Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Sobre Números de Liouville e Funções Transcendentes

por

Jean Lelis

Orientador: Diego Marques

Brasília

2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

LL541s

Lelis, Jean
Sobre Números de Liouville e Funções Transcendentes / Jean Lelis; orientador Diego Marques. -- Brasília, 2018.
65 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Teoria dos Números Transcendentes. I. Marques, Diego, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre Números de Liouville e Funções Transcendentes

por

Jean Carlos de Aguiar Lelis

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA*

Brasília, 17 de dezembro de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Diego Marques Ferreira – Orientador (MAT-UnB)

Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti (MAT-UnB)

Ana Paula de A. Chaves

Profa. Dra. Ana Paula de Araújo Chaves (UFG)

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues (UFG)

* O autor foi bolsista CNPq e PICME durante a elaboração desta tese.

Aos meus pais,

Claudio Antonio Lelis e

Luciara de Oliveira Lelis.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Claudio Antonio Lelis e Luciara Neves de Oliveira Lelis, e as minhas irmãs Claudyane de Oliveira Lelis e Nayane de Oliveira Lelis, nada do que eu conquistei seria possível sem os ensinamentos, o apoio e o amor de vocês. Quando me receberam como parte da família não estavam me dando apenas um lar, estavam me dando uma família maravilhosa que sempre acreditou em mim, essa conquista é nossa.

Quero agradecer a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Publicas e todos os envolvidos nesse projeto, em especial ao Professor José Hilário, sempre que penso em sobre tudo que me aconteceu depois da OBMEP, lembro da celebre frase do grande Sir Isaac Newton *"se consegui ver mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes"*, guardadas as devidas proporções, sempre penso que o horizonte que vi com esse projeto só foi possível ver, porque fui levanto sobre seus ombros. Agradeço também a todos os meus professores, da graduação, do mestrado e doutorado, tudo que foi dito, se estende a todos vocês.

Quero agradecer ao meu orientador Professor Diego Marques, pelos ensinamentos e orientações, pela paciência e pela confiança que sempre demonstrou, a liberdade matemática que me deu durante todo o doutorado me ensinou muito, espero retribuir essa confiança na minha carreira que se inicia.

Quero agradecer aos professores Ana Paula Chaves, Paulo Henrique Rodrigues, Leandro Cioletti e Emerson de Melo, por aceitarem participar da banca, por toda a atenção dedicada e todas as sugestões.

Quero agradecer aos meus “irmãos na Matemática”: à Gersica que me ajudou muito em um dos momentos mais difíceis desse doutorado, e tornou meus dias muito mais leves, não existem palavras para descrever meu carinho e agradecimento; ao Josimar pela amizade, nossa conversas, desde de o início do doutorado (quase sempre acompanhadas de uma cerveja) foram valiosas, obrigado por toda a motivação; à Alessandra Kreutz (não podia deixar de por seu sobrenome na minha tese), a irmã mais responsável, você foi aquela irmã que é quase uma mãe, obrigado por todos os conselhos, suas palavras muitas vezes me deram a calma necessária para tomar as decisões certas, um agradecimento especial pela ajuda na leitura da tese, suas sugestões foram, como sempre, indispensáveis; à Elaine, a minha irmã gêmea, não nascemos juntos, mas descobri que assim como irmãos gêmeos a gente simplesmente se entende e isso é incrível; ao Bruno, o irmão de outro pai, obrigado por me aguentar todos esses anos, ainda virão muitos outros, tive o prazer de estudar problemas com todos os meus irmãos, espero que nossas parcerias sejam duradouras. Agradeço também a todas as amizades que conquistei nesses longos anos, vocês tornaram essa jornada muito mais agradável.

Quero agradecer ao MAT/UnB pelo suporte, foi uma honra estudar nesse departamento. Quero agradecer também à CAPES e ao CNPq pelo amparo financeiro.

"My brain is open."

Paul Erdös

Resumo

Nesse trabalho de tese, estudamos uma série de problemas relacionados a números de Liouville e funções analíticas transcendentes. Esses dois temas são recorrentes na teoria dos números transcendentes, pois por um lado os números de Liouville representam os primeiros exemplos de números transcendentes, e por outro as funções analíticas transcendentes foram fundamentais para demonstrar importantes resultados sobre transcendências, como as de e e π. Esse trabalho se divide em quatro partes principais: na primeira, estudamos o problema de encontrar uma função inteira transcendente f que leva o conjunto dos números de Liouville $\mathbb{L}$ nele mesmo; na segunda, motivados pelo problema anterior, estudamos funções inteiras transcendentes mapeando $\mathbb{Q}$ nele mesmo; na terceira, um problema que relaciona números de Liouville e frações contínuas; e na última, estudamos números de Liouville p-ádicos e funções analíticas p-ádicas.

Palavras-chave: números de Liouville, funções analíticas transcendentes, frações contínuas, números de Liouville p-ádicos, problema de Mahler.

Abstract

In this PhD thesis we study a series of problems related to Liouville numbers and transcendental analytic functions, these two themes are recurrent in transcendental number theory. For instance, Liouville numbers represent the first examples of transcendental numbers, and transcendental analytic functions were used to prove important results on transcendences, such as e and π. This work is divided into four parts. In the first one, we study the problem of finding a transcendental entire function which maps the set of Liouville numbers $\mathbb{L}$ into itself; in the second one, motivated by the previous problem, we study entire functions mapping $\mathbb{Q}$ into itself, in the third one, we study a problem that relates Liouville numbers and continued fractions, and in the latter we study p-adic Liouville numbers and p-adic analytic functions.

Key words: Liouville numbers, transcendental analytic functions, continued fractions, p-adic Liouville numbers, Mahler's problem.

Sumário

Introdução

No século XVIII, Euler definiu um *número transcendente* como sendo um número que não é raiz de nenhum polinômio não nulo com coeficientes racionais, ele chamou esses números de transcendentes, pois segundo ele: esses números "transcendem" as operações algébricas. Porém, apesar de acreditar na existência desses números, Euler nunca deu um exemplo. Acreditava-se que π e também e, a base do logaritmo neperiano, eram números transcendentes, contudo não existia ainda uma prova.

Foi apenas em 1844, que Liouville apresentou os primeiros exemplos de números transcendentes, esses números ficaram conhecidos como números de Liouville. O número $l = \sum_{n\geq 0} 10^{-n!}$ é um exemplo de número de Liouville, chamado constante de Liouville. Ainda no século XIX, Cantor introduziu o conceito de conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis. Com esses conceitos, Cantor mostrou que o conjunto dos números algébricos é enumerável, e que o conjunto dos números reais é não-enumerável, concluindo não só que existiam números transcendentes, como que esses eram a maioria dos números reais. Contudo, os únicos exemplos continuavam sendo os números de Liouville, que como veremos, formam um conjunto de medida nula. Isso era muito intrigante, pois quase todo número real é transcendente, e mesmo assim era difícil encontrar exemplos simples.

Diferente dos números transcendentes em geral, que são caracterizados por uma propriedade que não têm (ser raiz de um polinômio com coeficientes racionais), os números de Liouville são caracterizados por uma propriedade que eles têm, a saber, ser "muito bem aproximado" por números racionais, como veremos a frente. Essa diferença tornou os números de Liouville objetos de vários estudos. Afinal, agora uma forma de garantir transcendência de um número era provar que ele era de Liouville. Infelizmente os números e e π não são números de Liouville, e tiveram que esperar um pouco mais para que suas transcendências fossem verificadas.

Foi em 1882, que Lindemann provou que para todo z algébrico diferente de 0, temos que e^z é um número transcendente, em particular, e é transcendente. Além disso, usando a identidade de Euler ($e^{\pi i} = -1$), Lindemann também concluiu que π é transcendente, uma vez que $i = \sqrt{-1}$ é algébrico. Na demonstração de Lindemann é extremamente importante o fato de e^z ser uma função analítica ($e^z = \sum_{k \geq 0} z^k/k!$), e além disso, que os coeficientes $1/k!$ da sua série de Taylor possuam propriedades aritméticas interessantes (para mais detalhes ler [17]). A função e^z é um exemplo do que chamamos de funções transcendentes, basicamente uma função f é transcendente se não existe um polinômio em duas variáveis com coeficientes complexos $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ não nulo, tal que $P(z, f(z)) = 0$ para todo z no domínio de f.

Os trabalhos de Lindemann introduziram uma nova forma de provar transcendência: estudar a imagem por funções transcendentes de subconjuntos $S \subseteq \mathbb{C}$. Esse estudo ficou conhecido como *comportamento aritmético de funções transcendentes.* Mahler dedicou muitos de seus trabalhos ao estudo dos números de Liouville e ao comportamento aritmético de funções transcendentes. Um dos problemas propostos por ele, deixa claro esse duplo interesse, em [13] Mahler questionou se *existe uma função inteira transcendente que mapeia o conjunto dos números de Liouville nele mesmo.*

Esse questão foi atacada por muitos matemáticos, e nessa tese apresentamos um resultado na direção desse problema, provando que para um subconjunto dos números de Liouville, com um tipo especial de expansão em fração contínua, a resposta da questão de Mahler é afirmativa [10]. Essa classe especial de números de Liouville, chamada de números fortes de Liouville, foi definida por Erdös e estudada por outros matemáticos, como por exemplo Petruska [25] que provou que a soma e o produto desses números são ainda números de Liouville.

Em um trabalho sobre a questão de Mahler para números de Liouville, Marques e Moreira [18] provaram que se existir uma função inteira transcendente f tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\mathrm{den}(f(p/q)) = O(q^{\nu})$ para todo número racional irredutível p/q, com q suficientemente grande e $\nu > 0$ fixado, então a resposta da questão de Mahler é afirmativa (aqui se a/b é um número racional tal que $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$, então $\mathrm{den}(a/b) = b$). A ideia de construir tal função retoma os trabalhos de Maillet, onde ele prova que se $R(x)$ é uma função racional não constante com coeficientes racionais, então para todo número de Liouville ξ, $R(\xi)$ também é um número de Liouville.

A dificuldade de construir as funções propostas por Marques e Moreira nos levou a questionar a existência dessas funções. De fato, em um trabalho conjunto, Marques, Ramirez e Silva [20] mostraram que se colocarmos as condições dos coeficientes de f serem racionais e $\mathrm{den}(f(p/q)) = o(q)$, então essa função não existe. Nesse trabalho introduzimos a teoria de *expansões polinomiais de funções inteiras* para o estudo desse problema, com isso conseguimos mostrar que não existe função inteira transcendente f tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ com $\mathrm{den}(f(p/q)) = O(q)$. Além disso, as ideias desenvolvidas usando expansões polinomiais de funções inteiras se mostraram promissoras para o estudo do comportamento aritmético de funções transcendentes.

As relações entre números de Liouville e frações contínuas não só inspiraram a definição de números fortes de Liouville, como também uma série de trabalhos. Em um desses trabalhos Erdös e Mahler [5] provaram que se um número real ξ possui infinitas triplas de convergentes $A_{n-1}/B_{n-1}, A_n/B_n, A_{n+1}/B_{n+1}$ com o maior fator primo de $B_{n-1}B_nB_{n+1}$ limitado por $M > 0$ (fixo para todas as triplas), então ξ é um número de Liouville. Nesse mesmo trabalho, eles conjecturam que se o mesmo acontece para infinitos A_nB_n, então esse número também é um número de Liouville. Nessa tese provamos que se $(n_k)_{k\geq 0}$ é a sequência dos índices dos convergentes de ξ tal que $A_{n_j}B_{n_j}$ tem o maior fator primo limitado, para todo j, e $n_{j+1} - n_j = o(\log B_{n_j})$, então a conjectura é verdadeira [9].

No último capítulo dessa tese apresentamos alguns resultados sobre números de Liouville p-ádicos e funções p-ádicas. O objetivo é estudar questões análogas as já bem estudadas sobre números de Liouville, agora no caso dos p-ádicos. Em particular, mostramos um resultado análogo ao teorema de Maillet para polinômios p-ádicos. Mostramos também que se uma função inteira transcendente p-ádica leva $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ e $f(n) = O(n^{\nu})$ para algum $\nu > 0$ e para todo n natural, então f é um polinômio, logo uma construção análoga a que foi proposta por Marques e Moreira não é possível para p-ádicos (lembrando que nos p-ádicos os naturais são densos, e os números de Liouville p-ádicos são aproximados por números naturais). Por fim, construímos um subconjunto $\mathfrak{L}$ dos números de Liouville p-ádicos e uma função f tal que $f(\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{L} \cup \mathbb{N}$.

Dessa forma, essa tese trata, em suma, de problemas relacionados com números de Liouville e funções transcendentes. Esses problemas já foram amplamente estudados e cada um deles apresenta suas dificuldades específicas. Várias ferramentas foram usadas no decorrer dessa tese, como por exemplo, formas lineares em logaritmos, expansão polinomial de funções inteiras, e base de Mahler para funções contínuas p-ádicas. Porém, muitas perguntas continuam abertas e ainda há muito a ser feito, no decorrer dessa tese tentaremos tornar claro as ideias e dificuldades encontradas em cada problema.

Capítulo 1

Funções Transcendentes e Números de Liouville

Na primeira seção desse capítulo apresentaremos algumas definições e resultados preliminares que serão importantes para o teorema que trataremos na segunda seção, e também para os resultados apresentados nos demais capítulos. Essas preliminares são divididas em três subseções: *funções transcendentes*, *números de Liouville* e *frações contínuas*. Esses assuntos serão recorrentes no decorrer desse trabalho, principalmente os dois primeiros. O teorema que apresentaremos na segunda seção foi provado juntamente com Marques [10] e trata sobre funções transcendentes mapeando um subconjunto dos números de Liouville no conjunto dos números de Liouville.

1.1 Preliminares

Funções transcendentes

A definição de número transcendente é do século XVIII, devida a Euler. Ao defini-los, Euler disse que era um número que "transcendia" o poder das operações algébricas. Mais precisamente, se um número não é raiz de nenhum polinômio não nulo com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$, então dizemos que ele é transcendente sobre esse corpo. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, dizemos apenas que ζ é transcendente, deixando subentendido que é sobre $\mathbb{Q}$. Nessa direção, definimos o que é uma função transcendente.

Definição 1.1. *Dada uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, se existe $P \in \mathbb{C}[x, y]$, não nulo, tal que*

$$P(z, f(z)) = 0, \qquad \forall z \in \Omega,$$

então f é dita algébrica em Ω, caso contrário f é chamada de transcendente.

Exemplos de funções algébricas são todas as funções racionais, já as funções e^z, $\log z$, $\zeta(s) = \sum 1/n^s$ são exemplos de funções transcendentes. Um critério simples, porém muito importante, para a transcendência de *funções inteiras* (uma função que é analítica em todo o plano complexo) é dado pelo teorema [16]:

Teorema 1.2. *Um função inteira é algébrica se, e somente se, é um polinômio.*

Como as funções inteiras algébricas ficam completamente caracterizadas pelo teorema acima, surge um maior interesse em estudar as funções inteiras transcendentes. De fato, o estudo do comportamento aritmético de funções analíticas transcendentes tem sido relevante, por exemplo, em 1882, Lindemann provou que a função transcendente e^z assume valores transcendentes em todo algébrico não nulo, consequentemente $\log z$ assume valor transcendente em todo algébrico diferente de $0, 1$. Nesse resultado, Lindemann usa fortemente a série de potências da função e^z.

O estudo do comportamento aritmético de funções transcendentes foi tema de muitos trabalhos de Mahler, ele provou vários resultados sobre o tema, muitos deles estão no seu livro "*Lectures on Transcendental Numbers*" [12]. Mahler deixou também uma série de problemas propostos, alguns deles em seus livros e outros em artigos, como por exemplo, no trabalho "*Some Suggestions for Further Research*" [13], nessa tese trataremos alguns desses problemas. Outro tema de interesse de Mahler eram os números de Liouville, que vamos apresentar na próxima seção.

Números de Liouville

Os números de Liouville são historicamente importantes para a teoria transcendentes. Como foi dito anteriormente, a definição de números transcendentes é do século XVIII, porém, apenas no século XIX foi provada a existência de números transcendentes, quando em 1844, Liouville apresentou os primeiros exemplos.

Em resumo, Liouville apresento uma propriedade que era satisfeita por todos os números algébricos, e com isso, ele construiu números que não satisfazem essa propriedade. Logo esses números seriam necessariamente transcendentes.

Teorema 1.3 (Liouville)**.** *Seja α um número algébrico real de grau $n \geq 2$. Então existe uma constante positiva $c(\alpha)$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^n},$$

para todo racional irredutível p/q.

Esse resultado foi melhorado gradualmente por Thue (1909), Siegel (1921), Dyson (1947) e finalmente por Roth (1955), garantindo-lhe a Medalha Fields ao provar que podemos trocar n por $2+\varepsilon$ na desigualdade do Teorema de Liouville, para todo $\varepsilon > 0$ (veremos a frente que esse 2 é o melhor possível). Contudo, o Teorema de Liouville foi suficiente para ele construir os primeiros exemplos de números transcendentes.

Definição 1.4. *Um número real ξ é chamado de número de Liouville se existe uma sequência infinita de racionais (irredutíveis) $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ com $q_n > 1$ tal que*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

O conjunto dos números de Liouville é denotado por $\mathbb{L}$.

É possível mostrar que um número de Liouville é irracional e então pelo Teorema de Liouville, transcendente. Um exemplo clássico de número de Liouville, conhecido como constante de Liouville, é o número $l = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$. Segue também da definição de número de Liouville que

$$\mathbb{L} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\geq 2} \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}.$$

Assim, $\mathbb{L}$ é um conjunto G_δ-*denso* ou de *segunda categoria* no sentido de Baire, ou seja, topologicamente $\mathbb{L}$ é grande, pois seu complemento é um *conjunto magro*, embora seja possível mostrar que $\mathbb{L}$ tem medida de Lebesgue nula.

Existem muitos estudos sobre o conjunto $\mathbb{L}$ e suas propriedades, por exemplo, Erdös mostrou que todo número real pode ser escrito como soma, e todo real não nulo como produto de dois números de Liouville (essa propriedade pode ser vista como uma consequência direta de $\mathbb{L}$ ser G_δ-denso).

Uma observação importante sobre um número de Liouville ξ, é que para $n \geq 2$ temos que os racionais que aparecem na definição de ξ são também *convergentes* de sua *fração contínua* pelo Teorema de Legendre, que veremos na próxima seção. Erdös chamou de *números fortes de Liouville* um número de Liouville ξ tal que para todo k, existe um inteiro N tal que para $n \geq N$ temos que

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^k},$$

para todo convergente p_n/q_n da fração contínua de ξ. Também foi ele quem questionou *se soma e produto de números fortes de Liouville são números de Liouville.* Uma resposta afirmativa para essa pergunta foi dada por Petruska [25]. Para entender melhor os números fortes de Liouville, vamos apresentar agora um breve resumo da teoria das frações contínuas.

Frações contínuas

Dado um número real α, considere $\alpha_0 = \alpha$, $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$, sendo $\lfloor \cdot \rfloor$ a função parte inteira. Se $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$, tomamos $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se para algum n, $\alpha_n = a_n$, temos:

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

caso contrário, denotamos:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

Essa expressão é chamada de *representação por fração contínua* de α e a sequência $(a_i)_{i\geq 0}$ é dita *sequência dos quocientes parciais* de α. Note ainda que $\alpha = \alpha_0 = [a_0; \alpha_1] =$

$[a_0; a_1, \alpha_2] = \cdots = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$, α_n é denominado, por alguns autores, como *n-ésimo quociente completo* de α. Apresentaremos agora uma série de definições e resultados envolvendo frações contínuas.

Definição 1.5. *Seja α um número real tal que $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. O n-ésimo convergente da fração contínua de α é o número racional p_n/q_n, com $q_n > 1$ e $mdc(p_n, q_n) = 1$, dado por*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Proposição 1.6. *Seja $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ a sequência dos convergentes da fração contínua de $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Então as sequências (p_n) e (q_n) satisfazem as recorrências:*

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n; \qquad q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n,$$

para todo $n \geq 0$, com $p_0 = a_0, p_1 = a_0a_1 + 1, q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$. Além disso, valem as seguintes igualdades:

(i) $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n, \ \forall \ n \geq 0$*;*

(ii) $p_{n+2}q_n - p_nq_{n+2} = (-1)^n a_{n+2}, \ \forall \ n \geq 0.$

Teorema 1.7. *Para n par, os n-ésimos convergentes de α formam uma sequência estritamente crescente convergindo para α; para n ímpar, os n-ésimos convergentes de α formam uma sequência estritamente decrescente convergindo para α. Além disso,*

$$\frac{1}{2q_nq_{n+1}} < \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_nq_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

O teorema acima nos diz que os convergentes são "bons aproximantes" de α, no sentido de que $|\alpha - p_n/q_n| < q_n^{-2}$. O próximo teorema, nos diz que bons aproximantes são convergentes.

Teorema 1.8 (Legendre)**.** *Sejam p e q inteiros coprimos, $q > 0$, tais que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

então p/q é um convergente de α.

Para mais detalhes sobre frações contínuas e a demonstração desses resultados ver [23].

1.2 O problema de Mahler para números fortes de Liouville

Em seu livro de 1906, Maillet [14] estudou algumas propriedades aritméticas dos números de Liouville. Em particular, ele provou que dada uma função racional não constante com coeficientes racionais, temos que ela leva números de Liouville em números de Liouville. Motivado por esse fato, Mahler propôs em 1984, em seu artigo "*Some suggestions for further research*"[13], como o primeiro problema de uma lista de oito, a seguinte questão (esse mesmo problema também apareceu em outros textos, como por exemplo, no livro do Bugeaud [3] e no artigo do Waldschmidt [28]).

Questão 1.9. *Existe uma função inteira transcendente $f(z)$, tal que se ξ é um número de Liouville, então $f(\xi)$ também é?*

Recentemente, Marques, Moreira, Ramirez e Schleischitz [18, 19, 21] entre outros, construíram classes de números Liouville que são levados em números de Liouville por funções inteiras. Além disso, Marques e Moreira mostram que é suficiente garantir a existência de uma função inteira transcendente f, tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\mathrm{den}(f(p/q)) < q^{\nu}$, com $\nu > 0$, para ter uma resposta positiva para a questão de Mahler (estudaremos mais sobre a existência dessas funções no próximo capítulo). Aqui, consideramos $\mathcal{L}$ o conjunto dos números fortes de Liouville, para os quais temos que

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n},\ \forall n \geq 1,$$

onde p_n/q_n é o n-ésimo convergente da fração contínua de ξ. Note que $\mathcal{L}$ é um conjunto não enumerável, com efeito se definirmos $A = (a_n)_{n\geq 1}$ por, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $a_j \in \{A_{j-1}, A_{j-1}+1\}$, para $j \geq 4$, com $A_k = (\prod_{j=1}^{k}(a_j+1))^{k-3}$. Então o números $\xi_A := [0; a_1, a_2, \ldots] \in \mathcal{L}$. De fato, se $[0; a_1, \ldots, a_n] = p_n/q_n$, então temos por construção que $a_{n+1} \geq (\prod_{k=1}^{n}(a_k+1))^{n-2} > q_n^{n-2}$ (aqui, usamos o fato bem conhecido que $(a_1+1)\cdots(a_n+1) > q_n$). Daí segue que

$$0 < \left|\xi_A - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} < \frac{1}{q_n^n},$$

ou seja, $\xi_A \in \mathcal{L}$. Como $a_j \in \{A_{j-1}, A_{j-1}+1\}$, temos uma quantidade não enumerável de sequências A's e consequentemente de ξ_A's. Para o conjunto $\mathcal{L}$ provamos que:

Teorema 1.10. *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes $f(z)$, tais que $f(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{L}$.*

Demonstração: Seja $(s_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de inteiros positivos tais que, dado $k \geq 1$, a sequência s_n/s_{n-1}^k tende ao infinito quando n tende ao infinito. Seja $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$F(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{\alpha_k}{10^{k!}} z^k,$$

com $\alpha_k = 1$ se $k = s_j$ e $\alpha_k = 0$ caso contrário, claramente $F(z)$ é uma função inteira não polinomial, logo uma função transcendente, vamos mostrar que $F(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{L}$. Considere o truncamento,

$$F_n(z) := \sum_{k=0}^{s_n} \frac{\alpha_k}{10^{k!}} z^k.$$

Como $F(z)$ é fortemente lacunária, ou seja, possui bloco de 0 em seus coeficientes que crescem rapidamente, temos que $F_n(z)$ "aproxima muito bem" $F(z)$. Aqui queremos dizer que para todo $R > 0$ existe um n tal que

$$\|F - F_n\|_{\infty, B(R)} \leq \frac{1}{10^{\omega_n}},$$

com $\|\cdot\|_{\infty,B(R)}$ sendo a norma do supremo na bola de centro 0 e raio R, e $\omega_n/s_n^k! \to \infty$ para todo $k > 1$. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\|F - F_n\|_{\infty,B(R)} &\leq \sup_{z\in B(R)} \left| \sum_{k\geq s_{n+1}} \frac{\alpha_k}{10^{k!}} z^k \right| = \sum_{k\geq s_{n+1}} \frac{\alpha_k}{10^{k!}} R^k \\
&= \frac{R^{s_{n+1}}}{10^{s_{n+1}!}} \sum_{k\geq s_{n+1}} \frac{\alpha_k}{10^{k!-s_{n+1}!}} R^{k-s_{n+1}} \\
&\leq \frac{R^{s_{n+1}} e^R}{10^{s_{n+1}!}} \leq \frac{1}{10^{[s_{n+1}!-s_{n+1}(s_{n+1}-1)]}},
\end{aligned}$$

para todo n suficientemente grande, como $s_{n+1}/s_n^k \to \infty$ por hipótese, o resultado segue.

Agora seja p_k/q_k um convergente da fração contínua de ξ, temos que

$$\begin{aligned}\left|F(\xi) - F_n\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\right| &= \left|F(\xi) - F_n(\xi) + F_n(\xi) - F_n\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\right| \\ &\leq |F(\xi) - F_n(\xi)| + \left|F_n(\xi) - F_n\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\right| \\ &\leq \|F - F_n\|_{\infty, B(|\xi|)} + \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| c(\xi) \\ &< \frac{1}{10^{[s_{n+1}! - s_{n+1}(s_{n+1}-1)]}} + \frac{c(\xi)}{q_k q_{k+1}},\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema do Valor Médio e o Teorema 1.7 (a desigualdade restrita vale, pois ξ não é um número racional). Além disso, pela definição de $F(z)$, temos que $\mathrm{den}(F_n(p_k/q_k)) < 10^{s_n!} q_k^{s_n}$. Logo, é suficiente mostrar que exitem n e k, tais que

$$\frac{1}{10^{[s_{n+1}! - s_{n+1}(s_{n+1}-1)]}} + \frac{c(\xi)}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{(10^{s_n!} q_k^{s_n})^n}. \tag{1.1}$$

Aqui, vamos dividir em dois casos, dependendo do crescimento de q_k. Em geral q_k cresce muito rápido, pois é o denominador do convergente de uma fração contínua, como $\xi \in \mathcal{L}$, q_k cresce ainda mais rápido. Então seja $\phi_k = \phi_k(\xi)$ o menor inteiro positivo m tal que $q_k \leq 10^{m!}$, e considere os casos:

Caso I: quando $\phi_k \leq k^t$ para algum $t \geq 1$ e para todo $k \geq 1$.

Note que como $\xi \in \mathcal{L}$, temos que $q_{k+1} q_k > q_k^{k-1}$. De fato,

$$\frac{1}{q_{k+1} q_k} = \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \left|\xi - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right| + \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^{k-1}},$$

além disso, é consequência da desigualdade acima que $q_k > 2^{(k-4)!}$. Para ver isso, basta usar a desigualdade acima recursivamente, lembrando que $q_{k+1} > q_k$. Logo

$$q_{k+1} q_k > q_k^{k-1} = q_k^{ns_n} q_k^{k-(ns_n+1)} \geq q_k^{ns_n} 2^{(k-4)!(k-ns_n-1)},$$

queremos que

$$2^{(k-4)!(k-ns_n-1)} \geq 2c(\xi) \cdot 10^{ns_n!},$$

aplicando o logaritmo na base 2,

$$(k-4)!(k-ns_n-1) > 1 + \log_2 c(\xi) + ns_n! \log_2 10$$

e a desigualdade acima é satisfeita para todo $k \geq ns_n + 2$, se n é suficientemente grande.

Por outro lado, tomando $k = ns_n + 2$, temos que

$$q_k^{ns_n} \leq 10^{\phi_k! ns_n} \leq 10^{(ns_n+2)^t! ns_n} \leq 10^{s_n^{t+1}!},$$

onde a última desigualdade vale para todo n suficientemente grande. Logo, pela escolha da sequência $(s_n)_{n\geq 1}$, temos que

$$\frac{1}{10^{[s_{n+1}! - s_{n+1}(s_{n+1}-1)]}} < \frac{1}{2(10^{s_n!} q_k^{s_n})^n},$$

consequentemente, tomando $k = ns_n + 2$, temos que

$$\left| F(\xi) - F_n\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \right| < \frac{1}{(\mathrm{den}(\gamma_n))^n},$$

com $\gamma_n = F_n\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$, para o caso I.

Caso II: ϕ_k não é limitada por k^t, qualquer que seja $t \geq 1$.

Nesse caso, temos a existência de infinitos pares de inteiros (k_i, t_i), tais que

$$\phi_{k_i} \leq k_i^{t_i} \quad \text{e} \quad \phi_{k_i+1} > (k_i+1)^{t_i},$$

considere o menor n_i tal que $s_{n_i} > \phi_{k_i}$, temos que

$$\begin{aligned}
\left| F(\xi) - F_{n_i-1}\left(\frac{p_{k_i}}{q_{k_i}}\right) \right| &= \left| F(\xi) - F_{n_i-1}(\xi) + F_{n_i-1}(\xi) - F_{n_i-1}\left(\frac{p_{k_i}}{q_{k_i}}\right) \right| \\
&\leq |F(\xi) - F_{n_i-1}(\xi)| + \left| F_{n_i-1}(\xi) - F_{n_i-1}\left(\frac{p_{k_i}}{q_{k_i}}\right) \right| \\
&\leq \|F - F_{n_i-1}\|_{\infty, B(|\xi|)} + \left| \xi - \frac{p_{k_i}}{q_{k_i}} \right| c(\xi) \\
&< \frac{1}{10^{s_{n_i}! - s_{n_i}(s_{n_i}-1)}} + \frac{c(\xi)}{q_{k_i} q_{k_i+1}},
\end{aligned}$$

sendo assim, temos nesse caso é suficiente mostrar que

$$\frac{1}{10^{s_{n_i}! - s_{n_i}(s_{n_i}-1)}} + \frac{c(\xi)}{q_{k_i} q_{k_i+1}} < \frac{1}{(10^{s_{n_i-1}!} q_{k_i}^{s_{n_i-1}})^i}, \tag{1.2}$$

onde $\mathrm{den}(F_{n_i-1}(p_{k_i}/q_{k_i})) = 10^{s_{n_i-1}!} q_{k_i}^{s_{n_i-1}}$.

Por hipótese, $q_{k_i+1} \geq 10^{(k_i+1)^{t_i}!}$. Então fazendo algumas contas e usando o rápido crescimento do fatorial, temos que

$$(k_i+1)^{t_i}! \geq (k_i^{t_i} + t_i k_i^{t_i-1})! \geq i s_{n_i-1}! + k_i^{t_i}! i s_{n_i-1},$$

para todo i suficientemente grande, onde usamos que $k_i^{t_i} \geq \phi_{k_i} \geq s_{n_i-1}$. Portanto

$$q_{k_i}q_{k_i+1} \geq 2(10^{s_{n_i-1}!}q_{k_i}^{s_{n_i-1}})^i.$$

Por outro lado, novamente fazendo algumas contas, temos que para i suficientemente grande

$$s_{n_i}! - s_{n_i}(s_{n_i}-1) > (s_{n_i}-1)!is_{n_i-1} + is_{n_i-1}! \geq \phi_{k_i}!is_{n_i-1} + is_{n_i-1}!,$$

como $s_{n_i}! - s_{n_i}(s_{n_i}-1)$ é um número inteiro, temos que

$$10^{s_{n_i}!-s_{n_i}(s_{n_i}-1)} \geq 10(10^{\phi_{k_i}!is_{n_i-1}} \cdot 10^{is_{n_i-1}!}) \geq 10(q_{k_i}^{s_{n_i-1}}10^{s_{n_i-1}!})^i,$$

combinando as duas desigualdades, obtemos finalmente que

$$\left|F(\xi) - F_{n_i-1}\left(\frac{p_{k_i}}{q_{k_i}}\right)\right| < \frac{1}{(\mathrm{den}(\gamma_i))^i},$$

com $\gamma_i = F_{n_i-1}\left(\frac{p_{k_i}}{q_{k_i}}\right)$.

Agora, para provar que $F(\xi) \in \mathbb{L}$, é suficiente provar que $|F(\xi) - \gamma_n| > 0$ para infinitos n. Suponha, por contradição, que $|F(\xi) - \gamma_n| = 0$ para infinitos n's, como $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ é convergente, temos que $\gamma_n = p/q$ para todo n suficientemente grande. Multiplicando essa igualdade por $10^{s_{n_i-1}!}q_{k_i}^{s_{n_i-1}}q$, obtemos que q_{k_i} divide q para infinitos i's, o que é absurdo (no Caso I é análogo), logo $F(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{L}$. A existência de uma quantidade não enumerável de funções com essa propriedade é garantida pelo fato de existir uma quantidade não enumerável de sequências (s_n). Por exemplo, $s_n = a_n^{n!}$, onde $a_n \in \{2, 3\}$. $\square$

A função inteira $F(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ que construímos na demonstração acima é um exemplo do que chamamos de *função inteira fortemente lacunária*, ou seja, existem sequências $(s_j)_{j\geq 0}, (t_j)_{j\geq 0}$, com $s_j < t_j$, para todo j e $t_j/s_j \to \infty$, tais que para todo $s_j < k < t_j$ temos que $a_k = 0$. Em outras palavras, existem grandes blocos de 0 entre os coeficientes da série de potências de $F(z)$, Mahler mostrou que essas funções são sempre transcendentes, na verdade ele mostrou que basta que as sequência $(s_j)_{j\geq 0}, (t_j)_{j\geq 0}$ satisfaçam a condição $t_j - s_j \to \infty$ para que a função seja transcendente, nesse caso dizemos que a função é lacunária.

Funções lacunárias são exemplos de funções que são muito bem aproximadas pelos polinômios dados pelos truncamentos da série de potência, assim como os números de

Liouville são bem aproximados por números racionais. A ideia então foi combinar essas duas aproximações. Contudo, ainda é muito difícil dizer se esse tipo de construção é capaz de levar todos os números de Liouville em números de Liouville.

Capítulo 2

Funções Transcendentes e Números Racionais

Nosso principal objetivo nesse capítulo é estudar a seguinte questão, proposta por Marques e Moreira [18]:

Questão 2.1. *Existe uma função inteira transcendente* $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ *tal que* $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ *e*

$$den(f(p/q)) = O(q^{\nu}),$$

para todo p/q *racional irredutível com* q *suficientemente grande e* $\nu > 0$ *fixado?*

Essa questão está relacionada ao problema de Mahler para números de Liouville que discutimos no capítulo anterior. De fato, Marques e Moreira [18] mostraram que se a resposta dessa questão for afirmativa, então essa mesma função leva números de Liouville em números de Liouville. Essa questão já foi estudada para algumas classes de funções inteiras com coeficientes racionais (ver [20, 22]). Em particular, Marques, Ramirez e Silva mostraram que não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ (onde $\mathbb{Q}[[z]]$ é o espaço das funções analíticas com coeficientes em $\mathbb{Q}$), tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\mathrm{den}(f(p/q)) = o(q)$, ou seja, tal que $\mathrm{den}(f(p/q))/q \to 0$, quando $q \to \infty$, onde p/q é um número racional.

Uma das dificuldades em estudar o caso geral ($f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$) é que para valores racionais as somas parciais não assumem necessariamente valores em $\mathbb{Q}$. Nossa abordagem usando *expansões polinomiais de funções analíticas* nos permite contornar essa dificuldade, e além disso, representar $f(\alpha)$ como uma série finita para todo $\alpha \in S \subseteq \mathbb{Q}$ (para um S adequado). De fato, essa teoria se mostrou promissora no estudo do comportamento aritmético de funções transcendentes. Como consequência da introdução dessa teoria no nosso estudo, nós conseguimos melhorar o resultado de Marques, Ramirez e Silva, como afirma o teorema:

Teorema 2.2. *Não existe função inteira transcendente* $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ *tal que* $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ *e*

$$den(f(p/q)) = O(q),$$

para todo número racional irredutível p/q*, com* q *suficientemente grande.*

Ou seja, não existem funções inteiras transcendentes $f(z)$ com $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e uma constante $C > 0$ tais que $\text{den}(f(p/q))/q < C$, para todo p/q racional, com q suficientemente grande. No final do capítulo, discutiremos as dificuldades do caso $\nu > 1$.

2.1 Expansões polinomiais de funções inteiras

Nessa seção apresentaremos a teoria de expansões polinomiais de funções inteiras, com o objetivo de introduzir um conjunto de polinômios $\Phi = \{\varphi_n(z)\}_{n\geq 0}$ tal que para toda função inteira $f(z)$ temos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

quando o conjunto Φ for escolhido de maneira adequada, essa representação terá algumas consequências para o estudo de funções inteiras mapeando $\mathbb{Q}$ nele mesmo, mas para garantir essa representação começaremos introduzindo alguns conceitos preliminares.

Preliminares

Seja $\mathcal{B}$ o espaço vetorial complexo de todos os polinômios, com a topologia da convergência uniforme sobre todos os subconjuntos compactos de uma região simplesmente conexa Ω. O completamento de $\mathcal{B}$ é então o espaço $\mathcal{U}(\Omega)$ de todas as funções f que são analíticas sobre Ω. Seja $\Phi = \{\varphi_n(z)\}_{n\geq 0}$ uma sequência de polinômios que formam uma base de $\mathcal{B}$, em outras palavras, qualquer $p(z) \in \mathcal{B}$ tem uma única representação como uma soma finita $p(x) = \sum c_n \varphi_n(x)$. Frequentemente o conjunto Φ é dito um conjunto básico de polinômios. Então toda $f(z) \in \mathcal{U}(\Omega)$ é o limite em n de uma sequência de somas finitas em k da forma $\sum a_{k,n}\varphi_k(z)$.

Em geral, isso não significa que existem números c_n tais que $f(z) = \sum c_n\varphi_n(z)$ como uma série convergente. Porém, podemos associar uma série formal a uma função analítica da seguinte forma: como Φ é uma base de $\mathcal{B}$, existe uma única matriz infinita $\Pi = [\pi_{i,j}]$, com linhas finitas (isto é, cada linha tem apenas um número finito de coeficientes não nulos), tal que

$$z^k = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{k,i}\varphi_i(z), \qquad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{2.2}$$

Suponha que Ω contém a origem, seja f uma função analítica na origem, e escreva

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k,$$

se nós usarmos (2.2) na expansão acima, temos que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{k,i}\varphi_i(z),$$

ou

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(z), \tag{2.3}$$

com

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k,n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{2.4}$$

A expansão (2.3) com coeficientes (2.4) é chamada série básica, introduzida por J. M. Whittaker [31], e estudada com mais detalhes por ele em [32] e pelos seus alunos, entre eles, Eweida em [6] e Makar em [15]. Os resultados clássicos nessa teoria são do tipo: ao conjunto básico $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ nós associamos dois números reais ω (a *ordem* de Φ) e γ (o *tipo* de Φ); então toda função inteira de *ordem* menor que $1/\omega$, ou de ordem $1/\omega$ e *tipo* menor que $1/\gamma$ é representada pela série básica (2.3) com coeficientes (2.4); e em geral funções de ordem maior não são representadas, definiremos agora a ordem e o tipo de um conjunto básico e de uma função inteira.

Seja N_n o número de coeficiente π_{ni} não nulos na representação (2.2), se N_n satisfaz a condição $N_n^{1/n} \to 1$ quando $n \to \infty$, então o conjunto Φ é chamado de *conjunto de*

Cannon. Considere

$$\omega_n(R) = \sum_i |\pi_{ni}| M_i(R),$$

com $M_i(R)$ o módulo máximo de $\varphi_i(z)$ em $|z| < R$. Whittaker [31] definiu a ordem ω e o tipo γ de um conjunto básico de Cannon da seguinte forma:

$$\omega = \lim_{R \to \infty} \omega(R),$$

com

$$\omega(R) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \omega_n(R)}{n \log n},$$

e se $0 < \omega < \infty$,

$$\gamma = \lim_{R \to \infty} \gamma(R),$$

com

$$\gamma(R) = \limsup_{n \to \infty} \frac{(\omega_n(R))^{\frac{1}{n\omega}} e}{n\omega}.$$

Além disso, ele mostrou que um conjunto básico de Cannon de ordem ω e tipo γ representa, em todo o plano complexo, toda função inteira f com:

1. ordem de f menor que $1/\omega$,
2. ordem de f igual a $1/\omega$ e tipo menor que $1/\gamma$.

Lembramos que a *ordem* (no infinito) de uma função inteira $f(z)$ é definida usando o limite superior:

$$\rho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log(\log \|f\|_{\infty, B_r})}{\log r},$$

com B_r sendo o disco de raio r e $\|f\|_{\infty, B_r}$ denotando a norma do supremo de $f(z)$ sobre B_r. A ordem é um número real não negativo ou infinita. Em outras palavras, a ordem de $f(z)$ é o ínfimo de todos os m tais que $f(z) = O(\exp(|z|^m))$ quando $z \to \infty$. Se $0 < \rho < \infty$, nós podemos definir o *tipo*:

$$\sigma = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \|f\|_{\infty, B_r}}{r^\rho},$$

se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

então a ordem e o tipo de f são dados por

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{-\log|a_n|},$$

e

$$(e\rho\sigma)^{1/\rho} = \limsup_{n\to\infty} n^{1/\rho}|a_n|^{1/n},$$

para mais detalhes sobre ordem e tipo de funções inteiras, ver [11].

Voltando ao nosso conjunto básico Φ, temos que no caso em que ele satisfaz a condição

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n\log n} = 0, \tag{2.5}$$

com $D(n)$ o grau do polinômio de maior grau na representação de z^n em (2.2), temos que $\omega(R)$ é o mesmo para todo $R > 0$, seja ele finito ou infinito, e ele é precisamente a ordem ω do conjunto básico [6, Theorem 1] (note que se Φ satisfaz (2.5) então Φ é um conjunto básico de Cannon). Além disso, a ordem de um conjunto básico satisfazendo (2.5) é dada por [33, Theorem I]

$$\omega = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\max_{ij}\{|\pi_{ni}||p_{ij}|\})}{n\log n}. \tag{2.6}$$

Whittaker [30] chamou de *conjunto simples* a um conjunto básico $\Phi = \{\varphi_n(z)\}_{n\geq 0}$ tal que o grau de $\varphi_n(z)$ é n. Ele provou, nesse mesmo artigo, o seguinte resultado sobre esses conjuntos simples, que será muito importante na demonstração do nosso teorema, para mais detalhes sobre expansão polinomial de funções inteiras, ver também [15, 29].

Teorema 2.3 (Teorema de Whittaker). *Seja $\Phi = \{\varphi_n(z)\}_{n\geq 0}$ um conjunto simples de polinômios com*

$$\varphi_i(z) = p_{i,0+}p_{i,1}z + \cdots + p_{i,i-1}z^{i-1} + z^i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.7}$$

tal que todos os coeficientes satisfazem a desigualdade

$$|p_{ij}| \leq L,$$

para algum $L > 0$ e seja $f(z)$ uma função regular em $|z| < \rho$, onde $\rho > 1 + L$. Então a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(z),$$

converge absolutamente para $f(z)$ em $|z| < \rho$.

Φ_S-representação

Usando os resultados de Whittaker sobre expansão polinomial de funções inteiras, iremos construir um conjunto básico de polinômios $\Phi = \{\varphi_n(z)\}_{n\geq 0}$, com certas propriedades aritméticas, e provar que qualquer função inteira pode ser representada (em todo o plano complexo) como uma série de polinômios de Φ, em outras palavras, vamos construir um conjunto básico de polinômios Φ de ordem 0. Nosso objetivo é que as propriedades aritméticas dos polinômios de Φ nos ajude a estudar propriedades aritméticas das funções inteiras (em especial, funções transcendentes).

Consideremos um conjunto $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ e definamos os polinômios $\{\varphi_n(z)\}_{n\geq 0}$ tais que o grau de $\varphi_n(z)$ é n, $\varphi_n(\alpha_n) = 1$ e $\varphi_n(\alpha_k) = 0$ para todo $0 \leq k < n$. Mais precisamente, $\varphi_0(z) \equiv 1$, e para $n \geq 1$,

$$\varphi_n(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_k)},$$

quando S é um conjunto finito com n elementos, $\alpha_k = 0$ para todo $k > n$, por definição. Note que o conjunto $\Phi_S = \{\varphi_n(z)\}_{n\geq 0}$ dos polinômios associados à S é um conjunto básico, diremos que Φ_S é o *conjunto básico associado* à S. Provaremos nesse capítulo utilizando a teoria de Whittaker o seguinte teorema, que terá implicações no estudo do comportamento aritméticos de funções inteiras

Teorema 2.4 (Teorema de Φ-representação). *Seja $S = \{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots\}$ o conjunto formado pelo 0 e os inversos dos números inteiros, assim ordenados. Então Φ_S representa em todo o plano complexo, de maneira única, qualquer função inteira. Em outras palavras, se f é uma função inteira, então existem e são únicos os $c_0, c_1, \ldots$ em $\mathbb{C}$ tais que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.8}$$

Diremos que (2.8) é a Φ_S-*representação* de $f(z)$. Será importante para nós, encontrar os coeficientes c_n da Φ_S-*representação* de função inteira dada, eles guardam informações sobre o crescimento da função $f(z)$.

Fórmula de inversão

Dado um conjunto $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{C}$, vimos como associar a ele um conjunto básico de polinômios Φ_S. Antes de provar o Teorema 2.6, iremos mostrar que podemos associar ao conjunto Φ_S uma *fórmula de inversão*, que nos permite recuperar os coeficientes c_n na representação (2.8), isso será fundamental na demonstração do nosso teorema principal.

Lema 2.5 (Fórmula de Inversão)**.** *Sejam $f(z)$ uma função inteira e $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{C}$. Se*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z), \qquad c_n \in \mathbb{C},$$

é sua Φ_S-representação, então

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \psi_{n,n-k} f(\alpha_k), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.9}$$

com $\psi_{n,0} = 1$ e

$$\psi_{n,k} = -\sum_{j=1}^{k} \varphi_{n-j}(\alpha_n)\, \psi_{n-j,k-j}, \tag{2.10}$$

para $1 \le k \le n$.

Demonstração: Pela definição dos polinômios $\varphi_n(z)$ de Φ_S temos que $c_0 = f(\alpha_0) = \psi_{0,0} f(\alpha_0)$. Vamos provar por indução em n, para isso assuma que (2.9) vale para todo $0 \le k \le n-1$. Daí segue que

$$f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(\alpha_n),$$

logo

$$\begin{aligned} c_n &= f(\alpha_n) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(\alpha_n) \\ &= f(\alpha_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(\alpha_n) \sum_{j=0}^{k} \psi_{k,k-j} f(\alpha_j), \end{aligned}$$

reordenando o somatório, encontramos

$$c_n = f(\alpha_n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \left(-\sum_{j=k}^{n-1} \varphi_j(\alpha_n)\, \psi_{j,j-k} \right),$$

segue que

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \psi_{n,n-k} f(\alpha_k), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

com $\psi_{n,0} = 1$ e

$$\psi_{n,n-k} = -\sum_{j=k}^{n-1} \varphi_j(\alpha_n)\, \psi_{j,j-k},$$

para $0 \le k \le n-1$, ou seja,

$$\psi_{n,k} = -\sum_{j=1}^{k} \varphi_{n-j}(\alpha_n)\, \psi_{n-j,k-j},$$

para $1 \le k \le n$. □

Considere novamente o conjunto $S = \{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots\}$ formado pelo 0 e os inverso dos números inteiros, assim ordenados. Vamos calcular os coeficientes $\psi_{n,k}$ da fórmula de inversão associada ao conjunto básico de polinômios Φ_S. Por definição, temos que $\Phi_S = \{\varphi_n\}_{n\ge 0}$, onde $\varphi_0(z) \equiv 1$, $\varphi_1(z) = z$,

$$\varphi_{2n}(z) = \frac{z\left(z - \frac{1}{n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right)}{\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)}, \tag{2.11}$$

e

$$\varphi_{2n+1}(z) = \frac{z \prod_{k=1}^{n} \left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right)}, \tag{2.12}$$

para $n > 0$.

Note que

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2(n-1)}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{k}\right)\left(\frac{n+k}{k}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2(n-1)}} \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2(n-1)}} \binom{2n-1}{n},
\end{aligned}$$

logo podemos reescrever os polinômios $\varphi_i(z)$, obtendo

$$\varphi_{2n}(z) = (-1)^{n-1} \frac{n^{2n}}{2} \binom{2n-1}{n}^{-1} z \left(z - \frac{1}{n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right), \tag{2.13}$$

e

$$\varphi_{2n+1}(z) = (-1)^n (n+1)^{2n+1} \binom{2n+1}{n}^{-1} z \prod_{k=1}^{n} \left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right), \tag{2.14}$$

com $n > 0$.

Para determinar os coeficientes $\psi_{n,k}$ da fórmula de inversão, precisamos calcular $\varphi_k(\alpha_n)$, com $\varphi_k \in \Phi_S$ e $\alpha_n \in S$. Para isso, lembramos que pela definição de $\varphi_i(z)$, temos que para todo $m \in \mathbb{N}$ os racionais $\pm 1/m$ anulam todas as $\varphi_i(z)$ a menos de uma quantidade finita delas, mais precisamente $\varphi_i(1/m) = 0$ se $m < i/2$ e $\varphi_i(-1/m) = 0$ se $m < (i-1)/2$.

Agora, se $m \geq n+1$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{2n+1}\left(\pm\frac{1}{m}\right) &= (-1)^n (n+1)^{2n+1} \frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!} \left(\pm\frac{1}{m}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{k^2}\right) \\ &= \pm \left(\frac{n+1}{m}\right)^{2n+1} \frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{m-k}{k}\right)\left(\frac{m+k}{k}\right) \\ &= \pm \left(\frac{n+1}{m}\right)^{2n+1} \frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!} \frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!} \frac{(m+n)!}{n!m!} \\ &= \pm \left(\frac{n+1}{m}\right)^{2n+2} \binom{m+n}{2n+1}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $\binom{q}{p}$ é o binomial q tomados p. Analogamente, mostramos que

$$\varphi_{2n}\left(\pm\frac{1}{m}\right) = \mp \left(\frac{n}{m}\right)^{2n+1} \left(\frac{m \mp n}{m+n}\right) \binom{m+n}{2n}, \tag{2.16}$$

por fim, temos que $\varphi_{2n}(-1/n) = \varphi_{2n+1}(1/(n+1)) = 1$.

Com essas informações, estamos em condição de calcular os coeficientes $\psi_{n,k}$ que aparecem na fórmula de inversão associada ao conjunto S. Ela será dada ainda como um somatório, mas agora utilizando as relações que encontramos acima. Com essa nova expressão seremos capazes de estudar melhor os coeficientes c_n da fórmula de inversão. Mais precisamente, temos que $\psi_{n,0} = 1$ e

$$\psi_{n,k} = -\sum_{j=1}^{k} \varphi_{n-j}(\alpha_n)\, \psi_{n-j,k-j},$$

para $1 \leq k \leq n$. Como $\alpha_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ para $n > 0$, então

$$\psi_{n,k} = -\sum_{j=1}^{k} \varphi_{n-j}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}\right) \psi_{n-j,k-j},$$

por (2.15) e (2.16), podemos reescrever

$$\psi_{n,k} = -\sum_{j=1}^{k} \left[(-1)^j \left(\frac{\lfloor \frac{n+1-j}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}\right)^{n+1-j} \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-j}{2} \rfloor}{n-j} \right] \psi_{n-j,k-j},$$

se n é par, maior que 0. Caso n seja ímpar, temos

$$\psi_{n,k} = -\sum_{j=1}^{k} \left[(-1)^j \left(\frac{\lfloor \frac{n+1-j}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right)^{n+1-j} \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-1-j}{2} \rfloor}{n-j} \right] \psi_{n-j,k-j}.$$

Prova do teorema de Φ-Representação 2.4

Pelo Teorema de Whittaker 2.3, para mostrar que Φ_S representa, em todo o plano complexo, qualquer função inteira, basta mostrar que se $\varphi_i(z) = p_{i0} + p_{i1}z + \cdots + p_{ii}z^i$, então existem uma constante $C > 1$ tal que $\left|\frac{p_{ij}}{p_{ii}}\right| < C$. De fato, se $f(z)$ é uma função inteira, então $f(z)$ é regular em todo o plano complexo. Logo, se $\left|\frac{p_{ij}}{p_{ii}}\right| < C$, então pelo Teorema de Whittaker, o conjunto $\{p_{i,i}^{-1}\varphi_i(z)\}$ representa, em todo o plano complexo, qualquer função inteira, ou seja, existem e são únicos os $c_0, c_1, \ldots$ em $\mathbb{C}$ tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_{n,n}^{-1} \varphi_n(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

e a existência da representação segue.

Dessa forma, note que

$$\frac{1}{p_{ii}}\varphi_i(z) = \begin{cases} z \prod_{k=1}^{n} \left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right), & \text{se } i = 2n+1,\ n \geq 0, \\ z\left(z - \frac{1}{n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right), & \text{se } i = 2n,\ n \geq 1. \end{cases} \tag{2.17}$$

Logo, é suficiente mostrar que os coeficientes de $\prod_{k=1}^{n} \left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right)$ são limitados para todo n. Então seja

$$\prod_{k=1}^{n} \left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right) = q_{n0} + q_{n2}z^2 + \cdots + q_{n2n-2}z^{2n-2} + z^{2n},$$

temos que

$$|q_{n2n-2}| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6},$$

além disso

$$\begin{aligned} |q_{n2n-2j}| &= \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_l \leq n} \frac{1}{(k_1 \cdots k_j)^2} \\ &\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_{l-1} \leq n} \frac{1}{(k_1 \cdots k_j)^2} \\ &< \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) |q_{n2n-2(j-1)}| < |q_{n2n-2(j-1)}|. \end{aligned}$$

Assim, temos que $\left|\frac{p_{ij}}{p_{ii}}\right| < \pi^2/6$, e pelo Teorema de Whittaker 2.3, concluímos que Φ_S representa, em todo plano complexo, qualquer função inteira. Para mostrar a unicidade dos coeficientes c_n, observamos que $c_0 = f(0)$, $c_1 = f(1) - c_0$, $c_2 = f(-1) - c_0 - c_1\varphi_1(-1)$, e assim sucessivamente, logo os coeficientes são unicamente determinados.

□

2.2 O teorema principal

Teorema 2.6. *Não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e*

$$den(f(p/q)) = O(q),$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande.

A ideia para a demonstração do nosso teorema principal é basicamente mostrar que, se $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ é uma função analítica, tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e

$$\mathrm{den}(f(p/q)) = O(q),$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande, então ou $f(z)$ é um polinômio, ou não é uma função inteira (lembrando que uma função inteira é algébrica se, e somente se, é um polinômio). Para isso, vamos mostrar que se $f(z)$ satisfaz as condições acima, então ou ela tem Φ_S-representação finita, ou sua Φ_S-representação não converge em todo o plano complexo (ela não é uma função inteira).

Note que os coeficientes $\psi_{n,k}$ em (2.9), dados em (2.10), não dependem da função $f(z)$, eles dependem apenas de S. O próximo lema nos dá informações sobre esses coeficientes.

Lema 2.7. *Seja $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$, então $\psi_{n,k} \in \mathbb{Q}$. Além disso,*

$$den(\psi_{n,k}) \,\Big|\, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^n.$$

Demonstração: Vimos que

$$\psi_{n,k} = -\sum_{j=1}^{k} \varphi_{n-j}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\right)\psi_{n-j,k-j},$$

vimos também que

$$\varphi_{n-j}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\right)=\left(\frac{\lfloor\frac{n+1-j}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\right)^{n+1-j}\varphi^*_{n-j}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\right),$$

onde

$$\varphi^*_{n-j}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\right)\in\mathbb{Z}.$$

Vamos então provar por indução em n. Se $n=0$, então $\psi_{0,0}=1$, logo o lema vale para $n=0$. Suponha que o lema seja verdadeiro para todo $\psi_{m,k}$, com $0\leq m\leq n-1$ e para todo $0\leq k\leq m$. Logo, para $j\geq 1$, temos que

$$\operatorname{den}(\psi_{n-j,k-j})\,\Bigg|\,\left\lfloor\frac{n-j+1}{2}\right\rfloor^{n-j},$$

ou seja, o numerador de $\varphi_{n-j}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\right)$ cancela o denominador de $\operatorname{den}(\psi_{n-j,k-j})$, em (2.2). Consequentemente

$$\operatorname{den}(\psi_{n,k})\,\Bigg|\,\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor^{n}.$$

□

Prova do teorema principal 2.6

Suponha que $f(z)$ é uma função inteira satisfazendo $f(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}$, $\operatorname{den}(f(p/q))=O(q)$, para todo $p/q\in\mathbb{Q}$, com q suficientemente grande. Pelo Teorema 2.4 $f(z)$ possui uma Φ_S-representação, ou seja, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(z)$. Além disso, pelo Lema 2.5, temos que

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\psi_{n,n-k}f(\alpha_k),\qquad n=0,1,2,3,\ldots,$$

onde $\alpha_k=\frac{(-1)^{k+1}}{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}$. Por hipótese existe uma contante $C>0$ tal que

$$\operatorname{den}\left(f\left(\frac{(-1)^{k+1}}{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}\right)\right)\leq C\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor,$$

e pelo Lema 2.7,

$$\operatorname{den}(\psi_{n,k})\,\Bigg|\,\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor^{n}.$$

Daí temos que, ou $c_n = 0$ para todo n suficientemente grande (e $f(z)$ é um polinômio), ou

$$|c_n| \geq \frac{1}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^n d_n},$$

com $d_n = \text{mmc}(1, 2, \ldots, C \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor)$. Porém, é uma consequência do Teorema do Número Primo que $d_{\lfloor Cn \rfloor} \sim 3^{C\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$ [1]. Portanto, concluímos que, ou $c_n = 0$ para n suficientemente grande, ou

$$|c_n| \geq \frac{1}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^n \rho^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}}, \tag{2.18}$$

com $\rho = 3^C$.

Por outro lado, temos que $f(z)$ é inteira, logo $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(R)$ é absolutamente convergente para todo $R > 0$, então

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n \varphi_n(R)|} = 0,$$

por (2.13) e (2.14), segue que

$$|c_n| \leq \frac{\binom{n}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^n (R-1)^n} < \frac{1}{\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \frac{R-1}{2}\right)^n}, \tag{2.19}$$

como (2.18) e (2.19) não podem ser simultaneamente verdadeiras para infinitos n, concluímos que $c_n = 0$ para todo n suficientemente grande, logo $f(z)$ é um polinômio, e consequentemente, não é uma função transcendente. □

Como dito anteriormente, a dificuldade no caso $\nu > 1$ é que a limitação inferior que encontramos para $|c_n|$, quando $c_n \neq 0$, não é suficiente para garantir que a série não converge em todo o plano complexo. Isso porque nesse caso teríamos que calcular o mínimo divisor comum entre n números inteiros no intervalo $[1, C\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor^{\nu}]$, o que não é mais da ordem de ρ^n, para algum ρ fixado.

Nesse caso existem duas possibilidades, a primeira é uma melhor estimativa para os $|c_n|$, uma vez que usamos apenas que cada um deles é maior do que o inverso do mínimo múltiplo comum de todos os denominadores dos números racionais que aparecem na fórmula de inversão, para isso é preciso estudar melhor a fórmula de inversão, em particular, os coeficientes da fórmula de inversão. Uma segunda possibilidade é mudar o conjunto $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ que tomamos para construir a nossa Φ_S-representação, é possível que para um conjunto onde os denominadores de α_n cresçam mais lentamente, a limitação dos $|c_n|$ seja melhor, porém essa mudança mudaria também os polinômios e consequentemente a fórmula de inversão.

Capítulo 3

O Problema de Erdös - Mahler sobre Frações Contínuas

Em 1939, Erdös e Mahler [5] estudaram algumas propriedades aritméticas da sequência dos convergentes $(A_n/B_n)_{n\geq 0}$ da fração contínua de um número real, objetos que definimos no Capítulo 1. Mais precisamente, eles estudaram convergentes de frações contínuas com denominador tendo o maior fator primo limitado. Por diversos fatores aritméticos, podemos esperar que esses denominadores cresçam rapidamente caso possuam fatores primos limitados. Erdös e Mahler acreditavam que esse crescimento estaria relacionado com boas aproximações para esse número real.

Considere n um número inteiro, seja $P(n)$ o maior fator primo dividindo n, Erdös e Mahler provaram o seguinte resultado:

Teorema 3.1 (Erdös, Mahler, 1939)**.** *O conjunto de todos os números reais* $0 < \xi < 1$*, para os quais existem infinitos índices* n *satisfazendo*

$$P(B_n) \leq \exp\left(\frac{\log B_n}{20 \log\log B_n}\right),$$

tem medida de Lebesgue nula.

Em outras palavras, Erdös e Mahler provaram que em geral o maior fator primo de B_n cresce mais rápido que $\log B_n/20 \log\log B_n$. Além disso, eles estudaram o caso onde existem infinitos convergentes com denominador tendo maior fator primo limitado, nesse caso provaram que:

Teorema 3.2 (Erdös, Mahler, 1939). *Suponha que exista uma quantidade infinita de índices $n = n_1, n_2, \ldots$, tais que para todo $i \geq 1$, os denominadores $B_{n_i-1}, B_{n_i}, B_{n_i+1}$ de três convergentes consecutivos de ξ tem o maior fator primo limitado por $M > 0$. Então ξ é um número de Liouville.*

Nesse mesmo trabalho eles disseram acreditar que se um número real ξ tivesse infinitos convergentes A_n/B_n com $P(A_nB_n) < M$ para infinitos n's, e para algum $M > 0$ fixado, então ξ era um número de Liouville. Foi em um trabalho de Fraenkel [8] que essa afirmação apareceu pela primeira vez com o nome de conjectura de Erdös-Mahler:

Conjectura 3.3 (Erdös-Mahler). *Sejam ξ um número real e $(A_n/B_n)_{n\geq 0}$ a sequência dos convergentes da fração contínua de ξ. Se $P(A_nB_n) < M$ para infinitos n's, e para algum $M > 0$ fixado, então ξ é um número de Liouville.*

Fraenkel escreveu uma série de artigos, entre eles [7, 8], nos quais ele continuava o estudo das propriedades aritméticas dos convergentes de uma fração contínua, abaixo apresentamos um dos resultados provados por Fraenkel:

Teorema 3.4 (Fraenkel, 1964). *Sejam $c > 1$ uma constante e (μ, ν) um ponto fixado, diferente de $(1, 1)$, no quadrado $0 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \nu \leq 1$. Sejam $\{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ e $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_t\}$ dois conjuntos finitos e disjuntos de primos maiores que 5, tais que se $\mu < 1$ e $\nu < 1$, então $(1-\nu)\log P_i/(1-\mu)\log Q_j$ é irracional para algum par $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq t$. Então existe um subconjunto denso dos Números de Liouville tal que cada número desse subconjunto possui infinitos convergentes A_n/B_n, com $A_n = A_n^* A_n'$, $B_n = B_n^* B_n'$, $mdc(A_n^*, A_n') = mdc(B_n^*, B_n') = 1$,*

$$A_n' = P_1^{\rho_1} \cdots P_s^{\rho_s}, \quad B_n' = Q_1^{\sigma_1} \cdots Q_t^{\sigma_t},$$

onde $\rho_1, \ldots, \rho_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_t$ são números inteiros não negativos, e A_n^*, B_n^* são inteiros satisfazendo

$$|A_n|^\mu \leq |A_n^*| < c|A_n|^\mu, \quad B_n^\nu \leq B_n^* < cB_n^\nu.$$

Em seus trabalhos Fraenkel utiliza uma generalização de um resultado devido a Roth. Roth provou em 1955, que para todo número algébrico α, a desigualdade $|\alpha - p/q| <$

$q^{-(2+\varepsilon)}$ tem apenas um números finito de soluções p/q racionais com p e q coprimos. Em 1957, seu aluno Ridout provou a seguinte generalização desse resultado [26]:

Teorema 3.5. *Seja $\xi \neq 0$ uma algébrico. Sejam $\{p_1, \ldots, p_s\}$, $\{q_1, \ldots, q_t\}$ conjuntos de números primos. Sejam μ, ν, δ, c números reais satisfazendo,*

$$0 \leq \mu \leq 1, \quad 0 \leq \nu \leq 1, \quad \delta > 0, c \geq 1.$$

Sejam p, q números inteiros da forma $p = p^*p'$, $q = q^*q'$, com

$$p' = p_1^{\rho_1} \cdots p_s^{\rho_s}, \quad q' = q_1^{\sigma_1} \cdots q_t^{\sigma_t}, \tag{3.1}$$

com $\rho_1, \ldots, \rho_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_t$ números inteiros não negativos, e p^*, q^* são inteiros satisfazendo

$$|p^*| \leq c|p|^{\mu}, \qquad 0 < q^* \leq cq^{\nu}. \tag{3.2}$$

Então a desigualdade

$$0 < |\xi - p/q| < q^{-(\mu+\nu+\delta)}$$

possui apenas um número finito de soluções $p = p^*p', q = q^*q'$ satisfazendo (3.1) *e* (3.2).

Mesmo depois do Teorema de Ridout e os trabalhos de Fraenkel a conjectura de Erdös-Mahler continua aberta, nesse trabalho daremos um resultado condicional na direção da conjectura, para isso utilizamos a teorias das formas lineares em logaritmos, que apresentaremos agora.

3.1 Formas lineares em logaritmos

Vamos começar com um resultado sobre transcendência provado independentemente pelo russo Gel'fond e o alemão Schneider em 1934 [17].

Teorema 3.6 (Gel'fond, Schneider, 1934)**.** *Sejam α, β números algébricos em $\mathbb{C}$, com $\alpha \neq 0, 1$ e $\beta \notin \mathbb{Q}$. Então α^β é um número transcendente.*

Aqui, $\alpha^\beta := e^{\beta \log \alpha}$, com $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ e $\log \alpha = \log |\alpha| + i \arg(\alpha)$. O argumento de α é determinado a menos que um múltiplo de 2π. Então, $\log \alpha$, e consequentemente α^β são polivalentes. O teorema vale para qualquer escolha de valor para $\arg(\alpha)$.

Dado um subanel R de $\mathbb{C}$ (ex., $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ou o anel dos números algébricos), nós dizemos que os números complexos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ são linearmente independentes sobre R, se a equação $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n = 0$ não tem solução $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n/\{(0, 0, \ldots, 0)\}$. O próximo resultado é uma consequência do Teorema de Gel'fond-Schneider.

Corolário 3.7. *Sejam α, β números algébricos em $\mathbb{C}$ diferentes de $0, 1$ tais que $\log \alpha$ e $\log \beta$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então para todos algébricos não nulos γ, δ em $\mathbb{C}$, temos que $\gamma \log \alpha + \delta \log \beta \neq 0$.*

Vamos agora considerar uma generalização desse resultado dada por Baker. O Teorema de Baker revolucionou sua área de estudo, tendo implicações em Equações Diofantinas, teoria dos números transcendentes, Aproximações Diofantinas entre outras áreas da teoria dos números, e rendeu-lhe a Medalha Fields.

Teorema 3.8 (A. Baker, 1966)**.** *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ números algébricos em $\mathbb{C}$ diferentes de $0, 1$, tais que, $\log \alpha_1, \log \alpha_2, \ldots \log \alpha_m$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então, para toda $(m+1)$-upla $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ em $(\overline{\mathbb{Q}})^{m+1}/\{(0, 0, \ldots, 0)\}$ (onde $\overline{\mathbb{Q}}$ é o fecho algébrico de $\mathbb{Q}$), temos*

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log \alpha_m \neq 0.$$

Para aplicações em problemas Diofantinos é importante que o resultado acima seja efetivo. Em outras palavras, não basta que a forma linear acima seja não nula, precisamos também de uma limitação inferior para o valor absoluto dessa forma linear. No caso especial, em que $\beta_0 = 0$ e $\beta_1, \ldots, \beta_m$ são números inteiros, temos que

Teorema 3.9. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ números algébricos em $\mathbb{C}/\{0, 1\}$. Além disso, sejam $\beta_1, \ldots, \beta_m$ números inteiros tais que*

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log \alpha_m \neq 0.$$

Então

$$|\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log \alpha_m| \geq (eB)^{-C},$$

onde $B := \max(|\beta_1|, \ldots, |\beta_m|)$ e C é uma constante efetivamente computável dependendo apenas de m e dos números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Uma versão mais adequada para as aplicações que faremos é dada aplicando a exponencial na forma linear do Teorema de Baker. Abaixo, temos uma versão sem logaritmos, onde a constante C é explicitada, para isso, lembramos que a *altura* de um número racional $a = x/y$, com $x, y \in \mathbb{Z}$ coprimos, é definida como $H(a) := \max(|x|, |y|)$.

Teorema 3.10 (Matveev [24], 2000). *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ números racionais não nulos e sejam $b_1, \ldots, b_m$ números inteiros tais que*

$$a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_m^{b_m} \neq 1.$$

Então

$$|a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_m^{b_m} - 1| \geq (eB)^{-C},$$

com $B := \max(|b_1|, \ldots, |b_m|)$ e

$$C = \frac{1}{2} e m^{9/2} 30^{m+3} \prod_{j=1}^{m} \max(1, \log H(a_j)).$$

3.2 Sobre o problema de Erdös - Mahler

Nosso resultado sobre o problema de Erdös e Mahler diz que, sobre certas condições na distância entre os índices dos convergentes A_n/B_n tais que $P(A_n B_n) < M$, a conjectura de Erdös e Mahler é verdadeira, essa condições aparecem ao aplicar formas lineares em logaritmos ao problema, mais precisamente provaremos nessa seção o seguinte teorema [9].

Teorema 3.11. *Suponha que exista uma quantidade infinita de índices $n = n_1, n_2, \ldots$, tais que para todo $i \geq 1$ temos que $P(A_{n_i} B_{n_i}) < M$, para algum $M > 0$, onde $(A_n/B_n)_{n \geq 0}$ é a sequência dos convergentes de ξ. Se $n_{j+1} - n_j = o(\log B_{n_j})$, para todo j suficientemente grande, então ξ é um número de Liouville.*

Demonstração: Seja $(n_j)_{j \geq 1}$ a sequência como no enunciado do teorema, então para todo j temos que todos os fatores primos de $A_{n_j} B_{n_j}$ pertencem a um conjunto finito, digamos $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, pois $P(A_{n_j} B_{n_j}) < M$ para todo $j \geq 1$. Vamos mostrar que, nas hipóteses do teorema, existe uma constante positiva c dependendo apenas de k e dos p_i, tais que

$$\log B_{n_{j+1}} \geq B_{n_j}^c, \tag{3.3}$$

para todo j suficientemente grande.

Primeiramente, observamos que $P(A_nB_nA_{n+1}B_{n+1}) \to \infty$, quando $n \to \infty$. De fato, da relação $|A_nB_{n+1} - A_{n+1}B_n| = 1$ que apresentamos no Capítulo 1, temos que

$$\left|\frac{A_nB_{n+1}}{A_{n+1}B_n} - 1\right| = \frac{1}{|A_{n+1}B_n|}.$$

Suponha que exista uma subsequência $(n_j)_{j\geq 1}$ tal que $P(A_{n_j}B_{n_j}A_{n_j+1}B_{n_j+1}) < M$, para todo $j \geq 1$, onde $M > 0$ é uma constante. Então existe um conjunto finito de números primos $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ tal que todos os fatores primos de A_nB_{n+1} e $A_{n+1}B_n$ pertencem a S. Logo pelo Teorema de Ridout a igualdade acima só pode ter um número finito de soluções, mas ela vale para todos os convergentes, logo temos uma contradição em supor que $P(A_{n_j}B_{n_j}A_{n_j+1}B_{n_j+1}) < M$ para todo $j \geq 1$, ou seja, $P(A_nB_nA_{n+1}B_{n+1}) \to \infty$, quando $n \to \infty$.

Consequentemente, podemos supor que $n_{j+1} > n_j + 1$, então A_{n_j}/B_{n_j} e A_{n_j+1}/B_{n_j+1} são convergentes da fração contínua de $A_{n_{j+1}}B_{n_{j+1}}$. Em particular, temos que

$$0 < \frac{1}{2B_{n_j}B_{n_j+1}} < \left|\frac{A_{n_{j+1}}}{B_{n_{j+1}}} - \frac{A_{n_j}}{B_{n_j}}\right| < \frac{1}{B_{n_j}B_{n_j+1}}.$$

Multiplicando por $B_{n_j}/|A_{n_j}|$, obtemos

$$0 < \left|\frac{A_{n_{j+1}}B_{n_j}}{B_{n_{j+1}}A_{n_j}} - 1\right| < \frac{1}{B_{n_j+1}|A_{n_j}|}. \tag{3.4}$$

Por hipótese, podemos escrever

$$\frac{A_{n_{j+1}}B_{n_j}}{B_{n_{j+1}}A_{n_j}} = p_1^{\beta_1^{(j)}} \cdots p_k^{\beta_k^{(j)}},$$

com $\beta_i^{(j)} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$0 < |p_1^{\beta_1^{(j)}} \cdots p_k^{\beta_k^{(j)}} - 1| < \frac{1}{B_{n_j+1}|A_{n_j}|}.$$

Aplicando o Teorema de Matveev, temos que

$$|p_1^{\beta_1^{(j)}} \cdots p_k^{\beta_k^{(j)}} - 1| \geq (eB)^{-c'} \tag{3.5}$$

onde $c' = \frac{1}{2}ek^{9/2}30^{k+2}(p_1 \cdots p_k)$ e $B = B_j = \max(|\beta_1^{(j)}|, \ldots, |\beta_k^{(j)}|)$. Combinando (3.4) e (3.5) obtemos,

$$B > B_{n_j+1}^c |A_{n_j}|^c / e, \tag{3.6}$$

com $c = 1/c'$. Suponha que $B = |\beta_{l(j)}^{(j)}|$, para algum $1 \leq l(j) \leq k$. Então,

$$B = |\beta_{l(j)}^{(j)}| \leq v_{p_{l(j)}}(A_{n_{j+1}} B_{n_{j+1}} A_{n_j} B_{n_j}) \leq \frac{5}{\log 2} \log B_{n_{j+1}}, \tag{3.7}$$

observando que a valorização p-ádica de um número inteiro m, $v_p(m)$, é limitada superiormente por $\log m / \log 2$ e que $|A_{n_{j+1}}| < (1 + |\xi|) B_{n_{j+1}}$ para todo j suficientemente grande. Por (3.6) e (3.7) temos que

$$\log B_{n_{j+1}} > B_{n_j+1}^c \frac{|A_{n_j}|^c \log 2}{5e} > B_{n_j}^c,$$

onde a última desigualdade vale, pois $|A_{n_j}|^c \log 2/(5e) > 1$ para todo j suficientemente grande (uma vez que $|A_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$), o que prova a desigualdade (3.3).

Para provar que ξ é um número de Liouville, é suficiente mostrar que dado um inteiro positivo m existe um inteiro positivo r tal que $B_{r+1} > B_r^m$ (pois sabemos que $0 < |\xi - A_r/B_r| < 1/(B_r B_{r+1})$). Suponha, por contradição, que $B_{r+1} \leq B_r^m$, para algum m fixado e todo $r > 0$ inteiro. Em particular, isso vale para todo r em $\{n_j, \ldots, n_{j+1}\}$. Então,

$$B_{n_{j+1}} < B_{n_{j+1}-1}^m, B_{n_{j+1}-1} < B_{n_{j+1}-2}^m, \ldots, B_{n_j+1} < B_{n_j}.$$

Aplicando essas desigualdades recursivamente, obtemos que $B_{n_{j+1}} < B_{n_j}^{m^{n_{j+1}-n_j}}$. Aplicando o logaritmo nessa última desigualdade, temos

$$\log B_{n_{j+1}} < m^{n_{j+1}-n_j} \log B_{n_j},$$

combinando com (3.3), obtemos que $B_{n_j}^c < m^{n_{j+1}-n_j} \log B_{n_j}$. Fazendo as devida manipulações algébricas, temos

$$\log m > \frac{c \log B_{n_j} - \log \log B_{n_j}}{n_{j+1} - n_j}.$$

Como $n_{j+1} - n_j = o(\log B_{n_j})$ por hipótese, o lado direito dessa desigualdade tende ao infinito quando $j \to \infty$, o que contradiz o fato de m ser fixado. Então concluímos que para todo inteiro positivo m podemos obter um r tal que $B_{r+1} > B_r^m$, logo ξ é um número de Liouville. $\square$

Observação 3.12. *Se usarmos o fato bem conhecido que para todo convergente B_n da fração contínua de um número real, temos que $B_n > F_n$, onde F_n é o n-ésimo número de Liouville. Temos que $B_n > \phi^{n-2}$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, logo nosso resultado diz que se $n_{j+1} = n_j + o(n_j)$ então a conjectura de Erdös-Mahler é verdadeira.*

Concluímos esse capítulo dizendo que acreditamos ser possível enfraquecer a hipótese $n_{j+1} - n_j = o(\log B_{n_j})$ usando generalizações do Teorema de Formas Lineares em Logaritmos, como por exemplo o Teorema dos Subespaços, ou assumindo a conjectura *abc*. Porém, tirar completamente as condições sobre o distanciamento desses convergentes parece um problema bastante difícil, e ainda não temos uma ideia clara de como atacar o caso geral da conjectura de Erdös-Mahler. Acreditamos ser importante estudar a existência números reais com os quocientes parciais limitados e infinitos convergentes A_n/B_n com $P(A_nB_n) < M$, se a conjectura de Mahler é verdadeira, então não devem existir tais números, porém essa questão permanece em aberto.

Capítulo 4

Sobre Números de Liouville p-ádicos

Nesse último capítulo continuaremos estudando problemas relacionados com números de Liouville, porém agora em um universo bastante diferente do conjunto dos números reais. Estamos interessados em estudar esses problemas no conjunto dos números p-ádicos. A ideia de estudar problemas análogos aos já bem estudados sobre números de Liouville surgiu quando percebemos que não existiam muitos resultados sobre os números de Liouville p-ádicos, apesar de a definição desses números datar de 1966.

Na primeira seção vamos introduzir o corpo dos números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$, o anel dos inteiros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ e o corpo $\mathbb{C}_p$, que é o completamento do fecho algébrico de $\mathbb{Q}_p$. Além disso, vamos falar sobre funções analíticas p-ádicas. Nas demais seções estudaremos problemas relacionados a imagem de números de Liouville p-ádicos por funções analíticas p-ádicas, em particular, veremos um resultado análogo ao teorema de Maillet sobre números de Liouville, para polinômios p-ádicos.

4.1 Alguns resultados da análise p-ádica

Seja a um número inteiro não nulo e p um número inteiro primo, a *valorização p-ádica* de a, denotada por $\upsilon_p(a)$, é definida como a maior potência de p que divide a. Se a/b é um número racional, com a e b coprimos, a valorização p-ádica $\upsilon_p(a/b)$ é dada por $\upsilon_p(a/b) = \upsilon_p(a) - \upsilon_p(b)$, temos também que $\upsilon_p(0) = \infty$, por definição.

Considere a função $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dada por $|a/b|_p = p^{-\upsilon_p(a/b)}$, para todo número racional a/b, com a e b coprimos. É possível mostrar que $|\cdot|_p$ define um valor absoluto sobre $\mathbb{Q}$, ou seja:

(i) $|x|_p \geq 0$, para todo número racional x, e $|x|_p = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(ii) $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ para quaisquer x e y em $\mathbb{Q}$;

(iii) $|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$.

Na verdade, é possível mostrar que $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, essa desigualdade, chamada de *desigualdade ultramétrica*, é uma consequência do fato que $\upsilon_p(x+y) \geq \min\{\upsilon_p(x), \upsilon_p(y)\}$. Note que essa desigualdade é mais forte que a desigualdade triangular.

Logo, podemos pensar em completar $\mathbb{Q}$ com respeito ao valor absoluto $|\cdot|_p$. Esse completamento será diferente de $\mathbb{Q}$, pois existem sequências de Cauchy no valor absoluto $|\cdot|_p$ que não convergem em $\mathbb{Q}$, por exemplo, a sequência $1, 1+p, 1+p+p^2, 1+p+p^2+p^3, \ldots$, é de Cauchy na norma p-ádica, mas não é convergente em $\mathbb{Q}$. Esse completamento é chamado de *corpo dos números p-ádicos*, e denotado por $\mathbb{Q}_p$. O subconjunto de $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ é chamado de *inteiros p-ádicos*, e assim como os inteiros racionais, os inteiros p-ádicos formam um anel.

Uma caracterização dos números p-ádicos, é que todo número p-ádico α pode ser escrito, de maneira única, como a série

$$\alpha = \sum_{k=m}^{\infty} a_k p^k,$$

com $0 \leq a_k \leq p-1$, para todo $k \geq m$, e m inteiros (note que m pode assumir valores negativos, como em uma série de Laurent). Nessa caracterização temos que α é um inteiro p-ádico se $m \geq 0$. Por fim, consideramos $\mathbb{C}_p$ como o completamento, com respeito a norma induzida, do fecho algébrico de $\mathbb{Q}_p$ (em analogia com $\mathbb{C}$). Temos que $\mathbb{Q}_p$ e $\mathbb{C}_p$ são exemplos do que chamamos de *corpos ultramétricos*, ou seja, corpos dotado de um valor absoluto que satisfaz a desigualdade ultramérica. O teorema abaixo apresenta uma série de propriedades do corpo $\mathbb{C}_p$, mas antes duas definições:

Definição 4.1. *O corpo das classes residuais de um corpo ultramétrico K, é o corpo*

$$k := B_0(1)/B_0(1^-) = \{x \in K : |x|_p \leq 1\}/\{x \in K : |x|_p < 1\}.$$

Em [27] vemos que o quociente acima é de fato um corpo, outra definição importante é a de *grupo de valores*:

Definição 4.2. *O grupo de valores de K é o subgrupo $|K^*| = \{|x|_p : x \neq 0 \in K\}$ do grupo multiplicativo dos números reais positivos.*

Com essas definições em mente, podemos caracterizar o corpo $\mathbb{C}_p$ [27]:

Teorema 4.3. *O completamento $\mathbb{C}_p$ do fecho algébrico de $\mathbb{Q}_p$ tem as seguintes propriedades:*

(i) *$\mathbb{C}_p$ é algebricamente fechado;*

(ii) *$\mathbb{C}_p$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}_p$;*

(iii) *$\mathbb{C}_p$ não é localmente compacto;*

(iv) *O corpo das classes residuais de $\mathbb{C}_p$ é o fecho algébrico do corpo contendo p elementos;*

(v) *O grupo de valores de $\mathbb{C}_p$ é $\{p^r : r \in \mathbb{Q}\}$.*

Definido o espaço, vamos aos nossos objetos de interesse. Como foi dito no início do capítulo, continuamos interessados em números de Liouville, porém agora p-ádicos. A primeira definição de *números de Liouville p-ádicos* data de 1966, em um trabalho de D. Clark [4] sobre convergência p-ádica para soluções de equações diferenciais lineares sobre o corpo dos p-ádicos. Em seu trabalho, Clark considerou a equação diferencial linear

$$xf'(x) - \lambda f(x) = \frac{1}{1-x},$$

em uma vizinhança da origem em $\mathbb{Z}_p$, com $\lambda \in \mathbb{Z}_p/\{0, 1, 2, \ldots\}$. Ele mostrou que essa equação tem uma única solução formal $f(x)$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\lambda)} x^n.$$

O raio R de convergência de uma série de potências p-ádica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sobre $\mathbb{C}_p$ pode ser calculado de forma análoga a uma série de potência sobre $\mathbb{C}$, ou seja, usando a fórmula de Hadamard. Temos então que o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, é dado por

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|_p^{1/n}}.$$

Consequentemente, o raio de convergência da série de potências $f(z)$ dada acima é $R = 0$ se, e somente se, $\limsup_{n\to\infty} |1/(n-\lambda)|_p^{1/n} = \infty$. Quando isso acontece, Clark disse que λ é um número de Liouville p-ádico. Note que, diferentemente dos números de Liouville, que são rapidamente aproximados por racionais, Clark definiu os números de Liouville p-ádicos como números que podem ser aproximados rapidamente por inteiros positivos no valor absoluto p-ádico (lembrando que os inteiros positivos são densos nos inteiros p-ádicos, com esse valor absoluto). Mais precisamente:

Definição 4.4. *Seja λ um inteiro p-ádico, dizemos que λ é um número de Liouville p-ádico se*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n-\lambda|_p} = 0.$$

Schikhof, no seu livro *Ultrametric Calculus* [27, Chaper 3], caracteriza os números de Liouville p-ádicos da seguinte forma:

Proposição 4.5. *Seja $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ e $\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ sua expansão p-ádica. Então λ é um número de Liouville p-ádico se, e somente se, existirem sequências $(s_j)_{j\geq 1}$ e $(t_j)_{j\geq 1}$, com $s_j < t_j$ para todo $j \geq 1$, tais que $t_j/p^{s_j} \to \infty$, quando $j \to \infty$ na topologia usual, e $a_{s_j} \neq 0$, $a_{s_j+1} = \cdots = a_{t_j-1} = 0$ e $a_{t_j} \neq 0$.*

O conjunto dos números de Liouville p-ádicos possui muitas das propriedades do conjunto dos números de Liouville, por exemplo: é um conjunto G_δ-denso; tem medida de Haar nula (em analogia a medida de Lebesgue); tem interseção vazia com os algébricos. De fato, é possível mostrar que se α é um inteiro p-ádico algébrico sobre $\mathbb{Q}$, então existe uma constante $c(\alpha)$ tal que $|n-\alpha|_p \geq c(\alpha)n^{-d}$ (um análogo do Teorema de Liouville). Porém, nesse trabalho será necessário uma definição um pouco mais parecida com a definição dada por Liouville. Para diferenciar, chamaremos esses números de *números de Liouville p-ádicos fracos*.

Definição 4.6. *Seja γ um inteiro p-ádico, dizemos que γ é um número de Liouville p-ádico fraco, se para todo $k > 0$, existir um inteiro positivo n_k tal que*

$$0 < |n_k - \gamma|_p < n_k^{-k}.$$

Claramente, o conjunto dos números de Liouville p-ádicos fracos possuem as propriedades acima citadas para os números de Liouville p-ádicos. Além disso, todo número de Liouville p-ádico, como é de se esperar, é um número de Liouville p-ádico fraco. Contudo, nem todo número de Liouville p-ádico fraco é um número de Liouville p-ádico, logo esse novo conjunto é maior que o definido por Clark. Por exemplo, o número $l_p = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n!}$ não é um número de Liouville p-ádico, uma vez que na topologia usual $\lim_{n\to\infty}(n+1)!/p^{n!} = 0$, mas é um Liouville p-ádico fraco, como veremos com a próxima proposição.

Proposição 4.7. *Seja $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ e $\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ sua expansão p-ádica. Então γ é um número de Liouville p-ádico fraco se, e somente se, existirem sequências $(s_j)_{j\geq 1}$ e $(t_j)_{j\geq 1}$, com $s_j < t_j$ para todo $j \geq 1$, tais que $t_j/s_j \to \infty$ na topologia usual, quando $j \to \infty$, e $a_{s_j} \neq 0$, $a_{s_j+1} = \cdots = a_{t_j-1} = 0$ e $a_{t_j} \neq 0$.*

Demonstração: Seja γ um número de Liouville p-ádico fraco e $k \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que existem s e t tais que, $t/s > k$, com $a_s \neq 0$, $a_{s+1} = \cdots = a_{t-1} = 0$ e $a_t \neq 0$. Como γ é um número de Liouville p-ádico fraco, existe um n_k tal que, $0 < |n_k - \gamma|_p < n_k^{-k}$, ou seja, os coeficientes de índice menor que $k \log_p n_k$ de n_k e γ são iguais. Porém, n_k tem no máximo $\log_p n_k$ coeficientes não nulos na sua expansão p-ádica, ou seja $a_{s+1} = \cdots = a_{t-1} = 0$, onde $s = \lfloor \log_p n_k \rfloor$ e $t = \lceil k \log_p n_k \rceil$.

Por outro lado, seja $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ com $\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} l_k p^k$. Suponha que existem sequências $(s_j)_{j\geq 1}$ e $(t_j)_{j\geq 1}$, com $s_j < t_j$ para todo $j \geq 1$, tais que $t_j/s_j \to \infty$, quando $j \to \infty$, e $a_{s_j} \neq 0$, $a_{s_j+1} = \cdots = a_{t_j-1} = 0$ e $a_{t_j} \neq 0$. Então,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} l_k p^k - \sum_{k=0}^{s_j} l_k p^k \right|_p = p^{-t_j} = (p^{s_j+1})^{\frac{-t_j}{s_j+1}} < \left(\sum_{k=0}^{s_j} l_k p^k \right)^{\frac{-t_j}{s_j+1}},$$

como $\frac{t_j}{s_j+1} \to \infty$, temos que γ é um número de Liouville p-ádico fraco. $\square$

Da proposição acima temos que, como dito anteriormente $l_p = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n!}$ é um número de Liouville p-ádico fraco, com efeito $\lim_{n\to\infty}(n+1)!/n! = \infty$.

Faremos agora uma breve introdução ao estudo de séries de potências sobre $\mathbb{C}_p$ (para maiores detalhes recomendamos ler [27]). Considere $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}_p$, como já foi dito anteriormente, a série $\sum a_n x^n$ converge para $|x|_p < R$, e diverge para $|x|_p > R$ (podendo convergir ou divergir para $|x|_p = R$), onde R é o raio de convergência, dado por $R = 1/(\limsup_{n\to\infty} |a_n|_p^{1/n})$.

Conceitos como limite e derivada são analogamente definidos sobre os p-ádicos. Em particular, se $f(x) = \sum a_n x^n$, então a derivada de $f(x)$ coincide com a derivada formal $\sum n a_n x^{n-1}$ para todo $|x|_p < R$. Vale citar que para as funções não analíticas p-ádicas coisas bem diferentes podem acontecer, por exemplo a função $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ que leva $a = \sum a_n p^n$ em $\sum a_n p^{2n}$ é uma função contínua, derivável, injetiva e com derivada identicamente nula (não valendo então, por exemplo, o Teorema do Valor Médio).

No contexto das funções analíticas, as funções p-ádicas são mais parecidas com as reais, essas tem derivada coincidindo com a derivada formal de uma série de potência, satisfazem a desigualdade de Lipschitz, são C^∞, além de satisfazerem o Princípio de Identidade para funções analíticas (ou seja, se uma função analítica p-ádica é nula em um conjunto com ponto de acumulação, então ela é identicamente nula), para mais detalhes ver [27].

Agora apresentaremos uma propriedade muito particular das funções p-ádicas. Seja $n > 0$ um número inteiro, considere a função $\binom{\cdot}{n} : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ que leva x em $\binom{x}{n}$, onde

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!},$$

é possível mostrar que $\binom{\cdot}{0}, \binom{\cdot}{1}, \ldots$, formam uma base ortonormal, chamada *base de Mahler*, para as funções contínuas sobre $\mathbb{Z}_p$ [27, Chaper 3]. Em outras palavras, temos que:

(I) Se $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ é uma função contínua. Então existem e são únicos os coeficientes $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}_p$, chamados *coeficientes de Mahler*, tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n},$$

com a série convergindo uniformemente e $||f||_\infty = \max_{n\geq 0}\{|a_n|_p\}$, essa série é chamada de *expansão de Mahler* de $f(x)$.

(II) Se $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}_p$ é uma sequência tendendo a 0, então $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ define uma função contínua $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$.

Além disso, temos que os coeficientes $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}_p$ na expansão de Mahler de $f(x)$ podem ser recuperados pela *fórmula de inversão de Mahler*:

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(j) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.1}$$

Note que as funções $\binom{\cdot}{0}, \binom{\cdot}{1}, \ldots,$ são polinômios, logo podem ser estendidas a $\mathbb{C}_p$. Observamos também que, assim como no Capítulo 2 dessa tese, essas funções tem propriedades aritméticas que serão úteis no estudo do comportamento aritmético das funções p-ádicas. Como estamos especialmente interessados em funções inteiras, precisamos relacionar a base de Mahler com essas funções, essa relação é dada pela seguinte proposição (ver [27]):

Proposição 4.8. *Sejam $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}_p$. Então temos as seguintes equivalências:*

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ converge para todo $x \in \mathbb{Q}_p$;

b) $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ é analítica sobre $\mathbb{C}_p$;

c) Para todo $r > 0$, $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p r^n = 0$.

4.2 Funções Analíticas e Números de Liouville p-ádico

Nessa seção apresentaremos alguns resultados sobre funções analíticas avaliadas em números de Liouville p-ádicos. Nosso objetivo é estudar as questões amplamente estudadas sobre os números de Liouville, agora no contexto dos p-ádicos. A primeira questão que estudaremos é o caso análogo do Teorema de Maillet para números de Liouville p-ádicos.

É bem conhecido que se λ é um número de Liouville p-ádico e n, m são números inteiros com $n > 0$, então $n\lambda + m$ também é um número de Liouville p-ádico [27]. Maillet provou que funções racionais não constantes com coeficientes racionais levam números de Liouville em números de Liouville, como números de Liouville p-ádicos são aproximados por inteiros positivos, podemos esperar que o mesmo vale para polinômios não constantes com coeficientes inteiros e coeficiente líder positivo. De fato, temos que:

Teorema 4.9. *Seja $f(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros e coeficiente líder positivo. Se γ é um número de Liouville p-ádico fraco, então $f(\gamma)$ também é um número de Liouville p-ádico fraco.*

Demonstração: Seja γ um número de Liouville p-ádico fraco, por definição existe uma sequência $(n_k)_{k\geq 1}$ tal que $0 < |n_k - \gamma|_p < n_k^{-k}$. Como $f(x)$ é um polinômio, temos que $f(x)$ satisfaz a condição de Lipschitz, ou seja

$$|f(n_k) - f(\gamma)|_p \leq c|n_k - \gamma|_p,$$

para algum $c > 0$. Por hipótese, $f(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros e coeficiente líder positivo, logo $f(n_k)$ é inteiro positivo para k suficientemente grande. Além disso

$$0 < f(n_k) < n_k^{d+1},$$

para k suficientemente grande, onde d é o grau de $f(x)$.

Consequentemente, temos que

$$|f(n_k) - f(\gamma)|_p \leq cn_k^{-k} < (n_k^{d+1})^{\frac{-k+1}{d+1}} < f(n_k)^{-\frac{k-1}{d+1}},$$

logo, resta mostrar que $|f(n_k) - f(\gamma)|_p > 0$, para infinitos k's. Porém, suponha que $|f(n_k) - f(\gamma)|_p = 0$ para infinitos k's, ou seja, $f(n_k) = f(\gamma)$ para infinitos k's, como $n_k \to \gamma$, temos que $f(x)$ é constante em um conjunto com ponto de acumulação, logo $f(x) \equiv f(\gamma)$, absurdo. Logo $f(\gamma)$ é um número de Liouville p-ádico. □

Observação 4.10. *Provamos o resultado para números de Liouville p-ádicos fracos. Porém, o mesmo resultado não é verdadeiro para números de Liouville p-ádicos, ou seja, existe um polinômio $p(x)$, de grau maior que 1, e um número de Liouville p-ádico λ, tal que $p(\lambda)$ não é um número de Liouville p-ádico.*

De fato, considere o polinômio $p(x) = x^2$. Para construir nosso número de Liouville p-ádico, p ímpar, considere a sequência definida por

$$t_0 = 1, t_1 = p, t_2 = 2p^p, \ldots, t_n = np^{t_{n-1}}, \ldots \qquad n \geq 1.$$

Seja $\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} p^{t_k}$, então pela Proposição 4.5 temos que λ é um número de Liouville p-ádico, com efeito, $t_{k+1}/(p^{t_k}) = (k+1) \to \infty$, quando $k \to \infty$. Vamos mostrar que $f(\lambda)$

não é um número de Liouville p-ádico. Para isso, considere a expansão p-adica de $f(\gamma)$, dada por $f(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n$, com $c_n = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j \varepsilon_{n-j}$, onde $\varepsilon_j = 1$, se $j = t_k$ para algum k, e $\varepsilon_j = 0$ caso contrário.

Vamos mostrar que $c_{2t_k} = c_{2t_{k+1}} = 1$ e $c_{t_k+t_{k+1}} = 2$, para k suficientemente grande. De fato, temos que

$$c_{2t_k} = \sum_{j=0}^{2t_k} \varepsilon_j \varepsilon_{2t_k - j},$$

onde as parcelas dessa soma são diferentes de 0 se, e somente se, $j = t_l$ e $2t_k - t_l = t_s$, com l e s menores que k (uma vez que, para k suficientemente grande $2t_k$ é menor que t_{k+1}). Porém, para $l < k$, temos que $2t_k - t_l > t_k$, logo $2t_k - t_l \neq t_s$. Consequentemente, $c_{2t_k} = 1$ para todo k suficientemente grande. Para $c_{t_k+t_{k+1}} = 2$ a demonstração é análoga. Como, para qualquer bloco de 0 $a_s \neq 0$, $a_{s+1} = \cdots = a_{t-1} = 0$ e $a_t \neq 0$, temos que

$$\frac{t}{p^s} \leq \max\left\{ \frac{2t_{k+1}}{p^{t_k+t_{k+1}}}, \frac{t_k + t_{k+1}}{p^{2t_k}} \right\} \leq 1,$$

para k suficientemente grande. Logo $f(\lambda)$ não é um número de Liouville p-ádico, mas é um número de Liouville p-ádico fraco, pelo que vimos no Teorema 4.9.

Observação 4.11. *Se $\omega \in 1 + p\mathbb{Z}$ é um número inteiro positivo e λ é um número de Liouville p-ádico, então ω^λ é um número de Liouville p-ádico fraco, onde*

$$\omega^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega - 1)^n \binom{\lambda}{n}.$$

Note que, na demonstração do Teorema 4.9 usamos fortemente o fato que $f(x)$ leva inteiros positivos em inteiros positivos limitados por uma ordem polinomial. Logo, caso exista uma função p-ádica inteira transcendente $f(x)$, tal que $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ e $f(n) \leq n^d$ para algum $d > 0$ fixado, $f(x)$ levaria números de Liouville p-ádicos fracos em números de Liouville p-ádicos fracos. Porém, o próximo resultado nos diz que tais funções não existem, mais precisamente temos que :

Teorema 4.12. *Seja $f(x)$ uma função inteira tal que $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ e $f(n) \leq n^d$, para algum $d > 0$ fixado, então $f(x)$ é um polinômio.*

Demonstração: Como $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, temos que os coeficientes de Mahler de $f(x)$ são números inteiros. Além disso, como $f(x)$ é uma função inteira, pela Proposição 4.8 temos que para qualquer $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|_p r^n = 0,$$

ou, equivalentemente, $v_p(a_n) - kn \to +\infty$ para todo $k > 0$. Sendo assim, dado $k > 0$ temos que $p^{kn} \mid a_n$ para todo n suficientemente grande, em outras palavras, ou $a_n = 0$ ou $|a_n|_\infty > p^{kn}$, onde $|\cdot|_\infty$ é o valor absoluto real (faz sentido falar de valor absoluto real para os coeficientes de Mahler de $f(x)$, pois eles são números inteiros).

Por outro lado, temos que $0 \le f(n) \le n^d$ para todo $n \ge 0$ e algum $d > 0$ fixado, por hipótese. Usando a fórmula de inversão de Mahler, obtemos que

$$\begin{aligned} |a_n|_\infty &= \left| \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(i) \right|_\infty \\ &\le \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f(i) \\ &\le n^d 2^n, \end{aligned}$$

onde usamos que $f(i) \le n^d$, para $0 \le i \le n$, e $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$.

Suponha que $a_n \neq 0$ para infinitos n's, então vimos que $|a_n|_\infty > p^{kn}$, combinando as duas desigualdades temos que $p^{kn} \le n^d 2^n$, logo $k < \log 2$. Porém $f(x)$ é analítica, por hipótese, ou seja, k não pode ser limitado, então $a_n = 0$, para todo n suficientemente grande e $f(x)$ é uma combinação finita de polinômios, e portanto um polinômio. $\square$

4.3 O problema de Mahler para Liouville p-ádicos

Nessa seção estudaremos o análogo do problema proposto por Mahler para números de Liouville, ou seja, se *existe funções inteiras transcendentes p-ádicas que mapeiam números de Liouville p-ádicos em números de Liouville p-ádicos.* Infelizmente, uma resposta final para essa pergunta, assim como no caso real, continua aberta. Contudo, iremos construir uma classe de números de Liouville p-ádicos, para a qual existem funções inteiras transcendentes p-ádicas que mapeiam essa classe dentro dela mesma, ou no conjunto dos números naturais.

Antes de mais nada, precisamos de um critério de transcendência para funções inteiras p-ádicas. No caso das funções reais, sabemos que é necessário e suficiente que a função não seja polinomial, veremos que o mesmo vale para as funções inteiras p-ádicas. Para provar isso precisamos de dois resultados, que são bem conhecidos para funções analíticas sobre $\mathbb{C}$, o primeiro é o princípio do máximo [27]:

Teorema 4.13 (Princípio do Máximo Ultramétrico). *Sejam K um espaço não localmente compacto, $r \in |K^*|$, e f é uma função função analítica sobre $B_0(r)$ dada pela série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $(x \in B_0(r))$.*

(1) Se o grupo de valores de K é denso, então

$$\sup\{|f(x)|_p : |x|_p \leq r\} = \sup\{|f(x)|_p : |x|_p < r\} = \max\{|a_n|_p r^n : n \geq 0\} < \infty;$$

(2) Se o corpo das classes residuais de K é infinito então

$$\sup\{|f(x)|_p : |x|_p \leq r\} = \sup\{|f(x)|_p : |x|_p = r\} = \max\{|a_n|_p r^n : n \geq 0\} < \infty.$$

Como $\mathbb{C}_p$ é não localmente compacto, o grupo de valores de $\mathbb{C}_p$ é $\{p^r : r \in \mathbb{Q}\}$, e o corpo das classes residuais é o fecho algébrico do corpo contendo p elementos (que é infinito), então para C_p valem *(1)* e *(2)*. O próximo teorema também é bem conhecido para funções analítica sobre $\mathbb{C}$ [27]:

Teorema 4.14 (Teorema de Liouville Ultramétrico). *Seja K um espaço métrico não localmente compacto. Então toda função analítica $f : K \to K$ limitada é constante.*

Vamos então provar que uma função inteira p-ádica é algébrica se, e somente se, é um polinômio, para provar isso nosso primeiro lema é:

Lema 4.15. *Se $p(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ é um polinômio não nulo, então existe $M > 0$ e $R_1 > 0$, tais que $|p(x)|_p > M$, para todo x com $|x|_p \geq R_1$.*

Demonstração: Para o caso em que p é constante não nulo, digamos constante igual a c podemos, por exemplo, tomar $M = |c|_p/2$ e $R_1 = 1$. Agora suponha que p é não constante, logo $\lim_{|x|_p \to \infty} |p(x)|_p = \infty$. De fato, se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ temos que $|p(x)|_p = \max\{|a_k x^k|_p : 0 \leq k \leq n\} = |a_n|_p |x|_p^n$, para todo $|x|_p$ suficientemente grande, e o lema segue. $\square$

Lema 4.16. *Se f é inteira algébrica, então existem números reais $c > 0$ e $R_2 > 0$, tais que $\|f\|_R := \sup_{|x|_p \leq R} |f(x)|_p \leq R^c$, para todo $R \geq R_2$.*

Demonstração: Por hipótese sobre f, existe um polinômio não nulo $p(x, y) \in \mathbb{C}_p[x, y]$, tal que $p(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}_p$. Colocando em evidência as potências de $f(x)$ que são iguais, podemos reescrever a igualdade acima como

$$a_0(x) + a_1(x)f(x) + \cdots + a_d(x)f(x)^d = 0, \tag{4.2}$$

onde $a_0(x), \ldots, a_d(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ e $a_d(x)$ é não nulo (nesse caso a função é dita algébrica de grau d). Pelo Lema 4.15, existem M e R_1 positivos, tais que $|a_d(x)|_p > M$ para todo x com $|x|_p > R_1$. Sem perda de generalidade, podemos supor que f é não constante, pois caso contrário, o resultado é óbvio. Daí, pelo Teorema de Liouville Ultramétrico temos que $\|f\|_R \geq 1$ para $R \geq R_0$, ou seja, f não contante implica f não limitada. Daqui em diante, tomaremos $R > \max\{R_0, R_1\}$, tal que $R = p^r$ com r racional.

Pelo princípio do Máximo, $\|f\|_R = \max\{|a_n|_p R^n : n \geq 0\}$, seja $\overline{x} \in \mathbb{C}_p$ tal que $|\overline{x}|_p = R$. Substituindo $\overline{x}$ em (4.2) obtemos

$$f(\overline{x})(a_1(\overline{x}) + \cdots + a_d(\overline{x})f(\overline{x})^{d-1}) = a_0(\overline{x}),$$

como $\|f\|_R \geq 1$, obtemos que

$$|a_1(\overline{x}) + \cdots + a_d(\overline{x})f(\overline{x})^{d-1}|_p \leq |a_0(\overline{x})|_p,$$

da desigualdade $|a + b|_p \geq |a|_p - |b|_p$, podemos escrever

$$|a_2(\overline{x})f(\overline{x}) + \cdots + a_d(\overline{x})f(\overline{x})^{d-1}|_p \leq |a_0(\overline{x})|_p + |a_1(\overline{x})|_p,$$

repetindo esse processo, temos

$$|a_d(\overline{x})f(\overline{x})|_p \leq |a_0(\overline{x})|_p + |a_1(\overline{x})|_p + \cdots + |a_{d-1}(\overline{x})|,$$

usando que $|a_d(x)|_p > M$, obtemos

$$|f(\overline{x})|_p \leq \frac{1}{M}(|a_0(\overline{x})|_p + |a_1(\overline{x})|_p + \cdots + |a_{d-1}(\overline{x})|) \leq CR^s \leq R^{s+1},$$

para R suficientemente grande, onde $C > 0$ é constante e $s = \max\{\partial(a_0), \ldots, \partial(a_{d-1})\}$, onde $\partial(a_i)$ é o grau do polinômio a_i. Tomando $c = s + 1$ o resultado segue. $\square$

Agora vamos ao resultado:

Teorema 4.17. *Uma função inteira p-ádica é algébrica se, e somente se, é um polinômio.*

Demonstração: Suponha que $f(x) \in \mathbb{C}_p[x]$. Defina $p(x,y) = f(x) - y$, então $p(x, f(x)) = 0$, para todo $x \in \mathbb{C}_p$, logo $f(x)$ é algébrica. Agora vamos supor que $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ seja inteira e algébrica, então pelo Lema 4.16, existem $R_2 > 0$ e $c > 0$, tal que $\|f\|_R \leq R^c$, para todo $R > R_2$. Por outro lado, pelo Princípio do Máximo, temos que $\|f\|_R = \max\{|a_n|_p R^n : n \geq 0\}$, comparando as duas temos que $a_n = 0$ para todo $n > c$, logo $f(x)$ é um polinômio. □

Vimos no começo desse capítulo que os números de Liouville p-ádicos (fracos ou não) são caracterizados por grandes blocos de zeros na sua expansão p-ádica, vamos então definir uma função que conta o número de zeros na expansão p-ádica de um inteiro p-ádico. Para isso, considere α um número inteiro p-ádico com expansão p-ádica dada por $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$, defina $\delta_k : \mathbb{Z}_p \to \{0, 1\}$, tal que, $\delta_k(\alpha) = 0$, se $a_k = 0$ e $\delta_k(\alpha) = 1$, se $a_k \neq 0$. Por fim, considere a função $\theta_\alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ dada por

$$\theta_\alpha(n) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k(\alpha).$$

O próximo resultado relaciona a função θ_α com os números de Liouville p-ádicos fracos:

Proposição 4.18. *Sejam $\alpha \in \mathbb{Z}_p/\{0\}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ sua expansão p-ádica, se*

$$\theta_\alpha(n) = o(\log n),$$

então α é um número de Liouville p-ádico fraco ou α é um número inteiro não negativo.

Demostração: Suponha que α não é um número natural, logo sua expansão p-ádica é infinita. Seja a_{n_k} a sequência dos coeficientes não nulos na expansão p-ádica de α, pela proposição 4.7 é suficiente mostrar que

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_{k-1}} = \infty.$$

Suponha, por absurdo, que $\frac{n_k}{n_{k-1}} < M$, para todo $k \geq 0$, com $M > 0$ constante, além disso podemos tomar $M > n_0$, pois $\alpha \neq 0$. Então $n_k < Mn_{k-1}$, para todo $k \geq 0$, reiterando a desigualdade, temos que $n_k < M^{k+1}$. Tomando o logaritmo, temos que

$k+1 > \log n_k/\log M$, para todo $k \geq 0$, porém, temos que $k+1 = \theta_\alpha(n_k)$, contradição com o fato de $\theta_\alpha(n) = o(\log n)$, logo α é um número de Liouville p-ádico fraco. □

Nosso objetivo é usar a função $\theta_\alpha(n)$ para construir uma função p-ádica inteira transcendente e um subconjunto $\mathfrak{L}$ dos números de Liouville p-ádicos fracos, tais que $f(\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{L}$. Para isso considere a função

$$\log[k](x) = \underbrace{\log\log\cdots\log(x)}_{k \text{ vezes}},$$

e o subconjunto $\mathfrak{L}$ dos números de Liouville p-ádicos fracos, tal que para todo $k > 0$ inteiro e todo $\lambda \in \mathfrak{L}$, temos que

$$\theta_\lambda(n) = o(\log[k](n)).$$

Teorema 4.19. *Existe uma função p-ádica inteira transcendente, tal que $f(\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{L} \cup \mathbb{N}$.*

prova do teorema 4.19

Para provar o Teorema 4.19 usaremos um lema técnico, que nos permite limitar $\theta_{f(\alpha)}(n)$ em função de $\theta_\alpha(n)$ para uma função inteira $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathbb{Z}_p[[x]]$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_p$.

Lema 4.20. *Sejam $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathbb{Z}_p[[x]]$ uma função inteira e $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Então*

$$\theta_{f(\alpha)}(n) \leq \theta_{c_0}(n) + \theta_{c_1}(n)(p-1)\theta_\alpha(n) + \cdots + \theta_{c_{\nu_f(n)}}(n)[(p-1)\theta_\alpha(n)]^{\nu_f(n)},$$

com $\nu_f(n) = \min\{\nu \in \mathbb{N} : \forall k > \nu, v_p(c_k) > n\}$.

Demonstração: Inicialmente, considere $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ e $\beta = \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k$ inteiros p-ádicos, temos que

$$\theta_{\alpha+\beta}(n) \leq \theta_\alpha(n) + \theta_\beta(n). \tag{4.3}$$

De fato, (4.3) é verdadeiro, se $n = 0$. Suponha que (4.3) vale para $n \geq 0$ e note que

$$\theta_{\alpha+\beta}(n+1) = \theta_{\alpha+\beta}(n) + \delta_{n+1}(\alpha+\beta),$$

Dessa forma, se $\delta_{n+1}(\alpha+\beta) = 0$, então (4.3) vale, dado que

$$\theta_{\alpha+\beta}(n+1) = \theta_{\alpha+\beta}(n) \leq \theta_\alpha(n) + \theta_\beta(n) \leq \theta_\alpha(n+1) + \theta_\beta(n+1).$$

Então, nós podemos supor que $\delta_{n+1}(\alpha+\beta)=1$. Além disso, se $\delta_{n+1}(\alpha)=1$ ou $\delta_{n+1}(\beta)=1$, então (4.3) vale, pois

$$\begin{aligned}\theta_{\alpha+\beta}(n+1) &= \theta_{\alpha+\beta}(n)+1\\ &\leq \theta_{\alpha+\beta}(n)+\delta_{n+1}(\alpha)+\delta_{n+1}(\beta)\\ &\leq \theta_{\alpha}(n+1)+\theta_{\beta}(n+1).\end{aligned}$$

Consequentemente, é suficiente supor que $\delta_{n+1}(\alpha+\beta)=1$ e $\delta_{n+1}(\alpha)=\delta_{n+1}(\beta)=0$. Nesse caso, nós temos a soma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p^k + \sum_{k=0}^{n} b_k p^k = \sum_{k=0}^{n+1} c_k p^k,$$

com $c_{n+1}\neq 0$. Daí, é fácil ver que existem blocos $a_{n-l}p^{n-l}+\cdots+a_np^n$ e $b_{n-l}p^{n-l}+\cdots+b_np^n$ de tamanho $(l+1)$ com pelo menos $(l+2)$ coeficientes não nulos, tais que para todo $n-l\leq k\leq n$, temos $a_k\neq 0$ ou $b_k\neq 0$, ou seja, $\theta_{\alpha+\beta}(n)<\theta_\alpha(n)+\theta_\beta(n)$. Em outras palavras,

$$\theta_{\alpha+\beta}(n+1)=\theta_{\alpha+\beta}(n)+1\leq\theta_\alpha(n)+\theta_\beta(n)=\theta_\alpha(n+1)+\theta_\beta(n+1).$$

Uma consequência direta de (4.3) é que se c é um inteiro positivo, então

$$\theta_{c\alpha}(n)\leq c\theta_\alpha(n), \tag{4.4}$$

para todo $n\in\mathbb{Z}$. Além disso, se k é um inteiro positivo, nós temos que

$$\theta_{p^k\alpha}(n)\begin{cases}\leq \min\{\theta_\alpha(n), n-k\}, & \text{se} \quad k\leq n,\\ =0, & \text{se} \quad k>n.\end{cases} \tag{4.5}$$

Agora usamos (4.3), (4.4) e (4.5) para mostrar que

$$\theta_{\alpha\beta}(n)\leq (p-1)\theta_\alpha(n)\theta_\beta(n). \tag{4.6}$$

Com efeito, $\beta\alpha=\sum_{k=0}^{\infty} b_kp^k\alpha$, então aplicando (4.5) obtemos

$$\theta_{\alpha\beta}=\theta_{\sum_{k=0}^{n} b_kp^k\alpha}(n),$$

e aplicando (4.3)

$$\theta_{\alpha\beta}(n)\leq\sum_{k=0}^{n}\theta_{b_kp^k\alpha}(n).$$

Observe que $0 \leq b_k \leq p-1$, então nós podemos reaplicar (4.5) e aplicar (3.2), como segue

$$\begin{aligned}
\theta_{\alpha\beta}(n) &\leq \sum_{k=0}^{n} \theta_{b_k\alpha}(n) \\
&\leq (p-1) \sum_{b_k \neq 0,\ 0 \leq k \leq n} \theta_{\alpha}(n) \\
&\leq (p-1)\theta_{\beta}(n)\theta_{\alpha}(n).
\end{aligned}$$

Usando (4.6)

$$\theta_{\alpha^k}(n) \leq (p-1)^{k-1}\theta_{\alpha}(n)^k, \quad \forall k \geq 1 \in \mathbb{Z}. \tag{4.7}$$

Agora, seja $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$ um polinômio com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$, aplicando (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7) temos

$$\theta_{p(\alpha)}(n) \leq \theta_{c_0}(n) + \theta_{c_1}(n)(p-1)\theta_{\alpha}(n) + \cdots + \theta_{c_k}[(p-1)\theta_{\alpha}(n)]^k. \tag{4.8}$$

Finalmente, se f é uma função p-ádica inteira, então $v_p(c_n)/n \to \infty$, em particular, dado um inteiro positivo n existe $\nu_f(n)$ tal que para todo $\nu > \nu_f(n) \in \mathbb{Z}$, temos $v_p(c_\nu) > n$. Consequentemente, aplicando (4.5) e (4.8)

$$\theta_{f(\alpha)}(n) \leq \theta_{c_0}(n) + \theta_{c_1}(n)(p-1)\theta_{\alpha}(n) + \cdots + \theta_{c_{\nu(n)}}(n)[(p-1)\theta_{\alpha}(n)]^{\nu(n)},$$

com $\nu_f(n) = \min\{\nu \in \mathbb{N} : \forall k > \nu, v_p(c_k) > n\}$. □

Demonstração do teorema 4.19

Considere a função $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{t_n} x^n$, onde

$$t_0 = 1, t_1 = p, t_2 = 2p^p, \ldots, t_n = np^{t_{n-1}}, \ldots, \qquad n \geq 1,$$

note que $f(x)$ é uma função inteira transcendente, com efeito o raio de convergência R de $f(x)$ dado por $R = p^{\frac{t_n}{n}} = \infty$, logo $f(x)$ é inteira, e pelo Teorema 4.17 transcendente.

Observe que $\nu_f(n) = o(\log[k](n))$ para todo $k > 0$ inteiro. Com efeito, $v_p(p^{t_k}) = t_k$ e $\log[k](t_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$, para todo $k > 0$ inteiro. Pelo Lema 4.20, temos que para todo $\lambda \in \mathfrak{L}$

$$\theta_{f(\lambda)}(n) \leq \theta_{p^{t_0}}(n) + \theta_{p^{t_1}}(n)(p-1)\theta_{\lambda}(n) + \cdots + \theta_{p^{\nu_f(n)}}(n)[(p-1)\theta_{\lambda}(n)]^{\nu_f(n)},$$

como $0 \leq \theta_{p^k}(n) \leq 1$, temos que

$$\theta_{f(\lambda)}(n) = O([(p-1)\theta_\lambda(n)]^{\nu_f(n)}),$$

usando que $\theta_\lambda(n) = o(\log[k](n))$ e $\nu_f(n) = o(\log[k](n))$, para todo $k > 0$ inteiro, temos que $\theta_{f(\lambda)}(n) = o(\log[k](n))$ para todo $k > 0$ inteiro. De fato, dado $k > 0$ inteiro, temos que $\theta_\lambda(n) = o(\log[k+2](n))$ e $\nu_f(n) = o(\log[k+2](n))$, como

$$\log[k](n) = e^{e^{\log[k+2](n)}},$$

temos que $\left((\log[k+2](n))^{(\log[k+2](n))}\right) = o(\log[k](n))$, logo $\theta_{f(\lambda)}(n) = o(\log[k](n))$, consequentemente, ou $f(\lambda) \in \mathfrak{L}$, ou $f(\lambda) \in \mathbb{N}$. $\square$

Concluímos esse capítulo, e também esse trabalho de tese, observando que o estudo de problemas análogos aos estudados sobre transcendência e, em especial, sobre números de Liouville, no conjunto dos números p-ádicos, se mostrou promissor para futuras pesquisas. Lembrando que o próprio Mahler estudou muitas questões relacionadas a transcendência de números p-ádicos. O problema sobre a existência funções inteiras transcendentes p-ádicas levando números de Liouville p-ádicos em números de Liouville p-ádicos continua em aberto, apesar de nossos esforços, assim como no caso real. Porém, aprendemos que as propriedades dos números p-ádicos nos permite atacar o problema de formas diferentes das usadas no caso real, e inclusive nos traz ideias novas para o problema original.

Bibliografia

[1] Beukers, F., A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. Lond. Math. Soc.* 11:3 (1979), 268-272.

[2] Boas, R. P., Buck, R. C., Polynomial expansions of analytic functions. Vol. 19. *Springer Science Business Media*, 2013.

[3] Bugeaud, Y., Approximation by Algebraic Numbers, Cambridge Tracts in Mathematics Vol **160**, *Cambridge University Press*, New York (2004).

[4] Clark, D., A note on the p-adic convergence of the solutions of linear differential equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 17, pp. 262-269, 1966.

[5] Erdös, P., Mahler, K., Some arithmetical properties of the convergents of a continued fraction, *J. Lond. Math. Soc.* **14** (1939), 12–18.

[6] Eweida, M. T., On the convergence properties of basic series representing integral functions, *Proc. Math. Phys. Soc. U.A.R. (Egypt)* **4**, 31-38, 1950.

[7] Fraenkel, A. S., On a theorem of D. Ridout in the theory of diophantine approximations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **105** (1962), 84–101.

[8] Fraenkel, A. S., Transcendental numbers and a conjecture of Erdös and Mahler, *J. Lond. Math. Soc.* **39** (1964), 405–416.

[9] Lelis, J, Marques, D., On a problem of Erdös and Mahler concerning continued fraction, *Bull. Aust. Math. Soc.* v.95, n. 2, p. 183-186, 2017.

[10] Lelis, J., Marques, D., Ramirez, J., A note on transcendental entire functions mapping uncountable many Liouville numbers into the set of Liouville numbers, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **93** (2017), 1–4.

[11] Levin, B. Ya. Lectures on entire functions. Vol. 150. *American Mathematical Socity*, 1996.

[12] Mahler, K. Lectures on Transcendental Numbers. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1976.

[13] Mahler, K. Some suggestions for further research, *Bull. Aust. Math. Soc.* **29** (1984), no. 1, 101–108.

[14] Maillet, E. Introduction à la Théorie des Nombres Transcendants et des Propriétés Arithmétiques des Fonctions. *Gauthier-Villars*, Paris (1906).

[15] Makar, R. H.; Fawzy, L. Order and type of basic sets of polynomials associated with functions of algebraic semi block matrices. *Period. Math. Hungar.*, v. 4, n. 2-3, p. 207-215, 1973.

[16] Marques, D. O problema de Lang e uma generalização dos teoremas de Stäckel. Tese de Doutorado. UnB, Brasília (2009).

[17] Marques, D., Teoria dos Números Transcendentes. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[18] Marques, D., Moreira, C. G. On a variant of a question proposed by K. Mahler concerning Liouville numbers. *Bull. Aust. Math. Soc.*, v. 91, n. 1, p. 29-33, 2015.

[19] Marques D., Ramirez J., On transcendental analytic functions mapping an uncountable class of U-numbers into Liouville numbers. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **91** (2015), 25–28.

[20] Marques, D., Ramirez, J., Silva, E. A note on lacunary power series with rational coefficients. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 93(3), 372-374, 2016.

[21] Marques D., Schleischitz J., On a problem posed by Mahler, *J. Austral. Math. Soc.*, **100** (2016), 86–107.

[22] Marques, D., Silva, E., A Note on Transcendental Power Series Mapping the Set of Rational Numbers into Itself. *Commun. Math.*, 25(1), 1-4, 2017

[23] Martinez, F. B., Moreira, C. G., Saldanha, N., Tengan E., Teoria dos Números - um passei com primos e outros números familiares de mundo inteiro, 4º ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[24] Matveev, E. M., An explict lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers, II, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **64** (2000), 125-180. English transl. in *Izv. Math.* **64** (2000), 1217-1269.

[25] Petruska G., On strong Liouville numbers, *Indag. Math.*, N.S., **3** (2) (1992), 211–218.

[26] D. Ridout, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **4** (1957), 125–131.

[27] Schikhof W. H., Ultrametric Calculus, Cambridge University press, Cambridge, 2006.

[28] Waldschmidt, G., Open Diophantine problems, *Mosc. Math. J.* **4** (2004), 245–305.

[29] Whittaker, J. M., The lower order of integral functions. *J. Lond. Math. Soc.* 1(1), 20-27, 1933.

[30] Whittaker, J. M., On series of polynomials. *Q. J. Math.* 1, 224-239, 1934.

[31] Whittaker, J. M., Interpolatory Function Theory, *Cambridge Tracts in Mathematics and Physics* vol. 33, Cambridge, 1935 .

[32] Whittaker, J. M., Sur les séries de base de polynomes quelconques, Gauthier-Villars, 1949.

[33] Whittaker, J. M., Basic sets of polynomials and their reciprocal, product and quotient sets, *Duke Math. J.* **20**, 459-479, 1953.