



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

José Paulo Camolez

Modelo de regressão bivariado via cópulas para dados discretos e censurados

Brasília
2018

José Paulo Camolez

**Modelo de regressão bivariado via cópulas
para dados discretos e censurados**

Orientadora:

Prof.^a Dr.^a **Juliana Betini Fachini Gomes**

Coorientadora:

Prof.^a Dr.^a **Cira Etheowalda Guevara Otiniano**

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília como requisito para obtenção do título de Mestre em Estatística.

**Brasília
2018**

Termo de Aprovação

José Paulo Camolez

Modelo de regressão bivariado via cópulas para dados discretos e censurados

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Data da defesa: 13 de dezembro de 2018

Orientadora:

Prof.^a Dr.^a Juliana Betini Fachini Gomes
Departamento de Estatística, UnB

Coorientadora:

Prof.^a Dr.^a Cira Etheowalda Guevara Otiniano
Departamento de Estatística, UnB

Comissão Examinadora:

Prof.^a Dr.^a Cátia Regina Gonçalves
Departamento de Matemática, UnB

Prof. Dr. Antônio Eduardo Gomes
Departamento de Estatística, UnB

Prof. Dr. Helton Saulo Bezerra dos Santos
Departamento de Estatística, UnB

**Brasília
2018**

"Tudo só é 100% possível, se você tentar 100%".

Anita Brito.

Dedicatória

A Deus

A minha esposa, Albertina Neta

A minha família, especialmente minha mãe

A todos os meus amigos

Dedico este trabalho!

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me abençoar, dando-me força e sabedoria para que nos momentos mais difíceis eu as usasse como auxílio para seguir em frente, e chegar a esse momento tão esperado, a conclusão do mestrado. E por conceder-me ao colo de minha mãe, Maria José Camolez Silva, a qual me deu todo seu carinho e proteção, que junto a meus irmãos mais velhos me educou e mostrou os caminhos mais certos a seguir, até o momento em que Deus pôs em meu caminho Albertina Neta, mulher a qual eu amo muito e que acompanhou todo o meu percurso até a esta vitória, mulher cujo nos momentos mais difíceis estava lá para me incentivar, apoiar e dar forças para enfrentar e vencer os obstáculos obtidos nesta caminhada, a qual sempre dizia: "Você consegue, vai dar tudo certo". Assim em meio aos sofrimentos, suas palavras vinham a me acalantar, pois ela sempre acreditava que eu podia sempre mais.

A minha orientadora Prof.^a Dr.^a Juliana Betini Fachini Gomes, por ter concedido a honra de ser o seu primeiro orientando oficial no programa de Pós-Graduação. Por ter acreditado e confiado em mim para a realização deste trabalho, e claro, por depositar toda a sua confiança e positividade durante todo processo de realização do mesmo, o que gerava mais força para desempenhá-lo. Que, para dar mais riqueza ao nosso trabalho uniu-se à Prof.^a Dr.^a Cira Etheowalda Guevara Otiniano minha coorientadora, somando assim diversos conhecimentos para todo o sucesso do trabalho. Muito grato pelo conhecimento que passei a adquirir após nossa união, e que possamos mantê-la firme. Pois creio que não poderia ter havido uma melhor união para a realização deste trabalho. Agradeço por toda as suas espontaneidades e disponibilidades em poder atender e tirar todas as dúvidas.

Ao Denilson Bandeira, Prof. Dr. do Instituto de Ciência Política e ao Márcio Corrêa seu orientando, pois a partir do seu projeto de tese é que nasceu o nosso projeto de dissertação. Agradeço por depositar esta confiança e ter nos dado esta grande responsabilidade, pois grande é a satisfação em poder colaborar com o estudo. Como diz João de Paula: "[...] a união faz a força, o diálogo faz o entendimento". Obrigado por terem sido o ponto chave para a realização deste estudo.

Ao grande amigo Rubens, que não bastou fazer a graduação juntos, me incentivou e deu forças para fazer o processo seletivo do mestrado e que a partir do resultado nos encorajamos e viemos com a cara e a coragem, enfrentando todos os obstáculos com garra

e persistência. Grande foi nossa luta, ainda maior é nossa vitória. Um amigo para todas as horas, obrigado pela parceria.

A Luana Lúcia, uma amiga desde a graduação que nos recepcionou em Brasília, acomodando-nos em seu apartamento até conseguirmos nos ajeitar. Muito grato.

Aos grandes amigos e colegas tornados nesta caminhada, essencialmente a grupo de estudo dos finais de semanas que se formou (Alisson, Gesiane, Isabel, Analu, Erique, Geisiane e Márcia), onde passamos por dias de lutas, e que com felicidades comemoramos algumas vitórias.

Ao grande Adolfo, pessoa humilde e de bom coração, estando sempre ali disposto a me ajudar.

Ao Leonardo e Regina que entraram no programa em 2018 e que com pouco tempo nos tornamos amigos, e após varar uma madrugada fazendo trabalho isso só oficializou (risos), e que assim permaneça. E também a Kessys e Bruno da turma de 2018, que já nos conhecíamos. Valeu Bruno por auxiliar na programação do gráfico e Kessys por ter nos convidado a conhecer o Jardim Botânico, onde fizemos uma longa caminhada em uma trilha que nos levava a lugar algum (risos).

Ao Programa de Pós-Graduação em Estatística - PGEST/UnB - pela oportunidade de realizar o mestrado. Em geral, um agradecimento a todos os docentes pelos conhecimentos compartilhados, pois são muitas as contribuições para este novo nível de conhecimento. E a todos presentes no departamento de Estatística, especialmente a Adriana e Vera da portaria, por serem tão atenciosas.

Agradecimento a Jady e Paloma, que fizeram um ótimo trabalho na organização da base do banco de dados, o qual pude utilizá-los e realizar a aplicação do nosso modelo. E obrigado Jady, pelo auxílio ao *software* R.

Agradeço a todos os meus professores da graduação que transmitiram grandes e diversos conhecimentos, exclusivamente aos professores Nerio e Roziane pelo incentivo a realizar o mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O presente estudo propôs modelos de sobrevivência bivariados baseados nas cópulas arquimedianas de Gumbel, Frank e Clayton com marginais Log-Logística discretas para modelar a dependência de dados de sobrevivência bivariados discretos e censurados. Ao considerar presença de covariáveis, foi proposto os modelos de regressão bivariados via cópula para dados discretos e censurados. Os parâmetros dos modelos foram estimados pelo método de máxima verossimilhança paramétrica em um único passo. Para estudar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança, realizou-se estudos de simulação de Monte Carlo por meio do *software* R. Finalmente, para exemplificar o uso dos modelos de regressão propostos, realizou-se uma aplicação a dados de sobrevivência com dois eventos de interesse, o tempo até a adoção da Lei de Zoneamento para Uso e Ocupação de Solo (ZUOS) e o tempo até a adoção da Lei de Zona Especial de Interesse (ZEIS). O modelo final foi definido pelo método *Forward* com covariáveis significativas a nível de 10%. Os resultados confirmam que os modelos são adequados para analisar os dados relacionados à adesão de Políticas Públicas, em que o modelo de regressão bivariado via cópula de Clayton obteve o melhor ajuste no ponto de vista estatístico. Já no ponto de vista político, os modelos de regressão bivariados via cópula de Gumbel e Frank se tornam preferíveis por conter mais informações sobre a adoção da Política ZUOS. Portanto, os modelos de regressão bivariados via cópulas propostos neste trabalho, apresentam-se como uma nova metodologia para analisar dados de sobrevivência com respostas bivariadas discretas, censuradas e na presença de variáveis explicativas

Palavras-chave: Dados bivariados e censurados, Cópulas arquimedianas, Estimação por máxima verossimilhança paramétrica, Distribuição Log-Logística discreta, Modelos de regressão.

Abstract

The present study propose bivariate survival models based on the Archimedean copulas of Gumbel, Frank and Clayton with discrete Log-Logistic marginals to model the dependence of discrete and censored bivariate survival data. When considering the presence of covariates, we proposed bivariate regression models via copula for discrete and censored data. The parameters of the models were estimated by the parametric maximum likelihood method in a single step. In order to explore maximum likelihood estimators performance, we used Monte Carlo simulation studies through the R *software*. Finally, to exemplify the proposed regression models, it was made an application to survival data with two events of interest: the time until adoption of the Zoning for Use and Occupancy of Soil (ZUOS) law, and the time until adoption of Special Area of Interest (SAI) law. The final model was defined by the “*Forward*” method, with significant covariates of 10% level. The results confirm that the models are adequate to analyze data related to the adherence of Public Policies, in which the model of bivariate regression via copula of Clayton obtained the best adjustment in the statistical point of view. In the political point of view, the bivariate regression models via copula of Gumbel and Frank, became preferable because they contain more information about the adoption of the (ZUOS) Policy. Therefore, the bivariate regression models proposed in this work are presented as a new methodology to analyze survival data with discrete, censored, bivariate responses, in the presence of explanatory variables.

Keywords: Bivariate and censored data, Archimedean copulas, Estimation per maximum parametric likelihood, Discrete Log-Logistic Distribution, Regression Models.

Simbolos

- \mathbb{D} função de cópulas
- $\overline{\mathbb{D}}$ cópula de sobrevivência
- F função de distribuição
- F_j função de distribuições marginais
- v.a.* variável aleatória
- v.a'.s* variáveis aleatórias
- LL distribuição Log-Logística
- fda* função de distribuição acumulada
- fmp* função massa de probabilidade
- AIC Critério de Akaike
- BIC Critério de informação Bayesiano
- IFM inferência para as marginais
- EMV estimação de máxima verossimilhança
- MMV método de máxima verossimilhança
- LLD distribuição Log-Logística Discreta
- LLC distribuição Log-Logística Contínua
- NEP Número efetivo de partidos
- ZEIS lei sobre Zona Especial de Interesse
- ZOUS lei sobre Zoneamento de Uso e Ocupação de Solo
- BFGS Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (método de otimização)
- MRLLD Modelo de regressão Log-Logístico discreto

Lista de Figuras

3.1	Curvas de nível para cópula de Gumbel, (a) $\gamma = 1.1$, (b) $\gamma = 1.5$ e (c) $\gamma = 3.0$.	33
3.2	Curvas de nível para cópula de Frank , (a) $\gamma = -5.0$, (b) $\gamma = 0.1$ e (c) $\gamma = 5.0$.	34
3.3	Curvas de nível para Cópula de Clayton, (a) $\gamma = -0.1$, (b) $\gamma = 1.0$ e (c) $\gamma = 3.0$.	34
6.1	Estimativa de Kaplan-Meier e o ajuste da distribuição LLD para Política ZUOS (a) e Política ZEIS (b).	71
6.2	Estimativas de Kaplan-Meier, ajustes da LLD, e o ajuste pela cópula de Gumbel para a Política ZUOS (a) e Política ZEIS (b).	73
6.3	Estimativas de Kaplan-Meier, ajustes da LLD, e o ajuste pela cópula de Frank para a Política ZUOS (a) e Política ZEIS (b).	73
6.4	Estimativas de Kaplan-Meier, ajustes da LLD, e o ajuste pela cópula de Clayton para a Política ZUOS (a) e Política ZEIS (b).	74
6.5	Tempos simulados (pontos vermelhos) a partir das estimativas obtidas pela cópula de Clayton (a), Frank(b) e Gumbel (c) e os tempos de Políticas Públicas (pontos azuis).	74

Lista de Tabelas

3.1	Propriedades para construção dos modelos de cópulas	26
3.2	Algumas das cópulas pertencente a família de cópulas Arquimedianas.	32
3.3	Funções geradora γ das famílias de cópulas Arquimedianas.	32
3.4	Dependência caudal.	33
5.1	Cenário de combinações dos parâmetros utilizados na simulação.	57
5.2	Estimativas médias para o cenário 1, em que $\Psi = (3.5, 6, 4, 8, 1)$	58
5.3	Estimativas médias para o cenário 2, em que $\Psi = (3.5, 6, 4, 20, 1)$	58
5.4	Estimativas médias para o cenário 3, em que $\Psi = (4, 8, 4, 6, 3)$	59
5.5	Estimativas médias para o cenário 4, em que $\Psi = (6, 8, 4, 12, 5)$	60
5.6	Estimativas médias para o cenário 5, em que $\Psi = (7, 5, 4, 8, 6)$	61
5.7	Estimativas médias para o cenário 1, em que $\Psi = (2.5, 15, 3.5, 15, 0.5)$	62
5.8	Estimativas médias para o cenário 2, em que $\Psi = (3.5, 8, 3.5, 8, 0.5)$	62
5.9	Estimativas médias para o cenário 3, em que $\Psi = (4, 8, 4, 6, 3)$	63
5.10	Estimativas médias para o cenário 4, em que $\Psi = (7, 5, 4, 8, 6)$	64
5.11	Estimativas médias para o cenário 5, em que $\Psi = (3.5, 6, 5, 15, 6)$	65
5.12	Estimativas médias para o cenário 1, em que $\Psi = (2.5, 20, 3.5, 20, 0.2)$	66
5.13	Estimativas médias para o cenário 2, em que $\Psi = (3.5, 6, 4, 10, 0.2)$	66
5.14	Estimativas médias para o cenário 3, em que $\Psi = (4, 8, 4, 6, 3)$	67
5.15	Estimativas médias para o cenário 4, em que $\Psi = (7, 5, 4, 8, 6)$	68
5.16	Estimativas médias para o cenário 5, em que $\Psi = (3.5, 6, 5, 15, 6)$	69
6.1	EMV para as cópulas de Gumbel, Frank e Clayton	72
6.2	Critérios para seleção do modelo.	72
6.3	EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para a covariável Eleição.	75
6.4	Critérios para seleção do modelo.	75
6.5	EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para a variável Conselho.	76
6.6	Critérios para seleção do modelo.	76
6.7	EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para Margem de vitória.	77
6.8	Critérios para seleção do modelo.	77
6.9	EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para a covariável NEP.	77
6.10	Critérios para seleção do modelo.	78

6.11	EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para o modelo completo .	78
6.12	EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para o modelo ajustado.	79
6.13	CrITÉrios para seleÇão do modelo ajustado.	80
8.1	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula Gumbel .	92
8.2	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula Gumbel .	92
8.3	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula Gumbel .	93
8.4	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula Gumbel .	93
8.5	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank	94
8.6	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank	94
8.7	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank	95
8.8	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank	95
8.9	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank	95
8.10	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank	96
8.11	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank	96
8.12	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank	96
8.13	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton	97
8.14	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton	97
8.15	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton	98
8.16	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton	98
8.17	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton	98
8.18	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton	99
8.19	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton	99
8.20	Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton	99

Conteúdo

1	Introdução	14
2	Análise de Sobrevida	16
2.1	Distribuição Log-Logística	17
2.2	Modelo de Regressão Log-Logístico Discreto - MRLLD	19
2.2.1	Crítério de seleção do modelo	20
3	Cópuas	22
3.1	Função Cópuas	23
3.2	Teorema de Sklar	24
3.3	Propriedades de cópuas	25
3.4	Exemplos de Cópuas	28
3.4.1	Limitantes de Fréchet-Hoeffding	28
3.4.2	Cópuas Empíricas	29
3.4.3	Cópuas da Independência	30
3.4.4	Cópuas Arquimedianas	30
3.4.4.1	Cópuas de Gumbel	34
3.4.4.2	Cópuas de Frank	35
3.4.4.3	Cópuas de Clayton	35
3.5	Inferência de Cópuas	36
3.5.1	Método de Máxima de Verossimilhança - MMV	36
4	Modelo Bivariado em Análise de Sobrevida	40
4.1	Cópuas de Sobrevida	41
4.1.1	Estimação por Máxima Verossimilhança - EMV	42
4.2	Cópuas de Gumbel para Sobrevida	46
4.2.1	Modelo de regressão bivariado Gumbel	48
4.3	Cópuas de Frank para Sobrevida	50
4.3.1	Modelo de regressão bivariado Frank	52
4.4	Cópuas de Clayton para Sobrevida	52
4.4.1	Modelo de regressão bivariado Clayton	54
5	Metodologia de Simulação	56
5.1	Resultados para Cópuas de Gumbel	58
5.2	Resultados para Cópuas de Frank	62
5.3	Resultados para Cópuas de Clayton	65
6	Aplicação a dados reais	70
6.1	Modelo de regressão bivariado LLD	74
7	Conclusões	81
8	Anexos	92

1 Introdução

Em análise de dados, diversas nuances e particularidades de cada área são observadas. Situações em que o objetivo é estudar o tempo transcorrido até a ocorrência de determinado evento de interesse, pode-se observar a ocorrência do fenômeno e esse tempo é conhecido como tempo de falha. E para algumas unidades do estudo não é observado o fenômeno, nesse caso o tempo é conhecido como tempo de censura. Esses tempos formam a variável resposta do estudo. Dependendo da forma em que é medido o tempo, tem-se tempos discretos ou tempos contínuos.

Na Estatística, a área que desenvolve técnicas e métodos para analisar esse tipo de variável resposta é a análise de sobrevivência. Apesar dessa área ser bem difundida, ainda há poucos modelos para analisar tempos discretos.

Em algumas situações, o objetivo também é observar mais de uma variável resposta, originando respostas multivariadas. Como a unidade de observação é a mesma, há a suposição de que as respostas sejam dependentes. Nesses casos a modelagem por meio de cópulas tem sido utilizada em diversos trabalhos, como por exemplo, [Fachini \(2011\)](#), [Lawless \(2003\)](#) e [Biondo e Suzuki \(2016\)](#), este aborda uma aplicação Bayesiana.

A utilização de modelos multivariados por meio de cópulas tem se tornado uma preferência para a obtenção de toda a essência de dependência entre variáveis a dados de sobrevivência multivariados, pois a cópula tem por principal característica, unificar as distribuições multivariadas às suas respectivas marginais univariadas.

Pesquisadores usam cópulas por não conhecerem a forma da distribuição conjunta; logo, ao trabalhar com dados contínuos ou discretos, o problema da modelagem será escolher uma cópula que capture adequadamente as estruturas de dependências dos dados, sem sacrificar as propriedades atrativas das marginais ([OPHEM, 1999](#)).

[Ylmaz e Lawless \(2011\)](#) afirmam que testes de adequação a modelos de cópulas paramétricas estão faltando nos estudos em que há dados com presença de censuras ou covariáveis. Seus estudos abordam métodos novos e eficientes como o teste de razão de verossimilhança e pseudo-verossimilhança em modelos semi-paramétricos.

[Embrechts \(2009\)](#) declara que marginais discretas devem causar problemas e alerta: "Esteja preparado para que tudo que possa dar errado, dê errado". E como enfatiza [Kalaitzis e Silva \(2013\)](#), no caso discreto as cópulas podem ser difíceis de aplicar, já

que transformar a cópula em uma função massa de probabilidade (*fmp*) em geral, é computacionalmente intratável.

No entanto, como proclama [Ishimura e Yoshizawa \(2012\)](#), a cópula evolui de acordo com o tempo. Isto pode ser observado em estudos recentes, em que pesquisadores usam diversas técnicas na realização das análises, as quais apresentam bons resultados.

Diante de tais desafios, e ao considerar a presença de variáveis explicativas nos dados, o presente trabalho tem o objetivo de propor um modelo de regressão bivariado via cópulas para dados discretos e censurados. Para a estimação dos parâmetros do modelo, o presente trabalho também propõe utilizar a função de verossimilhança de forma paramétrica.

O trabalho está organizado em cinco capítulos. O Capítulo 2 apresentará um breve conceito sobre análise de sobrevivência e definições da distribuição Log-Logística (LL) para desenvolver capítulos posteriores. O Capítulo 3 apresentará uma revisão bibliográfica sobre conceitos básicos, funções e exemplos de cópulas. É também apresentado neste capítulo, o método de inferência para cópulas com vetores aleatórios contínuos e o método proposto para a aplicação dos vetores aleatórios discretos. Os métodos apresentados neste capítulo são necessários para desenvolver o Capítulo 4, que abordará a construção do modelo bivariado de sobrevivência. No Capítulo 5, serão apresentadas as simulações de dados com distribuição LLD para cópulas de Gumbel, Frank e Clayton, a fim de testar a função de verossimilhança proposta e estudar os resultados estimados para os parâmetros dos modelos. O Capítulo 6 apresentará aplicações dos modelos para cópula de Gumbel, Frank e Clayton para um conjunto de dados sobre Políticas Públicas.

2 Análise de Sobrevivência

Análise de Sobrevivência é uma técnica estatística muito utilizada em áreas de estudos médicos. Porém, atualmente tem sido aplicada em demais áreas como: engenharia, agronomia, corporações bancárias, ciências políticas, ciências contábeis, seguros, indústrias, economia, finanças e sociologia. Todas em âmbitos diferentes, mas com igual finalidade, observar (acompanhar) os indivíduos durante o estudo e anotar os eventos de interesses, como exemplo:

- **Área médica:** o tempo até a cura ou a morte do paciente, ou até mesmo o efeito do medicamento;
- **Ciências Políticas:** o tempo até a adoção de determinadas políticas públicas; o período de permanência dos ministros nos cargos;
- **Indústrias:** O tempo até a ocorrência de um reparo ou a falha de um determinado produto, ou até mesmo a utilização da garantia.

A variável resposta em análise de sobrevivência é o tempo desde o início do estudo até a ocorrência do evento de interesse. Esse tempo é denominado tempo de falha. Situações em que não se observa a ocorrência do evento de interesse, utiliza-se esse tempo observado e diz que é a observação parcial da resposta, conhecido como tempo de censura.

A censura pode ser classificada como censura à direita, censura à esquerda e censura intervalar. O mecanismo de censura à direita ainda é subdividido em censura à direita do tipo I, censura à direita do tipo II e censura à direita aleatória.

Na censura à direita do tipo I o estudo será finalizado após um período de tempo fixo, e ao final desse tempo uma ou mais observações em estudo não falharam. Na censura à direita do tipo II o estudo termina após ocorrer o evento de interesse em um número fixo ($k \leq n$) de indivíduos. O número de falhas (k) deve ser determinado antes do início do estudo. Já a censura à direita aleatória são todos os casos em que as observações não experimentam o evento de interesse por motivos não controláveis. Neste trabalho será considerado o mecanismo de censura à direita do tipo I.

A escala de medida utilizada para medir a variável resposta pode ser o tempo de relógio, em horas, dias, meses ou até em anos. Dependendo da escala utilizada, os dados

serão contínuos ou discretos. Para modelar a variável resposta, é suposto que a mesma segue uma distribuição de probabilidade.

Em análise de sobrevivência são diversos os modelos probabilísticos utilizados a fim de descrever o tempo de vida. E os modelos que mais se destacam em estudos práticos são Exponencial, Weibull, Log-Normal, Log-Logística e Gama, mas a escolha de qual modelo utilizar deve ser feita com cuidado e restrições.

Ao considerar dados de Políticas Públicas, a variável resposta é medida em anos, caracterizando assim dados discretos. Em uma análise univariada desses dados, verificou-se que os mesmos se ajustam bem à distribuição Log-Logística discreta (LLD). Por esses motivos, os modelos bivariados que serão propostos, assumirão que as distribuições marginais de cada variável resposta seguirá uma distribuição LLD. Sendo assim, na Seção 2.1 será definida a distribuição LL para uma variável aleatória (*v.a.*) contínua e para uma *v.a.* discreta.

2.1 Distribuição Log-Logística

A distribuição Log-Logística (LL) é utilizada em diversas situações práticas, pois sua função de risco apresenta forma decrescente e unimodal de acordo com o valor do parâmetro de forma, o que a torna bastante flexível. Outra característica dessa distribuição é que sua densidade de probabilidade apresenta caudas pesadas. Em seguida serão definidas as funções relacionadas a LL para uma *v.a.* contínua e para uma *v.a.* discreta.

- **Log-Logística Contínua - LLC:**

Seja o vetor aleatório $T \sim \text{LLC}(\mu, \eta)$, então sua função de distribuição acumulada (*fda*) e sua função densidade de probabilidade (*fdp*) são definidas respectivamente por:

$$F(t) = (1 + (t/\mu)^{-\eta})^{-1}, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$f(t) = \frac{\eta(t/\mu)^{\eta-1}}{\mu[1 + (t/\mu)^\eta]^2}, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

em que $\mu > 0$ é o parâmetro de escala e $\eta > 0$ o de forma. Sua função de sobrevivência e

a de risco são expressas respectivamente por:

$$S(t) = \frac{1}{1 + (t/\mu)^\eta}, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$h(t) = \frac{\eta(t/\mu)^{\eta-1}}{\mu[1 + (t/\mu)^\eta]}, \quad t > 0, \quad (2.4)$$

Formas gráficas da fdp , sobrevivência e risco podem ser vistas em Santos (2017), em que apresenta funções decrescentes quando $\eta = 1$, e função de probabilidade e de risco unimodal quando $\eta > 1$.

Outro conceito importante na construção de modelos estatísticos, bem como para realizar simulações de dados com distribuição LLC, é a função quantil da distribuição que fica expressa da seguinte forma:

$$q_m(m; \mu, \eta) = \mu \left[\frac{m}{1 - m} \right]^{1/\eta}, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (2.5)$$

- **Log-Logística Discreta - LLD:**

A distribuição Log-Logística discreta (LLD) é definida a partir do processo de discretização da distribuição LLC. Detalhes do procedimento podem ser vistos em Santos (2017). Portanto, se $T \sim \text{LLD}(\mu, \eta)$, sua fda e sua fmp são explícitas respectivamente por:

$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - \frac{1}{1 + [(t+1)/\mu]^\eta}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

$$p(t) = \frac{1}{1 + (t/\mu)^\eta} - \frac{1}{1 + [(t+1)/\mu]^\eta}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

em que $\mu > 0$ o parâmetro de escala e $\eta > 0$ o de forma. Sua função de sobrevivência e de risco são definidas respectivamente por:

$$S(t) = \frac{1}{1 + [(t+1)/\mu]^\eta}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

$$h(t) = 1 - \frac{1 + (t/\mu)^\eta}{1 + [(t+1)/\mu]^\eta}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Bem como as ilustrações gráficas para essas funções, é também visto no trabalho de

Santos (2017) a demonstração para obter a função quantil da distribuição, a qual é obtida pela função inversa generalizada da distribuição $F(t)$, e que é expressa por:

$$q_m(m; \mu, \eta) = \inf \left\{ t : \mu \left[\frac{m}{1-m} \right]^{1/\eta} - 1 \leq t \right\}, \quad \mu \geq 1. \quad (2.10)$$

Uma das características que viabiliza o uso de métodos paramétricos para descrever os dados de sobrevivência, é a inclusão de covariáveis na análise de dados, que consiste num estudo mais elaborado e torna-o mais eficiente. Colosimo e Giolo (2006) afirmam que a forma mais eficiente de acomodar os efeitos de tais covariáveis é utilizar um modelo de regressão apropriado para dados censurados. Com isto, expõe-se na Seção 2.2 o Modelo de Regressão Log-Logístico Discreto (MRLLD).

2.2 Modelo de Regressão Log-Logístico Discreto - MRLLD

Além dos tempos até a ocorrência do evento de interesse (variáveis respostas), os dados de sobrevivência contêm as variáveis explicativas, as quais descrevem a heterogeneidade existente no evento e podem influenciar nos tempos de sobrevivência dos indivíduos.

Logo, com a finalidade de modelar a distribuição ajustada aos tempos, busca-se por meio do modelo de regressão, designar a dependência das variáveis explicativas nos tempos até a ocorrência do evento de interesse. Para isto, apresenta-se abaixo definições, a fim de construir o modelo de regressão para a distribuição LLD.

O modelo de regressão pode ser obtido ao relacionar o vetor de covariáveis a um ou mais parâmetros da distribuição de probabilidade. Para conectar as covariáveis à variável resposta é preciso utilizar uma função de ligação $g(\cdot)$, cujo vetor de covariáveis dos respectivos indivíduos seja $\mathbf{x}^T = (1, x_1, \dots, x_c)$, em que c é o número de covariáveis.

Ao considerar a distribuição LLD com parâmetro de escala, μ , e parâmetro de forma, η , as covariáveis serão inseridas no modelo através de: $\mu = g(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}) = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})$, em que $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}$ é o preditor linear e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_c)^T$ é o vetor de parâmetros de regressão. Dessa forma, a fmp e a função de sobrevivência do MRLLD são expressas respectivamente por:

$$p(t|x) = \frac{1}{1 + [t/\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})]^\eta} - \frac{1}{1 + [(t+1)/\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})]^\eta}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

$$S(t|x) = \frac{1}{1 + [(t + 1)/\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})]^\eta}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Conforme Santos (2017), a interpretação dos coeficientes de regressão é definida a partir da função quantil do MRLLD, e apresenta como proposta de interpretação o uso da razão de tempos medianos definida por Hosmer e Lemeshow em 1999, descrita por :

$$t_{0.5}(\hat{\mu}, \hat{\eta}) = \inf \left\{ t : \hat{\mu} \left[\frac{0.5}{1 - 0.5} \right]^{1/\hat{\eta}} - 1 \leq t \right\} \cong \hat{\mu} - 1. \quad (2.13)$$

Considerando $\hat{\mu} = \exp(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x)$, tem que $t_{0.5} + 1 = \exp(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x)$. Como denotada por Santos (2017), a razão de tempo mediano do MRLLD composto por covariáveis dicotômicas é dada pela expressão $\exp(\hat{\beta}_1)$.

Deste modo, se $\hat{\beta}_1$ é positivo, explica-se que o tempo mediano mais uma unidade ($t_{0.5} + 1$) do indivíduo que pertence ao grupo $x = 1$, é $\exp(\hat{\beta}_1)$ vezes o $t_{0.5} + 1$ de um indivíduo do grupo $x = 0$. Se $\hat{\beta}_1$ é negativo, infere-se que o $t_{0.5} + 1$ de um indivíduo do grupo $x = 0$ é $\frac{1}{\exp(\hat{\beta}_1)}$ vezes o $t_{0.5} + 1$ de um indivíduo do grupo $x = 1$.

A estimação do vetor de parâmetros, $\boldsymbol{\Theta} = (\eta, \boldsymbol{\beta}_c^T)$ em que $\boldsymbol{\beta}_c^T = (\beta_0, \dots, \beta_c)$, para o MRLLD será obtida a partir do método de máxima verossimilhança (MMV).

2.2.1 Critério de seleção do modelo

Emiliano *et al.* (2010) relatam que ao selecionar modelos é preciso ter em mente que não existem modelos verdadeiros e sim próximos à realidade, que causam perdas de informações. Deste modo, torna-se necessário fazer uma seleção do "melhor" modelo dentre os ajustados. para explicar o evento sob estudo.

Assim sendo, o presente estudo abordará o uso de dois critérios, dos mais utilizados para a comparação de modelos. O cálculo para tais critérios de informação tem como base o valor do logaritmo da verossimilhança obtida de cada modelo, e do número de parâmetros a serem estimados.

- **Critério de Akaike (AIC)**

Como apresentado por Santos (2017) e Emiliano *et al.* (2010), este critério foi proposto por Akaike em 1974, e sua função é escrita da seguinte forma:

$$\text{AIC} = -2\log L(\boldsymbol{\Theta}) + 2r, \quad (2.14)$$

em que r equivale ao número de parâmetros a serem estimados.

- **Critério de Informação Bayesiano (BIC)**

Também exposto no estudo de Santos (2017) e Emiliano *et al.* (2010), o critério foi proposto por Schwarz em 1978, cuja função é dada por:

$$\text{AIC} = -2\log L(\Theta) + \log(n)r, \quad (2.15)$$

em que r equivale ao número de parâmetros a serem estimados e n o número de indivíduos do estudo.

Ambos os critérios têm por finalidade, encontrar o modelo com menor valor para suas funções. Considerando assim, o modelo que melhor se ajusta aos dados.

3 Cópulas

Com a finalidade de obter toda a essência de dependência entre variáveis, [Hougaard \(2000\)](#), [Nelsen \(2006\)](#) e [Joe \(2015\)](#) apresentam definições e aplicações para modelos multivariados por meio das funções de cópulas, que têm por principal característica, unificar as distribuições multivariadas às suas respectivas marginais univariadas.

Por sua vez, as cópulas têm tido grande relevância em trabalhos estatísticos e altamente evidenciada na literatura estatística, onde teve seu início apresentado por Sklar em 1959 ([NELSEN, 2006](#)). A aplicabilidade de cópulas em análise de sobrevivência tem se intensificado a partir de 2003, ver [Lawless \(2003\)](#).

Na literatura, há uma gama de famílias de cópulas, dentre elas, as arquimedianas, gaussiana e t-Student. Suas aplicações têm se expandido, a fim de estudar as estruturas de dependências entre dados multivariados.

Devido à flexibilidade, a cópula tem sido extensivamente estudada e aplicada em diversas áreas referentes aos problemas das relações de dependência relacionados a eventos discretos ou contínuos, e tem tido muito êxito, especificamente quando aplicada junto a métodos estatísticos; veja, [Rossi \(2012\)](#) e [Embrechts *et al.* \(2001\)](#) na área de finanças; [Flores \(2008\)](#) e [Chiba *et al.* \(2015\)](#) em ciências políticas; [Fachini \(2011\)](#) e [Biondo e Suzuki \(2016\)](#) na área médica, [Nikoloulopoulos e Karlis \(2010\)](#) em marketing, [Zimmer e Trivedi \(2006\)](#) em seguro familiar, [McHale e Scarf \(2007\)](#) no futebol; [Goda e Atkinson \(2009\)](#) em análise sísmológica, [Nikoloulopoulos e Karlis \(2008\)](#) em estudo odontológico, [Salvadori e De Michele \(2007\)](#) em hidrologia, entre muitos outros.

A cópula associada a dados discretos não é tão usual quanto à cópula associada a dados contínuos, já que apresenta diversos desafios, dentre eles estão que as cópulas com marginais discretas não são únicas em todo o domínio do hipercubo da unidade e para marginais discretas a densidade não é bem definida, sendo essa substituída por uma *fmp*, o que dificulta a estimação de máxima verossimilhança (EMV) ([KOOPMAN *et al.*, 2015](#)).

Contudo, [Koopman *et al.* \(2015\)](#), [Gribkova e Lopez \(2015\)](#), [Mayor *et al.* \(2017\)](#) e [Yoshizawa e Ishimura \(2018\)](#) informam que há soluções possíveis, bem como o uso de cópulas empíricas. [Gribkova e Lopez \(2015\)](#) e [Joe \(2015\)](#) propõem o uso de funções condicionais para substituir as funções marginais e conjunta, [Smith e Khaled \(2012\)](#) e [Joe \(2015\)](#) enfatizam o uso de variáveis latentes.

Apesar do problema de não identificabilidade, os modelos de cópulas para distribuições multivariadas discretas se tornam estruturas válidas e são úteis em estudos de simulação e robustez. Entretanto, seu uso é cauteloso devido às propriedades essenciais do caso contínuo serem intransferíveis para o caso discreto (GENEST e NEŠLEHOVÁ, 2007).

Estudos para dados discretos dependentes multivariados podem ser obtidos em diversas áreas, assim como na área de medicina, meteorologia, ciências ambientais, marketing, criminologia, estatística esportiva e industrial, em que os tipos de respostas são apresentados de forma categórica, binária, ordinal e contagem de dados.

Para tais dados, estudos com cópulas bivariadas ou trivariadas podem ser vistos em: Trégouët *et al.* (1999), Mayor *et al.* (2005), Zimmer e Trivedi (2006), Nikolouloupoulos e Karlis (2008, 2009a, 2010), Madsen (2009), Kazianka e Pilz (2010), Kazianka (2013), Nikolouloupoulos (2013a, 2016), Genest *et al.* (2014).

Portanto, denotou-se na literatura que as funções de cópulas não diferem do caso contínuo para o caso discreto, o que difere são as distribuições marginais, que são adaptadas conforme o conjunto de dados. Logo, com o propósito de formular um modelo probabilístico bivariado para dados discretos de sobrevivência com o uso de cópulas, a função da cópula será denotada por \mathbb{D} .

A seguir, serão explanadas as funções, propriedades básicas e exemplos de cópula, apresentadas em Embrechts (2001), Nelsen (2006), Nikolouloupoulos e Karlis (2009a), Ishimura e Yoshizawa, (2012) e Joe (2015).

3.1 Função Cópula

Uma cópula p -variada \mathbb{D} , $\mathbb{D} : [0, 1]^p \rightarrow [0, 1]$, é uma função de distribuição p -variada restrita ao retângulo p -dimensional $[0, 1]^p$. Assim, uma função \mathbb{D} é denominada uma cópula p -variada se satisfaz:

1. $\mathbb{D}(t_1, \dots, t_p)$ é não decrescente e contínua à direita a cada componente t_j , $j = 1, \dots, p$;
2. $\mathbb{D}(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_p) = 0$ e $\mathbb{D}(1, \dots, 1, t_j, 1, \dots, 1) = t_j$, para cada $t_j \in [0, 1]^p$, i.e, são distribuições marginais $U(0,1)$;
3. (condição p -crescente ou desigualdade do retângulo). O volume de um retângulo p -dimensional $[a_j, b_j]$, contido em $[0, 1]^p$ através da cópula é não negativo.

Seja o retângulo $\mathbb{I} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p] \in \mathbb{R}^p$, para todos $(a_1, \dots, a_p), (b_1, \dots, b_p)$ com $a_j \leq b_j$, o \mathbb{D} -volume de \mathbb{I} é dado por:

$$V_{\mathbb{D}}(\mathbb{I}) = \sum \text{sgn}(\mathbf{v}) \mathbb{D}(\mathbf{v}), \quad (3.1)$$

em que a soma é tomada em todos os vértices $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$, em que cada v_j pode ser igual a: a_j ou b_j ao trabalhar com dados contínuos, e a qualquer a_j ou $a_j - 1$ ao usar dados discretos, e $\text{sgn}(\mathbf{v})$ é dado por:

$$\text{sgn}(\mathbf{v}) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_j = a_j \text{ para um número par de } j\text{'s.} \\ -1 & \text{se } v_j = a_j \text{ para um número ímpar de } j\text{'s.} \end{cases}$$

Uma expressão equivalente à equação (3.1) para obter o \mathbb{D} -volume de um retângulo $\mathbb{I} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p] \in \mathbb{R}^p$, é dada por:

$$V_{\mathbb{D}}(\mathbb{I}) = \Delta_{a_p}^{b_p} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} \mathbb{D}(\mathbf{t}) \geq 0, \quad (3.2)$$

em que $V_{\mathbb{D}}(\mathbb{I})$ é a p -ésima diferença de ordem \mathbb{D} em \mathbb{I} e as p diferenças de primeira ordem são definidas como:

$$\Delta_{a_p}^{b_p} \mathbb{D}(\mathbf{t}) = \mathbb{D}(t_1, \dots, t_{j-1}, b_j, t_{j+1}, \dots, t_p) - \mathbb{D}(t_1, \dots, t_{j-1}, a_j, t_{j+1}, \dots, t_p) \geq 0. \quad (3.3)$$

A partir dessas diferenças será definida a função de verossimilhança utilizada para estudos com cópulas para vetores discretos, a qual será apresentada na Seção (3.5.1).

3.2 Teorema de Sklar

O teorema de [Sklar \(1973\)](#) propõe a decomposição de qualquer função de distribuição multivariada em suas marginais, o que permite a partir das cópulas a construção de grandes classes de distribuições multivariadas, cujas funções podem ser estudadas independente das marginais. É a função cópula que mede a dependência entre essas marginais.

Assim, seja $F \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_p)$ uma função de distribuição conjunta p -variada, em que \mathcal{F} é uma classe de distribuições multivariadas com F_j ($j = 1, \dots, p$) funções de distribuições marginais univariadas. Então, F é uma função de distribuição associada a uma cópula

$\mathbb{D} : [0, 1]^p \rightarrow [0, 1]$ com marginais $U(0,1)$, se satisfaz:

$$F(\mathbf{t}; \gamma) = \mathbb{D}(F_1(t_1), \dots, F_p(t_p); \gamma), \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (3.4)$$

em que γ é o parâmetro de dependência da cópula.

Quando a função de distribuição F é associada a um vetor de variáveis aleatórias (*v.a.'s*) discretas ou parcialmente discreta e contínua, a cópula \mathbb{D} associada na equação (3.4) só será única apenas no seu domínio de definição, $Ran(F_1) \times \dots \times Ran(F_p)$, em que Ran é a imagem das funções F_j . Logo, se as F_j forem absolutamente contínuas, a cópula \mathbb{D} é única.

Como consequência, se \mathbb{D} é uma cópula p -variada com u_1, \dots, u_p *v.a.'s* uniformes com $F_1(t_1) = u_1, \dots, F_p(t_p) = u_p$ e $F_1^{-1}(u_1) = t_1, \dots, F_p^{-1}(u_p) = t_p$, então existe uma F p -variada tal que

$$\mathbb{D}(u_1, \dots, u_p; \gamma) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_p^{-1}(u_p); \gamma), \quad (3.5)$$

em que F^{-1} é a função inversa generalizada. $F^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é definida por $F^{-1}(u) = \inf\{F(t) \geq u\}$, mais detalhes podem ser vistos em [Nelsen \(2006\)](#) e [Pumi \(2006\)](#).

Este resultado parte de duas propriedades :

1. Seja $T \sim H$ uma *v.a.* contínua, então $U = H(T) \sim U(0, 1)$ e $T = H^{-1}(U)$, em que H^{-1} é a função inversa de H .
2. Se o vetor $T = (T_1, \dots, T_p) \sim F \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_p)$, em que $T_j \sim F_j$, é contínuo, então $(F_1(T_1), \dots, F_p(T_p)) \sim \mathbb{D}$, e $(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_p^{-1}(U_p)) \sim F$.

Seja $T \sim H$ uma *v.a.* discreta, então $H(T)$ não possui uma distribuição $U(0, 1)$. Logo, a cópula não é única. \mathbb{D} deve satisfazer a seguinte condição $\mathbb{D}(1, \dots, 1, t_j, 1, \dots, 1) = t_j$ para $t_j \in Ran(F_j)$. Assim sendo, pode ser generalizada para uma distribuição multivariada com marginais $U(0,1)$.

3.3 Propriedades de cópulas

Algumas propriedades de uma cópula \mathbb{D} são as seguintes:

1. Uma cópula é invariante por transformações estritamente monótonas das $v.a'.s$, i.e, seja (T_1, \dots, T_p) com cópula \mathbb{D} , e H_1, \dots, H_p funções contínuas e crescentes, então $(H_1(T_1), \dots, H_p(T_p))$ tem cópula \mathbb{D} .
2. \mathbb{D} é uniformemente contínua.

Distribuições discretas multivariadas são fundamentais para modelagem de dados discretos e correlacionados. À vista disto, se a modelagem da distribuição for feita por meio da cópula, deve-se selecionar entre as cópulas que têm forma fechada, veja [Joe \(2015\)](#) e [Nikoloulopoulos e Karlis \(2008\)](#). Essa e outras propriedades, descritas por [Joe \(2015\)](#), que podem facilitar a estimação da cópula associada a dados discretos, são apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Propriedades para construção dos modelos de cópulas

Cópulas	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	viii
Fator	sim	sim	sim	sim	sim	não	parcial	sim
Gaussiana	sim	sim	não	não	sim	não	sim	sim
Vine PCC	sim	sim	sim	sim	não	não	sim	sim
Arquimediana	sim	não	não	bivariada	sim	sim	sim	sim
Multivariada t_v	não	sim	sim	não	sim	não	sim	sim
Mistura de max-id	sim	sim	bivariada	bivariada	sim	sim	sim	parcial

Fonte: Joe (2015)

Os itens anexados na Tabela 3.1 referem-se à: i) inclusão de cópulas independentes; ii) flexibilidade e ampla gama de dependência; iii) flexibilidade da dependência caudal; iv) caudas flexíveis assimétricas; v) propriedades de fechamentos sob marginais; vi) *fda* forma fechada; vii) densidade de forma fechada e viii) simulação simples. "Bivariada" na tabela informa que a propriedade é válida para o caso bivariado mas não em geral.

Ao denotar as cópulas que possuem *fda* de forma fechada, pode-se classificar como eficazes para trabalhar com variáveis respostas discretas as cópulas arquimediana e a mistura de max-id. No entanto, mesmo não possuindo *fda* de forma fechada, as cópulas Vine (PCC) e fator não apresentam um impedimento para o uso de dados discretos multivariados, visto que no caso da Vine, pode-se utilizar uma sequência de distribuições condicionais. Já para as fatoriais é possível obter a função de probabilidade a partir de integrais numéricas z -dimensionais se houver z variáveis latentes ([JOE, 2015](#)).

[Joe \(2015\)](#) destaca que não há uma família de cópulas paramétrica multivariada conhecida que satisfaça todas as propriedades, bem como não há na literatura famílias

de cópulas que satisfaçam todas as propriedades para uma modelagem a dados discretos (JOE, 2015; NIKOLOULOPOULOS e KARLIS, 2009ab). Logo, a decisão parte da importância relativa das propriedades em aplicações particulares.

Como exemplo, as cópulas arquimedianas multivariadas ($p > 2$) satisfazem as propriedades (v) e (viii) por permitirem somente variáveis permutáveis, e à medida que a dimensão aumenta sua faixa de dependência se torna mais estreita (NIKOLOULOPOULOS e KARLIS, 2009ab).

Bem como as cópulas arquimedianas, as cópulas de mistura max-id e Vine permitem o uso de funções de covariáveis para os parâmetros de dependência da cópula, o que as tornam adequadas para estudar o efeito de variáveis explicativas sobre estrutura de dependência (NIKOLOULOPOULOS, 2013b). Logo, pode-se destacar alguns estudos com uso destas cópulas.

Nikoloulopoulos e Karlis (2008) usam a cópula de mistura max-id para modelar associações entre respostas binárias multivariadas discretas, porque, permite dependência flexível entre as variáveis aleatórias e tem uma forma de *fd* fechada, o que torna os cálculos mais fáceis. Aplicaram a um banco de dados reais relacionados a um estudo odontológico, com todas as associações positivas, e verificaram que as covariáveis afetam as combinações.

A cópula bivariada max-id pode ser composta pelas cópulas de Galambos, Gumbel, Frank, Joe e Mardia-Takahasi (também conhecida como cópula de Clayton ou Kimeldorf-Sampson) (NIKOLOULOPOULOS e KARLIS, 2009a). Logo, usam-na para modelar dados de contagem multivariados referente ao número de compras de diferentes produtos.

Smith (2011) e Smith e Khaled (2012) abordam o uso da cópula Vine com abordagem bayesiana. Apresentam como calcular a inferência bayesiana quando os dados são discretos, usando o aumento de dados. Smith e Khaled (2012) estimam as cópulas D-vine de 16 dimensões para um modelo longitudinal de uso de uma ciclovia na cidade de Melbourne, Austrália.

Aplicações de cópulas arquimedianas a dados discretos são vistas nos seguintes estudos: McHale e Scarf (2007) ajustam a cópula com distribuição Poisson e Binomial Negativa bivariada, a fim de ajustar dados de futebol da Premier League inglesa; Meester e Mackay (1994) apresentam um modelo de cópula totalmente paramétrico para dados categóricos em *clusters* dependentes simétricos, acomodando qualquer modelo de regressão

marginal; Trégouët *et al.* (1999) apresentam uma extensão do modelo de cópula de Frank para análise de dados binários; Cameron *et al.* (2004) propõem uma cópula paramétrica bivariada para estudar a distribuição da diferença entre duas variáveis de contagens inteiras não negativas; e Koopman *et al.* (2015) aplicam cópulas discretas dinâmicas para modelo de variação do tempo.

Gribkova e Lopez (2015) definem um estimador discreto com uma versão empírica para inferência não paramétrica de cópulas sob dados censurados e utiliza as cópulas arquimedianas; Frank, Clayton e Gumbel, com distribuição Weibull para as marginais bivariadas.

3.4 Exemplos de Cópulas

3.4.1 Limitantes de Fréchet-Hoeffding

Uma cópula qualquer \mathbb{D} encontra-se limitada por: $M(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2)$, limite superior de Fréchet e $W(t_1, t_2) = \max(t_1 + t_2 - 1, 0)$, limite inferior de Fréchet. Isto é,

$$W(t_1, t_2) = \max(t_1 + t_2 - 1, 0) \leq \mathbb{D}(t_1, t_2) \leq \min(t_1, t_2) = M(t_1, t_2),$$

em que M corresponde à *fda* de $(T_1, T_2) = (T_1, T_1)$ de uma unidade quadrática, que descreve uma dependência perfeita positiva, e W é uma *fda* de $(T_1, T_2) = (T_1, 1 - T_1)$ que descreve uma dependência perfeita negativa.

Logo, ao utilizar o Teorema de Sklar para uma função bivariada com $F \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$, tem-se os seguinte limites de Fréchet:

$$F^-(t_1, t_2) = \max(F_1(t_1) + F_2(t_2) - 1, 0) \leq F(t_1, t_2) \leq \min(F_1(t_1), F_2(t_2)) = F^+(t_1, t_2).$$

Visto que M e W são cópulas, estes limites são funções de distribuição conjunta e denominados como os limites de Fréchet-Hoeffding com funções de distribuições em $\mathcal{F}(F_1, F_2)$ para todo F_1 e F_2 , sendo eles discretos, contínuos ou mistos.

Para uma função multivariada, $F \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_p)$ os limites são:

$$F^-(\mathbf{t}) = \max(\sum_{j=1}^p F_j(t_j) - p + 1, 0) \leq F(t_1, \dots, t_p) \leq \min(F_1(t_1), \dots, F_p(t_p)) = F^+(\mathbf{t}).$$

Em geral, se F_1, \dots, F_p são contínuas, o limite superior F^+ é uma distribuição em $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_p)$, e pode apresentar uma dependência perfeita positiva. O limite inferior F^-

é pontual, com função de distribuição conjunta somente para $p = 2$ e pode representar uma dependência perfeita negativa.

3.4.2 Cópula Empírica

Segundo [Scheffzik \(2015\)](#), a cópula empírica é denominada por uma cópula discreta irreduzível, que se tornou popular sob o termo "função de dependência empírica". [Yoshizawa e Ishimura \(2018\)](#) utilizam cópulas empíricas (cópulas para dados de amostra) para evolução de cópulas em processos discretos.

[Mayor et al. \(2007\)](#) informam que funções de distribuições empíricas construídas em frequências são exemplos de funções de distribuição finita. Os trabalhos de [Mayor et al. \(2005, 2017\)](#) mostram que qualquer cópula discreta $\mathbb{D}(u_1, u_2)$, é a cópula empírica discreta $\mathbb{D}_e(u_1, u_2)$, de algum conjunto $e = \{(t_{11}, t_{21}), \dots, (t_{ps}, t_{ps})\}$ de s pares reais ordenados em $t_{1u_{1l}} \neq t_{1u_{2l}}, t_{2u_{1l}} \neq t_{2u_{2l}}$ para todo $u_{jl} \neq u_{j(l+1)}, j = 1, \dots, p$ e $l = 1, \dots, s$.

[Yoshizawa e Ishimura \(2018\)](#) apresentam a cópula empírica para um conjunto de pares. Seja $(t_{1s}, t_{2s})_{s=1}^n$ uma amostra com tamanho i de uma distribuição bivariada contínua. As cópulas empíricas \mathbb{D}_e são dadas por:

$$\mathbb{D}_e\left(\frac{u_1}{n}, \frac{u_2}{n}\right) = \frac{\text{número de pares } (t_1, t_2) \text{ na amostra com } t_1 \leq t_{1(u_1)}, t_2 \leq t_{2(u_2)}}{n^2}. \quad (3.6)$$

A função de frequência da cópula empírica d_e é dada por

$$d_e\left(\frac{u_1}{n}, \frac{u_2}{n}\right) = \begin{cases} 1/n & \text{se } \{t_{1(u_1)}, t_{2(u_2)}\} \text{ é um elemento da amostra,} \\ 0 & \text{se caso contrário,} \end{cases}$$

em que $t_{1(u_1)}$ e $t_{2(u_2)}$, $1 \leq u_1, u_2 \leq n$, são as estatísticas de ordem da amostra.

Além disso, a relação de \mathbb{D}_e e d_e é deduzida pela definição

$$\mathbb{D}_e\left(\frac{u_1}{n}, \frac{u_2}{n}\right) = \sum_{a=1}^{u_1} \sum_{b=1}^{u_2} d_e\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right).$$

Da equação (3.3), tem-se que

$$d_e\left(\frac{u_1}{k}, \frac{u_2}{n}\right) = \mathbb{D}_e\left(\frac{u_1}{n}, \frac{u_2}{n}\right) - \mathbb{D}_e\left(\frac{u_1-1}{n}, \frac{u_2}{n}\right) - \mathbb{D}_e\left(\frac{u_1}{n}, \frac{u_2-1}{n}\right) + \mathbb{D}_e\left(\frac{u_1-1}{n}, \frac{u_2-1}{n}\right)$$

em que d_e é a função de frequência da cópula discreta empírica. [Yoshizawa e Ishimura](#)

(2018) constroem cópulas empíricas a partir da equação (3.6) para analisar as dependências das taxas de câmbio do Euro-Yen Japonês com as da Suíça Franco-Yen Japonês para cada segundo de 40 minutos.

A cópula empírica é utilizada como uma alternativa para modelagem de dados discretos a fim de inferir de forma não paramétrica, ver Erdely *et al.* (2008), Joe (2015) e Faugeras (2017). Para dados mistos, Murphy (2013) afirma que o processo de cópula empírica não converge. Mas, estudo apresentado por Genest *et al.* (2014) mostram que o processo de cópula empírica pode convergir sob certas condições usando uma extensão multilinear da cópula.

3.4.3 Cópula da Independência

Outro resultado muito importante para utilização de distribuições multivariadas é a cópula do produto $\Pi(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2$, pois as variáveis aleatórias T_1, T_2 com distribuições F_1 e F_2 respectivamente, são independentes se, e somente se $F(t_1, t_2) = F_1(t_1) \cdot F_2(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(t_1, t_2) &= \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) \\ &= \mathbb{P}(T_1 \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(T_2 \leq t_2) \\ &= t_1 \cdot t_2. \end{aligned}$$

3.4.4 Cópulas Arquimedianas

A família de cópulas arquimedianas proporciona uma diversidade de diferentes estruturas de dependências, o que evidencia sua concentração na literatura estatística. Além do mais, fornecem propriedades analíticas mais fáceis de serem obtidas e possuem uma simples forma fechada.

A fim de modelar funções de sobrevivência multivariada, estudos evidenciam o uso de cópulas arquimedianas. Pois sua representação permitiu a redução das cópulas multivariadas ao estudo de função univariada.

A cópula arquimediana é formada a partir de uma função geradora $\phi(\cdot)$. Em que, $\phi(\cdot)$ é uma função contínua, decrescente e convexa $\phi: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes condições: $\phi(0) = 1$, $\phi(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$, $\phi'(\cdot) < 0$ e $\phi''(\cdot) > 0$. A função de

cópula arquimediana \mathbb{D} , é dada por

$$\mathbb{D}(u_1, u_2) = \phi(\phi^{-1}(u_1) + \phi^{-1}(u_2)), \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1]^2, \quad (3.7)$$

em que ϕ^{-1} é a transformada inversa generalizada de ϕ .

Seja uma função contínua estritamente não crescente e convexa, $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, em que $\phi(1) = 0$ e $\phi^{[-1]}$ a pseudo-inversa de ϕ , $\phi^{[-1]}: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$, então a função $\mathbb{D}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ de cópula arquimediana é dada por $\mathbb{D}(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$. Detalhes podem ser vistos em [Nelsen \(2006\)](#).

Por conseguinte, se $\phi(0) = \infty$, ϕ é intitulada como uma função geradora estrita. Diante disto, $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ é a função inversa de ϕ , e denomina-se cópula arquimediana estrita por meio da função $\mathbb{D}(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$. Para mais detalhes, consulte [Nelsen \(2006\)](#) e [Embrechets *et al.* \(2001\)](#).

[Hofert e Mächler \(2011\)](#) e [Joe \(2015\)](#) expressam a cópula arquimediana da forma p -dimensional

$$\mathbb{D}(\mathbf{u}; \phi) = \phi(\phi^{-1}(u_1) + \dots + \phi^{-1}(u_p)), \quad \forall \mathbf{u} = u_1, \dots, u_p \in [0, 1]^p. \quad (3.8)$$

Nota-se que a cópula arquimediana pode ser facilmente expandida. No entanto, para $p \geq 3$ a função admite somente associação positiva.

Algumas de suas propriedades relevantes são descritas por [Nelsen \(2006\)](#). Assim, seja \mathbb{D} uma cópula arquimediana com gerador ϕ , tem-se que:

1. \mathbb{D} é simétrico - $\mathbb{D}(u_1, u_2) = \mathbb{D}(u_2, u_1) \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$;
2. \mathbb{D} é associativo - $\mathbb{D}(\mathbb{D}(u_1, u_2), u_3) = \mathbb{D}(u_1, \mathbb{D}(u_2, u_3)) \forall u_1, u_2, u_3 \in [0, 1]$;
3. Se $w > 0$ é qualquer constante, então $w\phi$ é um gerador de \mathbb{D} .

A classe de cópulas arquimediana é composta por diversas cópulas, dentre as mais utilizadas são as de Gumbel, Frank, Clayton, Joe, Independence e Ali-Mikhail-Haq, cujas funções de definições e funções geradoras são apresentadas nas Tabelas [3.2](#) e [3.3](#) respectivamente, ver [Nelsen \(2006\)](#) e [Joe \(2015\)](#). Entretanto, o presente estudo abordará a cópula de Gumbel, Frank e Clayton, cujas definições são detalhadas nas Seções [3.4.4.1](#), [3.4.4.2](#) e [3.4.4.3](#), respectivamente.

Tabela 3.2: Algumas das cópulas pertencente a família de cópulas Arquimedianas.

Cópula	$\mathbb{D}(u_1, u_2)$	Parâmetro
Ali-Mikhail-Haq	$\frac{u_1 \cdot u_2}{1 - \gamma(1 - u_1)(1 - u_2)}$	$\gamma \in [0, 1)$
Clayton	$((u_1)^{-\gamma} + (u_2)^{-\gamma} - 1)^{-\frac{1}{\gamma}}$	$\gamma \in [-1, \infty), \gamma \neq 0$
Frank	$-\frac{1}{\gamma} \log \left[\frac{1 + (\exp(-\gamma u_1) - 1)(\exp(-\gamma u_2) - 1)}{\exp(-\gamma) - 1} \right]$	$\gamma \in (-\infty, \infty), \gamma \neq 0$
Gumbel	$\exp\{-[(-\log u_1)^\gamma + (-\log u_2)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}}\}$	$\gamma \in [1, \infty)$
Independence	$u_1 \cdot u_2$	
Joe	$1 - [(1 - u_1)^\gamma + (1 - u_2)^\gamma - (1 - u_1)^\gamma(1 - u_2)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}}$	$\gamma \in [1, \infty)$

Tabela 3.3: Funções geradora γ das famílias de cópulas Arquimedianas.

Cópula	Fução Geradora $\phi(t)$	Inversa da geradora $\phi^{-1}(t)$
Ali-Mikhail-Haq	$\frac{1 - \gamma}{e^t - \gamma}$	$\log \left[\frac{(1 - \gamma + \gamma t)}{t} \right]$
Clayton	$\frac{1}{\gamma}(t^{-\gamma} - 1)$	$(1 + t)^{-\frac{1}{\gamma}}$
Frank	$-\frac{\log(1 - (1 - \exp(-\gamma))\exp(-t))}{\gamma}$	$-\log \left[\frac{\exp(-\gamma t) - 1}{\exp(-\gamma) - 1} \right]$
Gumbel	$\exp(-t^{\frac{1}{\gamma}})$	$(-\log(t))^\gamma$
Independence	$\exp(-t)$	$-\log(t)$
Joe	$1 - (1 - \exp(-t))^{\frac{1}{\gamma}}$	$-\log[1 - (1 - t)^\gamma]$

Aplicações das cópulas apresentadas nas Tabelas 3.2 e 3.3 podem ser consultadas em: **Ali-Mikhail-Haq**: Flores (2008) e Ribeiro *et al.* (2017); **Frank**: Gomes (2007), Chandra (2015), **Gumbel**: Rossi (2012), Silva (2013), **Independence**: Huang e Zhao (2018) e **Joe**: Maluf (2016) e Silveira-Neto (2015).

Para definições mais completas das cópulas apresentadas nas Tabelas 3.2 e 3.3 consulte Genest (1987), Embrechts *et al.* (2001), Nelsen (2006), Hofert e Mächler (2011) e Joe (2015).

Quando os dados empíricos bivariados sugerem dependência na cauda superior ou inferior, os coeficientes de dependência caudal superior (λ_U) e inferior (λ_L) devem ser analisados. Esses coeficientes são definidos por $\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P(U_2 > u | U_1 > u)$ e $\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P(U_2 < u | U_1 < u)$, ver Joe (1997). Se o vetor aleatório (U_1, U_2) tem distribuição \mathbb{D}

que é uma cópula arquimediana com gerador ϕ , prova-se que

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi'(2t)}{\phi'(t)}, \quad \lambda_L = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi'(2t)}{\phi'(t)}. \quad (3.9)$$

Esses coeficientes podem assumir valores entre $[0,1]$. Logo, quando o valor de λ_U está próximo de 1, tem-se que as distribuições marginais apresentam forte dependência caudal superior. Quando λ_L está próximo de 1, as distribuições marginais apresentam forte dependência caudal inferior. Em ambos os casos, o valor do coeficiente caudal zero indica independência caudal. Na Tabela 3.4 apresenta-se os coeficientes de cauda superior e inferior da família de cópulas arquimedianas apresentadas na Tabela 3.3.

Tabela 3.4: Dependência caudal.

Cópula	λ_L	λ_U
Ali-Mikhail-Haq	0	0
Clayton	$2^{-\frac{1}{\gamma}}$	0
Frank	0	0
Gumbel	0	$2 - 2^{\frac{1}{\gamma}}$
Joe	0	$2 - 2^{\frac{1}{\gamma}}$

A cópula mais apropriada para um conjunto de dados também deve levar em conta uma estimativa empírica prévia desses coeficientes de dependência caudal.

Para exemplificar de forma gráfica o comportamento das caudas, apresenta-se nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 curvas de nível para a cópula de Gumbel, Frank e Clayton com marginais $N(0; 1)$, respectivamente, para diferentes valores do parâmetro γ . As figuras se referem às apresentadas no estudo de Neto (2018).

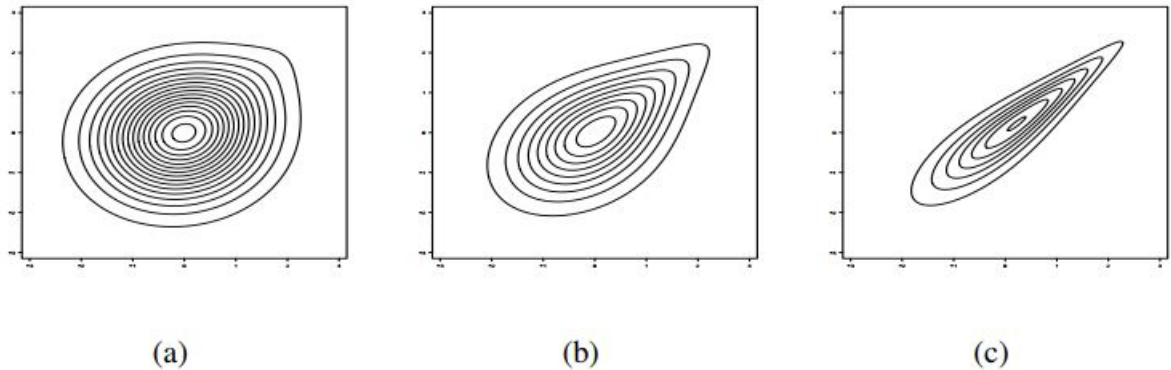


Figura 3.1: Curvas de nível para cópula de Gumbel, (a) $\gamma = 1.1$, (b) $\gamma = 1.5$ e (c) $\gamma = 3.0$.

Graficamente fica nítida a estrutura de dependência extrema na cauda superior imposta pela cópula de Gumbel, à medida que $\gamma \rightarrow \infty$.

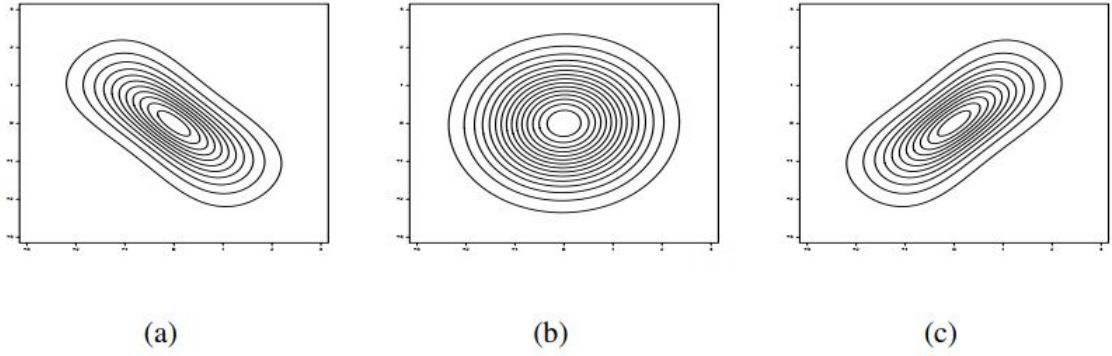


Figura 3.2: Curvas de nível para cópula de Frank , (a) $\gamma = -5.0$, (b) $\gamma = 0.1$ e (c) $\gamma = 5.0$.

Pode-se observar uma característica simétrica da estrutura de dependência da cópula de Frank, em que à proporção que $\gamma \rightarrow 0$, os números aleatórios gerados são independentes.

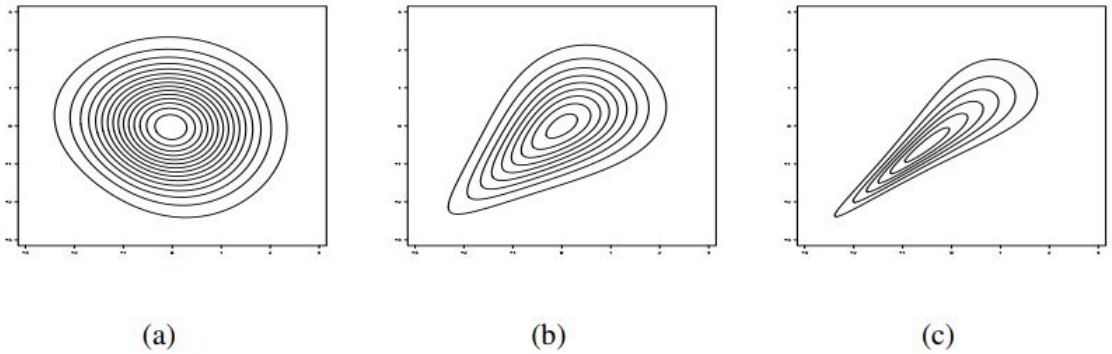


Figura 3.3: Curvas de nível para Cópula de Clayton, (a) $\gamma = -0.1$, (b) $\gamma = 1.0$ e (c) $\gamma = 3.0$.

Nota-se facilmente que a cópula de Clayton apresenta dependência extrema somente na cauda inferior à medida que $\gamma \rightarrow \infty$.

Portanto, devido às boas propriedades apresentadas para as cópulas arquimedianas, bem como sua forma simples e fácil de construir, e a sua grande aplicação em análise de sobrevivência, o presente estudo explanará o uso das cópulas de Gumbel, Frank e Clayton para definir a função de sobrevivência conjunta no Capítulo 4, considerando duas variáveis respostas ($p = 2$).

3.4.4.1 Cópula de Gumbel

A cópula de Gumbel é definida por

$$\mathbb{D}(u_1, u_2; \gamma) = \exp\{-[(-\log u_1)^\gamma + (-\log u_2)^\gamma]^\frac{1}{\gamma}\}, \quad \gamma \in [1, \infty). \quad (3.10)$$

Dado que γ é restrito em $[1, \infty)$, a cópula não permite dependência negativa. Deste

modo, quando $\gamma \rightarrow 1$ há independência, e quando $\gamma \rightarrow \infty$ o grau de associação entre os dados torna-se mais forte. Portanto, a cópula de Gumbel interpola entre independência e dependência perfeitamente positiva, e γ reflete a força da dependência.

O coeficiente de associação τ de Kendall para cópula de Gumbel é obtido por $\tau_\gamma = (\gamma - 1)/\gamma$. A mesma apresenta uma extrema dependência somente na cauda superior (cópula assimétrica), com $\lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\gamma}}$.

3.4.4.2 Cópula de Frank

A cópula de Frank é expressa por

$$\mathbb{D}(u_1, u_2; \gamma) = -\frac{1}{\gamma} \log \left[\frac{1 + (\exp(-\gamma u_1) - 1) \cdot (\exp(-\gamma u_2) - 1)}{\exp(-\gamma) - 1} \right], \gamma \in (-\infty, \infty), \gamma \neq 0. \quad (3.11)$$

A cópula de Frank apresenta independência quando $\gamma \rightarrow 0$. Além do mais, obtém uma perfeita dependência positiva quando $\gamma \rightarrow \infty$ e perfeita negativa se $\gamma \rightarrow -\infty$. Portanto, oposto as cópulas de Gumbel e Clayton, a cópula de Frank interpola entre a dependência perfeitamente positiva e negativa.

O coeficiente de associação τ de Kendall é obtido por $\tau_\gamma = 1 + \frac{4}{\gamma^2} \left[\int_0^\gamma \frac{t}{e^t - 1} dt - 1 \right]$.

3.4.4.3 Cópula de Clayton

A cópula de Clayton é expressa por: $\mathbb{D}(u_1, u_2; \gamma) = \max((u_1)^{-\gamma} + (u_2)^{-\gamma} - 1, 0)^{-\frac{1}{\gamma}}$, e é denominada uma cópula restrita quando $\gamma > 0$, definida pela função

$$\mathbb{D}(u_1, u_2; \gamma) = ((u_1)^{-\gamma} + (u_2)^{-\gamma} - 1)^{-\frac{1}{\gamma}}, \gamma \in [-1, \infty), \gamma \neq 0. \quad (3.12)$$

Quando $\gamma > 0$, a família de Clayton possui menor dependência caudal. A cópula de Clayton interpola entre independência e dependência positiva, e atinge o limite superior de Fréchet-Hoeffding quando $\gamma \rightarrow \infty$, mas seu limite inferior não atinge algum valor. Quando $\gamma = 0$, a cópula apresenta independência, isto é, $\mathbb{D}(u_1, u_2; \gamma) = u_1 \cdot u_2$.

O parâmetro de dependência γ tem uma relação com o coeficiente de Kendall (medida de associação bivariada), o qual é utilizado na análise descritiva dos dados para obter a medida de dependência entre duas variáveis. Logo, para testar a dependência do parâmetro γ da família de Clayton, é preciso obter o coeficiente τ de Kendall, cuja função

é expressa por $\tau_\gamma = \gamma/(\gamma + 2)$. Se $\gamma \rightarrow \infty \Rightarrow \tau \rightarrow 1$ e se $\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow \tau \rightarrow 0$.

A cópula de Clayton é assimétrica, pois exibe maior dependência na cauda inferior (negativa) do que na positiva, com $\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\gamma}}$. De acordo com [Mei \(2016\)](#), em contraste à cópula de Gumbel e Frank, ela é capaz de modelar a dependência de eventos aleatórios de fraca intensidade.

Estudos com aplicações da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para dados de sobrevivência bivariados podem ser consultados em: [Geogers *et al.* \(2001\)](#), [Lawless \(2003\)](#), [Gomes \(2007\)](#), [Flores \(2009\)](#), [Fachini \(2011\)](#), [Ylmaz e Lawless \(2011\)](#), [Oliveira *et al.* \(2014\)](#), [Chandra \(2015\)](#), [Lin e Wu \(2015\)](#), [Mei \(2016\)](#), [Biondo e Suzuki \(2016\)](#), [Romeo *et al.* \(2018\)](#) e [Camolez *et al.* \(2018\)](#).

3.5 Inferência de Cópuas

Muitos estudos utilizam métodos paramétricos, porque podem produzir estimativas mais precisas, possuindo maior potência estatística. Nos estudos das estruturas de dependência por meio de cópuas, são comuns as aplicações com famílias de cópuas paramétricas. [Joe \(2015\)](#) destaca as principais características ao utilizá-las: (i) implementação numérica mais trivial, (ii) aplicações em altas dimensões, (iii) teorias em comum na verossimilhança para variáveis de respostas contínuas, discretas ou mistas, e condicionam o uso de dados censurados e *missing* (dados faltantes).

Vantagens dos modelos paramétricos apresentados por [Lawless \(2003\)](#) são: a simplicidade e disponibilidade de procedimentos de inferência baseados em verossimilhança, com facilidade para descrição, comparação, previsão ou decisão.

3.5.1 Método de Máxima de Verossimilhança - MMV

Um dos métodos paramétricos mais utilizados para fazer inferência dos parâmetros em modelos bivariados com cópuas é o MMV, o qual tem por objetivo maximizar a probabilidade dos dados amostrados. Para tal, ilustra-se dois casos:

Caso 1: Vetores contínuos - As famílias de cópuas são dadas como *fda*; logo, a fim de obter a estimação das cópuas por meio do MMV para distribuições contínuas, faz-se necessário a obtenção da *fdp* da cópula, realizada a partir da diferenciação correspondente às suas variáveis.

Logo, seja $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_p)$ um vetor aleatório com distribuições marginais univariadas uniformemente contínuas F_j e $f_j = F'_j, j = 1, \dots, p$. Assim, a densidade da cópula $\mathbb{D}(\mathbf{t}; \gamma)$ é obtida por

$$d(\mathbf{t}; \gamma) = d(t_1, \dots, t_p; \gamma) = \frac{\partial^p \mathbb{D}(\mathbf{t}; \gamma)}{\partial t_1, \dots, \partial t_p}, \mathbf{t} \in [0, 1]^p. \quad (3.13)$$

Agora, seja $F(\mathbf{t}, \boldsymbol{\omega}_j, \gamma) = \mathbb{D}(F_1(t_1; \omega_1), \dots, F_p(t_p; \omega_p); \gamma) \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_p)$ a função de distribuição conjunta, em que $\boldsymbol{\omega}_j = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ é vetor de parâmetros das marginais univariadas, e seja $\boldsymbol{\Psi} = (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_p}, \gamma)$ o vetor de parâmetros das marginais F_j e da cópula. A densidade de $F(\mathbf{t}; \boldsymbol{\Psi})$ fica expressa da seguinte forma:

$$f(\mathbf{t}; \boldsymbol{\Psi}) = d(F_1(t_1; \omega_1), \dots, F_p(t_p; \omega_p); \gamma) \cdot \prod_{j=1}^p f_j(t_j; \omega_j), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p,$$

em que $\mathbf{t} = (t_{1i}, \dots, t_{pi}), i = 1, \dots, n$ é uma amostra de tamanho n de \mathbf{T} . Então, a função de verossimilhança da amostra é expressa por:

$$L(\boldsymbol{\Psi} | t_{1i}, \dots, t_{pi}) = \prod_{i=1}^n f_1(t_{1i}; \omega_{t_1}) \cdots f_p(t_{pi}; \omega_{t_p}) \cdot d_\gamma(F_1(t_{1i}), \dots, F_p(t_{pi}); \gamma). \quad (3.14)$$

Ao aplicar o logaritmo na equação (3.14), tem-se a seguinte função log-verossimilhança:

$$l(\boldsymbol{\Psi} | \mathbf{t}_i) = \sum_{i=1}^n \log f_1(t_{1i}; \omega_{t_1}) + \dots + \sum_{i=1}^n \log f_p(t_{pi}; \omega_{t_p}) + \sum_{i=1}^n \log d_\gamma(F_1(t_{1i}), \dots, F_p(t_{pi}); \gamma). \quad (3.15)$$

Caso 2: Vetores discretos - Ao considerar F_1, F_2 distribuições marginais discretas de uma distribuição $F \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$ bivariada, a função de verossimilhança será formada pela *fmp*, a qual pode ser obtida a partir das diferenças realizadas pela equação (3.2) com os inteiros $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ para todo $a_j < b_j, j = 1, 2$.

Uma abordagem com máxima verossimilhança completa que se baseia na versão da *fmp* da cópula é ilustrada por [Trivedi e Zimmer \(2017\)](#).

Sejam $(T_1, T_2) \sim F_{T_1 T_2}$ com $T_1 \sim F_1, T_2 \sim F_2$ discretas e $(F(t_1), F(t_2)) = (U_1, U_2) \sim \mathbb{D}$, então a *fmp* conjunta de (T_1, T_2) quando t_1 e t_2 são inteiros ($t_j \in \mathbb{Z}$), é obtida da

seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 = t_1, T_2 = t_2) &= \mathbb{P}((T_1, T_2) \in (t_1 - 1, t_1] \times (t_2 - 1, t_2]) \\
&= \Delta_{t_2-1}^{t_2} \Delta_{t_1-1}^{t_1} F(x, y) \\
&= \mathbb{P}(t_1 - 1 < T_1 \leq t_1, t_2 - 1 < T_2 \leq t_2) \\
&= \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, t_2 - 1 < T_2 \leq t_2) - P(T_1 \leq t_1 - 1, t_2 - 1 < T_2 \leq t_2) \\
&= \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) - P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2 - 1) \\
&\quad - \mathbb{P}(T_1 \leq t_1 - 1, T_2 \leq t_2) + P(T_1 \leq t_1 - 1, T_2 \leq t_2 - 1) \\
&= F(t_1, t_2) - F(t_1, t_2 - 1) - F(t_1 - 1, t_2) + F(t_1 - 1, t_2 - 1), \quad (3.16)
\end{aligned}$$

em que F é função de distribuição. Agora, aplicando o teorema de Sklar definido na equação (3.4), tem-se a fmp correspondente a equação (3.16) expressa por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 = t_1, T_2 = t_2) &= \mathbb{D}(F_1(t_1), F_2(t_2); \gamma) - \mathbb{D}(F_1(t_1), F_2(t_2 - 1); \gamma) \\
&\quad - \mathbb{D}(F_1(t_1 - 1), F_2(t_2); \gamma) + \mathbb{D}(F_1(t_1 - 1), F_2(t_2 - 1); \gamma) \\
&= f_{mp}(t_1, t_2; \gamma). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Portanto, a função de log-verossimilhança para uma amostra observada n , é definida por:

$$l(\Psi) = \sum_{i=1}^n \log (f_{mp}(t_{1i}, t_{2i}; \gamma)) \quad (3.18)$$

Para um vetor tridimensional a fmp do retângulo envolve 8 termos, sendo 4 positivos

e 4 negativos, isto é:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} = t_{2i}, T_{3i} = t_{3i}) &= \mathbb{D}(F_1(t_{1i}), F_2(t_{2i}), F_3(t_{3i}); \gamma) - \\
&- \mathbb{D}(F_1(t_{1i} - 1), F_2(t_{2i}), F_3(t_{3i}); \gamma) \\
&- \mathbb{D}(F_1(t_{1i}), F_2(t_{2i} - 1), F_3(t_{3i}); \gamma) \\
&- \mathbb{D}(F_1(t_{1i}), F_2(t_{2i}), F_3(t_{3i} - 1); \gamma) \\
&+ \mathbb{D}(F_1(t_{1i} - 1), F_2(t_{2i} - 1), F_3(t_{3i}); \gamma) \\
&+ \mathbb{D}(F_1(t_{1i}), F_2(t_{2i} - 1), F_3(t_{3i} - 1); \gamma) \\
&+ \mathbb{D}(F_1(t_{1i} - 1), F_2(t_{2i}), F_3(t_{3i} - 1); \gamma) \\
&- \mathbb{D}(F_1(t_{1i} - 1), F_2(t_{2i} - 1), F_3(t_{3i} - 1); \gamma) \\
&= f_{mp}(t_{1i}, t_{2i}, t_{3i}; \gamma).
\end{aligned}$$

Joe (2015) apresenta a cópula $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\cdot; \gamma)$ para dimensão 4 possuindo 16 termos. Para f_{mp} p -variada, as probabilidades do retângulo envolvem 2^p termos.

O estimador de $L(\Psi)$ é obtido ao maximizar as equações (3.15) e (3.18). Ao estimá-lo de forma completa, a maximização conjunta pode requerer um trabalho computacional intensivo. No entanto, Joe (2015) sugere o método da inferência para as marginais (IFM) para maximizá-la. Este método consiste em realizar a estimação em duas fases:

1) Marginais univariadas: realizar a máxima verossimilhança univariada para obter a estimação dos parâmetros marginais $\tilde{\omega}_j$.

2) Verossimilhança da cópula: utilizar os parâmetros univariados da primeira fase e estimar $\tilde{\gamma}$ maximizando a verossimilhança.

Portanto, maximiza-se a função log-verossimilhança completa a partir de uma otimização numérica iterativa com estimativas obtidas nos itens 1 e 2. Diferentes modelos de cópulas podem ser comparados por meio dos métodos AIC e BIC. Para Joe (2015), se a verossimilhança é bem comportada, a otimização da log-verossimilhança é realizada numericamente usando uma função de minimização quase-Newton junto ao método BFGS.

Portanto, com a apresentação da inferência de cópulas para distribuições contínuas e discretas, serão apresentados no Capítulo 4, os modelos de cópula para distribuições contínuas e discretas para a aplicação em análise de sobrevivência, com uma abordagem ao uso da família de cópula arquimediana, especificamente a cópula de Gumbel, Frank e Clayton. Todavia, esse modelo pode ser abordado a outras famílias de cópulas paramétricas.

4 Modelo Bivariado em Análise de Sobrevivência

A fim de formular modelos bivariados para analisar dados característicos de análise de sobrevivência, muitos trabalhos na literatura realizaram a modelagem por meio da função de cópulas; veja, [Clayton \(1978\)](#), [Genest \(1987\)](#), [Lawless \(2003\)](#), [Fachini \(2011\)](#), [Chandra \(2015\)](#) e [Biondo e Suzuki \(2016\)](#).

Tais estudos apresentam cópulas bivariadas com as mesmas distribuições marginais. Porém, em análise de sobrevivência também pode ocorrer que os tempos marginais se ajustem a distribuições distintas.

Quando as funções de cópula unificam funções de distribuição nas marginais, que não pertencem necessariamente a mesma família de distribuições, obtém-se uma função de distribuição multidimensional. Como consequência, esta teoria permite uma modelagem razoavelmente flexível na estrutura da relação entre diferentes variáveis que podem ter distintas distribuições características, ([FANTAZZINI, 2011](#))¹.

[Yilmaz e Lawless \(2011\)](#) afirmam que o uso de distribuições marginais diferentes apresenta dificuldade ao se aplicar EMV semiparamétrica. E que testes gerais de ajustes aplicados à censura e covariáveis não existem atualmente, e que provavelmente continuará sendo crucial obtê-los.

Dentre as famílias de cópulas utilizadas para formular as distribuições multivariadas em estudos com dados de sobrevivência, a família de cópulas arquimedianas é mais comumente utilizada, em particular, a cópula de Gumbel, Frank e Clayton têm tido muito êxito entre muitos pesquisadores. [Chandra \(2015\)](#) classifica a escolha devido à forma simples fornecida para a função de sobrevivência conjunta e possui propriedades analíticas mais atrativas.

Portanto, a fim de apresentar os modelos bivariados para análise de sobrevivência por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton, primeiro dar-se destaque a um resultado de cópulas para a análise de sobrevivência, denominada por cópula de sobrevivência, $\overline{\mathbb{D}}$.

¹Referência traduzida do Russo, seus estudos podem ser obtidos pelo seguinte endereço: <https://ideas.repec.org/e/pfa92.html>

4.1 Cópula de Sobrevivência

Seja $T \sim F$ um vetor aleatório com função de sobrevivência S , em que $F \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_p)$ tem marginais contínuas. Então, conforme [Joe, \(2015\)](#) e [Núñez \(2005\)](#), tem-se que $S_j(T_j) = 1 - F_j$, e ao considerar que $S_j(T_j) \sim U(0, 1)$, a função de sobrevivência multivariada pode ser expressa baseada em cópula por $S(t_1, \dots, t_p) = \mathbb{D}(S_1(t_1), \dots, S_p(t_p))$. Em particular, no caso bivariado, em que \mathbb{D} é uma função cópula de (T_1, T_2) , a função de sobrevivência conjunta pode ser escrita por:

$$\begin{aligned}
 S(t_1, t_2) &= \mathbb{P}(T_1 > t_1, T_2 > t_2) \\
 &= \mathbb{P}(t_1 < T_1 < +\infty, t_2 < T_2 < +\infty) \\
 &= \mathbb{P}(T_1 \leq +\infty, T_2 \leq +\infty) - \mathbb{P}(T_1 \leq +\infty, T_2 \leq t_2) - \\
 &\quad - \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq +\infty) + \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(T_2 \leq t_2) - \mathbb{P}(T_1 \leq t_1) + \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) \\
 &= 1 - F_2(t_2) - F_1(t_1) + F_{12}(t_1, t_2) \\
 &= S_1(t_1) + S_2(t_2) - 1 + \mathbb{D}(1 - S_1(t_1), 1 - S_2(t_2)) \\
 &= \overline{\mathbb{D}}(S_1(t_1), S_2(t_2)). \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

$\overline{\mathbb{D}}$ é a cópula de sobrevivência, em que $\overline{\mathbb{D}}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \mathbb{D}(1 - u_1, 1 - u_2)$. A verificação de que $\overline{\mathbb{D}}$ é uma função cópula, pode ser vista em [Tibaldi \(2004\)](#), o qual também apresenta uma versão do teorema de Sklar para as distribuições de sobrevivência.

Como afirma [Nelsen \(2006\)](#), a unificação das funções de sobrevivência conjunta e suas marginais univariadas a partir da cópula $\overline{\mathbb{D}}$ é análoga ao modo como a cópula \mathbb{D} conecta uma distribuição conjunta às suas marginais. De fato, seja S a função de sobrevivência p -variada com marginais S_j , então a representação da cópula para S conforme o teorema de Sklar é

$$S(t_1, \dots, t_p) = \overline{\mathbb{D}}(S_1(t_1), \dots, S_p(t_p)). \tag{4.2}$$

A cópula $\overline{\mathbb{D}}$ é única se as S_j marginais são contínuas, se discretas serão determinadas únicas em $Ran(S_1) \cdot, \dots, \cdot Ran(S_p)$.

Dada a cópula de sobrevivência, $\overline{\mathbb{D}}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \mathbb{D}(1 - u_1, 1 - u_2)$, [Georges et al. \(2001\)](#) afirmam que para cópulas arquimedianas, a cópula de sobrevivência correspondente não é arquimediana, exceto a cópula de Frank. À vista disso, o presente

estudo usará por definição as funções propostas por [Gumbel \(1960, 1961\)](#), [Frank \(1979\)](#) e [Clayton \(1978\)](#), que serão detalhadas nas próximas seções.

4.1.1 Estimação por Máxima Verossimilhança - EMV

O fato da função de verossimilhança acondicionar dados censurados ou ausentes, torna seu uso indispensável para estimação de parâmetros em análise de sobrevivência.

O MMV é um dos mais utilizados para obter a estimação dos parâmetros, por ser uma técnica mais comum em derivá-los. Os valores estimados para o vetor de parâmetros ($\hat{\Psi}$) são obtidos com base na maximização da função $L(\Psi)$, a qual será apresentada para os casos contínuos e discretos.

Vetores contínuos: a fim de obter a função de verossimilhança para dados bivariados, é necessário encontrar a função densidade de probabilidade conjunta, sendo essa derivada da função de sobrevivência definida na equação (4.1) e obtida por:

$$f(S_1(t_1), S_2(t_2)) = \frac{\partial^2 S(S_1(t_1), S_2(t_2))}{\partial t_1 \partial t_2}, \quad (4.3)$$

para tanto, definições necessárias para o cálculo das derivadas são apresentadas.

Sejam T_{1i} e T_{2i} os tempos de falha dos eventos 1 e 2, respectivamente, e C_{1i}, C_{2i} os respectivos tempos de censuras para os eventos 1 e 2, em que $i = 1, \dots, n$. A função de sobrevivência conjunta para T_{1i} e T_{2i} vinculada ao seu respectivo parâmetro de dependência (γ) a partir da função cópula \mathbb{D} é dada por: $S(t_{1i}, t_{2i}) = \mathbb{P}(T_{1i} > t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}) = \mathbb{D}(S_1(t_{1i}), S_2(t_{2i}))$, em que $S(t_1) = P(T_{1i} > t_1)$ e $S(t_2) = P(T_{2i} > t_2)$ são as funções de sobrevivência marginais de T_{1i} e T_{2i} , respectivamente.

Para uma amostra observada $(t_{j1}, \delta_{j1}) \dots (t_{jn}, \delta_{jn})$, em que $t_{ji} = \min(T_{ji}, C_{ji})$ e $\delta_{ji} = 0$ indica que, para o j -ésimo evento o i -ésimo indivíduo é censurado, e $\delta_{ji} = 1$ indica que para o j -ésimo evento, o i -ésimo indivíduo é observado (falha), em que $j = 1, 2$. A função de verossimilhança para dados bivariados e censurados por meio de cópulas, segundo

Lawless (2003), é definida por:

$$L(\Psi) = \prod_{i=1}^n f(t_{1i}, t_{2i})^{\delta_{1i}\delta_{2i}} \cdot \left\{ \frac{-\partial S(t_{1i}, t_{2i})}{\partial t_{1i}} \right\}^{\delta_{1i}(1-\delta_{2i})} \cdot \left\{ \frac{-\partial S(t_{1i}, t_{2i})}{\partial t_{2i}} \right\}^{\delta_{2i}(1-\delta_{1i})} \cdot \{S(t_{1i}, t_{2i})\}^{(1-\delta_{2i})(1-\delta_{1i})}, \quad (4.4)$$

em que $\Psi = (\omega_{t_{1i}}, \dots, \omega_{t_{pi}}, \gamma)$ representa os parâmetros referentes a $f_{t_{1i}}, \dots, f_{t_{pi}}$ e a cópula, com n o tamanho da amostra. A descrição de cada termo da equação (4.4) é dada por:

1. $f(t_{1i}, t_{2i})$ corresponde à falha nos tempos T_{1i}, T_{2i} ($\delta_{1i} = \delta_{2i} = 1$), equivalente à equação (4.3);
2. O segundo termo corresponde à falha em T_{1i} ($\delta_{1i} = 1$), e censura em T_{2i} ($\delta_{2i} = 0$);
3. O terceiro termo corresponde à falha em T_{2i} ($\delta_{2i} = 1$), e censura em T_{1i} ($\delta_{1i} = 0$);
4. $S(t_{1i}, t_{2i})$ é a função de sobrevivência conjunta apresentada na equação (4.1), que corresponde a censura nos tempos T_{1i}, T_{2i} , ou seja, $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 0$.

Esta função de verossimilhança pode ser maximizada a partir do comando *optim* no *software* R, com o uso do método BFGS.

Vetores discretos: estimar o parâmetro de dependência da cópula com funções de distribuições paramétricas discretas por meio da função de verossimilhança é visto como um grande desafio para modelos multivariados.

Desse modo, pesquisadores têm proposto outras metodologias para estimação de modelos multivariados baseados em cópulas com marginais discretas. Para estimar modelos multivariados baseados em cópulas normais, Nikoloulopoulos (2013b) utiliza uma extensão contínua proposta por Denuit & Lambert (2005), em que associa uma variável aleatória discreta a uma variável contínua com distribuição uniforme ($T_j^* = T_j + (U_j - 1)$). Esta extensão pode ser vista também em Madsen (2009). Também propõe um método de verossimilhança simulada para cópula normal multivariada, em que os retângulos são convertidos para o limite de integração através do método de Genz e Bretz (2002).

Inouye (2017) aborda uma transformação de distribuição para o caso contínuo proposta por Kazianka e Pilz (2010) para desenvolver uma aproximação simples e intuitiva

da verossimilhança, a qual apresenta dois métodos para estimação: uma abordagem de verossimilhança composta, na qual a estimativa dos parâmetros maximiza a verossimilhança emparelhada, e outra, uma transformação quantil generalizada, ou seja, uma aproximação contínua para a verossimilhança discreta a fim de contornar problemas de estimação quando a dimensão da cópula (p) é grande.

Em estudos de análise de sobrevivência com aplicação a dados discretos, [Lawless e Yilmaz \(2011\)](#) propõem uma máxima pseudo-verossimilhança semiparamétrica onde abordam uma reparametrização de riscos discretos. Nesse procedimento, os parâmetros de cópulas são estimados sem suposições paramétricas sobre as distribuições marginais. Em outro estudo, [Yilmaz e Lawless \(2011\)](#) apresenta uma EMV de forma semiparamétrica e uma estimação semiparamétrica em 2-fases para um modelo sem covariáveis.

Não foi visto na literatura um estudo que apresente uma estimação da função de verossimilhança com cópulas paramétricas para dados multivariados discretos com presença de censuras e covariáveis. Porém, [Lawless \(2003\)](#) cita brevemente, somente como pode ser construída a função de verossimilhança para o caso discreto, mas não a apresenta e tampouco aborda sua aplicação.

Portanto, propõe-se o MMV para estimar os parâmetros do modelo bivariado via cópulas para dados discretos e censurados, sendo esse método facilmente adaptado para a inclusão de covariáveis.

[Lawless \(2003\)](#) informa que a função de verossimilhança paramétrica para o modelo de sobrevivência bivariado discreto por meio de cópulas pode ser definida com base na verossimilhança para o caso contínuo apresentada na equação (4.4). No entanto, será escrita em termos de $f_{mp}(t_{1i}, t_{2i})$ que é formada pelas diferenças finitas, como apresentado na equação (3.17).

Para o presente estudo, a função de verossimilhança para os modelos bivariados paramétricos a fim de acomodar dados discretos e censurados, fica definida por:

$$L(\Psi) = \prod_{i=1}^n \{f_{mp}(t_{1i}, t_{2i})\}^{\delta_{1i}\delta_{2i}} \cdot \{\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i})\}^{\delta_{1i}(1-\delta_{2i})} \cdot \{\mathbb{P}(T_{1i} > t_{1i}, T_{2i} = t_{2i})\}^{\delta_{2i}(1-\delta_{1i})} \cdot \{S(t_{1i}, t_{2i})\}^{(1-\delta_{2i})(1-\delta_{1i})}, \quad (4.5)$$

em que $\Psi := (\omega_{t_{1i}}, \dots, \omega_{t_{pi}}, \gamma)$ é o vetor de parâmetros.

A função de verossimilhança apresentada tanto para o caso contínuo, equação (4.4),

quanto para o caso discreto, equação (4.5), podem ser utilizadas para todas as famílias de cópulas.

Ao considerar as funções de sobrevivência $S_1(t_{1i})$ e $S_2(t_{2i})$ para os tempos T_{1i} e T_{2i} respectivamente, o primeiro termo da função de verossimilhança, $f_{mp}(t_{1i}, t_{2i})$, que corresponde à falha nos tempos T_{1i} e T_{2i} , i.e, $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 1$, pode ser reescrita a partir da equação (3.17). Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}
f_{mp}(t_{1i}, t_{2i}; \gamma) &= \mathbb{P}(t_{1i} - 1 < T_{1i} \leq t_{1i}, t_{2i} - 1 < T_{2i} \leq t_{2i}) \\
&= \mathbb{P}(T_{1i} > t_{1i} - 1, t_{2i} - 1 < T_{2i} \leq t_{2i}) - \mathbb{P}(T_{1i} > t_{1i}, t_{2i} - 1 < T_{2i} \leq t_{2i}) \\
&= \mathbb{P}(T_{1i} > t_{1i} - 1, T_{2i} > t_{2i} - 1) - \mathbb{P}(T_{1i} > t_{1i} - 1, T_{2i} > t_{2i}) \\
&\quad - \mathbb{P}(T_{1i} > t_{1i}, T_{2i} > t_{2i} - 1) + \mathbb{P}(T_{1i} > t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}) \\
&= S(t_{1i} - 1, t_{2i} - 1) - S(t_{1i} - 1, t_{2i}) - S(t_{1i}, t_{2i} - 1) + S(t_{1i}, t_{2i}), \quad (4.6)
\end{aligned}$$

aplicando o teorema de Sklar definido na equação (4.2), a equação (4.6) fica definida por:

$$\begin{aligned}
f_{mp}(t_{1i}, t_{2i}; \gamma) &= \mathbb{D}(S_1(t_{1i} - 1), S_2(t_{2i} - 1); \gamma) - \mathbb{D}(S_1(t_{1i} - 1), S_2(t_{2i}); \gamma) \\
&\quad - \mathbb{D}(S_1(t_{1i}), S_2(t_{2i} - 1); \gamma) + \mathbb{D}(S_1(t_{1i}), S_2(t_{2i}); \gamma). \quad (4.7)
\end{aligned}$$

O segundo termo $\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i})$ corresponde à falha em T_{1i} ($\delta_{1i} = 1$) e censura em T_{2i} ($\delta_{2i} = 0$). Deste modo, fica expresso em termo das diferenças finitas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}) &= 1 - \mathbb{P}(t_{1i} - 1 \leq T_{1i} \leq t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_{1i} > t_{1i} - 1, T_{2i} > t_{2i}) + \mathbb{P}(T_{1i} > t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}) \\
&= 1 - S(t_{1i} - 1, t_{2i}) + S(t_{1i}, t_{2i}),
\end{aligned}$$

aplicando o teorema de Sklar, a função de probabilidade fica definida por:

$$\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}) = 1 - \mathbb{D}(S_1(t_{1i} - 1), S_2(t_{2i})) + \mathbb{D}(S_1(t_{1i}), S_2(t_{2i})). \quad (4.8)$$

O terceiro termo é análogo ao segundo, o qual corresponde à falha em T_{2i} ($\delta_{2i} = 1$) e censura em T_{1i} ($\delta_{1i} = 0$), logo, o cálculo é análogo.

O quarto termo $S(t_{1i}, t_{2i})$ corresponde à censura nos tempos T_{1i} e T_{2i} , ou seja,

$\delta_{1i} = \delta_{2i} = 0$. O qual é a função de sobrevivência conjunta, como apresentada para o caso contínuo, equação (4.1);

$$S(t_{1i}, t_{2i}) = \overline{\mathbb{D}}(S_1(t_{1i}), S_2(t_{2i})),$$

neste caso $S_1(t_{1i})$ e $S_2(t_{2i})$ são funções de sobrevivência de *v.a.'s* discretas.

Estimativas eficientes dos parâmetros para tal modelo podem ser obtidas pelo método IFM (NIKOLOULOPOULOS e KARLIS, 2009ab; JOE, 2015).

Nikoloulopoulos e Karlis (2009b) afirmam que o uso das estimativas do IFM reduzem o esforço computacional. Obtendo assim, as EMV's tradicionais que consistem na maximização da log-verossimilhança conjunta sobre a cópula e os parâmetros marginais em uma única etapa.

Em cenários reais para dados de respostas discretas, as dependências não são muito fortes. Logo, o método IFM pode estimar os parâmetros do modelo de forma eficiente no sentido de tempo de computação e variância assintótica (NIKOLOULOPOULOS, 2013b). Para famílias paramétricas de cópulas com uma *fda* de forma fechada e cópulas de Vine, a máxima verossimilhança ou estimativa de IFM é direta.

De outro modo, para obter as estimativas dos parâmetros em estudo de sobrevivência por meio de cópulas, pesquisadores têm realizado somente um passo para maximizar a função de verossimilhança de forma completa, onde utilizam as estimativas dos parâmetros das marginais e o coeficiente de Kendall como chute inicial para o parâmetro da cópula, ambos obtidos na análise exploratória dos dados.

4.2 Cópula de Gumbel para Sobrevivência

A cópula de sobrevivência correspondente à cópula de Gumbel não é arquimediana, como afirmam Georges *et al.* (2001). Esta, fica definida a partir da equação (4.1) por:

$$S(t_1, t_2; \gamma) = S_1(t_1) + S_2(t_2) - 1 + \exp \left\{ - \left[(-\log(1 - S_1(t_1)))^\gamma + (-\log(1 - S_2(t_2)))^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right\}. \quad (4.9)$$

No entanto, alternativamente pode-se assumir a cópula de sobrevivência como a cópula de Gumbel, definida pelo modelos bivariados propostos por Gumbel (1960, 1961). Assim, a função de sobrevivência conjunta contínua $S(t_1, t_2)$ do vetor aleatório (T_1, T_2) escrita a partir de suas marginais $S_1(t_1)$ e $S_2(t_2)$, respectivamente, junto à função de

dependência da cópula \mathbb{D} , fica definida da seguinte forma

$$S(t_1, t_2; \gamma) = \mathbb{D}_\gamma(S_1(t_1), S_2(t_2)) = \exp \left\{ - [(-\log S_1(t_1))^\gamma + (-\log S_2(t_2))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\}, \quad (4.10)$$

em que $\gamma \in [1, \infty)$, tal que $S_1(t_1)$ e $S_2(t_2)$ são as funções de sobrevivência que acomodam qualquer distribuição que se ajusta a dados de sobrevivência. Ressalta que as funções de sobrevivência (4.9) e (4.10) fornecem dois modelos diferentes.

Como verificado na literatura, a expressão das cópulas para o caso discreto não se diferencia do caso contínuo. Assim, como o presente estudo tem por objetivo a apresentação de análises com a distribuição que se ajustou aos dados de Políticas Públicas, a função de sobrevivência conjunta por meio da cópula de Gumbel com as marginais discretas será expressa conforme a equação (4.10), em que $S_1(t_1)$ e $S_2(t_2)$ irão se referir às funções de sobrevivência discretas da distribuição LLD, em que $t = 0, 1, 2, \dots$, como apresentada na equação (2.8).

Com a finalidade de obter a estimação para os parâmetros da função de sobrevivência da distribuição LLD junto ao parâmetro de associação da cópula de Gumbel, será utilizada a função de verossimilhança proposta para aplicação a dados discretos com presença de censuras, apresentada na equação (4.5). Deste modo, apresenta-se a seguir as expressões dos termos presentes na função de verossimilhança para a cópula de Gumbel.

O termo $f_{mp}(t_{1i}, t_{2i})$ obtido pela equação (3.17), correspondente à falha nos tempos T_{1i} e T_{2i} , ou seja, $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 1$, fica expresso em termo da função de sobrevivência conjunta por

$$\begin{aligned} f_{mp}(t_{1i}, t_{2i}; \gamma) = & \exp \left\{ - [(-\log S_1(t_{1i} - 1))^\gamma + (-\log S_2(t_{2i} - 1))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\} \\ & - \exp \left\{ - [(-\log S_1(t_{1i} - 1))^\gamma + (-\log S_2(t_{2i}))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\} \\ & - \exp \left\{ - [(-\log S_1(t_{1i}))^\gamma + (-\log S_2(t_{2i} - 1))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\} \\ & + \exp \left\{ - [(-\log S_1(t_{1i}))^\gamma + (-\log S_2(t_{2i}))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

O segundo termo $\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i})$, em que $\delta_{2i} = 0$ e $\delta_{1i} = 1$, correspondente à falha em T_{1i} e censura em T_{2i} , fica definido em termos das diferenças finitas para

sobrevivência conjunta da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}) = & 1 - \exp \left\{ - [(-\log S_1(t_{1i} - 1))^\gamma + (-\log S_2(t_{2i}))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\} \\ & + \exp \left\{ - [(-\log S_1(t_{1i}))^\gamma + (-\log S_2(t_{2i}))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

O terceiro termo é análogo ao segundo, o qual corresponde à falha em T_{2i} ($\delta_{2i} = 1$) e censura em T_{1i} ($\delta_{1i} = 0$), logo, o cálculo é análogo.

O quarto termo $S(t_{1i}, t_{2i})$, correspondente à censura nos tempos T_{1i} e T_{2i} ($\delta_{1i} = \delta_{2i} = 0$), é a sobrevivência conjunta, como apresentada equação na (4.10),

$$S(t_{1i}, t_{2i}) = \exp \left\{ - [(-\log S_1(t_{1i}))^\gamma + (-\log S_2(t_{2i}))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\},$$

em que $S_1(t_{1i})$ e $S_2(t_{2i})$ são funções de sobrevivência de $v.a.'s$ discretas que seguem uma distribuição LLD, como apresentada na equação (2.8).

Dada a função de sobrevivência bivariada na equação (4.10), têm-se as respectivas funções de sobrevivência marginais ao aplicar o limite, descritas por:

$$S_1(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow 0} S(t_1, t_2; \gamma) \quad , \quad S_2(t_2) = \lim_{t_1 \rightarrow 0} S(t_1, t_2; \gamma). \quad (4.13)$$

Assim sendo, pode-se verificar o ajuste dos modelos a partir das funções de sobrevivência marginais.

4.2.1 Modelo de regressão bivariado Gumbel

Como citado na Seção 2.2, dados de sobrevivência podem conter variáveis explicativas que podem influenciar nos tempos de sobrevivência dos indivíduos, o que torna necessário o uso do modelo de regressão, a fim de caracterizar a dependência entre essas variáveis. Este modelo pode ser obtido ao relacionar o vetor de covariáveis a um ou mais parâmetros da distribuição de probabilidade.

À vista disso, sejam dois eventos de interesse $j = 1, 2$, associados ao vetor de covariáveis $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_c)^T$, em que c é o número de covariáveis. Assim, a fim de conectar as variáveis explicativas à variáveis respostas usa-se a função de ligação $g(\cdot)$ para cada evento de interesse.

Ao considerar a distribuição LLD com parâmetro de escala, μ , e parâmetro de forma,

η , as covariáveis serão inseridas no modelo através de: $\mu = g(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}) = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})$, em que $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}$ é o preditor linear e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_c)^T$ é o vetor de parâmetros de regressão, para cada evento de interesse.

Ao caracterizar a função de ligação para o modelo de regressão, a função de sobrevivência conjunta para o modelo de regressão bivariado com c covariáveis é expressa por meio da cópula de Gumbel:

$$S(t_{1i}, t_{2i} | x_{1i}, x_{2i}) = \exp \left\{ - [(-\log S(t_{1i} | x_{1i}))^\gamma + (-\log S(t_{2i} | x_{2i}))^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}} \right\}. \quad (4.14)$$

Dado que o vetor aleatório $T \sim LLD(\mu, \eta)$, então $S_1(t_{1i} | x_{1i})$ e $S_2(t_{2i} | x_{2i})$ referem-se à função de sobrevivência do MRLLD dado por: $S(t_{ji} | x_{ji}) = \frac{1}{1 + ((t_{ji} + 1) / \exp(\mathbf{x}_{ji}^T \boldsymbol{\beta}_j))^\eta}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, em que $\mathbf{x}_1 = (1, x_{11}, \dots, x_{1c})^T$ é o vetor de covariáveis para o evento 1 e $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_{10}, \dots, \beta_{1c})^T$ seu respectivo vetor de parâmetros, e $\mathbf{x}_2 = (1, x_{21}, \dots, x_{2c})^T$ é o vetor de covariáveis para o evento 2 e $\boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_{20}, \dots, \beta_{2c})^T$ seu respectivo vetor de parâmetros associado ao i -ésimo indivíduo. Ressalta que as funções marginais podem acomodar qualquer função de sobrevivência, não necessariamente iguais.

Seja uma amostra observada $(t_{ji}, \delta_{ji}, \mathbf{x}_{ji})$, em que t_{ji} é o tempo do j -ésimo evento de interesse do i -ésimo indivíduo, com δ_{ji} a respectiva variável indicadora de censura, e \mathbf{x}_{ji} o vetor de covariáveis do j -ésimo evento de interesse associado ao i -ésimo indivíduo, sendo $j = 1, 2$ e $i = 1, \dots, n$.

Agora, seja $S(t_{1i}, t_{2i} | x_{1i}, x_{2i})$ a função de sobrevivência conjunta e $\boldsymbol{\Psi} := (\boldsymbol{\Psi}_1^T, \boldsymbol{\Psi}_2^T, \gamma)$ o vetor de parâmetros desconhecidos, em que $\boldsymbol{\Psi}_j^T = (\eta_j, \boldsymbol{\beta}_j^T)^T$ e $\boldsymbol{\beta}_j^T = (\beta_0, \dots, \beta_c)^T$, $j = 1, 2$, então a estimação para a função de sobrevivência conjunta para o modelo de regressão bivariado por meio da cópula de Gumbel, será obtida a partir da função de verossimilhança proposta na equação (4.5), que pode ser facilmente adaptada a fim de acomodar o modelo de regressão. Com a finalidade de exemplificar como pode ser adaptada, seguem abaixo os termos da função de verossimilhança com o modelo de regressão.

O termo $f_{mp}(t_{1i}, t_{2i} | x_{1i}, x_{2i})$ que corresponde à falha nos tempos $T_{1i} | x_{1i}$ e $T_{2i} | x_{2i}$, ou

seja, $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 1$, é dado por:

$$\begin{aligned}
f_{mp}(t_{1i}, t_{2i}|x_{1i}, x_{2i}) = & \exp \left\{ -[(-\log S(t_{1i}|x_{1i} - 1))^\gamma + (-\log S(t_{2i}|x_{2i} - 1))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\} \\
& - \exp \left\{ -[(-\log S(t_{1i}|x_{1i} - 1))^\gamma + (-\log S(t_{2i}|x_{2i}))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\} \\
& - \exp \left\{ -[(-\log S(t_{1i}|x_{1i}))^\gamma + (-\log S(t_{2i}|x_{2i} - 1))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\} \\
& + \exp \left\{ -[(-\log S(t_{1i}|x_{1i}))^\gamma + (-\log S(t_{2i}|x_{2i}))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\}, \quad (4.15)
\end{aligned}$$

em que, para o presente estudo ambas as marginais serão representadas pela função de sobrevivência da distribuição LLD do MRLLD, ou seja, $S(t_{ji}|x_{ji}) = \frac{1}{1 + ((t_{ji} + 1) / \exp(\mathbf{x}_{ji}^T \boldsymbol{\beta}_j))^\eta}$ $t = 0, 1, 2, \dots$, em que $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jc})^T$ é o vetor de covariáveis para os eventos ($j = 1, 2$) com seu respectivo vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}_j = (\beta_{j0}, \dots, \beta_{jc})^T$, associados ao i -ésimo indivíduo.

O segundo termo $\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}|x_{1i}, x_{2i})$, em que $\delta_{2i} = 0$ e $\delta_{1i} = 1$, corresponde à falha em $T_{1i}|x_{1i}$ e censura em $T_{2i}|x_{2i}$. Fica expresso por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}|x_{1i}, x_{2i}) = & 1 - \exp \left\{ -[(-\log S(t_{1i}|x_{1i} - 1))^\gamma + (-\log S(t_{2i}|x_{2i}))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\} \\
& + \exp \left\{ -[(-\log S(t_{1i}|x_{1i}))^\gamma + (-\log S(t_{2i}|x_{2i}))^\gamma]^\frac{1}{\gamma} \right\}. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Para o terceiro termo que corresponde à falha em $T_{2i}|x_{2i}$ ($\delta_{2i} = 1$) e censura em $T_{1i}|x_{1i}$ ($\delta_{1i} = 0$), o cálculo é obtido analogamente. O quarto termo $S(t_{1i}, t_{2i}|x_{1i}, x_{2i})$ correspondente à censura nos tempos $T_{1i}|x_{1i}$ e $T_{2i}|x_{2i}$, ou seja, $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 0$, é a sobrevivência conjunta, como apresentada na equação (4.14),

Diante disso, as EMV's dos parâmetros, erros padrão, bem como os critérios de seleção AIC e BIC, serão obtidos a partir da maximização de $L(\boldsymbol{\Psi})$, atingida ao usar a função *optim* no *software* R, em que a otimização é realizada numericamente usando o método BFGS, o qual pertence aos métodos quasi-Newton.

4.3 Cópula de Frank para Sobrevivência

Como anunciado, a cópula de Frank é a única cópula arquimediana cuja função de sobrevivência correspondente é a mesma cópula proposta por Frank (1979), o cálculo pode ser visto em Georges *et al.* (2001). Deste modo, a função de sobrevivência conjunta a

partir da cópula de Frank é definida nos modelos propostos por Frank (1979) e Genest (1987), que assim fica descrita

$$S(t_1, t_2; \gamma) = -\frac{1}{\gamma} \log \left[1 + \frac{(\exp(-\gamma S_1(t_1)) - 1) \cdot (\exp(-\gamma S_2(t_2)) - 1)}{\exp(-\gamma) - 1} \right], \quad (4.17)$$

em que $\gamma \in (-\infty, \infty), \gamma \neq 0$. $S_1(t_1)$ e $S_2(t_2)$ são as funções de sobrevivência marginais discretas. Quando $\gamma \rightarrow 0$, os tempos para $S_1(t_1)$ e $S_2(t_2)$ apresentam independência. Obtêm dependência fortemente positiva quando $\gamma \rightarrow \infty$, e negativa se $\gamma \rightarrow -\infty$.

Dada a função de sobrevivência bivariada na equação (4.17), o ajuste do modelo pode ser obtido a partir de suas marginais. Deste modo, ao aplicar o limite quando os tempos, $t_j \rightarrow 0, j = 1, 2$, têm-se as respectivas funções de sobrevivência marginais, descritas por:

$$S_1(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow 0} S(t_1, t_2; \gamma) \quad , \quad S_2(t_2) = \lim_{t_1 \rightarrow 0} S(t_1, t_2; \gamma). \quad (4.18)$$

A função de verossimilhança, equação (4.5), pode ser também expressa com base na cópula de Frank. Tal que,

$$\begin{aligned} f_{mp}(t_{1i}, t_{2i}; \gamma;) = & \left\{ -\frac{1}{\gamma} \log \left[1 + \frac{(\exp(-\gamma S(t_{1i}-1))-1) \cdot (\exp(-\gamma S(t_{2i}-1))-1)}{\exp(-\gamma)-1} \right] \right\} \\ & - \left\{ -\frac{1}{\gamma} \log \left[1 + \frac{(\exp(-\gamma S(t_{1i}-1))-1) \cdot (\exp(-\gamma S(t_{2i}))-1)}{\exp(-\gamma)-1} \right] \right\} \\ & - \left\{ -\frac{1}{\gamma} \log \left[1 + \frac{(\exp(-\gamma S(t_{1i}))-1) \cdot (\exp(-\gamma S(t_{2i}-1))-1)}{\exp(-\gamma)-1} \right] \right\} \\ & + \left\{ -\frac{1}{\gamma} \log \left[1 + \frac{(\exp(-\gamma S(t_{1i}))-1) \cdot (\exp(-\gamma S(t_{2i}))-1)}{\exp(-\gamma)-1} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

é a função equivalente ao termo $f_{mp}(t_{1i}, t_{2i})$ que corresponde à falha nos tempos T_{1i} e T_{2i} , ou seja, $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 1$.

O termo $\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i})$, em que $\delta_{2i} = 0$ e $\delta_{1i} = 1$, corresponde à falha em T_{1i} e censura em T_{2i} , e fica expresso em termos das diferenças finitas para sobrevivência conjunta da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}) = & 1 - \left\{ -\frac{1}{\gamma} \log \left[1 + \frac{(\exp(-\gamma S(t_{1i}-1))-1) \cdot (\exp(-\gamma S(t_{2i}))-1)}{\exp(-\gamma)-1} \right] \right\} \\ & + \left\{ -\frac{1}{\gamma} \log \left[1 + \frac{(\exp(-\gamma S(t_{1i}))-1) \cdot (\exp(-\gamma S(t_{2i}))-1)}{\exp(-\gamma)-1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para o terceiro termo que corresponde à falha em T_{2i} ($\delta_{2i} = 1$) e censura em T_{1i} ($\delta_{1i} = 0$), o calculo é análogo. O quarto termo $S(t_{1i}, t_{2i})$ é a sobrevivência conjunta, como definida

na equação (4.17). O qual equivale à censura nos tempos T_{1i} e T_{2i} , ou seja, $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 0$.

Como na cópula de Gumbel, as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros, erros padrão e os critérios de seleção AIC e BIC para a cópula de Frank, serão obtidos a partir da maximização de $L(\Psi)$, atingida ao usar a função *optim* no *software* R, em que a otimização é realizada numericamente usando o método BFGS.

4.3.1 Modelo de regressão bivariado Frank

Definido o modelo de regressão para as funções de sobrevivência marginais, como apresentado na Seção (2.2) através da equação (2.12), a função de sobrevivência conjunta do modelo de regressão bivariado por meio da cópula de Frank associada ao vetor de covariáveis $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_c)^T$, a partir da função de ligação $g(\cdot)$, é definida por

$$S(t_{1i}, t_{2i} | x_{1i}, x_{2i}) = -\frac{1}{\gamma} \log \left[1 + \frac{(\exp(-\gamma S(t_{1i} | x_{1i})) - 1) \cdot (\exp(-\gamma S(t_{2i} | x_{2i})) - 1)}{\exp(-\gamma) - 1} \right], \quad (4.21)$$

em que $S_{jx}(t_{ji} | x_{ji})$ com $j = 1, 2$, é a função de sobrevivência marginal discreta do MRLLD, conforme descrita na equação (2.12), e $\gamma \in (-\infty, \infty)$, $\gamma \neq 0$.

Assim como descrito na cópula de Gumbel, a descrição para a função de verossimilhança para cópula de Frank será análoga. Logo, a estimação para o vetor de parâmetros desconhecidos $\Psi := (\Psi_1^T, \Psi_2^T, \gamma)$, em que $\Psi_j^T = (\eta_j, \beta_j^T)^T$ e $\beta_j^T = (\beta_0, \dots, \beta_c)^T$, $j = 1, 2$, para $S(t_{1i}, t_{2i} | x_{1i}, x_{2i})$ com o modelo de regressão bivariado por meio da cópula de Frank será obtida a partir da função de verossimilhança proposta na equação (4.5).

4.4 Cópula de Clayton para Sobrevivência

Tal como a Gumbel, a cópula de sobrevivência correspondente à cópula de Clayton pode ser definida de duas maneiras. Ao usar a cópula de sobrevivência (4.1), a qual é baseada em uma cópula derivada de uma distribuição específica, a cópula de sobrevivência para a cópula de Clayton é dada por:

$$S(t_1, t_2; \gamma) = S_1(t_1) + S_2(t_2) - 1 + \left\{ ((1 - S_1(t_1))^{-\gamma} + (1 - S_2(t_2))^{-\gamma} - 1)^{-\frac{1}{\gamma}} \right\}. \quad (4.22)$$

Ao considerar o modelo proposto por Clayton (1978), o qual tornou-se fonte de estudos e aplicações a dados bivariados de sobrevivência, ver Lawless (2003), Fachini (2011), Biondo e Suzuki (2016), a função de sobrevivência conjunta com $S_1(t_1)$ e $S_2(t_2)$

funções de sobrevivência de *v.a.'s* contínuas das marginais T_1 e T_2 , fica expressa por:

$$S(t_1, t_2; \gamma) = (S_1(t_1)^{-\gamma} + S_2(t_2)^{-\gamma} - 1)^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \gamma \in [-1, \infty), \gamma \neq 0. \quad (4.23)$$

Se $\gamma > 0$, T_1 e T_2 estão altamente correlacionados. Quando $\gamma \rightarrow 0$, tem-se independência entre T_1 e T_2 , ou seja, $\mathbb{D}(S_1(t_1), S_2(t_2)) = S_1(t_1) \cdot S_2(t_2)$ (FACHINI *et al.*, 2014).

Como verificado na literatura, a expressão das cópulas para o caso discreto não se diferencia do caso contínuo. Assim, a função de sobrevivência conjunta por meio da cópula de Clayton com as marginais discretas será expressa conforme a equação (??), em que $S_1(t_1)$ e $S_2(t_2)$ são funções de sobrevivência discretas, como descrita na equação (2.8).

A função de sobrevivência (??) pode ser expandida a distribuições multivariadas com $p \geq 3$ variáveis. Segundo Hougaard (2000), Lawless (2003), Nelsen (2006) e Joe (2015), a função de sobrevivência multivariada usando a cópula de Clayton é definida por

$$S(t_1, \dots, t_p; \gamma) = \left[\sum_{j=1}^p S_j(t_j)^{-\gamma} - (p-1) \right]^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad S_j(t_j) \in [0, 1]^p. \quad (4.24)$$

Nota-se que a extensão para uma terceira distribuição marginal é trivial, o que torna uma característica atraente da cópula arquimediana. No entanto, Ophem (1999) afirma que nessa extensão há uma limitação, que é sacrificar a propriedade de modelar a dependência negativa.

Como nas demais cópulas, dada a função de sobrevivência bivariada na equação (4.23), têm-se as respectivas funções de sobrevivência marginais da seguinte forma:

$$S_1(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow 0} S(t_1, t_2; \gamma) \quad , \quad S_2(t_2) = \lim_{t_1 \rightarrow 0} S(t_1, t_2; \gamma). \quad (4.25)$$

A função de verossimilhança da cópula de Clayton para sobrevivência é definida a partir da função de verossimilhança proposta para cópulas paramétricas com distribuições marginais discretas apresentada na equação (4.5), que fica expressa em forma da sobrevivência bivariada como proposta por Clayton (1978).

Assim sendo, o primeiro termo da função de verossimilhança, $f_{mp}(t_{1i}, t_{2i})$, que corresponde à falha nos tempos T_{1i} e T_{2i} , ou seja, $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 1$, é reescrito pela equação

(3.17), e fica expresso em termo da função de sobrevivência conjunta por:

$$\begin{aligned}
f_{mp}(t_{1i}, t_{2i}; \gamma) = & \{S_1(t_{1i} - 1)^{-\gamma} + S_2(t_{2i} - 1)^{-\gamma} - 1\}^{-\frac{1}{\gamma}} \\
& - \{S_1(t_{1i} - 1)^{-\gamma} + S_2(t_{2i})^{-\gamma} - 1\}^{-\frac{1}{\gamma}} \\
& - \{S_1(t_{1i})^{-\gamma} + S_2(t_{2i} - 1)^{-\gamma} - 1\}^{-\frac{1}{\gamma}} \\
& + \{S_1(t_{1i})^{-\gamma} + S_2(t_{2i})^{-\gamma} - 1\}^{-\frac{1}{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

O segundo termo $\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > T_{2i})$ correspondente à falha em T_{1i} ($\delta_{1i} = 1$) e censura em T_{2i} ($\delta_{2i} = 0$), fica expresso em termos das diferenças finitas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{1i} = t_{1i}, T_{2i} > t_{2i}) = & 1 - \{S_1(t_{1i} - 1)^{-\gamma} + S_2(t_{2i})^{-\gamma} - 1\}^{-\frac{1}{\gamma}} \\
& + \{S_1(t_{1i})^{-\gamma} + S_2(t_{2i})^{-\gamma} - 1\}^{-\frac{1}{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Para o terceiro termo que corresponde à falha em T_{2i} ($\delta_{2i} = 1$) e censura em T_{1i} ($\delta_{1i} = 0$), o cálculo é análogo. O quarto termo correspondente à censura nos tempos T_{1i} e T_{2i} , ou seja, $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 0$, é a sobrevivência conjunta apresentada na equação (??), em que $S_1(t_{1i})$ e $S_2(t_{2i})$ passarão a ser funções de sobrevivência de *v.a.'s* discretas.

4.4.1 Modelo de regressão bivariado Clayton

Sejam dois eventos de interesse $j = 1, 2$, associados ao vetor de covariáveis $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_c)^T$, em que c é o número de covariáveis. Então, a fim de conectar as variáveis explicativas à variáveis respostas usa-se a função de ligação $g(\cdot)$ para cada evento de interesse.

Ao considerar a distribuição LLD com parâmetro de escala, μ , e parâmetro de forma, η , as covariáveis serão inseridas no modelo através de: $\mu = g(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}) = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})$, em que $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}$ é o preditor linear e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_c)^T$ é o vetor de parâmetros de regressão, para cada evento de interesse.

Deste modo, ao designar a função de ligação para o modelo de regressão, a função de sobrevivência conjunta para o modelo de regressão bivariado com c covariáveis é definida por meio da cópula de Clayton da seguinte forma

$$S(t_{1i}, t_{2i} | x_{1i}, x_{2i}) = \{S(t_{1i} | x_{1i})^{-\gamma} + S(t_{2i} | x_{2i})^{-\gamma} - 1\}^{-\frac{1}{\gamma}}. \tag{4.28}$$

Dado que o vetor aleatório $T \sim LLD(\mu, \eta)$, então $S_1(t_{1i}|x_i)$ e $S_2(t_{2i}|x_i)$ referem-se a função de sobrevivência do MRLLD dado por: $S(t_{ji}|x_{ji}) = \frac{1}{1+((t_{ji}+1)/\exp(\mathbf{x}_{ji}^T \boldsymbol{\beta}_j))^{\eta}}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, com $j = 1, 2$, como apresentada na equação (2.12). Como na cópula de Gumbel e Frank, enfatiza que as funções marginais podem acomodar qualquer função de sobrevivência, não necessariamente iguais.

Seja $S(t_{1i}, t_{2i}|x_{1i}, x_{2i})$ a função de sobrevivência conjunta e $\boldsymbol{\Psi} := (\boldsymbol{\Psi}_1^T, \boldsymbol{\Psi}_2^T, \gamma)$ o vetor de parâmetros desconhecidos, em que $\boldsymbol{\Psi}_j^T = (\eta_j, \boldsymbol{\beta}_j^T)^T$ e $\boldsymbol{\beta}_j^T = (\beta_0, \dots, \beta_c)^T$, $j = 1, 2$, então a estimação para a função de sobrevivência conjunta para o modelo de regressão bivariado por meio da cópula de Clayton, será obtida a partir da função de verossimilhança proposta na equação (4.5).

Portanto, para maximizar a função de verossimilhança da cópula de Clayton para sobrevivência de forma paramétrica, adapta-se a equação (4.5) com os termos apresentados na Seção 4.4. Diante disso, as EMV's dos parâmetros, erros padrão, bem como os critérios de seleção AIC e BIC, serão obtidos a partir da maximização de $L(\boldsymbol{\Psi})$, atingida ao usar a função *optim* no *software* R, em que a otimização é realizada numericamente usando o método BFGS.

5 Metodologia de Simulação

A fim de estudar a performance dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros dos três modelos de sobrevivência descritos no Capítulo 4, foram realizados vários estudos de simulação por meio do *software* R, com base no método de simulação de Monte Carlo. Com o intuito de simular tempos de sobrevivência aleatórios discretos para dois eventos, consideraram-se ambas as marginais discretas com distribuição LLD. Nos procedimentos de estimação numérica utilizados para obter os estimadores dos parâmetros dos modelos, utilizou-se o algoritmo BFGS com o comando *optim*.

Para realizar as simulações, faz-se necessário o uso do pacote "copula" disponível no *software* R. E através da função "mvdc" (*multivariate distribution via copula*) é que se define as funções das distribuições marginais com suas configurações paramétricas, bem como a função de cópula com que se pretende unificar tais distribuições, junto ao seu parâmetro de associação. Com a função "rMvdc" (*random multivariate distribution via copula*) gera-se os tempos aleatórios.

A função "mvdc" deve ser utilizada apenas para marginais paramétricas, logo pode-se gerar variáveis aleatórias correlacionadas sem restrição das funções de distribuição de probabilidade (R CORE TEAM, 2018). Contudo, a distribuição LLD utilizada no estudo para gerar os tempos bivariados, não está implementada para uso no pacote, como marginais do modelo bivariado. À vista disso, é preciso definir algumas funções como já apresentadas na Seção 2.1, sendo as equações: (2.6), (2.7) e (2.10).

Como característica da análise de sobrevivência, é indispensável a presença de censuras para os tempos de sobrevivência gerados pela cópula. Diante disso, nos respectivos eventos, adicionou-se censuras geradas por meio da distribuição Uniforme $(0, \theta)$, as quais são independentes dos tempos de sobrevivência. Assim, a variável observada é dada por $t_{ji} = \min(T_{ji}, C_{ji})$ e associada a variável indicadora δ_{ji} como descrita na Seção 4.1.1.

No presente estudo, considerou-se porcentagens de censuras aproximadamente a 0%, 10%, 20% e 30% para tamanhos de amostras $n = (100, 250, 500)$, com 1000 réplicas de Monte Carlo. O controle de censuras é obtido por meio das escolhas de valores para o parâmetro θ .

A combinação de parâmetros foi definida a partir do parâmetro de associação da cópula, o qual varia entre independência e dependência fortemente positiva. Dessa forma,

procurou-se definir cenários para as marginais em que o parâmetro de escala (μ_j) seja próximo e distante do parâmetro de forma (η_j).

Teoricamente sabe-se que a distribuição conjunta de vetores aleatórios discretos não é única. Isto é, problemas de identificabilidade dos modelos bivariados dificultam a estimação de seus parâmetros. Cientes dessas dificuldades, encarou-se o desafio de definir vetores de parâmetros Ψ , em que o parâmetro da cópula combinasse com os parâmetros das marginais de tal forma que os estimadores de máxima verossimilhança mostrassem um bom desempenho. Dentro de uma variedade de experimentos para definir esses vetores, decidiu-se fixar valores para o parâmetro γ da cópula de tal forma a cobrir seu suporte. Já para os parâmetros das marginais LLD foram escolhidos valores que acompanhassem o comportamento de cauda superior e/ou inferior. Os cenários definidos para cada cópula estão descritos na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Cenário de combinações dos parâmetros utilizados na simulação.

Modelos de Cópuas															
Ψ	Gumbel					Frank					Clayton				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
η_1	3.5	3.5	4	6	7	2.5	3.5	4	7	3.5	2.5	3.5	4	7	3.5
μ_1	6	6	8	8	5	15	8	8	5	6	20	6	8	5	6
η_2	4	4	4	4	4	3.5	3.5	4	4	5	3.5	4	4	4	5
μ_2	8	20	6	12	8	15	8	6	8	15	20	10	6	8	15
γ	1	1	3	5	6	0.5	0.5	3	6	6	0.2	0.2	3	6	6

Nos cenários apresentados na Tabela 5.1, nota-se que as distribuições marginais LLD para ambos os tempos possuem função de risco unimodais, pois tem-se $\eta_j > 1$. Além do mais, foram testados diversas combinações, entretanto os demais cenários estão expostos nos anexos (Capítulo 8).

Com a finalidade de estudar o comportamento dos estimadores, calcularam-se as Estimativas médias dos parâmetros, bem como seu viés e erro quadrático médio (EQM).

O viés do estimador (vício) tem como base a diferença média entre o valor de Ψ e o valor de $\hat{\Psi}$, tal que $b(\hat{\Psi}) = E[\hat{\Psi} - \Psi] = E[\hat{\Psi}] - \Psi$.

Já o EQM dos estimadores, mede a diferença quadrática entre o estimador $\hat{\Psi}$ e o valor de Ψ , tal que $EQM(\hat{\Psi}) = E[\hat{\Psi} - \Psi]^2 = Var[\hat{\Psi}] + [b(\hat{\Psi})]^2$.

Mais minúcias sobre os métodos podem ser consultadas em Santos (2017). Diante disso, apresenta-se a seguir os resultados para as simulações dos respectivos modelos de cópulas.

5.1 Resultados para Cópula de Gumbel

O objetivo da simulação é estudar o comportamento das estimativas dos parâmetros do vetor $\Psi = (\eta_1, \mu_1, \eta_2, \mu_2, \gamma)$, as quais são obtidas ao maximizar a função (4.5), em que a função de sobrevivência conjunta e das outras funções de probabilidades envolvidas nessa função são expressas em: (4.10), (4.11) e (4.12). Como já informado, a escolha dos valores fixos para tais parâmetros partiu inicialmente do parâmetro de associação da cópula e os parâmetros das marginais oscilam a partir do parâmetro de escala. Os resultados das Estimativas médias, viés e EQM do vetor de parâmetros Ψ , em que os tempos apresentam independência, estão nas Tabelas 5.2 e 5.3.

Tabela 5.2: Estimativas médias para o cenário 1, em que $\Psi = (3.5, 6, 4, 8, 1)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.63	-0.87	0.770	2.83	-0.67	0.458	3.02	-0.48	0.242	3.25	-0.25	0.075
$\mu_1 = 6$	5.03	-0.98	0.978	4.78	-1.22	1.509	4.62	-1.38	1.938	4.53	-1.47	2.193
$\eta_2 = 4$	3.47	-0.53	0.297	3.79	-0.21	0.058	4.07	0.06	0.020	4.41	0.41	0.185
$\mu_2 = 8$	6.90	-1.11	1.281	6.67	-1.33	1.818	6.46	-1.55	2.443	6.58	-1.43	2.088
$\gamma = 1$	0.96	-0.04	0.002	0.99	-0.01	0.001	1.02	0.012	0.001	1.05	0.05	0.004
τ	-0.03	-	-	-0.01	-	-	-0.004	-	-	0.04	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.69	-0.82	0.674	2.82	-0.68	0.470	2.91	-0.59	0.358	2.94	-0.56	0.325
$\mu_1 = 6$	4.94	-1.07	1.167	4.64	-1.36	1.872	4.44	-1.56	2.460	4.28	-1.72	2.975
$\eta_2 = 4$	3.46	-0.54	0.305	3.42	-0.58	0.355	3.37	-0.63	0.411	3.37	-0.63	0.409
$\mu_2 = 8$	7.31	-0.70	0.542	7.04	-0.97	0.989	6.92	-1.08	1.219	6.89	-1.12	2.088
$\gamma = 1$	1.04	0.03	0.002	1.04	0.04	0.003	1.08	0.08	0.007	1.13	0.13	0.018
τ	0.04	-	-	-0.02	-	-	-0.01	-	-	0.03	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.79	-0.71	0.519	2.83	-0.67	0.460	2.95	-0.55	0.312	2.85	-0.65	0.434
$\mu_1 = 6$	5.10	-0.91	0.850	4.81	-1.20	1.455	4.57	-1.44	2.088	4.48	-1.52	2.330
$\eta_2 = 4$	3.04	-0.96	0.938	3.24	-0.77	0.599	3.29	-0.71	0.513	3.32	-0.68	0.477
$\mu_2 = 8$	6.93	-1.08	1.209	6.66	-1.34	1.844	6.35	-1.66	2.794	6.38	-1.63	2.696
$\gamma = 1$	0.97	-0.03	0.002	0.97	-0.03	0.002	0.97	-0.03	0.002	0.99	-0.01	0.001
τ	-0.01	-	-	-0.02	-	-	-0.02	-	-	-0.02	-	-

Tabela 5.3: Estimativas médias para o cenário 2, em que $\Psi = (3.5, 6, 4, 20, 1)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.64	-0.87	0.755	2.81	-0.69	0.489	3.09	-0.41	0.178	3.24	-0.26	0.079
$\mu_1 = 6$	5.04	-0.97	0.962	4.81	-1.20	1.461	4.71	-1.29	1.692	4.51	-1.50	2.268
$\eta_2 = 4$	3.74	-0.26	0.084	3.97	-0.03	0.017	4.18	0.18	0.048	4.61	0.60	0.384
$\mu_2 = 20$	18.87	-1.15	1.673	18.37	-1.65	3.047	18.04	-1.98	4.255	18.55	-1.47	2.497
$\gamma = 1$	0.95	-0.05	0.003	0.99	-0.01	0.001	1.01	0.01	0.001	1.05	0.05	0.004
τ	-0.03	-	-	-0.02	-	-	-0.002	-	-	0.04	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.68	-0.82	0.679	2.82	-0.68	0.470	2.86	-0.64	0.420	2.91	-0.59	0.356
$\mu_1 = 6$	4.93	-1.07	1.174	4.61	-1.39	1.961	4.41	-1.59	2.557	4.25	-1.75	3.082
$\eta_2 = 4$	3.79	-0.21	0.060	3.74	-0.26	0.083	3.75	-0.26	0.080	3.84	-0.16	0.041
$\mu_2 = 20$	19.82	-0.20	0.433	19.16	-0.86	1.109	18.99	-1.02	1.409	18.86	-1.16	1.691
$\gamma = 1$	1.03	0.03	0.002	1.04	0.04	0.003	1.09	0.09	0.009	1.15	0.15	0.023
τ	0.04	-	-	-0.02	-	-	-0.01	-	-	0.02	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.78	-0.72	0.526	2.84	-0.66	0.448	2.95	-0.55	0.314	2.83	-0.67	0.455
$\mu_1 = 6$	5.09	-0.91	0.862	4.82	-1.18	1.426	4.51	-1.50	2.264	4.50	-1.51	2.296
$\eta_2 = 4$	3.38	-0.62	0.395	3.53	-0.47	0.235	3.66	-0.34	0.128	3.57	-0.43	0.201
$\mu_2 = 20$	19.02	-1.00	1.360	18.57	-1.45	2.435	17.81	-2.21	5.197	18.04	-1.97	4.220
$\gamma = 1$	0.99	-0.01	0.001	0.99	-0.01	0.001	0.99	-0.01	0.001	1.00	<0.01	0.001
τ	-0.01	-	-	-0.02	-	-	-0.02	-	-	-0.02	-	-

Os cenários 1 e 2 apresentados nas Tabelas 5.2 e 5.3, respectivamente, retratam

uma dependência extremamente baixa entre $T_1 \sim LLD(\mu_1, \eta_1)$ e $T_2 \sim LLD(\mu_2, \eta_2)$. A diferença entre o cenário 1 e o cenário 2 é que os valores de μ_2 são diferentes. No cenário 2 os valores de η_2 e μ_2 estão bem distantes.

Ambos os casos apresentam EQM's($\hat{\gamma}$) < 0.03 e um pequeno viés, $b(\hat{\gamma})$, independente da quantidade de censuras. Logo, nota-se que o parâmetro de associação da cópula apresentou uma boa estimação.

Os resultados de EQM e viés para os parâmetros $\hat{\eta}$ também foram satisfatórios. Já para os parâmetros $\hat{\mu}$ o EQM e o viés aumentaram a depender do distanciamento entre η e μ . Isto fica mais nítido à medida que se insere maior porcentagem de censura. Para os parâmetros de forma ($\hat{\eta}$'s), percebe-se o inverso, quanto mais aumenta a porcentagem de censura, menor é seu vício, o que consequentemente apresenta menor EQM.

Dentre os dois cenários, nota-se que no cenário 1 em que o parâmetro de escala é mais próximo ao de forma, configura um melhor resultado ao se comparar aos referidos EQM's, que apresentam menores valores. Não dá para destacar em que tamanho de amostra se configura um melhor resultado entre os parâmetros, pois não é perceptível uma linearidade dos EQM's e sim uma oscilação entre os tamanhos de amostras e quantidades de censuras. Mas, destaca-se menor EQM para o parâmetro da cópula com amostras de tamanho 500 em todos os casos de censuras.

Tabela 5.4: Estimativas médias para o cenário 3, em que $\Psi = (4, 8, 4, 6, 3)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.29	-0.71	0.515	3.39	-0.61	0.385	3.13	-0.87	0.765	3.17	-0.83	0.696
$\mu_1 = 8$	7.29	-0.71	0.561	6.94	-1.06	1.177	6.93	-1.08	1.216	6.77	-1.24	1.574
$\eta_2 = 4$	3.30	-0.71	0.511	3.55	-0.45	0.219	3.47	-0.53	0.297	3.55	-0.45	0.219
$\mu_2 = 6$	5.27	-0.74	0.571	5.05	-0.96	0.938	4.99	-1.01	1.049	4.82	-1.19	1.431
$\gamma = 3$	2.52	-0.48	0.235	2.22	-0.78	0.612	2.21	-0.79	0.632	2.25	-0.75	0.568
τ	0.67	-	-	0.54	-	-	0.38	-	-	0.29	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.22	-0.78	0.617	3.31	-0.70	0.498	3.39	-0.61	0.384	3.16	-0.84	0.716
$\mu_1 = 8$	7.20	-0.81	0.701	6.97	-1.04	1.122	6.63	-1.37	1.928	6.48	-1.52	2.364
$\eta_2 = 4$	3.00	-1.00	1.011	2.97	-1.03	1.076	2.99	-1.01	1.030	2.76	-1.25	1.564
$\mu_2 = 6$	5.11	-0.89	0.819	4.93	-1.08	1.182	4.65	-1.35	1.851	4.60	-1.41	1.997
$\gamma = 3$	2.72	-0.29	0.090	2.56	-0.44	0.205	2.49	-0.51	0.269	2.55	-0.46	0.215
τ	0.70	-	-	0.53	-	-	0.44	-	-	0.36	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.20	-0.80	0.656	3.34	-0.67	0.456	3.41	-0.59	0.365	3.16	-0.85	0.725
$\mu_1 = 8$	7.25	-0.75	0.621	6.87	-1.14	1.337	6.60	-1.41	2.022	6.67	-1.33	1.824
$\eta_2 = 4$	2.98	-1.02	1.049	3.02	-0.99	0.981	3.01	-0.99	0.987	2.74	-1.26	1.590
$\mu_2 = 6$	5.03	-0.97	0.972	4.78	-1.23	1.531	4.58	-1.42	2.038	4.61	-1.39	1.967
$\gamma = 3$	2.70	-0.31	0.101	2.66	-0.35	0.128	2.46	-0.54	0.297	2.60	-0.40	0.168
τ	0.71	-	-	0.57	-	-	0.41	-	-	0.33	-	-

O terceiro cenário exposto na Tabela 5.4 retrata uma dependência moderada positiva entre os tempos $T_1 \sim LLD(\mu_1, \eta_1)$ e $T_2 \sim LLD(\mu_2, \eta_2)$, que diminui conforme aumenta a

porcentagem de censuras.

Os EQM's de $\hat{\gamma}$ foram pequenos, porém não melhor que nos cenários 1 e 2. Os resultados de $\hat{\eta}$ também foram satisfatórios, porém ainda é evidente que na maioria dos casos, os parâmetros de escala são os que apresentam valores dos EQM's maiores, mas são um pouco menores quando os tempos são menos dependentes. Já os EQM's do parâmetro da cópula é menor nos tamanhos de amostras $n = (200, 100)$, em que os tempos não são censurados.

Da Tabela 5.4, tem-se que, quanto maior o tamanho da amostra, há uma diminuição no valor dos EQM's de $\hat{\gamma}$. Com respeito ao viés dos parâmetros de forma e da cópula, $b(\hat{\eta})$ e $b(\hat{\gamma})$ decrescem até 20% de censuras e crescem com 30%, já $b(\hat{\mu})$ crescem de acordo com a quantidade de censuras.

Nesse cenário, vê-se que os conjuntos de parâmetros estimados a cada tamanho de amostra e quantidade de censuras, são relativamente semelhantes, apresentando uma aleatoriedade nos valores dos EQM's. Denota-se que os melhores resultados são expostos aos tempos gerados sem a presença de censuras.

As Tabelas 5.5 e 5.6 apresentam os cenários 4 e 5, respectivamente, cujos tempos $T_1 \sim LLD(\mu_1, \eta_1)$ e $T_2 \sim LLD(\mu_2, \eta_2)$ possuem uma forte dependência positiva. Outra diferença com os cenários anteriores é que $\eta_1 < \mu_1$. O EQM das Estimativas médias de $\hat{\gamma}$ tendem aumentar à medida que aumenta a censura. Os resultados para os dois cenários são parecidos.

Tabela 5.5: Estimativas médias para o cenário 4, em que $\Psi = (6, 8, 4, 12, 5)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	5.05	-0.96	0.942	5.15	-0.85	0.750	5.49	-0.52	0.301	4.86	-1.14	1.327
$\mu_1 = 8$	7.23	-0.78	0.658	7.15	-0.86	0.794	6.88	-1.12	1.309	7.01	-0.99	1.033
$\eta_2 = 4$	3.50	-0.50	0.262	3.68	-0.33	0.121	4.15	0.15	0.039	3.70	-0.31	0.107
$\mu_2 = 12$	11.58	-0.43	0.318	11.39	-0.62	0.515	10.85	-1.16	1.467	11.06	-0.95	1.025
$\gamma = 5$	4.39	-0.61	0.395	3.85	-1.15	1.338	3.40	-1.60	2.578	4.22	-0.78	0.626
τ	0.82	-	-	0.60	-	-	0.40	-	-	0.27	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.61	-1.39	1.953	4.69	-1.32	1.754	4.68	-1.33	1.783	4.38	-1.62	2.645
$\mu_1 = 8$	7.22	-0.78	0.665	7.04	-0.97	0.991	6.85	-1.16	1.382	6.90	-1.11	1.273
$\eta_2 = 4$	3.27	-0.73	0.542	3.30	-0.70	0.501	3.26	-0.74	0.565	3.01	-1.00	1.003
$\mu_2 = 12$	11.41	-0.60	0.494	11.02	-0.99	1.104	10.58	-1.43	2.165	10.70	-1.31	1.833
$\gamma = 5$	5.15	0.15	0.048	4.80	-0.20	0.064	4.50	-0.51	0.278	4.54	-0.46	0.232
τ	0.85	-	-	0.63	-	-	0.45	-	-	0.35	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.76	-1.24	1.569	4.99	-1.02	1.059	4.96	-1.04	1.114	4.93	-1.07	1.173
$\mu_1 = 8$	7.19	-0.81	0.715	6.94	-1.06	1.177	6.89	-1.12	1.300	6.74	-1.27	1.650
$\eta_2 = 4$	3.29	-0.71	0.514	3.35	-0.66	0.441	3.31	-0.69	0.493	3.28	-0.72	0.535
$\mu_2 = 12$	11.38	-0.63	0.531	10.84	-1.17	1.484	10.72	-1.29	1.777	10.41	-1.60	2.669
$\gamma = 5$	4.53	-0.47	0.246	4.41	-0.59	0.371	4.34	-0.66	0.457	4.10	-0.91	0.838
τ	0.84	-	-	0.64	-	-	0.43	-	-	0.32	-	-

Tabela 5.6: Estimativas médias para o cenário 5, em que $\Psi = (7, 5, 4, 8, 6)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7$	5.46	-1.54	2.412	5.71	-1.30	1.716	5.76	-1.24	1.578	5.47	-1.53	2.374
$\mu_1 = 5$	4.07	-0.94	0.894	3.99	-1.02	1.047	3.92	-1.08	1.187	3.99	-1.01	1.044
$\eta_2 = 4$	3.33	-0.67	0.462	3.52	-0.48	0.244	3.69	-0.32	0.113	3.46	-0.54	0.304
$\mu_2 = 8$	7.19	-0.81	0.714	6.98	-1.03	1.104	6.89	-1.12	1.294	7.02	-0.98	1.017
$\gamma = 6$	5.68	-0.33	0.141	5.12	-0.88	0.801	5.03	-0.97	0.970	5.19	-0.81	0.690
τ	0.82	-	-	0.63	-	-	0.44	-	-	0.31	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7$	5.05	-1.96	3.853	5.23	-1.78	3.196	5.03	-1.99	3.946	5.08	-1.92	3.721
$\mu_1 = 5$	4.07	-0.94	0.897	3.94	-1.06	1.139	3.84	-1.16	1.365	3.79	-1.21	1.476
$\eta_2 = 4$	3.17	-0.83	0.700	3.28	-0.72	0.532	3.08	-0.92	0.862	3.10	-0.90	0.828
$\mu_2 = 8$	7.13	-0.87	0.812	6.81	-1.20	1.476	6.61	-1.40	1.992	6.47	-1.54	2.409
$\gamma = 6$	5.81	-0.19	0.071	5.14	-0.87	0.778	5.00	-1.00	1.034	4.97	-1.03	1.091
τ	0.83	-	-	0.64	-	-	0.45	-	-	0.33	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7$	4.98	-2.02	4.114	5.11	-1.89	3.613	5.13	-1.87	3.536	4.90	-2.10	4.446
$\mu_1 = 5$	4.03	-0.97	0.965	3.92	-1.09	1.193	3.85	-1.16	1.350	3.82	-1.19	1.427
$\eta_2 = 4$	3.15	-0.85	0.733	3.18	-0.82	0.680	3.23	-0.78	0.616	3.08	-0.93	0.871
$\mu_2 = 8$	7.08	-0.93	0.911	6.79	-1.22	1.536	6.59	-1.41	2.042	6.52	-1.49	2.252
$\gamma = 6$	5.99	-0.02	0.036	5.67	-0.33	0.142	5.55	-0.45	0.234	5.40	-0.61	0.396
τ	0.85	-	-	0.64	-	-	0.44	-	-	0.33	-	-

O cenário 5 exposto na Tabela 5.6 também é apresentado para as demais cópulas, a fim de estudar tal comportamento e comparar os resultados para as três cópulas.

Nota-se que ao gerar tempos com uma dependência mais forte, o contexto se altera de alguma forma, não só o parâmetro de escala, mas também o de forma passa a apresentar valores de EQM's maiores. Percebe-se que $b(\hat{\eta}_1)$ é maior que $b(\hat{\mu}_1)$ para todos os tamanhos de amostras quando $\gamma = 6$, e os valores de suas Estimativas médias crescem e decrescem à medida que há censuras.

No cenário 4, em que $\gamma = 5$, os resultados não se modificam quanto ao cenário 5. Pois, mesmo o $b(\hat{\mu}_1)$ sendo menor que o $b(\hat{\eta}_1)$, vê-se que seu valor não é tão baixo como visto nos resultados anteriores, quando os tempos apresentam dependências menores. Assim, destaca-se o melhor resultado quando há menos dependência entre os tempos.

Portanto, constata-se a partir das simulações realizadas para a cópula de Gumbel que, à proporção que o parâmetro de associação γ aumenta, as Estimativas médias dos parâmetros também se afastam dos verdadeiros valores dos parâmetros. Os melhores resultados são apresentados quando a dependência entre os tempos é baixa e o tamanho da amostra aumenta com menor censura. Além do mais, nota-se que, para cada tamanho de amostra, os melhores resultados são expostos quando os tempos de sobrevivência gerados não sofrem influência de censuras.

5.2 Resultados para Cópula de Frank

As estimativas dos parâmetros do vetor $\Psi = (\eta_1, \mu_1, \eta_2, \mu_2, \gamma)$ para a cópula de Frank são obtidas ao maximizar a função (4.5), em que a função de sobrevivência conjunta e as funções de probabilidades envolvidas nessa função são expressas em: (4.17), (4.19) e (4.20). A escolha dos valores fixos para tais parâmetros partiu inicialmente do parâmetro de associação da cópula e os parâmetros das marginais oscilam a partir do parâmetro de escala. Os resultados das Estimativas médias, viés e EQM do vetor de parâmetros Ψ , em que os tempos apresentam independência, estão nas Tabelas 5.7 e 5.8.

Tabela 5.7: Estimativas médias para o cenário 1, em que $\Psi = (2.5, 15, 3.5, 15, 0.5)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 2.5$	2.10	-0.40	0.164	2.18	-0.32	0.106	2.18	-0.32	0.107	2.15	-0.36	0.131
$\mu_1 = 15$	14.03	-0.98	1.165	13.60	-1.41	2.184	13.08	-1.93	3.903	12.66	-2.36	5.708
$\eta_2 = 3.5$	3.19	-0.31	0.108	3.33	-0.18	0.042	3.37	-0.14	0.030	3.27	-0.23	0.065
$\mu_2 = 15$	14.00	-1.01	1.217	13.62	-1.40	2.139	13.37	-1.64	2.882	13.08	-1.94	3.917
$\gamma = 0.5$	0.71	0.21	0.043	1.02	0.51	0.266	1.51	1.01	1.019	2.09	1.58	2.515
τ	0.09	-	-	0.12	-	-	0.14	-	-	0.15	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 2.5$	2.19	-0.31	0.099	2.28	-0.22	0.053	2.34	-0.16	0.031	2.48	-0.02	0.007
$\mu_1 = 15$	13.94	-1.08	1.350	12.61	-2.40	5.926	11.97	-3.04	9.407	11.72	-3.29	10.952
$\eta_2 = 3.5$	3.21	-0.29	0.094	3.19	-0.31	0.108	3.38	-0.12	0.025	3.33	-0.17	0.040
$\mu_2 = 15$	13.27	-1.74	3.218	13.29	-1.72	3.140	12.58	-2.43	6.087	12.82	-2.20	4.985
$\gamma = 0.5$	0.17	-0.33	0.111	0.21	-0.29	0.085	0.004	-0.50	0.246	0.04	-0.46	0.211
τ	0.02	-	-	0.02	-	-	0.01	-	-	0.03	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 2.5$	2.24	-0.26	0.072	2.33	-0.18	0.036	2.42	-0.08	0.013	2.40	-0.10	0.016
$\mu_1 = 15$	14.44	-0.58	0.543	13.36	-1.65	2.902	12.65	-2.36	5.732	12.52	-2.49	6.374
$\eta_2 = 3.5$	2.90	-0.60	0.371	3.00	-0.51	0.264	3.01	-0.49	0.253	3.07	-0.44	0.201
$\mu_2 = 15$	13.91	-1.10	1.413	13.3	-1.72	3.127	13.11	-1.90	3.775	13.03	-1.98	4.083
$\gamma = 0.5$	0.53	0.03	0.001	0.39	-0.11	0.013	0.57	0.07	0.005	0.71	0.21	0.043
τ	0.07	-	-	0.02	-	-	0.02	-	-	0.02	-	-

Tabela 5.8: Estimativas médias para o cenário 2, em que $\Psi = (3.5, 8, 3.5, 8, 0.5)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.75	-0.75	0.570	2.75	-0.75	0.574	2.80	-0.70	0.503	3.03	-0.47	0.231
$\mu_1 = 8$	7.01	-1.00	1.045	6.96	-1.05	1.155	6.59	-1.42	2.060	6.39	-1.61	2.642
$\eta_2 = 3.5$	2.94	-0.56	0.327	3.06	-0.45	0.209	3.02	-0.49	0.246	2.82	-0.69	0.478
$\mu_2 = 8$	6.93	-1.08	1.208	6.76	-1.24	1.592	6.39	-1.62	2.669	6.32	-1.68	2.872
$\gamma = 0.5$	0.59	0.09	0.009	0.87	0.37	0.138	1.12	0.62	0.385	1.67	1.16	1.356
τ	0.08	-	-	0.12	-	-	0.12	-	-	0.14	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.85	-0.66	0.437	2.94	-0.56	0.321	2.96	-0.54	0.298	3.15	-0.35	0.135
$\mu_1 = 8$	6.98	-1.03	1.107	6.52	-1.48	2.246	6.33	-1.68	2.850	6.23	-1.78	3.197
$\eta_2 = 3.5$	2.95	-0.55	0.309	2.88	-0.62	0.394	3.07	-0.44	0.201	2.93	-0.57	0.335
$\mu_2 = 8$	6.58	-1.43	2.083	6.5	-1.50	2.305	6.14	-1.87	3.521	6.3	-1.71	2.956
$\gamma = 0.5$	0.197	-0.30	0.092	0.213	-0.29	0.082	0.046	-0.45	0.206	0.061	-0.44	0.193
τ	0.02	-	-	0.03	-	-	0.02	-	-	0.04	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.95	-0.55	0.312	3.01	-0.49	0.250	3.18	-0.32	0.114	3.03	-0.48	0.237
$\mu_1 = 8$	7.18	-0.83	0.735	6.80	-1.21	1.506	6.48	-1.53	2.375	6.51	-1.50	2.284
$\eta_2 = 3.5$	2.69	-0.81	0.660	2.79	-0.72	0.522	2.84	-0.66	0.447	2.79	-0.71	0.510
$\mu_2 = 8$	6.93	-1.07	1.202	6.62	-1.38	1.956	6.42	-1.58	2.543	6.48	-1.53	2.387
$\gamma = 0.5$	0.55	0.04	0.002	0.54	0.04	0.002	0.47	-0.03	0.001	0.88	0.38	0.146
τ	0.07	-	-	0.03	-	-	0.02	-	-	0.02	-	-

As Tabelas 5.7 e 5.8 apresentam os cenários 1 e 2 respectivamente, em que retratam uma dependência extremamente baixa entre $T_1 \sim LLD(\mu_1, \eta_1)$ e $T_2 \sim LLD(\mu_2, \eta_2)$.

A diferença do cenário 1 para o cenário 2 é que os valores dos parâmetros de escala μ_j ($j = 1, 2$) são mais distante ao parâmetro de forma η_j .

Nota-se que, em ambos os cenários, o parâmetro de associação da cópula apresenta melhor estimação para amostras de tamanho 500, em que possuem menores $b(\hat{\gamma})$. Os resultados de EQM e viés para os parâmetros $\hat{\eta}_j$ também foram satisfatório.

É visível que os parâmetros de escala são os que apresentam maiores EQM's e crescem conforme aumenta a presença de censuras, que de alguma forma é um bom resultado, pois espera-se que o valor estimado seja mais próximo ao verdadeiro valor quando todos os indivíduos falham. No entanto, isso não acontece com os parâmetros de forma cujos valores do vício diminuem, à medida que aumenta a quantidade de censuras.

Um resultado inesperado nesta simulação, para o qual não há uma explicação clara, é que as dependências para os tempos de amostras $n=100$ aumentam, conforme há maior presença de censura, enquanto para tamanho 200 e 500 apresentam uma grande semelhança.

Embora existam essas semelhanças entre os resultados, distingue-se que nos modelos onde os parâmetros de escala se distanciam mais dos parâmetros de forma, seus EQM's apresentam maiores valores, enquanto os de forma apontam resultados menores.

Tabela 5.9: Estimativas médias para o cenário 3, em que $\Psi = (4, 8, 4, 6, 3)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.18	-0.83	0.695	3.17	-0.84	0.711	3.22	-0.79	0.630	3.06	-0.94	0.890
$\mu_1 = 8$	6.97	-1.04	1.131	6.80	-1.21	1.514	6.65	-1.36	1.897	6.93	-1.08	1.218
$\eta_2 = 4$	3.25	-0.75	0.577	3.47	-0.53	0.295	3.29	-0.71	0.513	2.92	-1.09	1.186
$\mu_2 = 6$	5.02	-0.99	1.002	4.87	-1.14	1.319	4.69	-1.31	1.740	4.88	-1.13	1.296
$\gamma = 3$	3.32	0.31	0.109	3.54	0.53	0.295	3.79	0.79	0.638	4.97	1.97	3.905
τ	0.36	-	-	0.35	-	-	0.33	-	-	0.29	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.32	-0.68	0.474	3.44	-0.56	0.330	3.54	-0.47	0.232	3.55	-0.45	0.214
$\mu_1 = 8$	6.99	-1.02	1.090	6.49	-1.51	2.331	6.34	-1.67	2.830	6.39	-1.62	2.658
$\eta_2 = 4$	3.29	-0.72	0.525	3.31	-0.70	0.498	3.44	-0.57	0.333	3.34	-0.66	0.447
$\mu_2 = 6$	4.78	-1.22	1.523	4.60	-1.41	1.995	4.48	-1.53	2.358	4.56	-1.44	2.100
$\gamma = 3$	2.85	-0.16	0.032	2.69	-0.32	0.107	2.53	-0.47	0.231	2.92	-0.08	0.015
τ	0.33	-	-	0.24	-	-	0.20	-	-	0.19	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.38	-0.62	0.399	3.43	-0.58	0.345	3.54	-0.46	0.224	3.44	-0.56	0.329
$\mu_1 = 8$	7.17	-0.84	0.760	6.82	-1.18	1.450	6.59	-1.42	2.058	6.41	-1.60	2.586
$\eta_2 = 4$	2.93	-1.07	1.152	3.08	-0.93	0.870	3.06	-0.94	0.894	3.02	-0.98	0.979
$\mu_2 = 6$	4.98	-1.03	1.084	4.74	-1.27	1.626	4.58	-1.42	2.044	4.47	-1.54	2.378
$\gamma = 3$	2.70	-0.31	0.101	2.60	-0.40	0.166	2.43	-0.57	0.328	2.68	-0.32	0.109
τ	0.31	-	-	0.22	-	-	0.17	-	-	0.13	-	-

A Tabela 5.9 apresenta o cenário 3, o qual descreve uma dependência moderada positiva entre os tempos $T_1 \sim LLD(\mu_1, \eta_1)$ e $T_2 \sim LLD(\mu_2, \eta_2)$. Este cenário é também exposto para a cópula de Gumbel. Entretanto, devido aos espaços paramétricos das

cópuas serem distintos, a dependência apresentada entre os tempos para a simulação de Frank é menor que a de Gumbel.

Repara-se que entre os parâmetro estimados, o de cópula é o que aponta um menor viés, e conseqüentemente, um menor EQM. Seus valores aumentam até à medida que se insere 20% de censura, exceto para $n = 100$ onde permanece crescendo, chegando a apresentar um maior EQM (3.905). Quando $n = 200$, seus valores são bem menores.

Ainda fica nítido que o parâmetro de escala estimado é o que mais se distancia do verdadeiro valor, e fica mais explícito quando o número de censuras aumentam.

Os cenários 4 e 5 são expostos nas Tabelas 5.10 e 5.11, respectivamente, estes re-tratam uma dependência positiva mais forte entre os tempos $T_1 \sim LLD(\mu_1, \eta_1)$ e $T_2 \sim LLD(\mu_2, \eta_2)$, em relação ao cenário 3.

O cenário 4, em que os parâmetros de escala são próximos ao de forma, é também apresentado para a cópula de Gumbel, e como já informado, a dependência entre os tempos tende a ser um pouco menor. Já no cenário 5, o parâmetro de escala para o segundo tempo é mais distante ao de forma. Este não é apresentado para a cópula de Gumbel, mas sim para a cópula de Clayton.

Tabela 5.10: Estimativas médias para o cenário 4, em que $\Psi = (7, 5, 4, 8, 6)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7$	5.13	-1.87	3.537	5.00	-2.01	4.057	4.99	-2.01	4.076	4.92	-2.09	4.375
$\mu_1 = 5$	3.91	-1.1	1.215	3.84	-1.17	1.379	3.87	-1.14	1.308	3.96	-1.04	1.107
$\eta_2 = 4$	3.12	-0.88	0.789	3.35	-0.66	0.441	3.04	-0.96	0.929	2.64	-1.36	1.851
$\mu_2 = 8$	6.77	-1.24	1.584	6.55	-1.46	2.167	6.5	-1.50	2.298	6.72	-1.29	1.707
$\gamma = 6$	7.29	1.28	1.700	8.04	2.04	4.206	9.22	3.21	10.392	11.31	5.30	28.179
τ	0.62	-	-	0.55	-	-	0.46	-	-	0.37	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7$	5.43	-1.57	2.499	5.63	-1.38	1.926	5.57	-1.44	2.104	5.17	-1.84	3.407
$\mu_1 = 5$	4.05	-0.95	0.917	3.92	-1.09	1.197	3.92	-1.08	1.181	3.99	-1.01	1.039
$\eta_2 = 4$	3.50	-0.50	0.267	3.60	-0.40	0.174	3.55	-0.46	0.222	3.34	-0.66	0.451
$\mu_2 = 8$	6.86	-1.15	1.368	6.68	-1.32	1.792	6.66	-1.35	1.865	6.87	-1.13	1.330
$\gamma = 6$	6.01	<0.01	0.036	5.76	-0.24	0.093	6.03	0.02	0.037	6.94	0.93	0.913
τ	0.56	-	-	0.37	-	-	0.29	-	-	0.25	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7$	5.44	-1.57	2.482	5.59	-1.42	2.035	5.68	-1.32	1.778	5.47	-1.53	2.385
$\mu_1 = 5$	4.06	-0.95	0.917	3.93	-1.07	1.160	3.83	-1.17	1.383	3.79	-1.22	1.495
$\eta_2 = 4$	3.18	-0.82	0.684	3.28	-0.72	0.534	3.43	-0.57	0.341	3.27	-0.73	0.544
$\mu_2 = 8$	6.97	-1.04	1.124	6.67	-1.34	1.840	6.39	-1.61	2.645	6.36	-1.65	2.754
$\gamma = 6$	5.64	-0.36	0.164	5.60	-0.40	0.193	5.17	-0.84	0.727	5.25	-0.75	0.595
τ	0.54	-	-	0.39	-	-	0.27	-	-	0.19	-	-

Observa-se na Tabela 5.10, que o valor estimado para o parâmetro de associação para amostra de tamanho 100, apresenta um viés altamente positivo, caracterizando uma superestimação. Seu valor cresce, consoante aumenta a presença de censura, chegando a apresentar um maior EQM até o momento (28.179) onde os indivíduos falham aproximadamente 70%. Seu menor valor é para $n = 200$ na ausência de censura, com $EQM(\hat{\gamma})=0.036$.

O evento denotado na Tabela 5.10 expressa as mesmas características apresentadas na cópula de Gumbel quanto aos parâmetros das marginais, os quais denotam maiores EQM's para $\hat{\eta}_1$ e $\hat{\mu}_2$. Seus valores reduzem à medida que aumenta a censura, exceto quando $n = 500$ para censuras maiores que 20%.

Tabela 5.11: Estimativas médias para o cenário 5, em que $\Psi = (3.5, 6, 5, 15, 6)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.62	-0.88	0.778	2.69	-0.82	0.672	2.64	-0.87	0.756	2.57	-0.94	0.885
$\mu_1 = 6$	4.91	-1.09	1.215	4.72	-1.29	1.685	4.61	-1.40	1.972	4.68	-1.33	1.778
$\eta_2 = 5$	4.46	-0.55	0.319	4.76	-0.25	0.084	4.60	-0.41	0.188	4.25	-0.75	0.583
$\mu_2 = 15$	14.01	-1.00	1.205	13.65	-1.36	2.040	13.43	-1.59	2.699	13.35	-1.66	2.947
$\gamma = 6$	6.81	0.80	0.689	6.96	0.96	0.963	8.09	2.08	4.412	8.59	2.58	6.732
τ	0.59	-	-	0.52	-	-	0.47	-	-	0.38	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.67	-0.83	0.703	2.75	-0.75	0.575	2.75	-0.76	0.579	2.71	-0.79	0.634
$\mu_1 = 6$	4.99	-1.01	1.047	4.58	-1.43	2.059	4.4	-1.61	2.604	4.40	-1.61	2.604
$\eta_2 = 5$	4.77	-0.23	0.076	4.82	-0.18	0.057	5.06	0.05	0.028	4.79	-0.22	0.069
$\mu_2 = 15$	13.73	-1.29	1.842	13.33	-1.68	3.013	13.06	-1.96	4.004	13.19	-1.82	3.492
$\gamma = 6$	5.62	-0.39	0.183	5.35	-0.66	0.464	5.12	-0.89	0.818	5.60	-0.41	0.198
τ	0.53	-	-	0.37	-	-	0.30	-	-	0.25	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.77	-0.73	0.541	2.84	-0.67	0.451	2.94	-0.56	0.325	2.73	-0.77	0.606
$\mu_1 = 6$	5.08	-0.93	0.891	4.77	-1.23	1.544	4.59	-1.42	2.025	4.63	-1.38	1.915
$\eta_2 = 5$	4.31	-0.70	0.503	4.42	-0.59	0.366	4.57	-0.44	0.214	4.24	-0.760	0.600
$\mu_2 = 15$	14.07	-0.95	1.097	13.64	-1.37	2.065	13.34	-1.67	2.976	13.46	-1.55	2.595
$\gamma = 6$	5.60	-0.40	0.195	5.60	-0.40	0.192	5.06	-0.94	0.913	5.76	-0.25	0.094
τ	0.53	-	-	0.40	-	-	0.31	-	-	0.23	-	-

Repara-se que, para o segundo tempo na Tabela 5.11, os resultados seguem como já apresentados, quando o parâmetro de escala está mais distante do de forma, o EQM para $\hat{\mu}_2$ aumenta e $\hat{\eta}_2$ decresce significativamente em relação ao demais parâmetros, apresentando neste cenário um maior valor para $n = 200$ com aproximadamente 20% de censura.

Nota-se que os resultados de todos os cenários de simulação para cópula de Frank coincidem com a de Gumbel, em que os melhores resultados são expostos quando os tempos simulados são menos dependentes, com amostras de tamanho $n = 500$ em que os indivíduos falham 100%.

5.3 Resultados para Cópula de Clayton

Para a cópula de Clayton, as estimativas do vetor de parâmetros $\Psi = (\eta_1, \mu_1, \eta_2, \mu_2, \gamma)$ também são obtidas ao maximizar a função (4.5), em que a função de sobrevivência conjunta e as funções de probabilidades envolvidas na função, são expressas em: (4.23), (4.26) e (4.27). A escolha dos valores fixos de tais parâmetros partiu inicialmente do parâmetro de associação da cópula, em que os parâmetros das marginais oscilam a partir do parâmetro de escala. Os resultados das Estimativas médias, viés e EQM do vetor de parâmetros Ψ , em que os tempos apresentam independência, estão nas Tabelas 5.12 e 5.13.

Tabela 5.12: Estimativas médias para o cenário 1, em que $\Psi = (2.5, 20, 3.5, 20, 0.2)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 2.5$	2.17	-0.34	0.118	2.29	-0.21	0.051	2.29	-0.21	0.049	2.38	-0.12	0.021
$\mu_1 = 20$	19.33	-0.69	0.848	17.81	-2.21	5.180	17.92	-2.10	4.741	17.07	-2.95	8.968
$\eta_2 = 3.5$	3.33	-0.17	0.040	3.58	0.08	0.019	3.65	0.14	0.033	3.93	0.43	0.198
$\mu_2 = 20$	18.80	-1.22	1.831	18.05	-1.97	4.191	17.75	-2.27	5.479	18.22	-1.80	3.577
$\gamma = 0.2$	0.06	-0.14	0.020	0.14	-0.06	0.004	0.38	0.18	0.032	0.87	0.67	0.455
τ	0.07	-	-	0.08	-	-	0.07	-	-	0.08	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 2.5$	2.24	-0.26	0.075	2.32	-0.18	0.037	2.41	-0.09	0.014	2.39	-0.12	0.019
$\mu_1 = 20$	18.93	-1.09	1.552	17.01	-3.01	9.346	16.94	-3.07	9.730	16.61	-3.41	11.911
$\eta_2 = 3.5$	3.24	-0.26	0.079	3.24	-0.27	0.082	3.00	-0.50	0.258	2.88	-0.62	0.392
$\mu_2 = 20$	19.89	-0.13	0.411	18.99	-1.03	1.422	18.88	-1.13	1.644	19.08	-0.94	1.247
$\gamma = 0.2$	0.12	-0.08	0.006	0.17	-0.03	0.001	0.56	0.36	0.132	0.89	0.69	0.481
τ	0.13	-	-	0.06	-	-	0.05	-	-	0.06	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 2.5$	2.29	-0.21	0.051	2.38	-0.13	0.022	2.42	-0.08	0.012	2.30	-0.20	0.046
$\mu_1 = 20$	19.63	-0.39	0.538	18.25	-1.77	3.476	17.05	-2.96	9.080	17.1	-2.92	8.807
$\eta_2 = 3.5$	2.99	-0.52	0.275	3.16	-0.35	0.131	3.20	-0.3	0.101	3.15	-0.35	0.132
$\mu_2 = 20$	19.03	-0.99	1.339	18.28	-1.74	3.371	17.17	-2.84	8.386	17.35	-2.67	7.419
$\gamma = 0.2$	0.06	-0.14	0.019	0.16	-0.04	0.001	0.14	-0.06	0.003	0.50	0.30	0.092
τ	0.08	-	-	0.06	-	-	0.06	-	-	0.04	-	-

Tabela 5.13: Estimativas médias para o cenário 2, em que $\Psi = (3.5, 6, 4, 10, 0.2)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.63	-0.87	0.764	2.77	-0.73	0.544	2.90	-0.60	0.367	2.94	-0.57	0.329
$\mu_1 = 6$	5.04	-0.97	0.959	4.71	-1.30	1.710	4.48	-1.52	2.344	4.56	-1.44	2.098
$\eta_2 = 4$	3.60	-0.40	0.174	3.80	-0.20	0.056	3.91	-0.10	0.024	4.22	0.22	0.065
$\mu_2 = 10$	8.92	-1.09	1.269	8.61	-1.40	2.033	8.33	-1.68	2.895	8.73	-1.28	1.704
$\gamma = 0.2$	0.06	-0.14	0.020	0.14	-0.06	0.003	0.34	0.14	0.019	0.94	0.74	0.547
τ	0.08	-	-	0.07	-	-	0.07	-	-	0.10	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.67	-0.83	0.694	2.72	-0.78	0.617	2.81	-0.69	0.483	2.84	-0.66	0.450
$\mu_1 = 6$	4.93	-1.08	1.186	4.50	-1.5	2.284	4.45	-1.56	2.451	4.30	-1.7	2.917
$\eta_2 = 4$	3.50	-0.50	0.267	3.48	-0.53	0.290	3.24	-0.76	0.594	3.17	-0.83	0.707
$\mu_2 = 10$	9.36	-0.65	0.510	8.98	-1.03	1.143	8.92	-1.08	1.257	8.90	-1.11	1.303
$\gamma = 0.2$	0.16	-0.04	0.001	0.24	0.04	0.002	0.62	0.42	0.180	0.84	0.64	0.412
τ	0.14	-	-	0.06	-	-	0.06	-	-	0.08	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.78	-0.73	0.534	2.82	-0.68	0.468	2.90	-0.60	0.372	2.71	-0.80	0.640
$\mu_1 = 6$	5.08	-0.92	0.874	4.80	-1.20	1.467	4.49	-1.52	2.328	4.51	-1.49	2.247
$\eta_2 = 4$	3.22	-0.79	0.631	3.37	-0.63	0.412	3.45	-0.55	0.314	3.33	-0.67	0.465
$\mu_2 = 10$	8.98	-1.02	1.130	8.65	-1.36	1.917	8.24	-1.77	3.202	8.27	-1.74	3.102
$\gamma = 0.2$	0.07	-0.13	0.017	0.16	-0.04	0.002	0.16	-0.04	0.002	0.52	0.32	0.101
τ	0.08	-	-	0.06	-	-	0.05	-	-	0.03	-	-

As Tabelas (5.12) (5.13) apresentam os cenários 1 e 2, respectivamente, cujos tempos $T_1 \sim LLD(\mu_1, \eta_1)$ e $T_2 \sim LLD(\mu_2, \eta_2)$ possuem uma dependência extremamente baixa. Nota-se que, independente da censura, há uma semelhança nas dependências entre os tempos.

Observa que o viés de $\hat{\gamma}$ é maior quando há aproximadamente 30% de censuras, sendo eles superestimados (positivos). Ao reduzir o número de censuras, percebe que seus melhores resultados são apresentados em todas amostras onde há aproximadamente 10% de censuras.

Os maiores EQM's são apontados em todos os eventos para $\hat{\mu}_j$, ($j = 1, 2$), onde crescem quanto mais aumenta a quantidade de censuras. Constata-se que, nos eventos onde

os parâmetros de escala estão mais próximos ao de forma, esses valores ficam menores. No entanto, o parâmetro de forma cresce moderadamente quando estas distâncias são maiores. Outro ponto a ser mencionado é que, à proporção que o viés de $\hat{\mu}_j$ cresce, o viés de $\hat{\eta}_j$ decresce.

Em ambos os cenários, os estimadores apresentam menores EQM's para $\hat{\gamma}$ e $\hat{\eta}_j$. No conjunto de parâmetros estimados, pode-se dizer que o melhor resultado é apontado na amostra de tamanho 500, em que todos os indivíduos falham. Este resultado é esperado, dado que a censura pode influenciar significativamente nos resultados.

Tabela 5.14: Estimativas médias para o cenário 3, em que $\Psi = (4, 8, 4, 6, 3)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.00	-1.01	1.023	3.02	-0.98	0.978	2.98	-1.03	1.064	2.54	-1.46	2.148
$\mu_1 = 8$	6.61	-1.39	1.984	6.10	-1.91	3.679	5.95	-2.06	4.280	6.07	-1.94	3.782
$\eta_2 = 4$	3.01	-0.99	0.993	3.05	-0.95	0.916	2.77	-1.23	1.516	2.40	-1.60	2.576
$\mu_2 = 6$	4.59	-1.42	2.028	4.14	-1.86	3.476	4.12	-1.88	3.560	4.24	-1.76	3.124
$\gamma = 3$	1.58	-1.42	2.030	1.92	-1.08	1.164	3.06	0.05	0.012	4.42	1.42	2.029
τ	0.64	-	-	0.56	-	-	0.43	-	-	0.37	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.11	-0.89	0.806	3.25	-0.76	0.582	3.30	-0.71	0.510	3.23	-0.78	0.615
$\mu_1 = 8$	6.53	-1.48	2.231	6.05	-1.95	3.845	5.94	-2.07	4.320	5.89	-2.12	4.509
$\eta_2 = 4$	2.90	-1.10	1.215	2.81	-1.19	1.420	2.7	-1.30	1.702	2.49	-1.51	2.300
$\mu_2 = 6$	4.78	-1.22	1.512	4.4	-1.61	2.600	4.25	-1.75	3.079	4.21	-1.80	3.250
$\gamma = 3$	1.40	-1.60	2.555	1.53	-1.47	2.161	2.19	-0.81	0.666	3.16	0.16	0.035
τ	0.64	-	-	0.46	-	-	0.38	-	-	0.33	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.30	-0.71	0.511	3.30	-0.71	0.513	3.37	-0.64	0.418	2.94	-1.06	1.142
$\mu_1 = 8$	6.80	-1.21	1.502	6.37	-1.63	2.712	6.04	-1.97	3.912	6.09	-1.92	3.710
$\eta_2 = 4$	3.02	-0.98	0.968	3.11	-0.89	0.801	3.14	-0.86	0.748	2.92	-1.08	1.176
$\mu_2 = 6$	4.78	-1.22	1.516	4.45	-1.55	2.424	4.18	-1.82	3.336	4.19	-1.82	3.325
$\gamma = 3$	1.04	-1.96	3.852	1.41	-1.59	2.529	1.71	-1.29	1.664	2.64	-0.36	0.138
τ	0.60	-	-	0.49	-	-	0.40	-	-	0.31	-	-

O cenário 3 exposto na Tabela 5.14, descreve uma dependência moderada entre os tempos $T_1 \sim LLD(\mu_1, \eta_1)$ e $T_2 \sim LLD(\mu_2, \eta_2)$. Este, é o mesmo cenário já apresentado para as demais cópulas.

Constata-se algumas diferenças quanto aos resultados da cópula de Gumbel e Frank, onde os vieses de $\hat{\gamma}$ denotam relativamente EQM's maiores, quando as amostras possuem mais indivíduos que falharam ao evento. Logo, seus melhores resultados são quando as amostras possuem censuras aproximadamente a 20 e 30%.

Assim, percebe-se que, quando os tempos gerados pela cópula de Clayton possuem uma dependência moderada, os melhores resultados para o parâmetro da cópula são expostos quando há aproximadamente ocorrências de 20% e 30% de censuras.

Para os parâmetros das marginais, nota-se algumas semelhanças, em que os EQM's de $\hat{\mu}_j$ apresentam maiores valores comparados aos $\hat{\eta}_j$, e que crescem à medida que os

eventos sofrem mais influências de censuras. Seus valores ainda são maiores que os vistos nas demais cópulas. Já o viés de $\hat{\eta}_j$ não apresenta uma linearidade nos seus resultados, sempre oscilando entre os tamanhos de amostras e quantidades de censuras.

Os resultados para as simulações da cópula de Clayton quando os tempos $T_1 \sim LLD(\mu_1, \eta_1)$ e $T_2 \sim LLD(\mu_2, \eta_2)$ apresentam uma dependência mais forte, podem ser vistos nas Tabelas 5.15 e 5.16.

A Tabela 5.15 apresenta o cenário 4, onde os parâmetros μ_j são próximos aos η_j . No entanto, para o primeiro tempo tem-se que $\mu_1 < \eta_1$. O resultado deste evento também foi exposto para as demais cópulas.

Tabela 5.15: Estimativas médias para o cenário 4, em que $\Psi = (7, 5, 4, 8, 6)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7$	5.03	-1.97	3.913	5.16	-1.85	3.439	5.02	-1.99	3.971	4.57	-2.44	5.961
$\mu_1 = 5$	3.79	-1.21	1.484	3.66	-1.34	1.808	3.60	-1.41	1.989	3.73	-1.28	1.646
$\eta_2 = 4$	3.20	-0.80	0.657	3.29	-0.71	0.515	3.24	-0.76	0.588	2.83	-1.17	1.374
$\mu_2 = 8$	6.37	-1.64	2.726	5.98	-2.03	4.149	5.88	-2.13	4.551	6.18	-1.82	3.356
$\gamma = 6$	2.19	-3.81	14.545	2.78	-3.22	10.369	3.56	-2.44	5.986	5.78	-0.22	0.083
τ	0.77	-	-	0.61	-	-	0.45	-	-	0.33	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7$	5.04	-1.97	3.890	5.23	-1.78	3.186	4.96	-2.04	4.196	4.93	-2.07	4.316
$\mu_1 = 5$	3.81	-1.20	1.444	3.68	-1.33	1.776	3.67	-1.33	1.780	3.63	-1.37	1.888
$\eta_2 = 4$	3.05	-0.95	0.909	2.99	-1.01	1.033	2.98	-1.02	1.052	2.68	-1.32	1.752
$\mu_2 = 8$	6.53	-1.48	2.229	6.12	-1.89	3.596	6.13	-1.87	3.549	6.00	-2.01	4.062
$\gamma = 6$	2.01	-3.99	15.902	2.21	-3.79	14.364	2.45	-3.55	12.617	4.15	-1.85	3.437
τ	0.76	-	-	0.50	-	-	0.39	-	-	0.34	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7$	5.28	-1.72	2.991	5.42	-1.58	2.5285	5.28	-1.73	3.012	4.86	-2.14	4.614
$\mu_1 = 5$	3.89	-1.11	1.253	3.76	-1.25	1.570	3.64	-1.37	1.882	3.64	-1.37	1.878
$\eta_2 = 4$	3.21	-0.79	0.635	3.30	-0.70	0.506	3.39	-0.61	0.383	3.20	-0.81	0.660
$\mu_2 = 8$	6.61	-1.40	1.991	6.27	-1.74	3.066	5.92	-2.08	4.367	5.93	-2.08	4.364
$\gamma = 6$	1.53	-4.48	20.028	1.80	-4.20	17.621	2.45	-3.55	12.628	3.40	-2.61	6.803
τ	0.72	-	-	0.55	-	-	0.42	-	-	0.28	-	-

Observa que $b(\hat{\gamma})$ aponta resultado mais alarmante quando os tempos não possuem censuras. Seus EQM's reduzem à medida que se insere censuras, e possuem menores valores quando se tem amostra de tamanho 100. No mais, denota-se uma alta subestimação dos parâmetros à medida que aumenta a amostra.

A semelhança entre os resultados das cópulas para este cenário são os comportamentos dos estimadores das marginais, nos quais $\hat{\eta}_1$ e $\hat{\mu}_2$ são os que exibem maiores valores nos EQM's. Os resultados entre os parâmetros das marginais não seguem uma sequência, sendo aleatórios a cada evento.

A Tabela 5.16 expõe o cenário 5, o mesmo apresentado na cópula de Frank. Percebe-se algumas semelhanças nos resultados para os parâmetros das marginais; os $\hat{\mu}_j$'s são os que apresentam maiores EQM's, que crescem conforme aumenta o número de censuras.

No entanto, para a cópula de Clayton, estes cenários são ainda mais alarmantes, e o mesmo ocorre para os $\hat{\eta}_j$, só que não na mesma intensidade.

Tabela 5.16: Estimativas médias para o cenário 5, em que $\Psi = (3.5, 6, 5, 15, 6)$.

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.53	-0.97	0.946	2.60	-0.90	0.821	2.72	-0.78	0.620	2.46	-1.04	1.086
$\mu_1 = 6$	4.40	-1.60	2.594	4.10	-1.91	3.654	3.88	-2.12	4.153	3.98	-2.02	4.093
$\eta_2 = 5$	4.16	-0.84	0.727	4.18	-0.82	0.694	4.00	-1.01	1.029	3.77	-1.24	1.542
$\mu_2 = 15$	12.89	-2.13	4.693	12.28	-2.73	7.597	11.93	-3.08	9.625	12.44	-2.57	6.781
$\gamma = 6$	2.36	-3.64	13.259	3.11	-2.89	8.360	3.67	-2.33	5.443	7.40	1.40	2.001
τ	0.79	-	-	0.66	-	-	0.53	-	-	0.42	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.53	-0.97	0.951	2.64	-0.86	0.746	2.68	-0.82	0.677	2.59	-0.92	0.848
$\mu_1 = 6$	4.32	-1.68	2.845	3.95	-2.05	4.216	3.84	-2.17	4.712	3.80	-2.21	4.880
$\eta_2 = 5$	4.06	-0.94	0.907	4.01	-0.99	1.006	3.79	-1.21	1.479	3.69	-1.31	1.729
$\mu_2 = 15$	13.15	-1.87	3.656	12.40	-2.61	6.979	12.11	-2.90	8.545	12.01	-3.00	9.130
$\gamma = 6$	2.20	-3.80	14.462	2.46	-3.54	12.566	3.22	-2.79	7.773	4.67	-1.34	1.808
τ	0.78	-	-	0.55	-	-	0.45	-	-	0.38	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.73	-0.77	0.603	2.80	-0.71	0.506	2.79	-0.71	0.516	2.46	-1.04	1.091
$\mu_1 = 6$	4.59	-1.42	2.030	4.27	-1.74	3.038	3.98	-2.03	4.124	3.98	-2.02	4.092
$\eta_2 = 5$	4.26	-0.75	0.576	4.27	-0.73	0.557	4.42	-0.58	0.357	3.90	-1.10	1.231
$\mu_2 = 15$	13.32	-1.70	3.057	12.74	-2.27	5.329	12.18	-2.83	8.157	12.25	-2.76	7.775
$\gamma = 6$	1.63	-4.38	19.146	1.95	-4.05	16.382	2.55	-3.45	11.909	3.79	-2.21	4.919
τ	0.74	-	-	0.58	-	-	0.46	-	-	0.35	-	-

Já o parâmetro de associação para a cópula de Clayton, em relação a de Frank, apresenta uma alta subestimação, bem como nos demais parâmetros, exceto $\hat{\gamma}$ para amostra de tamanho 100 com a presença de 30% de censuras. Seus EQM's são altos e decrescem quanto maior a presença de censuras, apresentando um melhor resultado quando $n = (100, 200)$.

De acordo com os resultados apresentados nos cinco cenários para a cópula de Clayton, nota-se que melhores resultados são expostos quando o parâmetro de dependência é pequeno e amostras maiores com 20% de censuras, aproximadamente. Vê-se que, quando a dependência é moderada, o ganho ainda maior é para amostras maiores, $n = (200, 500)$. Contudo, este ganho é para amostras com aproximadamente 30% de censuras. Quando as dependências são fortemente positivas, é percebido que os melhores resultados são para amostras menores com aproximadamente 30% de censuras .

6 Aplicação a dados reais

Com a finalidade de apresentar o uso do modelo bivariado por meio de cópulas arquimedianas para vetores aleatórios discretos e censurados, utilizou-se o conjunto de dados referente aos tempos até os municípios aderirem à duas Políticas Públicas (variáveis respostas $j = 1, 2$); tempo 1: Lei de Zoneamento para Uso e Ocupação de Solo (ZUOS) e tempo 2: Lei de Zona Especial de Interesse (ZEIS). Para ambas as leis, os municípios podem aderí-las via Plano Diretor ou Política Específica, isso faz com que o banco de dados apresente uma uniformidade entre as políticas. Mais detalhes sobre as políticas podem ser visto em [Lima \(2018\)](#) e [Ribeiro \(2018\)](#).

No banco de dados é feito um acompanhamento dos municípios de todos os estados brasileiros desde o ano de 1938 até 2015, sendo 2015 o tempo final do estudo. Os municípios que não aderiram às políticas em estudo até 2015, foram considerados censurados (censura a direita do tipo I). Entretanto, no conceito político, é relevante as análises a partir do ano de 1997, em que há informações completas sobre as eleições de 1996. Além do mais, retirou-se do conjunto de dados os municípios dos quais não havia informações disponíveis ou não se conhecia os anos de adesão.

Assim, após deixar somente os anos de interesse político, o banco de dados não apresentou uma mesma dimensão para os tempos distintos. Com isto, fez-se um cruzamento entre os tempos a fim de obter somente os municípios que estivessem presentes em ambas as políticas. Deste modo, para a análise estatística, o banco de dados passou a conter 5.000 municípios.

Além das variáveis respostas, o conjunto de dados apresenta diversas informações (variáveis explicativas) para cada município referentes às eleições (Ano eleitoral, Conselho, Margem de vitória, NEP e Prefeito reeleito) e suas características (Região e Conselho). Entretanto, o presente estudo irá apresentar primeiramente os resultados referentes às informações sobre eleições. As variáveis presentes na análise são:

- t_{1i} : tempo em anos, até os municípios aderirem à Política Pública ZUOS (primeiro evento);
- t_{2i} : tempo em anos, até os municípios aderirem à Política Pública ZEIS (segundo evento);

- δ_{1i} : indicador de censuras para o primeiro evento;
- δ_{2i} : indicador de censuras para o segundo evento;
- x_{j1i} : Ano eleitoral; informação se há ou não processo eleitoral no ano de falha ou censura, (0:Não , 1:Sim);
- x_{j2i} : Conselho municipal de política urbana; se há ou não conselho no município (0:Não , 1:Sim);
- x_{j3i} : Margem de vitória: indica em pontos percentuais, a diferença entre o primeiro candidato a prefeito e o segundo colocado nas eleições próximas ao ano de falha ou censura;
- x_{j4i} : Números efetivos de partidos (NEP).

Aqui, $j = 1, 2$ indica os eventos, $c = 1, 2, 3, 4$ caracteriza as covariáveis e $i = 1, \dots, 5000$ denota os municípios.

Ao realizar uma análise exploratória dos dados, notou-se uma associação positiva moderada entre os tempos $\tau = 0.533$. Para a escolha do modelo proposto, estimou-se a função de sobrevivência marginal da distribuição LLD e comparou com as estimativas da função de sobrevivência via método de Kaplan-Meier. Logo, pode ser visto, a partir da Figura 6.1 que a distribuição indica um bom ajuste. Observa que os tempos apresentam um alto índice de censuras em vista dos propostos na simulação, sendo aproximadamente 45,6% e 55,5% para os respectivos tempos.

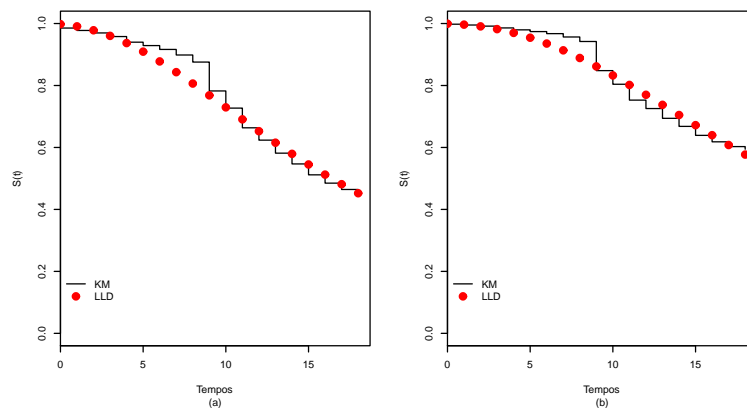


Figura 6.1: Estimativa de Kaplan-Meier e o ajuste da distribuição LLD para Política ZUOS (a) e Política ZEIS (b).

Dessa forma, realizou o ajuste do modelo bivariado via cópulas para as variáveis respostas. As estimativas apresentadas na Tabela 6.1 se referem ao modelo bivariado via cópula de Gumbel, Frank e Clayton, obtidas a partir do método de máxima verossimilhança. Verificou-se que as três cópulas apresentaram estimativas próximas para os parâmetros relacionados às distribuições marginais. Também pode-se observar que os valores dos erros padrões são pequenos e isso é um bom resultado para os três modelos.

Tabela 6.1: EMV para as cópulas de Gumbel, Frank e Clayton .

Ψ	Gumbel		Frank		Clayton	
	$\hat{\Psi}$	Erro Padrão	$\hat{\Psi}$	Erro Padrão	$\hat{\Psi}$	Erro Padrão
η_1	2.12	< 0.001	2.47	< 0.001	2.31	0.001
μ_1	21.32	< 0.001	18.85	< 0.001	19.91	0.004
η_2	2.27	< 0.001	2.51	< 0.001	2.34	0.001
μ_2	20.53	< 0.001	18.78	< 0.001	19.82	0.004
γ	5.04	< 0.001	26.69	< 0.001	24.72	0.011

Ao considerar os critérios AIC e BIC para a seleção de modelos, a cópula de Clayton com marginais LLD apresenta um melhor ajuste aos dados por apresentar menor valor em ambos os critérios, como pode ser visto na Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Critérios para seleção do modelo.

Modelos	AIC	BIC
Gumbel	25108.571	25141.157
Frank	23826.037	23858.623
Clayton	23702.086	23734.672

Uma forma de verificar a qualidade do ajuste dos modelos é comparar graficamente o ajuste da função de sobrevivência estimada pelo método não paramétrico de Kaplan-Meier com o ajuste da função de sobrevivência estimada a partir dos modelos em estudo. Com esse objetivo, foram feitos os gráficos da função de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier e da função de sobrevivência LLD estimada pelo modelo bivariado via cópula. Os gráficos para cada tempo em estudo, ao considerar as diferentes cópulas estão apresentados nas Figuras 6.2, 6.3 e 6.4.

Por meio das Figuras 6.2, 6.3 e 6.4, nota-se que os melhores ajustes são mais visíveis para a variável resposta tempo até a adoção da Política ZEIS. Como observado nos critérios de seleção na Tabela 6.2, em que a cópula de Clayton é que apresenta melhor ajuste, denota-se que o ajuste apresentado na Figura 6.4 é coerente com os resultados apresentados na simulação, nos quais a cópula de Clayton apresenta melhor ajuste quando há mais

presença de censuras.

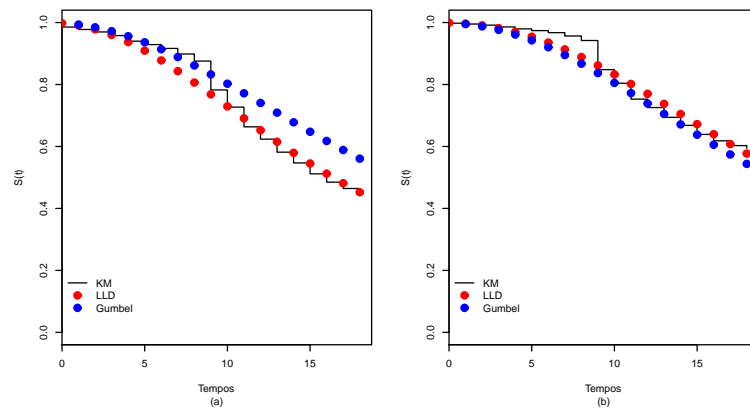


Figura 6.2: Estimativas de Kaplan-Meier, ajustes da LLD, e o ajuste pela cópula de Gumbel para a Política ZUOS (a) e Política ZEIS (b).

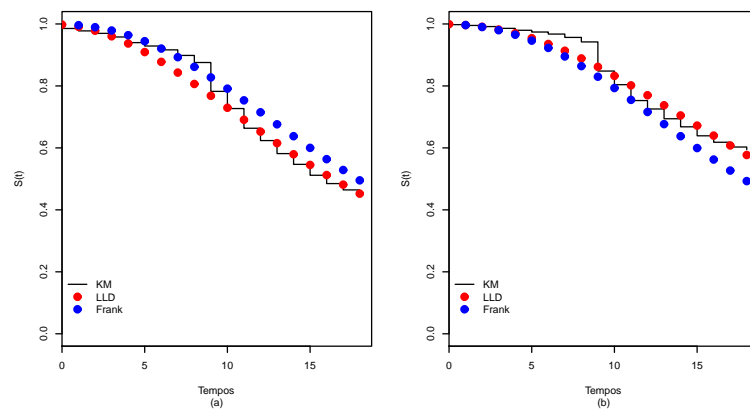


Figura 6.3: Estimativas de Kaplan-Meier, ajustes da LLD, e o ajuste pela cópula de Frank para a Política ZUOS (a) e Política ZEIS (b).

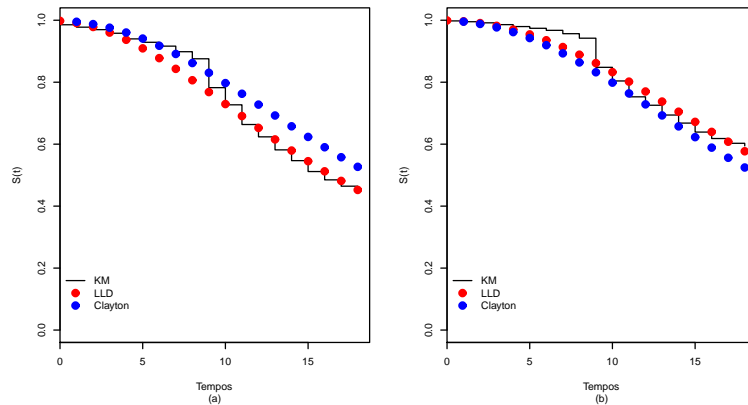


Figura 6.4: Estimativas de Kaplan-Meier, ajustes da LLD, e o ajuste pela cópula de Clayton para a Política ZUOS (a) e Política ZEIS (b).

Com intuito de curiosidade, realizou-se uma simulação com base nas estimativas obtidas por cada cópula, para gerar uma amostra com 5.000 indivíduos. Em relação aos tempos simulados, observou que a cópula de Clayton atingiu uma maior dependência, $\tau = 0.94$, enquanto a cópula de Frank e Gumbel apresentaram dependências iguais a $\tau = 0.88$ e $\tau = 0.82$ respectivamente. Fica visível na Figura 6.5 que os tempos simulados (pontos vermelhos) para Gumbel, se sobressaem praticamente em todos os indivíduos observados (pontos azuis), devido a captura de uma menor dependência.

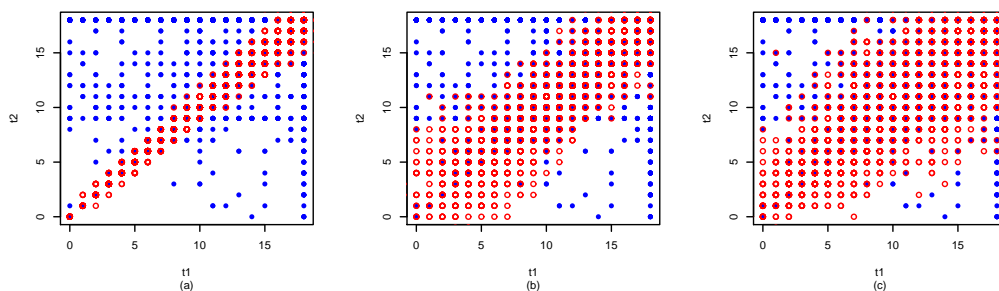


Figura 6.5: Tempos simulados (pontos vermelhos) a partir das estimativas obtidas pela cópula de Clayton (a), Frank(b) e Gumbel (c) e os tempos de Políticas Públicas (pontos azuis).

6.1 Modelo de regressão bivariado LLD

Para o ajuste do modelo completo, realizou-se o método de seleção de variáveis passo a passo (*Stepwise - Forward*), o qual parte da suposição de que não há variável explicativa no modelo e vai adicionando uma variável de cada vez, e quando essa não for significativa

é retirada do modelo. O procedimento é realizado até que os modelos apresentem todas as covariáveis significativas, a um determinado nível de significância. No presente estudo, considerou-se o nível de significância de 10%.

Desta forma, o modelo completo de regressão para os tempos até a adoção das Políticas Públicas ficou formado pelas variáveis explicativas "Ano eleitoral (Eleição)", "Conselho", "Margem de vitória" e "NEP". A fim de mostrar o comportamento individual de cada variável explicativa no modelo, primeiramente serão apresentados os resultados dos modelos com apenas uma variável explicativa.

Na Tabela 6.3, encontram-se as estimativas para os parâmetros dos modelos de regressão bivariados via cópulas ao considerar a variável "Eleição". Bem como, os erros padrão e significâncias obtidos através do MMV.

Tabela 6.3: EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para a covariável Eleição.

$bf\Psi$	Gumbel			Frank			Clayton		
	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor
η_1	2.29	< 0.001	-	2.48	< 0.001	-	2.36	0.001	-
β_{10}	3.08	< 0.001	< 0.001	2.99	< 0.001	< 0.001	3.00	< 0.001	< 0.001
β_{11}	-0.21	< 0.001	< 0.001	-0.12	< 0.001	< 0.001	-0.10	< 0.001	< 0.001
η_2	2.44	< 0.001	-	2.53	< 0.001	-	2.39	0.001	-
β_{20}	3.05	< 0.001	< 0.001	2.98	< 0.001	< 0.001	3.00	< 0.001	< 0.001
β_{21}	-0.20	< 0.001	< 0.001	-0.12	< 0.001	< 0.001	-0.10	< 0.001	< 0.001
γ	4.51	< 0.001	-	28.76	< 0.001	-	23.66	0.011	-

*Erro Padrão.

Ao analisar a Tabela 6.3, percebe-se que a estimativa da variável explicativa é negativa para os respectivos eventos, o que diminui a probabilidade do município sobreviver. Portanto, a expectativa de que os municípios aderem ambas as Políticas Públicas, é maior quando há ano eleitoral, ou seja, pode-se dizer que a fim de se reeleger ou receber apoio político, o prefeito do município adota ambas as políticas.

Tabela 6.4: Critérios para seleção do modelo.

Modelos	AIC	BIC
Gumbel	25016.666	25062.286
Frank	23709.937	23755.558
Clayton	23641.486	23687.106

Ao utilizar os critérios de seleção de modelos, AIC e BIC, o modelo de regressão bivariado via cópula de Clayton com a presença da covariável ano eleitoral é o modelo candidato.

A segunda variável explicativa que apresentou estimativas significativas para os modelos propostos foi a variável "Conselho". Com isto, são expostas na Tabela 6.5 as esti-

mativas para os parâmetros dos modelos de regressão bivariados via cópulas, bem como os erros padrão e significâncias obtidos através do MMV.

Tabela 6.5: EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para a variável Conselho.

$bf\Psi$	Gumbel			Frank			Clayton		
	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor
η_1	2.43	< 0.001	-	2.57	< 0.001	-	2.40	0.001	-
β_{10}	3.11	< 0.001	< 0.001	3.02	< 0.001	< 0.001	3.01	< 0.001	< 0.001
β_{12}	-0.39	< 0.001	< 0.001	-0.26	< 0.001	< 0.001	-0.17	< 0.001	< 0.001
η_2	2.60	< 0.001	-	2.62	< 0.001	-	2.45	0.001	-
β_{20}	3.08	< 0.001	< 0.001	3.02	< 0.001	< 0.001	3.01	< 0.001	< 0.001
β_{22}	-0.38	< 0.001	< 0.001	-0.26	< 0.001	< 0.001	-0.18	< 0.001	< 0.001
γ	4.07	< 0.001	-	29.15	< 0.001	-	22.08	0.016	-

*Erro Padrão.

Note que para os respectivos eventos, a variável explicativa é significativa e apresenta estimativas negativas. Logo, o município que não possui conselho tem tempo mediano para aderir à Política ZUOS mais um ano, $\frac{1}{\exp(-0.39)} = 1.48$ vezes maior do que o tempo mediano mais um ano do município que possui conselho. Quanto à Política ZEIS, ao obter $\frac{1}{\exp(-0.38)}$, tem-se que os municípios que não possuem conselho têm tempo mediano mais um ano, 1.46 vezes maior do que os municípios que possuem conselho.

Alternativamente, nota-se que para adoção de ambas as políticas, se os municípios possuem conselho, maiores são os riscos de ocorrer o evento de interesse.

Como critério de seleção do modelo, nota-se na Tabela 6.6, que o modelo da cópula de Clayton é que apresenta menor valor. Logo, pode-se definir que é o modelo que melhor se ajusta aos dados.

Tabela 6.6: Critérios para seleção do modelo.

Modelos	AIC	BIC
Gumbel	24961.000	25006.612
Frank	23618.173	23663.785
Clayton	23601.089	23646.701

Na Tabela 6.7, obtêm-se as estimativas para os parâmetros dos modelos de regressão bivariados via cópulas ao considerar a variável "Margem de vitória". Assim como, os erros padrão e significâncias obtidas pelo MMV. Nota-se que a variável explicativa "Margem de vitória" se apresentou significativa somente para adoção da Política ZUOS (t_{1i}) no modelo de regressão bivariado via cópula de Frank.

Tabela 6.7: EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para Margem de vitória.

$bf\Psi$	Gumbel			Frank			Clayton		
	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor
η_1	2.15	< 0.001	-	2.44	< 0.001	-	2.31	0.001	-
β_{10}	3.07	< 0.001	< 0.001	2.96	< 0.001	< 0.001	2.99	< 0.001	< 0.001
β_{13}	-0.001	< 0.001	0.869	0.02	< 0.001	< 0.001	0.01	< 0.001	0.424
η_2	2.29	< 0.001	-	2.47	< 0.001	-	2.34	0.001	-
β_{20}	3.04	< 0.001	< 0.001	2.96	< 0.001	< 0.001	2.99	< 0.001	< 0.001
β_{23}	-0.002	< 0.001	0.902	0.01	< 0.001	0.563	0.01	< 0.001	0.582
γ	4.94	< 0.001	-	31.35	< 0.001	-	24.72	0.011	-

*Erro Padrão.

Com estimativa positiva, conclui-se que quanto maior a Margem de vitória do primeiro candidato a prefeito ao segundo candidato, menor é o risco do município aderir à Política Pública ZUOS. Pode-se dizer que, ao se destacar com maior Margem de vitória, o candidato se sente mais seguro para uma possível reeleição, com isto menor é a chance de aceitar tal política, pois não a vê como um fator que influencie nos próximos resultados de eleição.

Tabela 6.8: Critérios para seleção do modelo.

Modelos	AIC	BIC
Gumbel	25110.572	25156.189
Frank	23757.128	23802.746
Clayton	23705.393	23751.01

Como critério de seleção do modelo, a partir dos resultados apresentados na Tabela 6.8, pode-se dizer que o modelo de regressão via cópula de Clayton é o que melhor se ajusta aos dados.

Tabela 6.9: EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para a covariável NEP.

$bf\Psi$	Gumbel			Frank			Clayton		
	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor
η_1	2.22	< 0.001	-	2.54	< 0.001	-	2.32	0.001	-
β_{10}	3.19	< 0.001	< 0.001	3.09	< 0.001	< 0.001	3.07	< 0.001	< 0.001
β_{14}	-0.07	< 0.001	< 0.001	-0.06	< 0.001	< 0.001	-0.04	< 0.001	< 0.001
η_2	2.37	< 0.001	-	2.57	< 0.001	-	2.36	0.001	-
β_{20}	3.15	< 0.001	< 0.001	3.07	< 0.001	< 0.001	3.07	< 0.001	< 0.001
β_{24}	-0.06	< 0.001	< 0.001	-0.06	< 0.001	< 0.001	-0.04	< 0.001	< 0.001
γ	4.72	< 0.001	-	30.83	< 0.001	-	24.63	0.011	-

*Erro Padrão.

Bem como as covariáveis "Eleição" e "Conselho", a variável "NEP" apresenta ganhos significativos na análise, tanto no ponto de vista político quanto estatístico, como visto na Tabela 6.9. Assim como analisado anteriormente, a covariável "NEP" aumenta o risco de ocorrer os eventos de interesses. Todavia, por se tratar de uma covariável quantitativa,

a interpretação parte do seguinte princípio: quanto maior o número efetivo de partidos, menor é a probabilidade dos indivíduos sobreviverem, o que conseqüentemente aumenta a chance dos municípios aderirem às políticas ZEIS e ZUOS. Como nas demais variáveis explicativas, a cópula de Clayton é a que melhor se ajusta aos dados, conforme os critérios de seleção apresentado na Tabela 6.10.

Tabela 6.10: Critérios para seleção do modelo.

Modelos	AIC	BIC
Gumbel	25023.143	25068.759
Frank	23692.147	23737.763
Clayton	23630.731	23676.348

Portanto, como já informado, o modelo completo é composto pelas seguinte covariáveis: "Ano eleitoral", "Conselho", "Margem de vitória" e "NEP". Com isto, são expostas na Tabela 6.11 as estimativas dos parâmetros para os modelos ajustados com todas as covariáveis, das quais considerou-se significativas a nível de 10%.

Tabela 6.11: EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para o modelo completo

$bf\Psi$	Gumbel			Frank			Clayton		
	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor
η_1	2.67	< 0.001	-	2.63	< 0.001	-	2.47	0.001	-
β_{10}	3.30	< 0.001	< 0.001	3.12	< 0.001	< 0.001	3.10	< 0.001	< 0.001
β_{11}	-0.24	< 0.001	< 0.001	-0.12	< 0.001	< 0.001	-0.10	< 0.001	< 0.001
β_{12}	-0.38	< 0.001	< 0.001	-0.25	< 0.001	< 0.001	-0.16	< 0.001	< 0.001
β_{13}	-0.05	< 0.001	< 0.001	-0.01	< 0.001	0.201	-0.01	< 0.001	0.546
β_{14}	-0.09	< 0.001	< 0.001	-0.05	< 0.001	< 0.001	-0.04	< 0.001	< 0.001
η_2	2.83	< 0.001	-	2.69	< 0.001	-	2.51	0.001	-
β_{20}	3.23	< 0.001	< 0.001	3.11	< 0.001	< 0.001	3.09	< 0.001	< 0.001
β_{21}	-0.22	< 0.001	< 0.001	-0.11	< 0.001	< 0.001	-0.09	< 0.001	< 0.001
β_{22}	-0.38	< 0.001	< 0.001	-0.26	< 0.001	< 0.001	0.002	< 0.001	< 0.001
β_{23}	-0.01	< 0.001	0.328	0.001	< 0.001	0.923	-0.17	< 0.001	0.899
β_{24}	-0.07	< 0.001	< 0.001	-0.05	< 0.001	< 0.001	-0.04	< 0.001	< 0.001
γ	3.64	< 0.001	-	25.97	< 0.001	-	21.27	0.008	-

*Erro Padrão.

As variáveis explicativas podem ser significativas ou não em ambos os eventos, isso pode ser denotado no ajuste completo apresentado na Tabela 6.11. No modelo completo, bem como no modelo individual, a covariável "Margem de vitória" não foi significativa na cópula de Clayton em ambas as políticas, assim como na cópula de Frank a qual apresenta o oposto ao resultado apresentado na análise individual. A cópula de Gumbel é que apresenta a variável significativa somente no tempo de adoção à Política ZUOS.

Ao denotar que nos respectivos modelos de cópula, a covariável "Margem de vitória" é menos significativa no tempo de adoção a Política ZEIS, fez-se o ajuste sem a covariável no tempo 2. Deste modo, têm-se na Tabela 6.12 as estimativas para os parâmetros dos

modelos de regressão bivariados via cópulas, bem como os erros padrão e significâncias obtidos através do MMV.

Tabela 6.12: EMV por meio da cópula de Gumbel, Frank e Clayton para o modelo ajustado.

$bf\Psi$	Gumbel			Frank			Clayton		
	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor	$\hat{\Psi}$	EP*	p-valor
η_1	2.65	< 0.001	-	2.64	< 0.001	-	2.47	0.001	-
β_{10}	3.32	< 0.001	< 0.001	3.12	< 0.001	< 0.001	3.09	< 0.001	< 0.001
β_{11}	-0.24	< 0.001	< 0.001	-0.12	< 0.001	< 0.001	-0.10	< 0.001	< 0.001
β_{12}	-0.37	< 0.001	< 0.001	-0.25	< 0.001	< 0.001	-0.16	< 0.001	< 0.001
β_{13}	-0.05	< 0.001	< 0.001	-0.02	< 0.001	0.087	-	-	-
β_{14}	-0.10	< 0.001	< 0.001	-0.05	< 0.001	< 0.001	-0.04	< 0.001	< 0.001
η_2	2.80	< 0.001	-	2.70	< 0.001	-	2.51	0.001	-
β_{20}	3.25	< 0.001	< 0.001	3.11	< 0.001	< 0.001	3.09	< 0.001	< 0.001
β_{21}	-0.22	< 0.001	< 0.001	-0.11	< 0.001	< 0.001	-0.09	< 0.001	< 0.001
β_{22}	-0.37	< 0.001	< 0.001	-0.26	< 0.001	< 0.001	-0.17	< 0.001	< 0.001
β_{23}	-	-	-	-	-	-	-	-	-
β_{24}	-0.08	< 0.001	< 0.001	-0.05	< 0.001	< 0.001	-0.04	< 0.001	< 0.001
γ	3.69	< 0.001	-	26.09	< 0.001	-	21.28	0.010	-

*Erro Padrão.

Logo, a nível de 10% de significância, a variável "Margem de vitória" se apresentou significativa nos modelos para cópula de Gumbel e Frank no tempo até adoção da Política ZUOS. Mesmo ao retirar a variável no tempo 2 na cópula de Clayton, ela permaneceu não significativa no tempo 1 e por isso, para o modelo de regressão bivariado via cópula de Clayton a variável "Margem de vitória" não foi considerada em nenhum dos tempos.

Bem como analisado separadamente, o modelo completo ajustado apresenta estimativas significativas e negativas para as covariáveis em estudo, nos respectivos eventos e modelos de cópulas.

Portanto, certifica-se que em ambos eventos e modelos de cópulas, estar em ano eleitoral, possuir conselho e quanto maior o número efetivos de partidos, fazem com que ampliem o risco dos municípios adotarem as políticas ZUOS e ZEIS. De outro modo, pode-se dizer que as respectivas variáveis explicativas agem positivamente para que ocorra o evento de interesse.

Denota-se que, a variável "Margem de vitória" apresenta o oposto ao apresentado no caso individual, em que suas estimativas são significativas e negativas. De fato, ao estudar a influência da covariável na variável resposta no modelo completo, denota-se que para conceito político a Margem de vitória apresenta ganhos significativos de observações quanto ao tempo até a adoção da Política ZUOS.

Do ponto de vista estatístico, o modelo de regressão bivariado ajustado via cópula de Clayton parece se adequar mais aos dados segundo os critérios AIC e BIC. Vale res-

saltar que para esse caso, o modelo de regressão bivariado ajustado via cópula de Frank apresentou resultados próximos. Já o modelo com a cópula de Gumbel é o que parece se adequar menos a nossas observações, como denotado na Tabela 6.13.

Tabela 6.13: Critérios para seleção do modelo ajustado.

Modelos	AIC	BIC
Gumbel	24767.791	24845.976
Frank	23507.968	23586.152
Clayton	23479.931	23551.600

Já no conceito político, são preferíveis os modelos bivariados via cópula de Gumbel e Frank, pois ambos fornecem mais informações dos eventos.

7 Conclusões

Neste estudo, primeiramente foram propostos modelos de sobrevivência bivariados por meio de cópulas arquimedianas, especificamente a cópula de Gumbel, Frank e Clayton, com distribuições de probabilidade discretas para as marginais. Em particular, a distribuição Log-Logística discreta. No entanto, dado que em análise de sobrevivência os tempos marginais podem se ajustar à distribuições distintas, enfatiza-se que os modelos podem ser adaptados de acordo com os ajustes obtidos em aplicações particulares.

À vista disto, ao considerar a presença de variáveis explicativas nos dados de sobrevivência, o presente estudo propôs extensões dos modelos em análise, a fim de incluir covariáveis. Originando-se assim, os modelos de regressão bivariados via cópula para dados discretos e censurados.

Diante disso, esse trabalho também propôs utilizar o método de máxima verossimilhança em um único passo para estimar os parâmetros dos modelos de regressão bivariados via cópulas para dados discretos e censurados. Ressalta que a função de verossimilhança proposta pode ser ajustada a outras famílias de cópulas.

Nos resultados de simulações, verificou-se que os cenários evidenciaram semelhanças para o parâmetro μ das marginais, em que se destacavam com maiores EQM's à medida que aumentava o número de amostras, censuras e o grau de associação entre os tempos, exclusivamente para a cópula de Clayton. Na qual, quando os tempos haviam dependências moderadas, os melhores resultados sobressaíram em amostras com influência de censuras.

Melhores resultados para simulação foram expostos quando os tempos gerados apresentavam dependência baixa e moderada, à medida que aumentava o número de amostras. Logo, ao considerar que eventos reais com dados de respostas discretas não apresentam dependências muito fortes, observou que os modelos bivariados de sobrevivência para as cópulas em estudos, contiveram um bom desempenho. Como esperado, notou-se que os melhores resultados estavam aparentes nas amostras de tamanho 500 com 0% de censura, dado que a presença censuras pode influenciar nos resultados.

Os resultados adquiridos na modelagem dos dados referente à adesão de Políticas Públicas, com uma dependência moderada, destacou-se os ajustes obtidos pela cópula de sobrevivência referente a cópula de Clayton, exclusivamente para a adesão da Política

ZEIS, a qual possuía maior influência de censuras. Bem como ilustrado nos resultados das simulação, em que os modelos preferíveis são os que apresentavam maior número de censuras.

Embora, a cópula de Clayton tenha apresentado estatisticamente os melhores ajustes para os dados reais, de acordo com os critérios de AIC e BIC, enfatiza-se que a cópula de Gumbel e Frank apresentaram um grande interesse no conceito político, devido às mesmas obterem mais informações aos tempos até a adesão da Política Pública ZUOS. Deste modo, pode-se propor um estudo com a covariável que caracteriza a região de cada município, a fim de estudar a relação dos tempos até o município aderir tais Políticas Públicas por região.

Uma importantíssima observação para a função de verossimilhança proposta, é que nos ajustes realizados pelas cópulas arquimedianas nos dados reais bem como nas simulações, não houve um esforço computacional ao maximizar a função de verossimilhança. Para a maximização considerou-se somente um passo, em que utilizou-se como chutes iniciais as estimativas das marginais a partir da distribuição LLD, e da relação entre os tempos para o parâmetro da cópula. Ressalta-se que, nos dados reais não é possível a utilização da relação entre os tempos como chute inicial para a cópula de Gumbel, já que seu parâmetro tem o espaço paramétrico $[1, \infty)$.

Portanto, os modelos de regressão bivariados via cópulas propostos neste trabalho, demonstraram-se adequados para analisar os dados relacionados à adesão de Políticas Públicas. E que esses modelos podem ser utilizados como nova metodologia para analisar dados de sobrevivência com respostas bivariadas discretas, censuradas e na presença de variáveis explicativas.

Sugestões de propostas para trabalhos futuros

1. Realizar estudos de simulação para os modelos de regressão bivariados via cópulas propostos neste trabalho;
2. Estender a análise das Políticas Públicas ao considerar a inclusão de outras variáveis explicativas, bem como a região que os municípios pertencem;
3. Implementar a metodologia de inferência dos modelos de regressão bivariados via cópulas para dados discretos e censurados por meio de pacotes no *software* R;
4. Como continuidade desta pesquisa, propor outras distribuições marginais para compor os modelos de regressão bivariados via cópula para dados discretos e censurados.

Referências

- [1] Biondo, T. R., & Suzuki, A. K. (2016). *Modelos de Sobrevivência Bivariados derivados da Cópula Arquimediana de Clayton: Uma Abordagem Bayesiana*. *Matemática e Estatística em Foco*, 4(2), 87-102.
- [2] Cameron, A. C., Li, T., Trivedi, P. K., & Zimmer, D. M. (2004). *Modelling the differences in counted outcomes using bivariate copula models with application to mismeasured counts*. *The Econometrics Journal*, 7(2), 566-584.
- [3] Camolez, J. P., Fachini-Gomes, J. B., Otiniano, C. E. G. (2018). *Modelo de regressão bivariado por meio da cópula de Clayton para dados censurados*. In: SINAPE - Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, 2018, São Pedro - SP. 23º SINAPE.
- [4] Chandra, K. (2015). *Survival Analysis using Bivariate Archimedean Copulas*. Columbia University.
- [5] Chiba, D., Martin, L. W., & Stevenson, R. T. (2015). *A copula approach to the problem of selection bias in models of government survival*. *Political Analysis*, 23(1), 42-58.
- [6] Clayton, D. G. (1978). *A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence*. *Biometrika* 65.
- [7] Colosimo, E. A., & Giolo, S. R. (2006). *Análise de sobrevivência aplicada*. Edgard Blucher.
- [8] Denuit, M., & Lambert, P. (2005). *Constraints on concordance measures in bivariate discrete data*. *Journal of Multivariate Analysis*, 93(1), 40-57.
- [9] Embrechts, P., Lindskog, F., & McNeil, A. (2001). *Modelling dependence with copulas*. Rapport technique, Département de mathématiques, Institut Fédéral de Technologie de Zurich, Zurich.
- [10] Embrechts, P. (2009). *Copulas: A personal view*. *Journal of Risk and Insurance*, 76(3), 639-650.

- [11] Emiliano, P. C., Veiga, E. P., Vivanco, M. J., & Menezes, F. S. (2010). *Critérios de informação de Akaike versus Bayesiano: análise comparativa*. 19º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- [12] Erdelyi, A., González-Barrios, J. M., & Nelsen, R. B. (2008). *Symmetries of random discrete copulas*. *Kybernetika*, 44(6), 846-863.
- [13] Fachini, J. B. (2011). *Modelos de regressão com e sem fração de cura para dados bivariados em análise de sobrevivência* (Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo).
- [14] Fachini, J. B., Ortega, E. M., & Cordeiro, G. M. (2014). *A bivariate regression model with cure fraction*. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(7), 1580-1595.
- [15] Fantazzini, D., (2011). *"Analysis of multidimensional probability distributions with copula functions,"* Applied Econometrics, Publishing House "SINERGIA PRESS", vol. 22(2), pages 98-134. (artigo em Russo).
- [16] Faugeras, O. P. (2017). *Inference for copula modeling of discrete data: a cautionary tale and some facts*. *Dependence Modeling*, 5(1), 121-132.
- [17] Flores, A. Q. (2008). *Copula functions and bivariate distributions for survival analysis: An application to political survival*. Wilf Department of Politics, New York University, 1-27.
- [18] Flores, A. Q. (2009). *Testing copula functions as a method to derive bivariate Weibull distributions*. APSA 2009 Toronto Meeting Paper. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1450064>
- [19] Frank, M. J. (1979). *On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$* . *Aequationes mathematicae*, 19(1), 194-226.
- [20] Genest, C. (1987). *Frank's family of bivariate distributions*. *Biometrika*, 74(3), 549-555.
- [21] Genest, C., & Nešlehová, J. (2007). *A primer on copulas for count data*. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 37(2), 475-515.

- [22] Genest, C., Nešlehová, J. G., & Rémillard, B. (2014). *On the empirical multilinear copula process for count data*. *Bernoulli*, 20(3), 1344-1371.
- [23] Genz, A., & Bretz, F. (2002). *Comparison of methods for the computation of multivariate t probabilities*. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 11(4), 950-971.
- [24] Georges, P., Lamy, A. G., Nicolas, E., Quibel, G., & Roncalli, T. (2008). *Multivariate survival modelling: a unified approach with copulas*. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1032559> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1032559>
- [25] Goda, K., & Atkinson, G. M. (2009). *Interperiod dependence of ground-motion prediction equations: A copula perspective*. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 99(2A), 922-927.
- [26] Gomes, E. M. D. C. (2007). *Análise de sensibilidade e resíduos em modelos de regressão com respostas bivariadas por meio de cópulas* (Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo).
- [27] Gribkova, S., & Lopez, O. (2015). *Non-parametric Copula Estimation Under Bivariate Censoring*. *Scandinavian Journal of Statistics*, 42(4), 925-946.
- [28] Gumbel, E. J. (1960). *Bivariate exponential distributions*. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292), 698-707.
- [29] Gumbel, E. J. (1961). *Bivariate logistic distributions*. *Journal of the American Statistical Association*, 56(294), 335-349.
- [30] Hofert, M., & Mächler, M. (2011). *Nested Archimedean copulas meet R: The nacopula package*. *Journal of Statistical Software*, 39(9), 1-20.
- [31] Hougaard, P. (2000). *Analysis of multivariate survival data*. Springer Science & Business Media.
- [32] Huang, H., & Zhao, Y. (2018). *Empirical likelihood for the bivariate survival function under univariate censoring*. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 194, 32-46.

- [33] Inouye, D. I., Yang, E., Allen, G. I., & Ravikumar, P. (2017). A review of multivariate distributions for count data derived from the Poisson distribution. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 9(3), e1398.
- [34] Ishimura, N., & Yoshizawa, Y. (2012). *Evolution of multivariate copulas in discrete processes*. *Procedia Economics and Finance*, 1, 186-192.
- [35] Joe, H. (1997). *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. Chapman and Hall/CRC.
- [36] Joe, H. (2015). *Dependence modeling with copulas*. CRC Press.
- [37] Kalaitzis, A., & Silva, R. (2013). *Flexible sampling of discrete data correlations without the marginal distributions*. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (pp. 2517-2525).
- [38] Kazianka, H. (2013). *Approximate copula-based estimation and prediction of discrete spatial data*. *Stochastic environmental research and risk assessment*, 27(8), 2015-2026.
- [39] Kazianka, H., & Pilz, J. (2010). *Copula-based geostatistical modeling of continuous and discrete data including covariates*. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 24(5), 661-673.
- [40] Koopman, S. J., Lit, R., & Lucas, A. (2015). *Intraday stock price dependence using dynamic discrete copula distributions*, Tinbergen Institute Discussion Paper, No. 15-037/III/DSF90, Tinbergen Institute, Amsterdam and Rotterdam, 1-38.
- [41] Lawless, J. F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2 ed. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience.
- [42] Lawless, J. F., & Yilmaz, Y. E. (2011). *Semiparametric estimation in copula models for bivariate sequential survival times*. *Biometrical Journal*, 53(5), 779-796.
- [43] Lima, J. G. (2018). *Modelo de Regressão para Dados da Política Zoneamento e Uso do Solo na Presença de Observações Censuradas*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade de Brasília, Brasília. 1-56.

- [44] Lin, J., & Wu, X. (2015). *Copula Specification Tests under General Censorship*. Disponível em: < <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.725.1929&rep=rep1&type=pdf>>
- [45] Madsen, L. (2009). *maximum likelihood estimation of regression parameters with spatially dependent discrete data*. Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics, 14(4), 375-391.
- [46] Maluf, Y. S. (2016). *Distribuição de funções de variáveis aleatórias dependentes e R-Vines cópulas*. 179 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Universidade de Brasília, Brasília.
- [47] Mayor, G., Suñer, J., & Torrens, J. (2005). *Copula-like operations on finite settings*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 13(4), 468-477.
- [48] Mayor, G., Suner, J., & Torrens, J. (2007). *Sklar's theorem in finite settings*. IEEE transactions on Fuzzy Systems, 15(3), 410-416.
- [49] Mayor, G., Suñer, J., & Torrens, J. (2017). *Operations on Finite Settings: from Triangular Norms to Copulas*, In: Flores, M. Ú., et al. (2017). Copulas and Dependence Models with Applications.
- [50] McHale, I., & Scarf, P. (2007). *Modelling soccer matches using bivariate discrete distributions with general dependence structure*. Statistica Neerlandica, 61(4), 432-445.
- [51] Meester, S. G., & Mackay, J. (1994). *A parametric model for cluster correlated categorical data*. Biometrics, 954-963.
- [52] Mei, M. (2016). *A goodness-of-fit test for semi-parametric copula models of right-censored bivariate survival times*, 44 f. Dissertation (Master of Science) - Faculty of Science, Simon Fraser University .
- [53] Murphy, O. (2013). *Copula-based tests of independence for bivariate discrete data* (Doctoral dissertation, McGill University Libraries).
- [54] Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas*, 2 ed. Springer series in statistics. Springer.

- [55] Neto, E. P. (2018). *Discriminante para mistura de modelos bivariados*. 109 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Universidade de Brasília, Brasília.
- [56] Nikoloulopoulos, A. K. (2013a). *On the estimation of normal copula discrete regression models using the continuous extension and simulated likelihood*. Journal of Statistical Planning and Inference, 143(11), 1923-1937.
- [57] Nikoloulopoulos, A. K. (2013b). *Copula-based models for multivariate discrete response data*. In Copulae in Mathematical and Quantitative Finance (pp. 231-249). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [58] Nikoloulopoulos, A. K. (2016). *Efficient estimation of high-dimensional multivariate normal copula models with discrete spatial responses*. Stochastic environmental research and risk assessment, 30(2), 493-505.
- [59] Nikoloulopoulos, A. K., & Karlis, D. (2008). *Multivariate logit copula model with an application to dental data*. Statistics in Medicine, 27(30), 6393-6406.
- [60] Nikoloulopoulos, A. K., & Karlis, D. (2009a). *Modeling multivariate count data using copulas*. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 39(1), 172-187.
- [61] Nikoloulopoulos, A. K., & Karlis, D. (2009b). *Finite normal mixture copulas for multivariate discrete data modeling*. Journal of Statistical Planning and Inference, 139(11), 3878-3890.
- [62] Nikoloulopoulos, A. K., & Karlis, D. (2010). *Regression in a copula model for bivariate count data*. Journal of Applied Statistics, 37(9), 1555-1568.
- [63] Núñez, J. S. R. (2005). *Modelagem Bayesiana para dados de sobrevivência bivariados através de cópulas*. (Doctoral dissertation, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 11/08/2005).
- [64] Oliveira, M. A., Suzuki, A. K., & Saraiva, E. F. (2014). *Uma abordagem Bayesiana para modelos de sobrevivência bivariados baseados em cópulas arquimedianas*. Rev. Bras. Biom, 32(3), 390-411.
- [65] Ophem, H. V., (1999). *A general method to estimate correlated discrete random variables*. Econometric Theory, 15(2), 228-237.

- [66] Pumi, G. (2006). *Cópiulas em processos estocásticos*. 140 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul.
- [67] R Core Team (2018). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>
- [68] Ribeiro, P. E. A. (2018). *Estudo das Zonas Especiais de Interesse Social através da metodologia de análise de sobrevivência*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade de Brasília, Brasília. 1-62.
- [69] Ribeiro, T. R., Suzuki, A. K., & Saraiva, E. F. (2017). *Uma abordagem bayesiana para o modelo de sobrevivência bivariado derivado da cópiula AMH*. Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto, 6(1).
- [70] Romeo, J. S., Meyer, R., & Gallardo, D. I. (2018). Bayesian bivariate survival analysis using the power variance function copula. Lifetime data analysis, 24(2), 355-383.
- [71] Rossi, J. L. (2012). *Seleção de modelos cópiula-GARCH: uma abordagem bayesiana* (Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo).
- [72] Salvadori, G., & De Michele, C. (2007). *On the use of copulas in hydrology: theory and practice*. Journal of Hydrologic Engineering, 12(4), 369-380.
- [73] Santos, D. F. D. (2017). *Modelo de regressão log-logístico discreto com fração de cura para dados de sobrevivência*. 99 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Universidade de Brasília, Brasília.
- [74] Schefzik, R. (2015). *Multivariate discrete copulas, with applications in probabilistic weather forecasting*. arXiv preprint arXiv:1512.05629.
- [75] Silva, M. M. D. (2013). *O mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA: uma análise de dependência sob a ótica da teoria de cópiulas*. 79 f. Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.
- [76] Silveira Neto, P. C. D. (2015). *Utilização de cópiulas com dinâmica semiparamétrica para estimação de medidas de risco de mercado*. 41 f. Dissertação (Mestrado em Economia) - Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, Porto Alegre.

- [77] Sklar, A. (1973). *Random variables, joint distribution functions, and copulas*. Kybernetika, 9(6), 449-460.
- [78] Smith, M. S. (2011). *Bayesian approaches to copula modelling*. arXiv preprint arXiv:1112.4204.
- [79] Smith, M. S., & Khaled, M. A. (2012). *Estimation of copula models with discrete margins via Bayesian data augmentation*. Journal of the American Statistical Association, 107(497), 290-303.
- [80] Tibaldi, F. S. (2004). *Modeling of correlated data and multivariate survival data* (Doctoral dissertation, UHasselt Diepenbeek).
- [81] Trégouët, D. A., Ducimetiere, P., Bocquet, V., Visvikis, S., Soubrier, F., & Tiret, L. (1999). *A parametric copula model for analysis of familial binary data*. The American Journal of Human Genetics, 64(3), 886-893.
- [82] Trivedi, P., & Zimmer, D. (2017). *A note on identification of bivariate copulas for discrete count data*. Econometrics, 5(1), 10.
- [83] Yilmaz, Y. E., & Lawless, J. F. (2011). *Likelihood ratio procedures and tests of fit in parametric and semiparametric copula models with censored data*. Lifetime data analysis, 17(3), 386-408.
- [84] Yoshizawa, Y., & Ishimura, N. (2018). *Evolution of multivariate copulas in continuous and discrete processes*. Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management, 25(1), 44-59.
- [85] Zimmer, D. M., & Trivedi, P. K. (2006). *Using trivariate copulas to model sample selection and treatment effects: application to family health care demand*. Journal of Business & Economic Statistics, 24(1), 63-76.

8 Anexos

Cópula de Gumbel

Tabela 8.1: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula Gumbel

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 7.5$	6.49	-1.02	1.074	6.34	-1.16	1.394	6.36	-1.15	1.357	6.09	-1.41	2.036
$\mu_1 = 10$	9.17	-0.84	0.787	9.07	-0.94	0.959	8.86	-1.14	1.387	9.02	-0.99	1.053
$\eta_2 = 8$	7.04	0.97	0.983	7.10	-0.91	0.877	7.53	-0.48	0.283	7.80	-0.20	0.102
$\mu_2 = 10$	9.30	-0.71	0.584	9.35	-0.66	0.522	9.00	-1.01	1.105	9.09	-0.92	0.924
$\gamma = 2$	1.73	-0.27	0.077	1.65	-0.35	0.127	1.61	-0.39	0.158	1.64	-0.36	0.135
τ	0.48	-	-	0.33	-	-	0.19	-	-	0.12	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 7.5$	5.95	-1.56	2.453	6.12	-1.38	1.948	6.38	-1.13	1.307	6.46	-1.05	1.144
$\mu_1 = 10$	9.16	-0.85	0.798	9.04	-0.97	1.013	9.05	-0.96	1.009	8.81	-1.20	1.526
$\eta_2 = 8$	6.41	-1.59	2.576	6.45	-1.56	2.470	6.21	-1.80	3.273	6.42	-1.59	2.562
$\mu_2 = 10$	9.08	-0.93	0.942	8.99	-1.02	1.125	8.91	-1.10	1.287	8.82	-1.19	1.496
$\gamma = 2$	1.98	-0.02	0.005	1.90	-0.11	0.015	1.86	-0.14	0.023	1.81	-0.19	0.041
τ	0.58	-	-	0.43	-	-	0.33	-	-	0.23	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 7.5$	6.32	-1.19	1.456	6.48	-1.02	1.085	6.50	-1.01	1.057	6.72	-0.78	0.658
$\mu_1 = 10$	9.11	-0.89	0.883	8.95	-1.06	1.200	8.90	-1.11	1.317	8.81	-1.20	1.524
$\eta_2 = 8$	6.60	-1.40	2.014	6.54	-1.47	2.203	6.26	-1.74	3.079	6.52	-1.49	2.256
$\mu_2 = 10$	8.99	-1.02	1.112	8.84	-1.17	1.437	8.77	-1.24	1.616	8.73	-1.28	1.711
$\gamma = 2$	1.92	-0.08	0.010	1.89	-0.12	0.017	1.91	-0.09	0.012	1.77	-0.24	0.059
τ	0.57	-	-	0.40	-	-	0.24	-	-	0.18	-	-

Tabela 8.2: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula Gumbel

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.93	-0.57	0.337	2.98	-0.52	0.279	2.75	-0.76	0.578	2.72	-0.78	0.614
$\mu_1 = 8$	7.31	-0.70	0.540	6.94	-1.07	1.183	6.96	-1.05	1.141	6.78	-1.23	1.554
$\eta_2 = 4$	3.40	-0.60	0.374	3.67	-0.33	0.125	3.63	-0.37	0.149	3.46	-0.54	0.304
$\mu_2 = 8$	7.43	-0.58	0.392	7.20	-0.81	0.700	7.02	-0.98	1.015	6.89	-1.11	1.289
$\gamma = 2$	1.65	-0.35	0.125	1.47	-0.54	0.289	1.58	-0.42	0.177	1.58	-0.42	0.178
τ	0.47	-	-	0.37	-	-	0.28	-	-	0.19	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.65	-0.86	0.742	2.74	-0.76	0.587	2.71	-0.80	0.640	2.55	-0.96	0.920
$\mu_1 = 8$	7.21	-0.80	0.686	6.64	-1.37	1.912	6.56	-1.44	2.128	6.46	-1.55	2.433
$\eta_2 = 4$	3.06	-0.94	0.895	3.13	-0.88	0.780	2.95	-1.05	1.113	2.59	-1.41	2.002
$\mu_2 = 8$	7.10	-0.91	0.874	6.68	-1.32	1.797	6.62	-1.39	1.978	6.54	-1.47	2.194
$\gamma = 2$	1.98	-0.02	0.004	1.85	-0.15	0.026	1.92	-0.08	0.011	1.99	-0.02	0.004
τ	0.58	-	-	0.46	-	-	0.36	-	-	0.30	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.81	-0.69	0.487	2.94	-0.56	0.325	2.91	-0.59	0.359	2.84	-0.66	0.449
$\mu_1 = 8$	7.16	-0.84	0.765	6.78	-1.23	1.554	6.52	-1.49	2.258	6.41	-1.59	2.584
$\eta_2 = 4$	3.17	-0.83	0.703	3.17	-0.83	0.706	3.05	-0.95	0.919	2.89	-1.11	1.239
$\mu_2 = 8$	7.03	-0.98	1.011	6.72	-1.29	1.702	6.49	-1.52	2.350	6.48	-1.53	2.381
$\gamma = 2$	1.88	-0.13	0.020	1.84	-0.16	0.029	1.79	-0.21	0.048	1.84	-0.16	0.031
τ	0.56	-	-	0.45	-	-	0.33	-	-	0.25	-	-

Tabela 8.3: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula Gumbel

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.94	-1.06	1.152	4.83	-1.18	1.405	5.03	-0.98	0.977	4.53	-1.48	2.202
$\mu_1 = 6$	5.12	-0.88	0.809	5.05	-0.95	0.930	4.89	-1.12	1.274	4.91	-1.09	1.220
$\eta_2 = 8$	6.99	-1.02	1.087	7.13	-0.88	0.826	7.87	-0.14	0.081	7.46	-0.54	0.352
$\mu_2 = 8$	7.20	-0.81	0.704	7.18	-0.83	0.736	6.95	-1.06	1.162	7.08	-0.92	0.901
$\gamma = 2.5$	2.08	-0.43	0.186	1.92	-0.58	0.344	1.85	-0.65	0.425	2.05	-0.45	0.208
τ	0.58	-	-	0.42	-	-	0.25	-	-	0.16	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.37	-1.63	2.691	4.43	-1.57	2.497	4.57	-1.43	2.065	4.25	-1.76	3.105
$\mu_1 = 6$	5.13	-0.88	0.799	5.01	-1.00	1.020	4.87	-1.13	1.306	4.74	-1.26	1.614
$\eta_2 = 8$	6.27	-1.74	3.051	6.26	-1.75	3.088	6.35	-1.66	2.793	5.72	-2.29	5.259
$\mu_2 = 8$	7.09	-0.91	0.885	7.02	-0.99	1.028	6.89	-1.11	1.289	6.78	-1.23	1.560
$\gamma = 2.5$	2.61	0.10	0.018	2.54	0.03	0.008	2.26	-0.24	0.063	2.44	-0.06	0.009
τ	0.70	-	-	0.53	-	-	0.36	-	-	0.26	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.69	-1.32	1.761	4.95	-1.06	1.147	4.84	-1.16	1.370	4.83	-1.18	1.405
$\mu_1 = 6$	5.09	-0.92	0.872	4.93	-1.08	1.190	4.87	-1.14	1.321	4.82	-1.19	1.428
$\eta_2 = 8$	6.45	-1.56	2.474	6.59	-1.42	2.052	6.32	-1.68	2.867	6.34	-1.66	2.804
$\mu_2 = 8$	7.04	-0.97	0.985	6.89	-1.11	1.285	6.85	-1.16	1.387	6.82	-1.19	1.454
$\gamma = 2.5$	2.38	-0.12	0.020	2.34	-0.16	0.032	2.32	-0.18	0.037	2.24	-0.26	0.073
τ	0.67	-	-	0.49	-	-	0.31	-	-	0.24	-	-

Tabela 8.4: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula Gumbel

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	5.12	-0.88	0.807	5.18	-0.82	0.701	5.44	-0.56	0.344	5.07	-0.94	0.909
$\mu_1 = 10$	9.23	-0.78	0.693	8.94	-1.07	1.231	8.78	-1.23	1.585	8.79	-1.22	1.563
$\eta_2 = 4$	3.41	-0.59	0.365	3.54	-0.46	0.228	3.95	-0.05	0.018	3.69	-0.32	0.114
$\mu_2 = 8$	7.39	-0.61	0.433	7.12	-0.89	0.841	6.92	-1.09	1.226	6.96	-1.05	1.153
$\gamma = 3$	2.51	-0.50	0.253	2.3	-0.70	0.492	1.97	-1.03	1.069	2.30	-0.71	0.503
τ	0.66	-	-	0.49	-	-	0.34	-	-	0.25	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.79	-1.21	1.489	4.98	-1.03	1.076	5.00	-1.00	1.030	4.67	-1.34	1.807
$\mu_1 = 10$	9.24	-0.77	0.683	8.89	-1.11	1.320	8.74	-1.27	1.678	8.68	-1.32	1.830
$\eta_2 = 4$	3.15	-0.85	0.739	3.20	-0.80	0.648	3.13	-0.87	0.770	2.87	-1.14	1.302
$\mu_2 = 8$	7.27	-0.74	0.598	6.90	-1.11	1.271	6.78	-1.22	1.545	6.76	-1.25	1.609
$\gamma = 3$	2.84	-0.16	0.035	2.61	-0.40	0.164	2.58	-0.42	0.187	2.60	-0.41	0.172
τ	0.72	-	-	0.55	-	-	0.38	-	-	0.30	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.98	-1.03	1.077	5.24	-0.77	0.614	5.31	-0.69	0.507	5.36	-0.65	0.445
$\mu_1 = 10$	9.22	-0.79	0.704	8.92	-1.09	1.275	8.73	-1.28	1.706	8.73	-1.27	1.701
$\eta_2 = 4$	3.14	-0.86	0.754	3.18	-0.82	0.687	3.15	-0.85	0.740	3.09	-0.91	0.838
$\mu_2 = 8$	7.12	-0.88	0.832	6.79	-1.21	1.522	6.55	-1.46	2.160	6.49	-1.51	2.336
$\gamma = 3$	2.73	-0.27	0.081	2.65	-0.35	0.131	2.48	-0.53	0.284	2.45	-0.55	0.311
τ	0.73	-	-	0.54	-	-	0.36	-	-	0.28	-	-

Cópula de Frank

Tabela 8.5: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.86	-0.64	0.416	2.91	-0.59	0.359	2.94	-0.57	0.329	3.07	-0.44	0.201
$\mu_1 = 10$	8.99	-1.02	1.127	8.95	-1.06	1.197	8.59	-1.42	2.093	8.86	-1.14	1.387
$\eta_2 = 4$	3.73	-0.27	0.089	4.02	0.01	0.016	3.96	-0.04	0.018	3.81	-0.19	0.051
$\mu_2 = 20$	19.09	-0.93	1.224	19.05	-0.97	1.304	18.19	-1.83	3.689	18.35	-1.67	3.110
$\gamma = 1$	1.17	0.17	0.031	1.30	0.30	0.09	1.68	0.68	0.464	2.44	1.44	2.078
τ	0.14	-	-	0.16	-	-	0.17	-	-	0.17	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.97	-0.54	0.297	3.04	-0.47	0.227	3.19	-0.32	0.111	3.29	-0.21	0.055
$\mu_1 = 10$	8.97	-1.04	1.156	8.38	-1.62	2.709	8.18	-1.83	3.414	8.27	-1.74	3.098
$\eta_2 = 4$	3.77	-0.23	0.069	3.73	-0.27	0.087	3.79	-0.22	0.062	3.86	-0.14	0.036
$\mu_2 = 20$	18.14	-1.88	3.85	18.17	-1.85	3.761	17.6	-2.42	6.145	17.47	-2.55	6.796
$\gamma = 1$	0.71	-0.29	0.085	0.73	-0.27	0.074	0.40	-0.60	0.366	0.58	-0.42	0.174
τ	0.09	-	-	0.07	-	-	0.06	-	-	0.08	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	3.05	-0.45	0.213	3.14	-0.36	0.141	3.28	-0.22	0.060	3.15	-0.35	0.132
$\mu_1 = 10$	9.22	-0.79	0.71	8.68	-1.33	1.837	8.41	-1.60	2.627	8.40	-1.61	2.659
$\eta_2 = 4$	3.40	-0.60	0.371	3.49	-0.51	0.275	3.56	-0.45	0.212	3.60	-0.40	0.173
$\mu_2 = 20$	18.94	-1.08	1.52	18.39	-1.63	2.989	18.06	-1.96	4.152	17.79	-2.23	5.271
$\gamma = 1$	0.99	-0.01	0.001	0.93	-0.07	0.006	0.85	-0.15	0.024	1.16	0.16	0.027
τ	0.12	-	-	0.07	-	-	0.06	-	-	0.05	-	-

Tabela 8.6: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.63	-0.87	0.772	2.74	-0.77	0.596	2.71	-0.80	0.64	2.79	-0.71	0.515
$\mu_1 = 6$	5.00	-1.00	1.032	4.91	-1.10	1.225	4.70	-1.30	1.723	4.54	-1.47	2.180
$\eta_2 = 4$	3.38	-0.63	0.403	3.47	-0.53	0.292	3.58	-0.42	0.189	3.45	-0.55	0.313
$\mu_2 = 8$	6.94	-1.07	1.188	6.73	-1.28	1.675	6.51	-1.50	2.284	6.31	-1.70	2.913
$\gamma = 1$	1.32	0.32	0.106	1.56	0.55	0.309	1.82	0.82	0.675	2.57	1.57	2.471
τ	0.16	-	-	0.18	-	-	0.18	-	-	0.18	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.69	-0.82	0.675	2.76	-0.75	0.564	2.91	-0.59	0.355	2.96	-0.54	0.303
$\mu_1 = 6$	4.94	-1.06	1.153	4.54	-1.46	2.155	4.34	-1.67	2.798	4.23	-1.77	3.156
$\eta_2 = 4$	3.41	-0.60	0.367	3.35	-0.65	0.433	3.51	-0.49	0.251	3.35	-0.66	0.441
$\mu_2 = 8$	6.68	-1.32	1.800	6.68	-1.33	1.806	6.31	-1.69	2.905	6.36	-1.65	2.767
$\gamma = 1$	0.62	-0.39	0.149	0.61	-0.39	0.156	0.50	-0.50	0.251	0.62	-0.38	0.145
τ	0.08	-	-	0.05	-	-	0.06	-	-	0.06	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.78	-0.72	0.532	2.82	-0.69	0.477	3.00	-0.51	0.265	2.86	-0.64	0.416
$\mu_1 = 6$	5.09	-0.91	0.857	4.79	-1.22	1.51	4.57	-1.43	2.077	4.49	-1.51	2.312
$\eta_2 = 4$	3.07	-0.93	0.873	3.18	-0.82	0.684	3.22	-0.78	0.619	3.20	-0.80	0.648
$\mu_2 = 8$	6.94	-1.06	1.182	6.67	-1.34	1.832	6.52	-1.48	2.240	6.38	-1.63	2.689
$\gamma = 1$	1.00	<0.01	0.001	0.96	-0.04	0.003	1.06	0.06	0.005	1.16	0.16	0.027
τ	0.12	-	-	0.08	-	-	0.06	-	-	0.05	-	-

Tabela 8.7: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7.5$	6.23	-1.27	1.659	6.37	-1.14	1.333	5.94	-1.56	2.478	6.34	-1.17	1.411
$\mu_1 = 10$	8.93	-1.08	1.246	8.86	-1.15	1.396	8.97	-1.04	1.160	8.81	-1.20	1.510
$\eta_2 = 8$	7.08	-0.93	0.909	7.46	-0.55	0.360	7.60	-0.40	0.222	7.1	-0.91	0.872
$\mu_2 = 10$	9.00	-1.00	1.090	8.93	-1.07	1.234	8.70	-1.31	1.779	8.83	-1.18	1.472
$\gamma = 2$	2.17	0.17	0.033	2.29	0.29	0.089	2.63	0.63	0.401	3.45	1.44	2.090
τ	0.25	-	-	0.26	-	-	0.22	-	-	0.15	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7.5$	6.51	-0.99	1.032	6.67	-0.83	0.741	6.71	-0.80	0.679	6.93	-0.58	0.384
$\mu_1 = 10$	8.98	-1.03	1.131	8.78	-1.23	1.589	8.81	-1.19	1.505	8.8	-1.21	1.540
$\eta_2 = 8$	7.21	-0.8	0.693	7.17	-0.83	0.745	7.05	-0.96	0.967	6.97	-1.04	1.125
$\mu_2 = 10$	8.82	-1.19	1.486	8.82	-1.19	1.487	8.90	-1.11	1.317	8.65	-1.36	1.912
$\gamma = 2$	1.76	-0.24	0.062	1.57	-0.43	0.185	1.52	-0.48	0.231	1.41	-0.60	0.356
τ	0.22	-	-	0.13	-	-	0.11	-	-	0.12	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7.5$	6.61	-0.9	0.855	6.72	-0.78	0.659	6.85	-0.66	0.48	7.04	-0.46	0.265
$\mu_1 = 10$	9.1	-0.91	0.912	8.93	-1.08	1.336	8.89	-1.12	1.33	8.82	-1.19	1.500
$\eta_2 = 8$	6.40	-1.60	2.611	6.66	-1.34	1.848	6.58	-1.43	2.087	6.72	-1.28	1.691
$\mu_2 = 10$	8.98	-1.03	1.132	8.90	-1.11	1.307	8.81	-1.20	1.526	8.82	-1.19	1.482
$\gamma = 2$	1.98	-0.02	0.004	1.87	-0.13	0.02	1.91	-0.09	0.012	1.93	-0.07	0.009
τ	0.24	-	-	0.16	-	-	0.12	-	-	0.08	-	-

Tabela 8.8: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.74	-0.77	0.595	2.72	-0.78	0.614	2.74	-0.76	0.586	2.83	-0.67	0.458
$\mu_1 = 8$	6.95	-1.06	1.163	6.87	-1.14	1.336	6.54	-1.47	2.203	6.34	-1.67	2.818
$\eta_2 = 4$	3.29	-0.71	0.521	3.41	-0.59	0.362	3.39	-0.62	0.392	3.07	-0.93	0.876
$\mu_2 = 8$	7.00	-1.01	1.069	6.83	-1.18	1.439	6.56	-1.45	2.149	6.47	-1.54	2.416
$\gamma = 2$	2.24	0.23	0.06	2.60	0.60	0.369	2.77	0.77	0.6	3.78	1.77	3.154
τ	0.24	-	-	0.26	-	-	0.24	-	-	0.25	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.84	-0.66	0.446	2.93	-0.57	0.337	3.01	-0.5	0.256	3.11	-0.39	0.161
$\mu_1 = 8$	6.99	-1.02	1.080	6.46	-1.55	2.440	6.23	-1.77	3.187	6.17	-1.84	3.41
$\eta_2 = 4$	3.40	-0.60	0.376	3.35	-0.66	0.444	3.55	-0.46	0.223	3.45	-0.55	0.314
$\mu_2 = 8$	6.65	-1.36	1.898	6.54	-1.46	2.180	6.13	-1.87	3.545	6.23	-1.78	3.191
$\gamma = 2$	1.72	-0.28	0.083	1.64	-0.36	0.133	1.70	-0.30	0.094	1.77	-0.23	0.056
τ	0.21	-	-	0.15	-	-	0.12	-	-	0.12	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.95	-0.56	0.318	3.00	-0.50	0.263	3.16	-0.34	0.126	2.98	-0.52	0.284
$\mu_1 = 8$	7.19	-0.82	0.723	6.81	-1.20	1.488	6.50	-1.51	2.314	6.48	-1.52	2.362
$\eta_2 = 4$	3.07	-0.93	0.881	3.16	-0.84	0.724	3.20	-0.80	0.652	3.21	-0.80	0.644
$\mu_2 = 8$	6.93	-1.08	1.214	6.63	-1.38	1.944	6.45	-1.56	2.468	6.39	-1.62	2.659
$\gamma = 2$	1.93	-0.08	0.009	1.84	-0.16	0.030	1.73	-0.27	0.078	2.17	0.17	0.033
τ	0.23	-	-	0.16	-	-	0.13	-	-	0.10	-	-

Tabela 8.9: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.49	-1.52	2.317	4.51	-1.49	2.255	4.36	-1.64	2.724	4.67	-1.33	1.793
$\mu_1 = 6$	4.98	-1.03	1.076	4.99	-1.02	1.063	4.97	-1.04	1.097	4.88	-1.13	1.292
$\eta_2 = 8$	6.68	-1.32	1.794	7.12	-0.89	0.843	7.18	-0.83	0.737	6.59	-1.41	2.041
$\mu_2 = 8$	6.98	-1.02	1.095	6.98	-1.03	1.106	6.85	-1.16	1.394	6.88	-1.13	1.318
$\gamma = 2.5$	2.55	0.05	0.009	2.78	0.28	0.087	3.46	0.96	0.928	3.84	1.33	1.789
τ	0.30	-	-	0.33	-	-	0.30	-	-	0.22	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.65	-1.36	1.868	4.79	-1.21	1.495	4.90	-1.10	1.234	5.03	-0.97	0.968
$\mu_1 = 6$	4.98	-1.03	1.076	4.74	-1.26	1.613	4.78	-1.22	1.522	4.79	-1.22	1.506
$\eta_2 = 8$	7.22	-0.79	0.671	7.23	-0.78	0.654	7.07	-0.93	0.921	7.53	-0.48	0.286
$\mu_2 = 8$	6.86	-1.15	1.362	6.82	-1.19	1.453	6.84	-1.17	1.412	6.69	-1.32	1.790
$\gamma = 2.5$	2.15	-0.35	0.127	2.14	-0.36	0.136	2.06	-0.44	0.200	1.73	-0.77	0.603
τ	0.27	-	-	0.17	-	-	0.15	-	-	0.15	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.85	-1.16	1.359	4.96	-1.05	1.123	5.05	-0.96	0.940	5.19	-0.82	0.691
$\mu_1 = 6$	5.08	-0.93	0.885	4.94	-1.07	1.164	4.84	-1.17	1.385	4.73	-1.27	1.641
$\eta_2 = 8$	6.35	-1.66	2.790	6.51	-1.50	2.281	6.52	-1.49	2.262	6.54	-1.47	2.192
$\mu_2 = 8$	7.03	-0.98	1.009	6.96	-1.05	1.148	6.87	-1.13	1.330	6.82	-1.19	1.459
$\gamma = 2.5$	2.26	-0.24	0.064	2.19	-0.31	0.103	1.99	-0.51	0.263	2.16	-0.34	0.122
τ	0.27	-	-	0.18	-	-	0.13	-	-	0.09	-	-

Tabela 8.10: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.30	-0.70	0.505	3.27	-0.74	0.552	3.35	-0.66	0.444	3.13	-0.88	0.777
$\mu_1 = 12$	8.96	-3.05	9.402	8.75	-3.26	10.69	8.58	-3.43	11.850	8.96	-3.05	9.393
$\eta_2 = 3.5$	2.78	-0.72	0.529	2.95	-0.55	0.315	2.80	-0.70	0.500	2.46	-1.04	1.092
$\mu_2 = 6$	4.97	-1.03	1.095	4.80	-1.21	1.487	4.57	-1.43	2.067	4.81	-1.19	1.445
$\gamma = 3$	3.47	0.46	0.227	3.90	0.90	0.819	4.32	1.32	1.757	5.82	2.81	7.942
τ	0.37	-	-	0.37	-	-	0.35	-	-	0.31	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.46	-0.54	0.306	3.56	-0.45	0.212	3.56	-0.45	0.211	3.44	-0.56	0.328
$\mu_1 = 12$	11.05	-0.96	1.044	10.31	-1.70	3.005	10.37	-1.64	2.8	10.60	-1.41	2.105
$\eta_2 = 3.5$	2.87	-0.64	0.414	2.84	-0.66	0.447	2.90	-0.61	0.375	2.73	-0.77	0.599
$\mu_2 = 6$	4.76	-1.25	1.581	4.57	-1.44	2.086	4.49	-1.51	2.301	4.55	-1.46	2.145
$\gamma = 3$	2.76	-0.24	0.065	2.57	-0.43	0.195	2.72	-0.28	0.087	3.20	0.20	0.049
τ	0.32	-	-	0.22	-	-	0.19	-	-	0.19	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.55	-0.46	0.221	3.65	-0.36	0.142	3.81	-0.2	0.054	3.76	-0.25	0.076
$\mu_1 = 12$	11.27	-0.74	0.676	10.73	-1.28	1.757	10.38	-1.63	2.78	10.11	-1.90	3.719
$\eta_2 = 3.5$	2.61	-0.89	0.795	2.74	-0.76	0.583	2.69	-0.81	0.665	2.73	-0.77	0.607
$\mu_2 = 6$	4.98	-1.03	1.076	4.70	-1.30	1.716	4.51	-1.5	2.259	4.38	-1.62	2.647
$\gamma = 3$	2.75	-0.26	0.074	2.58	-0.42	0.186	2.57	-0.43	0.19	2.74	-0.26	0.078
τ	0.31	-	-	0.22	-	-	0.18	-	-	0.13	-	-

Tabela 8.11: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.86	-1.15	1.343	4.94	-1.06	1.150	4.73	-1.28	1.657	5.04	-0.96	0.955
$\mu_1 = 10$	8.96	-1.05	1.175	8.78	-1.23	1.594	8.88	-1.13	1.348	8.6	-1.41	2.070
$\eta_2 = 4$	3.32	-0.69	0.482	3.58	-0.43	0.194	3.31	-0.69	0.489	3.15	-0.85	0.736
$\mu_2 = 8$	7.00	-1.01	1.060	6.68	-1.33	1.801	6.58	-1.42	2.067	6.42	-1.59	2.573
$\gamma = 3$	3.45	0.44	0.209	3.53	0.53	0.290	4.00	1.00	1.014	4.46	1.46	2.151
τ	0.36	-	-	0.34	-	-	0.31	-	-	0.23	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	5.10	-0.90	0.838	5.27	-0.73	0.566	5.02	-0.99	0.999	5.17	-0.84	0.730
$\mu_1 = 10$	9.01	-1.00	1.077	8.64	-1.37	1.961	8.75	-1.26	1.654	8.73	-1.28	1.714
$\eta_2 = 4$	3.48	-0.53	0.288	3.51	-0.49	0.253	3.47	-0.53	0.293	3.40	-0.60	0.376
$\mu_2 = 8$	6.71	-1.30	1.729	6.55	-1.45	2.157	6.54	-1.47	2.198	6.47	-1.53	2.397
$\gamma = 3$	2.73	-0.28	0.084	2.54	-0.46	0.223	2.96	-0.04	0.010	2.92	-0.08	0.015
τ	0.32	-	-	0.22	-	-	0.18	-	-	0.17	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	5.23	-0.77	0.621	5.29	-0.72	0.542	5.40	-0.60	0.390	5.51	-0.50	0.277
$\mu_1 = 10$	9.12	-0.88	0.866	8.87	-1.14	1.384	8.67	-1.34	1.875	8.51	-1.50	2.328
$\eta_2 = 4$	3.06	-0.94	0.892	3.18	-0.83	0.691	3.23	-0.77	0.611	3.22	-0.78	0.624
$\mu_2 = 8$	6.98	-1.03	1.112	6.72	-1.29	1.713	6.47	-1.54	2.415	6.30	-1.71	2.966
$\gamma = 3$	2.82	-0.18	0.040	2.74	-0.26	0.075	2.51	-0.49	0.244	2.49	-0.52	0.271
τ	0.32	-	-	0.23	-	-	0.16	-	-	0.11	-	-

Tabela 8.12: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Frank

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.81	-1.19	1.448	4.75	-1.26	1.603	4.67	-1.34	1.805	4.68	-1.32	1.766
$\mu_1 = 8$	6.86	-1.15	1.372	6.76	-1.25	1.599	6.68	-1.33	1.805	6.75	-1.26	1.633
$\eta_2 = 4$	3.48	-0.53	0.290	3.68	-0.32	0.118	3.59	-0.42	0.185	3.28	-0.72	0.528
$\mu_2 = 12$	10.92	-1.09	1.300	10.61	-1.40	2.082	10.44	-1.58	2.590	10.45	-1.56	2.553
$\gamma = 5$	5.67	0.67	0.476	6.41	1.41	2.018	6.84	1.83	3.410	7.46	2.45	6.062
τ	0.53	-	-	0.49	-	-	0.41	-	-	0.31	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	5.07	-0.94	0.907	5.29	-0.71	0.534	5.21	-0.79	0.656	4.9	-1.11	1.255
$\mu_1 = 8$	7.00	-1.01	1.062	6.73	-1.28	1.671	6.78	-1.23	1.562	6.87	-1.13	1.331
$\eta_2 = 4$	3.67	-0.34	0.128	3.75	-0.26	0.080	3.72	-0.28	0.094	3.46	-0.55	0.311
$\mu_2 = 12$	10.69	-1.33	1.871	10.42	-1.59	2.636	10.41	-1.60	2.666	10.56	-1.45	2.218
$\gamma = 5$	4.75	-0.26	0.088	4.39	-0.62	0.401	4.49	-0.51	0.282	4.84	-0.17	0.052
τ	0.48	-	-	0.32	-	-	0.25	-	-	0.22	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	5.16	-0.85	0.747	5.32	-0.69	0.501	5.38	-0.62	0.417	5.47	-0.53	0.313
$\mu_1 = 8$	7.07	-0.93	0.922	6.87	-1.14	1.336	6.77	-1.24	1.577	6.64	-1.36	1.900
$\eta_2 = 4$	3.33	-0.67	0.461	3.44	-0.56	0.329	3.48	-0.52	0.286	3.46	-0.55	0.311
$\mu_2 = 12$	11.03	-0.98	1.081	10.66	-1.35	1.938	10.34	-1.67	2.900	10.14	-1.87	3.614
$\gamma = 5$	4.67	-0.33	0.134	4.61	-0.40	0.179	4.41	-0.59	0.369	4.35	-0.65	0.446
τ	0.47	-	-	0.34	-	-	0.24	-	-	0.17	-	-

Cópula de Clayton

Tabela 8.13: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.82	-0.68	0.471	2.89	-0.61	0.378	2.97	-0.53	0.289	2.70	-0.80	0.645
$\mu_1 = 10$	8.88	-1.13	1.362	8.29	-1.71	3.009	7.66	-2.35	5.588	8.07	-1.94	3.813
$\eta_2 = 4$	3.72	-0.28	0.094	3.93	-0.08	0.021	4.00	<0.01	0.016	3.65	-0.35	0.135
$\mu_2 = 20$	18.43	-1.59	2.852	17.42	-2.60	7.065	16.37	-3.65	13.564	17.32	-2.70	7.583
$\gamma = 1$	0.57	-0.44	0.190	0.68	-0.32	0.104	1.05	0.05	0.003	1.51	0.51	0.261
τ	0.35	-	-	0.31	-	-	0.27	-	-	0.23	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.90	-0.61	0.376	2.99	-0.52	0.275	3.00	-0.50	0.258	3.16	-0.34	0.127
$\mu_1 = 10$	8.77	-1.24	1.618	8.11	-1.90	3.67	8.06	-1.95	3.877	7.97	-2.04	4.209
$\eta_2 = 4$	3.54	-0.46	0.228	3.45	-0.56	0.321	3.20	-0.80	0.657	3.03	-0.98	0.964
$\mu_2 = 20$	19.39	-0.63	0.775	18.34	-1.68	3.154	18.27	-1.74	3.376	18.32	-1.69	3.204
$\gamma = 1$	0.59	-0.41	0.168	0.67	-0.33	0.112	1.04	0.04	0.003	1.33	0.33	0.113
τ	0.36	-	-	0.23	-	-	0.19	-	-	0.19	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	3.03	-0.47	0.234	3.08	-0.42	0.186	3.17	-0.33	0.122	2.97	-0.53	0.291
$\mu_1 = 10$	9.07	-0.94	0.957	8.56	-1.45	2.171	8.11	-1.90	3.676	7.97	-2.04	4.225
$\eta_2 = 4$	3.47	-0.53	0.297	3.48	-0.52	0.284	3.58	-0.42	0.192	3.36	-0.64	0.424
$\mu_2 = 20$	18.97	-1.05	1.463	18.31	-1.71	3.254	17.19	-2.83	8.288	17.17	-2.85	8.414
$\gamma = 1$	0.39	-0.61	0.368	0.49	-0.51	0.261	0.63	-0.37	0.139	1.02	0.02	0.001
τ	0.31	-	-	0.25	-	-	0.21	-	-	0.17	-	-

Tabela 8.14: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.58	-0.92	0.852	2.71	-0.79	0.629	2.75	-0.75	70.571	2.49	-1.02	1.037
$\mu_1 = 6$	4.95	-1.05	1.127	4.56	-1.45	2.117	4.26	-1.75	3.076	4.32	-1.68	2.843
$\eta_2 = 4$	3.41	-0.59	0.365	3.53	-0.47	0.233	3.56	-0.44	0.210	3.33	-0.68	0.469
$\mu_2 = 8$	6.79	-1.22	1.538	6.43	-1.58	2.531	6.04	-1.96	3.898	6.45	-1.56	2.478
$\gamma = 1$	0.58	-0.42	0.175	0.66	-0.34	0.118	1.21	0.20	0.043	2.81	1.81	3.288
τ	0.35	-	-	0.3	-	-	0.28	-	-	0.25	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.61	-0.90	0.809	2.67	-0.83	0.701	2.77	-0.73	0.541	2.75	-0.75	0.568
$\mu_1 = 6$	4.81	-1.19	1.45	4.38	-1.63	2.673	4.2	-1.81	3.28	4.19	-1.81	3.308
$\eta_2 = 4$	3.27	-0.73	0.543	3.22	-0.78	0.620	2.99	-1.01	1.034	2.72	-1.28	1.648
$\mu_2 = 8$	7.17	-0.83	0.744	6.77	-1.24	1.584	6.52	-1.49	2.248	6.70	-1.31	1.748
$\gamma = 1$	0.68	-0.33	0.106	0.85	-0.15	0.025	1.17	0.17	0.031	1.53	0.53	0.285
τ	0.39	-	-	0.27	-	-	0.23	-	-	0.22	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	$EQM(\hat{\Psi})$
$\eta_1 = 3.5$	2.74	-0.76	0.582	2.74	-0.76	0.583	2.82	-0.68	0.468	2.60	-0.90	0.814
$\mu_1 = 6$	5.01	-1.00	1.021	4.67	-1.33	1.796	4.37	-1.64	2.693	4.32	-1.69	2.859
$\eta_2 = 4$	3.15	-0.85	0.735	3.23	-0.78	0.612	3.29	-0.71	0.513	3.09	-0.92	0.847
$\mu_2 = 8$	6.95	-1.06	1.175	6.64	-1.37	1.919	6.13	-1.87	3.539	6.12	-1.89	3.603
$\gamma = 1$	0.45	-0.55	0.308	0.61	-0.39	0.155	0.73	-0.27	0.074	1.24	0.24	0.060
τ	0.32	-	-	0.27	-	-	0.23	-	-	0.19	-	-

Tabela 8.15: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7.5$	6.08	-1.43	2.074	6.04	-1.46	2.181	6.17	-1.34	1.831	6.29	-1.22	1.531
$\mu_1 = 10$	8.79	-1.22	1.557	8.69	-1.32	1.82	8.57	-1.44	2.153	8.51	-1.50	2.311
$\eta_2 = 8$	7.09	-0.92	0.888	7.21	-0.80	0.69	8.57	-1.44	2.153	6.70	-1.31	1.758
$\mu_2 = 10$	8.80	-1.21	1.550	8.64	-1.37	1.955	7.07	-0.94	0.928	8.57	-1.44	2.137
$\gamma = 2$	1.03	-0.98	0.952	1.05	-0.95	0.897	8.62	-1.39	2.01	1.29	-0.71	0.502
τ	0.57	-	-	0.44	-	-	0.31	-	-	0.22	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7.5$	6.29	-1.22	1.530	6.45	-1.06	1.166	6.57	-0.93	0.916	6.66	-0.85	0.765
$\mu_1 = 10$	8.79	-1.22	1.573	8.57	-1.43	2.129	8.61	-1.40	2.024	8.49	-1.52	2.381
$\eta_2 = 8$	6.69	-1.31	1.768	6.57	-1.43	2.095	6.32	-1.68	2.876	6.35	-1.65	2.773
$\mu_2 = 10$	8.96	-1.05	1.178	8.75	-1.26	1.655	8.78	-1.23	1.587	8.67	-1.33	1.856
$\gamma = 2$	0.95	-1.05	1.095	1.03	-0.97	0.936	1.08	-0.92	0.846	1.10	-0.90	0.813
τ	0.56	-	-	0.31	-	-	0.25	-	-	0.21	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 7.5$	6.53	-0.98	0.999	6.61	-0.90	0.846	6.75	-0.76	0.616	6.38	-1.12	1.303
$\mu_1 = 10$	8.96	-1.05	1.191	8.78	-1.23	1.589	8.65	-1.36	1.918	8.57	-1.44	2.135
$\eta_2 = 8$	6.64	-1.37	1.915	6.62	-1.39	1.969	6.63	-1.37	1.933	6.74	-1.27	1.651
$\mu_2 = 10$	8.91	-1.10	1.284	8.77	-1.24	1.624	8.64	-1.37	1.941	8.49	-1.52	2.368
$\gamma = 2$	0.68	-1.32	1.750	0.75	-1.25	1.559	8.64	-1.37	1.941	1.03	-0.97	0.944
τ	0.49	-	-	0.36	-	-	0.26	-	-	0.16	-	-

Tabela 8.16: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.64	-0.87	0.756	2.69	-0.82	0.674	2.61	-0.90	0.809	2.41	-1.09	1.190
$\mu_1 = 8$	6.69	-1.31	1.773	6.21	-1.8	3.267	5.83	-2.18	4.783	5.57	-2.44	5.971
$\eta_2 = 4$	3.34	-0.67	0.458	3.41	-0.59	0.362	3.27	-0.73	0.542	2.73	-1.27	1.621
$\mu_2 = 8$	6.71	-1.30	1.728	3.41	-0.59	0.362	5.99	-2.02	4.098	5.90	-2.11	4.477
$\gamma = 2$	1.15	-0.86	0.734	1.39	-0.61	0.370	2.05	0.05	0.007	3.25	1.25	1.567
τ	0.54	-	-	0.48	-	-	0.39	-	-	0.34	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.72	-0.79	0.627	2.78	-0.72	0.528	2.88	-0.62	0.391	2.76	-0.74	.557
$\mu_1 = 8$	6.62	-1.39	1.979	6.06	-1.95	3.824	5.78	-2.22	4.965	5.93	-2.08	4.355
$\eta_2 = 4$	3.13	-0.88	0.779	3.09	-0.91	0.837	2.89	-1.12	1.253	2.54	-1.46	2.136
$\mu_2 = 8$	6.91	-1.10	1.253	6.42	-1.59	2.571	6.15	-1.85	3.474	6.42	-1.59	2.571
$\gamma = 2$	1.06	-0.94	0.878	1.27	-0.73	0.538	1.79	-0.21	0.049	2.46	0.46	0.219
τ	0.54	-	-	0.38	-	-	0.32	-	-	0.29	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 3.5$	2.89	-0.61	0.378	2.92	-0.59	0.352	2.92	-0.58	0.345	2.73	-0.77	0.604
$\mu_1 = 8$	6.91	-1.10	1.247	6.45	-1.56	2.46	6.12	-1.88	3.582	6.04	-1.96	3.885
$\eta_2 = 4$	3.18	-0.82	0.690	3.26	-0.74	0.565	3.22	-0.78	0.623	2.97	-1.03	1.074
$\mu_2 = 8$	6.86	-1.15	1.369	6.49	-1.51	2.329	6.09	-1.92	3.725	6.08	-1.92	3.739
$\gamma = 2$	0.77	-1.23	1.522	1.02	-0.98	0.969	1.25	-0.75	0.564	1.79	-0.21	0.047
τ	0.48	-	-	0.4	-	-	0.33	-	-	0.28	-	-

Tabela 8.17: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.35	-1.65	2.741	4.37	-1.63	2.690	4.41	-1.59	2.550	3.99	-2.01	4.058
$\mu_1 = 6$	4.83	-1.17	1.395	4.71	-1.29	1.691	4.66	-1.34	1.822	4.67	-1.34	1.806
$\eta_2 = 8$	6.81	-1.20	1.480	6.73	-1.28	1.688	6.75	-1.26	1.629	6.31	-1.70	2.932
$\mu_2 = 8$	1.35	-1.15	1.328	6.65	-1.35	1.880	6.64	-1.36	1.906	6.68	-1.32	1.798
$\gamma = 2.5$	2.55	0.05	0.009	1.73	-0.77	0.593	1.55	-0.95	0.905	3.05	0.55	0.312
τ	0.63	-	-	0.51	-	-	0.39	-	-	0.31	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.45	-1.55	2.425	4.64	-1.37	1.892	4.69	-1.32	1.757	4.91	-1.09	1.212
$\mu_1 = 6$	4.78	-1.22	1.514	4.54	-1.46	2.155	4.57	-1.43	2.066	4.56	-1.45	2.122
$\eta_2 = 8$	6.29	-1.71	2.970	6.18	-1.83	3.381	5.77	-2.23	5.015	5.57	-2.44	5.962
$\mu_2 = 8$	6.92	-1.09	1.226	6.68	-1.33	1.811	6.76	-1.24	1.591	6.73	-1.27	1.664
$\gamma = 2.5$	1.19	-1.31	1.73	1.28	-1.22	1.493	1.45	-1.06	1.116	2.02	-0.48	0.232
τ	0.61	-	-	0.38	-	-	0.31	-	-	0.28	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	b($\hat{\Psi}$)	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.77	-1.23	1.539	4.84	-1.17	1.384	4.95	-1.06	1.144	4.62	-1.39	1.943
$\mu_1 = 6$	4.93	-1.08	1.189	4.78	-1.23	1.535	4.63	-1.38	1.923	4.57	-1.44	2.088
$\eta_2 = 8$	6.41	-1.60	2.596	6.29	-1.72	2.987	6.38	-1.63	2.700	6.16	-1.85	3.444
$\mu_2 = 8$	6.91	-1.09	1.242	6.78	-1.22	1.545	6.63	-1.38	1.953	6.57	-1.43	2.100
$\gamma = 2.5$	0.88	-1.62	2.626	1.01	-1.49	2.218	1.12	-1.38	1.902	1.56	-0.94	0.894
τ	0.57	-	-	0.42	-	-	0.30	-	-	0.20	-	-

Tabela 8.18: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.19	-0.82	0.678	3.27	-0.73	0.548	3.31	-0.69	0.491	2.67	-1.34	1.79
$\mu_1 = 12$	10.44	-1.57	2.573	9.83	-2.18	4.867	9.29	-2.72	7.468	9.72	-2.29	5.316
$\eta_2 = 3.5$	2.84	-0.67	0.451	2.89	-0.61	0.382	2.73	-0.78	0.609	2.23	-1.27	1.62
$\mu_2 = 8$	6.47	-1.53	2.396	5.93	-2.07	4.339	5.66	-2.35	5.55	5.98	-2.03	4.144
$\gamma = 3$	1.49	-1.51	2.274	1.81	-1.19	1.419	2.69	-0.32	0.108	4.33	1.32	1.766
τ	0.62	-	-	0.55	-	-	0.44	-	-	0.36	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.28	-0.72	0.530	3.39	-0.61	0.384	3.33	-0.67	0.460	3.20	-0.80	0.657
$\mu_1 = 12$	10.33	-1.68	2.933	9.61	-2.40	5.869	9.61	-2.40	5.86	9.53	-2.47	6.215
$\eta_2 = 3.5$	2.72	-0.79	0.627	2.68	-0.82	0.683	2.64	-0.87	0.758	2.41	-1.09	1.191
$\mu_2 = 8$	6.66	-1.34	1.850	6.09	-1.92	3.712	6.04	-1.97	3.898	5.95	-2.05	4.255
$\gamma = 3$	1.33	-1.67	2.803	1.56	-1.44	2.066	1.92	-1.08	1.180	2.76	-0.24	0.065
τ	0.63	-	-	0.45	-	-	0.37	-	-	0.32	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 4$	3.49	-0.51	0.274	3.53	-0.47	0.238	3.61	-0.40	0.171	3.21	-0.79	0.636
$\mu_1 = 12$	10.73	-1.28	1.764	10.16	-1.85	3.543	9.62	-2.39	5.812	9.55	-2.46	6.156
$\eta_2 = 3.5$	2.83	-0.67	0.459	2.91	-0.59	0.354	3.00	-0.5	0.258	2.79	-0.72	0.521
$\mu_2 = 8$	6.69	-1.32	1.791	6.25	-1.75	3.115	5.84	-2.17	4.726	5.79	-2.21	4.926
$\gamma = 3$	0.97	-2.03	4.123	1.22	-1.78	3.158	1.52	-1.49	2.209	2.41	-0.59	0.353
τ	0.59	-	-	0.48	-	-	0.39	-	-	0.31	-	-

Tabela 8.19: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.69	-1.32	1.753	4.67	-1.33	1.802	4.36	-1.64	2.71	4.20	-1.80	3.267
$\mu_1 = 10$	8.69	-1.31	1.802	8.40	-1.61	2.667	8.22	-1.79	3.279	8.03	-1.98	3.986
$\eta_2 = 4$	3.29	-0.72	0.523	3.43	-0.57	0.338	3.21	-0.79	0.635	2.79	-1.21	1.470
$\mu_2 = 8$	6.56	-1.45	2.148	6.12	-1.88	3.587	6.00	-2.01	4.076	5.97	-2.04	4.188
$\gamma = 3$	1.41	-1.59	2.527	1.49	-1.51	2.277	2.46	-0.55	0.304	3.75	0.74	0.566
τ	0.62	-	-	0.54	-	-	0.40	-	-	0.30	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.87	-1.14	1.314	5.02	-0.98	0.992	4.89	-1.12	1.27	4.81	-1.19	1.442
$\mu_1 = 10$	8.60	-1.41	2.069	8.26	-1.75	3.135	8.24	-1.77	3.203	8.24	-1.77	3.208
$\eta_2 = 4$	3.11	-0.89	0.804	3.02	-0.98	0.967	3.08	-0.92	0.859	2.84	-1.16	1.357
$\mu_2 = 8$	6.70	-1.31	1.755	6.28	-1.73	3.019	6.22	-1.79	3.246	6.21	-1.8	3.272
$\gamma = 3$	1.33	-1.67	2.802	1.48	-1.52	2.314	1.71	-1.29	1.668	2.07	-0.93	0.867
τ	0.65	-	-	0.41	-	-	0.34	-	-	0.30	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	5.15	-0.86	0.759	5.15	-0.85	0.754	5.14	-0.86	0.774	4.86	-1.15	1.345
$\mu_1 = 10$	8.85	-1.16	1.432	8.52	-1.49	2.300	8.27	-1.74	3.094	8.32	-1.69	2.930
$\eta_2 = 4$	3.22	-0.78	0.617	3.32	-0.68	0.478	3.36	-0.64	0.427	3.24	-0.77	0.601
$\mu_2 = 8$	6.76	-1.25	1.605	6.37	-1.64	2.726	6.07	-1.93	3.767	6.08	-1.92	3.729
$\gamma = 3$	0.99	-2.01	4.06	1.22	-1.78	3.171	1.48	-1.52	2.303	1.92	-1.08	1.181
τ	0.59	-	-	0.47	-	-	0.35	-	-	0.25	-	-

Tabela 8.20: Estimativas para os parâmetros marginais da LLD por meio da cópula de Clayton

δ_i	0%			10%			20%			30%		
n	100			100			100			100		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.66	-1.35	1.835	4.76	-1.24	1.562	4.5	-1.51	2.294	4.05	-1.95	3.818
$\mu_1 = 8$	6.52	-1.49	2.256	6.29	-1.72	2.995	6.11	-1.89	3.617	6.16	-1.84	3.437
$\eta_2 = 4$	3.39	-0.62	0.392	3.48	-0.52	0.287	3.22	-0.79	0.629	2.79	-1.21	1.468
$\mu_2 = 12$	10.03	-1.98	4.034	9.40	-2.61	6.895	9.15	-2.86	8.282	9.37	-2.64	7.069
$\gamma = 5$	2.05	-2.96	8.745	2.39	-2.61	6.843	3.65	-1.35	1.834	5.45	0.45	0.232
τ	0.77	-	-	0.64	-	-	0.46	-	-	0.32	-	-
n	200			200			200			200		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	4.82	-1.19	1.434	5.05	-0.95	0.935	4.77	-1.23	1.539	4.74	-1.26	1.615
$\mu_1 = 8$	6.56	-1.45	2.141	6.30	-1.71	2.948	6.34	-1.67	2.821	6.27	-1.74	3.058
$\eta_2 = 4$	3.29	-0.72	0.524	3.23	-0.78	0.613	3.15	-0.86	0.742	2.9	-1.1	1.219
$\mu_2 = 12$	10.29	-1.72	3.065	9.62	-2.39	5.812	9.68	-2.33	5.507	9.43	-2.57	6.717
$\gamma = 5$	1.78	-3.22	10.387	1.99	-3.01	9.079	2.40	-2.60	6.77	3.77	-1.23	1.534
τ	0.75	-	-	0.48	-	-	0.39	-	-	0.32	-	-
n	500			500			500			500		
Ψ	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)	$\hat{\Psi}$	$b(\hat{\Psi})$	EQM($\hat{\Psi}$)
$\eta_1 = 6$	5.08	-0.92	0.873	5.15	-0.85	0.752	5.16	-0.85	0.744	4.85	-1.16	1.359
$\mu_1 = 8$	6.76	-1.25	1.612	6.53	-1.48	2.220	6.30	-1.7	2.939	6.28	-1.73	3.034
$\eta_2 = 4$	3.42	-0.58	0.347	3.49	-0.52	0.279	3.58	-0.42	0.189	3.50	-0.50	0.263
$\mu_2 = 12$	10.44	-1.57	2.573	9.97	-2.04	4.262	9.39	-2.62	6.927	9.38	-2.63	7.005
$\gamma = 5$	1.33	-3.67	13.499	1.52	-3.48	12.143	2.00	-3.01	9.039	2.70	-2.30	5.317
τ	0.71	-	-	0.55	-	-	0.40	-	-	0.30	-	-