Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE PROBABILIDADE EM NÍVEL BÁSICO E RESOLUÇÃO DE ALGUNS DE SEUS PROBLEMAS CLÁSSICOS

AFONSO REIS DE AVELAR

Brasília
2018

Afonso Reis de Avelar

REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE PROBABILIDADE EM NÍVEL BÁSICO E RESOLUÇÃO DE ALGUNS DE SEUS PROBLEMAS CLÁSSICOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino

Brasília

2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

AAV948r Avelar, Afonso Reis de
REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE PROBABILIDADE EM NÍVEL BÁSICO E RESOLUÇÃO DE ALGUNS DE SEUS PROBLEMAS CLÁSSICOS / Afonso Reis de Avelar; orientador Ary Vasconcelos Medino. = Brasília, 2018.
71 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Probabilidade. 2. História das probabilidades. 3. Ensino de probabilidades. 4. Abordagens probabilísticas. I. Medino, Ary Vasconcelos, orient. II. Título.

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Reflexões Sobre o Ensino de Probabilidade em Nível Básico e Resolução de Alguns de Seus Problemas Clássicos

por

Afonso Reis de Avelar

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 5 de julho de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino – MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo - FUP/UnB

Profa. Dra. Cira Etheowalda Guevara Otiniano - EST/UnB

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha eterna inspiração Luciana, aos meus filhos, Afonso, Laura, Henrique, Anna Elizabeth, Gabriel e Lucas, e a minha linda neta e guerreira Alice, que serviram de exemplo e incentivo nas horas mais difíceis.

Agradecimentos

A Deus, o maior de todos os Matemáticos, que me capacitou.

Ao Professor Ary, que antes de tudo, me mostrou que eu nada sabia de probabilidade, mas ainda assim me orientou no caminho certo.

A todos os Colegas e Professores do Profmat, que além da harmoniosa e prazerosa convivência, foram sempre amigos.

Resumo

Este trabalho apresenta algumas reflexões sobre o ensino de probabilidade. Para fundamentar tais reflexões, são apresentados resumos histórico e teórico que nos permitem situar o contexto das principais abordagens probabilísticas. Além disso, 25 problemas clássicos que ilustram a história das probabilidades são resolvidos. Estes problemas destacam-se pelas peculiaridades em suas soluções ou pelas controvérsias e paradoxos envolvidos nelas.

Palavras-chave: Probabilidade. História das Probabilidades. Ensino de probabilidades. Abordagens Probabilísticas.

Abstract

This work presents some reflections on the probability teaching. To base such reflections, historical and theoretical summaries are presented which anable us to situate the context of the main probabilistic approaches. In addition, 25 classical problems that illustrate the history of probabilities are solved. These problems stand out by the peculiarities in their solutions or due to the controversies and paradoxes involved in them.

Keywords: Probability. History of Probabilities. Teaching of probabilities. Probabilistic Approaches.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é de apresentar questões que possam despertar o interesse de professores e alunos no aprofundamento do estudo de probabilidades. É consenso na educação mundial a relevância e a importância do assunto no desenvolvimento de uma sociedade. As propostas curriculares nos últimos anos tem justificado uma preocupação com a inclusão do tema na formação dos estudantes, desde as séries iniciais da educação básica.

A probabilidade, principalmente aliada à estatística, é indispensável para que se possa projetar um futuro em que o ensino da matemática não se restrinja à manipulação de números, mas com a análise crítica dos resultados obtidos.

Entretanto, verifica-se no Brasil, apesar dos PCN, uma preocupação de apenas cumprir o currículo, simplesmente acrescentando um tópico a mais a ser estudado, sem permitir o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

Nos dias atuais, cada vez mais cedo, os alunos se deparam com situações em que é necessário o confronto com situações do mundo real, em que é preciso analisar, questionar, relacionar, ponderar, pois a escolha correta dos caminhos a serem tomados é decisiva. E a probabilidade pode proporcionar tudo isso ao aluno.

Porém, não se pode admitir, como apregoam os currículos no Brasil, que o contato com esses temas ocorra apenas no ensino médio. É muito importante que desde as séries iniciais da educação básica se desperte nos estudantes o interesse pela probabilidade, para que se possa enriquecer sua capacidade de reflexão.

Não se pode imaginar, contudo, o ensino de probabilidade e estatística possa ser ministrado por professores que não tenham preparo para tal. Esse trabalho visa, antes de tudo, por meio de questões interessantes, fazer com que professores possam se aprofundar no estudo de probabilidade, contemplando todas as suas diferentes abordagens, para que possa propiciar ao estudante situações que lhe permitam a superação do determinismo em favor da aleatoriedade.

Ao estudar probabilidade, os alunos tomam consciência de que as incertezas e a aleatoriedade estão presentes no nosso dia a dia e de que muitas vezes as nossas intuições estão erradas e podem nos levar a decisões precipitadas ou equivocadas. Assim, o estudo de probabilidades será fundamental não apenas para potencializar os conceitos matemáticos, mas permitirá ao estudante rever a sua maneira de encarar as armadilhas que se apresentam diariamente, e que podem ser evitadas com a ampliação das capacidades de síntese, análise e crítica.

A proposta inicial, neste trabalho, era apresentar a solução de algumas questões interessantes de probabilidade, seja pelos seus aspectos históricos, seja pelas peculiaridades, controvérsias ou paradoxos envolvidos.

Para consubstanciar as soluções, entretanto, fez-se necessária a inclusão de um resumo teórico que contemplasse os principais tópicos de probabilidade básica, assim como pudesse discorrer sobre as diversas abordagens para o estudo de probabilidade.

Mas algumas questões, assim como a teoria desenvolvida, apresentavam aspectos históricos importantes, que não permitiam ser apresentadas fora de seu contexto.

As pesquisas realizadas apontaram ainda para outro aspecto muito importante: as particularidades do ensino de probabilidade no mundo e, principalmente, no Brasil.

Dessa forma, esse trabalho ficou dividido em quatro partes. No Capítulo 2, apresenta-se um histórico, que não permite esgotar o tema, mas indica o desenvolvimento da probabilidade desde os primórdios das civilizações até os dias de hoje; no Capítulo 3 são feitas algumas reflexões sobre o ensino de probabilidades, que permitem sugerir uma série de ações e pesquisas na área; O Capítulo 4 traz um resumo teórico, que aborda de forma sucinta os principais tópicos de probabilidade básica e percorre as principais abordagens para o estudo; e no Capítulo 5 estão as questões, objeto principal do trabalho, que perpassam por contextos históricos, assim como algumas situações que ilustram a teoria apresentadas, nas diversas distribuições de probabilidade expostas.

2. UM BREVE HISTÓRICO

A probabilidade é o ramo da matemática que visa modelar experimentos em que o acaso representa papel fundamental.

É interessante destacar que:

> Antes de tudo é necessário especificar ou conceituar o que se entende por “acaso”. O denominado “acaso” é um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno. Assim ao lançarmos uma moeda, é senso comum que os possíveis resultados, exceto por alguma extravagância da natureza, são “cara” e “coroa”. No entanto, antes de realizada a experiência não é possível antecipar com certeza qual dos dois possíveis resultados irá ocorrer. Isto acontece porque os fatores que determinam um destes particulares resultados não podem ser identificados e caso isto ocorra não são passíveis de controle. (VIALI, 2008, p. 144).

Coutinho (2007) e Viali (2008) concordam que, apesar de a ideia de acaso ser quase tão antiga quanto às primeiras civilizações, o acaso não era considerado como um princípio natural e, sim, algo que os deuses desejavam, ou seja, a ideia do acaso estava associada às intervenções divinas ou sobrenaturais.

Ainda hoje, pode-se notar que a ideia de fenômenos aleatórios, ou seja, sem causa definida, encontra dificuldades para ser naturalmente aceita. Kendall (1987) observa que: "a humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo em que alguns eventos não tinham causa... ou eram determinados por causas tão distantes que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos probabilísticos”.

Corroborando com Kendall, Batanero et all (2016) acrescenta que, para o funcionamento adequado de uma sociedade, é necessário que os cidadãos superem seu pensar e aceitem a existência de um “acaso fundamental” na natureza. Defende ainda que é necessário adquirir estratégias e formas de raciocínio que os ajudem a tomar decisões adequadas em situações em que o acaso está presente.

Desde a idade antiga o acaso era discutido não só por matemáticos, mas também por filósofos, advogados, juristas etc, em função dos jogos de azar (SILVA e COUTINHO, 2005).

Segundo Hacking (1975), as primeiras manifestações probabilísticas se deram por meio dos jogos de dados, mais precisamente o Tali (jogo do osso) que era praticado com astrálagos. O astrálago é o ancestral do dado moderno (hexaedro regular). De acordo com David (1998), um tratamento mais formal dos jogos de azar surgiu com a enumeração das possibilidades de que um jogo fornecesse determinado resultado. O registro mais antigo dessa prática deve-se ao bispo belga Wibold, que por volta de 960 inventou um jogo de dados moral, apesar da proibição, na época, dos jogos pela igreja. Ele associou os possíveis resultados do lançamento de três dados a 56 virtudes distintas. É possível, porém, observar registros de jogos com dados desde o início da era cristã. Segundo Steinnmetz (2010) provavelmente um dos jogos mais antigos, se não o mais antigo da história foi especificado pelo Evangelho de Mateus como o jogo que os guardas romanos jogavam sob o local da crucificação de Jesus de Nazaré.

Outras manifestações probabilísticas estão associadas aos seguros. A história do seguro remonta há mais de 3 000 anos antes de Cristo, entre os comerciantes fenícios e mesopotâmicos que o aplicavam devido à perda de carga de navios. Segundo Viali (2008), a prática foi continuada pelos gregos e romanos e chegou ao Mundo Cristão Medieval com os comerciantes marítimos italianos. Observando empiricamente as probabilidades de acidentes, estipulavam as taxas e prêmios correspondentes. A primeira apólice de seguros nos moldes atuais, entretanto, foi emitida apenas no século XIV. Com a Revolução Industrial, as Grandes Navegações e o desenvolvimento dos conglomerados urbanos, os seguros foram diversificados e popularizados com a criação do seguro de vida. Surgem então os primeiros estudos matemáticos, com Cardano, em 1570, que não obtiveram grande repercussão. Em 1663, Edmond Halley publica *Degrees of Mortality of Mankind*, mostrando como calcular o prêmio de um seguro em termos da esperança de vida e da probabilidade de sobrevida (Viali, 2008). Porém, segundo Silveira (2001), apenas em 1730, com Daniel Bernoulli, a matemática de seguros tem seu amadurecimento. E completa:

> Ele retoma o clássico problema de, a partir de um número dado de recém-nascidos, calcular o número esperado de sobreviventes após “n” anos. Ele também dá os primeiros passos em direção a novos tipos de seguros calculando, por exemplo, a mortalidade causada pela varíola em pessoas de idade dada. Ao mesmo tempo, começaram a aparecer as primeiras grandes companhias de seguros as quais tiveram, assim, condições de se estabelecer com um embasamento científico. De lá para cá, os negócios de seguros

> ampliaram-se e sofisticaram-se cada vez mais a ponto de, em alguns países europeus, tornarem-se um mercado de trabalho que absorve quase um quarto dos egressos de cursos de Matemática. (SILVEIRA, 2001).

Os primeiros cálculos probabilísticos, entretanto, foram estudos com comparações das frequências de eventos e estimativas de chances de se ganhar em jogos de azar, realizados pelos italianos Paciolo, Tartaglia e Cardano, nos séculos XV e XVI. Esses estudos, contudo não apresentavam teoremas fundamentados em alguma teoria (SILVEIRA, 2001).

Paciolo publicou, em 1494, a obra *Summa* em que apresenta um estudo sobre o problema dos pontos, também conhecido como divisão da aposta, embora a solução apresentada fosse incorreta (KATZ, 2009). Esse problema, de acordo com Coutinho (2007), foi a mola propulsora do cálculo de probabilidades, ao inspirar muitos outros pensadores da época, como Tartaglia e Cardano. A solução correta para este problema viria a ser dada por Fermat e por Pascal, sendo considerada a gênese da Teoria da Probabilidade (VIALI, 2008). Tartaglia, na obra *General Trattato*, publicada em 1556, afirma que a solução de Paciolo para o problema dos pontos provavelmente estaria errada (KATZ, 2009).

Cardano, por sua vez, publicou em 1663, a obra *Liber de Ludi Alae*, que orientava a tomada de boas decisões nos problemas de jogos de azar existentes à época (COUTINHO, 2007). De acordo com Viali (2008), Cardano pode ser considerado como o pioneiro do cálculo de probabilidade, ao afirmar:

> [...] foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e também considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Ele, também, conhecia a ideia de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles. Seus estudos, no entanto, ficaram limitados a casos concretos de jogos de azar principalmente o de dados. (VIALI, 2008, p. 146-147).

Não há registro de outros estudiosos do século XVI que tenham estudado as probabilidades, apesar de algumas evidências de cálculos probabilísticos feitos por Galileo Galilei, relacionados aos jogos com dados (DAVID, 1998). Sua obra *Sopra Le Scoperte dei Dadi*, publicada no início do século XVII, demonstra que Galileo calculava probabilidades utilizando conceitos de resultados igualmente prováveis.

Segundo Katz (2009), apenas após a metade do século XVII a probabilidade entrou no pensamento europeu, sendo compreendida como uma forma de entender as frequências no processo de chance ou como um método para determinar as situações presumíveis de fé.

A troca de correspondências entre Pascal e Fermat estabeleceu-se como marco do início da Teoria das Probabilidades. As cartas trocadas versavam sobre o jogo de dados e o problema dos pontos, que foi apresentado a Pascal por Gombauld, conhecido como cavaleiro de Méré. Segundo Viali (2008), este não foi o único problema proposto a Pascal por Gombauld. Um segundo problema é apresentado nas questões propostas neste trabalho.

Coutinho (2007) faz uma observação interessante sobre a troca de correspondências entre Pascal e Fermat:

> Observamos aqui os primeiros indícios de uma dualidade da noção de probabilidade, dualidade essa que é devida ao conflito entre a apreensão perceptiva das chances de realização de um evento (grau de credibilidade) e a relação entre resultados favoráveis e possíveis. (COUTINHO, 2007, p. 60).

Viali (2008) destaca que o holandês Christiaan Huygens, em uma viagem a Paris, em 1655, interessou-se pelas cartas trocadas entre Pascal e Fermat, dedicando-se a resolução de problemas semelhantes aos propostos nas correspondências. Segundo Wussing (1998), em *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, que seria a primeira obra impressa sobre o cálculo de probabilidades, Huygens detalha as questões tratadas por Pascal e Fermat, além de estudar problemas similares mais complexos. Katz (2009) destaca que Huygens em sua obra afirma que apesar da incerteza dos resultados em um jogo de azar, a chance de ganhar ou perder depende de um determinado valor. Era a primeira ideia de esperança matemática, ou seja, o valor médio que o jogador poderia ganhar se jogasse muitas vezes, de acordo com David (1998).

O processo de sistematização da probabilidade foi iniciado por Jacques (Jacob) Bernoulli, que em sua obra *Ars Conjectandi*, publicada em 1713, aborda de forma bem detalhada permutações e combinações e, ainda, propõe a utilização da Teoria das Probabilidades a situações tanto econômicas como morais (TODHUNTER, 1865). Jacques Bernoulli mostrou um dos primeiros e principais teoremas da probabilidade que ele denominou de “Lei dos Grandes Números”. Era o início da visão frequentista, que aproxima a probabilidade de um evento pela sua frequência observada quando o experimento é repetido um grande número de vezes. (GONÇALVES, 2004).

Algumas publicações como *The Doctrine of Chance* e *Miscellanea Analytica*, de Abraham de Moivre, *La Doctrine des Chances*, de Thomas Bayes, *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Decisions Rendues à la Pluralité des Voiix*, do Marquês de Condorcet, e *The Nature and Laws of Chance*, de Thomas Simpson foram publicadas nesse período. Entretanto, a obra clássica desta fase foi *Théorie Analytique des Probabilités*, de Pierre-Simon Laplace, publicada em 1812. Laplace publicou ainda *Essai philosophique sur les probabilités*, em 1814, que "discutia os princípios da teoria e principalmente aplicações nos jogos de azar, filosofia natural, ciências morais, testemunho, decisões judiciais e mortalidade." (VIALI, 2008, p. 150).

Em sua obra principal, Laplace apresenta o problema da agulha de Buffon, que está contemplado entre as questões apresentadas neste trabalho. Buffon introduziu a noção de probabilidade geométrica, ao apresentar o jogo *Franc Carreau* ou Jogo do Ladrilho, que também se apresenta entre as questões propostas neste trabalho.

De acordo com Viali (2008), a partir da obra de Laplace cresceram os estudos na área e o interesse de grandes matemáticos como Gauss, Euler, Markov, Poisson, Poincaré, Borel, Lebesgue, d'Alembert, dentre outros. A partir de Laplace vários matemáticos contribuíram para o estudo das probabilidades. Entre eles, pode-se destacar Chebysshev, von Mises, Keynes e o hoje considerado pai da probabilidade moderna, Kolmogorov, que em 1933, publicou a monografia denominada *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, que em inglês foi batizada de *Foundations of Probability Theory*, que deu início à etapa moderna da teoria.

Viali (2008) completa:

> A partir de então ela foi sendo refinada (matematizada) e hoje é parte de uma disciplina mais geral denominada de teoria da medida. Kolmogorov axiomatizou a teoria da probabilidade da mesma forma que a Geometria foi axiomatizada por Euclides (Euclides de Alexandria – 325 ac a 265 ac) nos Elementos. (VIALI, 2008, p. 152).

3. UMA BREVE REFLEXÃO SOBRE O ENSINO DE PROBABILIDADE

Segundo Batanero et all (2016), para uma sociedade funcionar adequadamente, os cidadãos precisam adquirir estratégias e formas de raciocínio que os ajudem a tomar decisões adequadas em situações cotidianas e profissionais em que o acaso está presente. Defendendo esse pensamento, os educadores têm incluído cada vez mais a probabilidade e a estatística entre os conteúdos que deverão ter atenção especial na educação básica. É notório que o desenvolvimento da competência, análise crítica e argumentação são privilegiados pelos conteúdos probabilísticos.

Mendoza e Swift (1981) destacam a importância do ensino de probabilidade e estatística para ajudar nas tomadas de decisões inerentes às situações da vida social e econômica ao desenvolver as capacidades de análises, comparações, sondagens e escolhas amostrais.

Ao incluir o estudo de probabilidades nos currículos em diferentes níveis de escolaridade e na formação de professores, as autoridades em muitos países reconhecem esta necessidade de "alfabetização probabilística".

No entanto, a simples inclusão de um tópico em um currículo não garante seu ensino ou aprendizado de maneira correta. O estudo de probabilidades possui características que não são encontradas em outras áreas, o que cria desafios especiais para professores e alunos. Com sua visão multifacetada e a irreversibilidade dos experimentos aleatórios a probabilidade requer a necessidade de reformular uma agenda de pesquisa para os próximos anos.

Hacking (1975) afirma que a probabilidade foi concebida a partir de duas perspectivas diferentes, desde o seu surgimento. Por um lado, a visão frequentista da probabilidade relacionada à necessidade de obter regras matemáticas objetivas que expliquem os processos aleatórios; as probabilidades são atribuídas por meio de coleta de dados em pesquisas e experimentos. De outro lado, uma visão epistêmica que concebe a probabilidade como um grau pessoal de crença, que depende fundamentalmente da informação disponível para a pessoa. É a partir dessas duas perspectivas principais, que se refletem os trabalhos dos principais autores das diferentes visões de probabilidade através da história (BATANERO et all, 2016).

Atualmente as principais interpretações probabilísticas são a clássica, a frequentista, a subjetiva e a axiomática. Cada uma dessas visões implica questões filosóficas e é mais adequada para a modelagem de fenômenos do mundo real a serem considerados na elaboração dos currículos escolares.

Antes de 1970, segundo Henry (2010), a visão clássica de probabilidade, baseada no cálculo combinatório dominou os currículos do ensino secundário em países como a França. Como essa visão esta fundamentada no cálculo combinatório, o estudo de probabilidade foi difícil para os estudantes, apesar de envolver problemas muito simples. Convém observar o que já ocorreu no ensino francês, pois o mesmo já passou por vários estágios, que poderão servir de base para o caso brasileiro.

De acordo com Silva (2002), entre 1970 e 1981, no currículo francês há predominância dos conhecimentos relativos aos conjuntos e às correspondências entre conjuntos. Nesse período destacam-se os espaços probabilísticos e a nova orientação do ensino da matemática enfatiza o seu aspecto dedutivo: um pequeno número de axiomas permite obter um grande número de resultados derivados.

Ainda segundo Silva (2002), entre 1981 e 1986, os programas escolares na França apresentaram-se menos ambiciosos que os precedentes, ao sugerirem apenas uma referência a probabilidades, com a utilização da fórmula de Laplace. Dessa forma, “os aspectos axiomáticos dos programas anteriores cedem lugar a uma aproximação notadamente mais pragmática”. (SILVA, 2002, p. 45).

Silva (2002) destaca um quarto período na escola francesa, de 1986 a 1990, em que “a concepção de probabilidades subjacente aos novos programas acaba por estabelecer-se de forma mais consistente. [...] Prevalece nesse período, portanto, a aproximação laplaciana”. (SILVA, 2002, p. 45).

A partir de 1990, de acordo com Silva (2002), os novos programas na França utilizam uma abordagem precisamente frequentista de probabilidades. A introdução da noção de probabilidade está fundamentada no estudo das séries estatísticas obtidas por repetições de experiências aleatórias em que se destacam as propriedades das frequências, com a utilização da Lei dos Grandes Números. E completa:

> [...] os novos programas do ensino francês propõem claramente a descoberta da noção de probabilidade por meio da noção frequentista e de fazer aparecer numa sequência de testes repetidos – e de modo fortemente pragmático – a convergência da sequência das frequências observadas de um evento dado a um limite, que será a probabilidade desse evento (Lei dos Grandes Números). A combinatória adquire então um papel secundário, limitado ao cálculo efetivo de certas probabilidades. Esse fenômeno observável da estabilização das frequências é o que de certo modo, afirma a passagem do quadro estatístico ao quadro probabilístico. (SILVA, 2002, p. 46).

Apesar da destacada importância do ensino de probabilidade, Gonçalves (2004) ressalta que, no Brasil, a inserção oficial do ensino de probabilidades ocorreu somente em 1986, no currículo paulista do Ensino Médio e, nos PCN, na década de 1990, abrangendo também o Ensino Fundamental, desde as séries iniciais:

> Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p.52).

Nota-se, entretanto, que o ensino de probabilidade no Ensino Médio no Brasil traz apenas a visão clássica.

Lopes e Moran (1999) afirmam que é necessário ampliar o cenário da pesquisa em ensino da probabilidade e estatística no Brasil, para que possamos alcançar os objetivos da proposta curricular brasileira e, dessa maneira, formar cidadãos mais aptos a tomadas de decisão, especialmente em situações em que o acaso está presente. E completam:

> Consideramos que não basta verificar as análises de avaliações realizadas, seja nos cursos ou nos livros didáticos, pensamos que seja necessário o incentivo e apoio a pesquisas que alterem o atual estado da arte desta área do conhecimento. (LOPES e MORAN, 1999, p. 8).

Apesar de a abordagem axiomática ter sido dominante na era da matemática moderna, pois se apresentava como um exemplo relevante da importância da teoria de conjuntos, no Brasil são raros os livros didáticos que a apresentam. Batanero et all (2016) é categórica em afirmar que nas abordagens clássica e axiomática várias aplicações da probabilidade em diferentes ciências passam despercebidas pelos estudantes. Isso fez com que muitos professores do ensino secundário considerassem a probabilidade como parte subsidiária da matemática, e houve uma tendência em reduzir o ensino de probabilidade. E complementa:

> Hoje, com o crescente interesse em estatísticas e desenvolvimentos tecnológicos, o enfoque frequentista está recebendo tratamento diferenciado. A introdução de probabilidade como limite de frequências relativas é sugerida em muitos currículos, e a probabilidade é apresentada como uma ferramenta teórica usada para abordar problemas que decorrem de experiências estatísticas. No nível da escola primária, uma visão intuitiva, em que as crianças partem de suas ideias intuitivas relacionadas ao acaso e probabilidade, também é favorecida. A abordagem axiomática não é utilizada no nível escolar, sendo tão formal e adequado apenas para aqueles que seguem estudos de matemática pura em nível pós-secundário. (BATANERO et all, 2016, p. 8 – Tradução nossa).

Mas, muito antes de preparar os alunos, é necessário que sejam preparados os professores. Coutinho e Gonçalves (2003) ressaltam com propriedade:

> [...] os professores que tiveram formação na década de 70 e 80, tiveram por meio dos livros didáticos uma aprendizagem por um ponto de vista clássico, muitas vezes num enfoque completamente determinista, dissociando a probabilidade e a experiência aleatória à qual ela deveria estar vinculada. Isso é bastante reforçado ainda nos dias atuais pelos livros didáticos de matemática que não seguem a proposta dos PCN. (COUTINHO e GONÇALVES, 2003, p. 19).

Os debates filosóficos em torno do significado de probabilidade, as características peculiares do raciocínio probabilístico, os equívocos e dificuldades apresentados pelos alunos e o crescente acervo de recursos tecnológicos sugerem que os professores necessitam de preparação específica para ensinar probabilidade, acentua Batanero et all (2016).

No Brasil, a maioria esmagadora dos livros apresenta uma visão probabilística muito restrita, enfocando apenas uma abordagem de probabilidade, restringindo-se às aplicações de probabilidade restritas a jogos ou definições, com conceitos muitas vezes incorretos ou incompletos.

Apesar de ser intrínseco que os professores têm licenciatura em matemática, eles geralmente estudaram apenas a probabilidade teórica e falta experiência na concepção de investigações ou simulações para que possam trabalhar com os estudantes, afirma Stohl (2005).

No Brasil, a educação dos professores da escola primária é ainda mais desafiadora, porque alguns deles não tiveram formação adequada em matemática e muito menos em probabilidade.

Batanero et all (2004) ressalta ainda o fato de que os princípios gerais válidos para outras áreas da matemática nem sempre são aplicados em probabilidade. E complementa:

> A falta de reversibilidade em experiências aleatórias torna mais difícil para as crianças compreender o essencial das características de aleatoriedade, o que pode explicar por que elas nem sempre desenvolvem corretamente intuições probabilísticas sem uma instrução específica. Além do acima exposto, a probabilidade é difícil de ensinar porque o professor não deve apresentar apenas conceitos probabilísticos diferentes e suas aplicações, mas estar atento aos diferentes significados de probabilidade e controvérsias filosóficas em torno deles (BATANERO et all, 2004 – Tradução nossa).

Batanero et all (2016) afirma que os professores devem estar familiarizados com resultados de pesquisas e com materiais didáticos que permitam seus alunos desenvolverem intuições corretas nesta área. Também é necessário encontrar diferentes níveis de formalização para ensinar a cada um dos segmentos educacionais, pois essas ideias dependem da idade e do conhecimento prévio dos alunos. Batanero et all (2016) conclui que é importante refletir sobre as ideias principais que os alunos devem adquirir em diferentes idades, assim como sobre os métodos e situações de ensino adequados.

4. RESUMO TEÓRICO

Para elaboração desse resumo teórico, foram consultados Fernandez (1976), Fernandez (2005), Gnedenko (1969), Guimarães e Cabral (1977), Hoyt (1967), Kolmogorov (2018), Magalhães (2006), Meyer (1978), Ross (2010), Tenreiro (2002), Tunala (1995) e Xavier e Xavier (1974).

4.1. EXPERIMENTOS – ESPAÇO AMOSTRAL – EVENTOS

Um **experimento** é um processo de observação. Pode ser classificado em determinístico ou aleatório. Um experimento é determinístico quando seu resultado pode ser previsto, antes mesmo da sua realização. Experimentos determinísticos conduzem a resultados idênticos, sempre que repetidos sob as mesmas condições. Experimentos, como por exemplo, a temperatura em que a água entra em ebulição, sob pressão normal, são experimentos determinísticos. Um experimento em que o resultado não pode ser previsto, apesar de serem hipoteticamente conhecidos todos os resultados possíveis, mesmo que seja repetido várias vezes sob as mesmas condições, é um experimento aleatório. Por exemplo, o número observado na face superior no lançamento de um dado normal é um experimento aleatório. Na Teoria das Probabilidades, investigam-se os processos que permitem criar e desenvolver modelos matemáticos que permitam o estudo de experimentos aleatórios.

Dado um experimento aleatório, chama-se de **espaço amostral (Ω)** associado a esse experimento um conjunto que possui todos os resultados possíveis de serem observados. A cada resultado possível de um experimento aleatório pode-se associar um ponto de Ω. Dessa definição, conclui-se que é possível obter vários espaços amostrais para um mesmo experimento. Nesse trabalho, será adotado como espaço amostral aquele que é o “menor” de todos os espaços amostrais possíveis, ou seja, quando possível, será tomado estabelecendo uma correspondência biunívoca entre seus elementos e os resultados possíveis do experimento. Um espaço amostral é dito discreto, quando formado por um conjunto enumerável, finito ou infinito de elementos. É chamado contínuo, quando formado por um conjunto não enumerável de elementos.

Por exemplo, no experimento lançamento de um dado, observando-se a face voltada para cima, podemos ter o espaço amostral {1, 2, 3, 4, 5, 6}. No experimento lançamento de uma moeda, observando-se a face voltada para cima, o espaço amostral pode ser {Ca, Co}, ou {0, 1}, em que 0 representa cara e 1 representa coroa. No experimento escolha de um horário entre 13 e 14 horas, o espaço amostral pode ser]13, 14[. No experimento lançamento de uma moeda até a obtenção da primeira coroa, observando-se a sequência obtida, o espaço amostral pode ser $\{(x_1, x_2, ..., x_n), x_i = 0$, para $i = 1, 2, ..., n - 1$ e $x_n = 1, n \in IN\}$; no experimento observar continuamente, por um período de 24 horas a temperatura, em graus Celsius, em uma sala de aula da Universidade de Brasília, em dia típico, registrando-se o gráfico obtido, o espaço amostral pode ser considerado como $\{graf(f) \mid f : [0, 24] \rightarrow IR$, f contínua$\}$. Nesse mesmo experimento pode-se adotar $\{graf(f) \mid f : [0, 24] \rightarrow [-10, 80]$, f contínua e derivável$\}$, sem qualquer perda.

Chama-se **evento** a um subconjunto do espaço amostral associado a um experimento, ou seja, um conjunto de resultados possíveis de um experimento aleatório. Os conjuntos unitários formados pelos elementos do espaço amostral são chamados de eventos elementares. Assim, por exemplo, no lançamento de um dado normal, o evento A que indica ocorrência de um número ímpar é o subconjunto A = {1, 3, 5}; o evento B indicando a ocorrência de um número maior que cinco é o subconjunto elementar B = {6}.

Dois ou mais eventos podem ser combinados para formar um novo evento, por meio das operações de união, intersecção, diferença, diferença simétrica e partição.

A **união** de dois eventos A e B, simbolizada por $A \cup B$, é o evento formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois eventos, ou seja:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

A **intersecção** de dois eventos A e B, simbolizada por $A \cap B$, é o evento formado pelos elementos que pertencem tanto ao evento A como ao evento B, ou seja:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Dois **eventos** são **mutuamente excludentes** ou simplesmente excludentes quando não possuem elemento comum. Assim, por exemplo, no lançamento de um dado, o evento A igual à ocorrência de número maior que 3 e o evento B igual à ocorrência de número ímpar menor que 4 são excludentes, uma vez que A = {4,5,6} e B = {1, 3}. Note que $A \cap B = \varnothing$.

A **diferença** entre dois eventos A e B, simbolizada por A – B ou por A \ B, é o evento formado pelos elementos que pertencem ao evento A e não pertencem ao evento B, ou seja:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

A **diferença simétrica** entre dois eventos A e B, simbolizada por A Δ B, é o evento formado pelos elementos que pertencem exclusivamente ao evento A ou ao evento B, ou seja:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A).$$

Dado o espaço amostral Ω e um conjunto de índices $\Im$, uma **partição** de Ω é uma coleção $\{A_i,\ i \in \Im\}$ de eventos de Ω que satisfaz:

1) $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i \neq j$ e

2) $\bigcup_{i \in \Im} A_i = \Omega$.

Assim, os eventos de uma partição são excludentes dois a dois e cobrem todo o espaço amostral.

O **evento complementar** de um evento A é definido como o evento que contém todos os resultados do espaço amostral Ω que não pertencem a A. Representamos o complementar de um evento A por $\mathbf{\overline{A}}$ ou por $\mathbf{A^C}$. Para qualquer evento A de um espaço amostral Ω destacam-se as seguintes propriedades:

P.1 – $(A^C)^C = A$

P.2 – $\varnothing^C = \Omega$

P.3 – $\Omega^C = \varnothing$

P.4 – $A \cap A^C = \varnothing$

P.5 – $A \cup A^C = \Omega$

Seja Γ um conjunto de índices. Considere uma família qualquer de eventos A_λ, $\lambda \in \Gamma$. Então valem as seguintes relações, conhecidas como Leis de DeMorgan:

L.1 – $\left(\bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda\right)^C = \bigcap_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda^C$

L.2 – $\left(\bigcap_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda\right)^C = \bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda^C$

Quando o espaço amostral é um conjunto finito ou enumerável, é natural tomar a família de eventos aleatórios $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, isto é, o conjunto de todos os subconjuntos de Ω, dado por $\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$, chamado de conjunto das partes.

Fernandez (1976) destaca que há casos em que Ω é não enumerável e não é possível construir um modelo probabilístico em toda essa família $\mathcal{P}(\Omega)$. Entretanto, serão feitas suposições sobre a família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ de eventos aleatórios, de tal forma que $\mathcal{F}$ satisfaça às seguintes propriedades:

P.6 – $\Omega \in \mathcal{F}$

P.7 – Para todo $A \in \mathcal{F}$, tem-se que $A^C \in \mathcal{F}$

P.8 – Se $A_1, A_2, A_3, \cdots \in \mathcal{F}$, então $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathcal{F}$.

Uma família de subconjuntos de Ω que satisfaz a essas três propriedades é chamada de uma **σ-álgebra de eventos**. Como visto, uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ é fechada com relação a uma união enumerável de eventos. Consequentemente, pelas Leis de DeMorgan, $\mathcal{F}$ também é fechada com relação a intersecções enumeráveis de eventos. Assim, as operações de união e intersecção de eventos podem ser estendidas a toda uma família de eventos.

4.2. ESPAÇOS DE PROBABILIDADE

Laplace, no final do século XVII, introduziu a definição de probabilidade de ocorrência de um acontecimento como a razão entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de todos os casos possíveis, assumindo que todos os eventos elementares sejam igualmente prováveis. Essa definição é conhecida como **conceito clássico de probabilidade**.

De maneira mais formal, tem-se que sendo n(A) o número de elementos de um evento A e n(Ω) o número de elementos do espaço amostral Ω finito, $\Omega \neq \varnothing$ e $A \subset \Omega$, a probabilidade do evento A, que se indica por P(A), é o número:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Observa-se que a definição clássica é dúbia, uma vez que utiliza a ideia de "igualmente provável", que nada mais é que "com probabilidade igual", isto é, a definição é circular, porque está definindo essencialmente a probabilidade com seus próprios termos.

Além disso, convém observar que a definição clássica não pode ser aplicada quando o espaço amostral é infinito.

Não é raro que a probabilidade de ocorrência de um evento seja interpretada como significando a frequência relativa com a qual o evento seria verificado se o experimento fosse repetido um grande número de vezes, em condições semelhantes.

Seja um experimento $\mathcal{E}$ e seja A um evento de um espaço amostral associado Ω. Suponhamos que $\mathcal{E}$ é repetido n vezes e seja f(A) a frequência relativa do evento A. Então a probabilidade de A é definida como sendo o limite de f(A) quando n tende a infinito, ou seja, P(A) = $\lim_{n\to\infty} f(A)$. Essa definição é conhecida como **conceito frequentista ou estatístico de probabilidade**.

A principal característica deste enfoque é que o valor matemático da probabilidade depende, fundamentalmente, do processo de experimentação.

Apesar de ser possível utilizar a Lei dos Grandes Números, verifica-se não ser possível avaliar com precisão a probabilidade, uma vez que o número de ensaios é sempre limitado.

Deve-se notar ainda que a frequência relativa do evento A é uma aproximação da probabilidade de A. As duas se igualam apenas no limite, embora para valores de *n* razoavelmente grandes, a frequência relativa do evento A é uma boa aproximação da probabilidade de ocorrência do evento A.

Esta definição, embora útil na prática, apresenta dificuldades matemáticas, pois o limite pode não existir, ou mesmo existindo, ser aleatório.

Os conceitos de probabilidade apresentados até então não permitem calcular a probabilidade de que um ponto selecionado ao acaso a partir de uma região R localize-se numa determinada sub-região R_i incluída em R. Para tal, se faz necessário, como relata Guimarães e Cabral (1977), “estender o conceito de probabilidade ao acaso de experiências aleatórias, nas quais os resultados possíveis constituam conjuntos contínuos”.

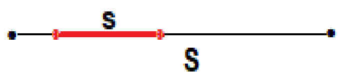
Assim, a probabilidade de um determinado evento se reduz à relação – ou ao seu limite, caso exista – entre medidas geométricas homogêneas (TUNALA, 1995).

De uma maneira geral, se o espaço amostral Ω tem medida bem definida e cada um de seus elementos tem mesma probabilidade de ocorrer, então:

$$P(A) = \frac{\text{medida de A}}{\text{medida de } \Omega}, \ \forall\, A \subset \Omega, \text{ A com medida bem definida.}$$

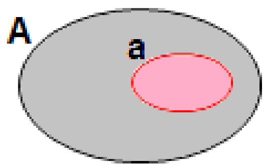
Assim, admitindo-se que a probabilidade de um ponto pertencer a um segmento seja proporcional ao comprimento desse segmento, independentemente da sua posição, se um segmento **s** é parte de outro segmento **S** escolhendo-se ao acaso um ponto de **S**, a probabilidade **P** de que esse ponto pertença a **s** será dada por:

$$P = \frac{\text{comprimento de s}}{\text{comprimento de S}}.$$

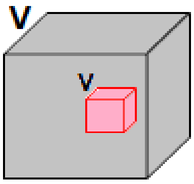


Da mesma forma, admitindo-se que a probabilidade de um ponto pertencer a uma região seja proporcional à área dessa região, independentemente da sua posição, se uma área **a** é parte de uma área **A**, escolhendo-se ao acaso um ponto de **A**, a probabilidade **P** de que esse ponto pertença a **a** será dada por:

$$P = \frac{\text{área de a}}{\text{área de A}}.$$



De igual maneira, admitindo-se que a probabilidade de um ponto pertencer a uma região de IR^3, com volume não nulo, seja proporcional ao volume dessa região, independentemente da sua posição, se um volume **v** é parte de um volume **V**, escolhendo-se ao acaso um ponto de **V**, a probabilidade **P** de que esse ponto pertença a **v** será dada por:



$$P = \frac{\text{volume de v}}{\text{volume de V}}.$$

Essas medidas de probabilidade são também conhecidas como **probabilidades geométricas**. As questões 5, 6, 13, 14 e 16 apresentadas ao final deste trabalho são aplicações de probabilidade geométrica.

Uma pessoa pode, ainda, atribuir a um possível resultado de um experimento uma probabilidade que está de acordo com a crença que ela tem de que o resultado seja obtido.

Quando um médico diz que um paciente tem 10% de chance de sobreviver sem sequelas e 70% de chance de sobreviver com sequelas, este julgamento é baseado nas crenças e informações desse médico sobre o processo. Outro médico, com experiências, crenças ou informações diferentes, pode atribuir uma probabilidade bem diferente para o mesmo resultado. Por essa razão essa probabilidade é dita **probabilidade subjetiva**.

Uma avaliação de um cientista da probabilidade de algum resultado incerto é uma avaliação, com base em todas as evidências disponíveis para ele. Ela pode basear-se na interpretação da frequência de probabilidade quando ele leva em consideração todo um histórico de ocorrências desse resultado ou de resultados similares. Também pode estar fundamentada na definição clássica da probabilidade, uma vez que leve em consideração o número total de resultados possíveis que sejam igualmente prováveis de acontecer.

Portanto, independentemente de ser a interpretação da probabilidade como uma medida de crença, como frequência de ocorrência em um número grande de experimentos ou ainda como uma razão entre casos favoráveis e casos possíveis, suas propriedades matemáticas não se alteram.

Os conceitos anteriores de probabilidade, entretanto, embora muito utilizados, não são suficientes para se embasar uma formulação matemática rigorosa. Para dirimir esse problema, Kolmogorov (2018) estabelece uma **definição axiomática de probabilidade**, em que os conceitos anteriores tornam-se casos particulares.

Seja um experimento aleatório cujo espaço amostral é Ω. Seja P uma função de $\mathcal{A}$ em IR, em que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, que satisfaça os axiomas a seguir:

Axioma 1: Para todo $A \in \mathcal{A}$, $P(A) \geq 0$.

Axioma 2: $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3: Se A_n, n = 1, 2, ..., com $A_i \cap A_j = \varnothing$, se $i \neq j$, ou seja, mutuamente exclusivos dois a dois, então $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

A função P é uma probabilidade e P(A) é a probabilidade de ocorrência do evento A. Ao terno $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dá-se o nome de **espaço de probabilidades**.

Convém ressaltar, porém, que para um fenômeno aleatório, não é único o Espaço de Probabilidades que o representa.

Por exemplo, seja o experimento lançamento de um dado duas vezes observando-se a quantidade de número seis obtida. Pode-se tomar o espaço amostral $\Omega_1 = \{(1,1), (1,2), ..., (6,5), (6,6)\}$ e como P_1 a probabilidade que torna todos os eventos elementares de Ω_1 equiprováveis. Porém, pode-se tomar ainda o espaço amostral $\Omega_2 = \{0,1, 2\}$, em que cada elemento representa a quantidade de vezes que o seis aparece e definir P_2 de maneira que as frequências relativas obtidas num fenômeno real sejam iguais às probabilidades do modelo. Assim, tem-se $P_2(0) = \frac{25}{36}$, $P_2(1) = \frac{10}{36}$ e $P_2(2) = \frac{1}{36}$.

O fenômeno aleatório em questão está sendo representado por dois espaços de probabilidades distintos $(\Omega_1, \mathcal{A}, P_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{A}, P_2)$. A decisão por qual deles utilizar depende dos objetivos pretendidos. Entretanto, um modelo em que os eventos elementares são equiprováveis é mais interessante, pois torna, em geral, os cálculos de quase todas as probabilidades mais fáceis.

Segundo Tenreiro (2002, p. 5),

> A axiomatização da noção de probabilidade, não resolve o problema da atribuição de probabilidade aos acontecimentos de uma experiência aleatória particular. Apenas fixa as regras gerais a que uma tal atribuição deve satisfazer.

Algumas associações do modelo probabilístico aos experimentos aleatórios podem ser feitas de forma simples, atendendo às considerações de um espaço de probabilidade.

Assim, por exemplo, considerando-se o lançamento de uma moeda equilibrada, como todos os elementos do espaço amostral Ω = {ca, co} têm a mesma probabilidade, pode-se tomar a função $P(\{x\}) = \frac{1}{2}$, para todo $x \in \Omega$.

É interessante ressaltar que os diferentes espaços de probabilidade gozam das propriedades da definição axiomática. De maneira geral, se o espaço amostral Ω é finito e equiprobabilístico, pode-se tomar a função $P(\{x\}) = \frac{1}{\#\Omega}$, para todo $x \in \Omega$, em que #A é a cardinalidade do conjunto A.

Essa função e o Axioma 3 levam a $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$, $\forall A \subset \Omega$, ou seja, $P(A) = \frac{\text{nº de casos favoráveis a A}}{\text{nº de resultados possíveis}}$, que é o conceito clássico de probabilidade.

Convém observar que se considerarmos E um conjunto finito e a frequência de A, ou seja, $f(A) = \frac{\text{nº. elementos de A}}{\text{nº. elementos de E}}$, para todo $A \subset E$, podemos destacar que:

1) $f(A) \geq 0,\ \forall A \subset E$
2) $f(E) = 1$
3) Se A_n, n = 1, 2, ..., $A_i \cap A_j = \varnothing$, se $i \neq j$, então $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\right) = f(A_1) + f(A_2) + ...$

Essas propriedades da frequência relativa aproximam a probabilidade frequentista da definição axiomática de probabilidade.

Apesar de não parecer, até a probabilidade subjetiva comunga de todas as propriedades da probabilidade axiomática. Vejamos que na avaliação do médico no exemplo dado anteriormente, a criança teria 80% de chance de sobreviver, sem ou com sequelas; ainda, teria 20% de chance de não sobreviver. Nota-se que atende aos três axiomas propostos por Kolmogorov, estabelecendo-se como uma função de probabilidade.

Várias consequências úteis da definição axiomática de probabilidade podem ser obtidas nas proposições seguintes.

PP.1: $P(\varnothing) = 0$, isto é, o evento impossível tem probabilidade nula.

Demonstração:

Sejam os eventos $A = \varnothing$ e $B = \Omega$. Como A e B são disjuntos, então, pelo Axioma 3 tem-se $P(\varnothing \cup \Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$. Mas $\varnothing \cup \Omega = \Omega$ e $P(\Omega) = 1$ (Axioma 2).

Então $1 = P(\varnothing) + 1$ e, portanto $P(\varnothing) = 0$.

PP.2: $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Demonstração:

Os eventos A e A^C são mutuamente exclusivos. Assim, pelo Axioma 3 tem-se que $P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$. Mas $A \cup A^C = \Omega$ e $P(\Omega) = 1$ (Axioma 2). Logo $1 = P(A) + P(A^C)$, ou seja, $P(A^C) = 1 - P(A)$.

PP.3: Se $A \subset B$ então $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

Demonstração:

Os eventos A e B – A são disjuntos. Assim, pelo Axioma 3 tem-se que $P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$. Mas $A \cup (B - A) = B$. Dessa forma, conclui-se que $P(B) = P(A) + P(B - A)$, ou seja, $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

PP.4: Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração:

Como $A \subset B$, é certo que $B = A \cup (A^C \cap B)$. Assim, pelo Axioma 3 tem-se que $P(B) = P(A) + P(A^C \cap B)$. Mas $0 \leq P(A^C \cap B) \leq 1$ (Axioma 1), o que prova a proposição.

PP.5: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração:

$A \cup B$ pode ser escrito como a união de dois eventos disjuntos A e $A^C \cap B$. Assim, pelo Axioma 3 tem-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B)$. Mas $B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$. Como $(A \cap B)$ e $(A^C \cap B)$ são disjuntos, do Axioma 3, $P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$, ou seja, $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Portanto $P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

PP.6: (Princípio da inclusão-exclusão)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots$$

$$+ (-1)^{k-1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Em que a soma $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ é feita ao longo de todos os $\binom{n}{k}$ subconjuntos possíveis de tamanho k do conjunto {1, 2, 3, ..., n}.

Demonstração:

Suponha que um elemento do espaço amostral não pertença a qualquer um dos Ai. Então, a probabilidade de ocorrência desse elemento não aparecerá na igualdade. Se, porém, um elemento aparece em exatamente **m** dos eventos Ai, sendo m > 0, então aparecerá em $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Sua probabilidade é contada uma vez em $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ e como esse elemento pertence a $\binom{m}{k}$ subconjuntos do tipo $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$, sua probabilidade é contada $\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots \pm \binom{m}{m}$ vezes no lado direito da igualdade da proposição PP.6. Logo, basta demonstrar que $1 = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots \pm \binom{m}{m}$. Mas $(-1 + 1)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^i (1)^{m-i} = 0$, ou seja, $\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \cdots \mp \binom{m}{m} = 0$.

Portanto, $\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots \pm \binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1$.

As proposições PP1 a PP6 demonstradas são válidas, independentemente da probabilidade, ou seja, para qualquer função de conjuntos satisfazendo as condições impostas nas definições anteriores.

4.3. DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Os fenômenos aleatórios podem apresentar padrões, mas são sempre passíveis de flutuações e variabilidade durante a sua observação, independentemente de sua natureza. A distribuição de probabilidade pode modelar incertezas e descrever fenômenos físicos, econômicos, de comportamento, dentre outros.

Diz-se que um espaço de probabilidades tem **Distribuição Uniforme Discreta**, se $P(x_i) = \frac{1}{n}$, para todo $x_i \in \Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $n \in IN$.

A função de probabilidade uniforme discreta pode ser utilizada sempre que o espaço amostral é equiprovável.

Por meio do Axioma 3, pode-se verificar que para qualquer evento $A \subseteq \Omega$, temos que $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, que é a definição clássica de probabilidade.

Diz-se que um espaço de probabilidades tem **Distribuição Bernoulli**, com parâmetro p, em que $0 \leq p \leq 1$, se $P(x_0) = 1 - P(x_1) = p$ e $\Omega = \{x_0, x_1\}$.

A função de probabilidade Bernoulli pode ser utilizada toda vez que o experimento tem apenas dois resultados possíveis.

Denomina-se **ensaio de Bernoulli** qualquer experimento dicotômico, cujos resultados podem ser caracterizados como sucesso ou fracasso.

A observação de determinados números na face superior, após o lançamento de um dado, é um exemplo de um ensaio de Bernoulli.

Diz-se que um espaço de probabilidades tem **Distribuição Binomial**, com parâmetros n e p, em que n é um número natural e $0 \leq p \leq 1$, se a probabilidade de obtermos k vezes o resultado x_0 (sucesso) em *n* ensaios de Bernoulli é dada por $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, com $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$.

O evento em que ocorrem k vezes o resultado x_0 e, consequentemente, (n – k) vezes o resultado x_1 é formado por todas as sequências ordenadas em que aparecem k sucessos (x_0) e n – k fracassos (x_1). O total de sequências ordenadas em tais condições é igual a $P^{n,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Cada sequência ordenada com k sucessos e n – k fracassos tem probabilidade $p^k(1-p)^{n-k}$, uma vez que é composta da intersecção de n eventos independentes, sendo k do tipo "ocorre x_0" (cada um com probabilidade p) e n – k do tipo "ocorre x_1" (cada um com probabilidade 1 – p).

Assim, tem-se P(k) = $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$, com $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$.

Seja uma sequência de ensaios de Bernoulli, independentes, com probabilidade de sucesso igual a p e seja x o número de fracassos até a ocorrência do primeiro sucesso. Então diz-se que um espaço de probabilidade tem **Distribuição Geométrica** com parâmetro p se $P(x) = p(1 - p)^x$, $x \in \{0, 1, 2, ...\}$.

Nota-se que o evento ocorre apenas quando ocorrem x fracassos antes do primeiro sucesso. Logo, trata-se de uma sequência ordenada composta por x + 1 eventos independentes, sendo um do tipo "ocorre x_0 (sucesso)", com probabilidade p e x do tipo "ocorre x_1 (fracasso)", cada um com probabilidade 1 – p.

O nome distribuição geométrica vem do fato de que as sequencias obtidas para P(0), P(1), P(2), ... formam uma progressão geométrica com razão 1 – p.

Considere-se, agora, uma sequência de ensaios de Bernoulli, independentes, com probabilidade de sucesso igual a p. Seja k o número de fracassos até a ocorrência do r-ésimo sucesso. Diz-se que um espaço de probabilidade obtido tem **Distribuição Binomial Negativa** ou **Distribuição de Pascal** e sua função de probabilidade é dada por $P(k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r(1-p)^k$, k = 0, 1, 2, ...

Convém observar que $\binom{k+r-1}{r-1}$ representa o número de combinações possíveis para os (k + r – 1) ensaios, anteriores ao r-ésimo sucesso, nos quais k são fracassos e (r – 1) são sucessos.

Considere uma população com N elementos, particionada em duas populações: uma de tamanho m cujos elementos apresentam uma determinada característica; outra de tamanho (N – m) cujos elementos não apresentam tal característica. Retira-se, nessa população, uma amostra de tamanho **n**, ao acaso e sem reposição, sendo que para cada elemento é observada ou não a presença da característica investigada.

Seja k o número de elementos da amostra que apresentam a característica investigada. Diz-se que o espaço de probabilidade obtido tem **Distribuição Hipergeométrica** com parâmetros m, N e n e sua função de probabilidade é dada por $P(k) = \dfrac{\dbinom{m}{k}\dbinom{N-m}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$, max{0, n – (N – m)} ≤ k ≤ min{m, n}.

Nota-se que como a população é particionada em duas, a observação de cada elemento da amostra caracteriza um ensaio de Bernoulli. Entretanto, tais ensaios não são independentes, uma vez que as retiradas são efetuadas sem reposição.

Seja k o número de vezes que um determinado evento ocorre por unidade de medida (tempo, área, volume, etc ...). Então diz-se que o espaço de probabilidade obtido tem **Distribuição de Poisson** com parâmetro λ e sua função de probabilidade é da forma $P(k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, k = 0, 1, 2, ... e λ é a taxa de ocorrência do evento.

Em muitas situações encontra-se aquela em que o número de ensaios n é grande ($n \to \infty$) e p é pequeno ($p \to 0$). Nesse caso, fica difícil calcular a probabilidade de k sucessos a partir do modelo binomial.

A expressão do modelo binomial $P(k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pode ser escrita na forma $P(k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k . \dfrac{n^k}{n^k} . \left(1 - \dfrac{np}{n}\right)^{n-k} \Rightarrow P(k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} . \dfrac{(np)^k}{n^k} . \left(1 - \dfrac{np}{n}\right)^{n-k}$.

Supondo que n e p são tais que np = λ é constante, tem-se que $P(k) = \dfrac{n(n-1).\cdots(n-k+1)}{k!} . \dfrac{\lambda^k}{n^k} . \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$.

Assim $P(k) = \dfrac{n(n-1).\cdots(n-k+1)}{n^k} . \dfrac{\lambda^k}{k!} . \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$.

Logo $P(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} . 1 . \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) . \cdots . \left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right) . \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$.

Tem-se, então $\lim_{n\to\infty} P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} . \lim_{n\to\infty}\left[1.\left(1-\frac{1}{n}\right).\cdots.\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right] . \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$.

Mas $\lim_{n\to\infty}\left[1.\left(1-\frac{1}{n}\right).\cdots.\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right] = 1$ e $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$.

Portanto $\lim_{n\to\infty} P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, para k = 0, 1, 2, ...

A Distribuição de Poisson é muito utilizada no cálculo de probabilidades de ocorrências de defeitos raros (n >> p) em sistemas e componentes.

Diz-se que um espaço de probabilidades tem **Distribuição Uniforme Contínua**, no intervalo real [a, b], quando P(x) $= \frac{x-a}{b-a}$, se $x \in [a,b)$ e P(b) =1, em que P(x) é a probabilidade de que um ponto escolhido ao acaso no intervalo [a, b], pertença ao intervalo [a, x].

A função de probabilidade uniforme contínua pode ser utilizada para modelar a escolha de um número aleatório entre *a* e *b*.

Algumas questões apresentadas ao final deste trabalho ilustram essas distribuições de probabilidade.

4.4. PROBABILIDADE COMO FUNÇÃO CONTÍNUA DE UM CONJUNTO

Sejam os eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ uma sequência de eventos. Se $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, então a sequência dada é chamada de sequência crescente. Se $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$, então a sequência dada é chamada de sequência decrescente.

Se $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots,\ n \geq 1\}$ é uma sequência crescente de eventos, então pode-se definir um novo evento, representado por $\lim_{n\to\infty} A_n$, como $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Da mesma maneira, se $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots,\ n \geq 1\}$ é uma sequência decrescente de eventos, então pode-se definir $\lim_{n\to\infty} A_n$, como $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Assim, pode-se destacar a seguinte proposição.

PP.7: Seja $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots,\ n \geq 1\}$ uma sequência de eventos, crescente ou decrescente, então $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n)$.

Demonstração:

Se $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots,\ n \geq 1\}$ é uma sequência crescente de eventos, podem-se definir os eventos B_n ($n \geq 1$) como:

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \cap \left(\bigcup\limits_{1}^{n-1} A_i\right)^C = A_n \cap A_{n-1}^C, \ \text{ para } n > 1 \end{cases}$$

Assim, pode-se verificar que B_n corresponde aos resultados de A_n que não se encontram em nenhum dos eventos anteriores a A_n.

Como os eventos B_n são exclusivos, $\bigcup\limits_{1}^{\infty} B_i = \bigcup\limits_{1}^{\infty} A_i$ e $\bigcup\limits_{1}^{n} B_i = \bigcup\limits_{1}^{n} A_i$, para todo $n \geq 1$, tem-se que $P\left(\bigcup\limits_{1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup\limits_{1}^{\infty} B_i\right)$. Mas, pelo Axioma 3, $P\left(\bigcup\limits_{1}^{\infty} B_i\right) = \sum\limits_{1}^{\infty} P(B_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{1}^{n} P(B_i) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\bigcup\limits_{1}^{n} B_i\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\bigcup\limits_{1}^{n} A_i\right)$.

Logo $P\left(\bigcup\limits_{1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$, o que demonstra a proposição para uma sequência crescente de eventos.

Se, porém, $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots,\ n \geq 1\}$ é uma sequência crescente de eventos, então $\{A_1^C, A_2^C, \cdots, A_n^C, \cdots,\ n \geq 1\}$ é uma sequência decrescente e, portanto $P\left(\bigcup\limits_{1}^{\infty} A_i^C\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n^C)$.

Mas, pela Lei de DeMorgan, tem-se que $\bigcup\limits_{1}^{\infty} A_i^C = \left(\bigcap\limits_{1}^{\infty} A_i\right)^C$ e, então $P\left(\left(\bigcap\limits_{i}^{\infty} A_i\right)^C\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n^C)$. Assim, $1 - P\left(\bigcap\limits_{i}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - P(A_n)) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

Logo $P\left(\bigcap\limits_{i}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$, o que completa a demonstração da proposição.

4.5. PROBABILIDADE CONDICIONAL

Sejam os eventos A e B tais que P(B) > 0. Então, define-se a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B por $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Essa equação ainda pode ser escrita como $P(A \cap B) = P(B).P(A \mid B)$.

Se P(A) > 0 temos também que $P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A)$.

A definição de probabilidade condicional permite a conclusão das seguintes proposições.

PP.8: Seja A tal que P(A) > 0. Então:

I) $P(\varnothing \mid A) = 0$ e $P(\Omega \mid A) = 1$

II) $0 \leq P(B \mid A) \leq 1$

III) Se $B_i \cap B_j = \varnothing$, para $i \neq j$, então $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \middle| A\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \mid A)$

Isto é, fixado A tal que P(A) > 0, P(B | A) define uma nova probabilidade na σ-álgebra dos eventos.

Demonstração:

I) $P(\varnothing \mid A) = \dfrac{P(\varnothing \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(\varnothing)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$ e $P(\Omega \mid A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$.

II) O Axioma 1 e a proposição PP.4 permitem concluir que $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$. Dividindo-se a expressão por P(A) > 0, tem-se que $0 \leq \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$, ou seja, $0 \leq P(B \mid A) \leq 1$.

III) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \mid A) = \dfrac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \cap A}{P(A)} = \dfrac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A))}{P(A)} = \sum_{1}^{\infty} \dfrac{P(B_n \cap A)}{P(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \mid A)$.

PP.9: (Teorema do Produto)

Se $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, então $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$ = $P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2)). \ldots .P(A_n \mid (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}))$.

Demonstração:

Por indução, verifica-se que a afirmação é válida para n = 2, ou seja, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).\ P(A_2 \mid A_1)$, que é a definição de probabilidade condicional.

Suponha que seja válida para n = k. Assim $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$ =

$$P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2)).\ \ldots\ .P(A_k \mid (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})).$$

Então basta verificar se a afirmação é válida para n = k +1, ou seja, se $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1})$ = $P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2)).\cdots.P(A_{k+1} \mid (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k))$.

Da probabilidade condicional: $P((A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \cap A_{k+1}) = P(A_{k+1} \mid (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)).P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$

Da hipótese de indução tem-se que:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$ = $P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2)).\cdots.P(A_k \mid (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cdots \cap A_{k-1}))$.

Logo:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1})$ = $P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2)).\cdots.P(A_k \mid (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1})).P(A_{k+1} \mid (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k))$.

Portanto, a afirmação é válida para todo n natural, n > 1.

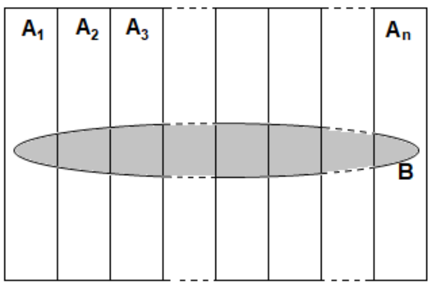
PP.10: (Teorema da Probabilidade Total)

Se B é um evento contido numa união de eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \cdots, A_n$, $P(A_n) > 0$, então

$$P(B) = P(A_1).P(B \mid A_1) + P(A_2).P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n).P(B \mid A_n).$$

Demonstração:

Para $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, o diagrama seguinte ilustra a situação proposta no teorema



Pode-se verificar que B = $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$.

Então $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) = P(A_1).P(B \mid A_1) + P(A_2).P(B \mid A_2) + ... + P(A_n).P(B \mid A_n)$.

PP.11: (Teorema de Bayes)

Considerando as mesmas condições propostas no Teorema da Probabilidade Total, se $P(B) > 0$, então:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)}, \text{ para } i = 1, 2, ..., n.$$

Demonstração:

Da probabilidade condicional $P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)}$. Mas do Teorema da Probabilidade Total, $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)$.

Assim $P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)}$.

4.6. INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS

Dois eventos A e B são chamados independentes, por definição, se

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Essa definição traduz a ideia intuitiva de que há situações em que a ocorrência de um evento B não influencia a ocorrência de um outro evento A. Isso é traduzido por $P(A \mid B) = P(A)$, $(P(B) > 0)$. Como $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ tem-se que $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, ou seja, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, que é válida inclusive quando $P(B) = 0$.

Nota-se que $\varnothing$ e Ω são independentes de qualquer outro evento.

O conceito de independência pode ser estendido para **n** eventos.

$A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes se para todo $k = 2, 3, ..., n$ e para todo $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset \{1, 2, 3, ..., n\}$, tal que $i_1 < i_2 < ... < i_k$ tem-se que:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

Para provar a independência de **n** eventos, é necessário verificar todas as identidades formadas pelo **n** conjuntos tomados 2 a 2, tomados 3 a 3, ..., tomados n a n.

Assim é necessário verificar $\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n - \binom{n}{0}-\binom{n}{1}$, ou seja, $2^n - 1 - n$ identidades.

5. QUESTÕES DE PROBABILIDADE

Serão apresentadas, a seguir, algumas questões de probabilidade, objeto desse trabalho e que ilustram a teoria. São, na sua grande maioria, questões clássicas, ao alcance dos alunos do Ensino Básico.

Algumas dessas questões são, há muitos anos, de domínio público, sendo muito difícil identificar o autor original.

5.1. ELEIÇÕES

Em uma eleição, dois candidatos, A e B, têm na urna a e b votos, respectivamente, a > b. Se as cédulas são tiradas uma a uma, aleatoriamente, e contabilizadas, qual é a chance de que, pelo menos uma vez após a primeira apuração, os candidatos tenham o mesmo número de votos? Qual é a probabilidade de que A esteja sempre na liderança da apuração?

SOLUÇÃO

Para a = 3 e b = 1, as sequências possíveis de resultados da apuração são A A A B, A A B A, **A B A A** e **B A A A** em que as sequências destacadas levam a empates e, portanto, a probabilidade de empate neste exemplo é $\frac{2}{4}$.

Generalizando, deseja-se a quantidade das possíveis sequências de apuração que produzem pelo menos um empate. Considere as sequências em que o primeiro empate aparece quando exatamente 2n cédulas foram contadas, n ≤ b. Para cada seqüência em que A esteja sempre à frente até um primeiro empate (supondo que isto ocorra), há uma sequência correspondente em que B lidera até um primeiro empate. Por exemplo, se n = 4, correspondendo à sequência A A B A B A B B em que A lidera até o empate, existe a sequência complementar B B A B A B A A na qual B sempre lidera. Esta segunda sequência é obtida a partir da primeira substituindo cada A por B e cada B por uma A.

Depois do primeiro empate, todas as sequências possíveis têm empates. Portanto, caso haja empates, o número de sequências com A liderando até o primeiro empate é o mesmo que o número com B na frente até o primeiro empate. O segredo é calcular a probabilidade de obter um primeiro empate com B liderando até então.

Como A tem mais votos do que B, A deve no final estar à frente. Se a primeira votação é um B, então deve haver um empate mais cedo ou mais tarde; o único requisito para obter um empate com B liderando é que B receba o primeiro voto.

A probabilidade de que o primeiro voto seja de B é $\frac{b}{a+b}$.

Mas existe o mesmo número de sequências com empate em que o primeiro voto foi para A. Portanto, P(haver um empate) $= \frac{2b}{a+b}$.

Em todas as outras sequências possíveis em que não há empate em nenhum instante A lidera sempre.

Assim, o evento "A estar sempre na liderança" é o complementar do evento "haver um empate", ou seja, P(A lidera sempre) = $1 - \frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$.

5.2. CARA E COROA

Dois jogadores A e B disputam "cara e coroa" N vezes. Eles registram seus ganhos e perdas. Após o primeiro lance, qual é a chance de que, em nenhum momento durante o jogo, eles estejam iguais?

SOLUÇÃO

O método descrito na solução do problema "Eleições", anterior, pode ser estendido para mostrar que a probabilidade de não obter um empate é P(não há empate) = $\frac{\binom{N-1}{n}}{2^{N-1}}$, para N = 2n + 1 e P(não há empate) = $\frac{\binom{N}{n}}{2^{N}}$, para N = 2n.

Essas fórmulas mostram que a probabilidade é a mesma para N par e para o seguinte número ímpar N + 1. Por exemplo, para N = 2, teremos as seguintes sequências possíveis: **<u>A A</u>**, A B, B A e **<u>B B</u>**. A probabilidade de não haver empate é $\frac{2}{4}$. Já para N = 3, teremos as seguintes sequências possíveis:

A A A, **A A B**, A B A, A B B, B A A, B A B, **B B A** e **B B B**. A probabilidade de não haver empate é $\frac{4}{8}$. As fórmulas são confirmadas em ambos os casos.

Para N = 2n, a probabilidade de x ganhos para A é $\frac{\binom{N}{x}}{2^N}$. Se x ≤ n, a probabilidade de um empate é $\frac{2x}{N}$, com base no resultado do problema "Eleições", anterior, e para x ≥ n é $\frac{2(N-x)}{N}$. Para obter a probabilidade de haver, necessariamente, empate, ponderamos a probabilidade de obter x ganhos com a probabilidade de empate com x ganhos e somamos para obter:

$$\frac{2}{2^N}\left[\frac{0}{N}\binom{N}{0}+\frac{1}{N}\binom{N}{1}+\cdots+\frac{n-1}{N}\binom{N}{n-1}+\frac{n}{N}\binom{N}{n}+\frac{n-1}{N}\binom{N}{N-(n+1)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{N}\binom{N}{N-1}+\frac{0}{N}\binom{N}{N}\right] \text{ (I)}$$

Mas $\frac{n}{N}\binom{N}{n}=\frac{n}{N}.\frac{N!}{n!(N-n)!}=\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}=\binom{N-1}{n-1}$.

Assim (I) pode ser escrito como:

$$\frac{2}{2^N}\left[0+\binom{N-1}{0}+\binom{N-1}{1}\cdots+\binom{N-1}{n-2}+\binom{N-1}{n-1}+\cdots+\binom{N-1}{N-1}+0\right].$$

Essa soma é igual a $\sum_{x=0}^{n}\binom{N-1}{x}$ – $\binom{N-1}{n}$ = $2^{N-1}-\binom{N-1}{n}$.

Assim, a probabilidade de haver empate é P(empate) = $\frac{1}{2^{N-1}}\left[2^{N-1}-\binom{N-1}{n}\right]$, ou seja, P(empate) = $1-\frac{\binom{N-1}{n}}{2^{N-1}}$. O complementar dessa expressão fornece a probabilidade de não haver empate, que é P(não empate) = $\frac{\binom{N-1}{n}}{2^{N-1}}$.

Mas

$$\frac{\binom{N-1}{n}}{2^{N-1}}=\frac{2\cdot\frac{(2n-1)!}{n!(2n-1-n)!}}{2^N}=\frac{2\cdot\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}}{2^N}=\frac{\frac{2n\cdot(2n-1)!}{n\cdot n!(n-1)!}}{2^N}=\frac{\frac{(2n)!}{n!n!}}{2^N}=\frac{\frac{N!}{n!n!}}{2^N}=\frac{\binom{N}{n}}{2^N}.$$

5.3. URNAS DE MOLINA – MOSTELLER (1965)

Duas urnas contêm o mesmo número total de bolas, algumas pretas e algumas brancas em cada uma. De cada urna são retiradas n (n ≥ 3) bolas com reposição. Encontre o número de retiradas e a composição das duas urnas para que a probabilidade de que sejam brancas todas as bolas extraídas da primeira urna seja igual à probabilidade de que sejam todas de mesma cor as bolas retiradas da segunda urna.

SOLUÇÃO

Suponha que a primeira urna possua **z** bolas brancas e a segunda urna possua **x** bolas brancas e **y** bolas pretas.

Como as duas urnas possuem mesmo número de bolas, ambas possuem **x + y** bolas.

Então, o problema passa a ser encontrar os inteiros n, x, y e z, tais que $\left(\frac{z}{x+y}\right)^n = \left(\frac{x}{x+y}\right)^n + \left(\frac{y}{x+y}\right)^n$, ou seja, $z^n = x^n + y^n$, o que, pelo Teorema de Fermat, é impossível, para n ≥ 3.

5.4. MOEDA 1 – XXIX OBM (2008)

João joga repetidamente uma moeda comum e honesta. Quando a moeda dá cara ele ganha 1 ponto, quando dá coroa ele ganha 2 pontos.

Encontre a probabilidade (em função de n) de que João em algum momento tenha exatamente n pontos.

SOLUÇÃO

Seja P_n a probabilidade pedida. Claramente $P_0 = 1$ e $P_1 = \frac{1}{2}$.

A probabilidade de que ele nunca tenha n pontos é $1 - P_n$. Por outro lado, a única forma de nunca ter n pontos é completar n – 1 pontos e depois tirar coroa.

Assim, $1 - P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$.

Donde: $\frac{2}{3} - P_n = \frac{P_{n-1}}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(P_{n-1} - \frac{2}{3}\right)$.

Então, $P_1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_0 - \frac{2}{3}\right)$ e $P_2 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_1 - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(P_0 - \frac{2}{3}\right)$.

Mas, $P_3 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_2 - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3\left(P_0 - \frac{2}{3}\right)$,

Dessa forma, $P_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(P_0 - \frac{2}{3}\right)$ e, portanto, $P_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

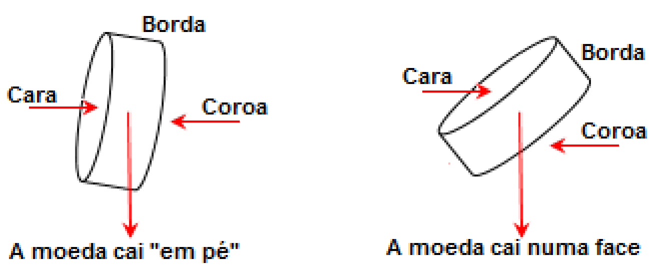
5.5. MOEDA 2 – MOSTELLER (1965)

Calcule a relação entre o raio e a espessura de uma moeda para que a probabilidade de que caia “em pé” seja igual a $\frac{1}{3}$.

SOLUÇÃO

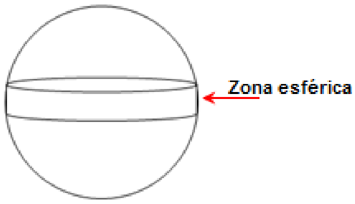
Este problema não tem uma resposta definitiva sem algumas condições simplificadoras. A elasticidade da moeda, a intensidade com que é lançada, e as propriedades da superfície sobre a qual se assenta combinam-se para tornar empírica a questão da vida real.

Podemos, entretanto, simplificar o problema, imaginando a inscrição da moeda em uma esfera, em que o centro da moeda coincide com o centro da esfera. A própria moeda é considerada como um cilindro circular reto. Se o vetor peso encaixa na borda, a moeda cairá “em pé”; caso contrário, cairá numa face.



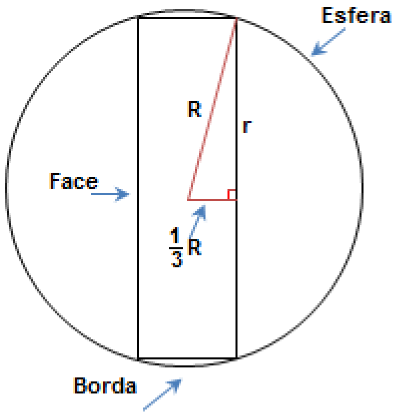
Para simular isso, a moeda poderia ser lançada de tal forma que caísse sobre uma substância espessa e pegajosa que agarrasse a moeda quando a tocasse, e então a moeda iria lentamente ficar sobre a sua borda ou a sua face.

Um teorema chave na geometria sólida simplifica este problema. Quando planos paralelos cortam uma esfera, a faixa semelhante a casca de laranja produzida entre eles é chamada de zona. A área de superfície de uma zona é proporcional à distância entre os planos, e assim, com a aplicação de probabilidade geométrica (ver pág. 27), a moeda deve ter $\frac{1}{3}$ da espessura da esfera.



Relacionando a espessura (e) com o diâmetro da moeda, considera-se que seja R o raio da esfera e r o da moeda.

Pelo teorema de Pitágoras $R^2 = r^2 + (\frac{R}{3})^2$



$$\frac{8}{9}R^2 = r^2$$

$$\frac{R^2}{9} = \frac{r^2}{8}$$

$$\frac{R}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}r$$

$$\frac{e}{2} \cong 0{,}354r \Rightarrow e \cong 0{,}354.2r$$

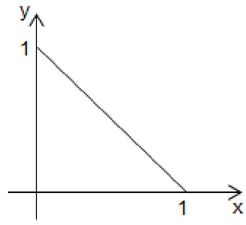
E assim a espessura da moeda deve ter cerca de 35% do diâmetro da moeda.

5.6. PROBLEMA DO PALITO – WAGNER (1997)

Dividindo aleatoriamente um palito em três partes, qual é a probabilidade de que esses pedaços formem um triângulo? Nesse caso, considere dividir aleatoriamente como sendo igualmente prováveis todas as divisões possíveis do palito.

SOLUÇÃO

Trata-se de uma aplicação de probabilidade geométrica (ver pág. 27). Seja um segmento de reta AD de comprimento 1. Dividindo-o em três partes, aleatoriamente, tem-se uma parte, AB, de comprimento x, outra BC, de comprimento y e, consequentemente, a terceira, CD, com comprimento 1 – x – y.

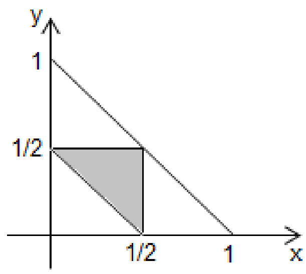


Podemos associar cada forma de dividir o segmento AD a um par ordenado (x, y) em que x > 0, y > 0 e x + y < 1.

Assim, cada forma de dividir um segmento em três partes está representada por um ponto interior ao triângulo da figura ao lado.

Mas nem toda divisão possível permitirá que se construa um triângulo. Um triângulo existe se, e somente se, cada lado for menor que a soma dos outros dois. Assim, teremos x < y + 1 – x – y; y < x + 1 – x – y e 1 – x – y < x + y.

Temos, portanto, $x < \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{2}$ e $x + y > \frac{1}{2}$.



Essas três condições definem que a região dos pontos correspondentes aos valores de x e y para os quais é possível formar um triângulo é o interior do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do triângulo da figura anterior.

Como a área deste triângulo é igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo inicial, a probabilidade de que os três segmentos formem um triângulo é 25%.

5.7. COINCIDÊNCIA DE ANIVERSÁRIOS – FELLER (1968)

Em um grupo aleatório de 50 pessoas qual a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que fazem aniversário no mesmo dia, desprezando-se a existência de anos bissextos?

SOLUÇÃO

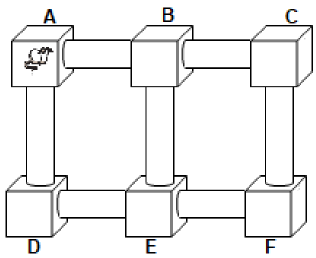
Para determinar esta probabilidade, pode-se utilizar a probabilidade clássica. O número de resultados possíveis para os aniversários de 50 pessoas é 365^{50}. O número de casos possíveis em que todas as pessoas fazem aniversario em dias diferentes é dado por $365\times 364\times \cdot \times 316$.

Portanto, o evento “pelo menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia” é o complementar do evento “todas as pessoas têm aniversários em datas diferentes”, ou seja:

$$P(\text{há coincidência de aniversários}) = 1-\frac{365\times 364\times\cdots\times 316}{365^{50}} \cong 0{,}9704\,.$$

5.8. RATINHO – XXIII OBM (2002)

Um ratinho ocupa inicialmente a gaiola *A* e é treinado para mudar da gaiola atravessando um túnel sempre que soa um alarme. Cada vez que soa o alarme o ratinho escolhe qualquer um dos túneis incidentes a sua gaiola com igual probabilidade e sem ser afetado por escolhas anteriores. Qual a probabilidade de que após o alarme soar 23 vezes o ratinho ocupe a gaiola *B*?



SOLUÇÃO

Seja p_n a probabilidade de que após n alarmes o ratinho esteja na coluna central (B ou E).

Temos $p_0 = 0$ (o ratinho começa em A).

É intuitivo verificar que se o alarme soar um número par de vezes o ratinho estará em A, C ou E e após um número ímpar de vezes em B, D ou F. Logo, após o alarme soar 23 vezes, o ratinho estará em B, D ou F. Então p_{23} será a probabilidade de o ratinho estar em B.

Se, antes de soar o alarme, o ratinho estiver na coluna central ele tem $\frac{1}{3}$ de probabilidade de permanecer lá (independentemente de estar em B ou E). Por outro lado, se ele não está na coluna central ele tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ir para lá.

Assim, $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n)$, ou seja, $p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}p_n$.

Assim:

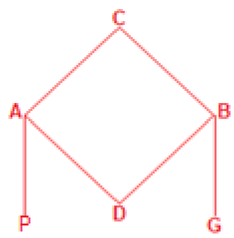
$$p_1 = \frac{1}{2}$$
$$p_2 = \frac{1}{2} - \frac{p_1}{6}$$
$$p_3 = \frac{1}{2} - \frac{p_2}{6}$$
$$p_4 = \frac{1}{2} - \frac{p_3}{6}$$
....
$$p_{23} = \frac{1}{2} - \frac{p_{22}}{6}$$

Preparando as equações:

$$p_1 = \frac{1}{2}$$
$$-6p_2 = -3 + p_1$$
$$6^2.p_3 = 3.6 - 6.p_2$$
$$-6^3.p_4 = -3.6^2 + 6^2.p_3$$
....
$$6^{22}.p_{23} = 3.6^{21} + 6^{21}.p_{22}$$

Somando as equações termo a termo, obtém-se $p_{23} = \frac{3}{7}(1 + 6^{-23}) \cong \frac{3}{7}$.

5.9. MÁQUINA DE JOGO – XXIX OLIMPIADA ESPAÑOLA (1993)



Uma máquina de jogo de um cassino tem um visor em que se oferece um esquema como o da figura. Para começar o jogo, aparece uma bola no ponto P. A cada impulso que recebe do jogador, essa bola se move até uma das letras imediatas com a mesma probabilidade para cada uma delas. A partida termina ao ocorrer a primeira das duas situações seguintes:

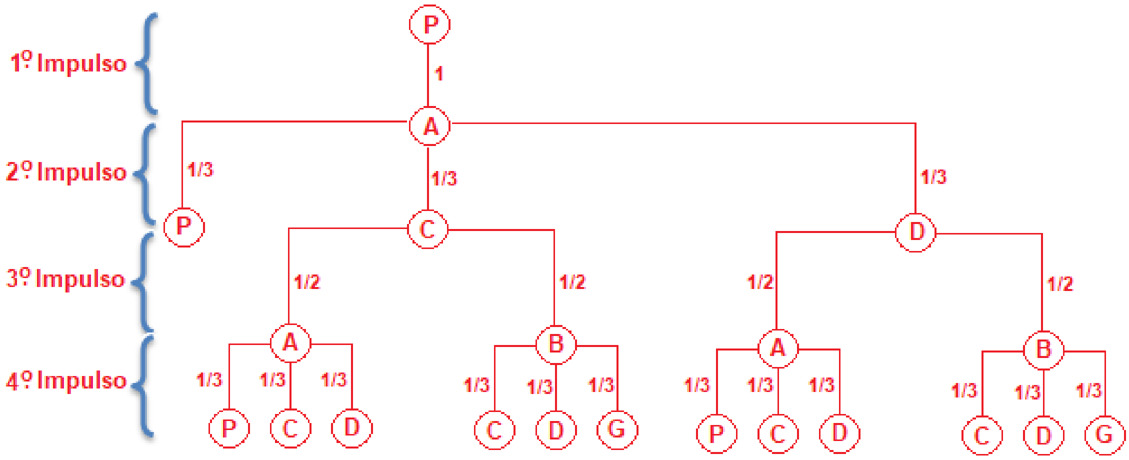
a) A bola volta a P e então o jogador perde.

b) A bola chega a G e então o jogador ganha.

Determine a duração média de um jogo e a probabilidade do jogador ganhar.

SOLUÇÃO

O diagrama a seguir reproduz o desenrolar do jogo:



A probabilidade de que o jogo tenha duração, em impulsos, igual a 2 é:

$$P_2 = 1 \cdot \frac{1}{3}$$

A probabilidade de que o jogo tenha duração, em impulsos, igual a 4 é:

$$P_4 = 2.\left(1.\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+1.\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3^2}$$

A probabilidade de que o jogo tenha duração, em impulsos, igual a 6 é:

$$P_6 = \frac{2}{3}.P_4 = \frac{2^2}{3^3}$$

Assim, a probabilidade de que o jogo tenha duração 2n impulsos é:

$$P_{2n} = \frac{2}{3}.P_{2n-2} = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

Então, a duração média M de um jogo é a soma de cada duração multiplicada pela respectiva probabilidade:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\frac{2^{n-1}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[n.\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

Calculando essa soma:

$$M = 6$$

A probabilidade P de ganhar será igual à probabilidade de ganhar com 2 impulsos, mais a probabilidade de ganhar com 6 impulsos, e assim sucessivamente, sempre em números pares de impulsos. Logo:

$$P = \frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2^2}{3^4}+.... = \frac{1}{3}.$$

5.10. ÓCULOS – XXI OBM (2000)

José tem três pares de óculos: um azul, um branco e um cinza. Todo dia ele escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca usar o mesmo que usou no dia anterior. Se dia primeiro de dezembro ele usou o óculos azul, qual a probabilidade de que dia 25 de dezembro ele volte a usar o azul?

SOLUÇÃO

Chamando de a_n, b_n e c_n as probabilidades de usar os óculos azul, branco e cinza em um dia n qualquer, tem-se que:

$a_1 = 1$ e $b_1 = c_1 = 0$;

$a_n + b_n + c_n = 1$ (I);

$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2}$ e $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ (II);

Fazendo (II) em (I), tem-se: $a_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{a_n}{2}$ e, portanto:

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{a_1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} - \frac{a_2}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{2} - \frac{a_3}{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{2} - \frac{a_4}{2}$$

....

$$a_{25} = \frac{1}{2} - \frac{a_{24}}{2}$$

Preparando as equações:

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_1 = 0$$

$$-2a_3 = -1 + a_2$$

$$4a_4 = 2 - 2a_3$$

$$-8a_5 = -4 + 4a_4$$

....

$$-2^{23} a_{25} = -2^{22} + 2^{22}.a_{24}$$

Somando termo a termo, obtém-se $a_{25} = \frac{1+2^{-23}}{3} \cong \frac{1}{3}$.

5.11. MOEDA DE BERTRAND

Esse problema foi enunciado, pela primeira vez, pelo matemático francês Joseph Bertrand, na sua obra, de 1889, *Calcul des probabilités*.

Há três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma moeda de ouro e outra de prata, e a terceira, duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda, também ao acaso. Se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?

SOLUÇÃO

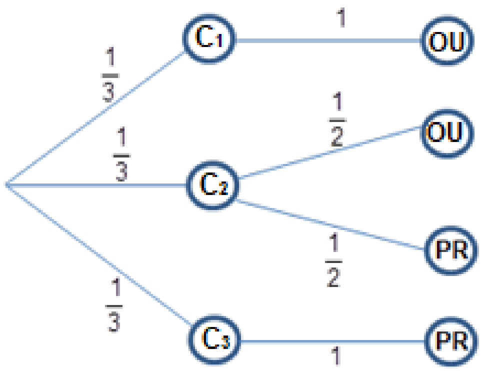
Trata-se de uma questão de probabilidade condicional (ver pág. 38).

Sejam C_i $(1 \leq i \leq 3)$ os eventos em que "a caixa escolhida é a caixa i". Seja OU o evento "a moeda escolhida é de ouro" e PR o evento "a moeda escolhida é de prata".

O problema então resume-se a calcular $P(C_1 \mid OU)$.

Mas, pela teorema de Bayes (ver pág. 40), $P(C_1 \mid OU) = \dfrac{P(C_1 \cap OU)}{P(OU)}$.

A árvore de probabilidades a seguir facilita a obtenção dos dados necessários:



Assim $P(C_1 \cap OU) = \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{3}$ e $P(OU) = \dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Portanto $P(C_1 \mid OU) = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

5.12. PROBLEMA PROPOSTO POR GOMBAULD A PASCAL

O que é mais provável:

a) obter pelo menos um "6" jogando um dado 4 vezes ou

b) obter um par de "6" pelo menos uma vez jogando dois dados simultaneamente 24 vezes?

SOLUÇÃO

a) Seja A o evento "obter pelo menos um 6". Então A^C é "não obter um 6". Para calcular a probabilidade de A^C, pode-se usar a distribuição binomial (ver pág. 33) em que n é igual a 4 e k é igual a 0.

Assim, temos que $P(A^C) = P(0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 (1-\frac{1}{6})^4 = \frac{625}{1296}$.

Logo $P(A) = 1 - P(A^C)$.

Portanto, $P(A) = 1-\frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}5177$

b) Seja B o evento "obter pelo menos um par de 6". Então B^C é "não obter um par de 6". Para calcular a probabilidade de B^C, pode-se usar a distribuição binomial (ver pág. 33) em que n é igual a 24 e k é igual a 0.

Assim, temos que $P(B^C) = P(0) = \binom{24}{0}\left(\frac{1}{36}\right)^0 (1-\frac{1}{36})^{24} \approx 0{,}5086$.

Logo $P(B) = 1 - P(B^C)$ e, portanto, $P(B) \approx 0{,}4914$

Conclui-se, então que é mais provável obter pelo menos um "6" jogando um dado 4 vezes, que obter um par de "6" pelo menos uma vez jogando dois dados simultaneamente 24 vezes.

5.13. O JOGO DO LADRILHO – BUFFON

Era bastante jogado pelas crianças francesas no século XVIII. Uma moeda de raio r é lançada ao acaso em um chão coberto por ladrilhos quadrados de lado a, sendo a > 2r. A aposta era se a moeda cairia atravessando o lado de algum quadrado ou não. Calcule a probabilidade de a moeda cair inteiramente dentro de um ladrilho.

SOLUÇÃO

A probabilidade de a moeda cair inteiramente dentro de um ladrilho é a probabilidade de o centro da moeda cair dentro de um quadrado de lado a − 2r.

Trata-se, portanto, de uma questão clássica de probabilidade geométrica (ver pág. 27), pois a probabilidade de o centro da moeda cair em uma região é proporcional à área dessa região.

Assim a probabilidade de a moedas cair inteiramente dentro do ladrilho é a razão entre a área de um quadrado de lado ℓ − 2r e a área do ladrilho. Portanto, a probabilidade procurada é $\frac{(a-2r)^2}{a^2} = \left(1 - \frac{2r}{a}\right)^2$.

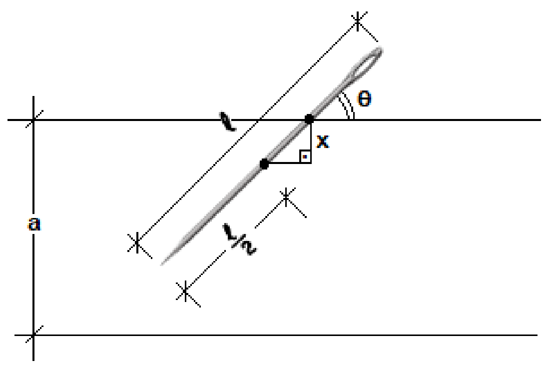
5.14. AGULHA DE BUFFON

Em uma mesa de extensão infinita desenham-se linhas paralelas espaçadas por ***a*** unidades. Uma agulha de comprimento ℓ $(\ell \leq a)$ é girada e jogada ao acaso sobre a mesa. Determinar a probabilidade de a agulha parar cruzando uma linha?

SOLUÇÃO

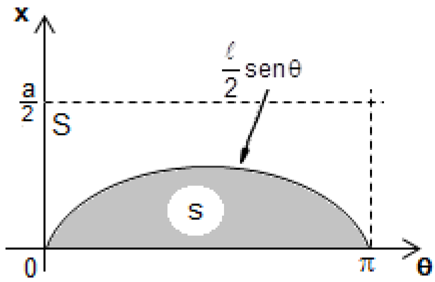
Trata-se de uma questão de probabilidade geométrica (ver pág. 27).

Sejam x a distância do ponto médio da agulha à linha mais próxima e θ o ângulo formado entre a agulha e esta mesma linha, como ilustrado a seguir.



Para cada posição da agulha, tem-se um par de valores $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \pi$. Pode-se observar que a agulha interceptará a linha mais próxima se $x \leq \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta$.

O gráfico a seguir ilustra, para $0 \leq \theta \leq \pi$, os valores de x correspondentes.

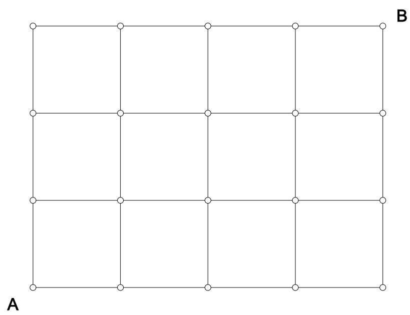


Assim a probabilidade de a agulha parar cruzando uma linha é a razão entre a área sombreada s, abaixo da curva determinada pelos valores de $x \leq \frac{\ell}{2}\text{sen}\theta$, e a área do retângulo S.

Portanto, a probabilidade procurada é $\frac{\text{área de s}}{\text{área de S}} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{\ell}{2}\text{sen}\,\theta\ d\theta}{\pi \times \frac{a}{2}} = \frac{2\ell}{a\pi}$

5.15. ENCONTRO 1 – XXXVI OLIMPIADA ESPAÑOLA (2000)

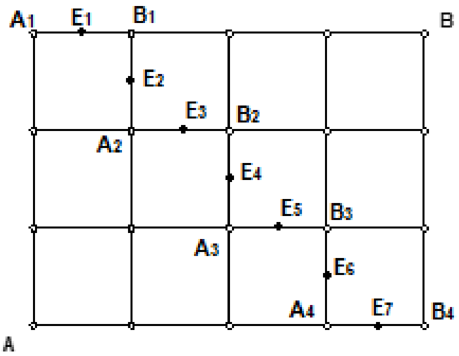
A figura mostra um plano cujas ruas delimitam 12 blocos quadrados. Uma pessoa R parte de A para B e uma Q, de B para A. Ambos partem no mesmo horário, por caminhos de comprimento mínimo, com a mesma velocidade constante.



Em cada ponto em que há duas possíveis direções a tomar, ambas têm a mesma probabilidade. Encontre a probabilidade de que se cruzem.

SOLUÇÃO

Sejam os pontos E_i $(1 \leq i \leq 7)$ de possíveis cruzamentos, os pontos A_j $(1 \leq j \leq 4)$ e os pontos B_k, $(1 \leq k \leq 4)$ em que R e Q estariam na iminência de cruzarem.



Para que possam ir por caminhos de comprimento mínimo, R pode andar apenas para norte (N) ou para leste (L), enquanto Q pode andar apenas para sul (S) ou para oeste (W). Verifica-se que para cada três passos de R (ou de Q), há $2^3 = 8$ trajetos diferentes: NNN, NNL, NLN, LNN, NLL, LNL, LLN e LLL (ou SSS, SSW, SWS, WSS, SWW, WSW, WWS e WWW).

Para calcular a probabilidade de cruzamento, é necessário calcular a probabilidade de R e Q estejam em pontos que permitam o cruzamento (A_1 e B_1, por exemplo) e que ambos passem pelo mesmo ponto.

Assim, a probabilidade de que R e Q se cruzem em E_1 será:

P(R em A_1) $\times$ P(Q em B_1) $\times$ P(R ir por E_1 | R em A_1) $\times$ P(Q ir por E_1 | Q em B_1) $= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{128}$.

A probabilidade de que R e Q se cruzem em E_2 será:

P(R em A_2) $\times$ P(Q em B_1) $\times$ P(R ir por E_2 | R em A_2) $\times$ P(Q ir por E_2 | Q em B_1) $= \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{256}$.

A probabilidade de que R e Q se cruzem em E_3 será:

P(R em A_2) $\times$ P(Q em B_2) $\times$ P(R ir por E_3 | R em A_2) $\times$ P(Q ir por E_3 | Q em B_2) $= \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{256}$.

A probabilidade de que R e Q se cruzem em E_4 será:

P(R em A_3) $\times$ P(Q em B_2) $\times$ P(R ir por E_4 | R em A_3) $\times$ P(Q ir por E_4 | Q em B_2) $= \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{256}$.

A probabilidade de que R e Q se cruzem em E_5 será:

P(R em A_3) $\times$ P(Q em B_3) $\times$ P(R ir por E_5 | R em A_3) $\times$ P(Q ir por E_5 | Q em B_3) = $\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{256}$.

A probabilidade de que R e Q se cruzem em E_6 será:

P(R em A_4) $\times$ P(Q em B_3) $\times$ P(R ir por E_6 | R em A_4) $\times$ P(Q ir por E_6 | Q em B_3) = $\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{256}$.

A probabilidade de que R e Q se cruzem em E_7 será:

P(R em A_4) $\times$ P(Q em B_4) $\times$ P(R ir por E_7 | R em A_4) $\times$ P(Q ir por E_7 | Q em B_4) = $\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{128}$.

Portanto, a probabilidade de que R e Q se cruzem será:

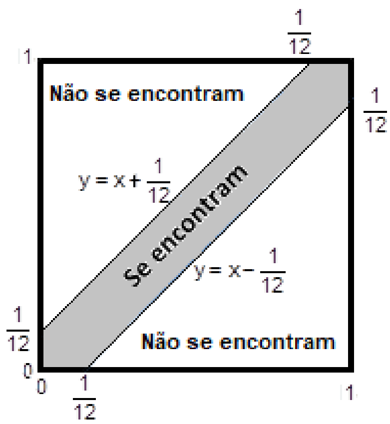
P(R e Q cruzarem) = $\frac{1}{128}+\frac{3}{256}+\frac{9}{256}+\frac{9}{256}+\frac{9}{256}+\frac{3}{256}+\frac{1}{128}=\frac{37}{256}$.

5.16. ENCONTRO 2 – MOSTELLER (1965)

Dois amigos combinam de irem à praça da cidade entre as 17:00 e 18:00 horas de um mesmo dia. Cada um deles, porém, sai da praça exatamente 5 minutos após ter chegado. Qual a probabilidade de que se encontrem? Considere que sejam igualmente prováveis todos os horários possíveis de chegada.

SOLUÇÃO

Sejam x e y as horas de chegadas, medidas durante uma hora, a partir das 17:00. A figura a seguir ilustra a situação em questão, o que permite calcular a probabilidade procurada, por meio do conceito geométrico (ver pág. 27).



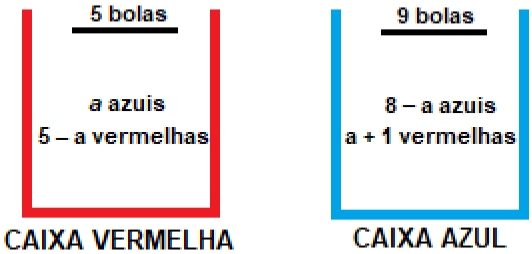
A região sombreada da figura mostra a hora de chegada para a qual os amigos se encontram. A probabilidade de que eles não se encontrem é $\left(\frac{11}{12}\right)^2$, e a probabilidade de que eles se encontram é $1 - \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{23}{144}$.

5.17. BOLAS AZUIS E VERMELHAS – MOSTELLER (1965)

Considere uma urna em que há 6 bolas vermelhas e 8 bolas azuis. Cinco bolas são retiradas aleatoriamente e colocadas em uma caixa vermelha; as restantes 9 bolas são colocadas em uma caixa azul. Qual é a probabilidade de o número de bolas vermelhas na caixa azul mais o número de bolas azuis na caixa vermelha não ser um número primo?

SOLUÇÃO

Seja a o número de bolas azuis na caixa vermelha. Uma vez que há um total de 6 bolas vermelhas e 8 azuis, as cores devem ser distribuídas nas caixas como ilustrado.



Portanto, o número de bolas vermelhas na caixa azul mais o número de bolas azuis na caixa vermelha, ou seja, (a + 1) + a é o número ímpar 2a + 1. Mas a não pode exceder 5, o número total de bolas na caixa vermelha.

Assim, $1 \leq 2a + 1 \leq 11$. O único número ímpar composto neste intervalo é 9. No entanto, devemos também incluir o número 1, que não é primo nem composto. Para obter um valor não primo, então, 2a + 1 deve ser 1 ou 9. Tem-se então a = 0 ou a = 4.

A partir desse ponto, o problema é um caso clássico da distribuição hipergeométrica (ver pág. 35), em que se tem uma população com 14 bolas, das quais 8 possuem a característica “ser azul” e as outras 6, vermelhas, não possuem tal característica. Deseja-se calcular a probabilidade de, na retirada de uma amostra com 5 bolas, nenhuma delas ou 4 delas tenham a característica “ser azul”.

Sabe-se que, na distribuição hipergeométrica, $P(k)=\dfrac{\dbinom{m}{k}\dbinom{N-m}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$. No caso em questão, tem-se N = 14, m = 8, n = 5 e k = 0 ou k = 4.

Assim $P(0\text{ ou }4)=P(0)+P(4)=\dfrac{\dbinom{8}{0}\dbinom{6}{5}}{\dbinom{14}{5}}+\dfrac{\dbinom{8}{4}\dbinom{6}{1}}{\dbinom{14}{5}}=\dfrac{1.6+70.6}{2002}=\dfrac{213}{1001}$.

5.18. PROBLEMA DE MONTY HALL – GRINSTEAD e SNELL (2003)

Esse problema foi inspirado no jogo "Let's Make a Deal" de um programa de auditório do apresentador Monty Hall, exibido na década de 1970.

O jogo consiste no seguinte: Monty Hall apresentava três portas aos concorrentes, sabendo que atrás de uma delas havia um carro e que atrás das outras duas havia cabras.

O procedimento para escolha da porta é o seguinte:

1º.) o convidado escolhe inicialmente, em caráter provisório, uma das três portas;

2º.) o apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre nesse momento uma das outras duas portas, sempre revelando uma cabra;

3º.) o convidado agora tem a opção de ficar com a primeira porta que ele escolheu ou trocar pela porta restante fechada.

Qual é a melhor estratégia para ganhar o carro: ficar com a porta escolhida inicialmente, mudar de porta ou é indiferente?

SOLUÇÃO

Trata-se de uma questão de probabilidade condicional (ver pág.38). Sejam A, B e C as portas. Suponha que o concorrente escolheu a porta A. A probabilidade de o prêmio estar por trás da porta X é P(X) = $\frac{1}{3}$.

A probabilidade condicional de Monty ("M.") abrir ("a.") a porta B se o prêmio está por trás de A é P(M.a.B | A) = $\frac{1}{2}$. A probabilidade condicional de Monty abrir a porta B se o prêmio está por trás de B é P(M.a.B | B) = 0. A probabilidade condicional de Monty abrir a porta B se o prêmio está por trás de C é P(M.a.B | C) = 1.

Portanto, a probabilidade de Monty abrir a porta B é P(M.a.B) = $\frac{1}{2}$ (por cálculo direto ou considerações de simetria entre B e C).

Assim, pelo Teorema de Bayes (ver pág. 40), a probabilidade condicional de o prêmio estar em A se Monty abre a porta B é

$$P(A\,|\,M.a.B) = \frac{P(A) \times P(M.a.B\,|\,A)}{P(M.a.B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Analogamente, a probabilidade condicional de o prêmio estar em C se Monty abre a porta B é

$$P(C\,|\,M.a.B) = \frac{P(C) \times P(M.a.B\,|\,C)}{P(M.a.B)} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Uma vez mais, a probabilidade de sucesso para a estratégia de troca é de $\frac{2}{3}$ e para a de manutenção da escolha é de $\frac{1}{3}$.

5.19. AS DAMAS

Separam-se vinte baralhos normais. Tomam-se, de cada um dos primeiros dez baralhos, quatro cartas: um rei (K), um valete (J), uma dama de espadas (Q♠) e uma dama de copas (Q♥). Entregam-se duas cartas quaisquer de cada grupo de quatro cartas separadas para cada um dos dez componentes do grupo de João. De cada um dos outros dez baralhos, separam-se as mesmas quatro cartas, entregando duas quaisquer de cada uma das quatro cartas separadas para cada um dos dez componentes do grupo de Maria.

João revela que no seu grupo cada um tem uma dama e Maria revela que no seu grupo, cada um tem uma dama de espadas.

Se desejarmos escolher uma pessoa que tenha duas damas, a maior probabilidade será se escolher uma pessoa de qual grupo?

SOLUÇÃO

Trata-se de uma questão de probabilidade condicional (ver pág. 35).

As pessoas do grupo do João podem ter K e Q♠, ou K e Q♥, ou J e Q♠, ou J e Q♥, ou Q♠ e Q♥. A probabilidade de uma pessoa desse grupo ter duas damas, sabendo-se que todos têm uma dama é P(João duas damas) = $\frac{1}{5}$.

As pessoas do grupo de Maria podem ter K e Q♠, ou J e Q♠, ou Q♠ e Q♥. A probabilidade de uma pessoa desse grupo ter duas damas, sabendo-se que todos têm uma dama de espadas é P(Maria duas damas) = $\frac{1}{3}$.

Assim, a pessoa escolhida deve ser do grupo da Maria.

5.20. DADOS 1 – XXIV OBM (2003)

Quantos dados devem ser lançados ao mesmo tempo para maximizar a probabilidade de se obter exatamente um 2?

SOLUÇÃO

Suponha que os dados estão numerados de 1 a n. A probabilidade de que somente o dado 1 resulte em 2 é:

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\cdots\frac{5}{6}=\frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

A probabilidade de que somente o dado k, $(1 \le k \le n)$ resulte em 2 é

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\cdots\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{5}{6}=\frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Portanto, a probabilidade de obter exatamente um 2 é

$$P_n=\frac{5^{n-1}}{6^n}+\frac{5^{n-1}}{6^n}+\ldots+\frac{5^{n-1}}{6^n}=n\cdot\frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Agora observe que

$$P_n \ge P_{n+1} \Leftrightarrow n\cdot\frac{5^{n-1}}{6^n} \ge (n+1)\cdot\frac{5^n}{6^{n+1}} \Leftrightarrow 6n \ge 5(n+1) \Leftrightarrow n \ge 5.$$

Para n = 5, ocorre a igualdade ($P_5 = P_6$), $P_5 = P_6 > P_7 > P_8 > P_9 > \ldots$ e $P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < P_5 = P_6$

E a probabilidade é máxima para n = 5 ou n = 6.

5.21. QUESTÃO DO PARADOXO DA INTERNET

Essa questão apareceu na Internet, por volta de 2011 e gerou grande polêmica: Se você escolher uma das alternativas a seguir aleatoriamente, qual a probabilidade de sua resposta estar correta?

A) 25%

B) 50%

C) 60%

D) 25%

SOLUÇÃO

Supondo que há resposta correta, o problema tem solução.

São 12 as escolhas possíveis, pois para cada uma das 4 letras, há a possibilidade de existirem 3 respostas certas. Por exemplo, se a escolha é letra A, a resposta certa pode ser 25%, 50% ou 60%. Assim Ω = {(A, 25%), (A, 50%), (A, 60%), (B, 25%), (B, 50%), (B, 60%), (C, 25%), (C, 50%), (C, 60%), (D, 25%), (D, 50%), (D, 60%)}. Em que (N, p%) significa que a escolha é a letra N e a resposta correta é p%.

Seja X o evento “a resposta está correta”. Assim X = {(A, 25%), (B, 50%), (C, 60%), (D, 25%)}. Logo, a probabilidade de sua resposta estar correta é $P(X) = \frac{4}{12}$, ou seja, $P(X) = \frac{1}{3}$.

5.22. PEÇAS DEFEITUOSAS

Uma fábrica fornece parafusos em caixas com 40 unidades cada, sendo que a compra dos parafusos é feita em lotes de 100 caixas. Para conferir o lote, o comprador retira uma caixa e realiza uma inspeção, aceitando o lote se até a metade da caixa, no máximo 2 parafusos forem defeituosos. Por outro lado, se até a inspeção da metade da caixa, três ou mais parafusos são defeituosos, o lote todo é devolvido ao fornecedor. Considerando que o fabricante dos parafusos afirma que 10% dos parafusos produzidos possuem algum defeito na hora do uso, calcule a probabilidade de que a devolução do lote ocorra exatamente ao se testar a metade da caixa de parafusos.

SOLUÇÃO

Esse é um caso clássico de Distribuição Binomial Negativa (ver pág. 34).

Deve-se então calcular a probabilidade de que sejam 17 fracassos (não encontrar parafuso defeituoso) até a ocorrência de 3 sucessos (encontrar parafuso defeituoso) em 20 parafusos verificados.

Assim $P(k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k$, com k = 17, x = 3 e p = 0,1.

Logo $P(17) = \binom{17+3-1}{3-1} (0,1)^3 (0,9)^{17}$ = $\binom{19}{2} (0,1)^3 (0,9)^{17} = 0,0285$.

Portanto a probabilidade de que o lote seja devolvido exatamente ao se testar a metade da caixa de parafusos é de 2,85%.

5.23. FILA DE BANCO

Na fila de um banco, em horário de pico, os clientes chegam a uma taxa de 3 por minuto. Calcule a probabilidade de que:

a) em um minuto cheguem apenas dois clientes;

b) em cinco minutos cheguem apenas oito clientes.

SOLUÇÃO

Esse é um caso clássico de Distribuição de Poison (ver pág. 35).

a) Assim $P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, com λ = 3.

Logo $P(2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = 0,224$.

Portanto, a probabilidade de que em um minuto cheguem apenas dois clientes é de 22,4%.

b) Tem-se uma taxa de 15 clientes a cada 5 minutos. Assim, λ = 15.

Logo $P(8) = \frac{15^8 e^{-15}}{8!} = 0,019$.

Portanto, a probabilidade de que em cinco minutos cheguem apenas oito clientes é de 1,9%.

5.24. CONTROLE DE QUALIDADE

Uma indústria vende grampos em embalagens de 500 unidades. O processo de empacotamento tem como limite inferior 499 unidades, sendo que, as embalagens devem ter número superior a este limite. O processo, entretanto, produz 2% de embalagens abaixo do limite. Nas inspeções, os fiscais do INMETRO costumam recolher 10 pacotes do produto e conferir cada um deles. Assim, qual é a probabilidade de que no máximo dois pacotes estejam abaixo do limite inferior?

SOLUÇÃO

Esse é um caso clássico de Distribuição Binomial (ver pág. 33).

Assim $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, com n = 10 e p = 0,02.

Logo $P(\leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$$P(\leq 2) = \binom{10}{0}(0{,}02)^0(0{,}98)^{10} + \binom{10}{1}(0{,}02)^1(0{,}98)^9 + \binom{10}{2}(0{,}02)^2(0{,}98)^8.$$

Então $P(\leq 2) = 0{,}817 + 0{,}167 + 0{,}015 = 0{,}999$.

Portanto a probabilidade de que no máximo dois pacotes estejam abaixo do limite inferior é de 99,9%.

5.25. DADOS 2

Alberto e Bernardo disputam um jogo com um “dado” equilibrado que possui n faces. Ganha o jogo quem tirar o número 1 primeiro. Os dados são lançados alternadamente, começando por Alberto. Calcule a probabilidade de Bernardo ganhar, após n lançamentos de cada um.

SOLUÇÃO

Essa é uma questão com Distribuição Geométrica (ver pág. 34).

Seja P(A) a probabilidade de Alberto ganhar e P(B) a probabilidade de Bernardo ganhar, em cada lançamento.

Assim, $P(A) = P(B) = \frac{1}{n}$ e $P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = \frac{n-1}{n}$.

A probabilidade de B ganhar no primeiro lançamento é:

$$P(\overline{A}) \times P(B) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^2}.$$

A probabilidade de B ganhar no segundo lançamento:

$$P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times P(\overline{A}) \times P(B) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{(n-1)^3}{n^4}$$

A probabilidade de B ganhar no terceiro lançamento:

$$P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times P(\overline{A}) \times P(B) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{(n-1)^5}{n^6}$$

A probabilidade de B ganhar no n-ésimo lançamento:

$$P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times \cdots \times P(\overline{A}) \times P(B) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{(n-1)^{2n-1}}{n^{2n}}$$

A probabilidade de B ganhar é igual:

$$\frac{n-1}{n^2} + \frac{(n-1)^3}{n^4} + \frac{(n-1)^5}{n^6} + \cdots + \frac{(n-1)^{2n-1}}{n^{2n}} = \frac{(n-1)}{2n-1} . \left[1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^{2n} \right].$$

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

O estudo de probabilidade e estatística (as duas devem caminhar juntas) é de fundamental importância para o desenvolvimento de uma sociedade, pois favorece acentuadamente a aquisição de estratégias e o desenvolvimento da competência, da análise crítica e da argumentação.

A preocupação com o ensino de probabilidade é patente nos países chamados desenvolvidos, uma vez que todos reconhecem a destacada ajuda nos processos inerentes à vida social e econômica, desenvolvendo de maneira eficaz a capacidade de tomada de decisões, quando o acaso está presente.

Entretanto, tal preocupação no Brasil, embora apareça nos PCN, não é verificada nos livros didáticos em nível de ensino médio e muito menos nos de educação infantil ou fundamental. É urgente a inclusão do ensino de probabilidade e estatística nos diversos níveis de educação, explorando todas as suas muitas facetas.

Mas aliado a isso, é necessário que sejam feitas pesquisas que permitam verificar as reais necessidades educacionais dos professores em relação a cada uma das diferentes abordagens de probabilidade, que possibilitem a introdução correta aos estudantes, nas diferentes fases da educação.

No Ensino Médio no Brasil, explora-se apenas a abordagem clássica, que se resume a aplicação da análise combinatória no cálculo de casos possíveis e casos favoráveis. Talvez por isso, o Estudo de Probabilidades seja um grande tabu, não só entre os alunos, mas também entre professores.

A resolução de problemas que sejam interessantes, quer seja pelos aspectos históricos envolvidos, quer seja pelas suas peculiaridades, pode despertar em alunos e professores o prazer de estudar e aprofundar no estudo de probabilidade e estatística.

Como ainda é muito incipiente o ensino de probabilidade no Brasil, sugerem-se pesquisas que possam:

a) verificar de que maneira o desenvolvimento do pensamento estocástico pode contribuir para melhorar as competências matemáticas, assim como em outras áreas do conhecimento;

b) pesquisar maneiras que permitam que os alunos sejam envolvidos em análise de processos que envolvam o acaso;
c) pesquisar as experiências bem sucedidas em outros países, bem como a possibilidade de aplicação no Brasil;
d) uso da tecnologia para a modelagem de problemas reais que utilizam modelos probabilísticos.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C et all – **Research on Teaching and Learning Probability.** Hamburg: Springer, 2016.

BATANERO, C., et all. – **Training teachers to teach probability**. Journal of Statistics Education, Volume 12, Número 1, 2004. Disponível em <http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html> Acesso em 10 de maio de 2018.

BRASIL, Ministério da Educação. – **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. 5ª à 8ª série**. Brasília: SEF, 1998.

COUTINHO, C. Q. S. – **Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?**. Revista Eletrônica de Educação Matemática.V2.3, 2007.

COUTINHO, C. Q. S. e GONÇALVES, M. C. – **O Livro Didático e a Formação do Professor de Matemática para o Ensino de Probabilidades**. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2, 2003, Santos. Anais. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2003.

DAVID, F. N. – **Games, Gods and Gambling**. Mineola (NY): Dover Publications, 1998.

FELLER, W. – **An Introduction to Probability Theory and Its Applications**. New York: Wiley, 1968.

FERNANDEZ, P. J. – **Medida e Integração.** Projeto Euclides, São Paulo: Bücker, 1976.

FERNANDEZ, P. J. – **Introdução à Teoria das Probabilidades.** Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

GNEDENKO, B. V. – **The Theory of Probability**. Moscow: MIR Publishers, 1969.

GONÇALVES, M. C. – **Concepções de Professores e o Ensino de Probabilidade na Escola Básica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC/SP, 2004.

GRINSTEAD, C.M. E SNELL, J. L. – **Introduction to Probability**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2003.

GUIMARÃES, R. C. e CABRAL, J. A. – **Estatística**. Lisboa: McGrw-Hill, 1977.

HACKING, I. – **The emergence of probability**. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1975.

HENRY, M. – **Evolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilities**. Commission Inter-IREM Statistique et Enseignement. Besançon: Presses Universitaires de Franche-Comté, 2010.

HOYT, J. P. – **a brief introduction to Probability Theory.** Scranton: International Textbook Company, 1967.

KATZ, V. J. – **A History of Mathematics: an introduction.** Boston: Addison-Wesley, 2009.

KENDALL, M. G. – **Statistics Theory and Practice: Selected Papers.** A Charles Griffin Book. Oxford (UK): Oxford University Press, 1987.

KOLMOGOROV, A. N. – **Foundations of the Theory of Probability**. New York: Dover, 2018.

LOPES, C. A. E. e MORAN, R. C. C. P. – **A estatística e a probabilidade através das atividades propostas em alguns livros didáticos brasileiros recomendados para o ensino fundamental**. In: Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística – Desafios para o Século XXI, 1999, Florianópolis. Anais. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 1999.

MAGALHÃES, M. N. – **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2006.

MENDOZA, L. P. e SWIFT, J. – **Why Teach Statistics and Probability: a rationale**. In: SHULTE, A P.; SMART, J. R. (Org.). Teaching Statistics and Probability. Nova York: Yearbook, 1981.

MEYER, P. L. – **Probabilidade: Aplicações à Estatística**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

MOSTELLER, F. – **Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions**. New York: Dove Publications, Inc., 1965

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – **XXI OBM**. Revista Eureka!, n. 7, p. 19. Rio de Janeiro: Impa, 2000.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – **XXIII OBM**. Revista Eureka!, n. 13, p. 41. Rio de Janeiro: Impa, 2002.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – **XXIV OBM**. Revista Eureka!, n. 16, p. 17. Rio de Janeiro: Impa, 2003.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – **XXIX OBM**. Revista Eureka!, n. 28, p. 57. Rio de Janeiro: Impa, 2008.

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑHOLA – **XXIX Olimpiada Matemática Españhola – Fase Nacional**. Madri: 1993.

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑHOLA – **XXXVI Olimpiada Matemática Españhola – Fase Nacional**. Palma de Mallorca: 2000.

ROSS, S. M. – **Probabilidade: Um curso moderno com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SILVA, C. B. e COUTINHO, C. Q. S. – **O nascimento da Estatística e sua relação com o surgimento da Teoria da Probabilidade**. Revista Integração. v. ano XI, n. 41, p. 191-196, 2005.

SILVA, I. M. – **Probabilidade: A visão Laplaciana e a visão Frequentista na Introdução do Conceito**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC/SP, 2002.

SILVEIRA, J. F. P. – **Início da matematização das probabilidades. Versão 2001.** Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html> Acesso em: 20 de abril de 2018.

STEINNMETZ, A. – **The Gaming Table: Its Votaries and Victims. in Two Volumes.-Vol. II.** Teddington(UK): Echo Library, 2010.

STOHL, H. – **Probability in teacher education and development**. In G. Jones (Ed.), Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning. New York: Springer, 2005.

TENREIRO, C. – **Apontamentos de Teoria das Probabilidades**. Coimbra: ATP, 2002

TODHUNTER, I. – **A History of The Mathematical Theory of Probability: from the time of Pascal to that of Laplace**. Cambridge and London: Macmillan and Co., 1865.

TUNALA, N. – **Determinação de probabilidades por métodos geométricos**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 20, p. 16-22, 1995.

VIALI, L. – **Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades.** Revista Brasileira de História da Matemática. n. 16, v. 8, p. 143-153. Out. 2008.

XAVIER, T. M. B. S. e XAVIER, A. F. S. – **Probabilidade: teoria e problemas**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

WAGNER, E. – **Probabilidade geométrica - o problema do macarrão e um paradoxo famoso.** Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 34, p. 28-35, 1997.

WUSSING, H. – **Lecciones de Historia de las Matemáticas**. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1998.