Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Uma proposta de aplicação de jogos matemáticos no Ensino Básico

Gustavo Souza Rodrigues

Brasília

2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

RG982p

Rodrigues, Gustavo Souza
Uma proposta de aplicação de jogos matemáticos no Ensino Básico / Gustavo Souza Rodrigues; orientador Raimundo Araújo Junior Bastos. -- Brasília, 2018.
100 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Educação Matemática. 2. Jogos Matemáticos . 3. Socioeducação. 4. Matemática no Ensino Básico. I. Bastos, Raimundo Araújo Junior, orient. II. Título.

Gustavo Souza Rodrigues

Uma proposta de aplicação de jogos matemáticos no Ensino Básico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Brasília

2018

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma proposta de aplicação de jogos matemáticos no Ensino Básico

por

Gustavo Souza Rodrigues

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 15 de junho de 2018.

Comissão Examinadora:

Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior – MAT/UnB (Orientador)

Rui Seimetz

Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB

Raul Behs

Prof. Dr. Raul Moreira Behs – Colégio Militar de Brasília

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus queridos pais, Paulo Cezar Gomes Rodrigues (in memoriam) e Neuza Maria de Souza Rodrigues, e a minha amada esposa, Denise Lúcia do Amaral.

Inteligência é a capacidade de se adaptar
às mudanças. (Stephen Hawking)

"Do mesmo modo que o metal enferruja com
a ociosidade e a água parada perde sua
pureza, assim a inércia esgota a energia da mente."
(Leonardo da Vinci)

Agradecimentos

A Deus, que me deu forças para continuar minha caminhada, mesmo quando senti vontade de desistir.

Aos meus pais, Paulo Cezar Gomes Rodrigues (in memoriam) e Neuza Maria de Souza Rodrigues, que sempre acreditaram na minha capacidade e me possibilitaram chegar aonde cheguei.

A minha esposa Denise Lúcia do Amaral, que com muita paciência me apoiou e se voluntariou para testar o jogo, revisar o trabalho e, nos momentos difíceis, me manteve calmo para que eu pudesse seguir em frente.

Ao Professor Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior pela paciência na orientação e por sempre acreditar que eu conseguiria.

Aos meus amigos, companheiros de curso, pelos momentos de descontração e colaboração

Ao professor Rui Seimetz, em nome de quem agredeÃ§o aos demais professores que acreditam no potencial dos alunos.

Resumo

Tendo em vista a importância da utilização dos jogos como ferramenta de ensino, este trabalho tem como objetivo introduzir os jogos matemáticos de baixo custo no processo de ensino e aprendizagem das operações de adição, divisão, multiplicação, subtração, Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Multiplo Comum (MMC). Para isso, são propostos cinco jogos matemáticos para serem utilizados na educação básica. Faz-se também neste trabalho uma abordagem teórica das operações no conjunto dos números naturais e dos números inteiros, com intuito fornecer subsídios para professores de matemática. Foi realizado um estudo de caso com alunos do sistema socioeducativo do Distrito Federal, com o intuito de verificar como os jogos poderiam ser motivantes e como despertariam o interesse do aluno em relação à matemática.

Palavras-Chave: Educação Matemática; Jogos Matemáticos; Socioeducação; Matemática no Ensino Básico.

Abstract

Considering the importance of using games as a teaching tool, this research aims to introduce low-cost mathematical games in teaching and learning process of addition, division, multiplication, subtraction, Greatest Common Divisor (GCD) and Least Common Multiple (LCM). For that, five mathematical games are proposed to be used in basic education. This work also did theoretical approach of operations in the set of natural numbers and integer, in order to provide subsidies for mathematic's teachers. A case study was carried out with students from the socio-educational system, in order to verify how the games could be motivating and how they would arouse the student's interest in mathematics.

Keywords: Mathematical Education; Mathematical Games; Socioeducation; Mathematics in Basic Education.

Conteúdo

Lista de Figuras

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo introduzir, no ensino básico, o uso de jogos matemáticos como ferramenta de ensino, ajudando na construção e no aprimoramento dos conceitos matemáticos. Será feita uma breve abordagem dos conceitos matemáticos envolvidos nos jogos propostos neste trabalho e uma análise da utilização dos jogos como ferramenta de ensino.

Além disso, serão propostos cinco jogos, os quais têm como objetivo motivar o aluno, estimular o pensamento crítico e a curiosidade acerca dos conteúdos matemáticos apresentados. Os jogos foram selecionados por serem de baixo custo, por possuírem regras simples e pelo fato de abordarem as operações de adição, divisão, multiplicação, divisão, Máximo Divisor Comum e Mínimo Multiplo Comum de forma lúdica, como está previsto no Currículo em Movimento do Distrito Federal e nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Após definirmos o tema central como sendo jogos matemáticos, foi feita uma breve análise da palavra jogo e uma reflexão sobre a utilização dos jogos como ferramenta de ensino. Autores como Grando (2000), Piaget (1973) e Vigotsky (1994) defendem a utilização de jogos como ferramenta de ensino. Foram apresentadas as vantagens e desvantagens da utilização dos jogos segundo Grando (2000). Concluiu-se que os jogos, quando bem selecionados, trazem benefícios para o processo de aprendizagem e podem estimular o espírito investigativo, a vontade de aprender e conhecer mais sobre algo novo, a criatividade e o prazer de estudar.

Os conceitos matemáticos foram abordados de forma breve. Foi feita uma definição do conjunto dos números naturais e dos números inteiros e das suas operações. Definiu-se também Máximo Divisor Comum(MDC), Mínimo Multiplo Comum(MMC) e o Algoritmo de Euclides.

É importante destacar que o estudo de caso, que ocorreu no segundo trimestre de 2018, foi feito com alunos do sistema socioeducativo da Unidade de Internação Provisória de São Sebastião (UIPSS) em Brasília, Distrito Federal. Trata-se de adolescentes cumprindo medida socioeducativa de internação provisória, quando o adolescente fica até 45 dias esperando decisão do ato infracional cometido. A finalidade de tal estudo de caso foi abordar a operação de adição de forma lúdica e que estimulasse o raciocínio lógico nos alunos, montando uma estratégia de resolução do jogo do quadrado mágico.

O trabalho foi estruturado da seguinte forma:

CAPÍTULO 1: Fundamentação teórica acerca dos principais conceitos matemáticos envolvidos, tais como a adição, divisão, multiplicação, subtração, MDC, MMC, números primos e o Algoritmo da Divisão Euclidiana;

CAPÍTULO 2: Uma breve abordagem sobre a utilização dos jogos como ferramenta de ensino, destacando algumas das muitas contribuições que tal ferramenta pode proporcionar no processo de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Básico. Inclui uma análise do desenvolvimento cognitivo citando os principais teóricos da área e citando algumas orientações do Currículo em Movimento da Educação Básica do Distrito Federal e dos Parâmetros Curriculares Nacionais;

CAPÍTULO 3: São propostos cinco jogos matemáticos para serem utilizados nos anos finais do ensino fundamental, dos quais três foram criados pelo autor do trabalho, o outro é um jogo existente a pelo menos dois mil anos e o último jogo é uma adaptação de um jogo já proposto por diversos professores.

CAPÍTULO 4: É feita a descrição da metologia da pesquisa, abordando os procedimentos, os meios de coleta de dados, o cenário, os sujeitos e os resultados do estudo.

Nas considerações finais, há uma reflexão sobre a utilização dos jogos em sala de aula, a análise das contribuições dos jogos no desenvolvimento dos conceitos matemáticos com o público desse estudo de caso. Após as considerações finais, temos as referências bibliográficas. Encontram-se no apêndice os tabuleiros dos jogos, as tabelas dos eixos transversais e eixos integradores do Currículo em Movimento do Distrito Federal dos anos finais do Ensino Fundamental e o questionário de avaliação da atividade proposta.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo abordará o objetivo do trabalho, as definições e as propriedades dos principais conceitos matemáticos abordados neste trabalho: adição, subtração multiplicação e divisão, além do Algoritmo da Divisão de Euclides, MDC e MMC. Este capítulo foi baseado em Lima (2013) e Hefez (2014).

1.1 Objetivo Geral

Resaltar a importância da utilização dos jogos matemáticos como instrumento de ensino da matemática, ajudando na construção e no aprimoramento dos conceitos matemáticos.

1.1.1 Objetivo Específico

1. Construção de um material para auxiliar os docentes, sobre as operações fundamentais.
2. Propor jogos matemáticos, envolvendo operações fundamentais, que sejam motivantes e que despertem o interesse do aluno na matemática.
3. Propor jogos com baixo custo de produção, possibilitando a aplicação das atividades em ambientes com carência de recursos tecnológicos ou financeiros.

1.2 Conjunto dos Números Naturais

Nesta seção, apresentaremos o conjunto dos números naturais utilizando a construção de Giuseppe Peano (1858 − 1932). Definiremos as operações de adição e multiplicação, com suas respectivas propriedades. Esta seção foi baseada em Lima (2013) e Hefez (2014).

1.2.1 Definição

Utilizaremos a construção de Peano, que caracteriza o conjunto dos números naturais, que vamos representar pelo símbolo $\mathbb{N}$, segundo 4 axiomas:

- Axioma 1: Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.
- Axioma 2: Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
- Axioma 3: Existe um único número natural, designado por 0, que não é sucessor de nenhum outro.
- Axioma 4: Seja X um conjunto formado apenas por números naturais, se $0 \in X$ e o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Segundo o terceiro axioma, o número 0 não é sucessor de nenhum número, Então, o número 0 é o primeiro elemento do conjunto dos números naturais. Logo, o conjunto $\mathbb{N}$ será representado por:

$$\mathbb{N} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...)$$

Podemos reescrever, utilizando outras palavras, os três primeiros axiomas. Assim:

- $\forall\ n \in \mathbb{N}$ há um sucessor, definido por $n + 1$, tal que $n + 1 \in \mathbb{N}$
- Se $n + 1 = m + 1, \Longrightarrow n = m$.
- O número 0 é o único que não tem sucessor.

O axioma 4 é chamado de axioma da indução, um importante instrumento utilizado para construir definições e demonstrações de teoremas relativo ao conjunto dos números naturais. Ele é utilizado quando desejamos provar que alguma propriedade $A(n)$ relativa a $\mathbb{N}$ seja válida para qualquer n, tal que $n \in \mathbb{N}$. Esse axioma também é chamado de Princípio da Indução Finita ou Indução Matemática, definido como

Definição 1.2.1.

- *Seja S uma propriedade relativa a qualquer número $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que*
    1. *$S(0)$ é válido,*
    2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de S em n implica a validez de S em $(n+1)$*
- *Então S é válido para todo $n \in \mathbb{N}$*

Após definirmos o conjunto dos números naturais, vamos definir a função sucessor que nos guiará na definição das operações nos $\mathbb{N}$.

Definição 1.2.2.
Dado $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, é uma função sucessor quando é injetora e cada elemento n do domínio é associado ao elemento $n+1$ do contradomínio, sendo $s(0) = 1$ $0 \notin Im(s)$.

Vamos listar algumas conseguências da função sucessor.

Teorema 1.2.3.
Se $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função sucessor, então, tem-se:

1. *Nenhum número natural é sucessor de si mesmo, ou seja, $s(n) \neq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$,*
2. *O único número natural que não é sucessor de nenhum número natural é o 0, ou seja, $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

1.2.1 Operações no conjunto $\mathbb{N}$

Nessa seção, vamos definir a relação de ordem nos $\mathbb{N}$, enumerar algumas propriedades dos $\mathbb{N}$, tais como a tricotomia, monotonicidade, a lei do corte da desiqualdade e o Principio da Boa Ordenação.

1. Relação de ordem nos $\mathbb{N}$

   DEFINIÇÃO 1.2.4.

   Uma relação binária R em um conjunto A, onde $A \neq \{\emptyset\}$, diz-se uma relação de ordem em A quando, para todos x, y e $z \in A$, ocorrem

   - Reflexividade: xRx
   - Antissimetria: Se xRy e yRx, então $x = y$
   - Transitividade: Se xRy e yRz, então xRz

   DEFINIÇÃO 1.2.5.

   Um conjunto qualquer A, onde $A \neq \emptyset$, munido de uma relação de ordem é chamado de conjunto ordenado quando

   - *Dados m e $n \in \mathbb{N}$, dizemos que mRn se existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.*
   - *Para m e $n \in \mathbb{N}$, se mRn dizemos que m é menor do que n ou igual a n, sendo representado por $m \leq n$ ou $n \geq m$, o que quer dizer que mRn.*

2. Tricotomia

   Dados m, n e $p \in \mathbb{N}$, apenas uma das relações abaixo é aceita

   - $m < n$
   - $m = n$
   - $m > n$

3. Monotonicidade

   Dados m, n e $p \in \mathbb{N}$, tal que $m < n$, então, $m + p < n + p$ e $m \cdot p < n \cdot p$.

4. Lei do corte da desigualdade

   Dados m, n e $p \in \mathbb{N}$, se $m + p < n + p$ ou $m \cdot p < n \cdot p$, então, $m < n$.

5. Princípio da boa ordenação

   TEOREMA 1.2.6.

   Todo conjunto A não-vazio, tal que $A \subset \mathbb{N}$, contém um elemento mínimo.

1.3 Conjunto dos Números Inteiros

Nessa seção, construiremos o conjunto dos números inteiros a partir dos $\mathbb{N}$, utilizando a relação de equvalência e definiremos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com suas respectivas propriedades. Essa seção foi baseada em Hefez (2002) e Ferreira (2001).

1.3.1 Relação de Equivalência

Considerando o conjunto

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}\}.$$

A partir desse conjunto, será definido uma relação $\sim$ como

DEFINIÇÃO 1.3.1.
Dados (a, b) *e* $(c, d) \in \mathbb{N}\ X\ \mathbb{N}$*, temos que,* $(a, b) \sim (c, d)$ *se, e somente se,* $(a+d) = (b+c)$.

DEFINIÇÃO 1.3.2. *Reflexividade:*
Dado $(a, b) \sim (b, a)$*, temos* $(a + b) = (b + a)$

DEFINIÇÃO 1.3.3. *Simetria:*
Dado $(a, b) \sim (c, d)$*, então,* $(c, d) \sim (a, b)$

DEFINIÇÃO 1.3.4. *Transitividade:*
Dado $(a, b) \sim (c, d)$ *e* $(c, d) \sim (e, f)$*, então* $(a, b) \sim (e, f)$

PROPOSIÇÃO 1.3.5. *A relação definida é uma relação de equivalência.*

Demonstração.

Para validar a relação como sendo de equivalência, temos que verificar a validade de três propriedades.

- Reflexividade:

  Como já vimos na seção anterior, a comutatividade é uma propriedade válida para a adição em $\mathbb{N}$, portanto a reflexividade é uma propriedade dessa relação de equivalência.

- Simetria:

  Como sabemos que $(a, b) \sim (c, d)$, então,

$$a + d = b + c$$

Utilizando a propriedade da comutatividade da adição, temos que

$$d + a = c + b$$

Pela definição da relação, temos que

$$(c, d) \sim (a, b)$$

Portando, podemos afirmar que se $(a, b) \sim (c, d)$, então, $(c, d) \sim (a, b)$.

- Transitividade: Se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então $(a, b) \sim (e, f)$

  Como sabemos que $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então

  1. $a + d = b + c$
  2. $c + f = d + e$

  Somando as equações 1 e 2, temos que,

$$(a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e)$$

  Utilizando a propriedade da associatividade da adição, temos que

$$a + (d + c) + f = b + (c + d) + e.$$

  Utilizando a propriedade da comutatividade da adição, temos que

$$a + (d + c) + f = b + (d + c) + e.$$

  Utilizando novamente a propriedade da associatividade da adição, temos que

$$(a + f) + (d + c) = (b + e) + (d + c)$$

  Utilizando a lei de corte da adição, temos que,

$$(a + f) = (b + e)$$

  Portando, podemos afirmar que se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então,

$$(a, b) \sim (e, f)$$

$\square$

Consideramos como conjunto quociente todas as classes de equivalência definidas por esta relação, denotaremos por $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência do par ordenado (a,b) pela relação $\sim$, ou seja,

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x,y) \sim (a,b) \}$$

O conjunto quociente é formado por todas as classes de equivalência (a,b), será representado por $\mathbb{Z}$ e chamado de Conjunto dos Números Inteiros.

1.3.2 Operações no conjunto $\mathbb{Z}$

Após definirmos o conjunto dos números inteiros, vamos abordar quatro operações desse conjunto: adição, subtração , multiplicação e divisão.

1. Adição

Definição 1.3.6.

$$\textit{Dados } (a,b) \textit{ e } (c,d) \in \mathbb{Z},\ (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

Proposição 1.3.7. *A operação de adição está bem definida nos $\mathbb{Z}$.*

Demonstração.

Para provarmos a validade da definição da adição no $\mathbb{Z}$, temos que mostrar que a soma não dependerá dos representantes das classes de equivalência citados, logo, provar que se $(a,b) \sim (\alpha,\beta)$ e $(c,d) \sim (\gamma,\delta)$, então, $(a+c, b+d) \sim (\alpha+\gamma, \beta+\delta)$, ou seja, provar que

$$(a+c) + (\alpha+\gamma) = (b+d) + (\beta+\delta)$$

Por definição, sabemos que, $a+\beta = b+\alpha$ e $c+\delta = d+\gamma$, partindo de que,

$$(a+\beta) + (c+\delta) = (b+\alpha) + (d+\gamma)$$

Pela propriedade da associatividade da adição nos $\mathbb{N}$, temos que

$$a + (\beta + c) + \delta = b + (\alpha + d) + \gamma.$$

Utilizando a propriedade da comutatividade da adição nos $\mathbb{N}$, temos que

$$a + (c + \beta) + \delta = b + (d + \alpha) + \gamma.$$

Utilizando a propriedade da associatividade da adição nos $\mathbb{N}$, temos que

$$(a+c)+(\beta+\delta)=(b+d)+(\alpha+\gamma).$$

Portanto, podemos concluir que a operação de adição no conjunto dos números inteiros está bem definida.

$\square$

A operação de adição apresenta algumas propriedades importantes que serão abordadas a seguir. As demonstrações de tais propriedades encontram-se em Hefez (2002), páginas 22 a 35.

- Propriedades da adição nos $\mathbb{Z}$

  (a) Associatividade
  Dados n, m e $p \in \mathbb{Z}$, tal que $n=(a,b)$, $m=(c,d)$ e $p=(e,f)$, temos que

  $$(n+m)+p=n+(m+p)$$

  (b) Elemento Neutro
  Existe um único elemento denotado por $0=(0,0)\in\mathbb{Z}$, tal que

  $$n+0=0+n=n$$

  (c) Elemento Oposto
  Para cada elemento de $n\in\mathbb{Z}$ existe um único elemento denotado por $(-n)$ tal que

  $$n+(-n)=(-n)+n=0$$

  (d) Comutatividade
  Dados n e $m\in\mathbb{Z}$, temos que,

  $$n+m=m+n$$

  (e) Lei do corte
  Dados n, m e p $\in\mathbb{Z}$, temos que, se

  $$n+m=n+p,\text{ então } m=p$$

2. Subtração

   Pela existência e unicidade do elemento oposto, podemos definir a operação de subtração entre dois números quaisquer a e $b\in\mathbb{Z}$, que é representada por $a-b$, como sendo a soma de um $a\in\mathbb{Z}$ e um $b\in\mathbb{Z}$ que é elemento oposto de algum $\beta\in\mathbb{Z}$.

Definição 1.3.8.

$$\textit{Dados } a \textit{ e } n \in \mathbb{Z}, \textit{ então, } a - n = a + (-n)$$

Após definirmos a operação de subtração, vamos trabalhar com duas importantes consequências, que serão abordadas a seguir.

(a) Comutatividade

Dados n e $m \in \mathbb{Z}$, tal que $n = (a, b)$ e $m = (c, d)$, então, $-n + m = m - n$.

(b) Distributividade

Dados n e $m \in \mathbb{Z}$, tal que $n = (a, b)$ e $m = (c, d)$, então, $-(n + m) = -n - m$

3. Multiplicação

Definição 1.3.9.

Dados $n = (a, b)$ e $m = (c, d)$, onde n e $m \in \mathbb{Z}$, definimos a multiplicação como:

$$\alpha = (a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc), \textit{ onde } \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Proposição 1.3.10. *A operação de multiplicação está bem definida nos $\mathbb{Z}$.*

Demonstração.

Para validar a definição feita acima, temos que demonstrar que, se $(a, b) = (x, y)$ e $(c, d) = (z, w)$, temos que

$$(a, b) \cdot (c, d) = (x, y) \cdot (z, w).$$

Se $(a, b) = (x, y)$ e $(c, d) = (z, w)$, pela definição relação de equivalência, temos que

- $(a + y) = (b + x)$ (1)
- $(c + w) = (d + z)$ (2)

Multiplicando a equação (1) por c e por d, temos que

- $c \cdot (a + y) = c \cdot (b + x)$ (3)
- $d \cdot (a + y) = d \cdot (b + x)$ (4)

Aplicando a propriedade da distributividade nos $\mathbb{N}$ sobre as equações (3) e (4) e, posteriormente, aplicando a propriedade da comutatividade nos $\mathbb{N}$ sobre a equação (4), podemos afirmar que

- $ac + cy = bc + cx$
- $bd + dx = ad + dy$

Somando as duas equações obtidas no passo anterior termo a termo, temos que

$$ac + cy + bd + dx = bc + cx + ad + dy$$

Utilizando a propriedade da associatividade nos $\mathbb{N}$, temos que

$$(dx + cy) + (ac + bd) = (xc + dy) + (ad + bc)$$

Utilizando a propriedade da comutatividade nos $\mathbb{N}$, temos que

$$(ac + bd) + (xd + yc) = (ad + bc) + (xc + yd)$$

Logo, pela relação de equivalência, podemos afirmar que

$$(ac+bd, ad+bc) = (xc+yd, xd+yc) \tag{5}$$

Multiplicando a equação (2) por x e por y, temos que

- $y \cdot (c+w) = y \cdot (d+z)$ (6)
- $x \cdot (c+w) = x \cdot (d+z)$ (7)

Aplicando a propriedade da distributividade nos $\mathbb{N}$, sobre as equações (7) e (8) e, posteriormente, aplicando a propriedade da comutatividade nos $\mathbb{N}$ sobre a equação (8), podemos afirmar que

- $cy + yw = dy + yz$
- $dx + xz = cx + xw$

Somando as duas equações obtidas no passo anterior termo a termo, temos que

$$cy + yw + dx + xz = dy + yz + cx + xw$$

Utilizando a propriedade da associatividade nos $\mathbb{N}$, podemos afirmar que

$$(dx + cy) + (xz + yw) = (xw + yz) + (cx + dy)$$

Utilizando a propriedade da comutatividade nos $\mathbb{N}$, podemos afirmar que

$$(xz + yw) + (dx + cy) = (cx + dy) + (xw + yz)$$

Pela definição relação de equivalência, temos que

$$(xz+yw, xw+yz) = (xc+yd, xd+yc) \tag{8}$$

Por (5) e (8), temos que

$$(ac + bd, ad + bc) = (xz + yw, xw + yz) = (xc + yd, xd + yc)$$

Utilizando a propriedade da transitividade, temos que

$$(ac + bd, ad + bc) = (xc + yd, xd + yc)$$

Como sabemos que

- $(ac + bd, ad + bc) = (a, b) \cdot (c, d)$
- $(xc + yd, xd + yc) = (x, y) \cdot (z, w)$

Portanto, podemos concluir que $(a, b) \cdot (c, d) = (x, y) \cdot (z, w)$

$\square$

A operação de multiplicação apresenta algumas propriedades importantes que serão abordadas a seguir. As demonstrações de tais propriedades encontram-se em Hefez (2002), páginas 22 a 35.

- Propriedades da multiplicação nos $\mathbb{Z}$

(a) Associatividade
Dados n, m e $p \in \mathbb{Z}$, tal que $n = (a, b)$, $m = (c, d)$ e $p = (e, f)$, temos que

$$(nm) \cdot p = n \cdot (mp)$$

(b) Elemento Neutro
Dados $n \in \mathbb{Z}$, tal que $n = (a, b)$, existe um único elemento neutro, representado por 1, tal que

$$1 \cdot n = n \cdot 1 = n$$

- Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

(c) Lei do Corte
Dados n, m e $p \in \mathbb{Z}$, tal que $n = (a, b)$, $m = (c, d)$ e $p = (e, f)$, temos que

$$\text{Se } n \cdot m = n \cdot p \text{, então, } m = p$$

(d) Comutatividade
Dados n e $m \in \mathbb{Z}$, tal que $n = (a, b)$ e $m = (c, d)$, temos que

$$n \cdot m = m \cdot n$$

(e) Distributividade
Dados n e $m \in \mathbb{Z}$, tal que $n = (a, b)$ e $m = (c, d)$, temos que

$$n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$$

1.3.3 Relação de ordem e Princípio da Boa Ordenação nos $\mathbb{Z}$

Nessa seção, vamos definir a relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação nos $\mathbb{Z}$, além de demonstrar algumas propriedades dos $\mathbb{Z}$. As demonstrações de tais propriedades encontram-se em HEFEZ (2014), páginas 12 a 21.

1. Relação de ordem nos $\mathbb{Z}$

   DEFINIÇÃO 1.3.11.

   Dados (a, b) *e* $(c, d) \in \mathbb{Z}$*, escrevemos* $(a, b) \leq (c, d)$*, quando* $a + d \leq b + c$*.*

   A relação $(a, b) \leq (c, d)$, lê-se como (a, b), é menor do que ou igual a (c, d)

   TEOREMA 1.3.12. *A relação* $\leq$ *definida anteriormente é uma relação de ordem nos* $\mathbb{Z}$*, quando para todos* n*,* m *e* $p \in \mathbb{Z}$

   - *Reflexividade:* $n \leq n$
   - *Antissimetria: Se* $n \leq m$ *e* $m \leq n$*, então* $n = m$
   - *Transitividade: Se* $n \leq m$ *e* $m \leq p$*, então* $n \leq p$

   Depois de definir a relação de ordem nos $\mathbb{Z}$, vamos fazer outras definições neste sentido.

   DEFINIÇÃO 1.3.13. *Dado* $(a, b)\in\mathbb{Z}$*, afirmamos que:*

   - (a, b) *é positivo, se* $(a, b) >$ *(0; 0), logo,* $a > b$*.*
   - (a, b) *é negativo, se* $(a, b) <$ *(0; 0), logo,* $a < b$*.*
   - (a, b) *é não positivo, se* $(a, b) \leq (0, 0)$*, logo,* $a \leq b$*.*
   - (a, b) *é não negativo, se* $(a, b) \geq (0, 0)$*, logo,* $a \geq b$*.*

   Assim, podemos concluir que

   - Se $(a, b) >$ (0; 0), então, a $>$ b, podemos afirmar que existe $x \in \mathbb{N}^*$, tal que

     $$a = b + x, \text{ logo } (a, b) = (x, 0).$$

   - Se $(a, b) < (0; 0)$, então, $a < b$, podemos afirmar que existe $y \in \mathbb{N}^*$, tal que

     $$a + y = b, \text{ logo } (a, b) = (0, y).$$

Como a Tricotomia nos $\mathbb{Z}$ é válida, podemos concluir que,

$$Z = \{(x,0)\in\mathbb{N}^*\} \cup \{(x,0)\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{N}^*\}$$

Onde todas as uniões são disjuntas. Vamos utilizar as notações a seguir para representar alguns conjuntos do $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z}_-^* = \{(x,0) \in \mathbb{N}^*\}$
- $\mathbb{Z}_- = \{(x,0) \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(0,0)\}$
- $\mathbb{Z}_+^* = \{(0,y) \in \mathbb{N}^*\}$
- $\mathbb{Z}_+ = \{(0,y) \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(0,0)\}$

Podemos concluir que há uma bijeção entre $\mathbb{Z}_+$ e $\mathbb{N}$. Logo, $\mathbb{Z}_+$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{N}$, como mostra o próximo teorema, onde f chama-se imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Esse teorema também demonstra que o $\mathbb{Z}$ é infinito.

Teorema 1.3.14.

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = (a,0)$, então f é injetora e valem as seguintes propriedades:

- $f(a+b) = f(a) + f(b)$
- $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$
- *Se $a \leq b$ então $f(a) \leq f(b)$*

Vamos utilizar as notações a seguir para representar os números inteiros.

- Os números negativos serão representados como $-a = (0,a)$, onde $-a \in \mathbb{Z}_-^*$
- Os números positivos serão representados como $a = (a,0)$, onde $a \in \mathbb{Z}_+^*$
- O número zero será representado com $0 = (0,0)$

2. Princípio da Boa Ordenação

Teorema 1.3.15. *Dado X um subconjunto não vazio dos $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente. Então, X possui elemento mínimo.*

1.4 Divisibilidade

Nessa seção, vamos definir a divisão nos $\mathbb{Z}$ e enumerar algumas consequências. As demonstrações de tais propriedades encontram-se em HEFEZ (2002), páginas 66 a 70.

Definição 1.4.1.

Dados a e $b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, diz-se que b divide a se existe um $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b \cdot c = a$.
Notações:

$b|a$, isso significa dizer que b divide a.
$b \nmid a$, isso significa dizer que b não divide a.

1. Propriedades da divisão nos $\mathbb{Z}$
   (a) Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, onde $b \neq 0$ e $a = b \cdot c$, então, c é único.
   (b) Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, se $b|a$ e $a \neq 0$ então $|b| \leq |a|$.
   (c) Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, temos que:
      - Os únicos divisores de 1 são 1 e -1.
      - Se $a|b$ e $b|a$, então $a = \pm b$.
2. Consequêcias da divisão nos $\mathbb{Z}$
   (a) Dado $a \in \mathbb{Z}$, então $a|a$.
   (b) Dados a, b e $c \in \mathbb{Z}$, se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.
   (c) Dados a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$.
   (d) Dados a, b e $c \in \mathbb{Z}$, se $a|b$ e $a|c$, então $a|(b+c)$.
   (e) Dados a, b e $c \in \mathbb{Z}$, se $a|b$ então $a|c \cdot b$.
   (f) Dados a, b e $c \in \mathbb{Z}$, se $a|b$ e $a|c$, então $a|(mb+nc)$, para todos m e $n \in \mathbb{Z}$.
3. Números Primos

   Definição 1.4.2.

   Dados $p \in \mathbb{N}$, tal que $p \geq 1$, se p só for divisível por 1 e por ele mesmo, então p será chamado de número primo,

   Exemplo 1.4.3.

   Os número 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19 são número primos, pois eles são apenas divisíveis por um e por ele mesmo.

1.5 Máximo Divisor Comum e Mínimo Multiplo Comum

Nesta seção, vamos abordar a definição de Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Multiplo Comum (MMC).

Para definirmos o MDC, entre a e b temos que, primeiramente definir o que é divisor comum.

Definição 1.5.1.

Dados a, b e $c \in \mathbb{Z}$. se $c|a$ e $c|b$, então c é divisor comum de a e b.

Exemplo 1.5.2.

Os divisores comum de 12 e 18 são ± 1, ± 2, ± 3 e ± 6.

Após a definição de divisor comum, podemos definir MDC

Definição 1.5.3.

Dados a, b e $c \in \mathbb{Z}$, onde $c \geq 0$, dizemos que c é um máximo divisor comum de a e b:

1. *Se c é divisor comum de a e b*
2. *Se c é divisível por todos os divisores comum de a e b,*

- *Notação:*

$$MDC\ (a, b) = c, \text{ isso significa dizer que } c \text{ é o MCD entre } a \text{ e } b.$$

Exemplo 1.5.4.

O MDC entre 12 e 18 é 6, pois como vimos 6 e divisor de 12 e 18 e 6 é divisível por ± 1, ± 2, ± 3 e ± 6, logo, $MDC\ (12, 18) = 6$.

Para definirmos o MMC, entre a e b temos que primeiramente definir o que é multiplicador comum.

Definição 1.5.5.

Dados a, b e $c \in \mathbb{Z}$, dizemos que c é múltiplo comum de a e b, se c for simultaneamente múltiplo de a e b,

Exemplo 1.5.6.

O número 12 é MMC de 2 e 3.

Após a definição de múltiplo comum, podemos definir MMC.

Definição 1.5.7.

Dados a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, onde $c \geq 0$, dizemos que c é um mínimo múltiplo comum de a e b:

- *Se c é múltiplo comum de a e b.*
- *Se d é um multiplo de comun de a e b, então $c|d$.*

Vamos representar o MMC como sendo:

Notação 1.5.8. *MMC$(a, b) = c$, isso significa dizer que c é o MMC entre a e b.*

Exemplo 1.5.9.

O MMC entre 2 e 3 é 6, pois como sabemos 6 e múltiplo de 2 e 3 e 6 é divisível por qualquer número da forma $n = 6 \cdot m$, onde n e $m \in \mathbb{Z}$.

1.6 Algoritmo de Euclides

Nessa seção, vamos definir o Algoritmo de Euclides.

Lema 1.6.1.

Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 0$ e $b > 0$, existem q e $r \in \mathbb{Z}$, tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.

Demonstração.

Dado um conjunto S, tal que $S = \{a - (bx) : x \in \mathbb{Z} \text{ e } a - (bx) \geq 0\ \}$, se $x = 0$, então $a - (bx) = a \geq 0$.

Sabemos que $a|0$ e $a \in \mathbb{Z}$, logo, temos que $S \neq \emptyset$, pelo Princípio da Boa Ordenação nos $\mathbb{Z}$, existe $r = minS$, tal que $r \in \mathbb{Z}$, assim, $r = a - (bq) \geq 0$, para algum $q \in \mathbb{Z}$.

Vamos supor que $r \geq b$. Pelo propriedade da distributividade nos $\mathbb{Z}$, temos que

$$a - b \cdot (q + 1) = (a - (b \cdot q)) - b$$

Como sabemos que $r = a - (bq) \geq 0$ e $r \geq b$

$$(a - (b \cdot q)) - b = r - b \geq 0, \text{ então, } a - b \cdot (q + 1) \in S.$$

Mas $a - b \cdot (q+1) = r - b < r = \min S$, que é um absurdo, pois a hipótese era de que $r \geq b$, logo $r < b$.

Portanto, podemos concluir que, dados a e $b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 0$ e $b > 0$, existem q e $r \in \mathbb{Z}$, tal que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.

□

TEOREMA 1.6.2.
Dados a, $b \in \mathbb{Z}$, se $b \neq 0$, então, existem q, $r \in \mathbb{Z}$ únicos tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$

Demonstração.

Para demonstrar a teorema, vamos dividir em duas partes.

- $b > 0$

  Temos duas opções para a:

  Se $a \geq 0$, podemos garantir o teorema pelo lema provado acima.

  Se $a < 0$, podemos afirmar que existem n e $m \in \mathbb{Z}$, tal que

  $$|a| = b \cdot n + m, \text{ onde } 0 \leq n < b$$

  Temos duas opções para o m.

  - Se $m = 0$, como sabemos que $-|a| = a$, então podemos afirmar que

    $$a = b \cdot (-n) + 0$$

    Assim, podemos afirmar que $q = -n$ e $r = 0$, logo podemos garantir o teorema.

  - Se $m > 0$, como sabemos que $-|a| = a$, então podemos afirmar que

    $$a = b \cdot (-n) - m$$

    Vamos subtrair e somar b do lado direito da equção, logo temos que

    $$a = b \cdot (-n) - b + b - m$$

    Utilizando a propiredade de associatividade da adição nos $\mathbb{Z}$

    $$a = b \cdot (-n - 1) + (b - m)$$

    Sabemos que $0 < b - m < b$, então $q = -n - 1$ e $r = b - m$, logo podemos garantir a validade do teorema.

  Portanto, podemos garantir a validade do teorema para $b > 0$.

- $b < 0$

  Dado a, n e $m \in \mathbb{Z}$, tais que $a = |b| \cdot n + m$ e $0 \leq m < |b|$, como $b < 0$ então $|b| = -b$, logo, temos que

  $$a = -b \cdot n + m = b \cdot (-n) + m$$

  Assim, $q = -n$ e $r = r1$, logo podemos garantir a validade do teorema para $b < 0$.

Portanto, provamos a existância q e r, agora temos que provar a unicidade de q e r, vamos supor, sem perda de generalidade, que $m \geq r$, logo temos que $(q - n) \cdot b = m - r > 0$, como $|b| > m$, temos que $m - r < |b|$.

Sabemos que $(q - n) \cdot b = m - r$ e $|b| > 0$, logo podemos afirmar que

$$0 < |q - q1| \cdot |b| < |b| < 1$$

Logo, temos que $0 \leq |q - n| < 1$. Como já foi provado que entre 0 e 1 não há números inteiros, logo, $|q - n| = 0$, assim, podemos afirmar que

$$q = n.$$

Como $q \cdot b + r = n \cdot b + m$, logo, podemos afirmar que

$$r = m.$$

Portanto, provamos a unicidade, concluindo assim a demonstração do teorema.

$\square$

CAPÍTULO 2

JOGOS COMO FERRAMENTA DE ENSINO

Neste capítulo será realizada uma breve análise sobre a inclusão dos jogos matemáticos como ferramenta de ensino da matemática, destacando algumas das muitas contribuições que tal instrumento proporciona no processo de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Básico.

2.1 Definição da palavra jogo

No Dicionário Aurélio de Língua Portuguesa (FERREIRA, 2008), jogo é

> Atividade física ou mental fundamentada em sistema de regras que definem a perda ou ganho, passatempo, jogo de azar, o vício de jogar, série de coisas que forma um todo, ou coleção. Comportamento de quem visa a obter vantagens de outrem. Jogo de azar. Aquele em que a perda ou o ganho dependem da sorte, ou mais da sorte do que do cálculo.

Já de acordo com a Academia Brasileira de Letras

> jogo (ô) s.m.; pl. (ó) "atividade lúdica", etc.; cf. jogó

Ao fazer uma pesquisa mais profunda a respeito da definição da palavra jogo, verifica-se que pode apresentar muitas definições e vários significados. Vamos analisar algumas definições abordadas por autores da área de educação.

De acordo com Huizinga (1971),

> O jogo é uma atividade ou ocupação voluntária exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da vida cotidiana (HUIZINGA, 1971, p. 33).

A partir desta definição, podemos classificar como jogo muitas das manifestações humanas, como, por exemplo, as competições de qualquer tipo ou com qualquer objetivo, a produção do conhecimento, as representações culturais como música, poesia, arte e filosofia. Na verdade, utilizando essa definição de Huizinga, podemos classificar muitas atividades como jogo.

Segundo Kishimoto(1994),

> [...] a variedade de jogos conhecidos como faz-de-conta, simbólicos, motores, sensórios-motores, intelectuais ou cognitivos, de exterior, de interior, individuais ou coletivos, metafóricos, verbais, de palavras, políticos, de adultos, de animais, de salão e inúmeros outros mostra a multiplicidade de fenômenos incluídos na categoria jogo. (KISHIMOTO, 1994, p.1).

De acordo com Grando(1995),

> [...] etimologicamente a palavra JOGO vem do latim LOCU, que significa gracejo, zombaria, e que foi empregada no lugar de ludu: brinquedo, jogo, divertimento e passatempo[...] (GRANDO, 1995, p.30).

O presente trabalho baseia-se em jogos que podem ser utilizados no ensino da matemática. Após mencionar diversas definições da palavra jogo, podemos inferir que, para este contexto, jogo é uma atividade que estimula o desenvolvimento dos processos psicológicos, permitindo uma interação com o meio social em que se está inserido.

2.2 O jogo segundo o desenvolvimento cognitivo

Nesta seção, vamos fazer uma breve análise dos dois mais importantes teóricos do desenvolvimento cognitivo sobre a utilização dos jogos como ferramenta de ensino.

- Jean Piaget (1896-1980)

É o principal teórico do desenvolvimento cognitivo. Ele defendia que o desenvolvimento intelectual ou cognitivo estão intimamente ligados à maturação biológica, o conhecimento prévio, o desenvolvimento da linguagem e o processo de interação social. É um crítico da escola tradicional por acomodar as crianças aos conhecimentos tradicionais, em oposição ao que ele defende, que é suscitar indivíduos inventivos, críticos e com capacidade para criar.

Para entender qual é a concepção de jogo para Piaget, é necessário que conheçamos pelo menos minimamente o que ele estudou a respeito do desenvolvimento cognitivo. As fases do desenvolvimento cognitivo segundo Piaget são:

1. Sensório motor (0 a 2 anos),

   Nessa fase, a criança baseia-se principalmente em percepções sensoriais e esquemas motores para a resolução de seus problemas. Acredita-se que nessa fase a criança não dispõe da capacidade de representar eventos, assim como referir-se ao passado e ao futuro. É importante saber que, até então, a criança age sobre o meio por ações reflexas, e que vai adquirindo noções de tempo, espaço e causalidade através do convívio tido com o ambiente.

2. Pré-operatório (2 a 7 anos),

   A fase pré-operatória é determinada pelo aparecimento da linguagem oral. É a partir daí que a criança começa a formar esquemas simbólicos com os quais consegue permutar ações, pessoas, situações e objetos por símbolos. O pensamento nesta fase do desenvolvimento é conhecido como pensamento egocêntrico, pensamento não flexivo, que tem como ponto de referência a própria criança e as ações são irreversíveis, ou seja, a criança não consegue perceber que é possível retornar mentalmente ao ponto de partida.

3. Operatório-concreto (7 a 12 anos)

   É nessa fase que o pensamento lógico e objetivo adquirem preponderância e as ações se tornam reversíveis, portanto móveis e flexíveis. O pensamento passa a ser menos egocêntrico e a criança consegue construir um conhecimento mais compatível com o mundo que a rodeia

4. Operatório-formal (a partir dos 12 anos).

   Na fase operatório-formal o pensamento se torna livre das limitações da realidade concreta, o que faz com que a criança consiga trabalhar com a realidade possível além da realidade concreta.

De acordo com Negrine (1994), Piaget definia o jogo como a assimilação que se sobressai à acomodação, uma vez que o ato da inteligência leva ao equilíbrio entre a assimilação e a acomodação, sendo que a acomodação é prorrogada pela imitação, ou seja, após a criança se familiarizar com o jogo automaticamente vai internalizando as regras do jogo ou mesmo fazendo representações simbólicas imaginárias, necessárias para o contexto do jogo.

Para Piaget, o jogo e a construção da inteligência possuem estreita relação, pois o prazer que resulta do jogo motiva a aprendizagem.

- Lev Semyynovitch Vygotsky(1896-1934)

Pesquisador contemporâneo de Piaget, Vygotsky estudou o desenvolvimento cognitivo do ser humano, considerando os aspectos das contribuições culturais, da interação social e a da linguagem. Ele também foi um grande defensor da utilização de brinquedos ou jogos durante o processo de ensino e aprendizagem. Segundo Vygotsky

> [...]apesar da relação brinquedo X desenvolvimento poder ser comparada à relação instrução X desenvolvimento, o brinquedo fornece ampla estrutura básica para mudanças das necessidades e da consciência [...] (VIGOTSKY, 1994, p. 135).

Podemos destacar ainda que, por meio do jogo, o estudante aprende a agir numa esfera cognitiva, sendo livre para fazer suas escolhas.

Segundo Vygotsky, o jogo estimula a curiosidade, a autoconfiança, a interação social entre as crianças e gera um novo cenário, conceitos básicos para a construção da inteligência, desde que o jogo esteja de acordo com faixa etária em que está sendo aplicado.

O papel do jogo no desenvolvimento cognitivo para Vygotsky e Piaget são diferentes pois, para Piaget, no jogo prevalece a assimilação, ou seja, a criança assimila no jogo o que percebe nas estruturas já construídas ao longo do seu desenvolvimento, podendo, assim, transformar a realidade. Para Vygotsky, o jogo proporciona alteração das estruturas já construídas.

2.3 Jogo como ferramenta de ensino da matemática

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), os jogos representam um importante recurso metodológico em sala de aula.

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46).

Já o Currículo em Movimento do Distrito Federal relaciona os jogos como uma tendência na área de pesquisa da educação matemática.

> Como uma grande área de pesquisa, a Educação Matemática, criada no século XX, refere-se ao ensino e à aprendizagem, norteando tendências como: Etnomatemática, História da Matemática, Modelagem Matemática, Resolução de Situações-Problema, Materiais Manipuláveis e Jogos, entre outras. (DISTRITO FEDERAL, 2014, p.86).

No Apêndice A há, explicitamente, todas as informações do eixos transversais e eixos integradores do Currículo em Movimento do Distrito Federal dos anos finais do Ensino Fundamental.

A matemática, como as demais disciplinas, necessita de muita atenção, motivação e dedicação tanto por parte do estudante, quanto por parte do professor para se alcançar o conhecimento desejado. O jogo pode ser uma estratégia que proporciona uma maior motivação e interesse por parte dos estudantes nesse processo.

Segundo Grando(2000),

> [...]o ensino de matemática se apresenta como uma das áreas mais caóticas em termos da compreensão dos conceitos nela envolvidos pelos alunos, o elemento jogo se apresenta com formas específicas e características próprias a dar compreensão para muitas das estruturas matemáticas existentes e de difícil assimilação. GRANDO (2000, p. 21).

Como vimos na seção anterior, a palavra jogo tem diversos significados, mas costumamos associar primeiramente à diversão. Logo, para trabalhar com jogos em sala de aula, temos que fazer com que todos os indivíduos envolvidos na atividade direta ou indiretamente tenham a consciência que, mesmo gerando diversão e entretenimento para os alunos que participarem do jogo, ele deverá ser tratado como uma ferramenta de ensino da matemática.

O jogo sempre tem pelo menos duas funções:

- Função lúdica, pois está ligado a diversão, entretenimento, prazer e espontaneidade
- Função educativa, pois está relacionado com a introdução de conceitos ou aprofundamento de conteúdos.

Assim, os jogos podem ser utilizados para introduzir conceitos ou aprofundar conteúdos já trabalhados. Portanto, os jogos devem ser cuidadosamente selecionados, para que possam alcançar seus objetivos e conseguir envolver e manter o interesse e concentração dos alunos em sala de aula, como afirma Piaget(1973),

> [...] os métodos de educação das crianças exigem que se forneça às crianças um material conveniente, a fim de que, jogando, elas cheguem a assimilar as realidades intelectuais que, sem isso, permanecem exteriores à inteligência infantil[...] (PIAGET e INHELDER, 1973, p. 150).

Atualmente existem diversos estudos que apontam as possíveis contribuições geradas pela utilização dos jogos como ferramenta de ensino da Matemática em sala de aula, como afirma Grando(2000),

> Constata-se, na bibliografia especializada, uma certa ênfase nas pesquisas em Educação Matemática sobre a prática pedagógica e as relações que se estabelecem no âmbito da sala de aula. Discute-se a formação do professor, novas propostas pedagógicas e curriculares, materiais diferenciados que possam vir a auxiliar no processo ensino-aprendizagem, dificuldades de aprendizagem em Matemática, aspectos psicológicos, metodológicos, históricos e filosóficos do ensino da Matemática, dentre muitos outros.(GRANDO, 2000, p. 18).

Neste trabalho vamos utilizar a definição de Matos, Bastos e Seimetz para a palvra jogo. Segundo eles:

> Um jogo é uma quadra U = (T, J, R, O), onde T é o tabuleiro, J o número de jogadores, R as regras e O o objetivo. Em um jogo deve ficar claro quem são esses quatro elementos. (MATOS, BASTOS e SEIMETZ, 2015, p.3).

Grando (2004) também cita as vantangens e as desvantagens da utilização dos jogos como ferramenta de ensino.

1. Vantagens

   - (re) significação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno;
   - introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão;
   - desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos);
   - aprender a tomar decisões e saber avaliá-las;
   - significação para conceitos aparentemente incompreensíveis;
   - propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade);
   - o jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento;
   - o jogo favorece a interação social entre os alunos e a conscientização do trabalho em grupo;
   - a utilização dos jogos é um fator de interesse para os alunos;
   - dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, do senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender;
   - as atividades com jogos podem ser utilizadas para desenvolver habilidades de que os alunos necessitam. É útil no trabalho com alunos de diferentes níveis;
   - as atividades com jogos permitem ao professor identificar e diagnosticar algumas dificuldades dos alunos.

2. Desvantagens

   - quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um "apêndice" em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber por que jogam;

- o tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é grande e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo;
- Possibilidade de falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos. Então, as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno;
- o jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento;
- a perda da "ludicidade" do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo;
- a coerção do professor , exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo;
- a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

Podemos destacar entre as vantagens citadas a (re) significação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno e o fato dos jogos serem de interesse dos alunos. Essas duas vantagens estão intimamente ligadas aos objetivos deste trabalho e estão previstas no Currículo em Movimento do Distrito Federal e nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Como o trabalho está propondo que os jogos sejam bem selecionados e usados em conjunto com as aulas expositivas, logo a primeira e a terceira desvantagem apontadas ficam menos fortalecidas. A última desvantagem que foi citada também acaba sendo enfraquecida já que o objetivo deste trabalho é propor jogos com baixo custo de produção, possibilitando a aplicação das atividades em ambientes com carência de recursos tecnológicos ou financeiros.

Portanto, a utilização do jogo como ferramenta de ensino em sala de aula pode estimular o espírito investigativo, a relação professor-aluno e a relação aluno-aluno, o respeito mútuo, a vontade de aprender e conhecer mais sobre algo novo, a criatividade e o prazer de estudar, desde que seja corretamente selecionado e aplicado.

Todos esses pontos citados acima estão presentes no Currículo em Movimento do Distrito Federal. Sendo assim, podemos inferir que, mesmo existindo algumas desvantagens, a utilização dos jogos como ferramenta de ensino em sala de aula apresenta mais vantagens do que desvantagens.

CAPÍTULO 3

JOGOS PROPOSTOS

Neste capítulo será realizada uma breve justificativa dos jogos selecionados, destacando o Currículo em Movimento do Distrito Federal, e serão apresentados os jogos selecionados.

3.1 Justificativa e embasamento das atividades propostas

Esses jogos foram selecionados pelo fato de terem baixo custo na produção dos materiais utilizados nas atividades, possibilitando a aplicação das atividades em ambientes com carência de recursos tecnológicos ou financeiros, de possuírem regras simples e diretas, o que torna a aplicação da atividade em sala de aula mais fácil, e também pelo fato de abordar as operações básicas da matemática de forma lúdica. Isso está previsto no currículo em movimento do Distrito Federal, que podemos observar no Apêndice A.

> Como uma grande área de pesquisa, a Educação Matemática, criada no século XX, refere-se ao ensino e à aprendizagem, norteando tendências como: Etnomatemática, História da Matemática, Modelagem Matemática, Resolução de Situações-Problema, Materiais Manipuláveis e Jogos, entre outras. (DISTRITO FEDERAL, 2014, p.86).

Todos esses fatores vão contribuir para um melhor desenvolvimento dos conceitos matemáticos em cada aluno, pois estimulam as operações mentais, o que está previsto no currículo em movimento do Distrito Federal como objetivo relacionado ao ensino da matemática no sexto ano do ensino fundamental.

> [. . .] Compreender e realizar processos de cálculos mentais e escritos com operações no Conjunto de Números Naturais;[. . .](DISTRITO FEDERAL, 2014, p.88).

Dois jogos dos cinco propostos estimulam os alunos a tomarem decisões de acordo com os vários cenários propostos, criando assim uma estratégia para se completar o objetivo do jogo, estimulando também o desenvolvimento do pensamento lógico de cada aluno, o que está previsto no Currículo em Movimento do Distrito Federal como objetivo relacionado ao ensino da matemática no sétimo, oitavo e nono ano do ensino fundamental.

> [. . .]Estimular o pensamento lógico e a capacidade de abstração da linguagem matemática para a solução de problemas.[. . .] (DISTRITO FEDERAL, 2014, p.91/92, 94 e 96).

Quatro dos cinco jogos estimulam a interação dos alunos, também previsto no currículo em movimento do Distrito Federal como objetivo relacionado ao ensino da matemática no oitavo ano do ensino fundamental.

> [. . .]Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos;[. . .] (DISTRITO FEDERAL, 2014, p. 94)

Assim, conseguimos asegurar que todas as atividades estão de acordo com o currículo em movimento do Distrito Federal. Cabe reiterar que cada um dos jogos propostos pretende abordar conceitos matemáticos e está relacionado com os assuntos dos anos finais do ensino fundamental.

3.2 Jogos

A seguir vamos propor cinco jogos para serem aplicados no Ensino Básico, dos quais três foram criados pelo autor deste trabalho, o outro é um jogo existente a pelo menos dois mil anos e o último jogo é uma adaptação de um jogo já proposto por diversos professores.

3.2.1 Quadrado Mágico

Segundo Boyer (1996) e Contador (2008), pesquisadores da área da História da Matemática, os quadrados mágicos surgiram em cerca de 3000 a.C, durante a dinastia Hsia, nas margens do Rio Amarelo e o Rio Azul, onde atualmente é a China.

Para Carvalho e Silva, o primeiro registro do Quadrado Mágico ocorreu em 2200 A.C. nas margens do Rio Amarelo, quando o Imperador Yu, ao observar uma tartaruga, um animal sagrado para os chineses, percebeu que seu casco trazia um símbolo conhecido hoje em dia como Lo Shu, como podemos ver na figura abaixo

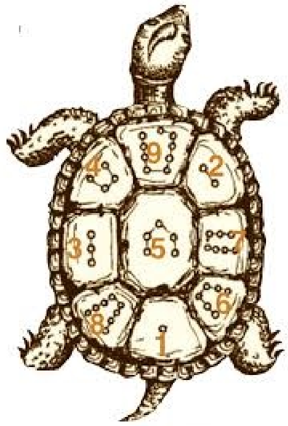


Figura 3.1: Lo shu, Fonte: https://goo.gl/images/FdfCXM

Ele percebeu que poderia trocar os nove espaços do desenho por um quadrado 3×3 e os nós dentro dos nove espaços por algarismos de 1 a 9 e definiu que em cada linha a soma dos três números teria que ser 15, que em cada coluna a soma dos três números teria que ser 15 e que a soma dos três números de cada diagonal também teria que ser 15, conforme a figura:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 3.2: Quadrado mágico 3×3, Fonte: Elaborado pelo Autor

Por esse motivo, foi dado o nome de quadrado mágico.Na época, os chineses acreditavam que quem usasse os quadrados mágicos gravados em qualquer lugar teria sorte e felicidade durante a vida toda. Porém, o mais antigo registro matemático que se tem é o texto do "Livro Chinês das Permutações", escrito cerca de 1.100 a.C.

A partir do século XV, os quadrados mágicos ficaram conhecidos na Europa por astrólogos e físicos do final da Idade Média. Cornélio Agripa determinou sete quadrados mágicos de módulos 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, que representam respectivamente os sete planetas dos astrólogos daquela época: Saturno, Júpiter, Marte, Sol, Vênus, Mercúrio e Lua. Podemos ver isso nas figuras, elaboradas pelo autor do trabalho.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Saturno $D = 15$ e $N = 3$

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Júpiter $D = 34$ e $N = 4$

11	25	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Marte $D = 65$ e $N = 5$

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	2	15
36	5	33	4	2	31

Solenóide $D = 111$ e $N = 6$

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Vénus $D = 175$ e $N = 7$

Figura 3.3: Quadrados mágicos dos planetas, Fonte: Elaborado pelo Autor

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	48	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
23	2	3	61	60	6	7	57

Mercúrio $D = 260$ e $N = 8$

Figura 3.4: Quadrados mágicos do planeta Mercúrio, Fonte: Elaborado pelo Autor

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Lua $D = 369$ e $N = 9$

Figura 3.5: Quadrados mágicos da Lua, Fonte: Elaborado pelo Autor

Muitos estudiosos também deixaram registros dos seus quadrados mágicos. Albertcht Dürer (1471-1528), o mais famoso artista do Renascimento Nórdico, teve grandes contribuições, principalmente com a elaboração de tratados sobre a medida e proporções humanas, perspectiva e geometria como elementos estruturantes da obra de arte. Ele deixou registrado no canto superior direito do seu quadro "melancolia", um quadrado mágico 4×4, emque a soma dos quatro números de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal é 34. Como podemos visualizar na figuras 3.2 e 3.3:

3.2.1.1 Regras do Quadrado Mágico

- Deve ser jogado individualmente;
- Defina o tamanho do quadrado N $\times$ N;
- Defina D, onde D é o Total da soma que vai ser utilizado, de modo que exista solução;
- A soma dos números das casas de uma mesma linha tem que ser igual a D;
- A soma dos números das casas de uma mesma coluna tem que ser igual a D;
- A soma dos números das casas de uma mesma diagonal tem que ser igual a D;
- Preencher todas as casas do quadrado com números consecutivos, sem que se repitam.

3.2.1.2 Materiais utilizados

- Lápis, papel, régua e borracha
- Ou podemos optar em entregar as tabelas do jogo já impressas (disponibilizadas no apêndice E), como tabuleiro do quadrado mágico, dependendo da disponibilidade dos recursos oferecidos pela escola onde está sendo aplicada a atividade.

3.2.1.3 Objetivos da Atividade

Todos os objetivos trabalhados nessa atividade estão presentes no Currículo em Movimento dos anos finais da educação básica do Distrito Federal, como pode ser visto no apêndice A.

- Estimular interesse, curiosidade, espírito de investigação e desenvolvimento da capacidade para resolver situações-problema;

Figura 3.6: Melancolia, Fonte: https://goo.gl/images/cMFues

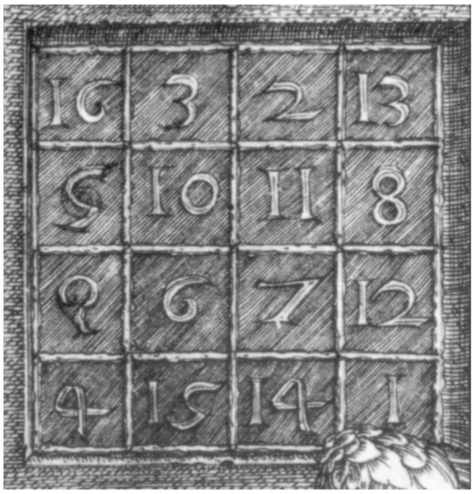


Figura 3.7: Quadrado Mágico do quadro Melancolia, Fonte: https://goo.gl/images/q9J2yy

- Compreender e realizar processos de cálculos mentais e escritos com operações no conjunto dos números naturais;
- Estimular o pensamento lógico.

3.2.1.4 Habilidades Envolvidas

Adição, subtração, divisão e raciocínio lógico

3.2.1.5 Anos onde a atividade pode ser aplicada

Essa atividade pode ser aplicada em todos os anos finais do ensino fundamental, pois utiliza a adição e subtração e também poderia ser aplicada no ensino médio, aumentando o tamanho dos quadrados mágicos de módulo três para quadrados mágicos de módulos quatro, cinco, seis ou sete para reforçar o raciocínio lógico.

3.2.1.6 Duração da atividade

Para o desenvolvimento da atividade como proposto no próximo item, serão necessários 50 minutos.

2.2.1.7 Lógica para a resolução dos quadrados mágicos 3x3

Dado um quadrado 3x3,

A_{11}	A_{12}	A_{13}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{31}	A_{32}	A_{33}

Figura 3.8: Quadrado mágico, Fonte: Elaborado pelo Autor

temos que atender a oito regras para o seu preenchimento:

1. $D = (A_{11} + A_{12} + A_{13})$;

2. $D = (A_{11} + A_{21} + A_{31})$;

3. $D = (A_{11} + A_{22} + A_{33})$;

4. $D = (A_{12} + A_{22} + A_{32})$;

5. $D = (A_{13} + A_{23} + A_{33})$;

6. $D = (A_{13} + A_{22} + A_{31})$;

7. $D = (A_{21} + A_{22} + A_{23})$;

8. $D = (A_{31} + A_{33} + A_{33})$.

Analisando a casa central, percebemos que ela vai ter um papel importantíssimo, pois, se definirmos o valor da casa central como X, temos que:

A_{11}	A_{12}	A_{13}
A_{21}	X	A_{23}
A_{31}	A_{32}	A_{33}

Figura 3.9: Quadrado mágico 2, Fonte: Elaborado pelo Autor

Portanto, temos que:

1. $(D - X) = A_{11} + A_{33}$;

2. $(D - X) = A_{12} + A_{32}$;

3. $(D - X) = A_{13} + A_{31}$;

4. $(D - X) = A_{21} + A_{23}$.

Podemos notar que os elementos são complementares mod(D - X) dois a dois, já que a soma dos dois números resulta em $(D - X)$. Como sabemos que o quadrado mágico possui nove casas, concluímos, então, que, como os números são consecutivos, X terá que ser o elemento central do conjunto I formado pela sequência dos números que irão preencher o quadrado, pois, assim, os demais elementos serão simétricos dois a dois. Logo, terão a mesma soma. Portanto, $I = \{(X - 4)\ ,\ (X - 3)\ ,\ (X - 2)\ ,\ (X - 1)\ ,\ X\ ,\ (X + 1)\ ,\ (X + 2)\ ,\ (X + 3)\ ,\ (X + 4)\}$, onde X tem que ser maior ou igual a 5, pois os elementos de I são inteiros maiores que 0. Somando as casas simétricas temos;

1. $(X-4)+(X+4)=2X$;
2. $(X-3)+(X+3)=2X$;
3. $(X-2)+(X+2)=2X$;
4. $(X-1)+(X+1)=2X$.

Portanto, a soma das casas simétricas é igual a $2X$. Logo, podemos concluir que a soma da casa central e as duas casas simétricas será sempre igual $3X$. Como sabemos que essa soma também vai ser igual a D, então, podemos concluir que $D = 3X$. Ou seja, essa regra vale para todo D múltiplo de 3 e $D > 15$, pois X é qualquer número inteiro m tal que $m > 5$.

Após definir o valor da casa central e o conjunto I com os elementos para o preenchimento do quadrado, conseguimos atender a 4 das 8 regras (3, 4, 6 e 7) do quadrado mágico. Agora vamos olhar para os elementos dos vértices. Temos que D é múltiplo de 3. Portanto, ele pode ser ímpar ou par.

- Se D for par

  Como sabemos que para que a soma de três números seja par, temos duas possibilidades

  1. Dois números ímpares e um par;
  2. Três números pares.

- Se D for ímpar

  Como sabemos que para que a soma de três números seja ímpar, temos duas possibilidades

  1. Dois números pares e um ímpar;
  2. Três números ímpares.

Vamos analisar separadamente cada caso.

- Caso 1 : D é ímpar

  Então X também será ímpar, e o conjunto I terá 4 elementos pares e 5 elementos ímpares, entre eles o X. Portanto, temos duas possibilidades para o preenchimento das quatro casas dos vértices: ou as quatro serão ímpares, pois assim podemos afirmar que a soma de três números ímpares é sempre ímpar; ou as quatro serão pares, pois assim podemos afirmar que a soma de dois números pares e um número ímpar é sempre ímpar. Assim, atenderam-se as regras 3 e 6. Vamos analisar separadamente cada possibilidade:

1. Se as quatro casas dos vértices forem ímpares, as outras quatro casas serão pares. Assim, não atenderemos as regras 1, 2, 5 e 8, pois a soma de dois números ímpares e um par é par, e D é ímpar.
2. Se as quatro casas dos vértices forem pares, as outras quatro casas serão ímpares. Assim, atenderemos as regras 1, 2, 5 e 8, pois a soma de dois números pares e um ímpar é ímpar.

Como sabemos que a as casas opostas são sempre complementares mod$(D-X)$. Vamos fixar $D = 15$ para analisar quantas possibilidades temos de preenchimento do quadrado mágico, logo $X = 5$. Como concluímos que os vértices são sempre números pares, então as casas dos vértices opostas entre si podem assumir os valores 2 e 8 ou 4 e 6. Assim, teremos oito possibilidades de preenchimento, como podemos visualizar abaixo:

2		4
	5	
6		8

2		6
	5	
4		8

8		4
	5	
6		2

8		6
	5	
4		2

4		2
	5	
8		6

4		8
	5	
2		6

6		2
	5	
8		4

6		8
	5	
2		4

Figura 3.10: Soluções dos Quadrados mágicos 3×3 (parte 1), Fonte: Elaborado pelo Autor

Para fazer o preenchimento das outras casas, temos que lembrar que as casas opostas são sempre complementares mod(10). Logo, podem assumir os valores 1 e 9 ou 3 e 7. Assim, asseguramos que a soma dos três números de cada linha e dos três números de cada coluna seja igual a 15. Assim, podemos completar o preenchimento do quadrado mágico, como podemos visualizar abaixo:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Figura 3.11: Soluções dos Quadrados mágicos 3×3 (parte 2), Fonte: Elaborado pelo Autor

- Se D for par

  Então X também será par, e o conjunto I terá 4 elementos ímpares e 5 elementos pares, entre eles o X. Portanto, temos duas possibilidades para o preenchimento das quatro casas dos vértices: ou as quatro serão ímpar, pois assim podemos afirmar que a soma de dois números ímpares e um número par é sempre par; ou as quatro serão par, pois assim podemos afirmar que a soma de três números pares é sempre par. Assim, atenderam-se as regras 3 e 6.Vamos analisar separadamente cada caso:

  1. Se as quatro casas do vértice forem par, as outras quatro casas serão ímpares. Assim, não atenderemos as regras 1, 2, 5 e 8, pois a soma de dois números ímpares e um par é par, e D é ímpar;
  2. Se as quatro casas dos vértices forem ímpares, as outras quatro casas serão par. Assim, atenderemos as regras 1, 2, 5 e 8, pois a soma de dois números pares e um ímpar é ímpar.

  Temos que lembrar que as casas opostas são sempre complementares mod(D - X). Vamos pegar $D = 18$ para analisar quantas possibilidades temos de preenchimento do quadrado mágico, logo $X = 6$. Como concluímos que os vértices são sempre números pares, então as casas dos vértices opostas entre si podem assumir os valores 3 e 9 ou 5 e 7. Assim, teremos oito possibilidades de preenchimento, como podemos visualizar abaixo:

3		5
	6	
7		9

3		7
	6	
5		9

9		5
	6	
7		3

9		7
	6	
5		3

5		3
	6	
9		7

5		9
	6	
3		7

7		3
	6	
9		5

7		9
	6	
3		5

Figura 3.12: Soluções dos Quadrados mágicos 3×3 (parte 3), Fonte: Elaborado pelo Autor

Para fazer o preenchimento das outras casas, temos que lembrar que as casas opostas são sempre complementares mod(12). Logo, podem assumir os valores 2 e 10 ou 4 e 8. Assim, asseguramos que a soma dos três números de cada linha e dos três números de cada coluna seja igual a 18. Assim, podemos completar o preenchimento do quadrado mágico, como podemos visualizar em seguida:

3	10	5
8	6	4
7	2	9

3	8	7
10	6	2
5	4	9

9	4	5
2	6	10
7	8	3

9	2	7
4	6	8
5	10	3

5	10	3
4	6	8
9	2	7

5	4	9
10	6	2
3	8	7

7	8	3
2	6	10
9	4	5

7	2	9
8	6	4
3	10	5

Figura 3.13: Soluções dos Quadrados mágicos 3×3 (parte 4), Fonte: Elaborado pelo Autor

Assim, conseguimos definir uma estratégia de preenchimento do quadrado mágico em três passos simples:

Passo 1: O total D, definido como a soma dos três números de cada linha, coluna e diagonal, deverá ser dividido por três, e esse resultado será o valor do elemento da casa central do quadrado mágico e também será o elemento central do conjunto dos elementos que seráo utilizados para preenchimento do quadrado mágico.

Passo 2: Esse passo é condicional. Se o valor do elemento da casa central for par, os elementos das casas do vértices terão que ser ímpares. Se o valor do elemento da casa central for ímpar, os elementos das casas do vértices terão que ser pares. Existem 8 possibilidades para cada caso.

Passo 3: As casas restantes devem ser preenchidas em ordem decrescente de valor. Eles só possuem uma possibilidade.

3.2.1.8 Desenvolvimento da atividade

Primeiramente, faça uma apresentação sobre a parte histórica do quadrado mágico. Em um segundo momento, faça uma explicação das regras do quadrado mágico. Em seguida, peça para que os alunos desenhem no seu papel um quadrado quadriculado 3x3. Ou, se tiver optado pela impressão do material disponível no apêndice, faça a distribuição para os alunos e peça para que preencham todas as casas do quadrado, sendo que a soma de cada linha, coluna e cada diagonal seja 15. Peça que, quando alguém encontrar alguma solução, informe ao professor.

- Se os alunos não encontrarem nenhuma solução em 15 minutos, informe aos alunos que a casa central sempre será preenchida com o número cinco e que existem oito soluções. Se mesmo assim, após 15 minutos não encontrarem nenhuma solução, informe que os números dos vértices são pares.

- Se algum aluno avisar que conseguiu encontrar algum quadrado mágico, certifique-se esse quadro é mágico e coloque no quadro negro para os demais alunos visualizarem. Avise que ainda existem outros sete quadrados a serem descobertos e que o número cinco sempre vai estar na casa central. Se mesmo assim, após 15 minutos não encontrarem mais nenhuma solução, informe que os números dos vértices são pares.

Após serem descobertos todos os oito quadrados mágicos, cuja a soma de cada linha, coluna e diagonal seja 15, peça para que os alunos preencham todas as casas do quadrado, sendo que a soma de cada linha, coluna e diagonal seja 18. Peça para que informem ao professor quando encontrarem alguma solução.

- Se os alunos não encontrarem nenhuma solução em 15 minutos, informe aos alunos que a casa central sempre vai ser preenchida com o número 6 e que existem oito soluções. Se mesmo assim não encontrarem nenhuma solução, informe que os números dos vértices são pares.

- Se algum aluno avisar que conseguiu encontrar algum quadrado mágico, certifique-se de que esse quadro é mágico e coloque-o no quadro negro para os demais alunos visualizarem. Avise que ainda existem outros sete quadrados a serem descobertos e que o número seis sempre vai estar na casa central. Se mesmo assim não encontrarem mais nenhuma solução, informe que os números dos vértices são pares.

Após serem descobertos todos os oito quadrados mágicos, cuja soma de cada linha, coluna e diagonal seja 18, informe que existe um passo a passo para a resolução do quadrado mágico e explique para os alunos a lógica que existe nesse passo a passo, a mesma lógica que foi descrita no item anterior.

Depois de explicar o passo a passo, peça para os alunos encontrarem os quadrados mágicos que a soma seja 21 e 24.

3.2.2 Batalha dos Divisores

Esse jogo foi inspirado no clássico jogo batalha naval e é jogado em uma tabela (NxN), onde cada linha corresponde a uma letra e cada coluna corresponde a um número. Logo, cada casa fica definida por um número e uma letra, como podemos visualizar na figura 4 abaixo

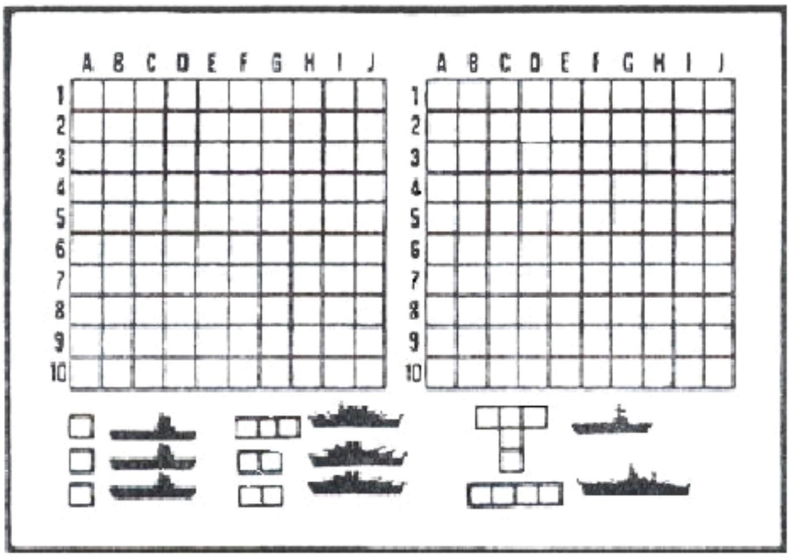


Figura 3.14: Batalha Naval, Fonte: https://goo.gl/images/4sHa6m

No jogo da batalha naval, cada jogador deve dispor sua frota de navios na sua tabela, e o outro jogador não pode ter acesso a tabela do oponente e vice-versa. Após os navios estarem posicionados, cada jogador vai escolhendo uma casa de acordo com a linha que está representada por um número e a coluna que está representado por uma letra, e o outro jogador vai dizer se acertou em algum navio da sua frota ou se acertou no mar (caso em que o oponente não acerta no navio da frota do adversário). O ganhador do jogo é o primeiro jogador a acertar todas as casas onde estão posicionados os navios da frota do outro jogador.

Para o jogo da Batalha dos Divisores, foram efetuadas algumas adaptações. Os navios serão substituídos por figuras geométricas, a tabela será uma tabela 7 x 7, onde as casas serão numeradas de 3 a 51. Cada jogador terá que distribuir na sua tabela as sete figuras geometricas. Como podemos ver nas figuras 3.15 e 3.16:

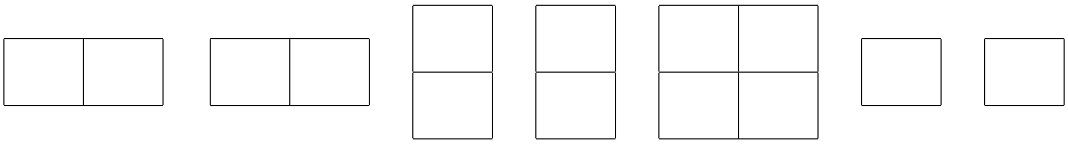


Figura 3.15: Soluções dos Quadrados mágicos 3×3 (parte 2), Fonte: Elaborado pelo Autor

3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51

Figura 3.16: Batalha dos Divisores, Fonte: Próprio autor

O jogador vai escolhendo um número entre 3 e 51 e o outro jogador vai marcando na sua tabela todos os divisores desse número. O ganhador do jogo é o que fizer com que o adversário marque todas as figuras distribuídas na tabela.

3.2.2.1 Regras da Batalha dos Divisores

- Deve ser jogado em duplas;
- Cada jogador terá que dispor sete figuras geométricas na sua tabela;
- Cada jogador terá que marcar todos os divisores do número informado pelo outro jogador na sua tabela;

- Cada jogador terá que informar se acertou em alguma figura geométrica e quais os números das casas acertadas;

- Cada jogador terá que informar qual figura que foi acertada, mas apenas quando todas as casas da figura geométrica forem marcadas;

- Vence o jogo o jogador que fizer com que o outro jogador marque todas as figuras dispostas na sua tabela.

3.2.2.2 Materiais utilizados

- Lápis, régua, borracha e papel, se estiver em uma escola com poucos recursos financeiros.

- Dependendo da disponibilidade dos recursos oferecido pela escola onde está sendo aplicada a atividade, há a opção de entregar a tabela do jogo já impressa. A tabela está disponibilizada no apêndice D deste material, chamada de Tabuleiro da Batalha dos Divisores.

3.2.2.3 Objetivos da Atividade

Todos os objetivos trabalhados nesta atividade estão presentes no Currículo em Movimento dos anos finais da Educação Básica do Distrito Federal, como pode ser visto no apêndice A.

- Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos;

- Raciocinar, expressar-se matematicamente e aplicar métodos matemáticos no que se refere a operações com números inteiros;

- Estimular interesse, curiosidade, espírito de investigação e desenvolvimento da capacidade para resolver situações-problema;

- Compreender e realizar processos de cálculos mentais e escritos com operações no conjunto de números naturais;

- Estimular o pensamento lógico e a capacidade de abstração da linguagem matemática para a solução de problemas.

3.2.2.4 Habilidades Envolvidas

- Divisão e números primos.

3.2.2.5 Anos nos quais a atividade pode ser aplicada

- Esta atividade pode ser aplicada a partir do sétimo ano do ensino fundamental, pois utiliza divisores e números primos. Também pode ser aplicada no ensino médio.

3.2.2.6 Duração da atividade

- Para o desenvolvimento da atividade como proposto no próximo item, serão necessários 50 minutos.

3.2.2.7 Desenvolvimento da atividade

Primeiramente, faça uma explicação das regras da Batalha dos Divisores. Em seguida:

- Se optar pela impressão da tabela, faça a distribuição do material.
- Do contrário, se não houver material impresso, peça para que os alunos desenhem, nos seus papéis ou cadernos, dois quadrados quadriculados 7x7 e enumerem de 3 a 51 da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Depois, peça para que os alunos se organizem em duplas e marquem em uma das tabelas as sete figuras geométricas pré-determinadas. Antes de começar a batalha, deve ser definido quem irá começar. Após a ordem ser definida, os jogadores terão que escolher um número entre 3 e 51 e juntos irão definir os divisores desse número. O jogador que escolheu o número marca os divisores na tabela que não estão dispostas as suas figuras, e o outro jogador marca na tabela que estão dispostas suas figuras. Se algum número pertencer a alguma figura geométrica, o jogador deve informar que o número pertence a alguma figura geométrica, mas só precisa informar qual figura foi acertada quando essa for toda marcada. Isso deve ocorrer até que algum jogador marque todas as figuras geométricas do outro jogador. Depois que todos os alunos tiverem terminado a atividade, questione os estudantes se existe alguma forma de sempre vencer o jogo.

3.2.3 Tabuleiro das Operações

Este jogo foi criado pelo autor do trabalho com intuito de abordar de uma forma mais lúdica as situações-problema envolvendo adição, divisão, equação do primeiro grau, multiplicação e subtração, auxiliando no ensino da matemática.

Para a criação desse jogo, foi levado em conta o baixo custo para a elaboração do material, tendo em vista que o mesmo tabuleiro pode ser utilizado na atividade do Tabuleiro dos Restos e que a aplicação da atividade em sala de aula ser de forma simples.

O jogo tem como base as cores representadas no tabuleiro do jogo, onde cada cor corresponde a um grupo de situações-problema, tais como adição e subtração, divisão, equação do primeiro grau e multiplicação.

Por escolha, essa atividade terá apenas três cores. Porém, pode ser editado e podem ser incluídas mais cores com outros grupos de situações-problema. Essa escolha permitirá que atividade seja trabalhada em todos os anos finais do ensino fundamental. No sexto e sétimo anos, podemos utilizar os grupos de adição e subtração, divisão e multiplicação. No sétimo, oitavo e nono anos, podemos utilizar os grupos de divisão, equação do primeiro grau e multiplicação

3.2.3.1 Regras do Tabuleiro das Operações

- O jogo pode ser disputado por até 6 participantes;
- Todos os jogadores iniciam o jogo na casa INÍCIO
- A primeira rodada é para definir a ordem que os jogadores jogarão cada rodada do Tabuleiro das Operações.
- Em cada rodada, cada participante joga o dado, anda o número de casas sorteados e escolhe um número na tabela referente a cor da sua casa, como por exemplo a cor amarela se refere as situações-problema de adição e subtração ou equação do primeiro grau, a cor verde se refere a situações-problema de divisão e a cor azul se refere a situações-problema de multiplicação, respeitando a ordem pré-definida anteriormente.
- Após a escolha da situação, o jogador efetua a operação pedida. Se acertar, permanece na casa. Se errar, volta para a casa do ínicio da rodada;
- Ganha o primeiro participante que chegar na casa FIM.

3.2.3.2 Materiais utilizados

Um tabuleiro do jogo impresso em papel A4, disponibilizado no apêndice C, como Tabuleiro de Multijogos, um dado com 6 faces, quatro marcadores de posição e três tabelas impressas com pelo menos 50 situações-problema por cada tabela, como exemplificado a seguir:

- Situações-problema envolvendo adição e subtração:

N^o	Situações-problema	Resp.
1	Em que ano meu tio completou 32 anos, se ele fez 48 em 2005?	1989
2	Se tenho 4, arrumei mais 10, ganhei 30 e irei receber 100. Quanto terei?	144
3	Comprei 9 revistas. Já li 5. Quantas revistas ainda tenho para ler?	4
4	Resolva a expressão: $15 - (6 - 3) =$	12
5	Resolva a expressão: $(16 - 7) - (8 - 3) =$	4

- Situações-problema envolvendo divisão:

N^o	Situações-problema	Resp.
1	Quantos grupos de 18 alunos podem ser formados com 666 alunos?	37
2	Quantos bombons poderei distribuir igualmente em 5 caixas se tenho 95 bombons?	19
3	Cada embalagem tem 17 lápis coloridos. Quantas dessas embalagens podem ser feitas se tivermos 221 lápis?	13
4	Em uma divisão, o divisor é iqual a 3 e o dividendo é iqual a 27 qual é o quociente?	9
5	Em uma divisão, o divisor é iqual a 13 e o dividendo é iqual a 39. Qual é o resto?	0

- Situações-problema envolvendo equação do primeiro grau:

N^o	Situações-problema	Resp.
1	Um número somado com sua quarta parte é igual a 80. Qual é esse número?	64
2	Um número mais a sua metade é igual a 15. Qual é esse número?	10
3	O triplo de um número é igual a sua metade mais 10. Qual é esse número?	4
4	A soma de dois números consecutivos é 51. Qual é o maior números?	26
5	A soma de três números consecutivos é igual a 54. Qual é o menor números?	17

- Situações-problema envolvendo multiplicação:

N^o	Situações-problema	Resp.
1	Em uma caixa existem 12 ovos. Quantos ovos existem em 24 caixas?	288
2	Paulo precisa montar 4 bicicletas. De quantas rodas ele precisará ?	8
3	Paulo precisa montar 13 carrinhos. De quantas rodas ele precisará ?	52
4	Em uma multiplicação, os fatores são 13 e 5. Qual o produto?	65
5	Em uma multiplicação, os fatores são 12 e 8. Qual o produto?	96

3.2.3.3 Objetivos da Atividade

Todos os objetivos trabalhados nesta atividade estão presentes no Currículo em Movimento dos anos finais da Educação Básica do Distrito Federal, como pode ser visto no apêndice A.

- Estimular interesse, curiosidade, espírito de investigação e desenvolvimento da capacidade para resolver situações-problema.
- Resolver desafios e problemas que envolvam raciocínio lógico.
- Reconhecer situações que podem ser descritas em linguagem matemática e serem capazes de aplicá-las.
- Resolver desafios e problemas que envolvam raciocínio lógico.

- Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para os problemas propostos.
- Compreender e realizar processos de cálculos mentais e escritos com operações no Conjunto de Números Naturais.

3.2.3.4 Habilidades Envolvidas

- Adição, subtração, divisão, multiplicação e equação do primeiro grau.

3.2.3.5 Anos nos quais a atividade pode ser aplicada

- Essa atividade pode ser aplicada em todos os anos finais do ensino fundamental, pois, como previsto anteriormente, podemos trabalhar com dois grupos diferentes, um grupo com as situações-problema envolvendo adição, subtração, divisão e multiplicação, com aplicação nos sextos anos; e um outro grupo com as situações problemas envolvendo divisão, equação do primeiro grau e multiplicação que seria utilizado para aplicação nos sétimos, oitavos e nonos anos

3.2.3.6 Duração da atividade

- Para o desenvolvimento da atividade como proposto no próximo item, serão necessários 50 minutos.

3.2.3.7 Desenvolvimento da atividade

Primeiramente, faça uma explicação das regras do Tabuleiro das Operações. Em seguida, peça para que os alunos se dividam em grupos de cinco alunos, sendo que quatro alunos vão participar do jogo e o outro aluno será responsável por ler as situações-problema para os participantes e conferir se as respostas dos participantes estão corretas. Após a divisão dos grupos, distribua para cada grupo um kit do Tabuleiro das Operações, contendo um tabuleiro, um dado de 6 faces e as tabelas com as situações-problema. Peça que, antes de iniciar a atividade, seja definida a ordem na qual os quatro participantes irão jogar cada rodada. Em cada rodada, o jogador joga o dado, anda o número de casas sorteados e retira uma carta ou escolhe um número da tabela com as situações-problema. Se o aluno acertar a situação-problema, ele permanece na casa. Se errar, ele volta o número de casas pré-determinado na regra. Isso deve se repetir até que algum jogador chegue na casa FIM.

3.2.4 Tabuleiro do Resto

Esse jogo foi inspirado na atividade do trilho dos restos do trabalho de Francisco Guimarães de Freitas, intitulado "O lúdico aplicado às operações fundamentais". Foram feitas algumas adaptações, tais como o tabuleiro, que será o mesmo utilizado na atividade do Tabuleiro das Operações, além de aumentar os possíveis divisores, alterando o dado de até 6 possíveis divisores para até 8 divisores, utilizando os dados de 4, 6 ou 8 faces, os mesmos dados utilizados na atividade do Tabuleiro da Sorte.

3.2.4.1 Regras do Tabuleiro do Resto

- Todos os jogadores iniciam o jogo na casa INÍCIO;
- O jogo pode ser disputado por até 6 participantes;
- A primeira rodada é para definir a ordem na qual os jogadores jogarão cada rodada do Tabuleiro do Resto.
- Em cada rodada, cada participante joga o dado, e o número de casas que o jogador anda é o resto da divisão do número que está na casa pelo número que o jogador tirou no dado.
- Se errar a divisão, o jogador volta determinado número de casas, a saber:
- Se tiver tirado 1, 2 ou 3, volta 1 casa.
- Se tiver tirado 4, 5 ou 6, volta 2 casas.
- Ganha o primeiro participante que chegar na casa FIM.
- O jogo pode ser jogado com dados de 4, 6, ou 8 faces.

3.2.4.2 Materiais utilizados

- Um tabuleiro do jogo impresso em papel $A4$, disponibilizada no apêndice como Tabuleiro de Multijogos, um dado com 4, 6 ou 8 faces, seis marcadores de posição.

3.2.4.3 Objetivos da Atividade

Todos os objetivos trabalhados nesta atividade, estão presentes no Currículo em Movimento dos anos finais da Educação Básica do Distrito Federal, como pode ser visto no apêndice A.

- Estimular interesse, curiosidade, espírito de investigação e desenvolvimento da capacidade para resolver situações-problema.
- Resolver desafios e problemas que envolvam raciocínio lógico.
- Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos.
- Compreender e realizar processos de cálculos mentais e escritos com operações no conjunto dos números naturais.

3.2.4.4 Habilidades Envolvidas

- Divisão e multiplicação.

3.2.4.5 Anos nos quais a atividade pode ser aplicada

- Essa atividade pode ser aplicada em todos os anos finais do ensino fundamental, pois utiliza apenas a divisão.

3.2.4.6 Duração da atividade

- Para o desenvolvimento da atividade como proposto no próximo item, serão necessários 50 minutos.

3.2.4.7 Desenvolvimento da atividade

Primeiramente, faça uma explicação das regras do Tabuleiro dos Resto. Em seguida, peça para que os alunos se dividam em grupos de cinco alunos. Após a divisão dos grupos, distribua para cada grupo um kit do Tabuleiro dos Resto, contendo um tabuleiro, um dado de 4, 6 ou 8 faces e seis marcadores de posição. Peça para que, antes de iniciar o jogo, seja definida a ordem na qual os cinco participantes irão jogar cada rodada. Em cada rodada, o jogador joga o dado, efetua a divisão do número que está na casa que se encontra seu marcador de posição pelo valor sorteado no dado. Se o aluno acertar o resto da divisão, ele anda o número de casas referente ao valor do resto. Se ele errar, deve voltar o número de casas pré-determinado nas regras do jogo. Isso deve se repetir até que algum jogador chegue na casa FIM.

3.2.5 Jogo da Sorte

Este jogo foi criado pelo autor do trabalho com intuito de abordar de uma forma mais lúdica as situações-problema envolvendo MDC, MMC e o Algoritmo de Euclides, três habilidades que dificilmente são incluídas em algum tipo de jogo, para assim auxiliar o ensino da matemática.

Para a criação deste jogo, foi levado em conta o baixo custo para a elaboração do material e a aplicação da atividade em sala de aula ser de forma simples. O jogo tem como base os comandos descritos em cada casa onde o jogador irá substituir D pelo valor sorteado no dado e resolver o comando pedido. Os comandos previstos no tabuleiro, podem ser editados por qualquer outro comando, dependendo do ano que está sendo aplicada a atividade.

3.2.5.1 Regras do Jogo da Sorte

- O jogo pode ser disputado por até 6 participantes;
- Todos os jogadores iniciam o jogo na casa INÍCIO;
- A primeira rodada é para definir a ordem na qual os jogadores jogarão cada rodada do Jogo da Sorte.
- Em cada rodada, cada participante joga o dado, o número sorteado será assumido por D, e o jogador terá que responder ao comando.
- Se errar o comando, o marcador do jogador permanece na casa. Caso acerte, ele anda seu marcador o número de casas referentes ao resultado do comando.
- Quando o jogador estiver na casa "$CartaEspecial$", terá que escolher um número na tabela de situações-problema envolvendo equações do primeiro grau. Se acertar, joga o dado e anda o numero sorteado no dado.
- Ganha o primeiro participante a chegar na casa FIM.
- O jogo pode ser jogado com dados de 4, 6 ou 8 faces.

3.2.5.2 Materiais utilizados

- Um tabuleiro do jogo impresso em papel $A4$, disponibilizada no apêndice como Tabuleiro do Jogo da Sorte, um dado com 4, 6, ou 8 faces, seis marcadores de posição e a tabela utilizada no Jogo das Operações com as situações-problema envolvendo equações do primeiro grau.

3.2.5.3 Objetivos da Atividade

Todos os objetivos trabalhados nessa atividade estão presentes no Currículo em Movimento dos anos finais da Educação Básica do Distrito Federal, como pode ser visto no apêndice A.

- Estimular interesse, curiosidade, espírito de investigação e desenvolvimento da capacidade para resolver situações-problema.
- Resolver desafios e problemas que envolvam raciocínio lógico.
- Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos.
- Compreender e realizar processos de cálculos mentais e escritos com operações no conjunto dos números naturais;
- Estimular o pensamento lógico.

3.2.5.4 Habilidades Envolvidas

- Divisão, multiplicação, fatoração, MMC, MDC e Algoritmo de Euclides.

3.2.5.5 Anos nos quais a atividade pode ser aplicada

- Essa atividade pode ser aplicada a partir do oitavo ano do ensino fundamental, pois utiliza MMC, MDC e Algoritmo de Euclides.

3.2.5.6 Duração da atividade

- Para o desenvolvimento da atividade como proposto no próximo item, serão necessários 100 minutos.

3.2.5.7 Desenvolvimento da atividade

Primeiramente, faça uma revisão sobre MMC, MDC e o Algoritmo de Euclides. Em seguida, faça uma explicação das regras do Jogo da Sorte. Após, divida a turma em grupos de até 6 pessoas e entregue um kit do jogo da sorte para cada grupo, contendo um tabuleiro do jogo impresso em papel $A4$, um dado com 4, 6, ou 8 faces, uma tabela utilizada no Jogo das Operações com as situações-problema envolvendo equações do primeiro grau e até seis marcadores de posição.

Posteriormente, peça que, antes de iniciar a atividade, seja definida a ordem na qual os participantes irão jogar. Em cada rodada o jogador joga o dado, o número sorteado será assumido por D, e o jogador terá que responder ao comando da casa que está. Se o aluno responder corretamente, anda X casas, onde X é o número obtido na resolução do comando descrito em cada casa. Se errar, permanece na casa . Isso deve se repetir até que algum jogador chegue na casa FIM.

CAPÍTULO 4

ESTUDO DE CASO

Neste capítulo será descrito como foi realizada a pesquisa, abordando os procedimentos e os meios de coleta de dados, o cenário do estudo, os sujeitos do estudo e os resultados do estudo.

Como esta pesquisa foi realizada com o objetivo de propor jogos matemáticos, envolvendo operações fundamentais, que fossem motivantes e que despertassem o interesse do aluno na matemática, e baseados nos pressupostos apresentados, a pesquisa apresentada pode ser classificada como de caráter qualitativo. Segundo D'Ambrosio (2011), tem como essência o foco sobre o indivíduo, considerando todo seu significado, complexidade, bem como sua inserção e interação com o meio.

O estudo de caso terá um caráter de pesquisa-ação. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), durante a pesquisa-ação:

> O pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas, sobretudo, para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes. (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 112).

Durante o estudo de caso, o pesquisador foi introduzido no ambiente a ser estudado para uma pesquisa de campo e aplicação dos jogos, de modo a contribuir para a construção do conhecimento, possibilitando uma maior liberdade de ação dos alunos participantes.

4.1 Cenário do estudo de caso

O jogo foi aplicado no Núcleo de Ensino (NUEN) da Unidade de Internação Provisória de São Sebastião (UIPSS), vinculada a Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), da cidade de Brasília-DF. Neste núcleo de ensino, são atendidos adolescentes apenas do sexo masculino, oriundo do sistema socioeducativo do Distrito Federal, cumprindo medida socioeducativa de internação provisória.

A UIPSS possui, atualmente, estrutura física e de recursos humanos para atendimento médio de 180 adolescentes, distribuídos em sete módulos, de acordo com idade, número de internações, porte físico e manutenção da integridade física. Os módulos 1 e 2 possuem 15 alojamentos, os módulos 3, 4 e 5 possuem 20 alojamentos, o módulo 6 (Proteção da Integridade Física - PIF) possui 4 alojamentos e o Módulo Disciplinar (MD) possui 10 alojamentos.

O NUEN funciona dentro da UIPSS e conta com 26 professores, 20 salas de aula, biblioteca, espaço para laboratórios de física e química, anfiteatro, cantina, quadra poliesportiva coberta, horta orgânica, entre outros, em uma área de $3718m^2$ e fica localizado na Rua 17, Lote 100, Área Especial, no Bairro São Francisco, São Sebastião-DF.

4.2 Procedimentos e meios para coleta de dados

A pesquisa começou em novembro de 2017, quando aconteceram os primeiros encontros com o orientador para definir os jogos que seriam propostos, levando em conta as operações fundamentais. No primeiro bimestre de 2018 foram avaliados todos os jogos dessa dissertação. No segundo bimestre, foi elaborada a parte teórica deste trabalho. Durante esse período, foram realizados alguns contatos com os professores regentes nas escolas onde se pretendia aplicar os jogos propostos, até então desconhecidos pelos professores.

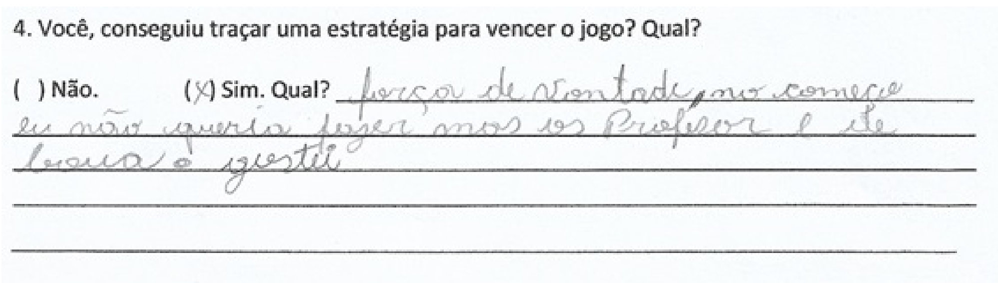
Depois de alguns contatos com o Professor Thiago Henrique Santos Torres e com a liberação e apoio por parte da Supervisora do NUEN, a professora Sara Araújo, e do Diretor do CED São Francisco, o Professor Carlos Alberto Menna Barreto Franco Neto, foram definidos os dias 14, 15 e 18 de maio para realização da coleta de dados e da aplicação da atividade, que foi realizada junto com o professor Antonio Oliveira Filho, responsável pela turmas onde foi aplicado o jogo.

Tendo em vista a especificidade da escola, foi aplicado somente o jogo do quadrado mágico, por se tratar da operação matemática de que todos os alunos teriam conhecimento. A aplicação do jogo teve a duração de 100 minutos para cada grupo. Foram 4 grupos: o grupo do MD, com 5 alunos cada; o do PIF, com 6 alunos; e o M3, com dois grupos de 11 alunos cada. No total, foram 33 estudantes.

Podemos destacar que mesmo a atividade sendo aplicada para um número pequeno de estudantes, foi muito aproveitada pelos alunos, pois as turmas eram pequenas, possibilitando uma atenção mais individualizada aos estudantes.

O desenvolvimento da atividade foi realizado de acordo com o que tinha sido planejado na proposta da atividade, com dois procedimentos que foram adotados para a coleta de dados da pesquisa, um antes de começar o jogo para uma apresentação pessoal e explanação dos motivos da pesquisa e uns 15 minutos antes do término de cada período para aplicação de um questionário, sem interferência do pesquisador, disponível para consulta no Apêndice, para que cada aluno, anonimamente, fizesse a avaliação da atividade.

Um momento interessante foi registrado na sala 2 do módulo 3. Na ocasião, os alunos recepcionaram-nos, pesquisador e professor regente. Após a explicação da atividade, um aluno argumentou que não gostaria de participar. O seu pedido foi acatado, e ele ficou na sala observando a atividade. Porém, após 10 minutos de a atividade começar, ele percebeu que a atividade era interessante e concordou em participar. Ele acabou se destacando e conseguindo preencher todos os quadrados mágicos propostos na atividade. Podemos ver descrita por ele sua estratégia para vencer o jogo:


4. Você, conseguiu traçar uma estratégia para vencer o jogo? Qual?

( ) Não. (X) Sim. Qual? força de vontade, no começe eu não queria fazer mas os Profesor e de boua e gostei

"Força de vontade, no começo eu não queria fazer mas, os professores eram de boa e eu gostei."

Figura 4.1: Resposta do Questionário 1

4.3 Sujeitos do estudo de caso

O público específico do estudo são estudantes que estão cumprindo medida socioeducativa e assistidos por uma escola que funciona dentro de um espaço destinado à privação de liberdade. No UIPSS, o período de permanência é de até 45 dias, nos quais eles estão sob tutela do Estado, aguardando decisão judicial em virtude de terem cometido atos infracionais.

A realidade da grande maioria dos adolescentes do sistema socioeducativo é marcada por altos índices de reprovação e abandono escolar. Isso foi percebido durante a aplicação do jogo. Mesmo assim, os estudantes reconhecem que, através da educação, podem encontrar suporte necessário para superar dificuldades e construir um futuro melhor.

Os adolescentes que participaram eram exclusivamente dos módulos do PIF, MD e M3. O módulo do PIF é destinado a adolescentes que precisam ser separados dos demais para que a sua integridade física seja assegurada. O módulo MD é destinado a adolescentes internados que respondem por medida disciplinar, por uma irregularidade cometida dentro do UIPSS. O M3 é outro módulo, sem definições especiais.

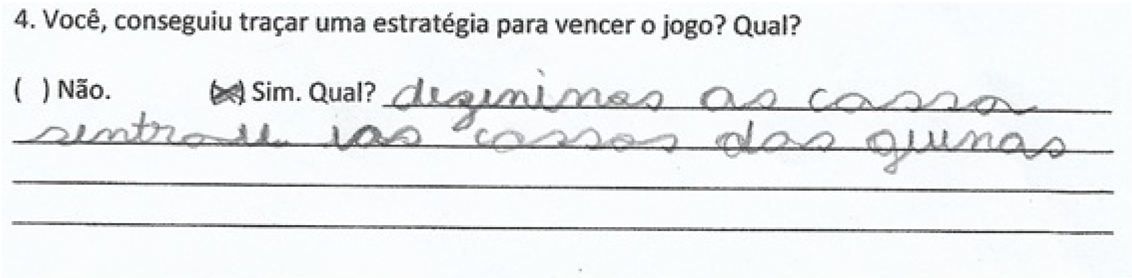
4.4 Resultados do estudo de caso

A análise dos dados foi muito complexa, evidenciando-se a necessidade de implementar atividades complementares e estudos com maior profundidade em virtude dos alunos estarem com restrição de liberdade. Em razão de os módulos serem formados por turmas multisseriadas, muitos alunos estão evadidos da escola há certo tempo e as turmas apresentam elevada heterogeneidade em diversos aspectos.

4.4.1 Questionário de avaliação do estudo de caso

Com relação a análise das respostas do questionário aplicado para avaliação do desenvolvimento da atividade do estudo de caso, foram respondidos 33 questionários. A respeito da análise das perguntas do questionário, temos que, em linhas gerais, no item 2, todos alunos identificaram que o jogo envolve a subtração e a adição, com alguns estudantes identificando também a multiplicação. Quando questionados se a atividade tinha os motivado, apenas 1 aluno afirmou que a atividade não o havia motivado. Dos outros 32 restantes, somente 9 se sentiram motivado em partes.

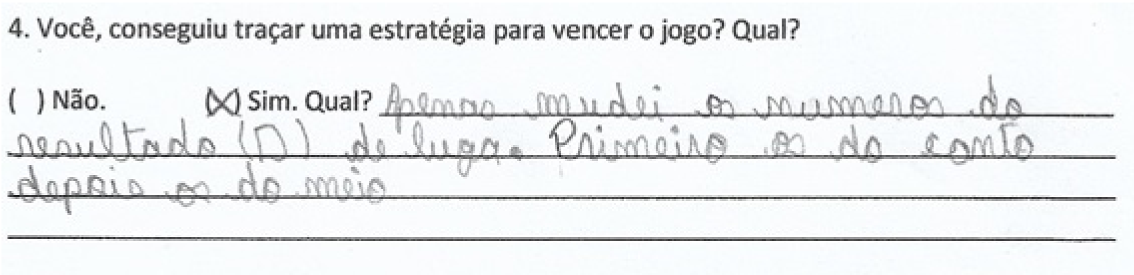
Com relação a estratégia traçada para resolução do jogo, apenas 5 alunos afirmaram não ter utilizado uma estratégia, ou seja, tentaram preencher o quadrado ao acaso. Os 28 demais marcaram que conseguiram traçar uma estratégia, mas poucos quiseram descrever a sua estratégia. A seguir temos algumas estratégias descritas pelos alunos:


4. Você, conseguiu traçar uma estratégia para vencer o jogo? Qual?

( ) Não. (X) Sim. Qual? dezinimos as casa sentra e nas cassas das quinas

“Definimos a casa central e depois as casas das quinas.”

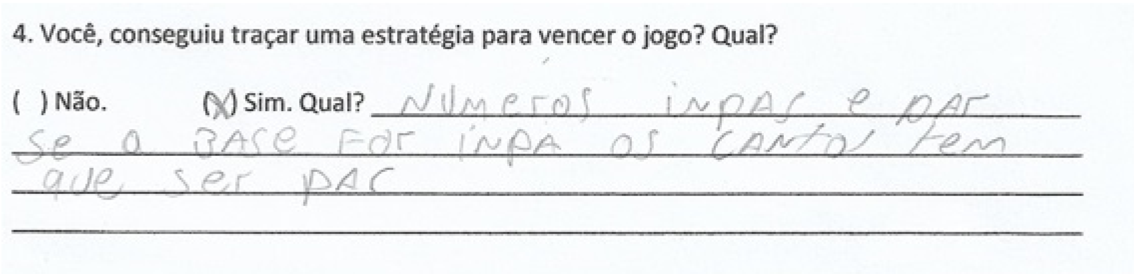
Figura 4.2: Resposta do aluno 1 para a questão 4


4. Você, conseguiu traçar uma estratégia para vencer o jogo? Qual?

( ) Não. (X) Sim. Qual? Apenas mudei os numeros do resultado (D) de luga. Primeiro os do canto depois os do meio

“Apenas mudei os números do resultado de lugar. Primeiro as casas dos cantos e depois a casa do meio.”

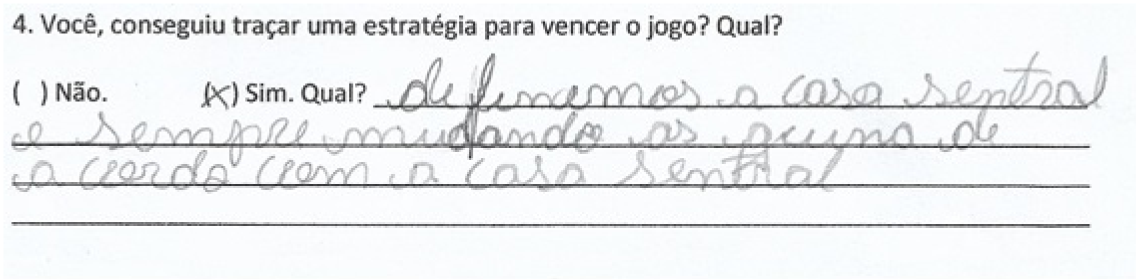
Figura 4.3: Resposta do aluno 2 para a questão 4


4. Você, conseguiu traçar uma estratégia para vencer o jogo? Qual?

( ) Não. (X) Sim. Qual? NUMEROS INPAR E PAR SE A BASE FOR INPA OS CANTOS TEM QUE SER PAR

“Números ímpares e pares, se a casa central for ímpar, as casas dos cantos tem que ser pares.”

Figura 4.4: Resposta do aluno 3 para a questão 4



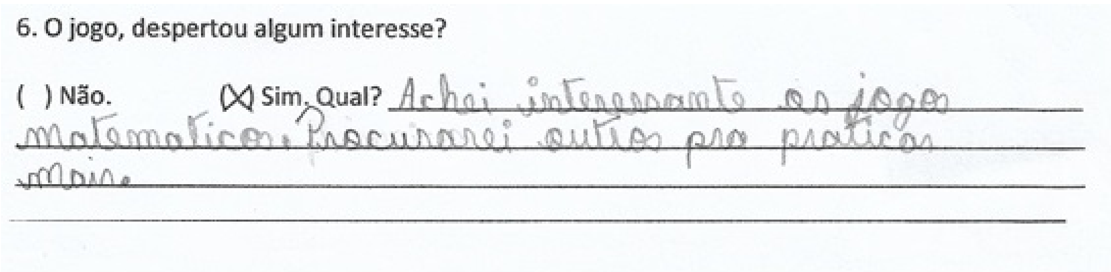
4. Você, conseguiu traçar uma estratégia para vencer o jogo? Qual?

( ) Não. (X) Sim. Qual? definemos a casa sentral e sempre mudando as quina de acordo com a casa sentral

"Definimos a casa central e mudamos as casas das quinas, de acordo com a casa central."

Figura 4.5: Resposta do aluno 4 para a questão 4

Quando questionados se o jogo contribuiu para entender melhor alguma operação matemática, em linhas gerais, todos alunos identificaram que o jogo ajudou a entender melhor as operações de subtração e a adição. Sobre os interesses que o jogo despertou, 24 alunos afirmaram que o jogo despertou algum interesse, mas poucos quiseram descrever o interesse que a atividade despertou. A seguir, temos algumas descrições dos alunos:

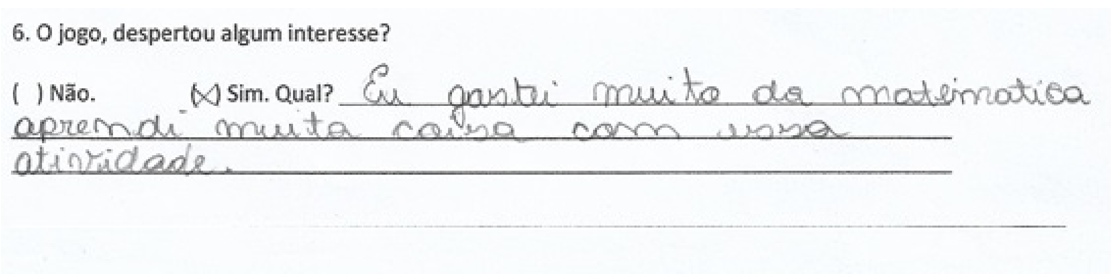


6. O jogo, despertou algum interesse?

( ) Não. (X) Sim. Qual? Achei interessante os jogos matematicos. Procurarei outros pro praticar mais.

"Achei interresante os jogos matemáticos. Procurarei outros para praticar mais."

Figura 4.6: Resposta do aluno 1 para a questão 6

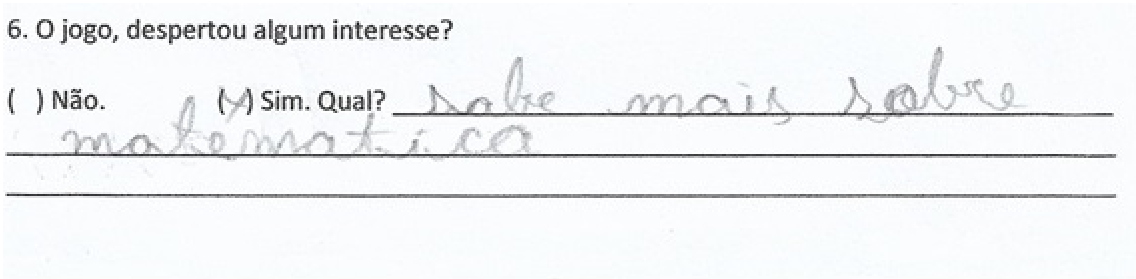


6. O jogo, despertou algum interesse?

( ) Não. (X) Sim. Qual? Eu gostei muito da matematica aprendi muita coisa com vossa atividade.

"Eu gostei muito da matemática, aprendi muitas coisas com esta atividade."

Figura 4.7: Resposta do aluno 2 para a questão 6

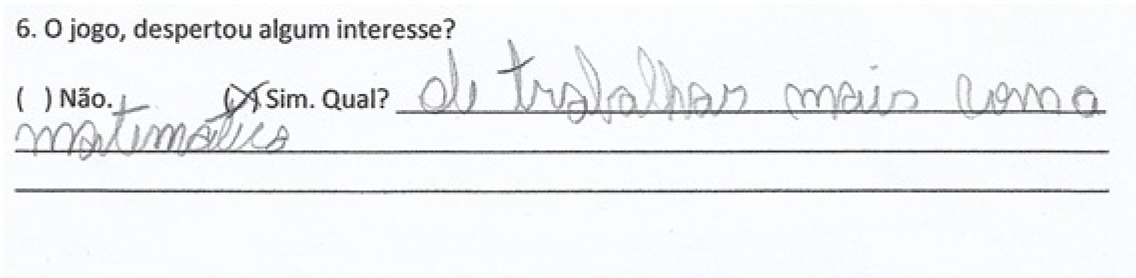


6. O jogo, despertou algum interesse?

( ) Não. (X) Sim. Qual? sabe mais sabre matematica

"Saber mais sobre matemática."

Figura 4.8: Resposta do aluno 3 para a questão 6



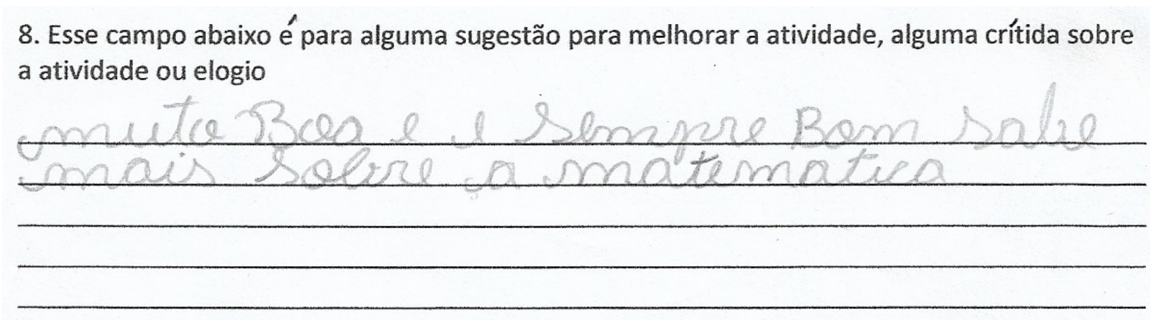
6. O jogo, despertou algum interesse?

( ) Não. (X) Sim. Qual? de trabalhar mais como matematica

"De trabalhar mais com matemática."

Figura 4.9: Resposta do aluno 4 para a questão 6

Sobre a avaliação da atividade, 9 alunos avaliaram a atividade como boa, 16 alunos avaliaram a atividade como excelente e outros 9 alunos avaliaram como muito boa. O último item era um espaço para o aluno deixar alguma sugestão ou criticar a atividade. O que me surpreendeu foi a quantidade de elogios que a atividade recebeu. Seguem alguns comentários:

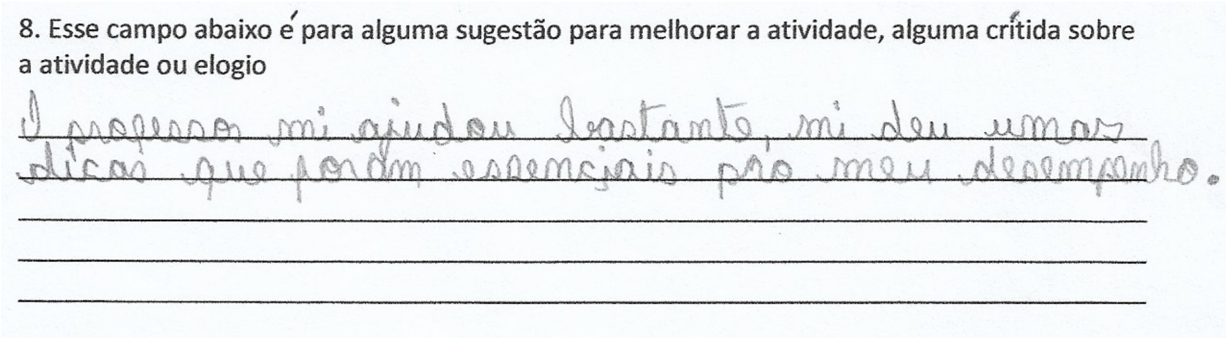


8. Esse campo abaixo é para alguma sugestão para melhorar a atividade, alguma crítida sobre a atividade ou elogio

muito Boa e é Sempre Bom sabe mais Sobre a matematica

"Muito boa a atividade. É sempre bom saber mais sobre matemática."

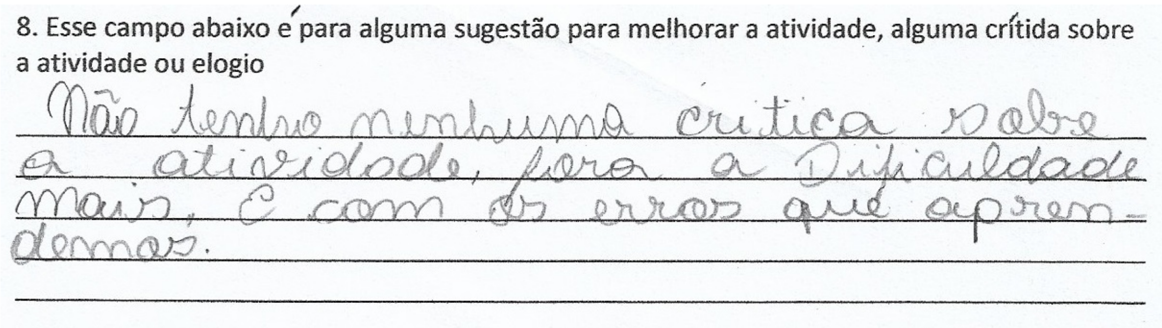
Figura 4.10: Resposta do aluno 1 para a questão 8


8. Esse campo abaixo é para alguma sugestão para melhorar a atividade, alguma crítida sobre a atividade ou elogio

O professor mi ajudou bastante, mi deu umas dicas que forão essenciais pro meu desempenho.

"O professor me ajudou bastante, me deu umas dicas que foram essenciais para o meu desempenho."

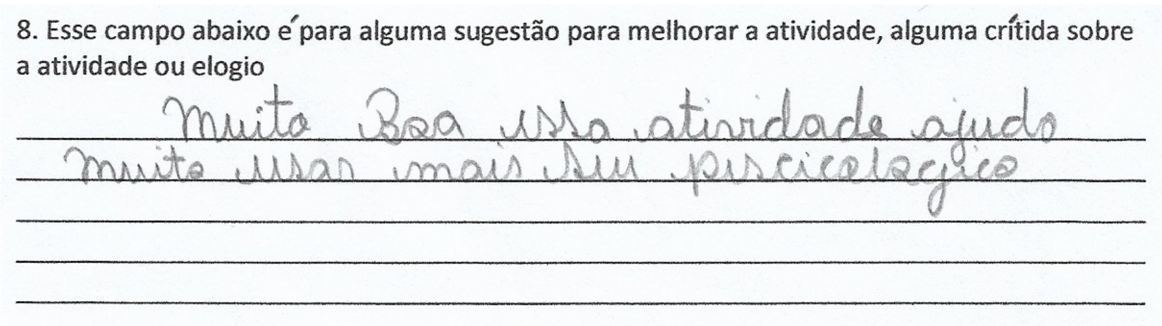
Figura 4.11: Resposta do aluno 2 para a questão 8


8. Esse campo abaixo é para alguma sugestão para melhorar a atividade, alguma crítida sobre a atividade ou elogio

Não tenho nenhuma critica sobre a atividade, fora a Dificuldade Mais, E com os erros que aprendemos.

"Não tenho nenhuma crítica sobre a atividade, fora a dificuldade. Mas é com os erros que aprendemos."

Figura 4.12: Resposta do aluno 3 para a questão 8


8. Esse campo abaixo é para alguma sugestão para melhorar a atividade, alguma crítida sobre a atividade ou elogio

Muito Boa essa atividade ajudo muito usar mais seu psicologico

"Muito boa esta atividade. Ajudou muito a usar mais o seu psicológico ."

Figura 4.13: Resposta do aluno 4 para a questão 8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como vimos, a utilização de jogos como ferramenta de ensino está presente nos Parâmetros Currículares Nacionais e em diferentes componentes do Currículo em Movimento da Educação Básica do Distrito Federal. Logo, a escolha do tema para dissertação de enfatizar a importância da utilização dos jogos como ferramenta de ensino da Matemática é coerente e relevante.

O aprendizado das operações de adição, divisão, subtração, multiplicação, do MDC e do MMC é feito através de algoritmos que facilitem a sua resolução. Todavia, frequentemente deixamos de relacionar essas operações com jogos ou atividades lúdicas que podem motivar os alunos e despertar o interesse na matemática. Deste modo, a compreensão do aluno acerca do assunto fica prejudicada, visto que a simples mecanização dos algoritmos não é eficiente no processo de aprendizagem.

Sabemos que a utilização dos jogos em sala de aula não é uma tarefa fácil. Assim, é muito mais cômodo para o professor continuar somente com as aulas expositivas, nas quais o aluno é um mero agente passivo no processo ensino-aprendizagem. A utilização dos jogos não deve substituir as aulas expositivas, e sim ser utilizada de forma conjunta com as aulas expositivas, possibilitando que os alunos desenvolvam o conteúdo trabalhado, fazendo com que o processo aprendizado seja motivador para o aluno.

No que se refere à utilização de jogos no ensino de matemática, este trabalho propõe-se a analisar os estímulos que os jogos podem proporcionar aos alunos. A amostra do estudo de caso é heterogênea em diversos aspectos: sociais, culturais e acadêmicos.

Um dos objetivos propostos através da atividade do quadrado mágico seria que os alunos traçassem uma estratégia de preenchimento dos quadrados, fato que foi alcançado por mais da metade dos alunos. Das observações e análises dos resultados, podemos perceber que a atividade despertou o interesse dos alunos na matemática, ajudou na compreensão e nos processos de cálculo mental, além de estimular o raciocínio lógico, todos objetivos propostos pela atividade. Pela análise dos resultados e das observações durante a atividade, podemos notar que o jogo do quadrado mágico foi motivante para quase todos os alunos, um dos objetivos desse trabalho.

Esta dissertação, além de propor jogos para serem trabalhados em sala de aula, contribui também para os estudos e formação continuada dos professores de matemática que atuam nos anos finais do ensino fundamental. A linguagem matemática formal utilizada para o aprofundamento do professor no tema não deve ser usada em sala de aula com os estudantes. O responsável pela adequação da linguagem formal para uma linguagem mais simples é o professor, de forma que o estudante também possa entender os conceitos matemáticos envolvidos em cada jogo.

Considera-se um papel relevante do professor a dedicação em pesquisar novos jogos ou atividades, planejar e orientar seus alunos para que, assim, os jogos possam ser instrumentos pedagógicos. Somente através do aprimoramento dos profissionais da educação, vamos melhorar o processo de ensino e somente através dessa prática será possível que se dissemine cada vez mais a utilização dos jogos no processo de ensino, não apenas como ferramentas para o lazer e a diversão.

A dissertação têm como proposta a utilização de jogos matemáticos com ferramenta de ensino, mais especificadamente adição, divisão, multiplicação, Máximo Divisor Comum, Mínimo Multiplo Comum, divisibilidade e números primos. Esta proposta é destinada a todos os alunos do Ensino Fundamental ao Ensino Médio. Logo, as atividades não estão relacionadas somente a certos segmentos do Ensino Básico, como o sistema socioeducativo, mas a todos.

Podemos aplicar o jogo do Quadrado Mágico e o Tabuleiro dos Restos em qualquer ano do Ensino Fundamental ou Médio, já o jogo Batalha dos Divisores pode ser aplicado a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental e o Tabuleiro da Sorte pode ser aplicado nas turmas a partir do oitavo ano.

O jogo tabuleiro das operações é o jogo que pode atender o maior números de operações, pois ele pode ser alterado para incluir algum novo grupo de operações, tais como equação do segundo grau, probabilidade, progressão geométrica, progressão aritmética, entre outras.

Espera-se que este trabalho tenha contribuído para divulgação dos jogos e para o aprimoramento do profissional de educação, além de estimular alunos e professores a buscar novos jogos e, com isso, se desenvolver e se capacitar cada vez mais em suas habilidades matemáticas.

Bibliografia

[1] BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília, MEC, 1998.

[2] BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. São Paulo, Edgard Blucher, 1996.

[3] CARVALHO e SILVA, Jaime. **A História dos Quadrados Mágicos**, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra, Departamento de Matemática, 2007, Coimbra

[4] CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. São Paulo, Livraria da Física, 2008.

[5] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas, Papirus, 22º edição, 2011.

[6] DISTRITO FEDERAL, Secretaria de Estado de Educação. **Currículo em Movimento da Secretaria de Estado de Educação do DF: Ensino Fundamental - Anos Finais**. Brasília, DF, 2014.

[7] FERREIRA, Aurélio B. H. **Miniaurélio: o minidicionário da Língua Portuguesa**. Curitiba, Positivo, 6º edição, 2008.

[8] FERREIRA, Jamil. **A construção dos Números**. Rio de Janeiro, SBM, Textos Universitúrios, 2º edição, 2001.

[9] FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.**. Campinas: Autores Associados, 2006.

[10] FREITAS, Francisco G. **O lúdico aplicado às operações fundamentais**. Brasília, Departamento de matemática da Universidade de Brasília, Dissertação de Mestrado, 2017.

[11] GRANDO, Regina C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Tese de Doutorado, 2000.

[12] GRANDO, Regina C. **O jogo suas possibilidades metodológicas no processo de ensino-aprendizagem da matemática**. Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Dissertação de Graduação, 1995.

[13] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro, SBM, 2014.

[14] HEFEZ, Abramo. **Curso de Álgebra, volume 1**. Rio de Janeiro, IMPA, 2002.

[15] HUIZINGA, Johan. **Homo ludens: o jogo como elemento da cultura.**. São Paulo, Perspectiva; Edusp, Tradução João Paulo Monteiro, 1971.

[16] KISHIMOTO, T. M. **O Jogo e a Educação Infantil**. São Paulo, Pneira, 1994.

[17] LIMA, Elon L. **Número e funções reais**. Rio de Janeiro, SBM, 1º edição, 2013.

[18] LIMA, Elon L. **A Matemática de Ensino Médio, volume 1**, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[19] MATOS, Helder C.; BASTOS, Raimundo; SEIMETZ, Rui. **Desenvolvendo Alguns Conceitos Matemáticos por Meio de Jogos.**, Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. In: 4o Colóquio da Região Centro-Oeste, 2015.

[20] MATOS, Helder C. . **O jogo dos quadrinhos**. In: Revista do Professor de Matemática - RPM. Vol. 5, 1984.

[21] MILIES, C. P. e COELHO, S. P. **Números: Uma introdução à Matemática**, São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 3º edição, 2006

[22] NEGRINE, Airton. **Aprendizagem e desenvolvimento infantil**. Porto Alegre, Propil, 1994.

[23] PIAGET, Jean e INHELDER, B. **Memory and intelligence.**. Nova York, Basic Books, 1973.

[24] TEIXEIRA, Ralph Costa. **Jogos Combinatórios e Números Surreais**, Departamento de Matemática Aplicada, UFF, In: 2o Colóquio da Região Sudeste, 2013, São Carlos/SP.

[25] VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente**. São Paulo, Martins Fontes, Tradução de José Cipolla Neto, 1994.

APÊNDICE A

Currículo em Movimento Anos Finais do Ensino Fundamental

EIXOS TRANSVERSAIS: EDUCAÇÃO PARA A DIVERSIDADE / CIDADANIA E EDUCAÇÃO EM E PARA OS DIREITOS HUMANOS / EDUCAÇÃO PARA A SUSTENTABILIDADE	
EIXOS INTEGRADORES: LUDICIDADE E LETRAMENTOS MATEMÁTICA - 6º ANO	
OBJETIVOS	**CONTEÚDO**
•Identificar conhecimentos matemáticos como meios de compreensão e conversão do mundo. •Estimular interesse, curiosidade, espírito de investigação e desenvolvimento da capacidade para resolver situações-problema. •Estabelecer relações entre temas matemáticos com diferentes campos e conhecimentos de outras áreas curriculares. •Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos. •Identificar aspectos consensuais, respeitando todas as diversidades, bem como todos os contextos sociais abordados por meio da Etnomatemática. •Reconhecer situações que podem ser descritas em linguagem matemática e serem capazes de aplicá-las. •Utilizar a Matemática Financeira como ferramenta para tomada de decisões no cotidiano. •Resolver desafios e problemas que envolvam raciocínio lógico. •Compreender e realizar processos de cálculos mentais e escritos com operações no Conjunto de Números Naturais.	**Sistema de numeração** •Origem e evolução dos números: abordagem histórica de sistemas de numeração •Base decimal •Noções de conjuntos e símbolos matemáticos **Números naturais e operações** •Estruturação do raciocínio lógico e sequencial •Representação geométrica: posicionamento da reta •Situações-problema e expressões numéricas envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada •Números primos e compostos •Múltiplos e divisores •Critérios de divisibilidade de números naturais •Mínimo múltiplo comum com ênfase em situações-problema •Máximo divisor comum com ênfase em situações-problema

OBJETIVOS	CONTEÚDO
•Conceituar frações e aplicá-las na resolução de problemas relacionando-as com números decimais e porcentagem. •Conhecer, compreender e aplicar conceitos básicos de geometria e estatística.	**Frações** •Definição, identificação e representação algébrica e geométrica •Operações / situações-problema **Números decimais** •Definição, identificação e representação algébrica e geométrica •Sistema Monetário •Operações / situações-problema •Noções de porcentagem **Unidades de medidas convencionais e não convencionais, principais transformações e instrumentos de medidas** •Comprimento •Massa •Capacidade •Tempo **Introdução à Geometria** •Ponto, reta e plano

OBJETIVOS	CONTEÚDO
•Conceituar frações e aplicá-las na resolução de problemas relacionando-as com números decimais e porcentagem. •Conhecer, compreender e aplicar conceitos básicos de geometria e estatística.	•Ângulos •Posições relativas entre as retas •Figuras planas: conceitos, representação e classificação •Triângulos e quadriláteros •Circunferência e círculo •Raio e diâmetro •Perímetro **Noções de Estatística** •Identificação e classificação de gráficos e tabelas

Fonte: Distrito Federal, 2014b, p.88-90

EIXOS TRANSVERSAIS: EDUCAÇÃO PARA A DIVERSIDADE / CIDADANIA E EDUCAÇÃO EM E PARA OS DIREITOS HUMANOS / EDUCAÇÃO PARA A SUSTENTABILIDADE	
EIXOS INTEGRADORES: LUDICIDADE E LETRAMENTOS MATEMÁTICA - 7º ANO	
OBJETIVOS	**CONTEÚDO**
•Estabelecer relações entre temas matemáticos com diferentes campos e conhecimentos de outras áreas curriculares. •Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos. •Identificar aspectos consensuais, respeitando todas as diversidades, bem como todos os contextos sociais abordados por meio da Etnomatemática. •Reconhecer situações que podem ser descritas em linguagem matemática e capazes de aplicá-las. •Utilizar Matemática Financeira como ferramenta no cotidiano para tomada de decisões. •Resolver desafios e problemas que envolvam raciocínio lógico. •Raciocinar, expressar-se matematicamente e aplicar métodos matemáticos no que se refere operações com números inteiros, números racionais, equações e sistemas de equações com representação no plano cartesiano, proporcionalidade, conhecimentos geométricos e aritméticos, noções de estatística e matemática financeira, bem como suas aplicações na prática. •Estimular o pensamento lógico e a capacidade de abstração	**Números inteiros e operações** •Origem e estruturação de números inteiros •Representação por conjunto, algébrica e geométrica •Números opostos, módulo, comparações e simetria •Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada •Expressões numéricas e situações-problema **Números racionais e operações** •Identificação, conceito e representação geométrica •Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação •Expressões numéricas e situações-problema. **Equação de Primeiro grau** •Operações, expressões e sentenças matemáticas •Conjunto universo e conjunto verdade •Resolução de situações-problema •Inequações •Equações de primeiro grau com duas variáveis •Sistema de equações de primeiro grau com duas variáveis

OBJETIVOS	CONTEÚDO
da linguagem matemática para a solução de problemas do cotidiano. •Compreender o significado de medidas, por meio de situações-problema que expressam seu uso no contexto social e em outras áreas do conhecimento, possibilitando a comparação entre grandezas.	**Plano cartesiano** •Pontos no plano cartesiano **Razão e proporção** •Grandezas diretamente e inversamente proporcionais •Regra de três simples e composta •Porcentagem e juros simples **Proporcionalidade** •Ampliação e redução de figuras geométricas •Áreas de figuras planas •Comparação de perímetro e área de figuras proporcionais **Ângulos** •Construção e classificação •Elementos •Bissetriz **Polígonos** •Construção, identificação e classificação •Polígonos regulares: propriedades, construção e características **Figuras espaciais** •Conceitos e representações: prismas, cilindros, pirâmides, cones e esferas

D

OBJETIVOS	CONTEÚDO
	•Cálculo de volume de sólidos retangulares •Relação entre volume e capacidade **Noções de estatística** •Cálculo de média aritmética e ponderada •Interpretação de médias aritméticas nos meios de comunicação •Identificação, classificação e construção de gráficos e tabelas •Interpretação de tabelas e gráficos

Fonte: Distrito Federal, 2014b, p.88-90

EIXOS TRANSVERSAIS: EDUCAÇÃO PARA A DIVERSIDADE / CIDADANIA E EDUCAÇÃO EM E PARA OS DIREITOS HUMANOS / EDUCAÇÃO PARA A SUSTENTABILIDADE	
EIXOS INTEGRADORES: LUDICIDADE E LETRAMENTOS MATEMÁTICA - 8° ANO	
OBJETIVOS	**CONTEÚDO**
•Estabelecer relações entre temas matemáticos com diferentes campos e conhecimentos de outras áreas curriculares. •Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos. •Identificar aspectos consensuais, respeitando todas as diversidades, bem como todos os contextos sociais abordados pela Etnomatemática. •Reconhecer situações que podem ser descritas em linguagem matemática e capazes de aplicá-las. •Utilizar Matemática Financeira como ferramenta no cotidiano para tomada de decisões. •Resolver desafios e problemas que envolvam raciocínio lógico. •Raciocinar, expressar-se matematicamente e aplicar métodos matemáticos no que se refere a (operações com números reais, monômios e polinômios, equações e sistemas de equações, representações no plano cartesiano, conhecimentos geométricos e aritméticos, noções de estatística e educação financeira), bem como suas aplicações práticas. •Estimular o pensamento lógico e a capacidade de abstração da linguagem matemática para a solução de problemas do cotidiano.	**Potenciação e radiciação** •Propriedades •Raízes exatas e aproximadas **Números irracionais** •Definição, identificação e representação algébrica e geométrica •História de números: número PI, comprimento e área de circunferência **Números reais** •Relações e reconhecimento de conjuntos N, Z, Q, irracionais e reais •Definição, identificação e representação algébrica e geométrica **Monômios e polinômios** •Definição, identificação e representação algébrica e geométrica •Valor numérico •Operações com polinômios •Produtos notáveis
OBJETIVOS	**CONTEÚDO**
	Expressões algébricas •Fatoração •Simplificação de expressões algébricas **Sistemas de equações de primeiro grau** •Métodos de resolução de situações-problema •Representação geométrica **Ângulos** •Classificação e construção •Ângulos opostos pelo vértice, ângulos adjacentes, ângulos consecutivos e bissetriz •Ângulos complementares e suplementares •Ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversal **Estudo de polígonos** •Propriedades e classificação de triângulos e quadriláteros •Soma de ângulos internos e externos de triângulos e quadriláteros **Figuras planas** •Composição e decomposição •Áreas de figuras planas associadas à área do retângulo **Noções de Estatística** •Construção e análise de tabelas e gráficos •Compreensão e interpretação de frequências e amostras •Média aritmética simples e média ponderada

Fonte: Distrito Federal, 2014b, p.88-90

EIXOS TRANSVERSAIS: EDUCAÇÃO PARA A DIVERSIDADE / CIDADANIA E EDUCAÇÃO EM E PARA OS DIREITOS HUMANOS / EDUCAÇÃO PARA A SUSTENTABILIDADE	
EIXOS INTEGRADORES: LUDICIDADE E LETRAMENTOS MATEMÁTICA - 9° ANO	
OBJETIVOS	**CONTEÚDO**
•Estabelecer relações entre temas matemáticos com diferentes campos e conhecimentos de outras áreas curriculares. •Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos. •Identificar aspectos consensuais, respeitando diversidades, bem como contextos sociais abordados pela Etnomatemática. •Reconhecer situações que podem ser descritas em linguagem matemática e ser capazes de aplicá-las. •Utilizar Matemática Financeira como ferramenta no cotidiano para tomada de decisões. •Resolver desafios e problemas que envolvam raciocínio lógico. •Raciocinar, expressar-se matematicamente e aplicar métodos matemáticos no que se refere: a Equações do 2° grau, sistemas de equações de 1° e 2° graus, relação entre grandezas, unidade de medidas, conhecimentos de geometria plana e espacial, funções do 1° e 2° graus, estatística, probabilidade, matemática financeira, potenciação e radiciação, bem como suas aplicações práticas. •Estimular o pensamento lógico e a capacidade de abstração da linguagem matemática à solução de problemas do cotidiano.	**Potenciação e radiciação** •Definição e identificação •Propriedades e operações •Extração da raiz •Simplificação de radicais •Operações com radicais •Racionalização **Equações do 2° grau** •Conceito Histórico •Resolução de equação do 2° grau/situações-problema •Fórmula de Bháskara **Funções do 1° e 2° grau** •Definição, identificação e representação algébrica e geométrica •Estudo da Reta •Estudo da Parábola **Sistemas de equações de 1° e 2° graus** •Métodos de resolução •Representação geométrica **Matemática financeira** •Juros simples e composto **Figuras planas e espaciais** •Perímetro e área •Número de diagonais •Soma de ângulos internos de um polígono qualquer •Sólidos geométricos: área e volume •Razão de semelhança •Proporções e teorema de Tales •Semelhança de triângulos •Teorema de Pitágoras •Relações métricas no triângulo retângulo •Polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência **Razões trigonométricas** •Seno, cosseno e tangente **Noções de contagem e probabilidade** •Noções de probabilidade •Princípio multiplicativo •Espaço amostral

Fonte: Distrito Federal, 2014b, p.88-90

APÊNDICE B

Tabuleiro do Jogo da Sorte

Regras do Tabuleiro do Jogo da Sorte

- Todos os jogadores iniciam o jogo na casa INÍCIO;
- O jogo pode ser disputado por até 6 jogadores, e a primeira rodada é para definir a ordem;
- Em cada rodada, cada participante joga o dado, o número sorteado será assumido por D, e o jogador terá que responder ao comando;
- Se errar o comando, o marcador do jogador permanece na casa. Caso acerte, ele anda o número de casas referentes ao resultado do comando;
- Quando o jogador estiver na casa "*Carta Especial*", terá que escolher um número na tabela de situações-problema envolvendo equações do primeiro grau. Se acertar, joga o dado e anda o número sorteado no dado;
- Ganha o primeiro participante a chegar na casa FIM.

INICIO						
1 AVANCE D CASAS	2 AVANCE MMC (D, 2) CASAS	3 AVANCE MDC (D, 3) CASAS	4 AVANCE MMC (D, 2) CASAS	5 AVANCE MMC (D, 2) CASAS	6 AVANCE MDC (D, 5) CASAS	**CARTA ESPECIAL**
11 AVANCE MDC (D, 18) CASAS	10 AVANCE MMC (D, 2) CASAS	9 AVANCE MDC (D, 16) CASAS	8 VOLTE MDC (D, 15) CASAS	7 AVANCE MMC (D, 2) CASAS	ESCOLHA O LADO	7 AVANCE MMC (D, 2) CASAS
12 AVANCE MDC (D, 18) CASAS	13 AVANCE MMC (D, 2) CASAS	12 AVANCE MDC (D, 16) CASAS	11 VOLTE MDC (D, 15) CASAS	10 AVANCE MMC (D, 2) CASAS	9 AVANCE MMC (D, 2) CASAS	8 AVANCE MMC (D, 2) CASAS
CARTA ESPECIAL	14 AVANCE MMC (D, 2) CASAS	15 AVANCE MDC (D, 21) CASAS	16 AVANCE MDC (D, 22) CASAS	17 AVANCE MDC (D, 26) CASAS	18 AVANCE MDC (D, 27) CASAS	19 AVANCE MDC (D, 28)
26 AVANCE MMC (D, 3) CASAS	25 AVANCE MMC (D, 3) CASAS	24 AVANCE MDC (D, 36) CASAS	23 AVANCE MDC (D, 36) CASAS	22 AVANCE MDC (D, 33) CASAS	21 AVANCE MDC (D, 30) CASAS	20 AVANCE MDC (D, 27) CASAS
27 AVANCE MDC (D, 4) CASAS	28 AVANCE MDC (D, 4) CASAS	29 AVANCE MMC (D, 4) CASAS	30 VOLTE MDC (D, 42) CASAS	31 AVANCE MDC (D, 6) CASAS	32 AVANCE MDC (D, 30) CASAS	**CARTA ESPECIAL**
37 AVANCE MDC (D, 6) CASAS	36 AVANCE MDC (D, 8) CASAS	35 AVANCE MDC (D, 5) CASAS	34 AVANCE MDC (D, 36) CASAS	33 VOLTE MDC (D, 2) CASAS	ESCOLHA O LADO	33 AVANCE MDC (D, 6) CASAS
38 AVANCE MDC (D, 8) CASAS	39 AVANCE MDC (D, 4) CASAS	38 AVANCE MDC (D, 4) CASAS	37 AVANCE MDC (D, 36) CASAS	36 AVANCE MDC (D, 8) CASAS	35 AVANCE MMC (D, 3) CASAS	34 AVANCE MDC (D, 8) CASAS
CARTA ESPECIAL	40 AVANCE MMC (D, 2) CASAS	41 AVANCE MDC (D, 21) CASAS	42 AVANCE MDC (D, 22) CASAS	43 AVANCE MDC (D, 26) CASAS	44 AVANCE MDC (D, 27) CASAS	FIM

APÊNDICE C

Tabuleiro Multijogos

Regras do Tabuleiro das Operações

- Todos os jogadores iniciam o jogo na casa INÍCIO;
- O jogo pode ser disputado por até 6 participantes;
- A primeira rodada serve para definir a ordem em que os jogadores jogarão cada rodada;
- Em cada rodada, cada participante joga o dado, anda o número de casas sorteados e escolhe um número na tabela referente a cor da sua casa;
- Após a escolha da situação, efetua a operação pedida. Se acertar, permanece na casa. Se errar, volta para a casa do início da rodada;
- Ganha o primeiro participante a chegar na casa FIM.

ÍNICIO	45	57	63	72	84	92	32	26	12
									38
36	44	54	13	21	99	77	85	59	42
72									
86	93	11	23	75	48	35	81	90	8
99									17
88	77	11	44	22	55	55	66	45	28
									47
56	24	42	30	18	6	95	83	76	63
81									
19	29	37	92	5	83	71	67	37	9
99									61
88	77	44	22	33	55	11	66	61	FIM

APÊNDICE D

Tabuleiro da Batalha dos Divisores

Regras da Batalha dos Divisores:

- Deve ser jogado em duplas;
- Cada jogador terá que dispor sete figuras na sua tabela;
- Cada jogador terá que marcar todos os divisores do número informado pelo outro jogador na sua tabela;
- Cada jogador terá que informar se acertou alguma figura geométrica e quais os números das casas acertadas;
- Cada jogador terá que informar qual figura foi acertada, mas apenas quando todas as casas da figura geométrica forem marcadas;
- Vence o jogo o jogador que fizer com que o outro jogador marque todas as figuras dispostas na tabela.

PRIMEIRA RODADA - BATALHA DOS DIVISORES

TABELA DO JOGADOR						
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51

TABELA DO ADVERSÁRIO						
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51

SEGUNDA RODADA - BATALHA DOS DIVISORES

TABELA DO JOGADOR						
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51

TABELA DO ADVERSÁRIO						
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51

TERCEIRA RODADA - BATALHA DOS DIVISORES

TABELA DO JOGADOR						
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51

TABELA DO ADVERSÁRIO						
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51

QUARTA RODADA - BATALHA DOS DIVISORES

TABELA DO JOGADOR						
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51

TABELA DO ADVERSÁRIO						
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51

APÊNDICE E

Tabuleiro do Quadrado Mágico

Regras do Quadrado Mágico:

- A soma dos números das casas de uma mesma linha deve ser iqual a D.
- A soma dos números das casas de uma mesma coluna deve ser iqual a D.
- A soma dos números das casas de uma mesma diagonal deve ser iqual a D.
- Todas as casas do quadrado devem ser preenchidas com números consecutivos, sem que se repitam.

Exemplo:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

PRIMEIRA RODADA - QUADRADO MÁGICO

D =15		

D =15		

D =15		

D =15		

D =15		

D =15		

D =15		

D =15		

SEGUNDA RODADA - QUADRADO MÁGICO

D =18		

D =18		

D =18		

D =18		

D =18		

D =18		

D =18		

D =18		

TERCEIRA RODADA - QUADRADO MÁGICO

D = 21		

D = 21		

D = 21		

D = 21		

D = 21		

D = 21		

D = 21		

D = 21		

APÊNDICE F

Questionário de Avaliação do Estudo de Caso

1. Você participou de qual atividade?

   ( ) Quadrado Mágico ( ) Batalha do Divisores ( ) Tabuleiro dos restos

   ( ) Tabuleiro das Operações

2. Quais operações matemáticas estavam presentes na sua atividade?

   ( ) Adição ( ) Divisão ( ) Multiplicação ( ) Subtração

3. A atividade foi motivadora?

   ( ) Sim, me motivou. ( ) Sim, me motivou em partes. ( ) Não.

4. Você conseguiu traçar uma estratégia para vencer o jogo? Qual?

   ( ) Não. ( ) Sim.(informe abaixo qual foi)

5. O jogo ajudou em compreender melhor alguma operação matemática?

   ( ) Não. ( ) Sim. Qual? ( ) Adição ( ) Divisão ( ) Multiplicação ( ) Subtração

6. O jogo despertou algum interesse?

   ( ) Não. ( ) Sim. Qual?

7. Como você avalia a atividade?

   ( ) Muito Ruim ( ) Ruim ( ) Boa ( ) Muito boa ( ) Excelente

8. Esse campo abaixo é para alguma sugestão para melhorar a atividade, alguma crítica sobre a atividade ou elogio