura 4.18, abaixo. A utilização do tutorial 2 é semelhante à do tutorial 1.

Tutorial 2 - Perímetro de um triângulo

A figura 4.18 mostra o resultado final do cálculo do perímetro de um triângulo, após seguir a sequência de passos destacadas no lado direito da mesma.

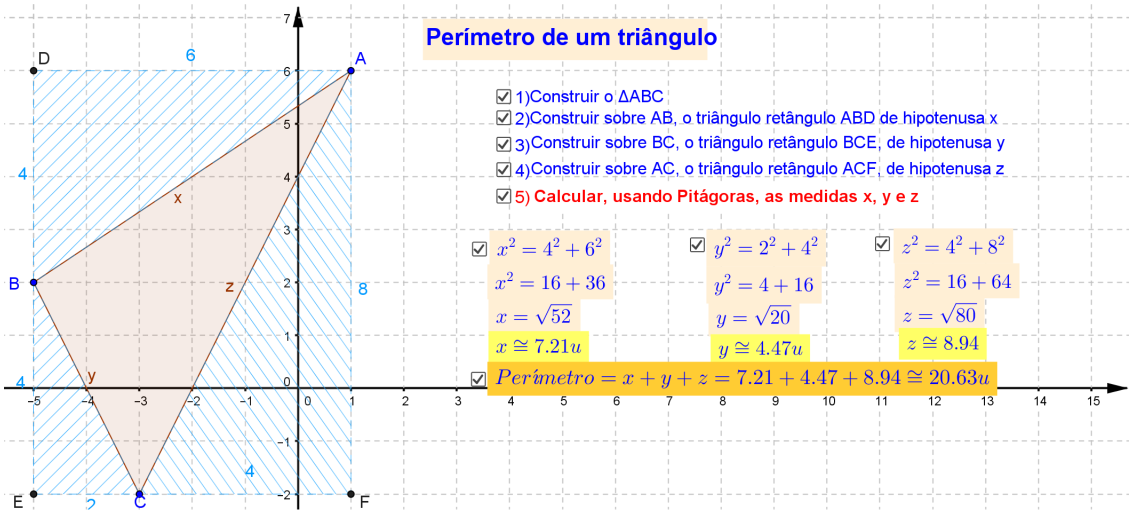


Figura 4.18: Tutorial 2 - Perímetro do triângulo
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

4.6 Aula 06 - Classificação de um triângulo

Objetivos: A partir do conhecimento adquirido na aula anterior, determinar as medidas dos lados de um triângulo qualquer e classificá-lo quanto aos lados e quanto aos ângulos.

Desenvolvimento: Depois de calculadas, a partir da definição, as medidas dos lados do triângulo, pode-se, então, classificá-lo como equilátero, isósceles ou escaleno. E na classificação quanto aos ângulos, o triângulo pode ser:

- retângulo se,
$$a^2 = b^2 + c^2,$$
- obtusângulo se,
$$a^2 > b^2 + c^2,$$
- acutângulo se,
$$a^2 < b^2 + c^2.$$

Atividade 06

6.1. Construa na folha quadriculada o triângulo ABC, determine seu perímetro e classifique-o quanto aos lados e quanto aos ângulos, dados (utilize os processos geométrico e algébrico, usados na atividade anterior):

a) $A = (-1, 5), B = (-4, -6)$ e $C = (3, -2)$

b) $A = (1, 2), B = (-4, -4)$ e $C = (5, -2)$

c) $A = (1, 6), B = (-3, -2)$ e $C = (6, 2)$

d) $A = (-1, 5), B = (6, 1)$ e $C = (3, -2)$

e) $A = (-1, -3), B = (6, 1)$ e $C = (2, -5)$

f) $A = (4, -2), B = (1, -5)$ e $C = (5, -6)$

Observação: Ao final desta atividade, disponibiliza-se o arquivo tutorial 3, descrito na figura 4.19 abaixo, para classificar um triângulo quanto aos ângulos, para que os alunos possam checar sua respostas.

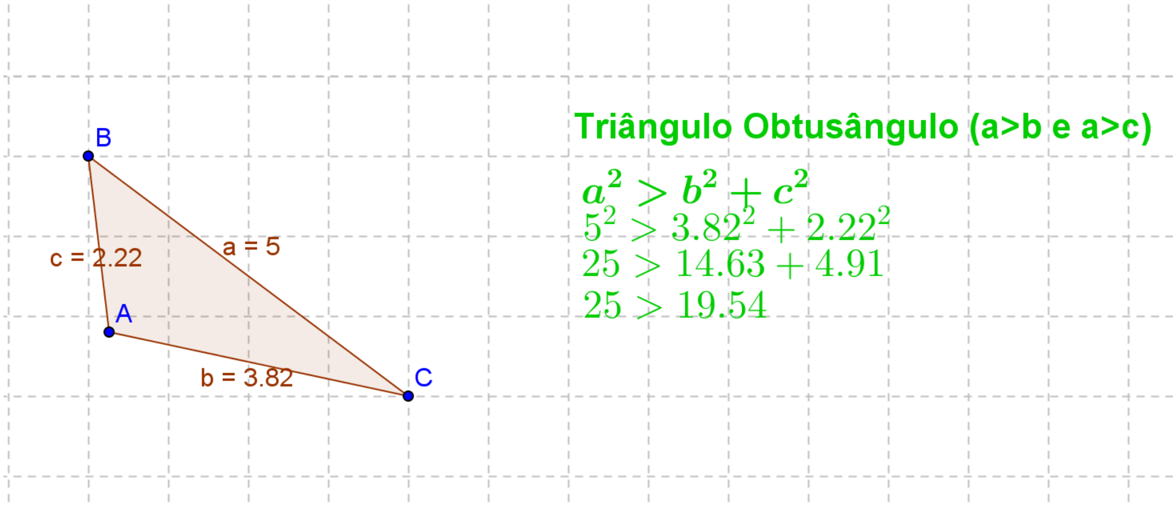


Figura 4.19: Tutorial 3 - Classificação do triângulo
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

4.7 Aula 07 - Ponto médio de um segmento

Objetivos: Determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta e as medianas de um triângulo.

Desenvolvimento: Com a resolução das atividades abaixo, espera-se que os alunos intuam que as coordenadas do ponto médio de um segmento de extremos A e B sejam exatamente as médias aritméticas, respectivamente, das abscissas e das ordenadas de A e

B. Para reforçar essa ideia, propõe-se, então, que eles refaçam as atividades, também, no *Geogebra*.

A figura 4.20 mostra, geometricamente, como obter os resultados descritos em (4.7.1)

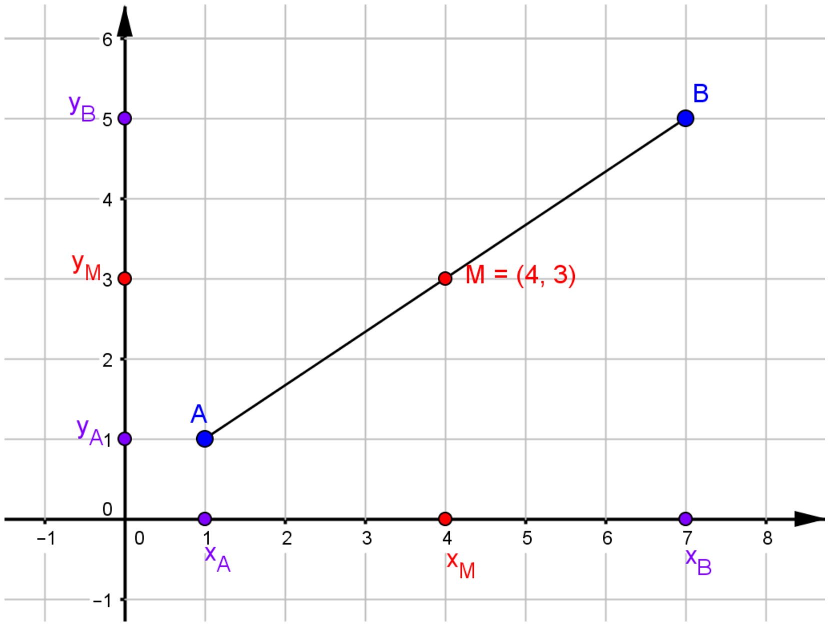


Figura 4.20: Ponto médio de um segmento
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

E assim, tem-se que;

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \;\; y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \tag{4.7.1}$$

Partindo da definição de ponto médio, pode-se então, construir as três medianas do triângulo, e assim, obter o baricentro que é o ponto G, de encontro entre as três medianas, (c.f. a figura 4.21), cujas coordenadas são dadas por (4.7.2).

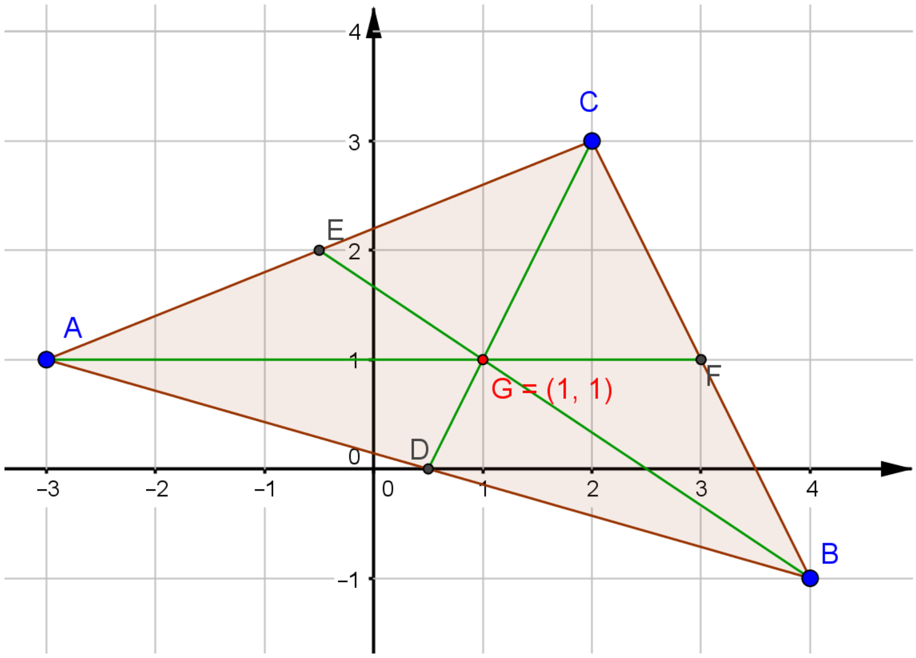


Figura 4.21: Baricentro
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \tag{4.7.2}$$

Atividade 07

7.1. Construa na folha quadriculada, um sistema cartesiano adequado e o segmento de extremos A e B, e então determine, geometricamente e algebricamente, as coordenadas do ponto M que divide o segmento ao meio, ou seja, seu ponto médio, dados:

a) $A = (1, 1)$ e $B = (7, 5)$

b) $A = (2, -2)$ e $B = (4, 4)$

c) $A = (3, 2)$ e $B = (5, -3)$

d) $A = (-3, 2)$ e $B = (-1, -2)$

e) $A = (-1, -2)$ e $B = (5, 2)$

f) $A = (0, 3)$ e $B = (4, 0)$

7.2. Construa na folha quadriculada um sistema cartesiano adequado e o triângulo ABC e suas três medianas e determine, geometricamente e algebricamente, as coordenadas do baricentro, dados:

a) $A = (-1, 1), B = (3, 5)$ e $C = (7, 3)$

b) $A = (-3, 1), B = (4, -1)$ e $C = (2, 3)$

c) $A = (1, 1), B = (-1, -3)$ e $C = (3, -1)$

d) $A = (-1, 2), B = (5, -1)$ e $C = (3, 5)$

e) $A = (2, -1), B = (0, 3)$ e $C = (4, 1)$

f) $A = (6, 3), B = (4, 1)$ e $C = (-1, -1)$

7.3. Refaça no *Geogebra*, todos os passos de execução desta atividade, para checar as respostas.

4.8 Aula 08 - Área de uma região triangular e condição de alinhamento de três pontos

Objetivos: Determinar a área de região triangular no plano cartesiano e ampliar esse conceito para polígonos.

Desenvolvimento: Depois de construído na folha quadriculada um sistema cartesiano adequado e o triângulo ABC, constrói-se sobre cada um de seus lados, um triângulo retângulo, formando-se um retângulo, conforme figura 4.22 (tutorial geogebra para calcular geometricamente a área de um triângulo no plano cartesiano). Então, da área desse retângulo, subtrai-se as áreas dos três triângulos retângulos, conforme a sequência de passos descrita na figura.

Observação: Nos livros didáticos o cálculo da área de uma região triangular é tratado, de forma meramente algébrica, ao final do capítulo do estudo da reta, após o tópico distância entre ponto reta. A decisão de deixá-lo junto com o tópico 'condição de alinhamento de três pontos' permite que se possa estabelecer a conexão entre a fórmula 4.8.1 e a equação 4.8.4, justificando o fato que, se três pontos como supostos vértices do triângulo estão alinhados, o triângulo se degenera em um segmento de reta e, nesse caso, é natural que sua área seja zero; também possibilita que se faça uma associação entre as resoluções analítica e geométrica facilitando a formação dos conceitos intrínsecos a esta questão.

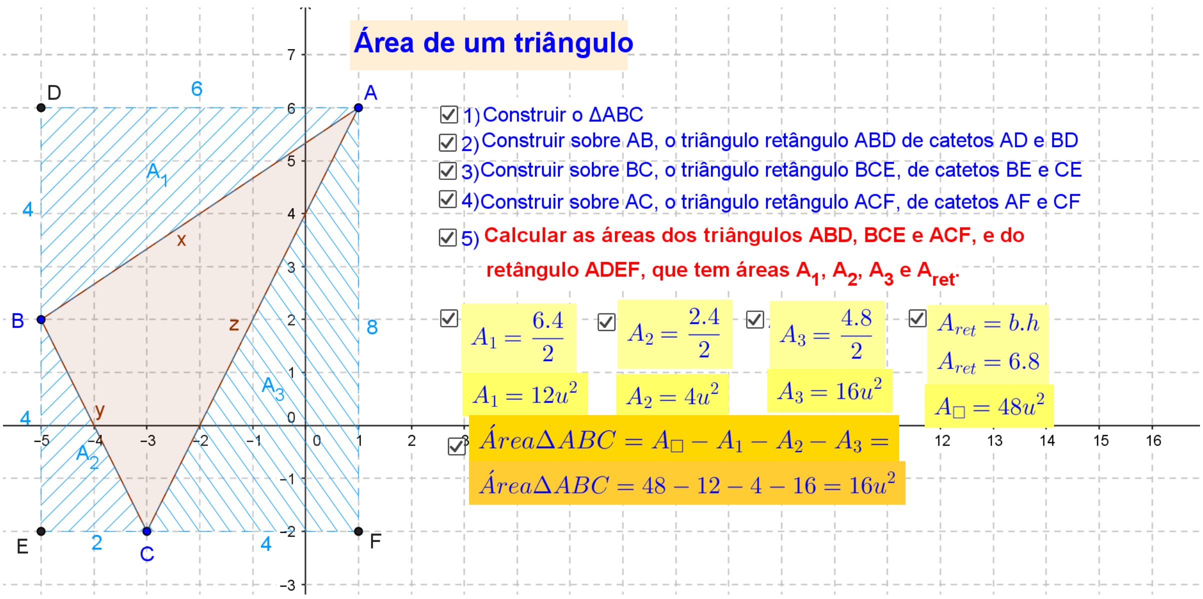


Figura 4.22: Tutorial 4 - Área do triângulo
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

Após discussão em torno da resolução geométrica da área(S) de uma região triangular, descrita na figura 4.18, apresenta-se, sem demonstração, o modelo algébrico do cálculo dessa área, dado pela fórmula 4.8.1

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\ D|, \tag{4.8.1}$$

com

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \tag{4.8.2}$$

onde $|\ D|$ é o valor absoluto do determinante D da matriz A associada, com,

$$A = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \tag{4.8.3}$$

Daí, partindo da ideia que se três pontos alinhados não determinam um triângulo então, a área do suposto triângulo é S é igual a zero e, consequentemente, $D = 0$ (vale a pena discutir a recíproca), que é a condição de alinhamento de três pontos no plano, ou seja,

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.8.4}$$

Atividade 08

8.1. Construa na folha quadriculada um sistema cartesiano adequado e o triângulo ABC, cujos vértices são dados e calcule a área de sua região (utilize os processos geométrico e algébrico):

a) $A = (6, 1), B = (2, -5)$ e $C = (-2, -3)$

b) $A = (-2, 1), B = (2, 4)$ e $C = (4, -3)$

c) $A = (2, 3), B = (5, -2)$ e $C = (-2, 1)$

d) $A = (-4, 3), B = (1, -4)$ e $C = (3, -1)$

e) $A = (2, 6), B = (-2, -4)$ e $C = (5, 2)$

f) $A = (2, 2), B = (1, 0)$ e $C = (4, -2)$

8.2. Construa na folha quadriculada um sistema cartesiano adequado e os pontos A, B e C dados abaixo, e verifique algebricamente se eles estão alinhados:

a) $A = (1, 4), B = (-2, -5)$ e $C = (2, 7)$

b) $A = (-2, -3), B = (0, 1)$ e $C = (1, 3)$

c) $A = (-3, -2), B = (1, 2)$ e $C = (4, 6)$

d) $A = (-4, -5), B = (3, 2)$ e $C = (4, 3)$

e) $A = (2,0), B = (-3,-1)$ e $C = (4,3)$

f) $A = (5,4), B = (3,0)$ e $C = (1,-1)$

8.3. Refaça no *Geogebra*, todos os passos de execução desta atividade, para checar as respostas.

As figura 4.23 e 4.24 mostram os cálculos do perímetro e da área de um triângulo, realizadas de forma geométrica, no caderno quadriculado de um aluno.

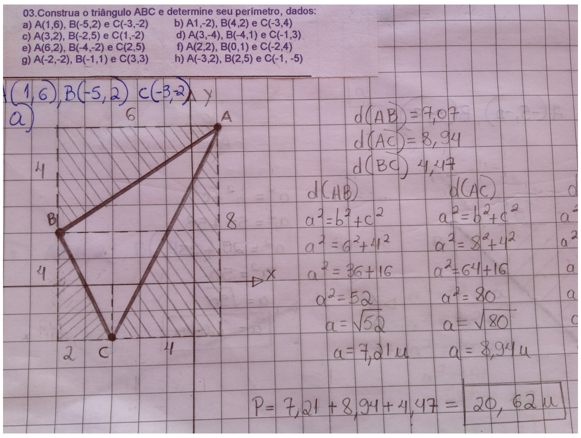


Figura 4.23: Cálculo do perímetro
Fonte: Autor, foto

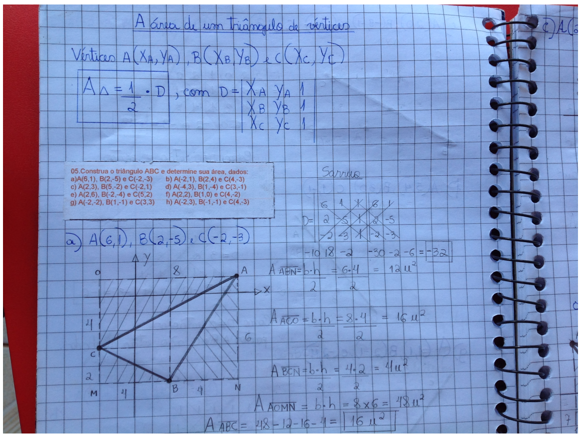


Figura 4.24: Cálculo da área
Fonte: Autor, foto

4.9 Aula 09 - Revisão

Objetivos: Revisar os tópicos estudados e, trabalhar, inclusive, com aplicações em problemas contextualizados, estilo Enem, por exemplo.

Desenvolvimento: Nesta aula, discutem-se alguns problemas de aplicação dos itens estudados, focando nas principais dúvidas dos alunos.

Atividade 09

9.1. Construa na folha quadriculada um sistema cartesiano adequado e o triângulo de vértices $A = (-4,-2), B = (-1,-4)$ e $C = (2,5)$, juntamente com as suas três medianas, e determine:

a) o perímetro

b) a classificação do triângulo quanto aos lados e quanto aos ângulos

c) a área

d) as coordenadas do baricentro

9.2. Duas cidades A e B estão localizadas no mapa representado pelo sistema de coordenadas cartesianas na figura 4.25, que está graduado em quilômetros. Calcule então, a distância em linha reta, entre as duas cidades.

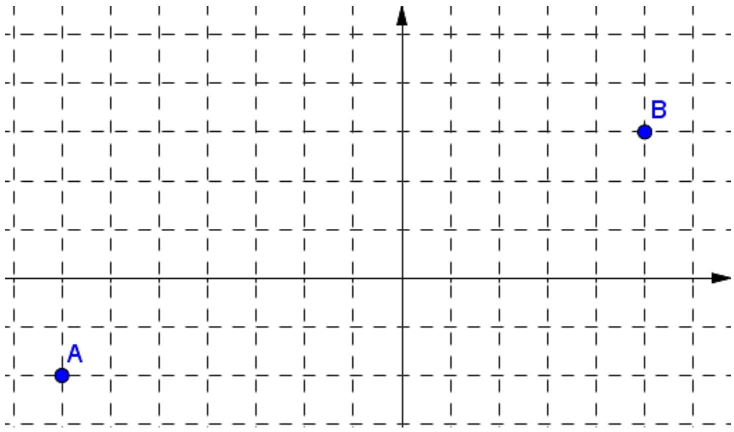


Figura 4.25: Duas cidades A e B
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

9.3. Para fazer a vistoria em duas plataformas petrolíferas P e Q, que estão localizadas em alto mar, conforme a figura 4.26, uma equipe de inspetores parte, de helicóptero, do heliporto H localizado no litoral, em direção à plataforma P. Feita a vistoria em P, eles partem para a plataforma Q, e depois retornam ao heliporto H. Considerando que os três trechos são feitos em linha reta, qual a distância total em quilômetros, percorrida pela equipe desde a partida até o retorno ao heliporto?

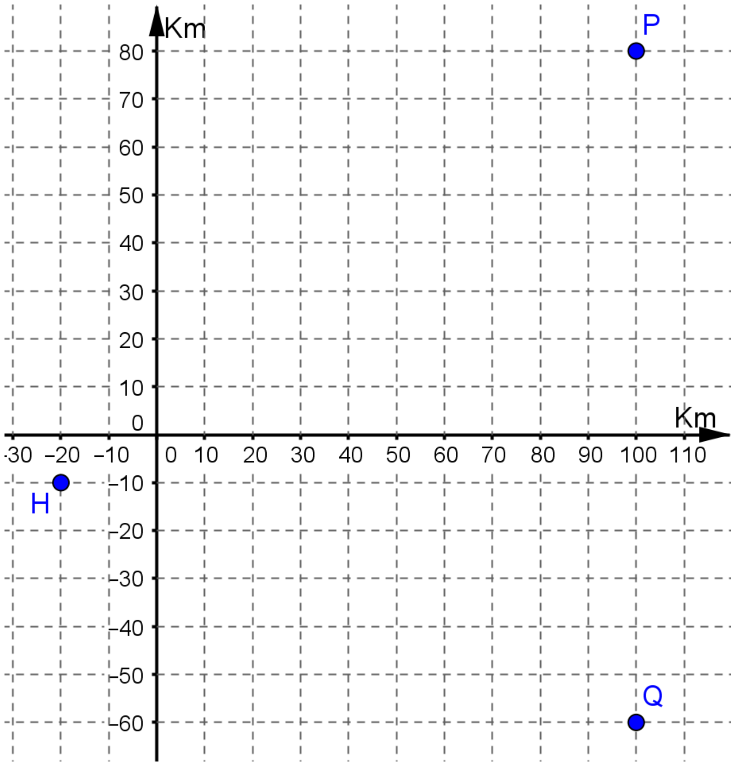


Figura 4.26: Duas plataformas A e B
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

4.10 Aula 10 - Avaliação I

Objetivos: Avaliar a aprendizagem dos alunos com respeito aos tópicos estudados.

Desenvolvimento: Os alunos são avaliados em relação aos conteúdos abordados nas aulas anteriores.

Atividade 10 - Avaliação

10.1. Considere o triângulo ABC, da figura 4.27.

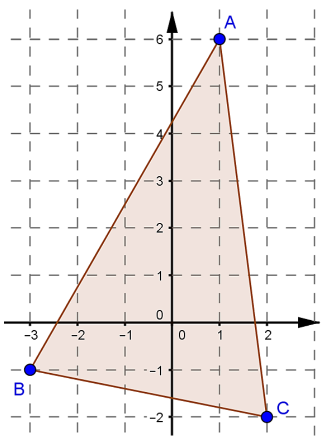


Figura 4.27: Triângulo ABC 1
Fonte: O autor, no geogebra

Em relação às medidas dos lados e às medidas dos ângulos, ele é classificado como

a) equilátero e retângulo.

b) escaleno e acutângulo.

c) isósceles e retângulo.

d) obtusângulo e isósceles.

e) acutângulo e isósceles.

10.2. A medida da área do triângulo da figura 4.27, é igual a

a) 16,5

b) 18.

c) 19,5.

d) 20,5.

e) 26.

10.3. Considere o polígono com vértices nos pontos $A = (-4, -3), B = (2, 1), C = (-4, 3)$ e $D = (-6, -1)$ da figura 4.28, e sejam M, N, P e Q, os pontos médios dos segmentos AB , BC , CD e DA , respectivamente.

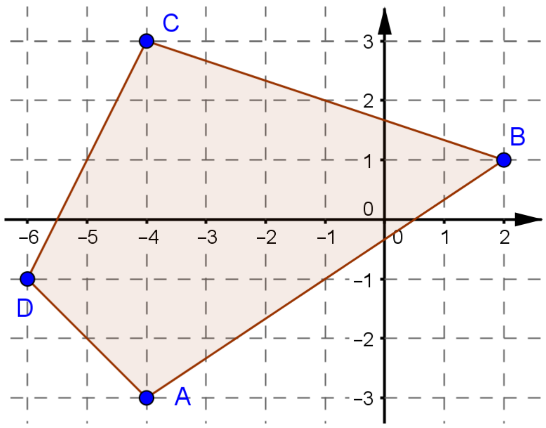


Figura 4.28: Triângulo ABC 2
Fonte: O autor, no geogebra

Então, o quadrilátero $MNPQ$ determinado por esses pontos médios é um

a) losango.

b) retângulo.

c) trapézio.

d) quadrado.

e) paralelogramo.

10.4. Uma empresa de telecomunicações pretende instalar uma antena de transmissão, de modo que ela fique a uma mesma distância em relação às cidades A e B, representadas no plano cartesiano (c.f. figura 4.29). Qual deverá ser a ordenada da posição da antena, sabendo que sua abscissa é $x = -1$?

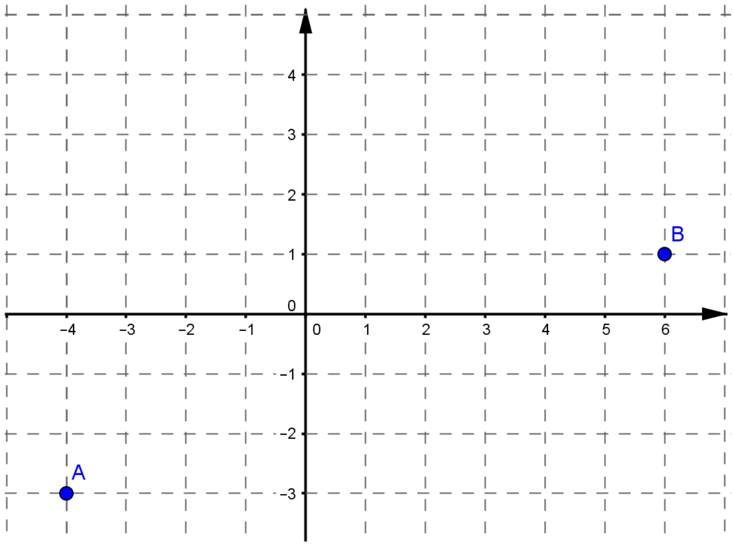


Figura 4.29: Duas cidades A e B
Fonte: Próprio autor, produzido no *geogebra*

4.11 Aula 11 - Equação geral da reta

Objetivos: Determinar a equação geral da reta que passa por dois pontos, seu ângulo de inclinação e seu coeficiente angular.

Desenvolvimento: Parte-se da condição de alinhamento de três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $P(x, y)$, onde A e B são conhecidos e P é um ponto qualquer da reta, chega-se a equação:

$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$, que leva à $x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + 1(x_A y_B - x_B y_A) = 0$.

Fazendo $a = (y_A - y_B)$, $b = (x_B - x_A)$ e $c = (x_A y_B - x_B y_A)$, obtêm-se:

$$ax + by + c = 0, \tag{4.11.1}$$

que é a equação geral da reta que passa por dois pontos.

A reta terá **ângulo de inclinação** α e **coeficiente angular** m:

$$m = tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{4.11.2}$$

Por outro lado, isolando y na equação tem-se:

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x - \frac{c}{b} = mx + n$, com $n = \frac{c}{b}$,

ou seja,

$$y = mx + n \tag{4.11.3}$$

que é equação reduzida da reta, onde m é o coeficiente angular (declividade) e n é o coeficiente linear (ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y).

A abscissa do ponto de intersecção da reta com o eixo x é chamado **zero** (ou **raiz**). A figura 4.30 ilustra os conceitos acima mencionados.

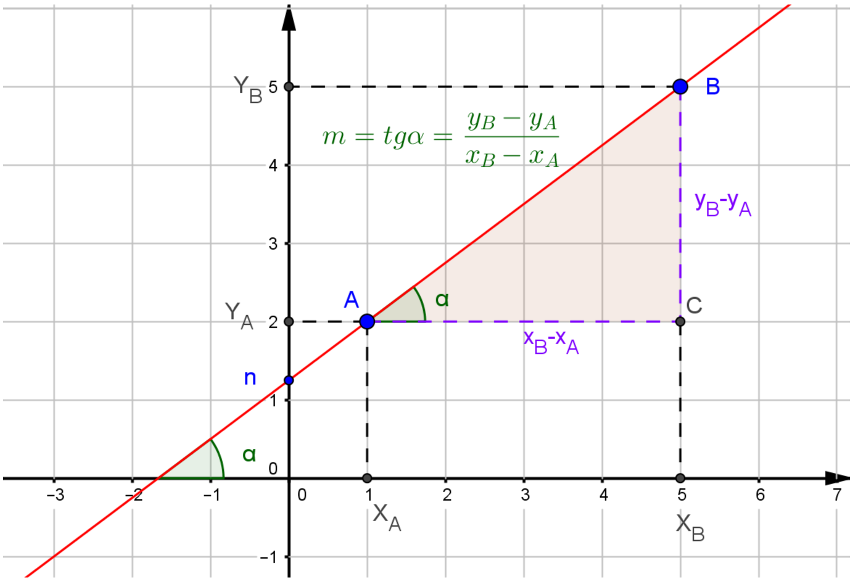


Figura 4.30: Inclinação da reta
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

Atividade 11

11.1. Construa no geoplano, triângulos retângulos cujas medidas b e c dos catetos estão indicadas abaixo, calcule o valor da tangente do menor ângulo agudo α e, em seguida, usando a tabela trigonométrica e/ou calculadora científica, determine o valor aproximado da medida deste ângulo. A seguir, registre no caderno quadriculado esta atividade.

a) $b = 2u$ e $c = 3u$

b) $b = 1u$ e $c = 3u$

c) $b = 4u$ e $c = 3u$

d) $b = 2u$ e $c = 2u$

e) $b = 5u$ e $c = 3u$

f) $b = 2u$ e $c = 4u$

11.2. Construa no caderno quadriculado, um plano cartesiano adequado e a reta que passa pelos pontos A e B, dados abaixo, e determine sua equação geral, sua declividade m e sua inclinação α:

a) $A = (1, 3), B = (3, 4)$

b) $A = (-1, 2), B = (2, 5)$

c) $A = (2, -1), B = (5, 0)$

d) $A = (-2, 1), B = (3, 5)$

e) $A = (-2, -1), B = (2, 2)$

f) $A = (-3, 4), B = (2, 1)$

11.3. Refaça no Geogebra, todos os passos de execução desta atividade, para checar as respostas.

4.12 Aula 12 - Equação reduzida da reta

Objetivos: Obter a equação reduzida da reta e o coeficiente linear e o zero (raiz). Construir a reta a partir da raiz e do coeficiente linear.

Desenvolvimento: A partir da equação geral, isola-se o y e obtém-se a forma reduzida da equação da reta.

Para obter a raiz, substitui na equação, o valor de y por zero. O valor encontrado para x é o **zero** (raiz).

O coeficiente linear é o valor de y, que se obtém ao substituir na equação, o valor de x por zero.

Atividade 12

12.1. Obtenha a equação reduzida das retas do exercício 11.2 e determine o coeficiente linear e o zero. Faça a construção das retas no *Geogebra* para checar as resoluções.

12.2. Construa no caderno quadriculado, um plano cartesiano adequado e, a partir do zero e do coeficiente linear, construa a reta r, dada pela sua equação:

a) $r : x - 2y + 3 = 0$

b) $r : 3x + y - 6 = 0$

c) $r : x + 3y + 2 = 0$

d) $r : y = 3x - 5$

e) $r : y = 2x - 1$

f) $r : x - 3y = 6$

Observação: Após a realização desta atividade, é disponibilizado o arquivo geogebra da figura 4.31, para que os alunos possam observar o comportamento da reta ao variar os valores de m e n, na equação reduzida.

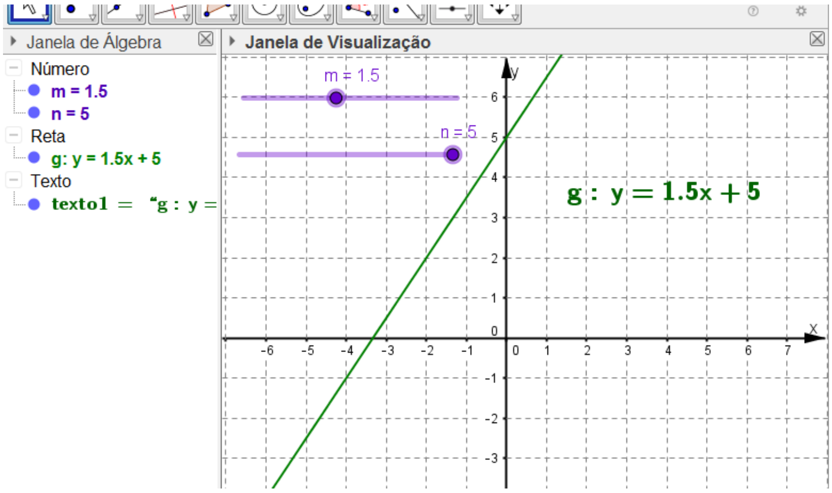


Figura 4.31: Equação reduzida da reta.
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

4.13 Aula 13 - Equação fundamental da reta

Objetivos: Obter a equação da reta a partir de um ponto e o coeficiente angular

Desenvolvimento: Sabe-se que dois pontos distintos determinam uma reta, ou seja, dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa pelos dois pontos.

Da mesma forma, um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e a declividade m determinam uma reta. Considerando $P = (x, y)$um ponto genérico dessa reta, pode-se chegar a uma equação, de incógnitas x e y, a partir dos números x_0, y_0 e m, que será chamada equação fundamental da reta r. A figura 4.32 mostra esta situação descrita.

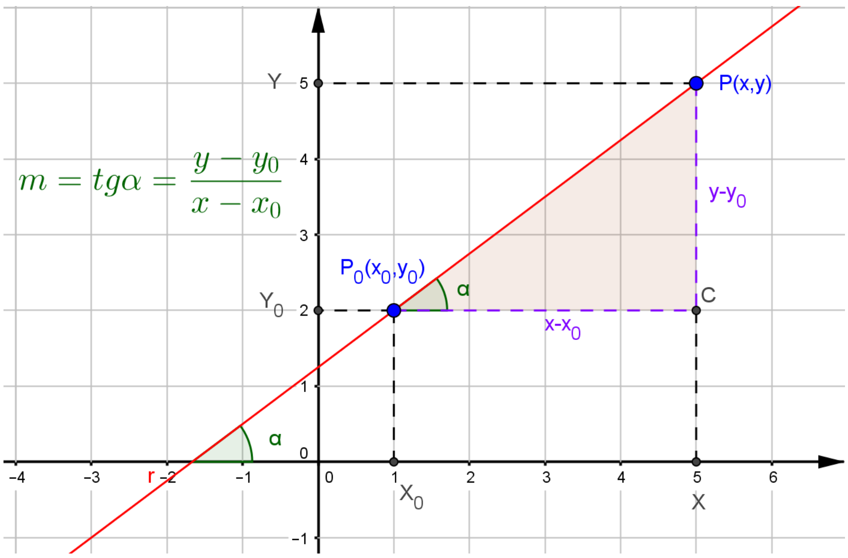


Figura 4.32: Reta dada a partir de P_0 e m
Fonte: Próprio autor, produzido no geogebra

Sabendo que $m = tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, tem-se $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

ou

$$y - y_0 = m(x - x_0), \tag{4.13.1}$$

(equação fundamental da reta).

Forma segmentária A figura 4.33 mostra a representação geométrica de uma reta cuja equação é dada na forma segmentária.

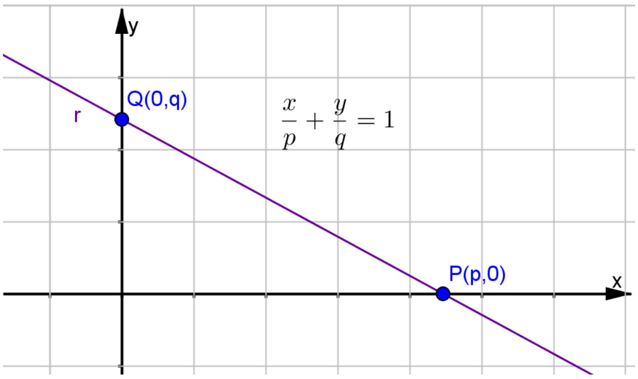


Figura 4.33: Equação segmentária da reta
Fonte: Próprio autor, produzido no *geogebra*

Considerando a reta r que não passa por $O(0,0)$, e intersecta o eixo x no ponto $P(p,0)$ e $Q(0,q)$

O coeficiente angular é: $m = \dfrac{0-q}{p-0} \Rightarrow m = -\dfrac{q}{p}$

Usando a forma reduzida, $y = mx + n$, em que $m = -\dfrac{q}{p}$ e $n = q$, vem:

$$m = -\frac{q}{p}x + q \Rightarrow py = -qx + pq \Rightarrow qx + py = pq$$

Dividindo os dois membros por pq , tem-se:

$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq} \Rightarrow$$

a forma segmentária da equação da reta

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \tag{4.13.2}$$

Essa forma é especialmente importante porque permite obter, a partir da equação, a raiz (zero) e o coeficiente linear da reta, ou seja, os pontos de intersecção da reta com os eixos x e y, facilitando assim, a construção do gráfico.

Atividade 13

13.1. Determine a equação da reta que passa pelo ponto P e tem coeficiente angular m dados, e construa a reta no plano cartesiano:

a) $P = (2, 1)$ e $m = \dfrac{3}{4}$

b) $P = (3, -2)$ e $m = \dfrac{4}{5}$

c) $P = (-4, -1)$ e $m = -\dfrac{2}{3}$

d) $P = (-3, 4)$ e $m = \dfrac{1}{3}$

e) $P = (5, -2)$ e $m = -2$

f) $P = (2, 5)$ e $m = 3$

Observação: Neste exercício, a maioria dos alunos preferem a forma $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$, ao invés da forma $y - y_0 = m(x - x_0)$.

13.2. Agora, faça as construções da atividade anterior no *Geogebra*. Para isto, siga as instruções abaixo:

Tomando o item a) $P = (2, 1)$ e $m = \dfrac{3}{4}$ como exemplo.

i. Construa o ponto $P = (2, 1)$. Ele aparecerá como $A = (2, 1)$, mas pode ser renomeado para P.

ii. Construa um vetor v com a mesma direção da reta. Como $m = \dfrac{3}{4}$, digite na caixa de entrada $v = (4, 3)$, pois $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

A figura 4.34 mostra o resultado das ações **i** e **ii**.

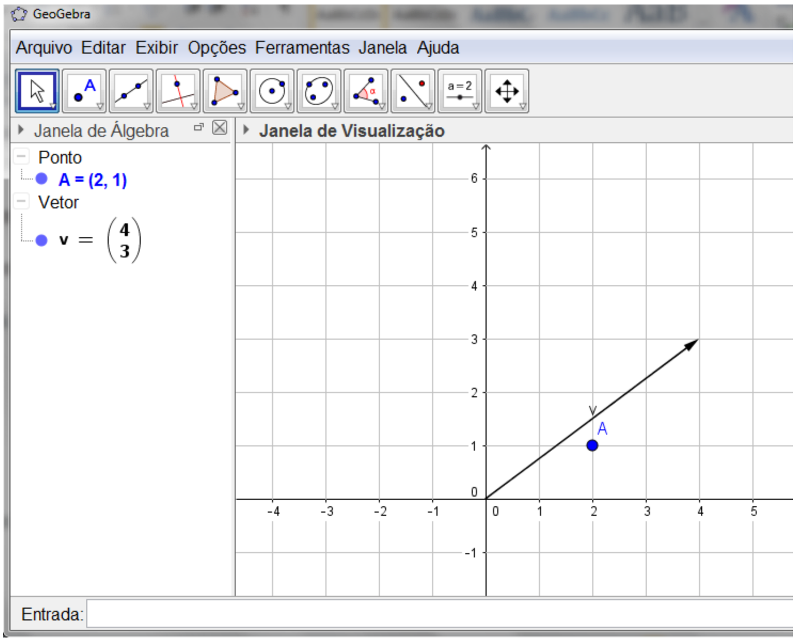


Figura 4.34: Construção do ponto P e do vetor v
Fonte: Próprio autor, produzido no *Geogebra*

iii. Digite na caixa de entrada: Reta$[(2, 1), (v)\ ]$ e renomeie o ponto A para P. Arraste a equação para a janela de visualização. A figura 4.35 mostra o resultado desta ação.

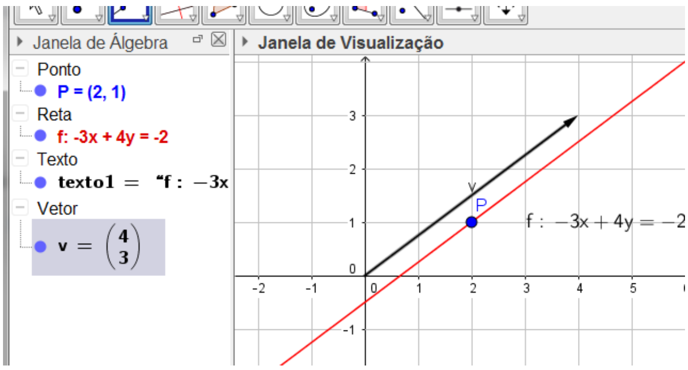


Figura 4.35: Reta e vetor v. Fonte: O autor, no geogebra

iv. Oculte o vetor da janela de visualização. A figura 4.36 mostra a representação gráfica do resultado procurado.

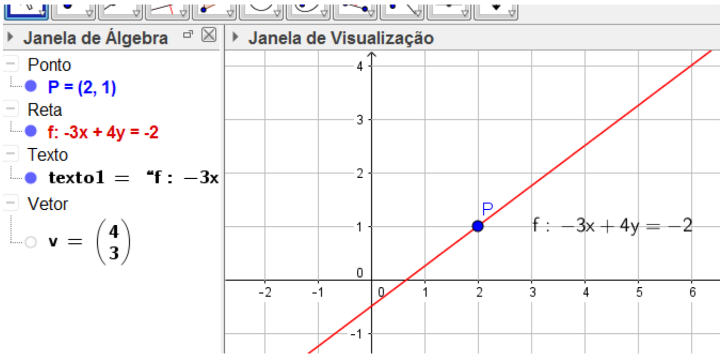


Figura 4.36: Reta que passa por P. Fonte: O autor, no geogebra.

4.14 Aula 14 - Posições relativas entre duas retas no plano

Objetivos: Identificar as posições relativas entre duas retas no plano cartesiano.

Desenvolvimento: Constrói-se (a título de exemplo), num mesmo plano cartesiano (no caderno quadriculado), a reta r que passa por $A = (-2, -2)$ e $B = (2, 4)$, a reta s que passa por $C = (1, -3)$ e $D = (5, 3)$, e a reta t que tem equação $y = 1.5x - 2$; analisa-se seus coeficientes angulares e ângulos de inclinação, compara-os; e determina-se a posição relativa entre as retas. A figura 4.37 mostra o resultado obtido ao usar o *Geogebra*.

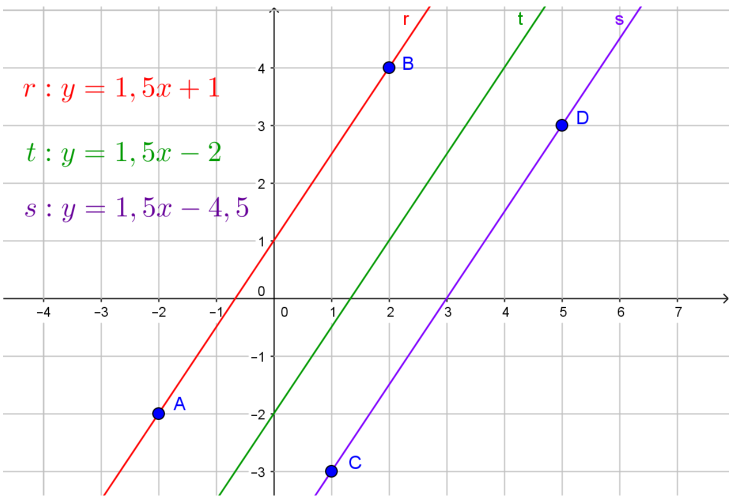


Figura 4.37: Retas paralelas. Fonte: O autor, no geogebra.

Repete-se esse processo para os pares de retas que passam por $P = (0, -3)$ e $Q = (4, 4)$ e por $M = (5, 3)$ e $N = (-3, -2)$. A figura 4.38 mostra o resultado obtido ao usar o *Geogebra*.

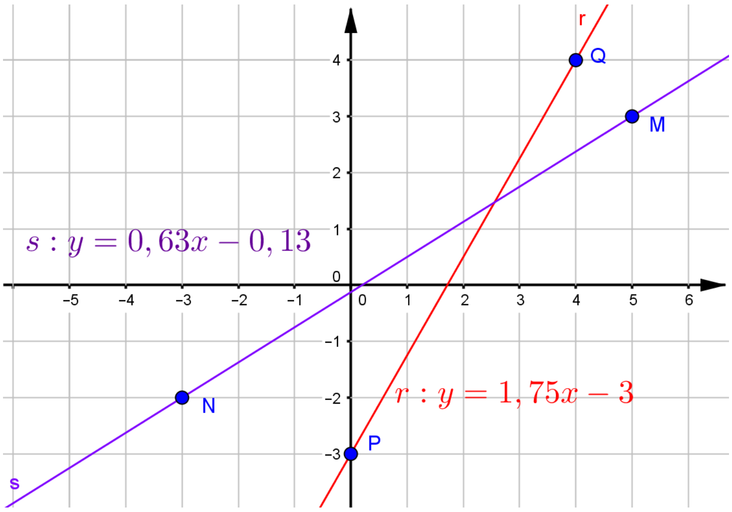


Figura 4.38: Concorrentes. Fonte: O autor, no geogebra.

Repete-se esse processo, também, para os pares de retas r e s, de equações $y = -2x-3$ e $x-2y+6 = 0$, respectivamente. A figura 4.39 ilustra a representção gráfica dos resultados, usar o *Geogebra*.

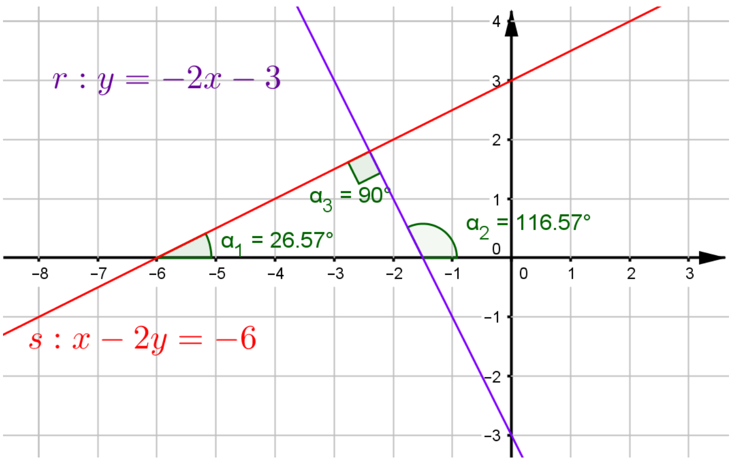


Figura 4.39: Perpendiculares. Fonte: O autor, no geogebra.

Após a realização destas atividades, espera-se que os alunos deduzam ou concluam que duas retas distintas r_1 e r_2, de inclinações α_1 e α_2, e declividades (coeficientes angulares) m_1 e m_2, respectivamente, podem ser:

- Paralelas ($r_1//r_2$),

$$r_1//r_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow tg\alpha_1 = tg\alpha_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2,$$

ou seja, têm declividades iguais.

- Concorrentes ($r_1 \times r_2$),

$$r_1 \times r_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow tg\alpha_1 \neq tg\alpha_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2,$$

ou seja, têm declividades diferentes.

- Perpendiculares ($r_1 \perp r_2$),

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow |\alpha_1 - \alpha_2| = 90^o \Leftrightarrow tg\alpha_2 = tg(\alpha_1 + 90^o) \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1,$$

ou seja, o valor da declividade de uma das retas é igual ao inverso do oposto (simétrico) da outra reta.

Atividade 14

14.1. Construa num mesmo sistema cartesiano (no caderno quadriculado), as retas que passam pelos pontos A e B, e por C e D, determine suas equações, declividades e inclinações, e classifique-as em paralelas, concorrentes ou perpendiculares, dados:

a) $A = (2, 4), B = (-3, -2), C = (3, 1)$ e $D = (0, -3)$

b) $A = (4, 2), B = (0, -4), C = (-3, -3)$ e $D = (1, 3)$

c) $A = (2, 2), B = (-3, -1), C = (3, -2)$ e $D = (0, 3)$

d) $A = (0, -3), B = (4, 4), C = (1, 4)$ e $D = (-3, -2)$

e) $A = (4, 4), B = (-1, 2), C = (-2, -3)$ e $D = (3, -1)$

f) $A = (-2, 3), B = (3, -2), C = (2, 4)$ e $D = (-3, -2)$

14.2. Refaça o exercício 14.1 no Geogebra para checar as respostas.

4.15 Aula 15 - Posições relativas entre duas retas no plano

Objetivos: Determinar, analiticamente e geometricamente, retas a partir dos conceitos de paralelismo e perpendicularismo.

Desenvolvimento: Retoma-se a discussão do tema da aula 14, com a resolução de problemas de aplicação, no caderno quadriculado e também no *Geogebra*.

Atividade 15

15.1. Determine a equação da reta r_1 e construa as retas r_1 e r_2, sabendo que:

a) r_1 passa por $P = (3, 2)$ paralela à reta $r_2 : 2x - 3y + 7 = 0$.

b) r_1 passa por $P = (-1, 4)$ paralela à reta $r_2 : 5x - 2y + 1 = 0$.

c) r_1 passa por $P = (6, 5)$ perpendicular à reta $r_2 : x + 5y - 4 = 0$.

d) r_1 passa por $P = (-3, 1)$ perpendicular à reta $r_2 : x - 2y = -1$.

15.2. Determine a equação da mediatriz do segmento de extremidades nos pontos A e B, a seguir, construa no plano cartesiano (no caderno quadriculado), o segmento $\overline{AB}$ e sua mediatriz, dados:

a) $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$.

b) $A(-2, -4)$ e $B(-4, -2)$.

c) $A(1, 4)$ e $B(5, -2)$.

15.3. Resolva as questões 15.1 e 15.2 no Geogebra.

4.16 Aula 16 - Intersecção de duas retas no plano

Objetivos: Determinar, analiticamente e geometricamente, o ponto de intersecção de duas retas concorrentes.

Desenvolvimento: Constrói-se num plano cartesiano (no caderno quadriculado), duas retas concorrentes r_1 e r_2, e determina-se geometricamente o ponto de intersecção entre elas. Daí, resolvendo o sistema de equações $r_1 \times r_2$, obtém-se algebricamente esse ponto de intersecção entre as duas retas. A figura 4.40 (obtida com o *Geogebra*), mostra duas retas concorrentes e o ponto de intersecção entre elas.

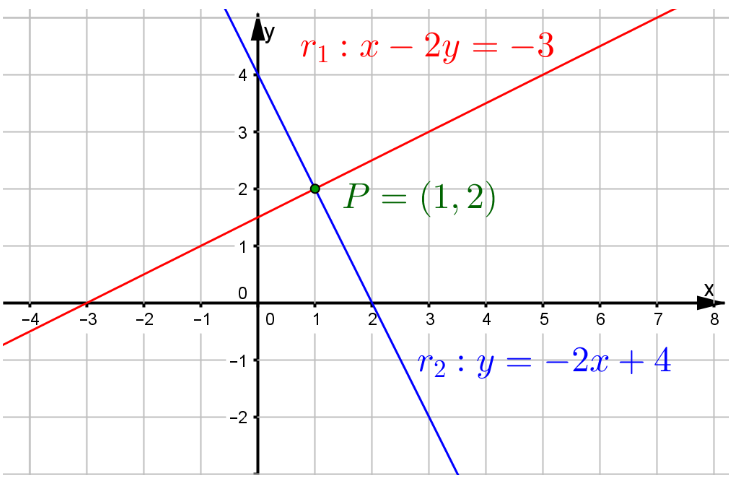


Figura 4.40: Intersecção de retas. Fonte: O autor, no geogebra.

Atividade 16

16.1. Construa num mesmo plano cartesiano as retas r_1 e r_2 e determine o ponto P, de intersecção entre elas, dados:

a) $r_1 : x - 2y + 3 = 0$ e $r_2 : y = -2x + 4$.

b) $r_1 : 3x + y - 6 = 0$ e r_2 passa por $A = (-2, 1)$ e $B = (4, 5)$.

c) $r_1 : 3x - 5y - 15 = 0$ e $r_2 : x + y + 2 = 0$.

d) $r_1 : 3x - 2y = 6$ e $r_2 : y = 0.5x + 1$.

16.2. Agora, resolva a questão anterior no *Geogebra*, para checar sua resolução.

4.17 Aula 17 - Distância entre ponto e reta

Objetivos: Calcular a distância entre um ponto e uma reta.

Desenvolvimento: Sabe-se, da Geometria plana, que a distância de um ponto P a uma reta r é a medida do segmento de extremidades em P e P', em que P' é a projeção ortogonal de P sobre r (ou, P' é o pé da perpendicular à reta r, conduzida pelo ponto P). A figura 4.41 ilustra este fato, considerando como exemplo determinar a distância do ponto $P = (-2, 5)$ à reta r, de equação $2x - y - 1 = 0$. Segue abaixo, além da aplicação simples e direta da fórmula, duas sugestões de abordagem deste problema:

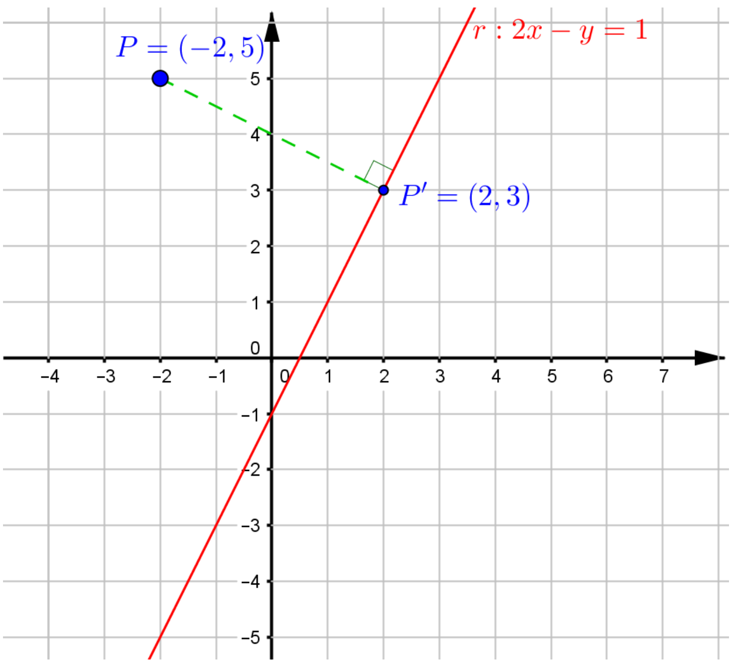


Figura 4.41: Distância entre ponto e reta. Fonte: O autor, no geogebra

1ª) **Explorando os tópicos e conceitos estudados anteriormente**

i. Obter o coeficiente angular de $r : m_1 = -\dfrac{a}{b} = 2$.

ii. Determinar a equação da reta s, perpendicular a r por P. Ela tem $m_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Assim de, $y - y_0 = m_2(x - x_0)$ obtêm-se

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow 2y - 10 = -x - 2 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0,$$

que é a equação da reta s, procurada.

iii. Resolver o sistema $r \times s$ para obter o ponto P'.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 3.$$

Então $P' = (2, 3)$.

iv. Calcular a distância de $P(-2, 5)$ à $P'(2, 3)$.

$$d_{PP'} = \sqrt{(2+2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Logo, a distância do ponto P à reta r é igual à $\sqrt{20}$.

Observação: Graficamente, é fácil perceber que o segmento $\overline{PP'}$ corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 2 e 4. Daí, $(\overline{PP'})^2 = 2^2 + 4^2$, o que resulta: $\overline{PP'} = \sqrt{20}$. Este fato mostra, mais uma vez, o quanto o uso de folha quadriculada pode facilitar a resolução de problemas que, mesmo que a primeira vista pareçam ser de natureza algébrica, possuam alguma conotação geométrica.

2ª)**Uma abordagem com ênfase à exploração de conceitos geométricos**

A partir de duas retas paralelas aos eixos Ox e Oy, por P, obter em r, os pontos M e N; formando assim, o triângulo retângulo MNP com, catetos $\overline{MP} = b$ e $\overline{NP} = c$, hipotenusa $\overline{MN} = a$, e $\overline{PP'} = h$ como altura relativa à hipotenusa (c.f. figuras 4.42 e 4.43).

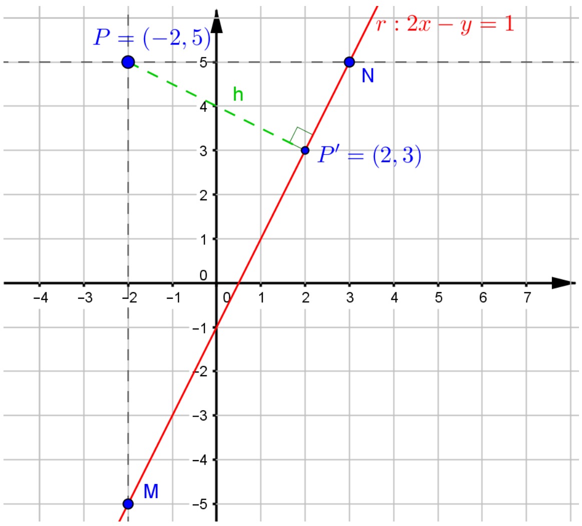


Figura 4.42: construção do triângulo MNP
Fonte: O autor, produzido no Geogebra

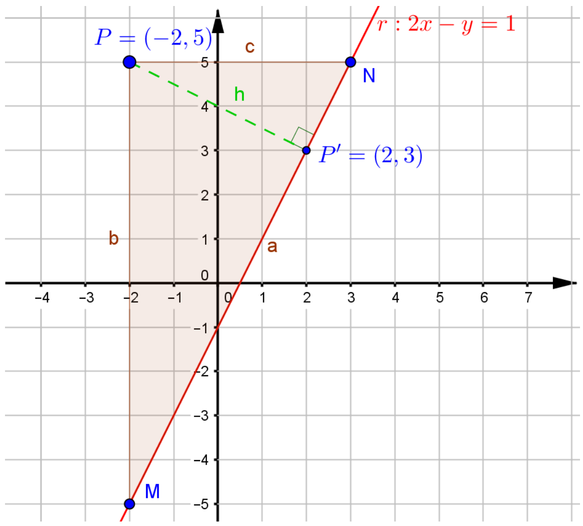


Figura 4.43: Triângulo retângulo MNP
Fonte: O autor, produzido no Geogebra

Sabe-se, da geometria, que num triângulo retângulo o produto das medidas dos catetos é igual ao produto entre as medidas da hipotenusa e da altura relativa a ela, ou seja, $a \cdot h = b \cdot c$. Neste exemplo, tem-se:

$$b = 10, c = 5$$

e,

$$a^2 = 10^2 + 5^2 \Rightarrow a^2 = 125 \Rightarrow a = \sqrt{125} \Rightarrow a = 5\sqrt{5}.$$

Logo,

$$5\sqrt{5} \cdot h = 10 \cdot 5 \Rightarrow h = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \cong 4,47$$

Para determinar uma expressão geral para o cálculo da distância entre ponto e reta segue abaixo, a sugestão de [25] (Lima, p. 37):

Determina-se, primeiramente, a distância entre as retas paralelas $ax+by = c$ e $ax+by = c'$; ambas perpendiculares à reta $bx - ay = 0$, que passa pela origem e as corta nos pontos $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$, conforme ilustra a figura 4.44 , cujas coordenadas são obtidas resolvendo os sistemas

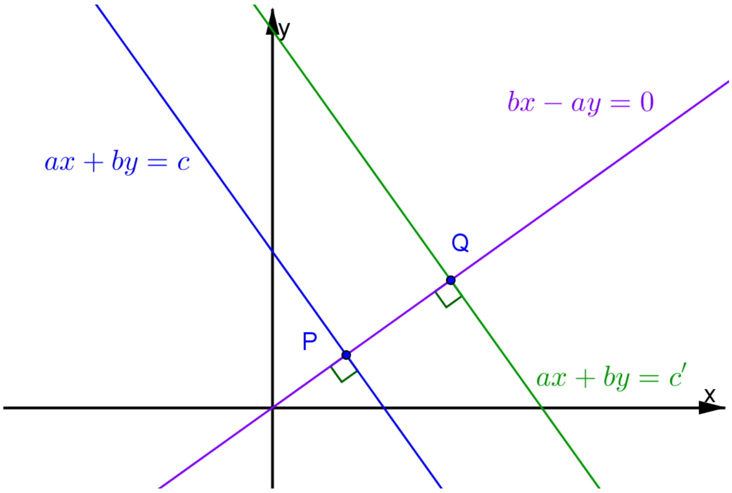


Figura 4.44: Retas paralelas. Fonte: O autor, no *Geogebra*.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by = c' \\ bx - ay = 0 \end{cases} .$$

Que conduz a,

$$P = \left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2} \right)$$

e

$$Q = \left(\frac{ac'}{a^2 + b^2}, \frac{bc'}{a^2 + b^2} \right) .$$

A distância entre as duas retas é dada pela distância entre P e Q. Assim, de (4.5.1) tem-se

$$d_{(P,Q)} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2},$$

ou,

$$[d_{(P,Q)}]^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2.$$

Daí,

$$[d_{(P,Q)}]^2 = \left(\frac{ac}{a^2 + b^2} - \frac{ac'}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{bc}{a^2 + b^2} - \frac{bc'}{a^2 + b^2} \right)^2$$

expandindo os quadrados

$$[d_{(P,Q)}]^2 = \frac{a^2c^2 - 2a^2cc' + a^2c'^2 + b^2c^2 - 2b^2cc' + b^2c'^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

agrupando os termos,

$$[d_{(P,Q)}]^2 = \frac{a^2(c^2 - 2cc' + c'^2) + b^2(c^2 - 2cc' + c'^2)}{(a^2 + b^2)^2}$$

fatorando,

$$[d_{(P,Q)}]^2 = \frac{(a^2+b^2)(c-c')^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{(c-c')^2}{(a^2+b^2)}$$

e, por fim, tem-se a expressão

$$d_{(P,Q)} = \frac{|c'-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{4.17.1}$$

Para calcular a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta r, dada por $ax+by=c$, observa-se que a reta paralela a r passando por P tem a equação $ax+by=c'$, onde $c' = ax_0+by_0$, e que a distância de p a r é igual a distância entre essas duas paralelas (c.f. figura 4.45).

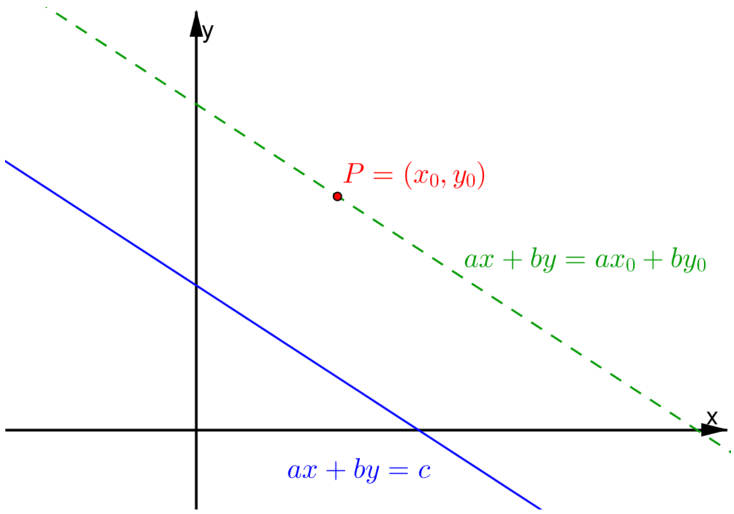


Figura 4.45: Reta e ponto. Fonte: O autor, no *Geogebra*.

Substituindo c' em (4.17.1) obtêm-se a expressão

$$d(P,r) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{4.17.2}$$

para obter a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta r, dada por $ax+by=c$.

Atividade 17

17.1. Obtenha a distância do ponto P à reta r, nos casos abaixo:

a) $P = (3, -2)$ e $r : 2x + y + 6 = 0$.

b) $P = (-1, 0)$ e $r : 3x - y = 7$.

c) $P = (-1, 2)$ e $r : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.

d) $P = (-3, 2)$ e $r : \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$

17.2. Construa no plano cartesiano o triângulo de vértices $A = (3,4), B = (-5,2)$ e $C = (-3,-2)$. Em seguida, calcule:

a) As medidas das alturas relativas aos lados AB, AC e BC.

b) A área do triângulo.

17.3. Construa num plano cartesiano (no caderno quadriculado), as retas r e s, e obtenha (geometricamente e algebricamente) a distância entre elas, nos casos abaixo:

a) $r : 2x + y + 3 = 0$ e $s : y = -2x + 5$.

b) $r : 3x - 4y + 19 = 0$ e $r : y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{4}$.

c) $r : 4x - 5y = 13$ e $r : 4x - 5y + 7 = 0$.

d) $r : 3x + 2y + 7 = 0$ e $r : \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = 1$.

Sugestão de Resolução geométrica

Em algumas situações, dadas duas retas, $r : 3x - 5y = 0$ e $r : 3x - 5y = 11$, sobre uma malha quadriculada (c.f. figura 4.56), pode-se obter, de forma geométrica, a distância entre essas duas retas, seguindo os passos abaixo:

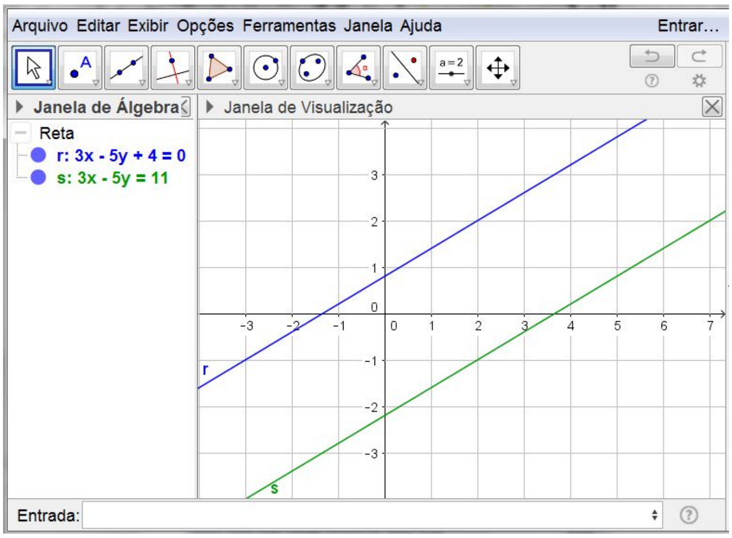


Figura 4.46: Paralelas r e s. Fonte: O autor, no *Geogebra*.

i. Sobre as duas retas paralelas r e s escolhe-se, convenientemente, três pontos A, B e C (c.f. figura 4.47).

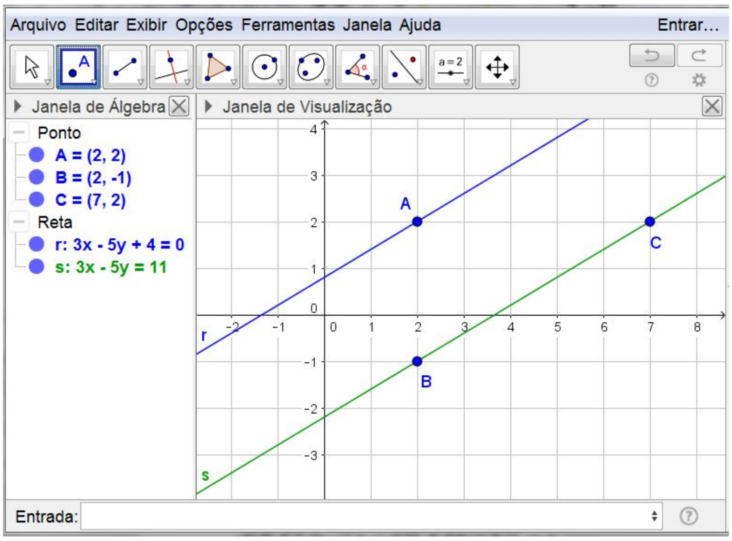


Figura 4.47: Três pontos sobre r e s. Fonte: O autor, no geogebra.

ii. Obtém-se o triângulo ABC de hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c, (c.f. figura 4.48);

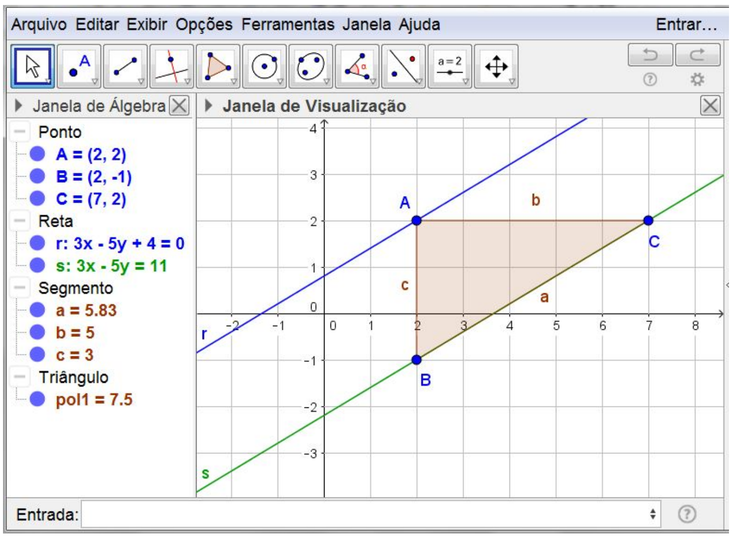


Figura 4.48: Triângulo ABC. Fonte: O autor, no *Geogebra*

iii. A medida h da altura deste triângulo corresponde à medida da distância entre as duas retas r e s (c.f. figura 4.49).

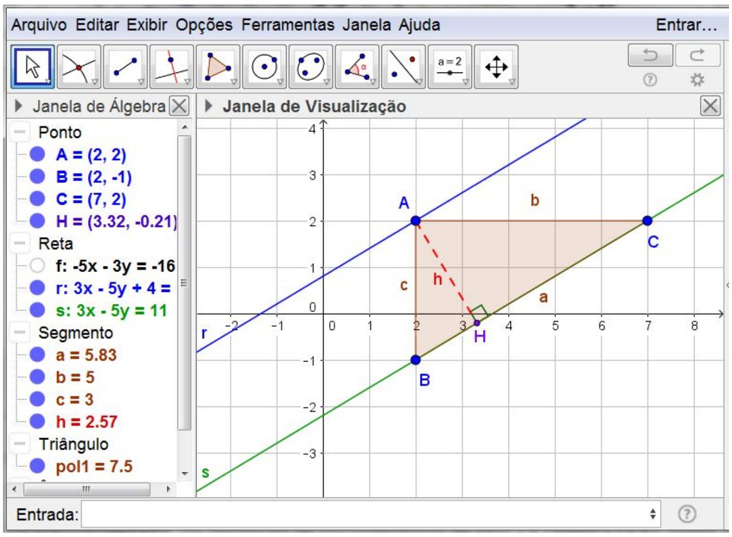


Figura 4.49: Altura do triângulo ABC. Fonte: O autor, no *Geogebra*

Sabe-se, da geometria, que num triângulo retângulo o produto das medidas dos catetos é igual ao produto entre as medidas da hipotenusa e da altura relativa a ela, ou seja, $a \cdot h = b \cdot c$. Neste exemplo, tem-se:

$$b = 5, c = 3$$

e,

$$a^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 34 \Rightarrow a = \sqrt{34}.$$

Logo,

$$\sqrt{34} \cdot h = 3 \cdot 5 \Rightarrow h = \frac{15}{\sqrt{34}} \frac{15\sqrt{34}}{34} = 2,57$$

17.4. Refaça, no *Geogebra*, o exercício 17.1, e cheque os resultados obtidos. Siga o modelo abaixo, que utiliza como exemplo, $P(-1, -2)$ e $r : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

i. Construa a reta r, digitando na caixa de entrada: $(x/2+y/3 = 1)$ (figura 4.50);

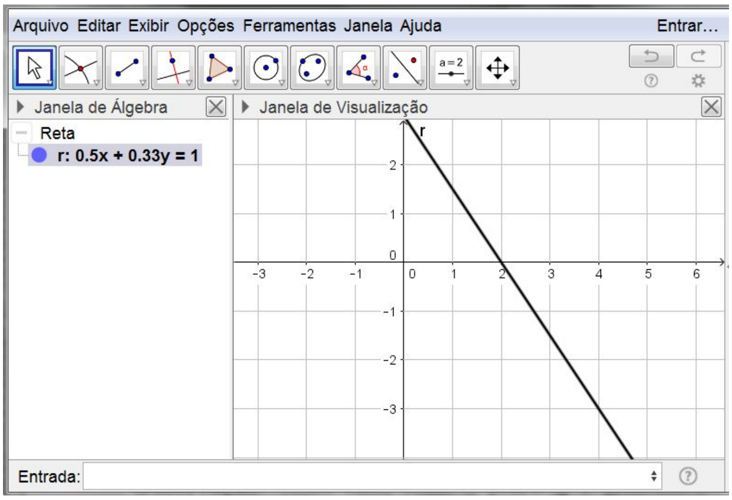


Figura 4.50: reta r. Fonte: O autor, no geogebra.

ii. Construa o ponto P, digitando na caixa de entrada: $P = (-1, -2)$. Esta ação pode ser feita, também, com a ferramenta ponto, o 2º na barra superior, mas necessita que o ponto seja renomeado para de A para P; (figura 4.51);

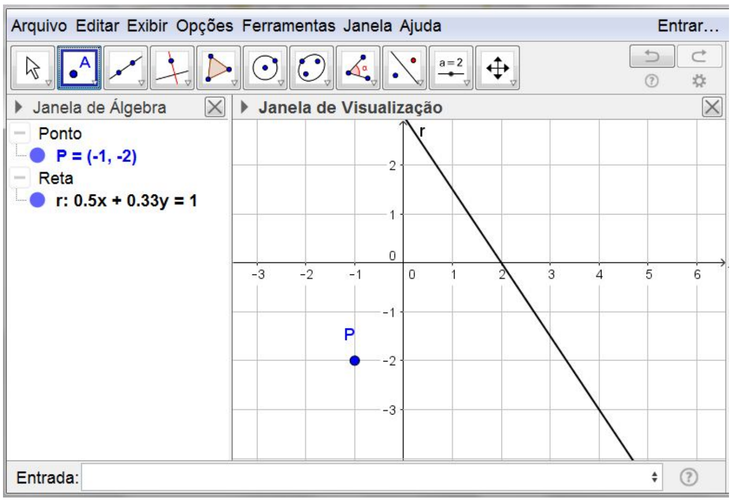


Figura 4.51: O ponto P e a reta r. Fonte: O autor, no *Geogebra*

iii. Com o 4º botão da barra superior ativado, clique no ponto P e na reta r, para obter a reta que passa por P e é perpendicular à reta r; (figura 4.52);

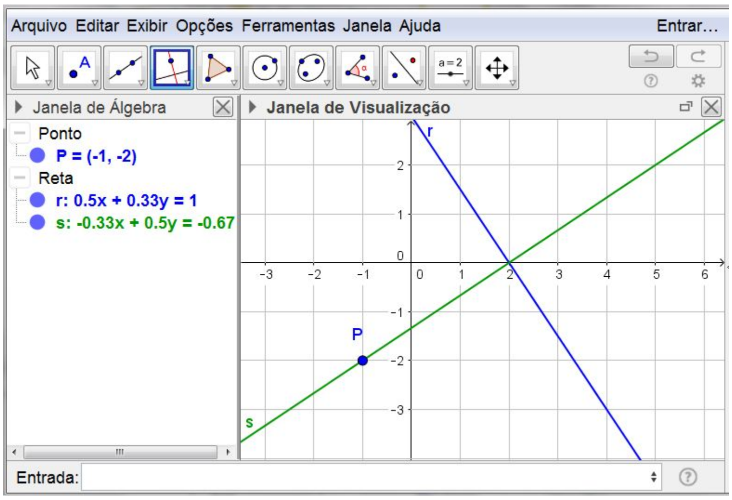


Figura 4.52: A reta r e a perpendicular s. Fonte: O autor, no geogebra.

iv. Mude o 2º botão para a opção interseção de dois objetos e clique nas duas retas para obter o ponto Q (depois de renomeado), de interseção entre as duas retas; (figura 4.53);

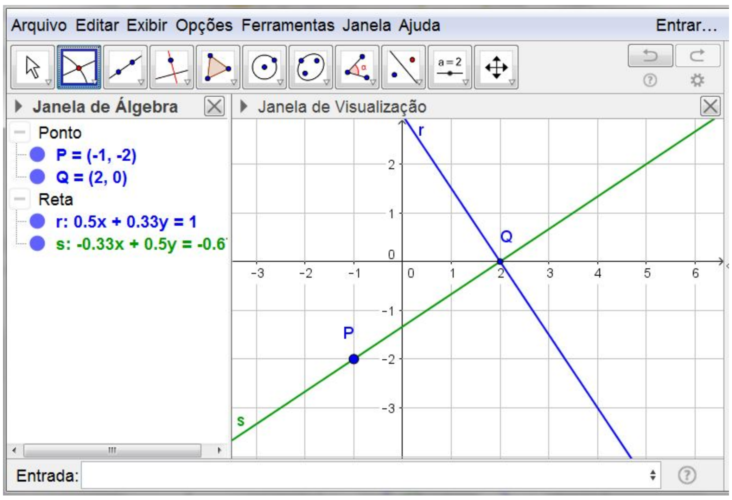


Figura 4.53: O ponto Q, de intersecção entre r e s. Fonte: O autor, produzido no geogebra

v. Com o 3º botão na opção segmento, clique nos pontos P e Q para obter o segmento $\overline{PQ}$, cujo comprimento $h = 3.61$ determina a distância entre o ponto P e a reta r. (figura 4.54);

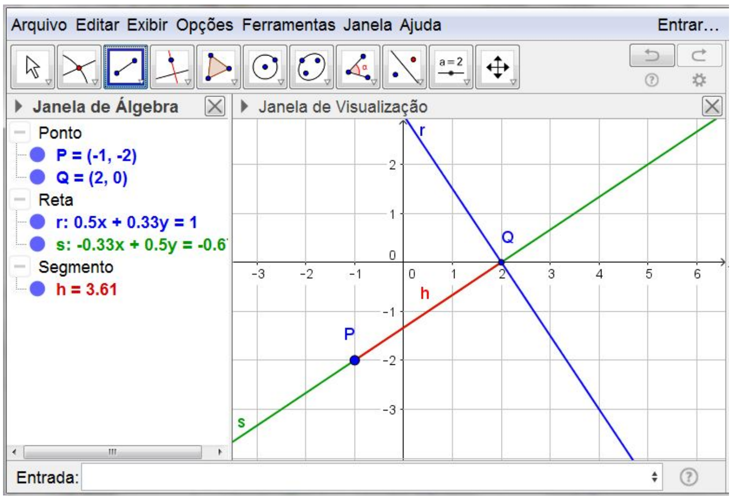


Figura 4.54: O segmento $\overline{PQ}$. Fonte: O autor, no *Geogebra*

Observação: Neste caso, como o ponto Q é graficamente definido como $Q(2,0)$, percebe-se (pela malha quadriculada) que o segmento $\overline{PQ}$ corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos com medidas 2 e 3 (c.f. figura 4.55). Logo, a medida do segmento $\overline{PQ}$ é igual à $\sqrt{13}$, cujo valor aproximado é $3,61$.

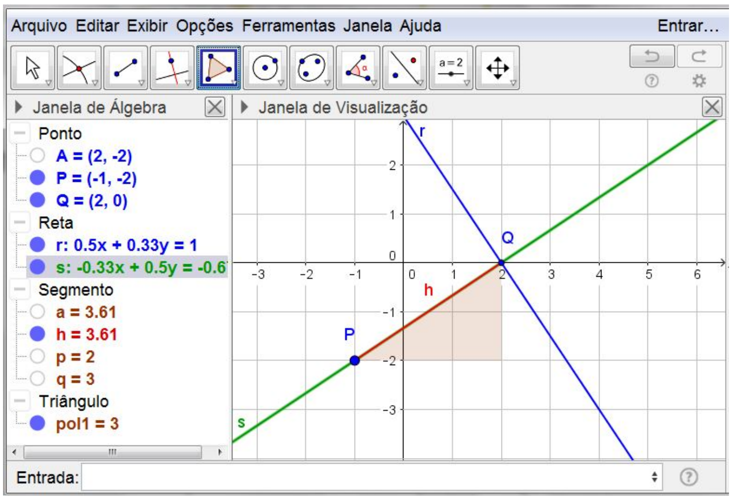


Figura 4.55: $\overline{PQ}$ como hipotenusa. Fonte: O autor, no *Geogebra*.

17.5. Refaça, no Geogebra, o exercício **17.3**, e cheque os resultados obtidos. Siga o modelo abaixo, que utiliza como exemplo, $r: 3x - 5y = 0$ e $r: 3x - 5y = 11$.

i. Para construir as reta r e s, digite na caixa de entrada, suas equações (c.f. figura 4.56);

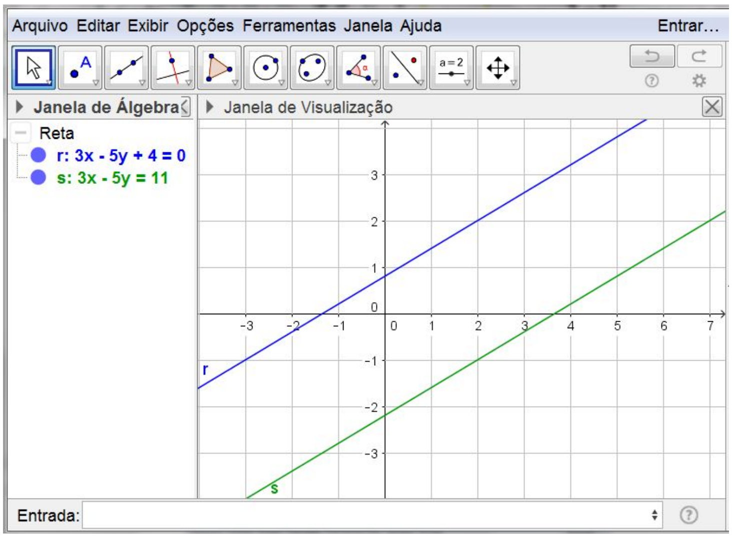


Figura 4.56: retas paralelas r e s 1. Fonte: O autor, no geogebra

ii. Com a opção 'reta perpendicular', no 4º botão, ativada, clique em uma das retas (r ou s), e depois em qualquer ponto do plano, obtendo o ponto A e a perpendicular t (c.f. figura 4.57);

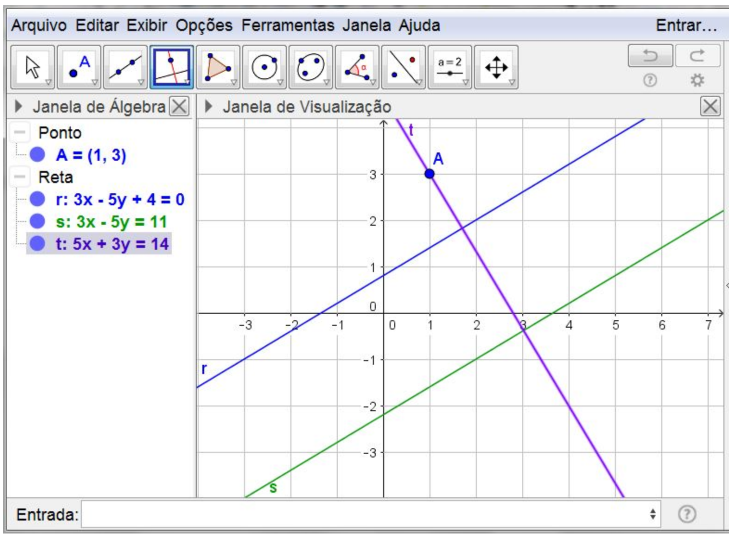


Figura 4.57: retas paralelas r e s 2. Fonte: O autor, no geogebra

iii. Com a opção 'intersecção de dois objetos', no 2º botão, ativada, clique nas três retas para obter os pontos de intersecção B e C (c.f. figura 4.58);

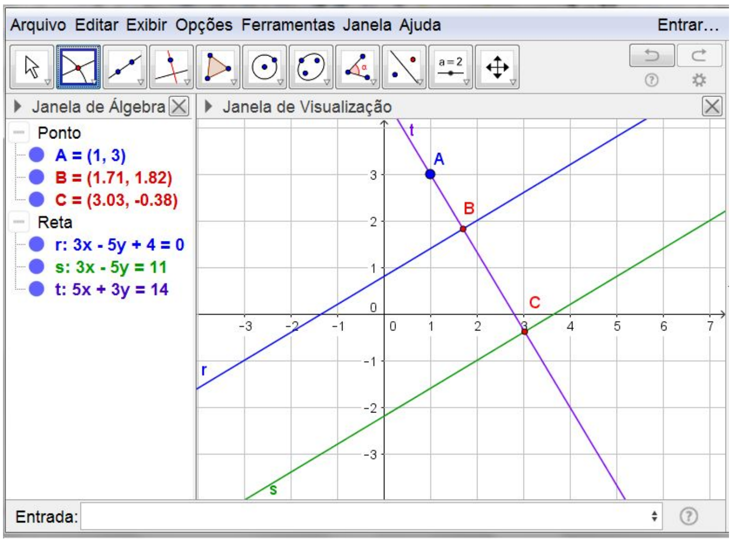


Figura 4.58: retas paralelas r e s 3. Fonte: O autor, no *Geogebra*

iv. Com a opção 'segmento', no 3º botão, ativada, clique nos pontos de intersecção B e C para obter o segmento $\overline{BC}$ de comprimento $d = 2.57$ (c.f. figura 4.59);

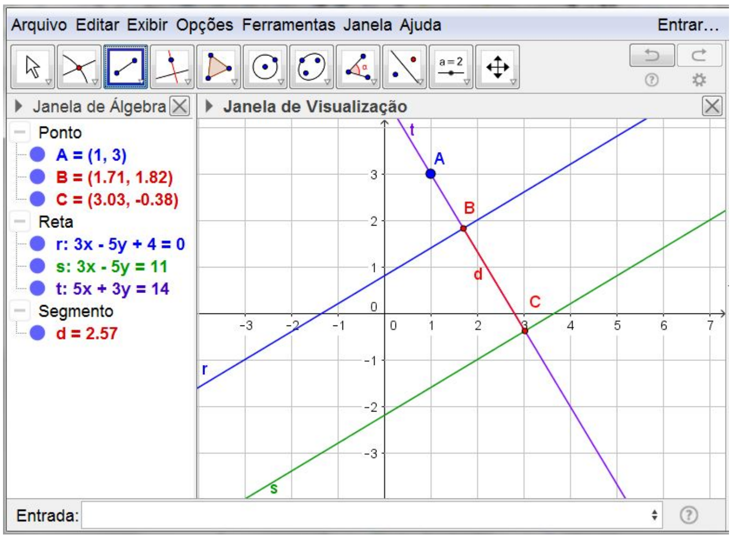


Figura 4.59: retas paralelas r e s 4. Fonte: O autor, no *Geogebra*

v. A figura 4.60 abaixo mostra que independentemente da escolha da posição do ponto A, a medida do segmento $\overline{BC}$ não se altera;

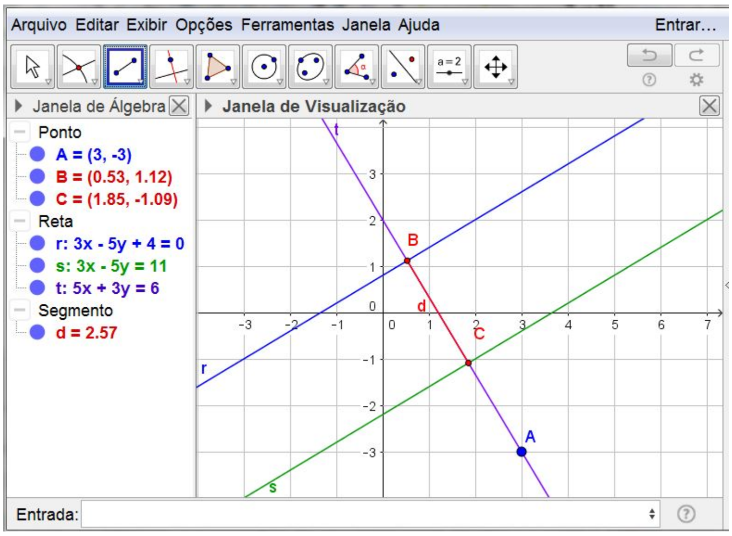


Figura 4.60: retas paralelas r e s 5. Fonte: O autor, no *Geogebra*.

4.18 Aula 18 - Equação da circunferência I

Objetivos: Obter a equação da circunferência a partir do centro e um de seus pontos, ou a partir do centro e do raio.

Desenvolvimento: Da definição de circunferência de raio r e centro $C = (a, b)$, como sendo o conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$ do plano, equidistantes de C; e da distância entre dois pontos no plano obtêm-se:

$$d_{(P,C)} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtêm-se:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{4.18.1}$$

(equação reduzida da circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio r).

Expandindo a equação reduzida, obtêm-se a chamada equação geral ou normal:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0,$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0, \tag{4.18.2}$$

que pode ser escrita, de forma compacta, como

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \tag{4.18.3}$$

com $A = -2a, B = -2b$ e $C = a^2 + b^2 - r^2$.

A figura 4.61 representa graficamente uma circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio r.

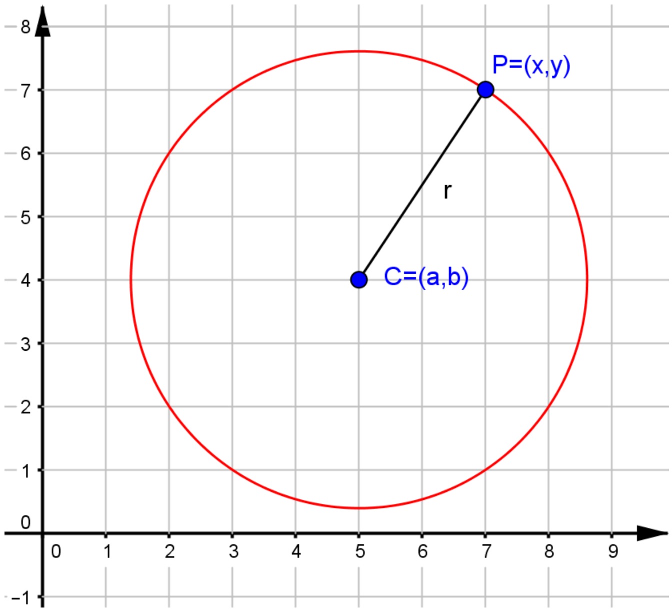


Figura 4.61: Circunferencia. Fonte: O autor, no *Geogebra*.

Atividade 18

Para ajudar o aluno a compreender, entender e aplicar os conhecimentos de equação da circunferência, propõem-se as atividades abaixo:

18.1. Construa, no plano cartesiano, a circunferência de centro C e raio r, e determine sua equação reduzida e normal, dados :

a) $C = (2, 3), r = 4$.

b) $C = (1, 2), r = 3$.

c) $C = (-1, 3), r = 5$.

d) $C = (-2, 3), r = \sqrt{13}$.

18.2. Construa, no plano cartesiano, a circunferência de centro C e que passa por P, e determine sua equação, dados :

a) $C = (1, 2)$ e $P = (5, 5)$.

b) $C = (2, -1)$ e $P = (4, 1)$.

c) $C = (-1, -3)$ e $P = (3, 0)$.

d) $C = (-2, 2)$ e $P = (3, -3)$.

18.3. Refazer, no *Geogebra*, os exercícios 18.1 e 18.2.

4.19 Aula 19 - Equação da circunferência II

Objetivos: Identificar, a partir da equação, a circunferência e seus elementos principais como o centro e o raio.

Desenvolvimento: Se a equação estiver na forma reduzida, a identificação é direta (vide final do exemplo abaixo). Se ela estiver na forma normal, basta passá-la para a forma reduzida, usando o **Método de completar os quadrados** ou o **Método da comparação**, como no exemplo abaixo.

Tomando como exemplo a equação $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$, seguem-se os passos abaixo descritos.

1º) Método de completar os quadrados

O objetivo desse método é obter, a partir da equação geral, os quadrados perfeitos de $(x - a)^2$ e $(y - b)^2$.

i. Agrupam-se os termos em x e os termos em y, isolando no outro membro o termo independente:

$$x^2 - 8x + y^2 + 4y = 5$$

ii. É interessante deixar um espaço depois dos termos em x e dos termos em y, e dois espaços no outro membro, depois do termo independente:

$$x^2 - 8x + \_\_ + y^2 + 4y + \_\_ = 5 + \_\_ + \_\_$$

iii. Somam-se a ambos os termos da equação, valores convenientes para obter trinômios quadrados perfeitos em x e em y. Na prática, usa-se os espaços vagos para escrever esses números. O número que completa o quadrado em x : é o quadrado da metade do coeficiente de x, se o coeficiente de x^2 for 1. Assim, como o coeficiente de x é -8, cuja metade é -4, de quadrado 16, deve-se somar 16 em ambos os membros

$$x^2 - 8x + {\color{red}16} + y^2 + 4y + \_\_ = 5 + {\color{red}16} + \_\_$$

iv. Da mesma, O número que completa o quadrado em y : é o quadrado da metade do coeficiente de y, se o coeficiente de y^2 for 1. Assim, como o coeficiente de y é 4, cuja metade é 2, de quadrado 4, deve-se somar 4 em ambos os membros:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + {\color{red}4} = 5 + 16 + {\color{red}4}$$

v. Assim, obtém-se os quadrados perfeitos:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 5 + 16 + 4$$

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 5^2$$

Observação 1: Se os coeficientes de x^2 e y^2 não forem 1, basta dividir toda a equação geral por um número conveniente de forma a torna-los 1.

vi. Logo, $r = 5$ e $C = (4, -2)$.

2º) Método da comparação

Nesse método, devem-se comparar os coeficientes dos termos da equação dada com os termos da equação (4.18.2 ou 4.18.3), neste exemplo,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5$$

Dessa forma,

$$-2a = -8 \Rightarrow a = 4,$$

$$-2b = 4 \Rightarrow b = -2,$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = -5 \Rightarrow 4^2 + (-2)^2 - r^2 = -5 \Rightarrow r^2 = 16 + 4 + 5 \Rightarrow \mathbf{r{=}5}.$$

(não existe raio negativo)

Logo, o centro da circunferência é $C = (4, -2)$ e o raio é $r = 5$.

Ou

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5$$

Dessa forma,

$$A = -2a = -8 \Rightarrow a = 4,$$

$$B = -2b = 4 \Rightarrow b = -2,$$

$$C = a^2 + b^2 - r^2 = -5 \Rightarrow 4^2 + (-2)^2 - r^2 = -5 \Rightarrow r^2 = 16 + 4 + 5 \Rightarrow \mathbf{r{=}5}.$$

Observação 2: Apesar da resolução pelo método da comparação ser mais rápida e direta, é mais conveniente o uso do método de completar quadrados, "pois não envolve memorização da forma da equação geral e oferece a possibilidade de trabalhar da mesma maneira com outras equações (não só a da circunferência)" [14]. É aconselhável que se trabalhe bastante o primeiro método, para então, apresentar aos alunos, o segundo caso.

Atividade 19

19.1. Determine o raio e centro e construa, no plano cartesiano, as circunferências cujas equações são dadas:

a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

c) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$.

d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$.

19.2. Determine a equação da circunferência que tem o segmento com as extremidades nos pontos A e B como um diâmetro, e construa a circunferência no plano cartesiano, dados:

a) $A = (1, 6)$ e $B = (-3, -2)$.

b) $A = (0, 6)$ e $B = (-4, -4)$.

c) $A = (-5, 4)$ e $B = (3, -2)$.

d) $A = (-1, 6)$ e $B = (7, -2)$.

19.3. A reta r de equação $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{5} = 1$ intersecta o eixo x no ponto A e o eixo y no ponto B. O ponto C é o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 5 = 0$.

a) Determine as coordenadas dos pontos A, B e C.

b) Construa a reta, a circunferência e o triângulo no mesmo plano cartesiano(no caderno quadriculado).

c) Calcule a área e o perímetro da região triangular determinada pelos pontos A, B e C.

19.4. Refaça, no *Geogebra*, os exercícios 19.1, 19.2 e 19.3.

4.20 Aula 20 - Posições relativas

Objetivos: Identificar as posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência, e entre duas circunferências no plano cartesiano.

Desenvolvimento: Constrói-se (a título de exemplo), num mesmo plano cartesiano (no caderno quadriculado), a reta r, as circunferências e os pontos, descritos na figura 4.62 e então, pode-se indagar os alunos em relação a pares de elementos como:

- Ponto e circunferência – o ponto está “dentro”, “fora” ou “sobre” a circunferência?

- Reta e circunferência – a reta “corta” a circunferência em um único ponto, em dois pontos ou não corta a circunferência?

- Duas circunferências – as duas circunferências se “cortam” num único ponto, em dois pontos, ou não se “cortam”?

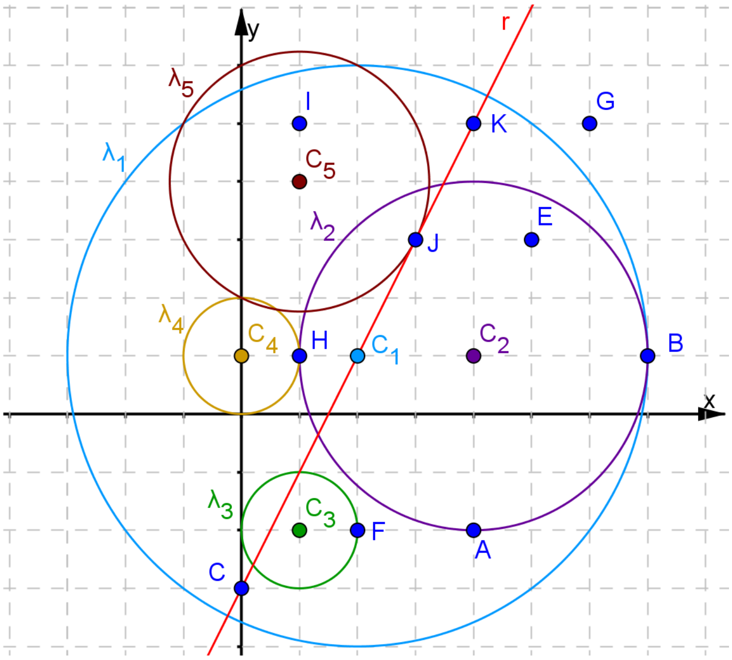


Figura 4.62: Circunferencia - posição relativa
Fonte: O autor, produzido no *Geogebra*

Em seguida apresentam-se de maneira formal, as definições e conceitos acerca das posições relativas da circunferência:

1º) Posição relativa entre ponto e circunferência

As possíveis posições de um ponto $P = (x, y)$ do plano em relação a uma circunferência λ de centro C e raio r são: exterior, interior ou pertencente à circunferência. A determinação de uma destas possibilidades ocorre da comparação entre a distância d, do ponto ao centro da circunferência, com o raio r da circunferência (c.f. figura 4.63).

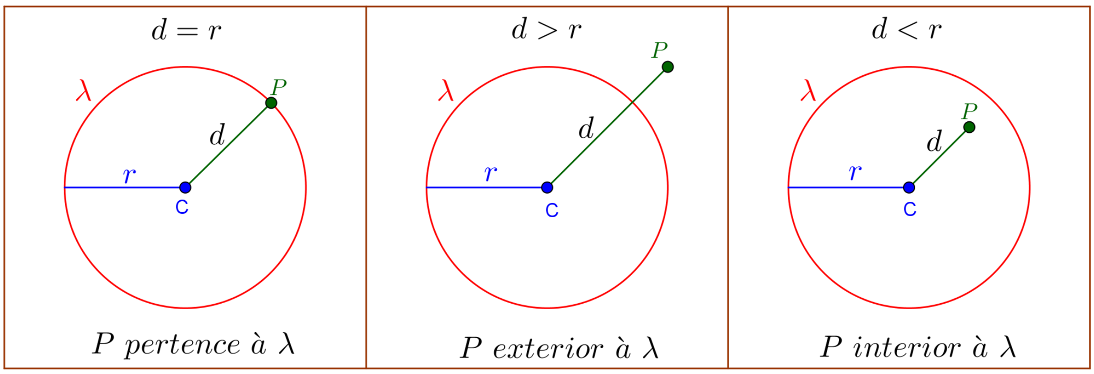


Figura 4.63: Circunferencia e ponto
Fonte: O autor, produzido no *Geogebra*

2º) Posição relativa entre reta e circunferência

As possíveis posições de uma reta s do plano em relação a uma circunferência λ de centro C e raio r são: tangente, secante ou externa à circunferência. A determinação de uma destas possibilidades ocorre da comparação entre a distância d da reta ao centro da circunferência com o raio r da circunferência (c.f. figura 4.64).

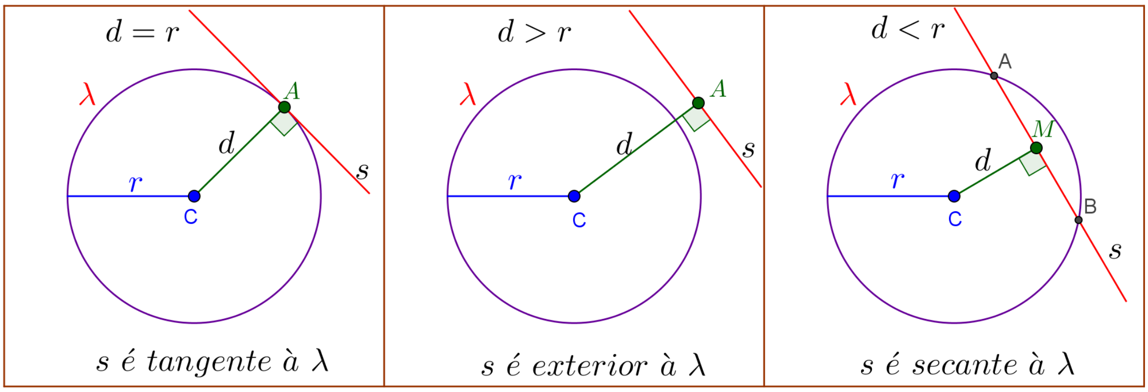


Figura 4.64: Circunferencia e reta
Fonte: O autor, produzido no *Geogebra*

Da observação dos três casos anteriores, conclui-se que:

- Se $d = r$, então $s \cap \lambda = A$ (s é tangente à circunferência λ);
- Se $d > r$, então $s \cap \lambda = \emptyset$ (s é exterior à circunferência λ);
- Se $d < r$, então $s \cap \lambda = A, B$ (s é secante à circunferência λ).

3º) Posição relativa entre duas circunferência

Considerando, num mesmo plano cartesiano, duas circunferências distintas λ_1 e λ_2, de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2, respectivamente, pode-se analisar a posição relativa entre elas comparando a distância d, entre seus centros C_1 e C_2, com os seus raios r_1 e r_2(veja o quadro da figura 4.65).

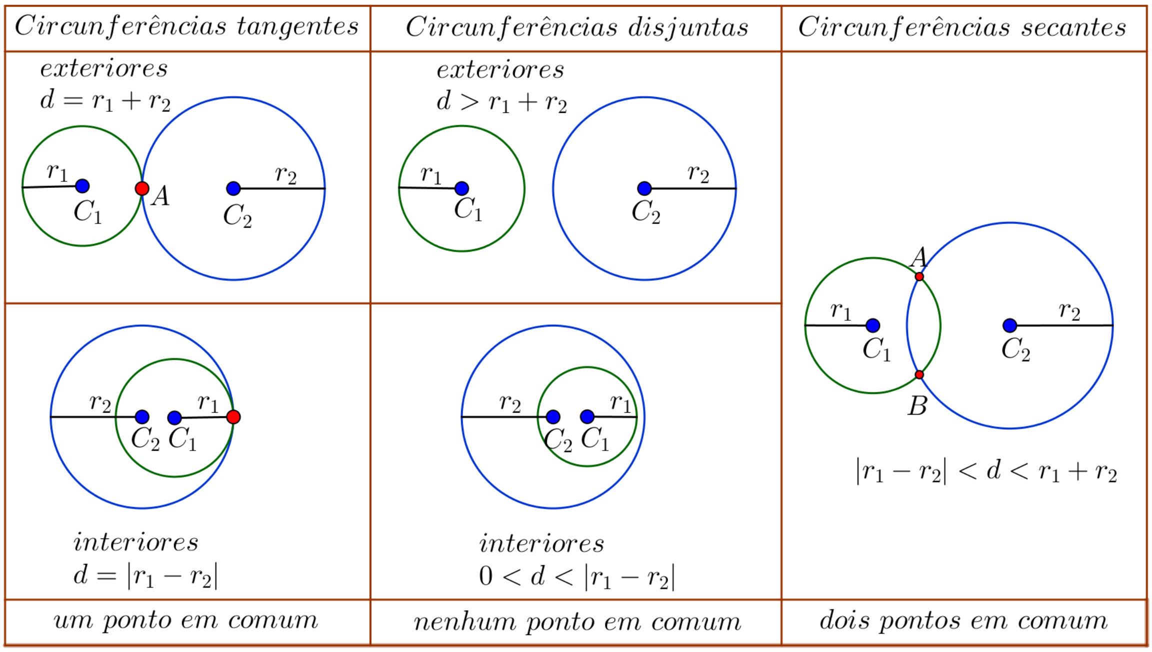


Figura 4.65: Duas circunferencias
Fonte: O autor, produzido no *Geogebra*

Para saber quantos são os pontos comuns entre duas circunferências, basta saber seus raios e a distância entre seus centros. E, para saber quais são esses pontos, é preciso resolver o sistema formado pelas equações a elas associadas.

Atividade 20

20.1. Construa, em cada caso, no plano cartesiano(caderno quadriculado) o ponto P e a circunferência λ, e determine a posição relativa entre os dois.

a) $P(1, 3)$ e $\lambda : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

b) $P(5, 6)$ e $\lambda : (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 4$.

c) $P(3, 1)$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$.

d) $P(4, -2)$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 24 = 0$.

20.2. Considere a reta r e as circunferências λ_1 e λ_2 de centros nos pontos A e B, respectivamente, na figura 4.66.

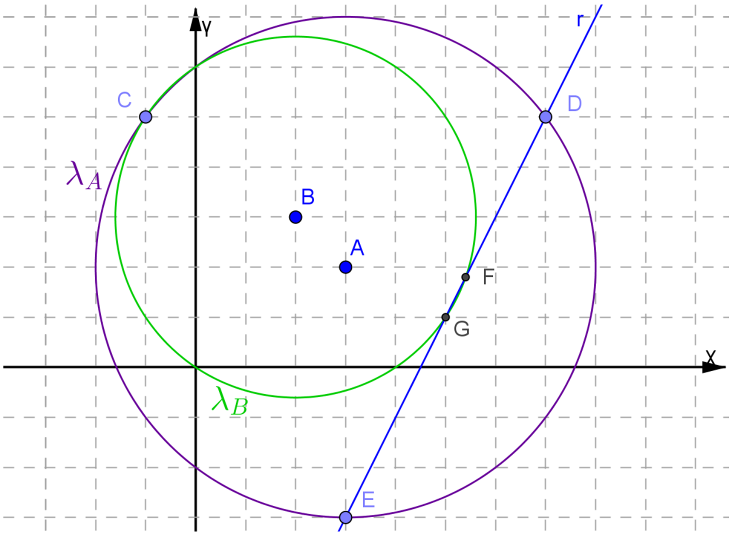


Figura 4.66: Circunferencias e reta
Fonte: O autor, produzido no geogebra

a) Determine a equação da reta r.

b) Determine as equações das circunferências.

c) Determine a posição relativa entre r e C_1, e entre r e C_2.

d) Determine a posição relativa entre D e C_2.

e) A área do triângulo ADE e BDE.

20.3. Construa, em cada caso, no plano cartesiano(caderno quadriculado) a reta s e a circunferência λ, e determine a posição relativa entre os dois.

a) $s : 3x - 4y + 15 = 0$ e $\lambda : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

b) $s : 2x - y + 1 = 0$ e $\lambda : (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 4$.

c) $4x + 3y + 8 = 0$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$.

d) $y = 3x + 4$ e $\lambda : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$.

20.4. Refaça, no *Geogebra*, os exercícios 20.1 e 20.3.

4.21 Aula 21 - Resolução de problemas

Objetivos: Retomar os conteúdos estudados na aplicação de resolução de problemas

Atividade 21

21.1. (Ibmec-SP – adaptado) Os pontos A, B, C e D do plano abaixo representam quatro cidades.(c.f. figura 4.67)

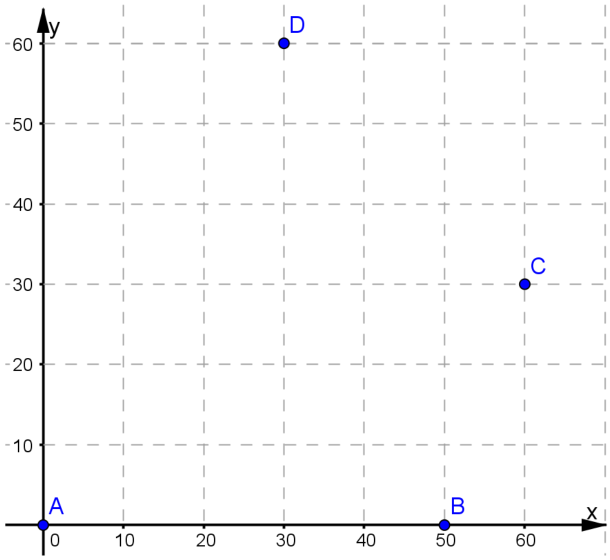


Figura 4.67: 4 cidades. Fonte: O autor, no *Geogebra*.

Uma emissora de televisão quer construir uma estação transmissora numa localização tal que:

- A distância entre a estação e a cidade localizada em A, seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em B;
- A distância entre a estação e a cidade localizada em C, seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em D.

Considerando as coordenadas do plano acima (c.f. figura 4.67), a localização da estação deverá ser o ponto

a) $(10, 10)$.

b) $(10, 20)$.

c) $(25, 10)$.

d) $(20, 20)$.

e) $(25, 25)$.

21.2. (Fuvest-SP) Determine a equação da reta que passa pelo ponto $P = (2, 3)$ e pelo ponto Q, simétrico de P em relação à origem.

21.3. Na figura 4.68 dada, $ABCD$ é um paralelogramo. Determine uma equação geral da reta-suporte de cada diagonal, AC e BD.

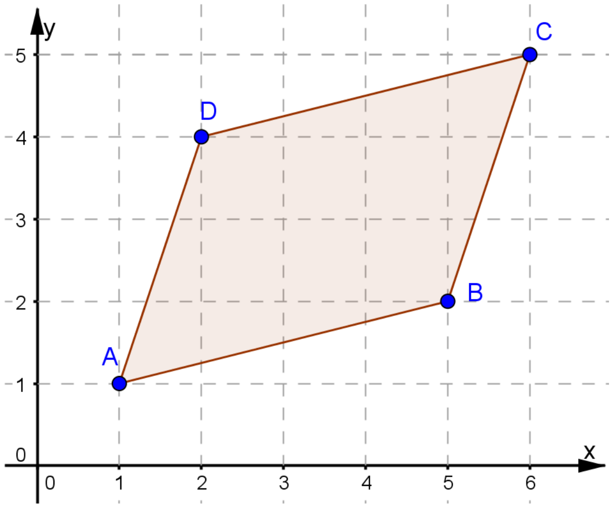


Figura 4.68: Paralelogramo. Fonte: O autor, no *Geogebra*.

21.4. Na figura dada, o ponto O é a origem do sistema de coordenadas ortogonais e $OABC$ é um quadrado de lado 4. Sabendo que M é o ponto médio de AO e N é o ponto médio de OC, escreva a equação da reta que passa por C e M e a equação da reta que passa por A e N.

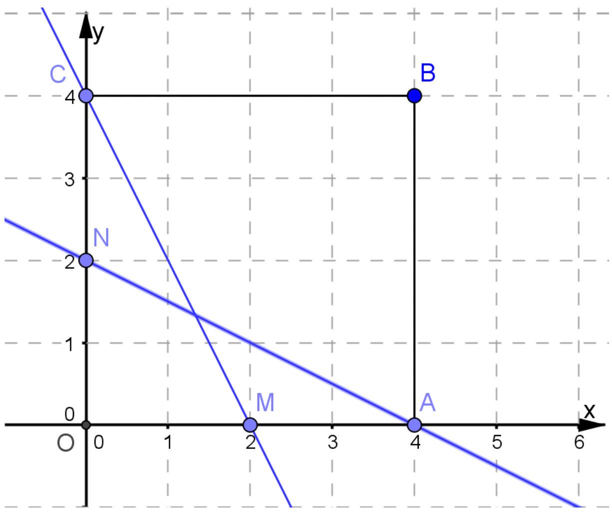


Figura 4.69: Retas. Fonte: O autor, no *Geogebra*.

21.5. (FGV-adaptado) A circunferência da figura seguinte é tangente aos eixos x e y e tem equação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

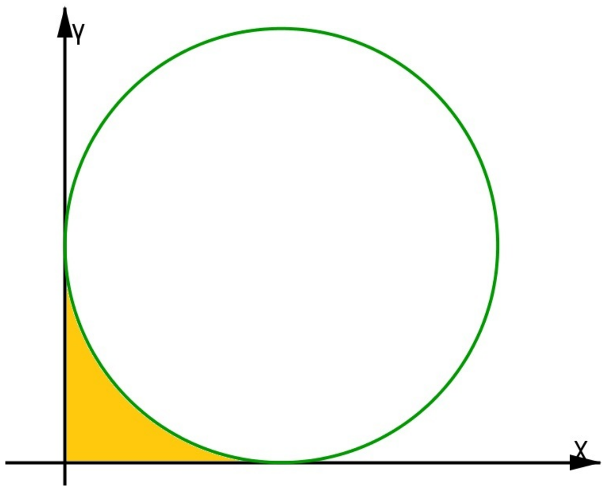


Figura 4.70: tangência. Fonte: O autor, no *Geogebra*.

A área da superfície sombreada é

a) $9(\pi - 1)$.

b) $(81\pi - 9)$.

c) $\dfrac{9(4-\pi)}{4}$.

d) $\dfrac{9(9\pi-4)}{4}$.

e) $\dfrac{6(6-\pi)}{4}$.

21.6. Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que:

a) $(x-5)^2 + (y-4)^2 < 9$.

b) $(x+4)^2 + (y-4)^2 \leq 4$.

c) $(x+4)^2 + (y-4)^2 < 4$.

d) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 \geq 0$.

e) $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 > 0$.

21.7. Suponha que, por meio da utilização de um GPS, foram determinadas as coordenadas de três cidades que se encontram no nível do mar e cujas latitudes e longitudes são dadas pelos pares ordenados, em um sistema cartesiano em que cada unidade representa 100 km: $A = (2, 3), B = (4, 6)$, e $C = (6, 5)$. Suponha também que as estradas que unem essas cidades, duas a duas, são linhas retas. Analise as afirmações abaixo e assinale a verdadeira.

a) A distância da cidade A até a cidade B é exatamente o dobro da distância entre as cidades B e C.

b) A distância da cidade A até a cidade C é de 300km.

c) A cidade A está mais próxima da cidade B do que da cidade C.

d) A cidade A está mais próxima da cidade C do que da cidade B.

e) A soma das três distâncias entre as três cidades, duas a duas, é de 38100 km.(Extraído de [14], p. 110)

21.8. Construa no plano cartesiano(caderno quadriculado) a região formada pelos pontos (x, y) que são soluções de cada sistema abaixo:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x \leq 2 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y \leq -1 \\ (x-6)^2 + (y-4)^2 \leq 9 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 4y \leq 5 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 10 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y \leq 12 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 13 \end{cases}$.

4.22 Aula 22 - Avaliação II

Atividade 22 - Avaliação II

22.1. -(Enem - adaptado) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetro (c.f. figura4.71).

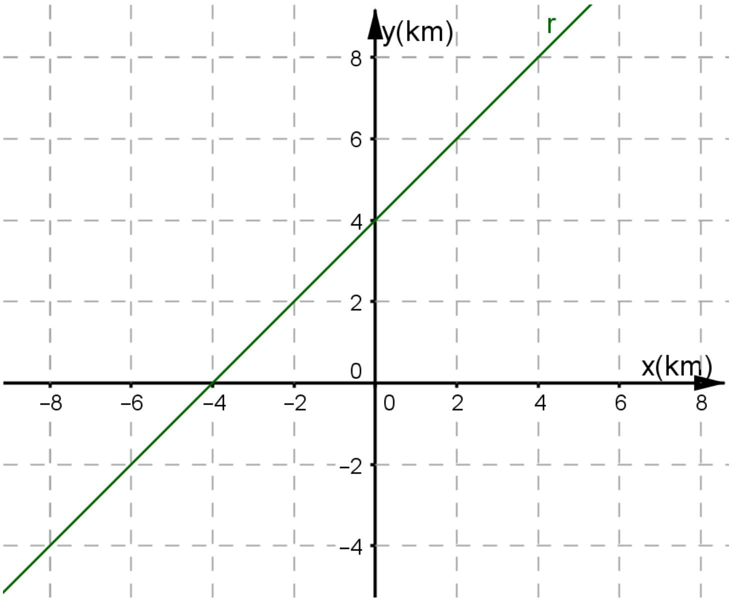


Figura 4.71: Reta. Fonte: O autor, no geogebra.

A reta $r : y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

a) $(-5, 0)$.
b) $(-3, 0)$.
c) $(-2, 1)$.
d) $(0, 4)$.
e) $(0, 4)$.

22.2. Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$, pode-se afirmar que o raio r e o centro $C = (a, b)$ são dados por

a) $r = 2$ e $C = (-3, 1)$.
b) $r = 4$ e $C = (3, 1)$.
c) $r = 2$ e $C = (-3, -1)$.
d) $r = 4$ e $C = (-3, -1)$.
e) $r = 2$ e $C = (3, -1)$.

22.3. Se a circunferência da figura 4.72 tem o segmento de extremos $A = (-7, -1)$ e $B = (1, 5)$ como um diâmetro então, a equação é

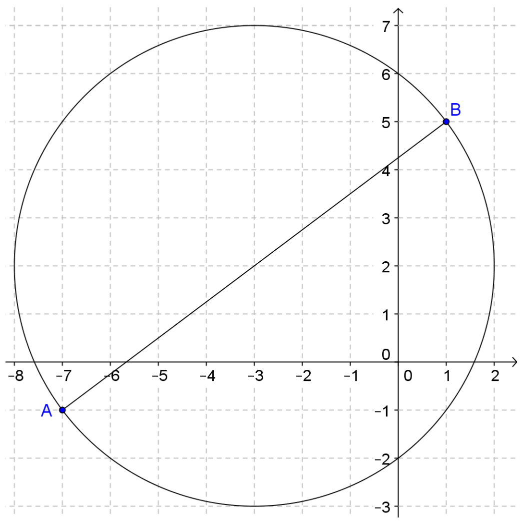


Figura 4.72: Circunferencia. Fonte: O autor, no Geogebra.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 8 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$.

c) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

d) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 16$.

e) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 49$.

22.4. Considere, no gráfico figura 4.73, a reta r_1, que passa pelos pontos A e B, julgue os itens como **certo (C)** ou **errado (E)**.

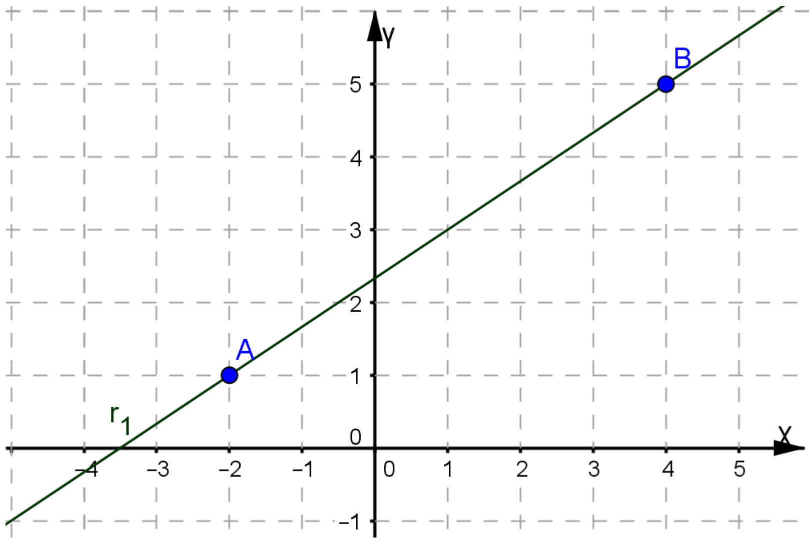


Figura 4.73: Reta AB. Fonte: O autor, no geogebra.

( ) A reta r_1 é mediatriz do segmento de extremos $P = (3, 0)$ e $Q = (-1, 6)$.

( ) A reta r_1 é paralela a reta de equação $3x - 2y - 1 = 0$.

( ) A reta r_1 tem coeficiente linear igual a $\dfrac{7}{3}$.

( ) A reta r_1 intersecta o eixo x no ponto $(3,5;0)$.

( ) A reta r_1 é perpendicular a reta $y = \dfrac{2}{3}x + 5$, pois elas têm a mesma declividade.

Logo, assinale a sequência correta é

a) ECCEC.

b) CECEE.

c) CCEEC.

d) ECEEC.

e) CEECC.

22.5. Um sistema xOy de coordenadas cartesianas, cuja unidade adotada é o quilometro, foi associado a uma região plana e, assim, mostrou-se que o epicentro de um terremoto ocorreu no ponto $E(3,0)$. Sabendo que os efeitos desse terremoto foram sentidos, no máximo, até um raio de 5 km do epicentro:(Extraído de [34], p. 193)

a) Dê uma relação entre x e y cujo gráfico seja toda região atingida pelo terremoto;

a) Represente no plano cartesiano a relação obtida no item **a**.

Capítulo 5

Análise dos resultados

Este capítulo apresenta os resultados obtidos durante e após a aplicação da sequência didática proposta a partir de análise qualitativa, por triangulação de métodos[1] ([30] e [43]), dos dados levantados. Estes dados foram obtidos a partir de questionários, entrevistas com alunos e professores da escola, avaliações e observações feitas durante a realização das atividades desenvolvidas ao longo desse processo. Processo este, que iniciou-se a partir do momento em que os alunos foram submetidos a um questionário para avaliar suas condições iniciais, e encerrou-se após eles terem passado pelas avaliações formais e serem, novamente, submetidos a um novo questionário.

De modo geral o que se espera obter após essa análise é que os alunos apresentem uma evolução em relação à sua condição inicial no que se refere, principalmente, aos conhecimentos geométricos básicos, tomando como parâmetro a escala de Van Hiele, pois desta forma, isto poderá ser um indício que aprendizagem adquirida pelo aluno é significativa.

5.1 Condições iniciais

Esta pesquisa foi desenvolvida com os alunos das 8 turmas de 3ª série do matutino com as quais trabalho. Inicialmente realiza-se um levantamento preliminar com os alunos envolvidos, por meio de um questionário sócio educacional (Q_1) para verificar suas condições iniciais de aprendizagem (assim, conforme Ausubel, tomar como ponto de partida aquilo que o aluno já sabe) e também estabelecer o seu perfil socioeconômico, visto que essas condições podem interferir de forma direta ou indireta no seu desempenho escolar. Pois, de acordo com [23], "mais se conhece os fatos brutos sobre uma determinada realidade, menos essa realidade nos é estranha, estando-se mais instrumentalizado para vê-la, examina-la, questiona-la, para eventualmente conscientizar-se dos problemas que ela comporta". Os resultados obtidos desse questionário, são descritos e analisados a seguir.

Observação: Paralelamente a esse processo, a professora que trabalha com as turmas de 3º ano do turno vespertino, por sugestão minha, adota essa mesma sequência didática, utilizando de forma sistemática o caderno quadriculado.

[1]Processo que estabelece um diálogo entre dados empíricos, autores que tratam da temática estudada e análise de conjuntura.

5.1.1 Quanto ao local onde mora o aluno

A tabela 5.1 e o gráfico na figura 5.1 apresentam o percentual de alunos por região de residência.

Residência	Alunos
Próximo à escola	58%
Zona rural	25%
Entorno do DF	17%

Tabela 5.1: Residência

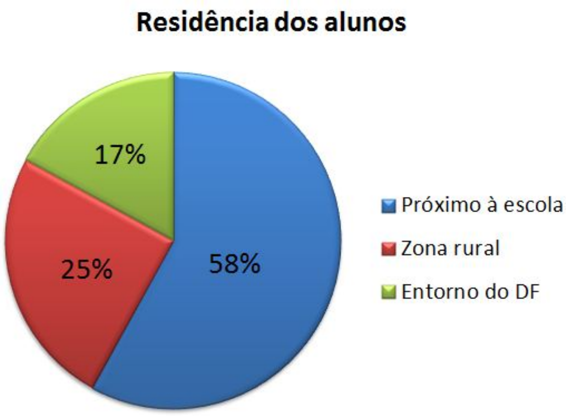


Figura 5.1: Residência dos alunos. Fonte: Autor, no excel.

Este resultado já era esperado, afinal, há vários anos que essa comunidade escolar mantém-se com essa característica; ele mostra que uma parte considerável dos alunos mora distante da escola (conforme já descrito na seção 2.2), e com isto gasta-se em média 2 horas por dia no deslocamento, de ônibus, do trajeto de casa para a escola. Com isso, em razão de algumas paralisações de rodoviários que tem ocorrido sistematicamente ao longo do ano, muitos alunos são obrigados a faltar às aulas, o que acaba lhes causando um prejuízo pedagógico e, consequentemente, interferindo negativamente em seu desempenho escolar.

5.1.2 Quanto às dificuldades em geometria básica

A tabela 5.2 e o gráfico na figura 5.2 apresentam o percentual de alunos com dificuldades em conhecimentos básicos de geometria.

Dificuldades - Q_1	Alunos
Localizar pontos	65%
Quadriláteros	55%
Distância na reta	35%
Distância no plano	70%
Teorema de Pitágoras	60%

Tabela 5.2: Dificuldades 2

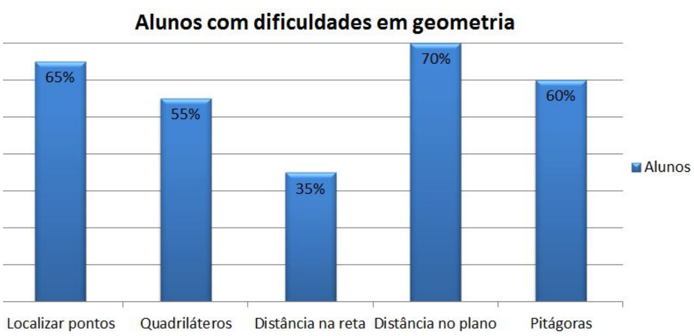


Figura 5.2: Dificuldades em geometria. Fonte: Autor, no excel.

Este resultado, também esperado, e as observações feitas ao longo de vários anos trabalhando com o Ensino Médio, mostram que a maioria dos alunos chega ao 3º ano com grande defasagem de conhecimento geométrico e dificuldades em trabalhar no plano cartesiano, e não seria exagero classificar estes alunos no nível zero, na escala de Van Hiele. Até porque, para [33] (p. 8) a maioria dos alunos que iniciam o Ensino Médio se enquadram no nível zero.

Somados a tudo isso, 46% dos alunos reconhecem não ter qualquer hábito de estudos e 36% deles afirmam não ter qualquer tipo de acompanhamento ou apoio escolar (por parte de algum membro da família) na realização das tarefas, o que corrobora com outra situação não menos importante, que é o fato de que cerca de 60% dos pais dos alunos não comparecerem às reuniões periódicas, promovidas pela escola, para tratar de assuntos pertinentes à vida escolar de seus filhos (c.f. a tabela 5.3 e o gráfico na figura 5.3).

Responsabilidade familiar - Q_1	Alunos
Não tem hábito de estudo	46%
Não tem acompanhamento	36%
Pais não vão às reuniões	60%

Tabela 5.3: Responsabilidade

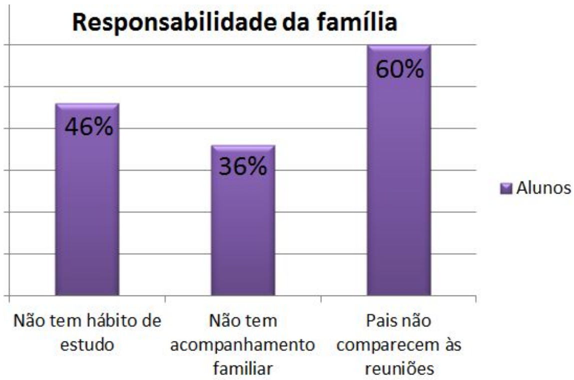


Figura 5.3: Responsabilidade da família. Fonte: Autor, no excel.

Este cenário torna ainda mais difícil o trabalho pedagógico do professor afinal, no processo educativo do aluno a família também deve ser protagonista.

A figura 5.4 abaixo ilustra o quanto é deficitária a condição de aprendizagem de alguns alunos; trata-se de uma foto tirada do caderno de um aluno sem qualquer restrição cognitiva, numa atividade de sala em que, a princípio, ele deveria construir um triângulo a partir das coordenadas dos vértices.

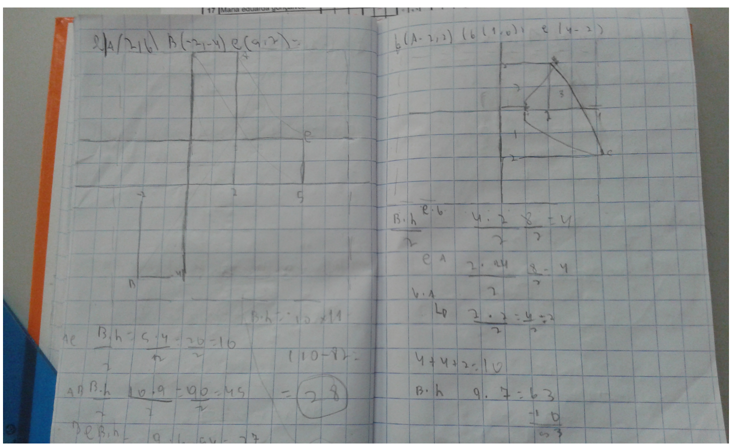


Figura 5.4: Caderno de um aluno. Fonte: Autor, foto.

5.1.3 Quanto ao acesso digital

A tabela 5.4 e o gráfico na figura 5.5 apresentam o percentual de alunos com acesso ao mundo digital.

Acesso digital	Alunos
Computador	85%
Smartphone	95%
Internet	97%

Tabela 5.4: Acesso digital

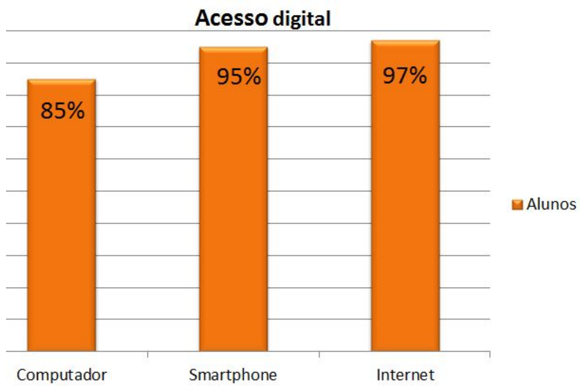


Figura 5.5: Acesso digital. Fonte: Autor, no excel.

Esta é uma condição bastante favorável à utilização, em sala de aula, de recursos tecnológicos como, por exemplo, o *Geogebra*.

5.2 Desempenho nas avaliações formais

Essa sequência didática é aplicada a oito (do 3ºA ao 3ºH – Por questões de praticidade, serão chamadas de Grupo A) das nove turmas de 3º ano do matutino, enquanto que na outra turma (3ºI - Grupo B, usado como grupo de controle), de outro professor, o conteúdo é abordado de maneira convencional, ou seja, seguindo a sequência e abordagem (essencialmente algébrica) presentes no livro didático adotado. Os alunos dos dois grupos são submetidos às mesmas duas avaliações formais: a primeira envolvendo o estudo do ponto, e a segunda, abordando reta e circunferência. A tabela 5.5 e o gráfico na figura 5.6 apresentam o índice médio de acertos das questões propostas nestas avaliações.

Turmas	1ª Avaliação	2ª Avaliação
Grupo A	55%	45%
Grupo B	35%	31%

Tabela 5.5: Índice de acertos

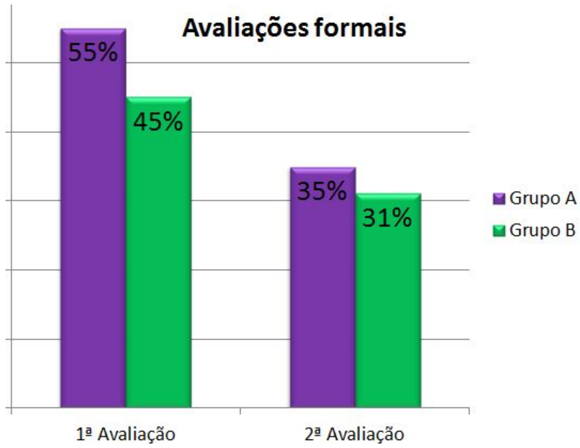


Figura 5.6: Índice de acertos. Fonte: Autor, no excel.

Como os dois grupos foram submetidos às mesmas avaliações, este resultado indica que o Grupo A obteve um melhor desempenho tanto na primeira quanto na segunda avaliação. Mostra também, que houve uma queda de desempenho dos dois grupos na 2ª avaliação, o que é natural, afinal, os tópicos abordados na 2ª avaliação possuem um maior nível de complexidade que os da 1ª avalição.

5.3 Avaliação da proposta

Ao final do processo, com o objetivo de obter mais elementos para avaliar esta proposta de sequência didática e, também, o nível de desenvolvimento dos alunos nesse processo um segundo questionário (Q_2) é aplicado, com abordagem nos seguintes aspectos:

5.3.1 Dificuldades apresentadas em relação a geometria

A tabela 5.6 mostra o percentual de alunos com dificuldades em conhecimentos básicos de geometria apresentados no questionário Q_2, e o gráfico na figura 5.7 estabelece um comparativo, neste quesito, entre os resultados dos dois questionários Q_1 e Q_2.

Dificuldades - Q_2	Alunos
Localizar pontos	15%
Quadriláteros	35%
Distância na reta	15%
Distância no plano	25%
Teorema de Pitágoras	30%

Tabela 5.6: Dificudades 2

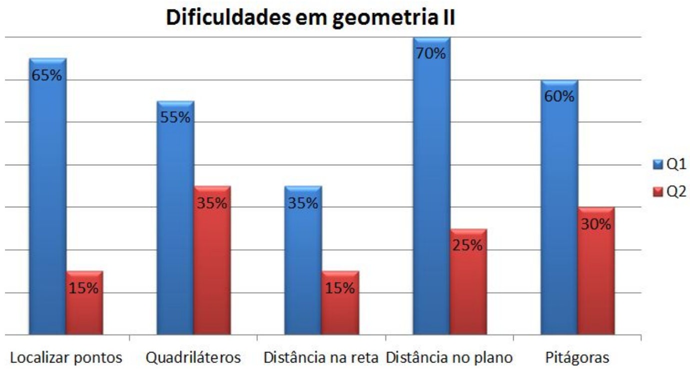


Figura 5.7: Dificuldades em geometria. Fonte: Autor, no excel.

Este comparativo mostra que o nível de dificuldades dos alunos relacionadas aos conhecimentos de geometria diminuiram significativamente e, portanto, uma evolução do aprendizado em relação à sua condição inicial. Da mesma forma, a partir das discussões e observações feitas em sala de aula, do contato no dia a dia e também pelas avaliações realizadas, pode-se afirmar que muitos alunos conseguiram sair do nível zero para o nível 1, na escala Hiele, e alguns passaram do nível 1 para o nível 2.

5.3.2 Quanto ao uso do *Geogebra*

Quando questionados se já haviam conhecido o *Geogebra*, anteriormente a esse processo, apenas 17% dos alunos declararam "sim". Este fato é um indicativo do quanto este software ainda é pouco explorado pelos professores do Ensino Básico.

5.3.3 Realização no *Geogebra*, das atividades propostas

A tabela 5.7 e o gráfico na figura 5.8 apresentam a declaração dos alunos quanto ao número de atividades propostas pelo professor, realizadas com *Geogebra*.

Atividades realizadas	Alunos
Todas	12%
Mais da metade	36%
Menos da metade	39%
Nenhuma	13%

Tabela 5.7: No *Geogebra*

Figura 5.8: Atividade com *Geogebra* 1. Fonte: Autor, no excel

A partir desses resultados e dos apontamentos feitos ao longo do processo, constata-se que em torno de 60% dos alunos aderiram, de forma efetiva, ao uso do *Geogebra* como um instrumento de auxílio à sua aprendizagem. Neste caso, considerando que a grande maioria dos alunos tem acesso à tecnologia digital (c.f. a tabela 5.4), era de se esperar um índice melhor que este.

5.3.4 Contribuição do *Geogebra* na aprendizagem

A tabela 5.8 e o gráfico na figura 5.9 apresentam a declaração dos alunos em relação ao quanto a utilização do *Geogebra* contribuiu para sua aprendizagem dos conteúdos de geometria analítica.

Aprendizagem	Alunos
Bastante	41%
Um pouco	42%
Quase nada	12%
Não contribuiu	5%

Tabela 5.8: Com o *Geogebra*

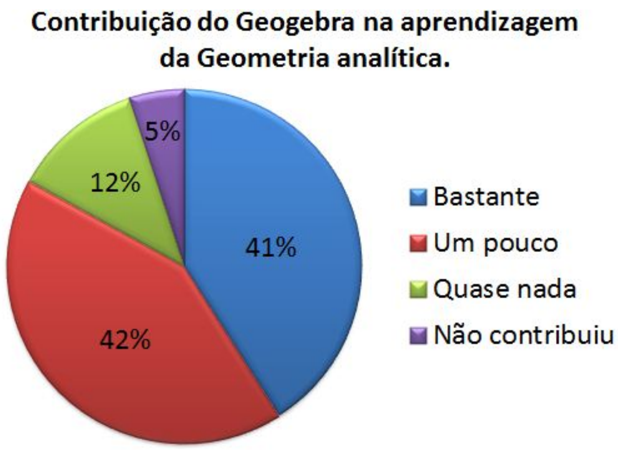


Figura 5.9: Atividade com *Geogebra* 2. Fonte: Autor, no excel.

Embora a adesão ao uso do *Geogebra* não tenha sido a esperada, no que tange à resolução de boa parte das atividades propostas, a maioria dos alunos considera que a utilização deste recurso foi importante para a aprendizagem da geometria analítica.

5.3.5 Atividades realizadas no caderno quadriculado

A tabela 5.9 e o gráfico na figura 5.10 apresentam a declaração dos alunos quanto ao número de atividades propostas pelo professor, realizadas no caderno quadriculado.

Realização das atividades	Alunos
Todas	43%
Mais da metade	23%
Menos da metade	28%
Nenhuma	6%

Tabela 5.9: Com caderno quadriculado

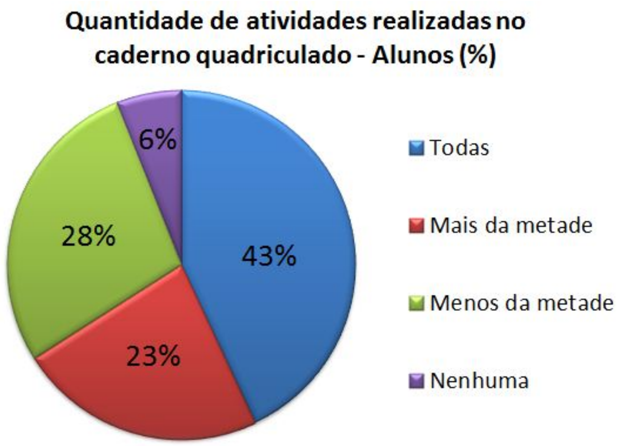


Figura 5.10: Caderno quadriculado 1. Fonte: Autor, no excel.

Este resultado indica que uma parte considerável dos alunos não se empenhou em realizar todas as atividades propostas. Este é um fator que, certamente, acaba influenciando negativamente o resultado das avaliações formais.

5.3.6 Contribuição do caderno quadriculado na aprendizagem

A tabela 5.10 e o gráfico na figura 5.11 apresentam a declaração dos alunos em relação ao quanto a utilização do caderno quadriculado contribuiu para sua aprendizagem dos conteúdos de geometria analítica.

Aprendizagem	Alunos
Bastante	76%
Um pouco	18%
Quase nada	4%
Não contribuiu	6%

Tabela 5.10: Com caderno quadriculado 2

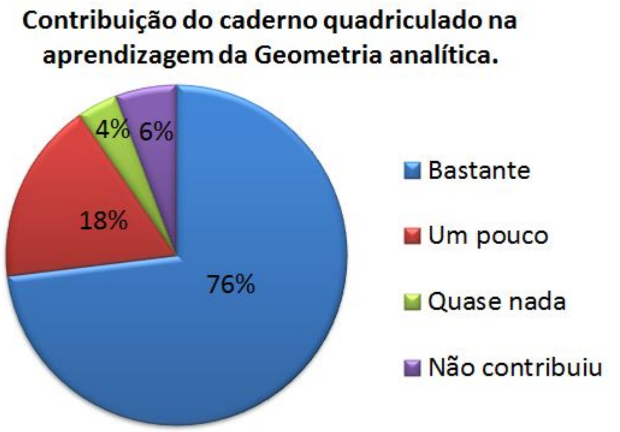


Figura 5.11: Caderno quadriculado 2. Fonte: Autor, no excel.

Desse modo, percebe-se aqui o quanto a contribuição do caderno quadriculado foi importante na aprendizagem deste conteúdo. A maioria dos alunos reconhece que a sua utilização ajudou-lhes a compreender melhor o processo de resolução dos problemas propostos.

5.3.7 Utilização do Geoplano

Algumas atividades foram desenvolvidas utilizando, também, o Geoplano. Nestas atividades os alunos mostraram-se bastante motivados atuando de forma participativa na realização de cada tarefa. As figura 5.12 e 5.13 mostram os alunos, aos pares, fazendo a atividade 04.

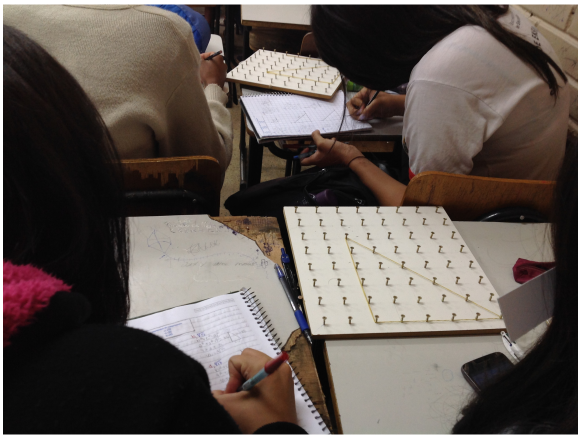


Figura 5.12: Utilizando o Geoplano 1. Fonte: Autor, foto.

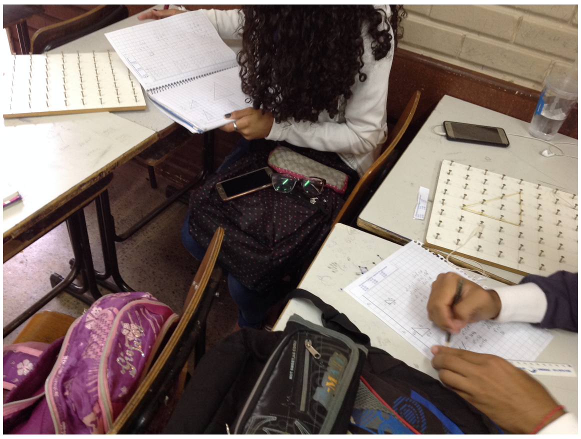


Figura 5.13: Utilizando o Geoplano 2. Fonte: Autor, foto.

5.3.8 Algumas opiniões dos alunos acerca do uso do:

(i) **Geogebra**

"Professor, antes de começar a usar o Geogebra, eu não sabia nem pra onde ir na hora de marcar pontos no plano cartesiano. Agora tudo parece mais fácil." *Aluna A, após instalar e começar a usar o software em seu tablet.*

"Este aplicativo é muito prático. Posso usar até no celular." *Aluno B.*

(ii) **Geoplano**

"Ficamos tão envolvidos nessa atividade que nem vimos o tempo passar." *Aluno C, sobre o Geoplano.*

"A gente poder desmanchar e refazer a figura quando ela tiver errada é muito legal." *Aluno D.*

(iii) **Caderno quadriculado**

"Facilita demais na hora de construir gráficos e figuras. Gostei." *Aluno E, sobre o uso do caderno quadriculado.*

"Esteticamente fica mais bonito e aí ajuda na compreensão do exercício." *Aluno F.*

"Na hora de determinar a medida do lado do triângulo é só contar os quadradinhos". *Aluno G.*

“Com a figura a resolução da área é mais fácil, e o caderno quadriculado ajuda muito”. *Aluno H.*

“Parece que resolver usando a fórmula é mais fácil, mas com a resolução geométrica, na folha quadriculada, eu entendo melhor o exercício”. *Aluno I, ao calcular a área de um triângulo.*

“Achei muito importante trabalhar com o caderno quadriculado, me ajudou bastante. Muito do que eu aprendi está sendo útil nas aulas de Cálculo1.” *Ex-aluno A10. Foi aluno da escola no ano passado, atualmente cursa Engenharia Civil na UnB.*

5.3.9 Depoimento da professora que atuou com as turmas do vespertino

“Já havia trabalhado com esse conteúdo de geometria analítica anteriormente, há alguns anos atrás, procurando, também, abordá-lo de maneira geométrica, mas não usava o caderno quadriculado, ainda. É a primeira vez que trabalho com o caderno quadriculado, e confesso que o seu uso, pelos alunos, tem auxiliado bastante o aprendizado deles. Muitos não conseguiam, por exemplo, utilizar a régua de maneira correta, na hora de obter medidas de lados de figuras, mas através das divisões das linhas na malha quadriculada essa dificuldade foi superada. A malha quadriculada também facilita o trabalho do professor, pois pode ajuda-lo a perceber algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos, a partir do que eles fazem na folha quadriculada. Mostrar a distância entre dois pontos no plano, a partir de triângulo retângulo na malha quadriculada, fica muito mais fácil para o aluno entender o processo.” *Professora que trabalhou com as turmas de 3º ano do turno vespertino.*

Considerações finais

Essa dissertação foi desenvolvida com o intuito de apresentar uma metodologia alternativa ao ensino da geometria analítica no Ensino Médio, utilizando uma sequência didática com um enfoque geométrico na abordagem desses conteúdos, tentando assim, fugir do tratamento algébrico presente na maioria dos livros didáticos, e dessa forma, tornar as aulas de Matemática mais agradáveis e atraentes para o aluno.

Nesse sentido, na perspectiva de proporcionar ao aluno uma aprendizagem com significado, para que ao final desse processo ele estivesse num outro patamar em relação ao início é que se buscou, durante a exposição dos conteúdos e a resolução dos problemas, um enfoque prioritariamente geométrico. Para isso, a utilização do caderno quadriculado, aliado ao Geogebra e o Geoplano, foi de fundamental importância como facilitador na construção gráfica, e não há dúvidas da relevância que a presença de figuras exerce na aprendizagem matemática.

As principais dificuldades enfrentadas na execução dessa sequência foram:

- Laboratório de informática com número insuficiente de computadores para atender uma turma de alunos;
- Condições iniciais de aprendizagem de alguns alunos, em relação aos conhecimentos de matemática e, em particular, de geometria plana;
- O alto índice de faltas de alguns alunos, principalmente os que moravam distantes da escola, contribuiu negativamente em seu processo de aprendizagem;
- Total desinteresse de parte dos alunos em participar das atividades propostas.

Esta última sim, foi a maior dentre as dificuldades enfrentadas, pois nenhuma estratégia adotada motivava esses alunos a participar das atividades, e desse modo não poderiam ser alcançados pela proposta, pois para que haja aprendizagem uma das condições é a de que o aluno queira aprender. Por isso, qualquer proposta de intervenção pedagógica, por mais inovadora que seja, somente alcançará o aluno se este assim o quiser. Cabe ao professor a tarefa de tentar motivá-lo, mas isso não é uma tarefa fácil. Isto remete a reflexão de uma frase dita por um colega professor da escola:

"Todas as premissas construtivistas esbarram na realidade."

Um problema que não foi acima relacionado, mas que não pode ser esquecido, pois pode influenciar substancialmente os demais, é a ausência da família no processo educativo do aluno. E, de acordo com a tabela 5.3 e o gráfico 5.3 a participação da família desses alunos em sua vida escolar é muito baixa.

Apesar desses problemas citados, os resultados obtidos na análise dos dados, feita no capítulo 5, permitem afirmar que os objetivos dessa proposta foram alcançados pois, de acordo com esses resultados:

- O grupo A (submetida à sequência didática) teve melhor desempenho que o Grupo B (grupo de controle) nas duas avaliações formais;
- Ocorreu uma sensível queda no nível das dificuldades, em relação aos conhecimentos geométricos, apresentadas inicialmente, como mostra o segundo questionário;
- Os alunos se declararam favoráveis ao uso do caderno quadriculado, do Geogebra e do Geoplano, atestando o quanto estes contribuíram positivamente para o seu aprendizado, conforme o segundo questionário.
- Os depoimentos espontâneos dos alunos também foram favoráveis à proposta;
- O depoimento da professora que trabalhou com as turmas de 3º ano do turno vespertino relatando suas impressões acerca desta proposta de abordagem e comparando-a com a anterior, mostra que esta pode sim ser uma alternativa de abordagem desse conteúdo.

Por fim, a realização dessa dissertação coroa todo o trabalho que foi realizado, desde o ingresso no Profmat, no início de 2016, passando pelo crivo das disciplinas obrigatórias e das eletivas, e também, do Exame Nacional de Qualificação até o momento da escolha do tema, que foi fruto de uma quase incessante reflexão. A partir daí, a busca por elementos que fundamentassem e consolidassem a construção deste projeto se tornou uma luta diária. Toda essa luta tem sido importante não somente para o crescimento acadêmico, mas principalmente, o profissional. A experiência vivenciada nesse período tem nos dado a oportunidade enxergar novos horizontes, permitindo-nos ter um novo olhar sobre o fazer pedagógico. Dito isso, posso afirmar com certeza, que a partir de agora, as minhas aulas não serão mais como antes.

Referências Bibliográficas

[1] AUSUBEL, D. P.; NOVAK, D. P.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

[2] AZEVEDO, T. A. B. **Vistas: atividades sobre a representação do espaço**. Disponível em: < https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29158/000775879.pdf?sequence=1>. Acessado em: 23 de dezembro de 2017.

[3] BALDIN, Y. Y.; FURUYA, Y. K. S. **Geometria analítica para todos e atividades com o Octave e o Geogebra**. EDUFSCAR – São Carlos, 2011.

[4] BATISTI, A. E.; SILVA, V. C. **Diversificando o uso do papel quadriculado nas aulas de Matemática**. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/580/445. Acesso: em novembro de 2017.

[5] BECKER, Marcelo. **Uma Alternativa para o ensino de Geometria: visualização geométrica e representações de sólidos no plano**. 2009. Disponível em: <https://http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/17161. Acessado em: Dezembro de 2017.

[6] BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica**. 2013. Disponivel em http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file. Acesso: em 07 de setembro de 2017.

[7] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[8] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCNs+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

[9] BRASIL NO PISA 2015. **Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros**. Disponível em:

<http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa 2015_completo_final_baixa.pdf>. Acesso em: outubro de 2017.

[10] BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. **Aprendizagem Significativa: revisão teórica e apresentação de um instrumento para aplicação em sala de aula** . Disponível em: < https://www.revistas.ufg.br/rir/article/view/27795>. Acesso: novembro de 2017.

[11] COSTA. Dailson E. **Geoplano no ensino da matemática : alguns aspectos e perspectivas da sua utilização na sala de aula**. Disponível em: <http://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/1695/2101 >. Acesso em: outubro de 2017.

[12] CEM 02 DO GAMA. **Projeto Político Pedagógico** - PPP 2017

[13] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática: Da teoria à prática**. 23ªed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2012.

[14] DANTE, L. R. **Matemática, contextos e aplicações, volume 3**. 2ª ed. São Paulo: Ática , 2014.

[15] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[16] DENECA, M. L.; PIRES, M. N. M. **O ensino da Matemática com o auxílio de materiais manipuláveis**. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/625-4.pdf. Acesso em dezembro de 2017.

[17] DESCARTES. Disponível em: https://www.biography.com/.image /t_share/MTE1ODA0OTcxMjY3MzYwM jY5/rene-descartes-37613-1-402.jpg

[18] DISTRITO FEDERAL. **Currículo em Movimento da Educação Básica Ensino Médio** – SEEDF. Disponível em: http://www.cre.se.df.gov.br/ascom/documentos/subeb/cur mov/5 ensino medio.pdf. Acesso em 15 de agosto de 2017.

[19] ENEM. **Provas Anteriores**. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas e gabaritos. Acesso em agosto de 2017.

[20] EVES, Howard - Introdução a historia da matemática; tradução de DOMINGUES, Higino H. Campinas-SP- 5ªed – Editora da Unicamp- 2011.

[21] FERMAT. https://pbs.twimg.com/profile_ images/471645414157209600/ Q7LHZcnD.jpeg.

[22] KALEFF, A. M.; HENRIQUES, A.; REI, D. M.; FIGUEIREDO, L. G. **Desenvolvimento do pensamento geométrico: modelo de van Hiele**. Bolema. Rio Claro, v.10, 1994.Disponível em: < https://scholar.google.com/citations?user=9_aCS7YAAAAJ&hl=pt-BR> . Acessado em: 04 de agosto de 2017.

[23] LAVILLE, C.; DIONNE J. **A construção do saber – manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Belo Horizonte, Editora UFMG, 1999, 340 p.

[24] LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática, volume 3**. 3ªed. São Paulo: Moderna, 2016.

[25] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio, volume 3**. SBM – Rio de Janeiro, 1998.

[26] LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

[27] LORENZATO, Sérgio. **Para aprender Matemática**. 3ª ed. rev. Campinas, SP: Autores associados, 2010 (Coleção Formação de Professores).

[28] LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar Geometria?** A educação matemática em revista. Geometria. Blumenau, número 04, p.03-13, 1995. Edição especial. Disponível em: <http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf>. Acessado em: dezembro de 2017.

[29] MACHADO, Rosa Maria. **Explorando o Geoplano**. In: II Bienal da SBM, Bahia-BA, 2004. Disponivel em: http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf. Acesso em 02 de outubro de 2017.

[30] MARCONDES, N. A. V.; BRISOLA, E. M.A. **Análise por triangulação de métodos**. Disponível em: http://revista.univap.br/index.php/revistaunivap/article/view/228/210. Acessado em: 15 de dezembro de 2017.

[31] MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem** – São Paulo: EPU,1999.

[32] MOREIRA, M. A. **O que é afinal aprendizagem significativa?**. Disponível em:<http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf >. Acesso em novembro de 2017

[33] OLIVEIRA, M. C.; GAZIRE, E. S. **Ressignificando a geometria plana no Ensino Médio, com auxílio de Van Hiele**. Belo Horizonte, 2012. Disponível em: http://www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20121128150635 Acessado em: 10 de novembro de 2017.

[34] PAIVA, Manoel. **Matemática, volume 3**. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2015.

[35] PESSOA, Ana C. G. - **Sequência didática** . Disponível em: <http://ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale/verbetes/sequencia-didatica>. Acesso em: novembro de 2017.

[36] POLYA, G. **A arte de resolver problemas**; tradução de Araújo, Heitor Lisboa de. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

[37] RABELO, M. L. **Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[38] ROCHA, C. A.; PESSOA, G.; PEREIRA, J. A.; FILHO, J. M. S. **O uso do Geoplano para o Ensino de Geometria: uma abordagem através de malhas quadriculadas** . IX ENEM. Minas Gerais, 2007.

[39] ROQUE, T.; CARVALHO,J. B. P. **Tópicos de história da Matemática** – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[40] SABBATIELLO, E.E.. El Geoplano: **Um recurso didáctico para la enseñança dinámica de la geometria plana elemental- Su aplicación e utilizacioón en la escuela primária**. Edicciones G.ªD.Y.P., Buenos Aires, 1967.

[41] SANTOS, Júlio C. F. **O desafio de promover a aprendizagem significativa**. Disponível em: <http://www.unisul.br/wps/wcm/connect/a7c548f3-6254-4148-8b48-9fd0497b5ad4/desafio-aprendizagem-significativa_integracao-universitaria_extensao.pdf?MOD=AJPERES.> Acesso em: novembro de 2017.

[42] SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 24ªed. ver. e atual. – São Paulo: Cortez, 2016.

[43] SILVA, A. H.; FOSSÁ, M. I. T. **Análise de conteúdo: exemplo de aplicação da técnica para análise de dados qualitativos**. Disponível em: http://revista.uepb.edu.br/index.php/qualitas/article/view/2113/1403. Acessado em: 12 de dezembro de 2017.

[44] SOUZA, J.; GARCIA, J. **Contato matemática, Volume 3**. - São Paulo: FTD, 2016.

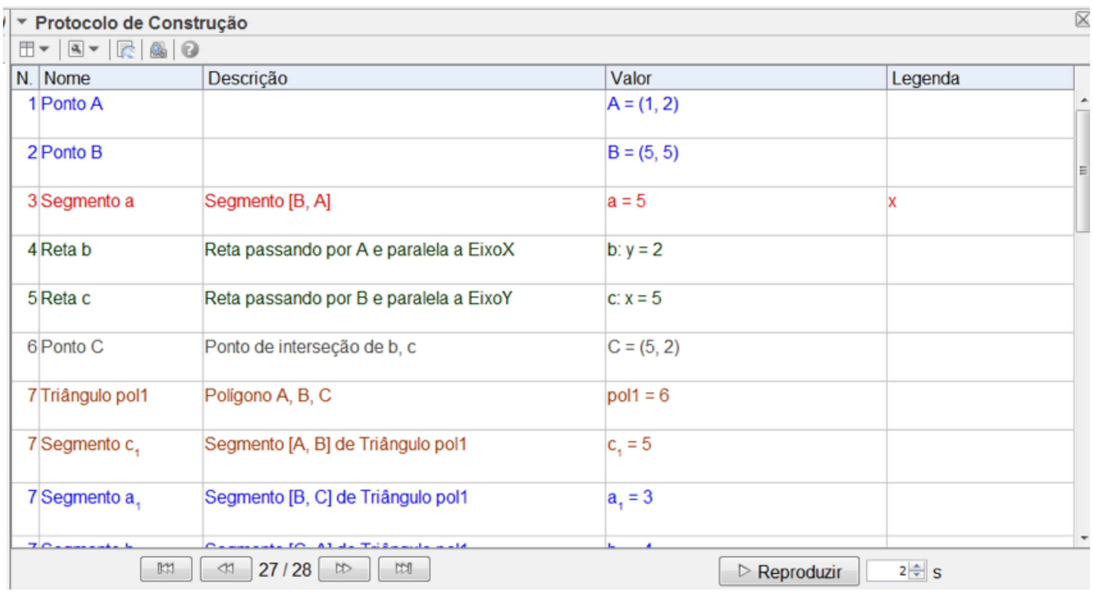
[45] TEIXEIRA, H. **Teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel**. Disponível em: <http://www.helioteixeira.org/ciencias-da-aprendizagem/teoria-da-aprendizagem-significativa-de-david-ausubel/>. Acesso em: novembro de 2017.

Apêndice A

Tutoriais Geogebra

A.1 Protocolo de construção do Tutorial 1

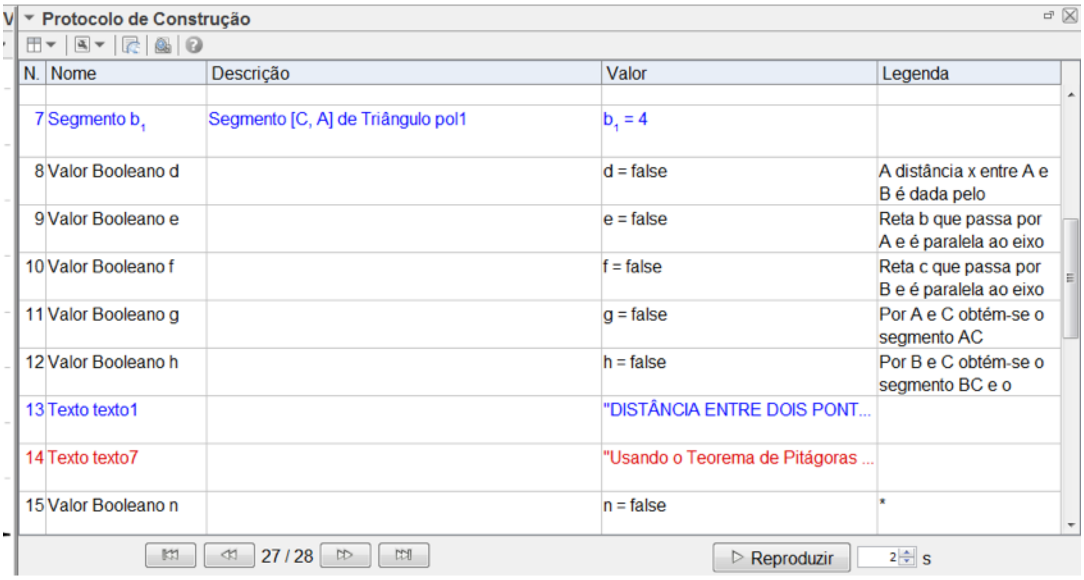
As figuras A1 à A4 descrevem o roteiro de construção do Tutorial 1.



Protocolo de Construção

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
1	Ponto A		A = (1, 2)	
2	Ponto B		B = (5, 5)	
3	Segmento a	Segmento [B, A]	a = 5	x
4	Reta b	Reta passando por A e paralela a EixoX	b: y = 2	
5	Reta c	Reta passando por B e paralela a EixoY	c: x = 5	
6	Ponto C	Ponto de interseção de b, c	C = (5, 2)	
7	Triângulo pol1	Polígono A, B, C	pol1 = 6	
7	Segmento c_1	Segmento [A, B] de Triângulo pol1	$c_1 = 5$	
7	Segmento a_1	Segmento [B, C] de Triângulo pol1	$a_1 = 3$	

Figura A.1: Tutorial 1a

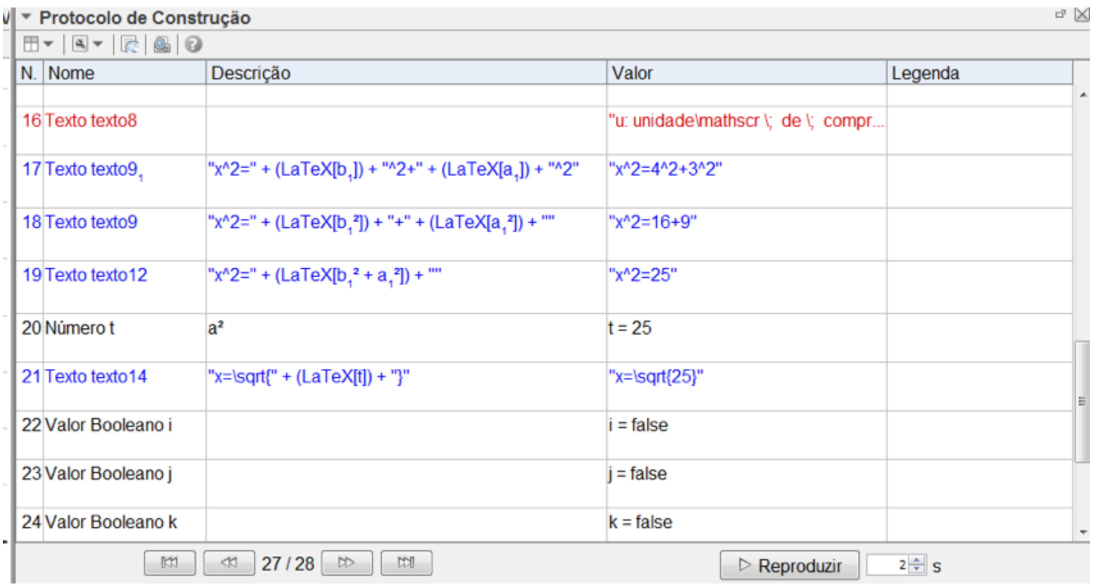


Protocolo de Construção

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
7	Segmento b_1	Segmento [C, A] de Triângulo pol1	$b_1 = 4$	
8	Valor Booleano d		d = false	A distância x entre A e B é dada pelo
9	Valor Booleano e		e = false	Reta b que passa por A e é paralela ao eixo
10	Valor Booleano f		f = false	Reta c que passa por B e é paralela ao eixo
11	Valor Booleano g		g = false	Por A e C obtém-se o segmento AC
12	Valor Booleano h		h = false	Por B e C obtém-se o segmento BC e o
13	Texto texto1		"DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONT...	
14	Texto texto7		"Usando o Teorema de Pitágoras ...	
15	Valor Booleano n		n = false	*

27 / 28 Reproduzir 2 s

Figura A.2: Tutorial 1b

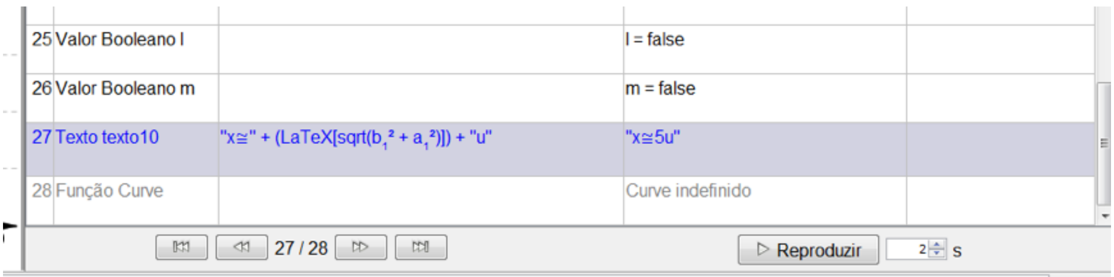


Protocolo de Construção

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
16	Texto texto8		"u: unidade\mathscr \; de \; compr...	
17	Texto texto9_1	"x^2=" + (LaTeX[b_1]) + "^2+" + (LaTeX[a_1]) + "^2"	"x^2=4^2+3^2"	
18	Texto texto9	"x^2=" + (LaTeX[b_1²]) + "+" + (LaTeX[a_1²]) + ""	"x^2=16+9"	
19	Texto texto12	"x^2=" + (LaTeX[b_1² + a_1²]) + ""	"x^2=25"	
20	Número t	a²	t = 25	
21	Texto texto14	"x=\sqrt{" + (LaTeX[t]) + "}"	"x=\sqrt{25}"	
22	Valor Booleano i		i = false	
23	Valor Booleano j		j = false	
24	Valor Booleano k		k = false	

27 / 28 Reproduzir 2 s

Figura A.3: Tutorial 1c



N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
25	Valor Booleano l		l = false	
26	Valor Booleano m		m = false	
27	Texto texto10	"x≅" + (LaTeX[sqrt(b_1² + a_1²)]) + "u"	"x≅5u"	
28	Função Curve		Curve indefinido	

27 / 28 Reproduzir 2 s

Figura A.4: Tutorial 1d

A.2 Tutorial 2

As figuras A5 à A11 descrevem o roteiro de construção do Tutorial 2.

Protocolo de Construção

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
1	Ponto A		A = (1, 6)	
2	Ponto B		B = (-5, 2)	
3	Ponto C		C = (-3, -2)	
4	Triângulo pol1	Polígono A, B, C	pol1 = 16	
4	Segmento c	Segmento [A, B] de Triângulo pol1	c = 7.21	x
4	Segmento a	Segmento [B, C] de Triângulo pol1	a = 4.47	y
4	Segmento b	Segmento [C, A] de Triângulo pol1	b = 8.94	z
5	Ponto D	(x(B), y(A))	D = (-5, 6)	
6	Triângulo pol2	Polígono B, D, A	pol2 = 12	

Figura A.5: Tutorial 2a

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
6	Segmento a_1	Segmento [B, D] de Triângulo pol2	$a_1 = 4$	
6	Segmento b_1	Segmento [D, A] de Triângulo pol2	$b_1 = 6$	
6	Segmento d	Segmento [A, B] de Triângulo pol2	d = 7.21	
7	Ponto E	(x(B), y(C))	E = (-5, -2)	
8	Triângulo pol3	Polígono B, E, C	pol3 = 4	
8	Segmento c_1	Segmento [B, E] de Triângulo pol3	$c_1 = 4$	
8	Segmento b_2	Segmento [E, C] de Triângulo pol3	$b_2 = 2$	
8	Segmento e	Segmento [C, B] de Triângulo pol3	e = 4.47	
9	Ponto F	(x(A), y(C))	F = (1, -2)	

Figura A.6: Tutorial 2b

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
10	Triângulo pol4	Polígono A, F, C	pol4 = 16	
10	Segmento c_2	Segmento [A, F] de Triângulo pol4	$c_2 = 8$	
10	Segmento a_2	Segmento [F, C] de Triângulo pol4	$a_2 = 4$	
10	Segmento f	Segmento [C, A] de Triângulo pol4	f = 8.94	
11	Texto texto1		"Perímetro de um triângulo"	
12	Texto texto2		"Calcular, usando Pitágoras, as medidas x, y e z"	
13	Texto texto16	"x^2=" + (LaTeX[a_1]) + "^2+" + (LaTeX[b_1]) + "^2"	"x^2=4^2+6^2"	
14	Número aa_1	a_1^2	$aa_1 = 16$	
15	Número bb_1	b_1^2	$bb_1 = 36$	

Figura A.7: Tutorial 2c

16	Texto texto17	"x^2=" + (LaTeX[aa_1]) + "+" + (LaTeX[bb_1]) + ""	"x^2=16+36"	
17	Número x_2	$aa_1 + bb_1$	$x_2 = 52$	
18	Texto texto18	"x=\sqrt{" + (LaTeX[x_2]) + "}"	"x=\sqrt{52}"	
19	Texto texto3	"y^2=" + (LaTeX[b_2]) + "^2+" + (LaTeX[c_1]) + "^2"	"y^2=2^2+4^2"	
20	Número bb_2	b_2^2	$bb_2 = 4$	
21	Número cc_1	c_1^2	$cc_1 = 16$	
22	Texto texto4	"y^2=" + (LaTeX[bb_2]) + "+" + (LaTeX[cc_1]) + ""	"y^2=4+16"	
23	Número y_2	$bb_2 + cc_1$	$y_2 = 20$	
24	Texto texto5	"y=\sqrt{" + (LaTeX[y_2]) + "}"	"y=\sqrt{20}"	

Figura A.8: Tutorial 2d

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
25	Texto texto7	"z^2=" + (LaTeX[a_2]) + "^2+" + (LaTeX[c_2]) + "^2"	"z^2=4^2+8^2"	
26	Número aa_2	a_2^2	$aa_2 = 16$	
27	Número cc_2	c_2^2	$cc_2 = 64$	
28	Texto texto8	"z^2=" + (LaTeX[aa_2]) + "+" + (LaTeX[cc_2]) + ""	"z^2=16+64"	
29	Número z_2	$aa_2 + cc_2$	$z_2 = 80$	
30	Texto texto9	"z=\sqrt{" + (LaTeX[z_2]) + "}"	"z=\sqrt{80}"	
31	Texto texto19	"x≅" + (LaTeX[c]) + "u"	"x≅7.21u"	
32	Texto texto6	"y≅" + (LaTeX[a]) + "u"	"y≅4.47u"	
33	Texto texto10	"z≅" + (LaTeX[b]) + ""	"z≅8.94"	

Figura A.9: Tutorial 2e

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
34	Número p	a + b + c	p = 20.63	
35	Texto texto11	"Perímetro=x+y+z=" + (LaTeX[c]) + "+" + (LaTeX[a]) + "+" + (LaTeX[b]) + "≅" +	"Perímetro=x+y+z=7.21+4.47+8.94≅20.63u"	
36	Valor Booleano j		j = false	x
37	Valor Booleano k		k = false	y
38	Valor Booleano l		l = false	z
39	Valor Booleano m		m = false	Perímetro
40	Texto texto12		"Construir o ΔABC"	
41	Texto texto13		"Construir sobre AB, o triângulo retângulo ABD de hipot...	
42	Texto texto14		"Construir sobre BC, o triângulo retângulo BCE, de hipot...	
43	Texto texto15		"Construir sobre AC, o triângulo retângulo ACF, de hipot...	

Figura A.10: Tutorial 2f

44	Valor Booleano n		n = false	1)
45	Valor Booleano g		g = false	2)
46	Valor Booleano h		h = false	3)
47	Valor Booleano i		i = false	4)
48	Valor Booleano o		o = false	5) Obter x, y e z

48 / 48 Reproduzir 2 s

Figura A.11: Tutorial 2g

A.3 Tutorial 3

As figuras A12 à A17 descrevem o roteiro de construção do Tutorial 3.

Protocolo de Construção

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
1	Ponto A		A = (1, 6)	
2	Ponto B		B = (-5, 2)	
3	Ponto C		C = (-3, -2)	
4	Triângulo pol1	Polígono A, B, C	pol1 = 16	
4	Segmento c	Segmento [A, B] de Triângulo pol1	c = 7.21	x
4	Segmento a	Segmento [B, C] de Triângulo pol1	a = 4.47	y
4	Segmento b	Segmento [C, A] de Triângulo pol1	b = 8.94	z
5	Ponto D	(x(B), y(A))	D = (-5, 6)	
6	Triângulo pol2	Polígono B, D, A	pol2 = 12	A_1

Figura A.12: Tutorial 3a

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
6	Segmento a_1	Segmento [B, D] de Triângulo pol2	a_1 = 4	
6	Segmento b_1	Segmento [D, A] de Triângulo pol2	b_1 = 6	
6	Segmento d	Segmento [A, B] de Triângulo pol2	d = 7.21	
7	Ponto E	(x(B), y(C))	E = (-5, -2)	
8	Triângulo pol3	Polígono B, E, C	pol3 = 4	A_2
8	Segmento c_1	Segmento [B, E] de Triângulo pol3	c_1 = 4	
8	Segmento b_2	Segmento [E, C] de Triângulo pol3	b_2 = 2	
8	Segmento e	Segmento [C, B] de Triângulo pol3	e = 4.47	
9	Ponto F	(x(A), y(C))	F = (1, -2)	

Figura A.13: Tutorial 3b

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
10	Triângulo pol4	Polígono A, F, C	pol4 = 16	A_3
10	Segmento c_2	Segmento [A, F] de Triângulo pol4	c_2 = 8	
10	Segmento a_2	Segmento [F, C] de Triângulo pol4	a_2 = 4	
10	Segmento f	Segmento [C, A] de Triângulo pol4	f = 8.94	
11	Texto texto1		"Área de um triângulo"	
12	Texto texto2		"Calcular as áreas dos triângulos ABD, BCE e ACF, e do "	
13	Texto texto12		"Construir o ΔABC"	
14	Texto texto13		"Construir sobre AB, o triângulo retângulo ABD de catetos AD e ...	
15	Texto texto14		"Construir sobre BC, o triângulo retângulo BCE, de catetos BE e ...	

Figura A.14: Tutorial 3c

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
16	Texto texto15		"Construir sobre AC, o triângulo retângulo ACF, de catetos AF e ...	
17	Texto texto16	"A$_1$=\frac{" + (LaTeX[b$_1$]) + "." + (LaTeX[a$_1$]) + "}{2}"	"A_1=\frac{6.4}{2}"	
18	Texto texto18	"A$_1$=" + (LaTeX[pol2]) + "u^2"	"A_1=12u^2"	
19	Texto texto3	"A$_2$=\frac{" + (LaTeX[b$_2$]) + "." + (LaTeX[c$_1$]) + "}{2}"	"A_2=\frac{2.4}{2}"	
20	Texto texto5	"A$_2$=" + (LaTeX[pol3]) + "u^2"	"A_2=4u^2"	
21	Texto texto7	"A$_3$=\frac{" + (LaTeX[a$_2$]) + "." + (LaTeX[c$_2$]) + "}{2}"	"A_3=\frac{4.8}{2}"	
22	Texto texto9	"A$_3$=" + (LaTeX[pol4]) + "u^2"	"A_3=16u^2"	
23	Número bb	$a_2 + b_2$	bb = 6	
24	Número A_4	pol1 + pol2 + pol3 + pol4	A_4 = 48	

Figura A.15: Tutorial 3d

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
25	Texto texto10		"A_r_e_t=b.h"	
26	Texto texto6	"A$_{ret}$=" + (LaTeX[bb]) + "." + (LaTeX[c$_2$]) + ""	"A_r_e_t=6.8"	
27	Texto texto8	"A$_\square$=" + (LaTeX[A$_4$]) + "u^2"	"A_□=48u^2"	
28	Texto texto11		"ÁreaΔABC=A_□-A_1-A_2-A_3="	
29	Texto texto4	"ÁreaΔABC=" + (LaTeX[A$_4$]) + "-" + (LaTeX[pol2]) + "-" +	"ÁreaΔABC=48-12-4-16=16u^2"	
30	Texto texto17		"retângulo ADEF, que tem áreas A_1, A_2, A_3 e A_r_e_t."	
31	Valor Booleano j		j = false	Área do triângulo
32	Valor Booleano k		k = false	A_{ret}
33	Valor Booleano l		l = false	A_3

Figura A.16: Tutorial 3e

34	Valor Booleano m		m = false	A_2
35	Valor Booleano p		p = false	A_1
36	Valor Booleano o		o = false	5) Obter A_1, A_2, A_3 e A_{ret}
37	Valor Booleano i		i = false	4)
38	Valor Booleano h		h = false	3)
39	Valor Booleano g		g = false	2)
40	Valor Booleano n		n = false	1) Construir o ΔABC

40 / 40 ▷ Reproduzir 2 s

Figura A.17: Tutorial 3f

Apêndice B

Trajetória acadêmica e profissional

B.1 Graduação

- **Licenciatura Plena em Matemática** - CEUB - 1984

B.2 Pós graduação

- **Especialização para professores do Ensino Básico** – UnB – 2001 (405 horas)

B.3 Cursos de aperfeiçoamento

- **Matemática de 5ª à 8ª séries** – SE/FEDF – 1990 (180 horas).
- **Curso de aperfeiçoamento em Matemática** – UCB – 1994 (180 horas).
- **Álgebra em Laboratório de Ensino - Trigonometria** – UnB - 1997 (60 horas).
- **Avançando na prática Interdisciplinar** – IDR – 1998 (120 horas).
- **Educação Ambiental** – SEEDF-EAPE – 2000 (80horas).
- **Matemática Comercial e Financeira** – SENAC – 2002 (180 horas).
- **Experiências e Problemas em Geometria** – UnB - 2006 (240 horas).

B.4 Simpósios

- **II Encontro de Estudos Matemáticos** – CEUB - 1981 (30 horas).
- **Simpósio de Ciências Exatas** – CEUB – 1983 (30 horas).
- **III Exposição do Laboratório de Matemática** – CEUB – 1983 (30 horas).
- **Geometria na 7ª e 8ª séries** – SE/FEDF – 1988 (32 horas).

- **III Congresso dos Trabalhadores em Educação do DF** – SINPRO – 1989 (44 horas).
- **IV BIENAL da SBM** - Universidade Estadual DE Maringá - UEM. Brasil - 2008(30 horas).
- **Matemática do Ensino Médio com Roberto Dante**. (03 horas). Editora Ática, Brasil.
- **Habilitado no Programa OBMEP na Escola** – IMPA -2014.

B.5 Outra graduação

- **Engenharia Eletrônica** – UnB - FGA – Cursando o 4º período.

B.6 Experiência profissional

- **Fundação Educacional do Distrito Federal, agora, Secretaria de Educação do DF - SEEDF**
  Cargo: Professor concursado de Matemática 1º e 2ºgraus
  Período: Desde abril de 1986
- **Secretaria de Estado de Educação de Goiás**
  Cargo: Professor concursado de 1º e 2ºgraus
  Período: Agosto de 1984 à dezembro de 1993.
- **Curso Alfa Gama**
  Cargo: Professor
  Período: 1995.
- **Retífica e Torneadora Mineira LTDA**
  Cargo: Retificador e Torneiro Mecânico
  Período: Fev de 1978 a dez de 1985.

Apêndice C

Projeto PD - Matemática

Justificativa

Estamos num mundo onde a ciência e a tecnologia faz parte efetivamente de todas as atividades humanas. Essa presença tem modificado drasticamente a forma de vida dos cidadãos modernos, proporcionando por um lado, melhoria na qualidade de vida e, por outro, trazendo-lhes novos desafios a serem compreendidos e superados. Compreender esse processo de mudança que a sociedade moderna tem vivenciado torna-se indispensável para os cidadãos modernos. No entanto, o que vemos em nossas escolas é que esse conhecimento ainda permanece distante da maioria de nossos alunos, haja visto os resultados obtidos em exames como o PISA e outros indicadores de qualidade na educação básica que evidenciam uma grande deficiência nos conhecimentos referentes e ciência e a tecnologia. No sentido de contribuir para reverter esse quadro, o Centro de Ensino Médio 02 do Gama por meio do seu projeto da Parte Diversificada criou a disciplina PD-Matemática, onde alguns dos principais temas relacionados à aplicação de conceitos matemáticos serão debatidos associados com algumas aulas demonstrativas e experimentais.

Objetivo:

Desenvolver atividades experimentais, teóricas (e lúdicas), de construção do conhecimento matemático, mostrando assim, as relações e aplicações da matemática no cotidiano.

C.1 Habilidades que serão desenvolvidas

Como esse projeto tem como público alvo os alunos dos 1º, 2º e 3º anos as habilidades desenvolvidas serão:

- Identificar e compreender os principais conceitos matemáticos no desenvolvimento do raciocínio lógico e, consequentemente, na resolução de problemas ;
- Construir e analisar e interpretar gráficos e tabelas envolvendo conceitos como, tempo, inflação e temperatura;
- Comparar situações idealizadas com situações reais;
- Ler e analisar textos envolvendo o tema estudado;

- Reconhecer o papel da Matemática no avanço do conhecimento científico;

- Interpretar e fazer questões do PAS/UnB e ENEM;

C.2 Conteúdos desenvolvidos

1º ano	
Conteúdos/Procedimentos	**Recursos Didáticos**
Apresentação do programa da disciplina para a turma	
Apresentação, resolução e discussão de problemas de raciocínio lógico	Xerox do texto
Localizando pontos no Plano Cartesiano	Geoplano, Papel quadriculado ou milimetrado
Construindo polígonos no Plano Cartesiano	Geoplano, Papel quadriculado ou milimetrado
Calculando área e perímetro de retângulos no Geoplano	Geoplano, Papel quadriculado ou
Aplicando o Teorema de Pitágoras, obter a diagonal de retângulos no Geoplano	Geoplano, Papel quadriculado ou milimetrado
Calculando área e perímetro de triângulos e polígonos no Geoplano	Geoplano, Papel quadriculado
Construindo as diversas figuras geométricas	Papel , régua e compasso
Trabalhando conceitos geométricos de forma lúdica	Jogos, quebra-cabeças e tangrans

Tabela C.1: Conteúdo do 1º ano

2º ano	
Conteúdos/Procedimentos	**Recursos Didáticos**
Apresentação do programa da disciplina para a turma	
Apresentação, resolução e discussão de problemas de raciocínio lógico	Xerox do texto
Desenhando e recortando triângulos equiláteros e isósceles de papel-cartão	Régua, compasso, tesoura
Desenhando e recortando quadrados, retângulos, hexágonos e outros polígonos de papel-cartão	Régua, compasso, tesoura
Montando com triângulos os possíveis Deltaedros (poliedro cujas faces são todas triângulos equiláteros)	Triângulos e ligas elásticas
Montando poliedros regulares e não-regulares	Polígonos e ligas elásticas
Montando prismas e pirâmides	Polígonos e ligas elásticas
Montando Deltaedros com palitos ou canudos de pirulito	Palitos e linhas de nylon
Montando poliedros com palitos ou canudos de pirulito	Palitos e linhas de nylon
Associando os números de vértices, de faces e de arestas de cada figura	Polígonos e ligas elásticas
Montando e classificando Prismas e Pirâmides	Polígonos e ligas elásticas
Planificando e montando em papel-cartão, os diversos tipos de prismas	papel-cartão, cola, compasso, régua e tesoura
Determinando área total e volume de prismas, e associando-os ao cilindro	
Planificando e montando em papel-cartão, os diversos tipos de pirâmides	
Determinando área total e volume de pirâmides, e associando-as ao cone	
Vídeo aula sobre poliedros	DVDs, TV
Definindo as razões trigonométricas no triângulo, entendendo a tabela trigonométrica	Geoplano
Resolvendo problemas utilizando seno, cosseno e tangente	
Calculando de forma indireta, a altura de edificações da Escola, como a caixa d'água, usando um Teodolito didático	Teodolito didático, tabela trigonométrica
Trabalhando os conceitos trigonométricos no Geoplano trigonométrico(circular)	Geoplano trigonométrico
Analisando das provas do PAS/ENEM	

Tabela C.2: Conteúdo do 2º ano

3º ano	
Conteúdos/Procedimentos	**Recursos Didáticos**
Apresentação do programa da disciplina para a turma	
Apresentação, resolução e discussão de problemas de raciocínio lógico	Xerox do texto
Localizando pontos no Plano Cartesiano	Geoplano, Papel quadriculado ou milimetrado
Construindo polígonos no Plano Cartesiano	Geoplano, Papel quadriculado ou milimetrado
Obtendo Simetria de pontos, segmentos e polígonos no Plano Cartesiano	Geoplano, Papel quadriculado ou milimetrado
Obtendo a distância entre pontos no geoplano	Geoplano, Papel quadriculado ou milimetrado
Obtendo o ponto médio de um segmento	Geoplano, Papel quadriculado ou milimetrado
Obtendo área e perímetro de triângulos no Plano Cartesiano	Geoplano, Papel quadriculado ou milimetrado
Obtendo área e perímetro de quadriláteros no Plano Cartesiano	Geoplano, Papel quadriculado ou milimetrado
Obtendo área e perímetro de polígonos no Plano Cartesiano	Papel quadriculado
Construindo e obtendo a equação da reta no Plano cartesiano	Papel quadriculado
Construindo retas e analisando suas posições relativas	Papel quadriculado
Construindo circunferência e obtendo sua equação	Papel quadriculado e compasso
Elaborando tabelas de distribuição de freqüências	Papel quadriculado
Construindo gráficos de linhas	Papel quadriculado
Construindo gráficos de setores	compasso
Analisando das provas do PAS/UnB e ENEM	

Tabela C.3: Conteúdo do 3º ano

C.3 Avaliação:

A avaliação será composta dos seguintes elementos:

1. Resolução de exercícios;
2. Participação nas atividades executadas em sala;
3. Estudo Dirigido;
4. Avaliação interdisciplinar.

Apêndice D

Questionários e formulários

D.1 Questionário sócio educacional

Questionário sócio educacional (não é necessário se identificar)
ALUNO:.. **N**:......... **TURMA**:................

1. Local onde você mora(cidade, bairro)?

2. Você possui computador em casa?

3. Você possui smartphone ou tablet?

4. Você tem acesso à internet?

5. Em qual escola você fez o ensino fundamental I (do 1º ao 5º ano)?

6. Em qual escola você fez o ensino fundamental II (do 6º ao 9º ano)?

7. Você tem o hábito de estudar em casa?

8. Alguém da família o acompanha na vida escolar?

9. Sua família é beneficiada por algum programa social do governo? Qual?

10. Determine as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano abaixo:

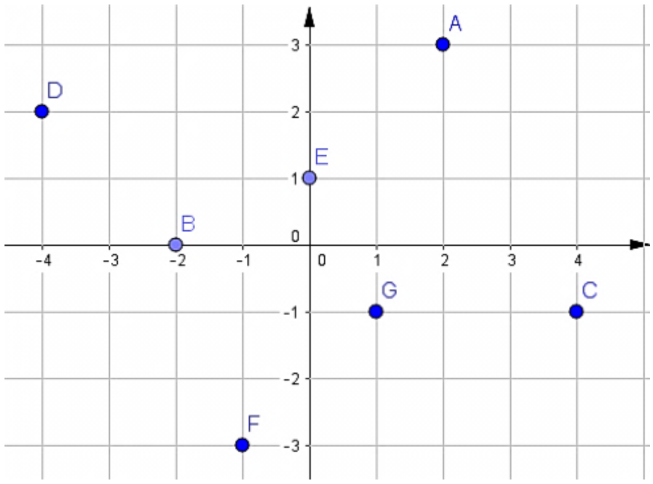


Figura D.1: plano cartesiano q1
Fonte: O autor

(a) A=(,);

(b) B=(,);

(c) C=(,);

(d) D=(,);

(e) E=(,);

(f) F=(,);

(g) G=(,);

11. Identifique a partir das definições os quadriláteros especiais, abaixo e responda:

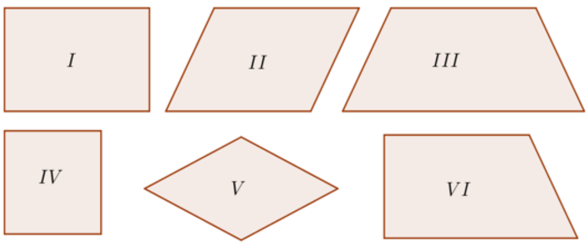


Figura D.2: Quadriláteros
Fonte: O autor

- Retângulo – possui 4 ângulos retos.
- Losango – possui 4 lados congruentes.
- Quadrado - possui 4 lados e 4 ângulos iguais entre si.
- Paralelogramo - possui os lados opostos paralelos.
- Trapézio – possui 2 lados paralelos

(a) Quais deles são retângulos?

(b) Quais deles são paralelogramos?

(c) Quais deles são quadrados?

(d) Quais deles são trapézios?

(e) Quais deles são losangos?

12. Localize no plano cartesiano os pontos $H(-4,-2), I(0,-1), J(4,0), K(2,4)$, $L(3,1), M(-3,-2), N(4,-2), O(-1,3)$ e $P(-4,2)$.

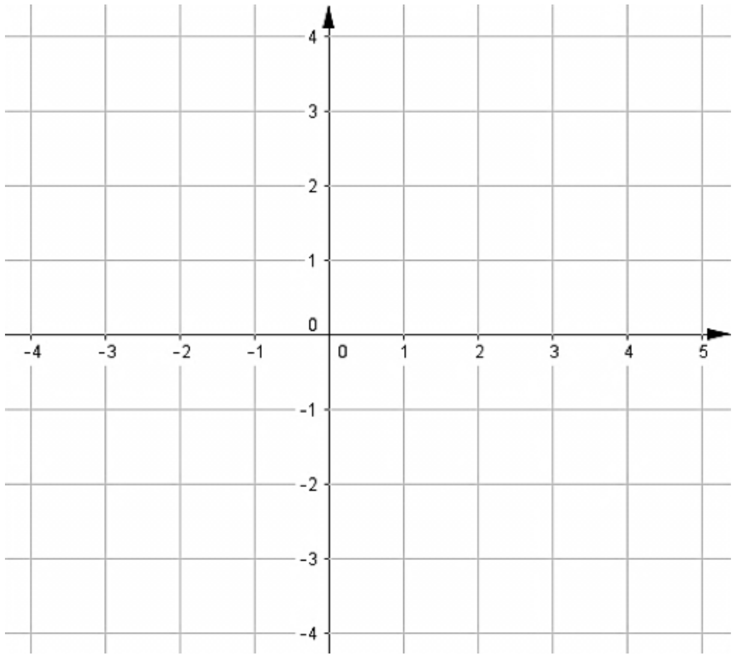
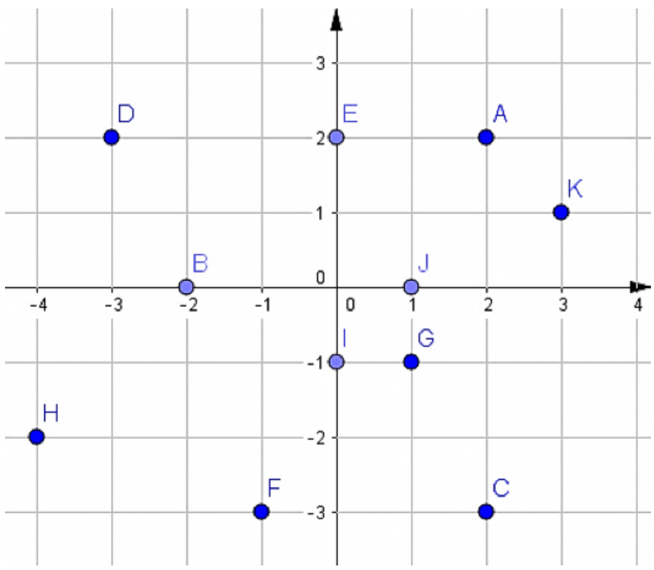


Figura D.3: plano cartesiano q2
Fonte: O autor

13. Determine a distância entre os pontos indicados na figura D.4, abaixo:



(a) $d(G, J) =$

(b) $d(A, D) =$

(c) $d(D, E) =$

(d) $d(A, C) =$

(e) $d(B, D) =$

(f) $d(A, K) =$

(g) $d(B, E) =$

(h) $d(F, H) =$

Figura D.4: plano cartesiano q3
Fonte: O autor

14. Determine o valor de x indicado nas figura D.5 e D.6, abaixo:

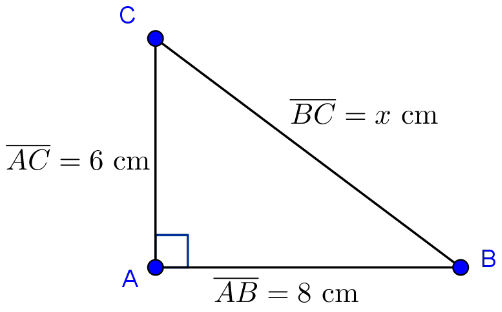


Figura D.5: A medida da hipotenusa
Fonte: Próprio autor

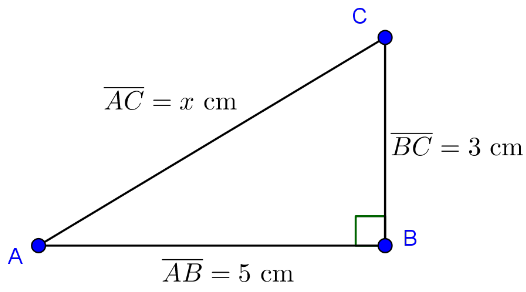


Figura D.6: Teorema de Pitágoras
Fonte: Próprio autor

D.2 2º questionário

Questionário educacional (não é necessário se identificar)
ALUNO:.. **N:**......... **TURMA:**................

1. Você já conhecia o software Geogebra anteriormente?
   a) sim
   b) não
2. Você realizou as atividades do Geogebra, propostas pelo professor?
   a) Todas
   b) Pouco mais que a metade
   c) Menos que a metade
   d) nenhuma
3. O uso do Geogebra contribuiu par o seu aprendizado?
   a) Bastante.
   b) Um pouco.
   c) Quase nada.
   d) De forma alguma
4. Como você utilizou o caderno quadriculado para realizar as atividades propostas pelo professor?
   a) Em todas as atividades.
   b) Em quase todas as atividades.
   c) Em algumas atividades
   d) Em nenhuma das atividades.
5. O uso do caderno quadriculado facilitou a realização das atividades de Geometria analítica?
   a) Bastante.
   b) Um pouco.
   c) Quase nada.
   d) Não facilitou de forma alguma

6. Determine as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano abaixo:

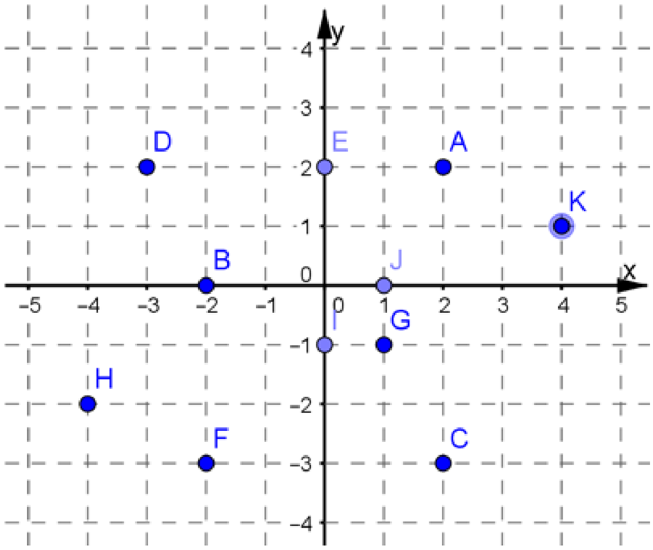


Figura D.7: plano cartesiano q5
Fonte: O autor

(a) A=(,);

(b) B=(,);

(c) C=(,);

(d) D=(,);

(e) E=(,);

(f) F=(,);

(g) G=(,);

(h) H=(,);

(i) I=(,);

(j) J=(,);

(k) K=(,).

7. Observe os quadriláteros especiais, abaixo. A sequência abaixo que apresenta, respectivamente, um retângulo, um losango, um paralelogramo e um trapézio é

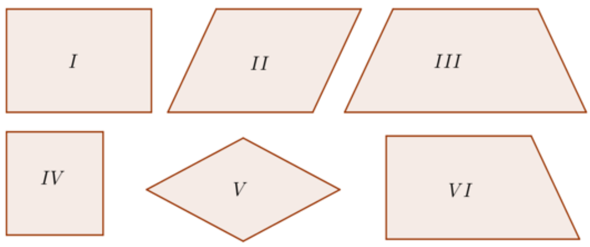


Figura D.8: Quadriláteros 2
Fonte: O autor

(a) I, V, VI, III.

(b) IV, V, III, VI.

(c) I, IV, III, VI.

(d) IV, V, II, III.

(e) I, III, II, VI.

8. Localize no plano cartesiano da figura D.9, os pontos $H(-4,-2), I(0,-1), J(4,0), K(2,4), L(3,1), M(-3,-2), N(4,-2), O(-1,3)$ e $P(-4,2)$..

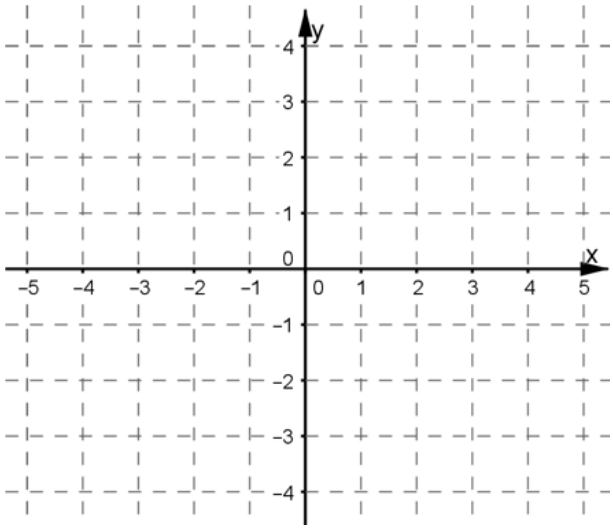


Figura D.9: plano cartesiano 1
Fonte: O autor

9. Determine as distâncias indicadas, entre os pontos na figura D.10, abaixo:

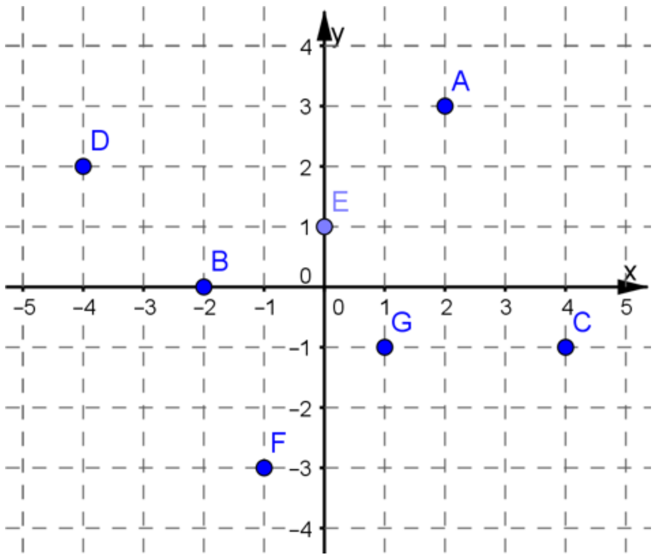


Figura D.10: plano cartesiano 2
Fonte: O autor

(a) $d(G, C) =$

(b) $d(B, D) =$

(c) $d(G, E) =$

(d) $d(A, C) =$

(e) $d(B, F) =$

(f) $d(A, F) =$

10. Determine a área do triângulo de vértices A, D e F, indicados na figura D.10 do exercício anterior.

D.3 Controle das atividades

FICHA DE CONTROLE DAS ATIVIDADES

TURMA: 3º A BIMESTRE:

ATIVIDADES

Nº	ALUNO/DATA																					
01																						
02																						
03																						
04																						
05																						
06																						
07																						
08																						
09																						
10																						
11																						
12																						
13																						
14																						
15																						
16																						
17																						
18																						
19																						
20																						
21																						
22																						
23																						
24																						
25																						
26																						
27																						
28																						
29																						
30																						
31																						
32																						
33																						
34																						
35																						
36																						
37																						
38																						
39																						
40																						
41																						
42																						
43																						
44																						
45																						
46																						

Figura D.11: Ficha de controle das atividades
Fonte: O autor

Anexo E

Questões do ENEM e PAS/UnB

(**Enem 2016 - Adaptado**) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura abaixo. As ruas com nomes de letas são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical ou horizontal. Desconsidere a largura das ruas.

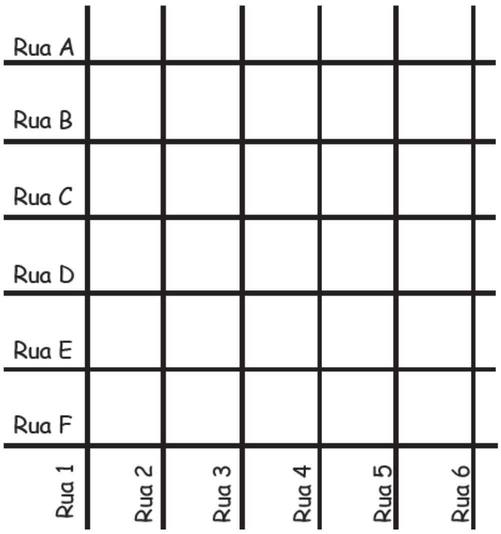


Figura E.1: Enem 2016 questão 157

A família pretende que esse imóvel tenha mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A. Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C.

b) 4 e C.

c) 4 e D.

d) 4 e E.

d) 5 e C.

(**Enem 2016 - Adaptado**) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

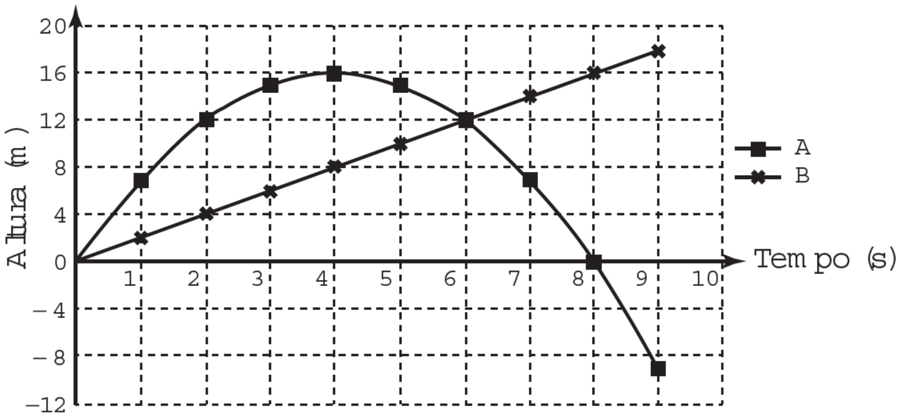


Figura E.2: Enem 2016 questão 178 cinza

Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que que representa a trajetória de B deverá
a) diminuir em duas unidades.
b) diminuir em 4 unidades.
c) aumentar em duas unidades.
d) aumentar em 4 unidade.
e) aumentar em 8 unidadees.

(**Enem 2016 - Adaptado**) O sódio está presente na maioria dos alimentos industrializados, podendo causar problemas cardíacos em pessoas que ingerem grandes quantidades desses alimentos. Os médicos recomendam que seus pacientes diminuam o consumo de sódio. Com base nas informações nutricionais de cinco marcas de biscoitos (A, B, C, D e E), construiu-se o gráfico, que relaciona quantidades de sódio com porções de diferentes biscoitos.

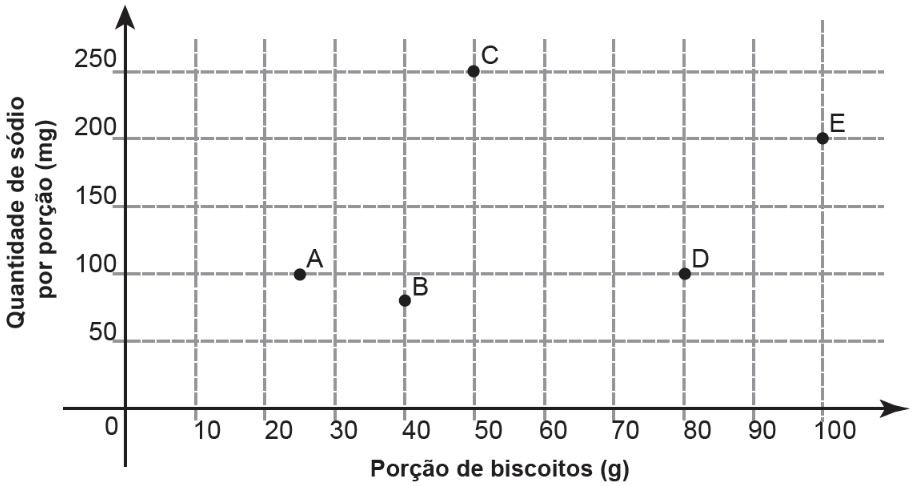


Figura E.3: Enem 2016 questão 153 cinza

Qual das marcas de biscoito apresenta tem a menor quantidade de sódio por grama do produto?
a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

(**Enem 2016 - Adaptado**) Possivelmente você já tenha escutado a pergunta: "O que pesa mais, 1 Kg de algodão ou 1 Kg de chumbo?" É óbvio que ambos têm a mesma massa, portanto, o mesmo peso. O truque dessa pergunta é a grande diferença de volumes que faz, enganosamente, algumas pessoas pensarem que pesa mais quem tem maior volume, levando-as a responderem que é o algodão. A grande diferença de volumes decorre da diferença de densidade (ρ) dos materiais, ou seja, a razão entre suas massas e seus respectivos volumes, que pode ser representada pela expressão: $\rho = \frac{m}{v}$.

Considere as substâncias A, B, C, D e E representadas no sistema cartesiano (volume x massa) a seguir:

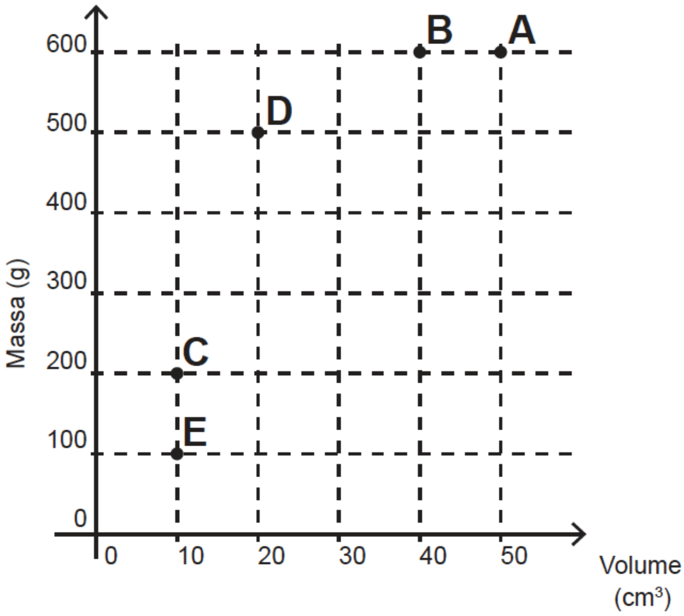


Figura E.4: Enem 2016 questão 162 cinza

A substância com maior densidade é

a) A.

b) B.

c) C.

d) D.

e) E.

(**Enem 2016 - Adaptado**) A economia no consumo de combustível é um fator importante para a escolha de um carro, É considerado mais econômico o carro que percorre a maior distância por litro de combustível.

O gráfico apresenta a distância (Km) e o respectivo consumo de gasolina (L) de cinco modelos de carros.

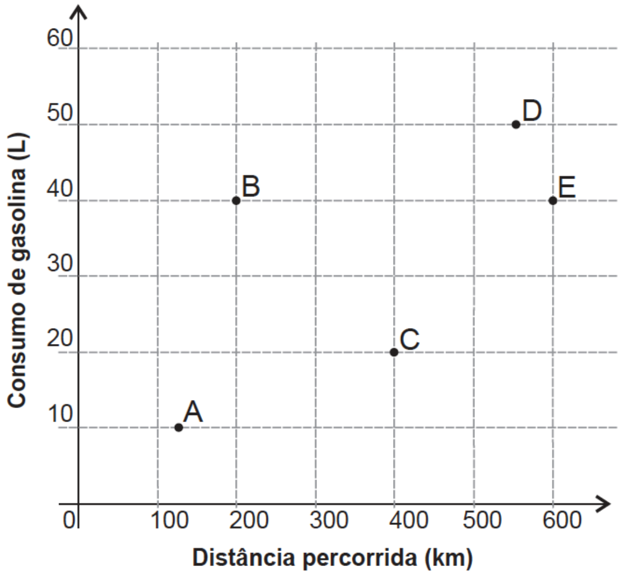


Figura E.5: Enem 2016 questão 158 cinza

O carro mais econômico em relação ao consumo de combustível é o modelo
a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

(**Enem 2015 - Adaptado**) Alunos de um curso de engenharia desenvolveram um robô "anfíbio" que executa saltos somente nas direções norte, sul, leste e oeste. Um dos alunos representou a posição inicial desse robô, no plano cartesiano, pela letra p, na ilustração.

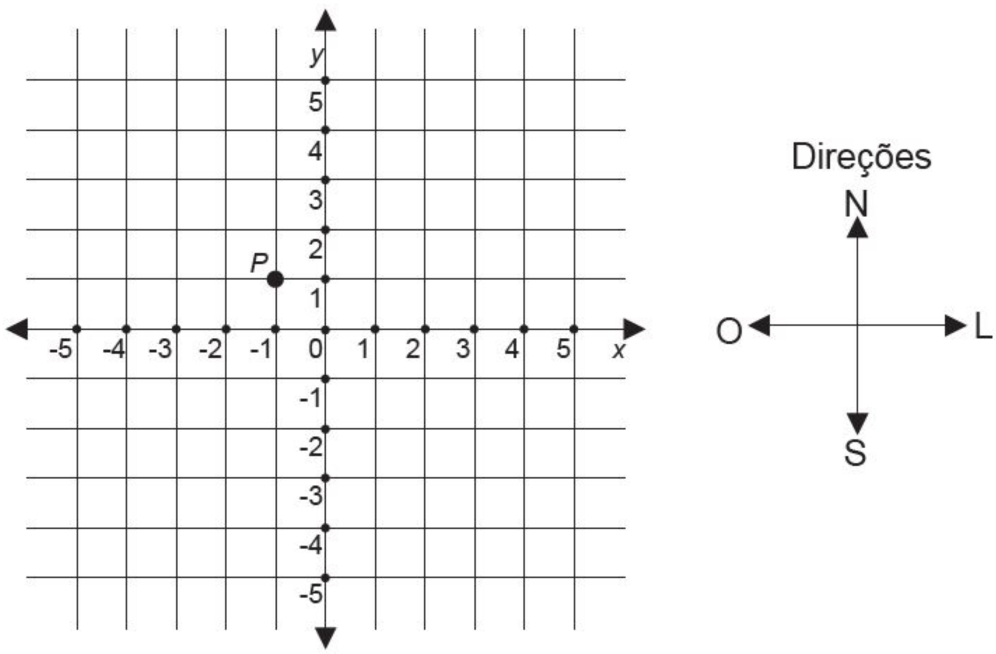


Figura E.6: Enem 2015 questão 158 cinza

A direção norte-sul é a mesma do eixo y, sendo que o sentido norte é o sentido de crescimento de y, e a direção leste-oeste é a mesma do eixo x, sendo que o sentido leste é o sentido de crescimento de x.

Em seguida, esse aluno deu os seguintes comandos de movimentação para o robô: 4 norte, 2 leste e 3 sul, nos quais os coeficientes numéricos representam o número de saltos do robô nas direções correspondentes, e cada salto corresponde a uma unidade do plano cartesiano.

Depois de realizar os comandos dados pelo aluno, a posição do robô, no plano cartesiano, será
a) (0;2).
b) (0;3).
c) (1;2).
d) (1;4).
e) (2;1).

(**Enem 2013 - Adaptado**) Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, II, IV e V, como segue:
I - é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;
II - é a parábola de equação $y = x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;
III - é o quadrado formado pelos vértices $(-2, 1), (-1, 1), (-1, 2)e(-2, 2)$;
IV - é o quadrado formado pelos vértices $(1, 1), (2, 1), (2, 2)e(1, 2)$;
V - é o ponto $(0, 0)$.

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma folha quadriculada, composta de quadrados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura.

Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?

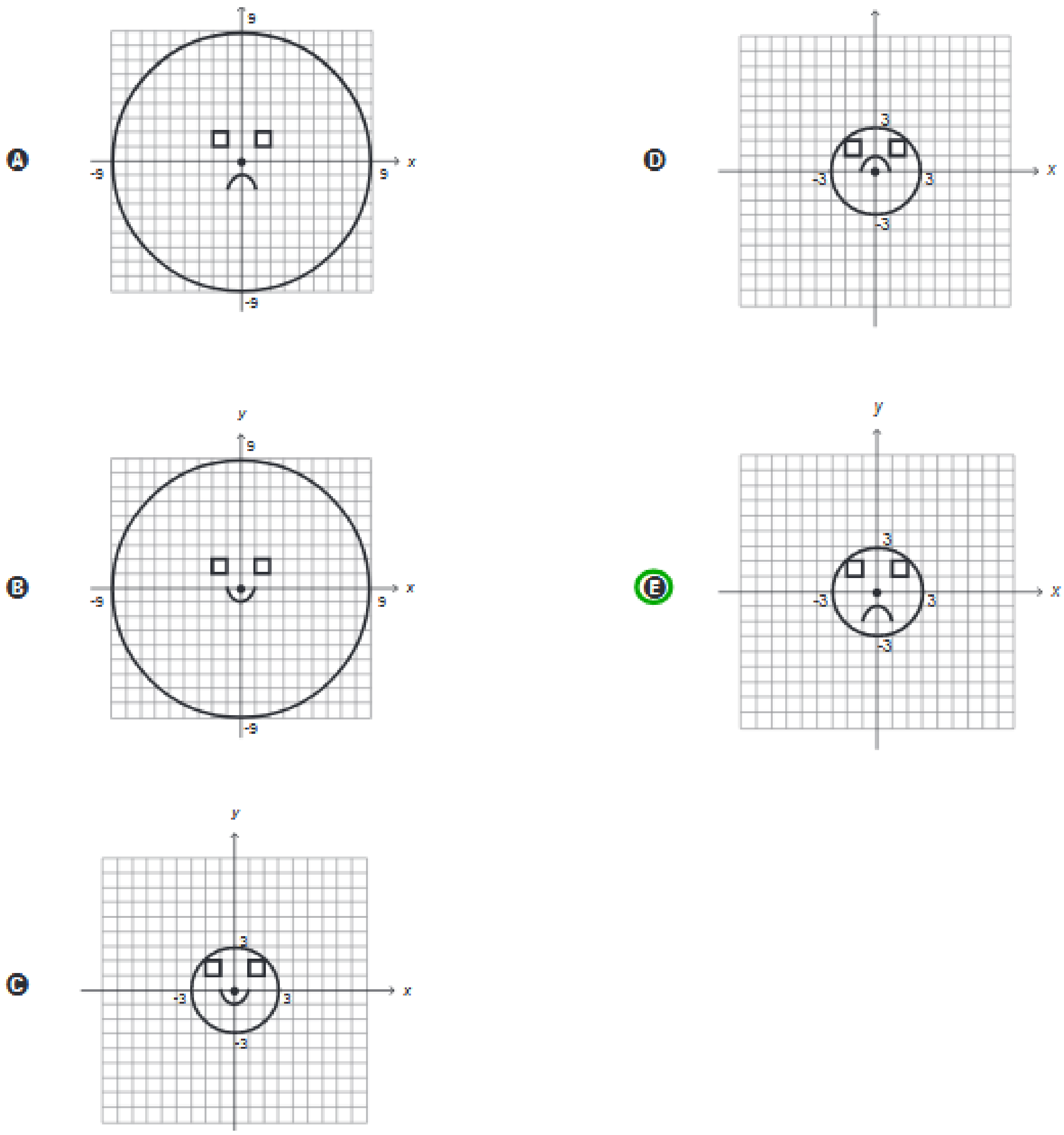


Figura E.7: Enem 2013 questão questão 143

(**Enem 2013 - Adaptado**) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinais às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:

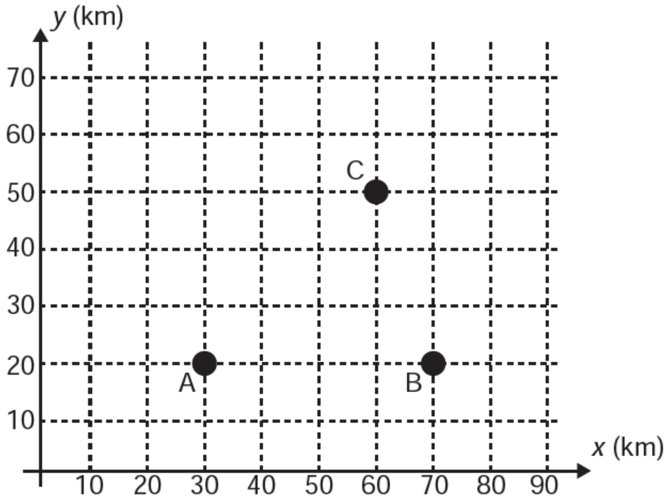


Figura E.8: Enem 2013 questão 178 cinza

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas
a) (65;35).
b) (53;30).
c) (45;35).
d) (50;20).
e) (50;30).

(**Pas/UnB 2015 - adaptado**)

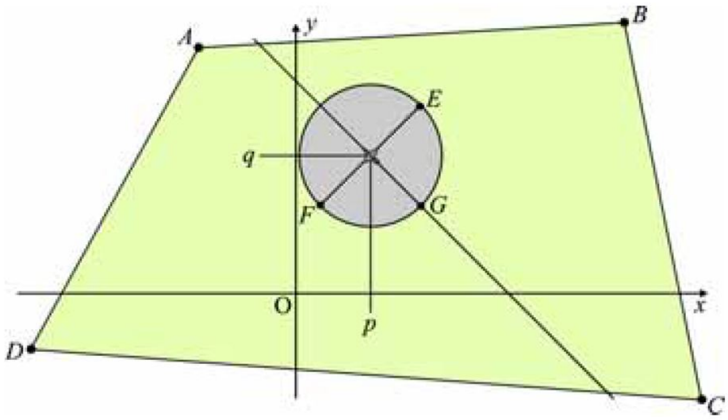


Figura E.9: pasunb 2015 questões 116-120

A figura acima ilustra um terreno de lavoura, na forma de um quadrilátero. Nessa figura, foi inserido um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy no qual foram identificados os vértices do quadrilátero: $A-(-2,6), B-(8,8), C-(10,-3)$ e $D-(-5,-2)$. Na figura, destaca-se a circunferência com centro em (p,q), onde se encontra um avião que, em determinado instante, pulverizará a área definida pela semicircunferência EGF.

Considerando essas informações, julgue os itens de **116** a **118**, faça o que se pede no item **119**, que é do **tipo B**, e assinale a opção correta no item **120** que é do **tipo C**.

116 A reta que passa por A e C e a reta de equação $3y - 5x - 8 = 0$ são perpendiculares entre si.

117 O comprimento da diagonal AC é maior que o comprimento da diagonal BD.

118 O ponto B está sobre a reta que passa pela origem O do sistema de coordenadas e forma um ângulo de 45º com o eixo x.

119 Considerando que $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 80$ seja a equação da circunferência com centro em (p, q), calcule $p \times q \times R$, sabendo que R é a distância entre E e F. após ter efetuado todos os cálculos solicitados, despreze, para marcação no Caderno de Respostas, a parte fracionária do resultado final obtido, caso exista.

120 A equação da reta que contém os pontos médios dos segmentos AD e BC é dada por

a) $2y + 10x - 14$.

b) $25y - x - 225$.

c) $50y - 2x - 107$.

d) $60y + 7x - 126$.

(**Pas/UnB 2014 - adaptado**)

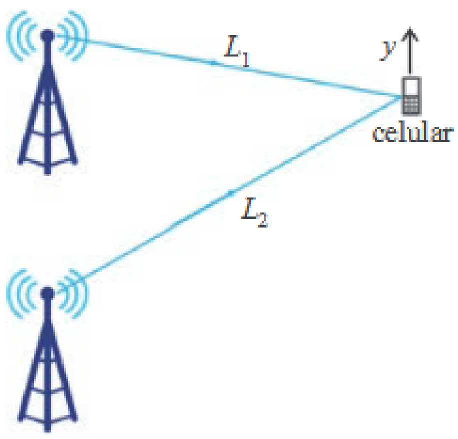


Figura I

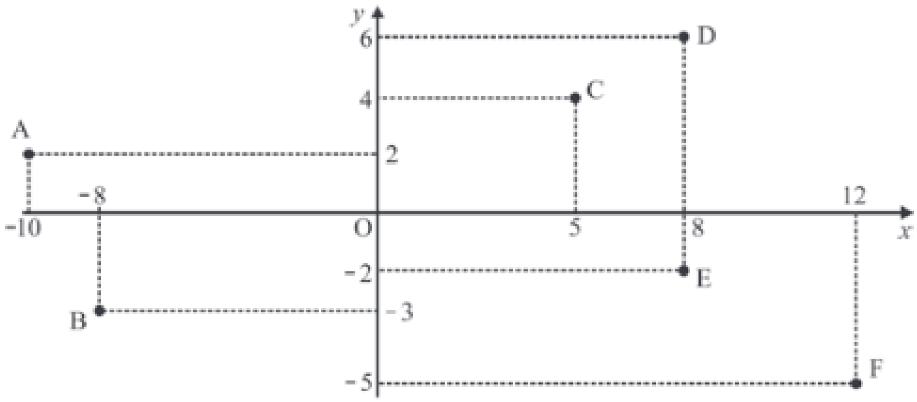


Figura II

Figura E.10: pas 2014 questão 95

A figura I mostra o esboço de uma rede de transmissão de sinal de telefonia celular. A rede é composta por um aparelho receptor (celular) e duas torres de transmissão que emitem ondas eletromagnéticas idênticas, ou seja, com a mesma amplitude, com o mesmo comprimento de onda λ e em fase. O meio de propagação das ondas eletromagnéticas é homogêneo e isotrópico. Na figura, a localização de seis antenas de telefonia celular é apresentada em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, medidas em quilômetros. Nesse sistema as antenas, representadas pelos pontos A, B, C, D, E e F, radiam o sinal com a mesma intensidade, em todas as direções do plano xOy.

Tendo como referência essas informações, julgue os itens de **95** a **98**, assinale a opção correta no item **99**, que é do **tipo C**, e faça o que se pede no item **100**, que é do **tipo B**.

95 A equação da reta que passa pelas antenas nas posições E e F tem coeficiente angular menor que 1.

96 O sinal transmitido pela antena na posição C e recebido à distância de 3 Km dessa antena tem a mesma intensidade em dois pontos da reta que passa pelas antenas nas posições D e F.

98 A distância entre as antenas nas posições B e D é, pelo menos 10 % maior que a distância entre as antenas nas posições A e C.

99 Considerando que a área de cobertura da antena na posição C seja limitada pela circunferência com centro C e que passa por E, conclui-se que a equação dessa circunferência é

a) $x^2 + 2y^2 - 25x + 10y = 45$.

b) $x^2 + y^2 - 10x - 8y = 4$.

c) $2x^2 - y^2 - 25x - 8y = 45$.

d) $x^2 + y^2 + 5x + 8y = 45$.

100 Calcule o coeficiente angular da reta que passa pela antena na posição B e é perpendicular à reta que passa pelas antenas nas posições C e E. Multiplique o resultado por 200. Depois de efetuado os cálculos solicitados, despreze, para marcação no **Caderno de Respostas**, a parte fracionária do resultado final obtido, caso exista.

(**Vest/UnB 2014 - adaptado**)

Na figura a seguir, estão indicadas, no plano xoy, as setes estações de uma possível colônia em Marte. A unidade de distância, nesse sistema, é o decâmetro (dam), e a estação E_j está posicionada nas coordenadas (x_j, y_j).

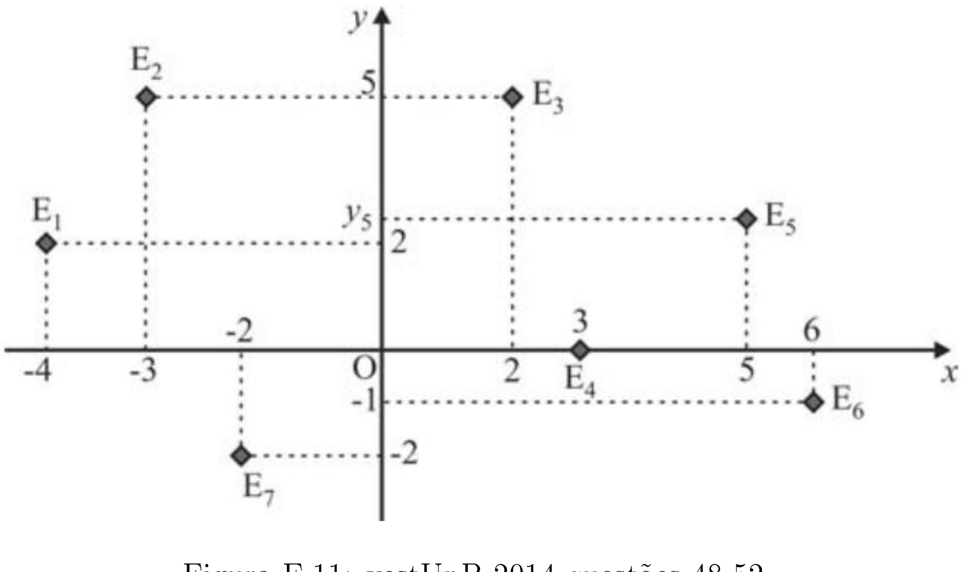


Figura E.11: vestUnB 2014 questões 48-52

Com base nessas informações, julgue os itens de **48** a **51** e assinale a opção correta no item **52**, que é do **tipo C**.

48 Se a reta $2y + bx = 20$ passar pelo ponto E_5 e for paralela à reta que passa por E_3 e E_6, então a coordenada y_5 da estação E_5 é superior a 26 m.

49 É retângulo com vértices nas coordenadas correspondentes às estações E_1, E_2 e E_7.

50 No ponto correspondente à estação E_6, passa a reta de equação $2y + x - 4 = 0$.

51 É isósceles o triângulo com vértices nas coordenadas correspondentes às estações E_2, E_3 e E_7.

52 a equação da circunferência que tem centro em E_1 e passa pela origem é

a) $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 20 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 8x + 3y = 0$.

c) $x^2 + y^2 + 8x - 4y = 0$.

d) $x^2 + y^2 - 8x - 3y = 0$.