

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Descoerência de Superposições Quânticas Complexas

Leomar Alves de Souza

Tese submetida ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Viktor Dodonov*

BRASÍLIA

25 de Setembro de 2007

Agradecimentos

- ao Professor Viktor Dodonov, pela escolha do tema, discussões e apoio.
- Aos professores do Instituto de física da UNB, em especial ao Dr. Anibal Figueredo, Dr. Tarcísio Marciano R. Filho, Dr. Ademir. Santana.
- Aos companheiros do Grupo de Óptica Quântica do Instituto de física da Universidade Federal de Goiás.
- Ao amigo José Rildo de Oliveira Queiroz, pela animação e vários favores.
- Ao amigo Jeferson, pela disposição.
- Aos funcionários do Instituto de Física da UNB, em especial à Célia.
- Em especial à minha esposa Sandra, pelo apoio, dedicação, compreensão e carinho em todos os momentos.
- Em especial às minhas filhas, por suportar minha ausência como pai.
- aos meus pais, Mário e Eurípia, que mesmo sem informação souberam orientar-me nos estudos.
- Aos meus irmãos e irmãs, que sempre me deram força ao longo desse trabalho.
- Ao meu sogro Juvenal e minha sogra Romilda, pelo apoio e incentivo.
- ao Pr Nonato, pelo apoio e incentivo.
- ao Pr Roberto amaral, pelo apoio.
- ao amigo Ardiley, pelas discussões e incentivos.
- Enfim, agradeço a Deus, a quem dedico toda honra e toda glória.

Este trabalho foi financiado pela CAPES.

Conteúdo

Lista de Figuras	iii
Resumo	1
Abstract	1
1 Introdução	1
2 Superposição de Dois Estados de Número deslocados	7
2.1 Função de Wigner	8
2.2 Superposição de Dois Estados de Número Deslocados	9
2.3 Evolução Temporal da Função de Wigner	15
2.4 Dinâmica da Descoerência	18
2.4.1 A Pureza Quântica como Indicador de Descoerência	20
2.4.2 Decaimento do pico de interferência da Função de Wigner na Origem	23
2.5 Conclusão	35
3 Generalização da Descoerência da Superposição de N Estados de Número Deslocados	39
3.1 Função de Wigner da Superposição de N Estados de Número Deslocados	40
3.2 Evolução Temporal da Função de Wigner	43
3.3 Tempo de Descoerência	52
3.3.1 A Pureza Quântica Como Indicador de Descoerência	52
3.3.2 Taxa de Decaimento do Pico Central de Interferência	55

3.4	Exemplos	59
3.4.1	Superposição de Estados de Número Deslocados em um Círculo	59
3.4.2	Superposição do Estado de Número Deslocados em Uma Linha Reta	67
3.4.3	Superposição de Quatro Estados de Número Deslocados em Linha Reta	69
3.5	Função de Wigner para Sistemas amplificados	72
3.6	Conclusão	78
4	Descoerência da Superposições Estados Coerentes de Muitos Modos	80
4.1	Estados Coerentes de Muitos-Modos	82
4.2	Evolução Temporal da Função de Wigner	83
4.3	A pureza Quântica Como Indicador de Descoerência	88
4.4	Conclusão	92
5	Amortecimento na Fase	94
5.1	Evolução da Função de Wigner	98
5.2	Conclusão	102
6	Descoerência de Superposições de Estados Adicionado-Fótons	106
6.0.1	Conclusão	111
	Conclusões	114
	A Fatores de Boltzmann	116
	B Dedução da Fórmula (2.25)	120
	C O Propagador da Equação de Fokker Planck	122
	D Dedução da Equação de Fokker-Planck na Forma de Wigner	125

Lista de Figuras

2.1	A função de Wigner $F_\psi(z)$ (2.7) (para z real) correspondente a uma superposição par do estado de número deslocado com $\alpha = 7$ para $m = 10$ (linha sólida) e $m = 0$ (linha pontilhada).	12
2.2	A função de Wigner $F_m(z)$ dada em (2.9) (para z real) correspondente a uma superposição par de estado de número deslocados, com $\alpha = 7$, para $m = 10$ (linha sólida) e $m = 0$ (linha pontilhada).	14
2.3	A densidade de probabilidade $G_m(z)$ (2.15) para uma superposição par de estados de número deslocados (2.1)	15
2.4	O número médio de ftons P , dado na fórmula (2.35) para uma superposição par de dois estados número deslocados, com $\alpha = 5$ versus o parâmetro m	22
2.5	A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (2.26) (para z real) para uma superposição par de dois estados número deslocados, com $\alpha = 7$, para $m = 10$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_1 = 0.01 \approx (2\alpha^2)$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)	24
2.6	Os mesmos dados da figura (2.5), mas para $\tau_2 = 0.03 = 3\tau_1$	25
2.7	A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (2.26) (para z real) para uma superposição par de dois estados número deslocados, com $\alpha^2 = 20$, para $m = 20$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_3 = 0.025 \approx (2\alpha^2)$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)	26
2.8	Os mesmos dados da figura 6, mas para $\tau_4 = 0.075 = 3\tau_3$	27
2.9	A dependência da altura do pico de interferência normalizado da função $f_m(\tau)$ dada pela fórmula (2.37), "no tempo compacto" τ , para um sistema atenuador com temperatura zero, para $\alpha = 6$ e $m = 0, 18, 36, 54$ (esta ordem corresponde às linhas de cima para baixo próximo do eixo vertical)	28
2.10	Esquerda: dependência da altura do pico de interferência normalizado da função $f_m(\tau)$ dada pela fórmula (2.37), "no tempo compacto" τ , para um sistema atenuador com temperatura zero, para $\alpha = 50$ e $m = 0, 18, 36, 54$. Direita: a dependência da altura do pico de interferência normalizado da função $f_m(\tau)$ dada pela fórmula (2.37), "no tempo compacto" τ , para um sistema atenuador com teperatura zero, para $\alpha = 100$ e $m = 0, 18, 36, 54$	29
2.11	A dependência do tempo de descoerência em escala (2.47) na razão $x = m/\alpha^2$ para $\alpha = 50$ e $\beta = 3$	32

2.12	A dependência do tempo de descoerência em escala (2.47) na razão $x = m/\alpha^2$ para $\alpha = 10$ e $\beta = 3$	33
2.13	A dependência do tempo de descoerência em escala (2.47) na razão $x = m/\alpha^2$ para $\alpha = 100$ e $\beta = 3$	34
2.14	A dependência do valor máximo de T (o qual é encontrado para $m = \alpha^2$) em função do parâmetro β (neste caso $\alpha = 50$)	35
2.15	A dependência da altura do pico de interferência renormalizado $g_m(\tau)$ (2.48) no tempo compacto τ , neste caso para um sistema atenuador na temperatura zero, para $\alpha = 6$ e $m = 0, 18, 36, 54, 72$ (os valores são os mesmos da figura 8 , mas agora a ordem das linhas é invertidas, ou seja, as linhas mais próximas do topo correspondem aos maiores valores de m)	36
3.1	Esta figura mostra a função $f(x) = \exp(-2x)L_m(4x)$ para $m = 30$ juntamente com a função $\exp(-2x)$ (gráfico pontilhado) no intervalo $x < 2$	43
3.2	Esta figura mostra a função $f(x) = \exp(-2x)L_m(4x)$ para $m = 30$ no intervalo $x > 1$	44
3.3	A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (3.12) (para z real) para uma superposição par de seis estados de número deslocados, com ; $\alpha_1 = 4; \alpha_2 = -4; \alpha_3 = 12; \alpha_4 = -12; \alpha_5 = 20; \alpha_6 = -20$, para $m = 10$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_3 = 0$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)	48
3.4	A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (3.12) (para z real) para uma superposição par de seis estados de número deslocados, com ; $\alpha_1 = 4; \alpha_2 = -4; \alpha_3 = 12; \alpha_4 = -12; \alpha_5 = 20; \alpha_6 = -20$, para $m = 10$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_1 = 0.031(\approx (2\alpha^2))$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)	49
3.5	A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (3.12) (para z real) para uma superposição par de seis estados de número deslocados, com ; $\alpha_1 = 4; \alpha_2 = -4; \alpha_3 = 12; \alpha_4 = -12; \alpha_5 = 20; \alpha_6 = -20$, para $m = 10$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_2 = 0.062 = 2\tau_1$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)	50
3.6	A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (3.12) (para z real) para uma superposição par de seis estados de número deslocados, com ; $\alpha_1 = 4; \alpha_2 = -4; \alpha_3 = 12; \alpha_4 = -12; \alpha_5 = 20; \alpha_6 = -20$, para $m = 10$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_3 = 0.093 = 3\tau_1(\approx (1/2\alpha^2))$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)	51
3.7	A altura normaliza do pico central de interferência dada pela função (3.38) versus o tempo τ para superposições dos estados de número deslocados em um círculo com raio $ \alpha = 10$ e diferentes valores do número de Fock, $m = 10, 40, 70, 100$ (seguindo esta ordem no lado esquerdo da figura de cima para baixo e invertendo no lado direito).	62

3.8	O negativo do logaritmo da altura do pico central de interferência $F = -\ln(f)$ versus o tempo τ adimensional para superposição de estados de número deslocados em um círculo com raio $ \alpha = 10$ para diferentes valores do número de Fock $m = 10, 40, 70, 100$ (de cima para baixo, no lado direito da figura)	63
3.9	O tempo de descoerência final normalizado $T = 2 \alpha ^2\tau_f$ versus o números de componentes N de uma inicial superposição de estados de números deslocados em um círculo com $ \alpha = 50$, para $\beta = e/2$ com diferentes valores de excitação m fixados.	64
3.10	O tempo de descoerência final normalizado $T = 2 \alpha ^2\tau_f$ versus o números de excitação m de uma superposição inicial de estados de números deslocados em um círculo com $ \alpha = 50$, para $\beta = e/2$ com diferentes números de componentes N fixados.	65
3.11	O negativo da função logarítmica da pureza quântica $L = -\ln \mu$ para uma superposição inicial de N estados coerentes (quando $m = 0$ e μ é dado pela equação (3.44) versus o parâmetro $T = 2 \alpha ^2\tau$. As linhas de baixo para cima corresponde aos valores de N variando de 2 até 14 (neste exemplo N pode ser tanto par quanto ímpar). A linha envelope corresponde à fórmula aproximada (3.46).	66
3.12	Função de Wigner $F(z)$ (3.12) com $\text{Im}(z) = 0$ para uma superposição de quatro estados coerentes ($m = 0$) em uma linha, com pesos iguais, locados inicialmente nos pontos $\alpha_1 = -\alpha_2 = 5$ e $\alpha_3 = -\alpha_4 = 15$ para três instantes de tempo $\tau = 0$ (linha superior), $\tau = \tau_{in} = 0.004$ (linha intermediária) e $\tau = \tau_f = 0.02$ (linha inferior) a qual corresponde para um parâmetro $\beta = e/2$	70
3.13	Função de Wigner $F(z)$ (3.12) com $\text{Im}(z) = 0$ para uma superposição de quatro estados em uma linha, com pesos iguais, locados inicialmente nos pontos $\alpha_1 = -\alpha_2 = 4$ e $\alpha_3 = -\alpha_4 = 12$ no instantes de tempo $\tau = 0.04$ com pesos iguais, mais diferentes valores de m , o gráfico pontilhado corresponde a $m = 0$ e a linha sólida corresponde a $m = \alpha_1^2 = 16$	71
3.14	O negativo da função logarítmica para a pureza quântica $L = -\ln(\mu)$ (onde a pureza é dada pela equação (3.28)) versus o tempo τ para superposições de quatro estados coerentes em uma linha, sendo os pesos x das componentes da superposição diferentes. Os parâmetros são fixados no tempo de descoerência inicial $\tau_{in} = 1/450$ e na posição inicial da primeira componente $\alpha_1 = 5$ (veja a equação (3.57)).	73
3.15	O negativo da função logarítmica para a altura do pico central de interferência normalizado $F = -\ln(f)$ (onde a f é dada pela equação (3.34)) versus o tempo τ para superposições de quatro estados coerentes em uma linha, sendo os pesos x das componentes da superposição diferentes. Os parâmetros são fixados no tempo de descoerência inicial $\tau_{in} = 1/450$ e na posição inicial da primeira componente $\alpha_1 = 5$ (veja a equação (3.57)).	74

3.16	A função de Wigner em escala $\tilde{F}(\tilde{z})$, dada pela equação (3.59) com $\text{Im}(z) = 0$, contra o argumento \tilde{z} em escala (os tilds sobre z foram omitidos) no caso de amplificação do sistema ($\sigma = -0.9$) da construção inicial de uma superposição de dois estados de número deslocado com $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$, para diferentes valores de $m = 0, 1, 10, 16$. A linha sólida para $m = 16$ tem um pico forte no centro, enquanto a linha para $m = 10$ mostra dois picos no centro abaixo do pico para $m = 16$	76
3.17	A mesma figura 3.16, mas para uma superposição inicial ímpar de dois estados de número deslocado com $c_1 = -c_2 = 1/\sqrt{2}$ e $\alpha_1 = -\alpha_2 = 4$, para dois valores $m = 10, 16$, A linha sólida corresponde a $m = 16$ e não mostra nenhum pico no centro.	77
4.1	Função de Wigner na origem dada pela equação (4.20) para estados emaranhados $ A ^2 = n \alpha ^2$ com os parâmetros $\alpha = 5$ e $n = 25$ para o primeiro gráfico de cima para baixo e o segundo gráfico com $\alpha = 25$ e $n = 5$	87
4.2	Função de Wigner na origem dada pela equação (4.20) fazendo f^n para estados fatorizados com os parâmetros $\alpha = 5$ e $n = 25$ para o primeiro gráfico de cima para baixo e o segundo gráfico com $\alpha = 25$ e $n = 5$	88
4.3	Tempo de descoerência final contra n para estados emaranhados, dado pela equação (4.21) com os parâmetros $\beta = 2, \alpha = 2, \alpha = 4, \alpha = 7$ e n variando no intervalo $1 \leq n \leq 100$, de cima para baixo temos o primeiro gráfico para $\alpha = 2$ o segundo para $\alpha = 4$ e terceiro para $\alpha = 7$	89
4.4	Tempo de descoerência final contra n para estados fatorizados, dado equação (4.22) com os parâmetros $\beta = 2, \alpha = 2, \alpha = 4, \alpha = 7$ e n variando no intervalo $1 \leq n \leq 100$	90
4.5	A pureza quântica dada pela equação (4.25) para estados emaranhados e fatorizados contra o tempo τ , de cima para baixo próximo do eixo vertical. O primeiro e o quarto gráficos representam a pureza quântica para estados fatorizados com $\alpha = 0.7, n = 25, \alpha = 5$ e $n = 5$ respectivamente. O segundo e o terceiro gráficos representam os estados emaranhados com $\alpha = 0.7, n = 25, \alpha = 5$ e $n = 5$ respectivamente.	91
5.1	O $-\ln(C)$ onde C é coerência quântica dada pela equação (5.11) para estados coerentes inicial par, contra o tempo τ	97
5.2	A função $F(z)$ para z imaginário puro e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0; 0.2; 2.7$ (de cima para baixo).	99
5.3	A função $F(z)$ para z real e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0; 0.2; 2.7$ (de cima para baixo).	100
5.4	A função $F(z)$ para z real e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0; 0.2; 2.7$ (de cima para baixo).	101
5.5	A função $F(z)$ para $\varphi = \pi/4$ e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0, 0.2, 2.7$ (de cima para baixo).	102
5.6	A função $f(z) = F(z, \tau) - F(z, \infty)$ para $\varphi = \pi/4$ e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0, 0.2$ (de cima para baixo).	103

5.7	A função $f(z) = F(z, \tau) - F(z, \infty)$ para $\varphi = \pi/2$ e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0, 0.2$ (de cima para baixo).	104
5.8	A função $f(z) = F(z, \tau) - F(z, \infty)$ para $\varphi = 0$ e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0, 0.2$ (de cima para baixo).	105
6.1	O tempo de descoerência final normalizado $T = 2 \alpha ^2\tau_f$ contra o número de excitação m para um estado coerente adicionado-fótons inicial, com diferentes valores de $\alpha = 2, 4, 8, 16$. O TDF τ_f é a solução da equação $f(\tau_f) = 1/(2\beta)$, onde a função $f(\tau)$ é dada por (6.12) e valor limiar é escolhido como $\beta = 2$	110
6.2	O negativo do logaritmo da altura do pico central de interferência normalizado do estado coerente adicionado-fótons (6.12) com $\alpha = 5$ e diferentes números de excitação m	111
6.3	A função de Wigner $F(z)$ (6.3), (para z real e positivo) para um estado coerente par ($m = 0$) e $\alpha = 7$ (linha sólida) e o estado coerente par adicionado-fótons (6.3), com $\alpha = 7$ e $m = 10$ (linha pontilhada).	112
6.4	A função de Wigner $F(z)$ (6.3) (para $z = iy$ com y real e positivo) com $\alpha = 7$ e $m = 10$. Estes gráficos mostram que a função de Wigner assume valores negativos, o que ocorre apenas para estados não clássicos.	113
A.1	Energia por átomo contra a temperatura para o sistema de átomos com dois níveis. Podemos observar que os valores de energias mais altas sempre correspondem a temperaturas negativas.	119

Resumo

Estudamos a descoerência de uma superposição de estados de número deslocados da forma $\sum_{k=1}^N c_k \hat{D}(\alpha_k)|g\rangle$, onde $|g\rangle$ é um estado não deslocado e $\hat{D}(\alpha)$ é o operador deslocamento usual, dentro da estrutura da equação mestre padrão para um oscilador harmônico amortecido ou amplificado interagindo com um reservatório insensível à fase (térmico). Comparamos o grau de descoerência através de duas medidas simples: a pureza quântica e a altura do pico central de interferência da função de Wigner. Mostramos que para $N \geq 2$, ou seja, componentes ‘mesoscópicas’ da superposição, o processo de descoerência não pode ser caracterizado por um único tempo de descoerência. Desde então nós distinguimos o ‘tempo de descoerência inicial’ (TDI) e o ‘tempo de descoerência final’ (TDF) e estudamos suas dependências nos parâmetros α_k e N . Expressões exatas e explícitas são obtidas no caso especial de $|g\rangle = |m\rangle$, isto é, para superposições (simétricas) de estados de número deslocados. Nós mostramos que superposições com um grande número de componentes N e uma estrutura interna rica ($m \sim |\alpha|^2$) pode ser mais resistente contra a descoerência que as superposições simples de dois estados coerentes (com $m = 0$). Comparando a descoerência de uma superposição de estados coerentes de n -modos, nós mostramos que TDF de estados inicialmente fatorizados pode ser significativamente maior que dos estados inicialmente emaranhados com a mesma energia, especialmente se $n \gg 1$. Nós comparamos a taxa de descoerência de superposições pares/ímpares de estados de número deslocados $|m, \alpha\rangle_{\pm}$ e os estados coerentes adicionado ftons $|\alpha, m\rangle_{\pm}$. Mostramos que suas dependências em m são totalmente diferentes. Por último, nós encontramos expressões analíticas para função de Wigner e a pureza quântica dependente do tempo para estados coerentes pares/ímpares no caso de uma *fase amortecida*. Neste caso, o TDI tem a mesma dependência na distância entre as duas componentes da superposição como no caso do amortecimento da amplitude. Porém, para tempos longos, os comportamentos no TDF são

completamente diferentes, porque o estado estacionário assintótico não é termico, mas sim um estado fortemente não-clássico (embora altamente misturado).

Abstract

Within the framework of the standard master equation for a quantum damped or amplified harmonic oscillator interacting with a phase-insensitive (thermal) reservoir, we study the decoherence of superpositions of displaced quantum states of the form $\sum_{k=1}^N c_k \hat{D}(\alpha_k)|g\rangle$, where $|g\rangle$ is an arbitrary ‘fiducial’ state and $\hat{D}(\alpha)$ is the usual displacement operator. We compare two simple measures of degree of decoherence: the quantum purity and the height of the central interference peak of the Wigner function. We show that for $N > 2$ ‘mesoscopic’ components of the superposition, the decoherence process cannot be characterized by a single decoherence time. Therefore we distinguish the ‘initial decoherence time’ (IDT) and ‘final decoherence time’ (FDT) and study their dependence on the parameters α_k and N . Explicit exact expressions are obtained in the special case of $|g\rangle = |m\rangle$, i.e., for (symmetrical) superpositions of displaced number states. We show that superposition with a big number of components N and rich ‘internal structure’ ($m \sim |\alpha|^2$) can be more robust against decoherence than simple superpositions of two coherent states (with $m = 0$), even if the initial decoherence times coincide. Comparing the decoherence of n -mode superpositions of coherent states, we show that the FDT of initially factorized states can be significantly bigger than that of initially maximally entangled states with the same initial energy, especially if $n \gg 1$. We find analytical expressions for the Wigner function and the time-dependent purity of even/odd coherent states in the case of *phase damping*. In this case, the IDT has the same dependence on the distance between the two components of the superposition as in the case of amplitude damping. However, the long-time behavior and the FDT are quite different, because the asymptotical stationary state is not a thermal one, but a strongly non-classical (although highly mixed) state. Finally, we compare the decoherence rates of even/odd superpositions of displaced number states $|m, \alpha\rangle_{\pm}$ and photon-added coherent states $|\alpha, m\rangle_{\pm}$ and show that their dependence on m are different.

Capítulo 1

Introdução

A Mecânica Quântica trabalha bem em toda sua aplicação prática. Não é conhecido nenhum exemplo de conflito entre suas determinações e experimentos. Sem a física quântica não poderíamos explicar o comportamento dos sólidos e os efeitos não-clássicos do campo luminoso. Já passado um século após o seu início e os debates sobre a relação da Mecânica Quântica com um mundo físico real continua, pois sistemas quânticos são regidos pelas superposições, devido à linearidade da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle, \quad (1.1)$$

e estas superposições são muito difíceis de serem detectadas classicamente. No entanto até hoje não existe nenhuma indicação de uma fronteira entre o comportamento quântico e clássico no qual falha a equação de Schrödinger (1.1). Assim a raiz de nosso problema com a Mecânica Quântica é o choque entre o princípio da superposição, que é consequência da linearidade da equação (1.1) e a realidade clássica cotidiana na qual este princípio parece ser violado. O fato chave e indiscutível é que sistemas quânticos macroscópicos nunca estão isolados do seu

ambiente. Portanto não se deveria esperar que eles seguissem a equação de Schrödinger, que só é aplicável a sistemas fechados, com uma evolução unitária que condena todos os sistemas quânticos à pureza (a evolução unitária é caracterizada por ser contínua, linear, determinista e reversível). Como resultado sistemas normalmente considerados clássicos sofrem (ou beneficiam-se) da perda de coerência quântica para o ambiente, sendo o desconhecimento desta parte da ciência um desafio para os dias de hoje.

Com relação à Mecânica Quântica, podemos verificar alguns estágios bem definidos. O primeiro estágio foi a sua formulação que ocorreu entre 1900 até 1927. O segundo, os efeitos não-clássicos que não podiam ser explicados com uma teoria clássica. O terceiro foi definido nas duas últimas décadas pela eletrodinâmica de cavidades que tornou possível a preparação e manipulação de estados do campo liminoso em cavidades (estados não-clássicos), através da interação átomo-campo dando condições, por exemplo: de observar oscilações de Rabi, os átomos circulares de Rydberg no vácuo ou em campos coerentes pouco excitados [1]; geração e detecção de estados de Fock [2]; demonstração de uma porta lógica quântica controlada [3]; a geração e a detecção de estados de Fock $|2\rangle$ com um único átomo [4]; a geração de estado tipo gato de Schrödinger [5].

Devido a estes avanços nos últimos anos, o problema da descoerência da superposição de estados quânticos está exigindo uma atenção maior por parte dos pesquisadores. Os efeitos de interferência são exclusivos das superposições e os problemas da instabilidade das superposições são causados pela degradação destes efeitos de interferência, (o que nós chamamos de descoerência) devido à influência do meio ambiente, dificultando assim a geração eficiente destas superposições. Em particular, esse problema é uma das dificuldades centrais a serem resolvidas para o funcionamento robusto dos computadores quânticos e a geração de superposição de estados. Em síntese, não podemos falar na geração eficiente de nenhum tipo de

estados sem levar em conta a descoerência. Apesar de existirem centenas de trabalhos nessa área, que podem ser encontrados no reviews [6, 7], começando pelo trabalho pioneiro de Caldeira e Leggett [8], sobre descoerência de superposições quânticas macrocópicas, no início da década de 80, até agora, com uma pequena exceção [9–12], somente superposições de pacotes gaussianos descrevendo estados coerentes ou comprimidos foram considerados [13, 14]. O efeito de dissipação nas oscilações da distribuição do número de fótons para o estado comprimido foi estudado em [15]. Os autores também mostraram que estas oscilações são evidências da interferência no espaço de fase. Algumas propriedades para o estado de número deslocado foram calculadas em [16]; onde foi mostrado pelos autores que as características de um estado de número deslocado são relativamente robustas quando está incluída a dissipação da energia. Usando o formalismo da distribuição de quase-probabilidade e, resolvendo a equação de Fokker-Planck, os autores em [17] descreveram a evolução temporal de “estados gatos” no espaço de fase e derivaram a taxa de decaimento da coerência quântica. Um dos modelos de “estados gatos” de Schrödinger freqüentemente mais usado é baseado na notação de estado coerente “par e ímpar” introduzido em [18]. Esses estados têm a forma

$$|\alpha\rangle = N_{\pm}(|\alpha|)[\hat{D}(\alpha) \pm \hat{D}(-\alpha)]|0\rangle, \quad (1.2)$$

onde N_{\pm} é o fator de normalização, $|0\rangle$ é o estado de vácuo e

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^{\dagger} - \alpha^*\hat{a}), \quad (1.3)$$

é o operador deslocamento. Como foi mostrado por Caldeira, Leggett e Buzek em [6, 8], o tempo de descoerência para a superposição (1.2) com $|\alpha|^2 \gg 1$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as componentes:

$$T_{desco} \sim T_{rel}/(2|\alpha|^2) \quad (1.4)$$

onde T_{rel} é o tempo de relaxação do sistema. Foi mostrado por Caldeira e Leggett [8] (também podemos ver na equação) (1.4) que o tempo de descoerência cai rapidamente com o aumento da distância entre os componentes da superposição, apesar de existirem possibilidades de influenciar esse tempo, usando reservatórios não-térmicos (comprimidos ou outros). Mas, nestes casos, as componentes da superposição não têm nenhuma “estrutura” interna. Podemos dizer, segundo a terminologia usada, que os ”gatos de Schrödinger” são “lisos” nestes casos. Nós pretendemos estudar os problemas da descoerência de superposições mais complicadas (e mais próximas para sistemas macroscópicos realísticos), quando as componentes da superposições têm algumas “estruturas finas” (para os chamados “gatos peludos”), como a superposição de estados de Fock deslocados (**SEFD**) de um único modo do campo que nós consideraremos como uma generalização da equação (1.2) dada por:

$$|\psi\rangle = A^{-1/2} \sum_{k=1}^N c_k \hat{D}(\alpha_k) |m\rangle \quad (1.5)$$

e a superposição de dois estados coerentes de muitos modos como,

$$|A_{\pm}\rangle = N_{\pm} \left(|A\rangle \pm | - A\rangle \right). \quad (1.6)$$

Na equação (1.5), $|m\rangle$ é o estado de Fock, c_k são coeficientes complexos constantes e A é um fator de normalização, na equação (1.6) o fator de normalização é dado por N . Os estados $\hat{D}(\alpha)|m\rangle$ são conhecidos hoje como estado de número deslocado. Suas propriedades foram estudadas por muitos autores (que usaram outros nomes algumas vezes) [19], e métodos de geração e reconstrução foram considerados em [20]. A superposição de estados coerentes ($m = 0$) em um círculo (ou seja $\alpha_k = |\alpha| \exp(i\phi_k)$), foram estudadas em [21–31], e superposições discretas de estados coerentes em uma linha reta foram consideradas em [25–31, 33]. A superposição de estados coerentes mais geral foi estudada em [34, 35]. A descoerência de superposições múltiplas do estado coerente foi analisada em [36, 37]. As propriedades estatísticas, a compressão nas

quadraturas e propostas para a geração da superposição (1.5) com $m \geq 1$ e $c_k = 1$ foram estudadas em [10, 38]. O problema da descoerência destes estados foi considerado em [10, 11], mas somente para pequenos valores dos parâmetros m e $|\alpha|$, não sendo estes valores suficientes para fazer um análise mais profunda da descoerência destes estados.

O nosso objetivo é resolver a equação mestre (ou equivalentemente a equação de Fokker-Planck para a função de Wigner), que descreve os processo de relaxação e descoerência para estados iniciais escolhidos, e ainda analisar o comportamento temporal de diferentes medidas de descoerência. As perguntas que devem ser respondidas, entre outras, são as seguintes: Como a estrutura fina (o número de Fock m , a distância entre as componentes α_k , o número de componentes da superposição e os pesos de cada componente) influencia o tempo de descoerência? Se existe alguma competição entre o tamanho de cada componente m e a distância entre as componentes α_k ou entre o número de componentes e a distância entre elas? Existe algum valor de uma das variáveis em questão que pode alterar o tempo de descoerência? Podemos controlar o tempo de descoerência?

O plano deste trabalho é como segue. No capítulo 2, nós estudaremos a descoerência da superposição de dois estados de número deslocados onde: apresentamos uma maneira simples para determinar a função de Wigner para a superposição de dois estados de número deslocados em termos dos polinômios de Laguerre; analisaremos a estrutura da função de Wigner enfatizando o papel do pico central de interferência, o qual é ausente na coordenada da densidade de probabilidade; discutiremos a evolução da função de Wigner, governada pela equação mestre, para sistemas atenuadores e amplificadores insensível à fase; também compararemos duas possíveis definições do tempo de descoerência, uma baseada na razão inicial de decaimento da pureza quântica e a outra baseada na razão de decrescimento do pico de interferência da função de Wigner na origem do espaço de fase. No capítulo 3, generalizaremos nossa super-

posição para N estados de número e repetiremos todos os passos do capítulo 2. No capítulo 4, estudaremos a descoerência para a superposição de dois estados coerentes de *muitos-modos*, seguindo o capítulo 3. No capítulo 5 nós estudaremos a descoerência de uma superposição de estados coerentes via amortecimento na fase. No capítulo 6, nós estudaremos a descoerência de superposições adicionado-fótons. Por último nós apresentamos as conclusões.

Capítulo 2

Superposição de Dois Estados de Número deslocados

Como mencionamos anteriormente, neste capítulo, nós vamos trabalhar com a superposição de dois estados de número deslocados, que pode ser definida a partir da equação (1.5) fazendo k variar de 1 até 2, o que resulta em

$$|\alpha; m\rangle_{\pm} = A^{-1/2} \left[\hat{D}(\alpha) \pm \hat{D}(-\alpha) \right] |m\rangle. \quad (2.1)$$

Neste caso os pesos c_k são iguais e $\alpha_1 = -\alpha_2$. Segue como definido anteriormente, $|m\rangle$ e $\hat{D}(\alpha)$.

Nossa escolha inicial pela superposição de dois estados de número deslocados definidos na equação (2.1) é explicada por dois motivos. Primeiro, a função de onda ou a função de Wigner deste estado, tem uma rica “estrutura fina” devido à presença adicional do parâmetro discreto m . Segundo, o estado (2.1) ainda é bastante simples para permitir um tratamento analítico. Neste trabalho nós consideraremos a evolução do estado definido em (2.1), quando o oscilador em questão interage com um sistema atenuador ou amplificador linear médio. Como mencionado no capítulo 1, uma de nossas linhas de trabalho é analisar como o parâmetro

adicional m pode mudar a fórmula (1.4), quando $m \sim |\alpha|^2 \gg 1$

2.1 Função de Wigner

É bem conhecido que o princípio da incerteza faz com que o conceito de espaço de fase em mecânica quântica seja bastante problemático. Como uma partícula não pode ter simultaneamente bem definida a sua posição e momento, nós não podemos definir a probabilidade de uma partícula possuir posição q e momento ao mesmo tempo, isto é, nós não podemos definir uma verdadeira distribuição de probabilidade no espaço de fase para uma partícula em um sistema quântico. No entanto, funções, que têm como característica alguma semelhança com as funções de distribuições no espaço de fase (*as funções de distribuições de quasi-probabilidade*), têm provado ser de grande uso para o estudo de sistemas em Mecânica Quântica. Elas não são úteis apenas como ferramentas de cálculo mas também podem prover perspicácias dentro das conexões entre as Mecânicas Clássica e Quântica.

A razão para este último ponto é que as distribuições de quase-probabilidade nos permitem calcular e expressar médias em sistemas quânticos, em uma forma que é muito similar quando comparamos com sistemas clássicos. A primeira destas distribuições de quase-probabilidade foi introduzida por Wigner em 1932 [40] para estudar correções quânticas em relação à mecânica estatística clássica. Esta distribuição particular é conhecida hoje em dia como **função de Wigner**.

2.2 Função de Wigner para Superposição de Dois Estados de Número Deslocados

Para obtermos a função de Wigner da superposição de estados deslocados, nós consideraremos que a função de onda na representação de coordenadas tem a forma

$$\Psi_{\pm}(x) = A^{1/2}[\varphi(x-a) \pm \varphi(x+a)], \quad (2.2)$$

onde a é um parâmetro de deslocamento real, e A é um fator de normalização. Nós estamos supondo que a função $\varphi(x)$ é localizada em uma região finita do espaço. Isto significa que nesta região existe uma extensão característica L e o comprimento de correlação L_c , tal que

$$|\varphi(x)|^2 < \epsilon, \quad |x| > L \quad e \quad |\varphi(x)\varphi(x+L_c)| < \eta \quad (2.3)$$

seja satisfeita para pequenos parâmetros ϵ e η . Se o parâmetro de deslocamento a é suficientemente grande, $a > L, L_c$, então as componentes da superposição são bem separadas, logo a densidade de probabilidade na representação de coordenadas no estado definido em (2.2) resulta em

$$|\Psi(x)|^2 = A^{-1} \left\{ |\varphi(x-a)|^2 + |\varphi(x+a)|^2 \pm 2\text{Re}[\varphi(x-a)|\varphi^*(x+a)] \right\}. \quad (2.4)$$

Esta formação não mostra nenhuma interferência notável entre as duas componentes da superposição, mostrando claramente três termos bem independentes. Isto porque o último termo na equação (2.4) é sempre muito pequeno devido às condições na equação (2.3). Como alguém poderia entender que o estado em estudo não é uma mistura clássica, mais sim uma superposição quântica? A melhor maneira para fazer este discernimento é, ao invés de analisarmos $|\Psi(x)|^2$ na equação (2.4), analisaremos a função de Wigner [41]

$$W(q, p) = \int dv e^{ipv} \langle q - v/2 | \hat{\rho} | q + v/2 \rangle, \quad (2.5)$$

onde $\langle x|\hat{\rho}|x'\rangle$ é o elemento de matriz do operador estatístico $\hat{\rho}$ na base de coordenadas, sendo $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Para simplicidade da fórmula, nós assumimos $\hbar \equiv 1$; além disto, nós também usaremos algumas vezes o argumento complexo $z = (q + ip)/\sqrt{2}$ e também a notação $F(z) = \pi^{-1}W(q, p)$. Logo, pela condição de normalização temos

$$\int W(q, p)dqdp/(2\pi) = \int F(z)d^2z = Tr\hat{\rho} = 1, \quad (2.6)$$

onde $d^2z \equiv dRe(z)dIm(z)$.

Suponha que a função de Wigner $F_\varphi(z)$, correspondente à função de onda de um estado não deslocado, seja conhecida. Então a função de Wigner para a superposição de estados representada em (2.2) tem a forma

$$F_\psi(z) = A^{-1} [F_\varphi(z - a) + F_\varphi(z + a) \pm 2 \cos(2pa)F_\varphi(z)], \quad (2.7)$$

onde p é a coordenada de momento da função de Wigner e $\alpha = a/\sqrt{2}$ estando isto em acordo com a definição de z . Assim nós assumimos daqui por diante que α é real e positivo (isto não resultaria em algum tipo de perda nos resultados físicos, porque em um caso genérico, onde o parâmetro de deslocamento é complexo, seria necessária apenas uma rotação no plano de fase). Para obtermos a equação (2.7), precisamos substituir a função de onda (2.2) na equação (2.5), e assim chegamos a quatro integrais. Desse modo podemos ver que duas delas representam o primeiro e segundo termo no lado direito da equação (2.7). As outras duas integrais restantes têm a forma

$$\int dv e^{ipv} \varphi(q \pm a - v/2) \varphi^*(q \mp a + v/2).$$

Fazendo a mudança de variável $v = u \pm 2a$, podemos verificar que a soma destas duas integrais resultam no último termo da equação (2.7).

Analisando a função de Wigner dada pela equação (2.7) podemos verificar a existência de três picos bem separados (contando que o parâmetro α seja grande). Além dos dois picos

que ocorrem com centros em $z = \pm\alpha$, podemos verificar a existência do pico central em $z = 0$, cuja altura (o valor de $|F_\varphi|$ em $z = 0$) é duas vezes a altura dos picos laterais (veja a figura 2.1. Isto é verdadeiro para uma função $\varphi(x)$, que possa satisfazer as condições dadas em (2.3). A existência do pico central é a melhor manifestação que a superposição oferece para indicar a natureza quântica do estado. Alguém poderia pensar que o pico central é o resultado de algum tipo de truque matemático, porque este pico não aparece na densidade de probabilidade na representação de coordenadas. Mas é bem conhecido na literatura que o valor da função de Wigner pode ser medido em cada ponto do espaço de fase, incluindo também a origem, e esta medida tem claro significado físico [42]. Uma das principais características do pico central é a sua fragilidade devido à presença de fortes oscilações proveniente do termo $\cos(2pa)$, (relembrando que o parâmetro de deslocamento a é grande), assim o pico é sensível para pequenas perturbações do estado quântico. Por esta razão, nós estudaremos a evolução temporal da parte central da função de Wigner, pois neste ponto podemos obter, de modo muito simples, informações sobre a descoerência das superposições quânticas.

Poderíamos multiplicar o segundo termo na fórmula (2.2) por um fator de fase arbitrário $\exp(i\chi)$, em vez de usarmos os coeficientes ± 1 . Isto resultaria no deslocamento do fator $\pm \cos(2pa)$ para um novo fator correspondente a $\pm \cos(2pa + \chi)$. Para este caso, o pico central não ocorrerá mais na origem todas as vezes que $\chi \neq 0, \pi$. Isto nos levará a uma desnecessária complicação técnica, sem mudanças e ganhos físicos. Por esta razão, nós optamos por trabalhar com superposições pares e ímpares, as quais apresentam ter um quadro mais claro para entendimentos.

Agora nós retornaremos para o caso concreto do estado inicial (2.1). A função de Wigner para o estado de Fock $|m\rangle$ é bem conhecida do artigo escrito por Groenewold [43],

$$F(z) = \frac{2}{\pi} (-1)^m e^{-2|z|^2} L_m(4|z|^2). \quad (2.8)$$

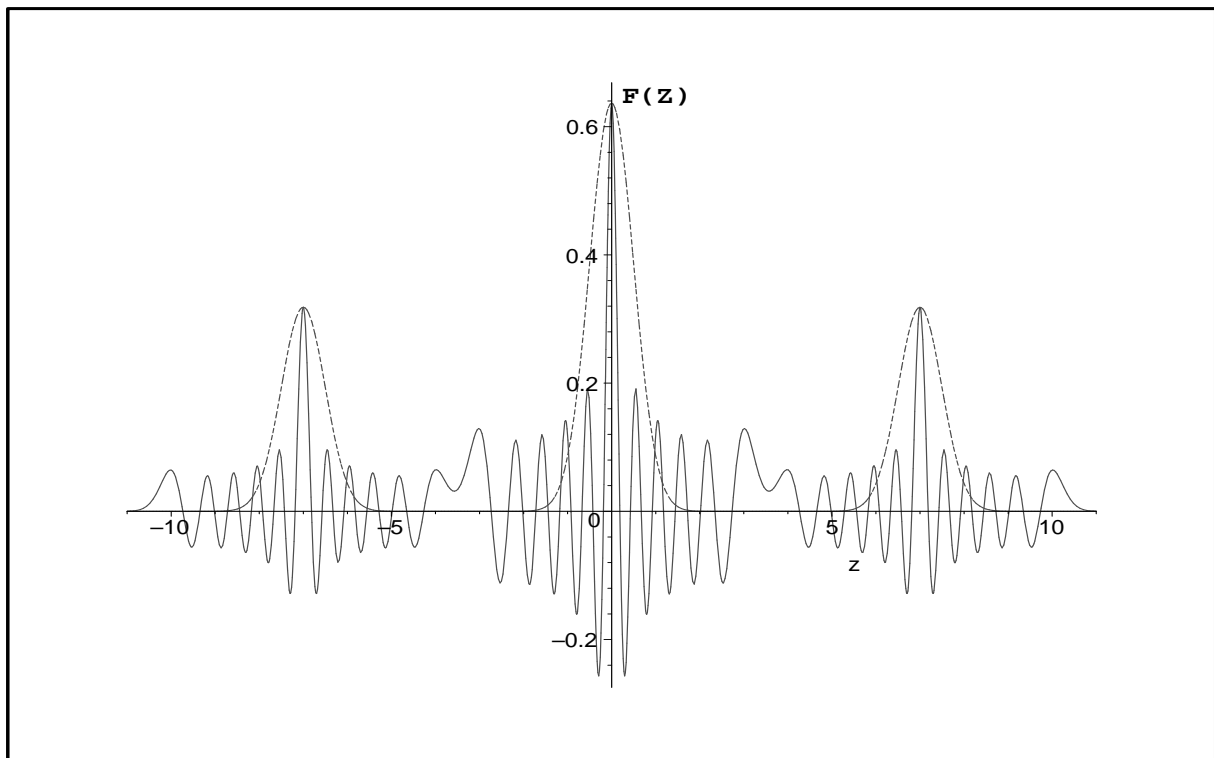


Figura 2.1: A função de Wigner $F_\psi(z)$ (2.7) (para z real) correspondente a uma superposição par do estado de número deslocado com $\alpha = 7$ para $m = 10$ (linha sólida) e $m = 0$ (linha pontilhada).

Usando (2.8) na equação (2.7), nós obtemos a seguinte função de Wigner (a expressão segue valendo para todo número complexo arbitrário α)

$$F_m(z) = \frac{2(-1)^m}{\pi A} \left\{ \Lambda_m(4|\alpha - z|^2) + \Lambda_m(4|\alpha + z|^2) \right. \\ \left. \pm 2 \cos[4\text{Im}(\alpha^* z)] \Lambda_m(4|z|^2) \right\}, \quad (2.9)$$

onde

$$\Lambda_m(x) = \exp(-x/2) L_m(x) \quad (2.10)$$

e $L_m(z) \equiv L_m^{(0)}(z)$ representa os polinômios de Laguerre [45] dados por

$$L_m^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^m \frac{(m+k)!}{(m-n)!n!(k+n)!} (-z)^n. \quad (2.11)$$

O fator de normalização A pode ser facilmente calculado usando a definição dada em (2.1), fazendo $\langle \alpha; m | \alpha; m \rangle = 1$ e, em seguida, usando as fórmulas para elementos de matriz do operador de deslocamento na base de Fock [44], dadas por: para $n \geq m$

$$\langle m | \hat{D}(\gamma) | n \rangle = \sqrt{\frac{m!}{n!}} (-\gamma^*)^{n-m} e^{-|\gamma|^2/2} L_m^{(n-m)}(|\gamma|^2) \quad (2.12)$$

e para $m \geq n$,

$$\langle m | \hat{D}(\gamma) | n \rangle = \sqrt{\frac{n!}{m!}} \gamma^{m-n} e^{-|\gamma|^2/2} L_n^{(m-n)}(|\gamma|^2). \quad (2.13)$$

Nós conseguimos chegar ao seguinte fator de normalização

$$A = 2 \pm 2 \exp(-2|\alpha|^2) L_m(4|\alpha|^2). \quad (2.14)$$

Agora, mostraremos que o comportamento da função de Wigner, dada pela equação (2.9) nas proximidades do centro de cada pico, não é influenciado pela presença dos outros dois picos com a condição imposta sobre α , ($\alpha \gg 1$). As demonstrações são obtidas usando as propriedades da função $\Lambda_m(x)$. Em [45,46] é mostrado entre outras propriedades que $|\Lambda_m(x)| < 1$ para $x > 0$ e qualquer valor inteiro de m . Obviamente $\Lambda_0(x)$ é exponencialmente pequeno para $x \gg 1$, e o mesmo argumento é verdade se $m \sim 1$. Se $m \gg 1$, podemos usar o resultado da secção 10.15 de [45] que é relacionado para o comportamento assintótico dos polinômios de Laguerre. No domínio da monotonicidade temos $x > \nu \equiv 4m + 2 \gg 1$, o que nos leva em $\Lambda_m(x) \approx (2\pi)^{-1/2} [x(x - \nu)]^{-1/4}$. Considerando que no domínio das oscilações nós temos $x < \nu$, o valor absoluto de $\Lambda_m(x)$ não excede o valor $\Lambda_m(x) \approx (2\pi)^{1/2} [x(\nu - x)]^{-1/4}$. No domínio de transição, temos $x \sim \nu$ e a expansão dada em [45] resulta na estimativa $|\Lambda_m(x)| < m^{-1/3}$. Consequentemente $|\Lambda_m(x)| \ll 1$ para qualquer valor de m quando $x \gg 1$.

Este resultado tem duas conseqüências importantes. Primeiro, significa que os estados $|\alpha, m\rangle$ e $|-\alpha, m\rangle$ são quase ortogonais para qualquer valor de m (até mesmo para $m \gg |\alpha|^2$ se $|\alpha| \gg 1$, porque $\langle \alpha, m | -\alpha, m \rangle = \Lambda_m(4|\alpha|^2)$). Segundo, o fator de normalização dado em 2.14 está bem próximo de 2 para $|\alpha| \gg 1$.

A existência dos picos separados com uma estrutura fina na função (2.9) é ilustrada na figura 2.2 (é mostrado somente à parte $z > 0$, devido à propriedade $F(z) = F(-z)$ para o estado em estudo). Para fazermos comparações plotamos na figura 2, a densidade de probabilidade de coordenada $G = |\Psi(x)|^2$ como função de uma escala variada $z = x/\sqrt{2}$ para a mesma superposição de estados de número deslocados

$$G_m(z) = (2^m m! A \sqrt{\pi})^{-1} \left| e^{-2(z-\alpha)^2} H_m(\sqrt{2}(z-\alpha)) + e^{-2(z+\alpha)^2} H_m(\sqrt{2}(z+\alpha)) \right|^2 \quad (2.15)$$

onde $H_m(z)$ são os polinômios de Hermite. Nós vemos que a função $G_m(z)$ é indistinguível de zero para valores pequenos de z e nenhum traço de interferência entre as duas componentes pode ser observado.

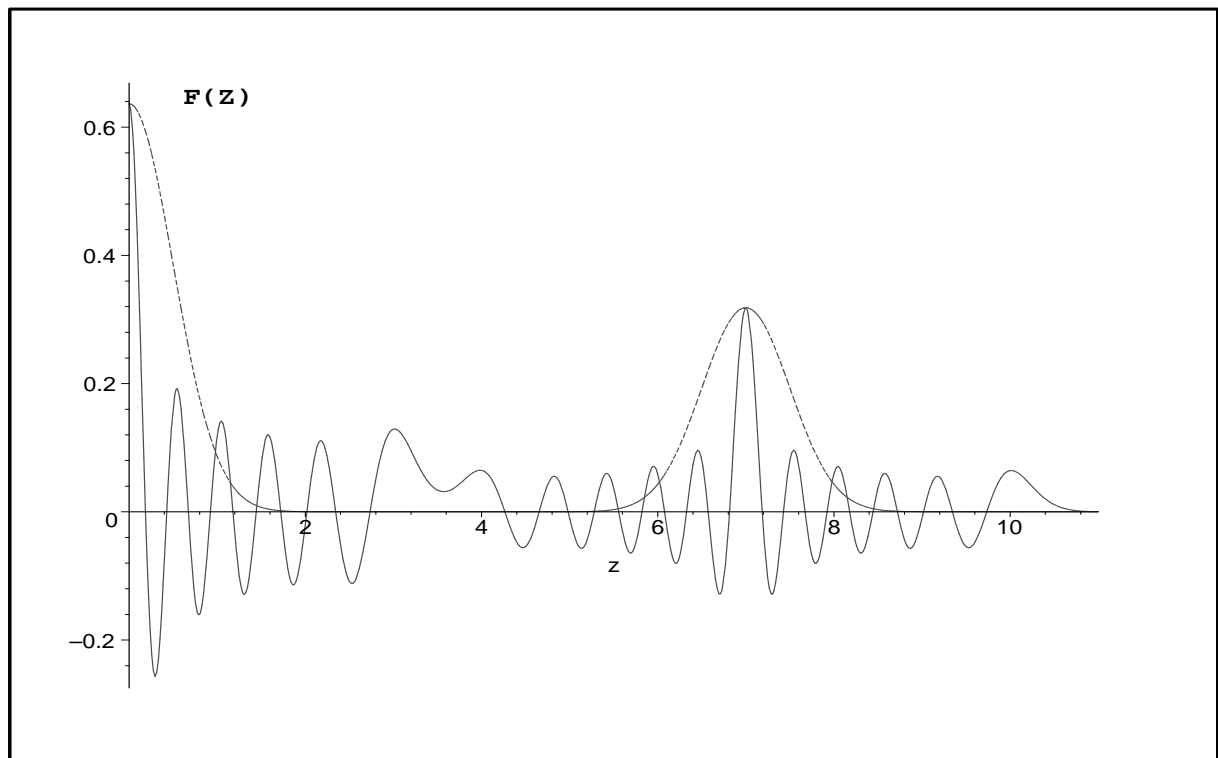


Figura 2.2: A função de Wigner $F_m(z)$ dada em (2.9) (para z real) correspondente a uma superposição par de estado de número deslocados, com $\alpha = 7$, para $m = 10$ (linha sólida) e $m = 0$ (linha pontilhada).

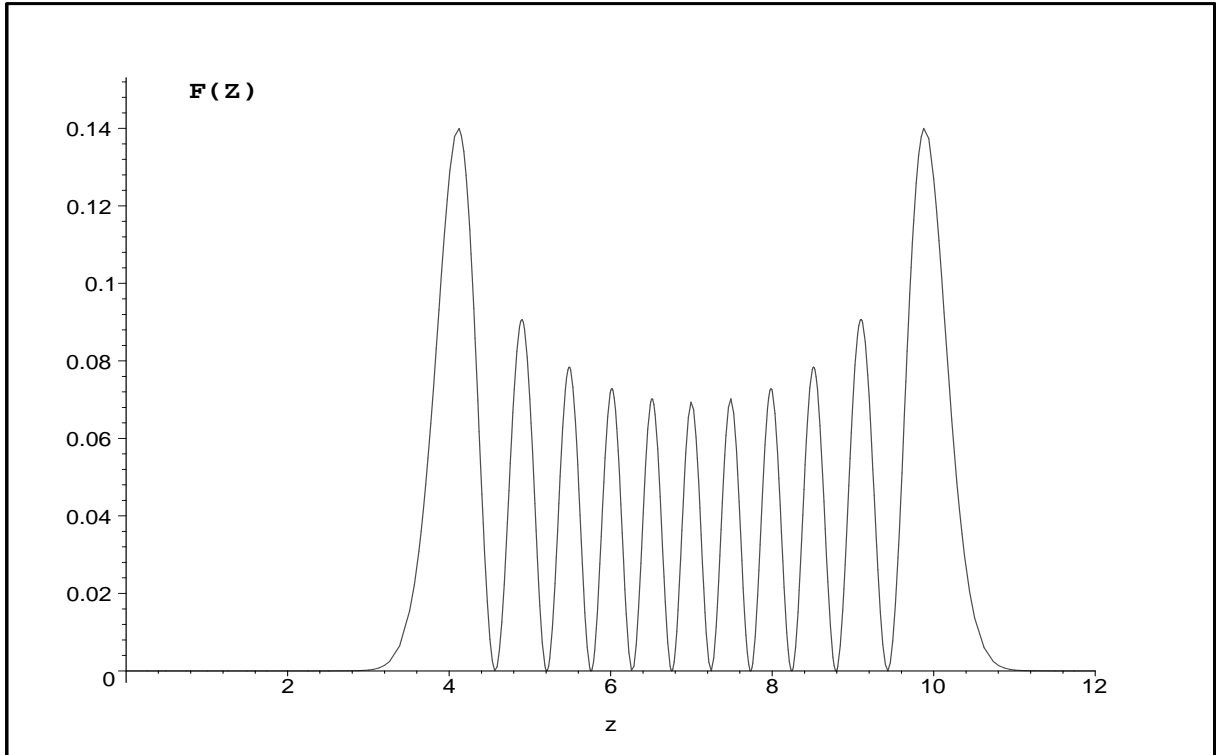


Figura 2.3: A densidade de probabilidade $G_m(z)$ (2.15) para uma superposição par de estados de número deslocados (2.1)

2.3 Evolução Temporal da Função de Wigner

Assumimos que a evolução irreversível do estado quântico (na representação de interação onde as oscilações são rapidamente suprimidas nas altas frequências do oscilador) é governada pela equação mestre dada pela forma [47–50]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \eta N_1 (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \eta N_2 (2\hat{a}^\dagger\rho\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\rho - \rho\hat{a}\hat{a}^\dagger), \quad (2.16)$$

onde \hat{a} e \hat{a}^\dagger são os usuais operadores bosônicos de aniquilação e criação de fótons. O parâmetro positivo η é proporcional ao coeficiente de acoplamento entre o oscilador (ou o modo do campo escolhido) e o reservatório. Os parâmetros N_1 e N_2 podem ser interpretados, por exemplo, como o número de átomos do reservatório (ressonantemente interagindo com o oscilador) no estado fundamental e excitado respectivamente. O caso para $N_1 > N_2$ corresponde a um sistema atenuador; quando ocorre $N_2 > N_1$ temos um sistema amplificado.

A dependência temporal da função de Wigner $W(q, p, t)$ obedece à equação de Fokker-Panck, a qual poder ser obtida com um pouco de álgebra a partir da equação (2.16)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} (\gamma q W) + \frac{\partial}{\partial p} (\gamma p W) + D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} \right) \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma &= \eta \sigma N_0 & D &= \frac{1}{2} \eta N_0 \\ N_0 &= N_1 + N_2 & \sigma &= \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\langle \hat{n} \rangle = \frac{1 - \sigma}{2\sigma} = \frac{N_2}{N_1 - N_2}. \quad (2.19)$$

O parâmetro de assimetria σ pode variar no intervalo $[-1, 1]$, sendo este parâmetro positivo para um sistema atenuador e negativo para um sistema amplificado. A solução da equação (2.17) poder ser determinada resolvendo a integral

$$W(q, p; t) = \int \mathcal{K}(q, p; t | q', p', 0) W(q', p'; 0) dq' dp'. \quad (2.20)$$

O propagador $K(q, p; t | q', p', 0)$ pode ser calculado por meios de métodos diferentes como mostrado em [39, 51, 52]. Uma expressão explícita para o caso mais geral de operadores quadráticos multidimensionais dependente do tempo (com respeito a $q, p, \partial/\partial q, \partial/\partial p$), no lado direito da equação de Fokker-Planck, foi dada em [39]. Para o sistema que nós estamos trabalhando, a forma geral dada em [39] é reduzida para [53]

$$K(q, p; t | q', p', 0) = (\pi\tau)^{-1} \exp \left\{ -\tau^{-1} \left[q^2 + p^2 + G^2 (q'^2 + p'^2) - 2G (q'q + p'p) \right] \right\}, \quad (2.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \tau(t) &\equiv [1 - G^2(t)]/\sigma, & G(t) &= \exp(-\gamma t) = \sqrt{1 - \sigma\tau}, \\ t(\tau) &= -(2\gamma)^{-1} \ln(1 - \sigma\tau). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Note que $\tau(t) \geq 0$ independentemente do sinal do parâmetro σ . No limite quando temos $t \rightarrow 0$, nós temos $\tau \approx 2\eta N_0 t = 4Dt = 2\gamma t/\sigma$, assim o parâmetro τ não depende de σ (ou seja não depende da temperatura efetiva) se o coeficiente de difusão D for fixado. Porém, para um coeficiente de amortecimento fixado, o tempo usual t pode ser muito menor que τ , se $|\sigma| \ll 1$ (isto é, caso de altas temperaturas). Para um sistema dissipativo nós temos $G(t) \leq 1$ e para um sistema amplificativo nós temos $G(t) \geq 1$.

Também vale a pena observar uma consequência bem conhecida da equação (2.16), isto é, a equação para o número médio de fons $\langle n \rangle \equiv Tr(\rho \hat{a} \hat{a}^\dagger)$

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = -2\gamma \langle n \rangle + N_0(1 - \sigma), \quad (2.23)$$

cuja solução é:

$$\langle n \rangle(t) = \langle n \rangle_0 e^{-2\gamma t} + \frac{N_0(1 - \sigma)}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}), \quad (2.24)$$

a qual assegura, para o estado inicial arbitrário, o mesmo valor inicial $\langle n \rangle_0$. Na equação (2.24) podemos verificar que o tempo de relaxação do sistema $(2|\gamma|)^{-1}$ não depende do estado inicial; porém isto pode ser um processo mais complicado.

Aplicando o propagador dado pela equação (2.21) na função de Wigner dada na equação (2.9) e usando a fórmula (veja o apêndice **B**)

$$\begin{aligned} & \int dx dy \exp(-g[x^2 + y^2] + cx + dy) L_n(a[x^2 + y^2]) \\ &= \frac{\pi(g - a)^n}{g^{n+1}} \exp\left(\frac{c^2 + d^2}{4g}\right) L_n\left(\frac{a[c^2 + d^2]}{4g(g - a)}\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

chegaremos à seguinte expressão para a função de Wigner dependente do tempo

$$\begin{aligned} F_m(z, \tau) = & \frac{Y^m}{\pi A X^{m+1}} \left\{ \exp(-|G\alpha - z|^2/X) \times L_m\left(-\frac{G^2}{XY}|G\alpha - z|^2\right) \right. \\ & + \exp(-|G\alpha + z|^2/X) L_m\left(-\frac{G^2}{XY}|G\alpha + z|^2\right) \pm 2\text{Re} \left[\exp\left(\frac{[2iG\text{Im}(z\alpha^*) - |z|^2 - \tau|\alpha|^2]/X}{XY}\right) \right. \\ & \left. \left. \times L_m\left(\frac{[\tau\alpha - Gz][\tau\alpha + Gz]^*}{XY}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $X(t)$ e $Y(t)$ são dados por

$$X(t) = \frac{1}{2}[\tau(t) + G^2(t)] \equiv \frac{1}{2}[1 + \tau(1 - \sigma)], \quad Y(t) = \frac{1}{2}[\tau(t) - G^2(t)] \equiv \frac{1}{2}[1 - \tau(1 + \sigma)]. \quad (2.27)$$

Uma expressão mais complicada para a função de Wigner dependente do tempo, $F_m(z, t)$, foi obtida por Alkader em [31, 32] com a ajuda da função característica. Esta expressão obtida em [31, 32] pode ser reduzida para (2.26), levando em conta algumas identidades para a soma dos polinômios de Laguerre. Aqui temos três casos de interesse especial para análise: $\sigma = \pm 1, 0$. Note que, para um dado valor do coeficiente γ de amortecimento ou amplificação do sistema, o coeficiente de difusão D é mínimo para $\sigma = \pm 1$.

Para $\sigma = 1$ (o sistema é atenuador e possui temperatura zero) nós temos $X(t) \equiv 1/2$, $Y(t) \equiv \tau - 1/2$, $\tau(t) = 1 - \exp(-2\gamma t)$, $G(t) = \exp(-\gamma t) = \sqrt{1 - \tau}$ e $\gamma > 0$.

Para $\sigma = -1$ (o sistema é amplificado) nós temos $X(t) = \tau + 1/2$, $Y(t) \equiv -1/2$, $\tau(t) = -1 + \exp(-2\gamma t)$, $G(t) = \exp(|\gamma|t) = \sqrt{1 + \tau}$ e $\gamma < 0$.

O caso para $\sigma = 0$ (o reservatório com temperatura infinita) o sistema não possui amplificação nem relaxação, ou seja, o coeficiente $\gamma = 0$, mas o coeficiente de difusão D é diferente de zero. A função de Wigner é dada pela equação (2.26), onde resultaria em $G \equiv 1$, $X(t) = (\tau + 1)/2$, $Y(t) = (\tau - 1)/2$, e $\tau(t) = 4Dt$,

2.4 Dinâmica da Descoerência

Para definir, e também calcular o tempo de descoerência, primeiramente precisamos de alguma medida $\mathcal{C}(t)$ que seja função de uma única variável no tempo, a qual poderá servir como uma indicadora simples para o *grau de coerência* de um estado quântico (porque a função de Wigner total ou a matriz densidade depende de muitas variáveis). Inicialmente iremos normalizar esta função com uma condição inicial $\mathcal{C}(0) = 1$, e supondo que $\mathcal{C}(t) \leq 1$ para $t > 0$,

de forma que a coerência degrada (*descoerência*) com o passar do tempo. Aqui temos pelo menos duas possibilidades simples para definir o tempo de descoerência. Primeiro: podemos escolher algum valor $\eta < 1$ e então definimos o tempo t_η "η-descoerência" como uma solução para a equação

$$\mathcal{C}(t_\eta) = \eta. \quad (2.28)$$

Neste caso, temos que conhecer a função $\mathcal{C}(t)$ para algum intervalo de tempo finito e resolver a equação neste intervalo (2.28) (na maioria dos casos numericamente). Uma outra possibilidade é definir o "tempo de descoerência inicial" (TDI) t_{in} , simplesmente como o inverso da derivada de $\mathcal{C}(t)$ em $t = 0$:

$$t_{in}^{-1} = |d\mathcal{C}/dt|_{t=0}. \quad (2.29)$$

Uma vantagem técnica da definição dada em (2.29) é que a derivada inicial da função \mathcal{C} pode ser encontrada para alguns casos sem qualquer conhecimento prévio de $\mathcal{C}(t)$ para $t > 0$ (veja algumas ilustrações nas secções seguintes). Os exemplos conhecidos são relacionados para a descoerência de uma simples superposição inicial de dois estados coerentes. Todas as definições são de fato equivalentes, porque no caso destes exemplos a função $\mathcal{C}(t)$ estava muito próxima de uma função exponencial. Neste caso específico, cada um dos tempos pode ser transformado no outro tempo por uma simples transformação nos cálculos:

$$t_{in} = t_{\eta=1/e}, \quad t_\eta = t_{in} \ln(1/\eta). \quad (2.30)$$

Um dos objetivos de deste trabalho é mostrar que para superposições com uma estrutura mais rica (superposições com duas ou mais componentes N ou com alto "nível de excitação" m de cada componente da superposição), a definição dada em (2.29) não caracteriza corretamente o processo de descoerência, e dentro desta estrutura mais rica, a escolha da definição dada em (2.28) é a mais apropriada quando nós escolhemos um nível η de coerência

tolerante. Nas próximas subsecções, nós apresentaremos e compararemos duas funções \mathcal{C} : a pureza quântica e a altura do pico central de interferência.

2.4.1 A Pureza Quântica como Indicador de Descoerência

Toda a informação da evolução do sistema quântico, incluindo o **tempo de descoerência**, está guardada na função (2.26). Uma das maneiras mais simples de determinar o tempo de descoerência, é calcular a derivada em relação ao tempo do operador estatístico $\hat{\rho}$ no instante inicial $t = 0$. Uma grande vantagem em usar este caminho, é que a derivada em relação ao tempo (que é a idéia básica) pode ser calculada com um pouco de álgebra diretamente da equação mestre (2.16) no instante $t = 0$, sem resolver esta equação para $t > 0$. Por exemplo, usando a pureza quântica, dada por $\mu \equiv Tr(\hat{\rho}^2)$ como uma medida do grau de coerência, nós podemos obter imediatamente da equação mestre, dada em (2.16), a expressão universal para a razão de decaimento desta quantidade (a coerência) em um estado arbitrário inicialmente puro $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \hat{\rho}^2$ estudada em [54, 55]

$$\dot{\mu}|_{t=0} = 2Tr(\hat{\rho}\dot{\hat{\rho}})|_{t=0} = -2\eta N_0(1 - \sigma + 2P), \quad (2.31)$$

onde P é dado por

$$P \equiv \langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle - |\langle\psi|\hat{a}|\psi\rangle|^2. \quad (2.32)$$

Então podemos chamar a quantidade $\tau_{dec}^{in} = (|\dot{\mu}|_{t=0})^{-1}$ como o tempo descoerência inicial (TDI). A equação dada em (2.31) mostra que a razão inicial de depuração é sempre maior para o caso de amplificação, que corresponde a $\sigma = -1$, quando comparada com o caso de atenuação no qual $\sigma = 1$, para os mesmos estados iniciais. Se o produto ηN_0 (isto é, o coeficiente de difusão) é fixado, então a diferença é significativa somente para estados iniciais, os quais estão próximos do estado coerente (ou vácuo) quando $P \ll 1$. Porém, se o parâmetro fixado for o coeficiente

de amortecimento γ , então a equação dada em (2.31) é escrita como segue

$$\dot{\mu}|_{t=0} = -2\gamma(1 - \sigma + 2P)/\sigma, \quad (2.33)$$

na qual podemos ver que diminuindo o parâmetro σ (isto equivale a um aumento na temperatura) resultará em um significativo incremento na taxa de descoerência (o que é esperado).

Obviamente que $\langle \Psi | \hat{a} | \Psi \rangle = 0$ para o estado inicial (2.1). O valor médio dado em $\langle \Psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \Psi \rangle$ para o estado encontrado em (2.1) pode ser calculado com a ajuda das relações

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{D}(\alpha) &= \hat{D}(\alpha) (\hat{a} + \alpha), & \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) &= \hat{D}(\alpha) (\hat{a}^\dagger + \alpha^*) \\ \hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, & \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \end{aligned} \quad (2.34)$$

em conjunto com a fórmula dada pela equação (2.13) e a identidade $L_n^\alpha(x) - L_{n-1}^\alpha(x) = L_n^{\alpha-1}(x)$.

Com um pouco de álgebra conseguimos chegar ao resultado

$$\langle \Psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \Psi \rangle = m + |\alpha|^2 \mp \frac{2|\alpha|^2 \Lambda_m(4|\alpha|^2)}{1 \pm \Lambda_m(4|\alpha|^2)}, \quad (2.35)$$

onde a função $\Lambda(x)$ foi definida na equação (2.10). Na figura 2.4, mostramos a dependência do número médio de fótons inicial P , isto é, tempo de descoerência inicial inverso, em função do parâmetro m para $\alpha = 5$ em uma superposição de estados par. Vimos que para $m < |\alpha|^2$, a contribuição do último termo em (2.35) é insignificante, assim o tempo de descoerência inicial τ_{dec}^{in} decresce monotonicamente com o crescimento de m ou $|\alpha|^2$. Um resultado aproximadamente similar foi obtido em Braunstein [9], que calculou a derivada em relação ao tempo no momento inicial da quantidade $Re(\frac{d}{dt}) \ln \langle -\alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$.

Mas a figura (2.4) demonstra claramente a existência de oscilações em P (conseqüentemente também em τ_{dec}^{in}) para $m > |\alpha|^2$. Usando a fórmula assintótica 10.15(1) encontrada em [45] para a função $\Lambda(x)$, nós podemos escrever a equação (2.35) no domínio das oscilações da seguinte forma

$$\langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle \approx m + |\alpha|^2 \mp \left(\frac{4|\alpha|^6}{\pi^2 m} \right)^{1/4} \cos(4|\alpha| \sqrt{m} - \pi/4). \quad (2.36)$$

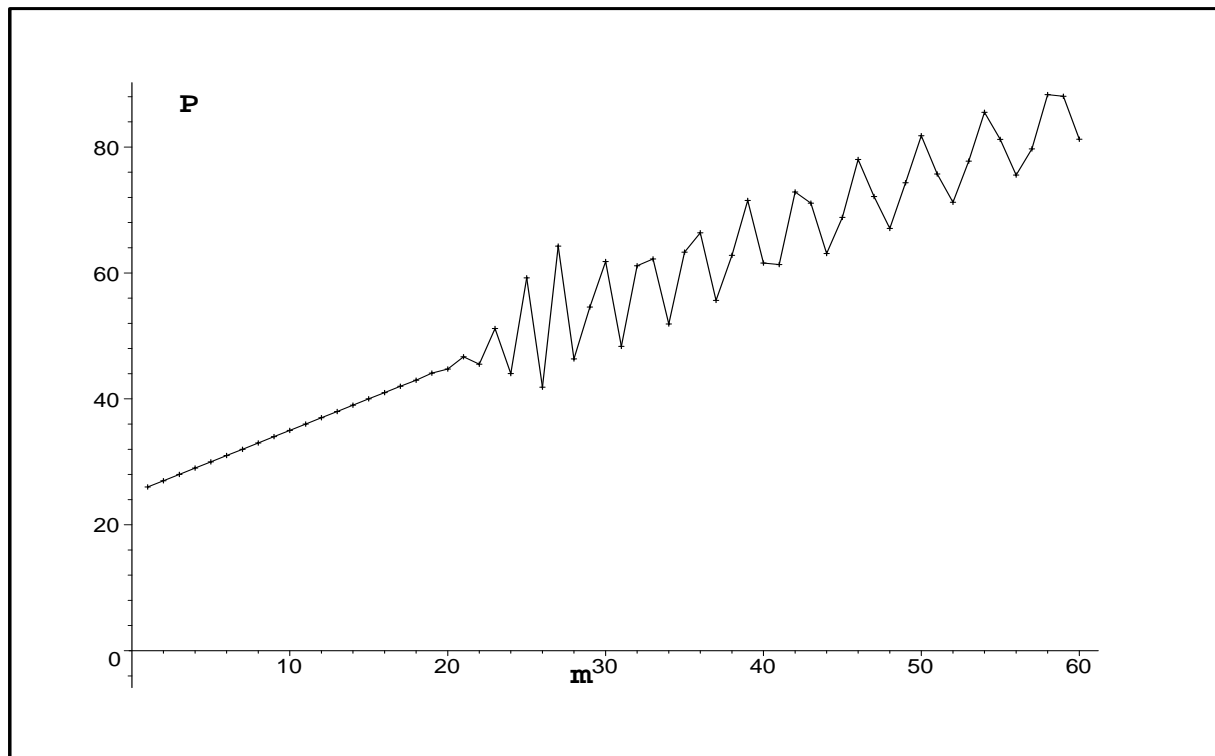


Figura 2.4: O número médio de fótons P , dado na fórmula (2.35) para uma superposição par de dois estados número deslocados, com $\alpha = 5$ versus o parâmetro m .

Embora a amplitude das oscilações decresça com o incremento de m , isto ainda é da ordem de $\alpha \gg 1$, se a razão $m/|\alpha|$ não for muito grande. De fato, uma precisão mais assintótica na forma da expansão de Tricomi leva a uma amplitude das oscilações da ordem de $|\alpha|^{4/3}$, isto se a razão $m/|\alpha|$ estiver próxima de 1 (mas excedendo o valor da unidade).

Analisando a situação, nós podemos chegar a conclusões muito importantes. Primeira: o decrescimento monotônico do tempo de descoerência com aumento do parâmetro m não é uma lei universal, mas sim podendo ser violada por superposição quântica com uma desenvolvida “estrutura fina” (quando m é grande suficiente). Segunda: o “tempo de descoerência inicial” não caracteriza o processo de descoerência completamente, sendo unicamente um dos muitos parâmetros diferentes que deveria ser levado em conta para obter uma descrição completa do processo de descoerência [53]. Terceira: o original TDI é uma consequência da existência

de alguma lei de escala na dependência do tempo da quantidade que caracteriza o grau de descoerência e coerência. No caso da superposição de estados coerentes, estas dependências têm uma forma exponencial que pode ser vista em [6, 8], como sendo $\exp(-\xi|\alpha|^2\gamma t)$, onde ξ é um coeficiente numérico, e esta dependência resulta na equação (1.4) (veja também a equação (2.41). Mas no caso de superposições mais complicadas, caracterizadas por vários parâmetros, é difícil esperar a existência de uma lei de escala semelhante (e não há nenhuma razão para esperar dependências exponenciais como a anterior). Conseqüentemente apenas conhecimento da derivada inicial pode ser insuficiente para a descrição completa do processo de descoerência.

Parece razoável procurarmos a dependência do tempo de algumas quantidades, sensível à presença ou ausência de efeitos de interferência quântica, para algum intervalo de tempo mais longo. A pureza dificilmente pode servir bem este propósito [53]. Por exemplo, no estágio inicial da evolução, a pureza de um estado, que coincide com a usual superposição de estados coerentes (1.2) no momento inicial, não pode decrescer para um valor menor que $\mu = 1/2$, que é a pureza de uma mistura incoerente de dois estados ortogonais. Além disso, no curso da seguinte evolução, a pureza pode voltar ao valor de unidade inicial (no caso de um sistema atenuador para uma temperatura igual a zero) ou tender assintoticamente para alguns pequenos valores (no caso de um reservatório de altas temperaturas), mas estes valores assintóticos não têm nenhuma relação com a descoerência.

Por este motivo, nós precisamos usar outro tipo de função na qual possamos medir a descoerência.

2.4.2 Decaimento do pico de interferência da Função de Wigner na Origem

Descoerência significa o desaparecimento da interferência gerada pelas diferentes com-

ponentes de uma superposição inicial de estados . Estas interferências resultam, em particular, nas típicas franjas, na parte central da distribuição de quase-probabilidade no espaço de fase inicial (veja a figura 2.2). Nas figuras 2.5-2.8 nós plotamos dois gráficos em cada uma delas e mostramos a evolução da função de Wigner para uma susperposição de estados coerentes par em conjunto com uma superposição de dois estados de número deslocados para diferentes valores de parâmetros m e α .

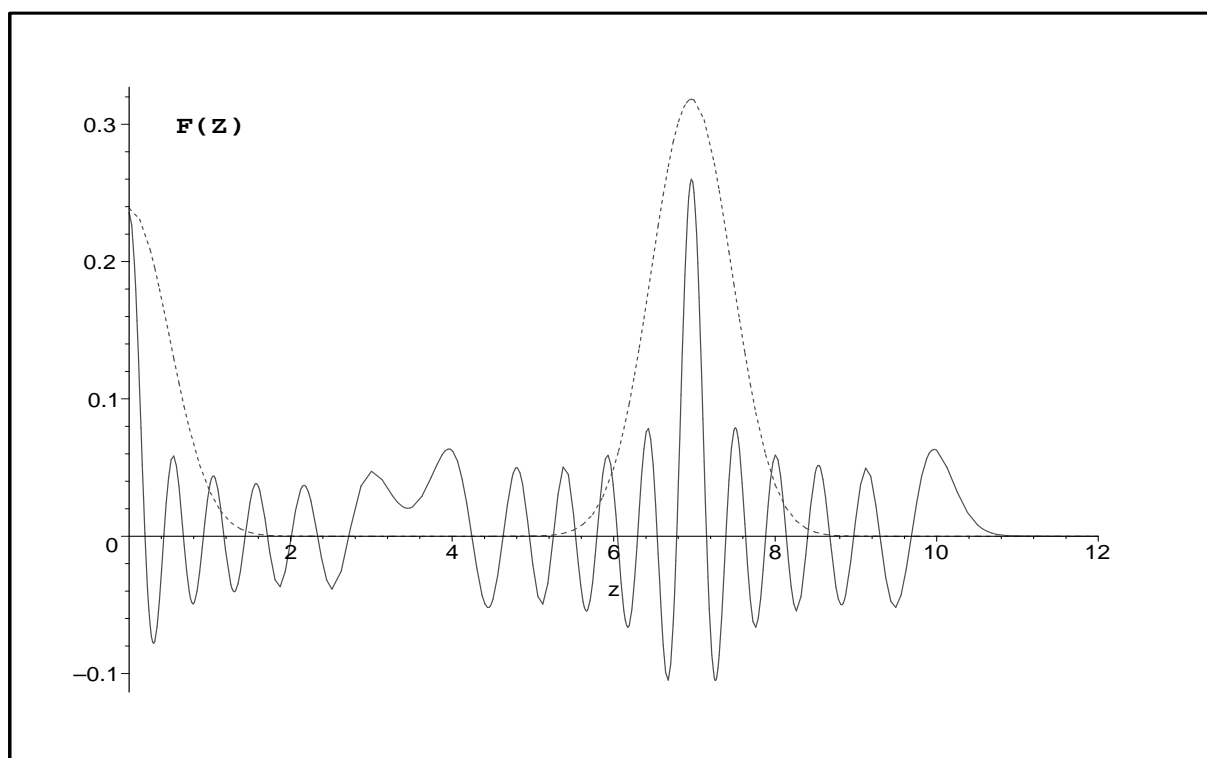


Figura 2.5: A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (2.26) (para z real) para uma superposição par de dois estados número deslocados, com $\alpha = 7$, para $m = 10$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_1 = 0.01 \approx (2\alpha^2)$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)

Nas figuras 2.5-2.8 nós podemos fazer observações muito importantes, tais como:

- O pico central de interferência da superposição com $m = 0$ (sem a “estrutura fina” da função de onda inicial) desaparece mais rápido do que no caso quando $m \neq 0$. Além disso, o

tempo de sobrevivência da estrutura de interferência no centro aumenta com o incremento da razão m/α^2 .

- Para uma razão m/α^2 relativamente pequena, o padrão de interferência na origem para uma “estrutura fina” desaparece muito mais rapidamente, quando comparada com os picos laterais constituintes do sistema. Porém, esta situação torna-se invertida quando temos a razão $m/\alpha^2 \approx 1$.

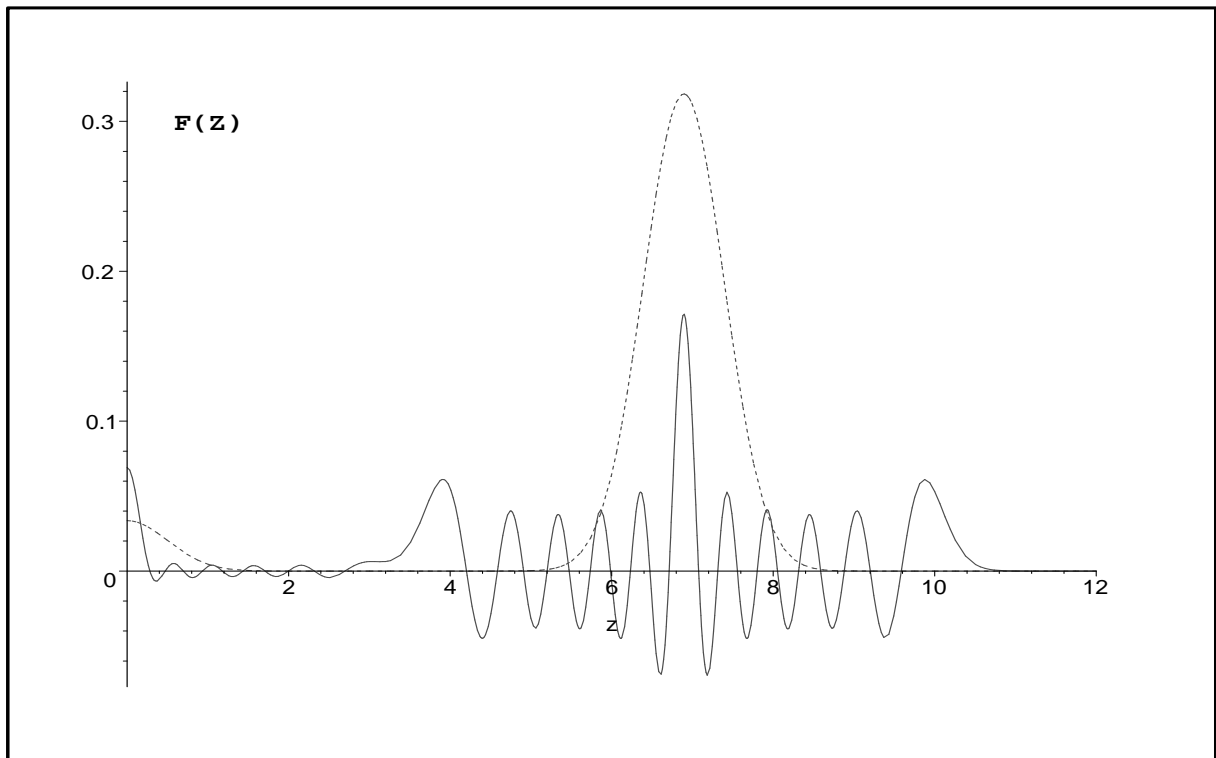


Figura 2.6: Os mesmos dados da figura (2.5), mas para $\tau_2 = 0.03 = 3\tau_1$

Baseado nestas observações, deduzimos que importantes informações referentes ao tempo de descoerência podem ser obtidas analisando a evolução da altura do pico de interferência, dado pelo último termo da função de Wigner (2.26) dependente do tempo com $z = 0$. Normalizando esta quantidade para $\tau = 0$, obtemos a seguinte função (relembrando que

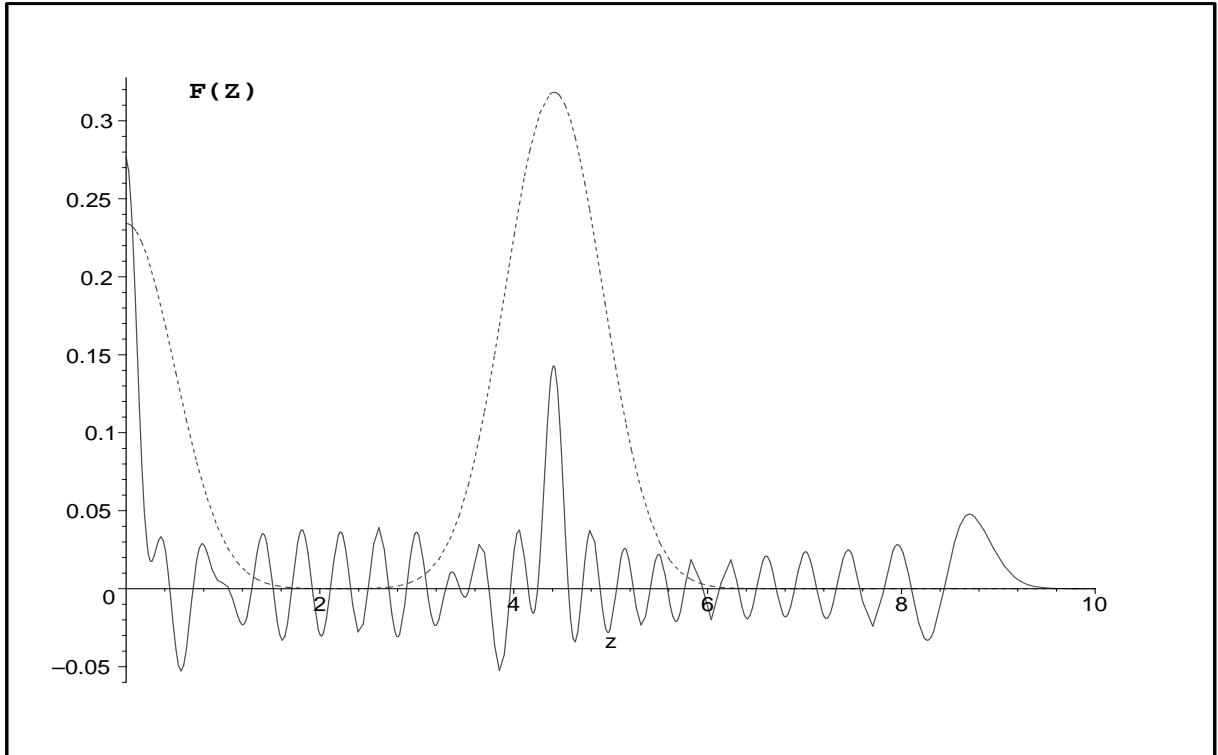


Figura 2.7: A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (2.26) (para z real) para uma superposição par de dois estados número deslocados, com $\alpha^2 = 20$, para $m = 20$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_3 = 0.025 \approx (2\alpha^2)$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)

assumimos que α é um número real e positivo):

$$f_m(\tau) = \frac{[1 - \tau(1 + \sigma)]^m}{[1 + \tau(1 - \sigma)]^{m+1}} \exp\left(-\frac{2\tau\alpha^2}{1 + \tau(1 - \sigma)}\right) \times L_m\left(\frac{4\tau^2\alpha^2}{\tau^2 - (1 - \sigma\tau)^2}\right). \quad (2.37)$$

A expansão em série de Taylor desta função com respeito a τ resulta na seguinte expressão

$$f_m(\tau) = 1 - \tau(2m + 2\alpha^2 + 1 - \sigma) + \tau^2 \left[2m(m-1) + 2\alpha^4 + 8m\alpha^2 + (1 - \sigma)(4\alpha^2 + 4m + 1 - \sigma) \right] + \dots \quad (2.38)$$

Se levarmos em conta apenas o primeiro termo desta expansão (o termo linear) que equivale ao cálculo da primeira derivada de $f_m(\tau)$ em relação ao tempo com $\tau = 0$ (em [56] foi usada uma aproximação semelhante para estimar o tempo de descoerência para $m = 0$), nós chegamos novamente a um **TDI** que decresce aproximadamente com $(m + \alpha^2)^{-1}$. Na equação (2.35 nós já

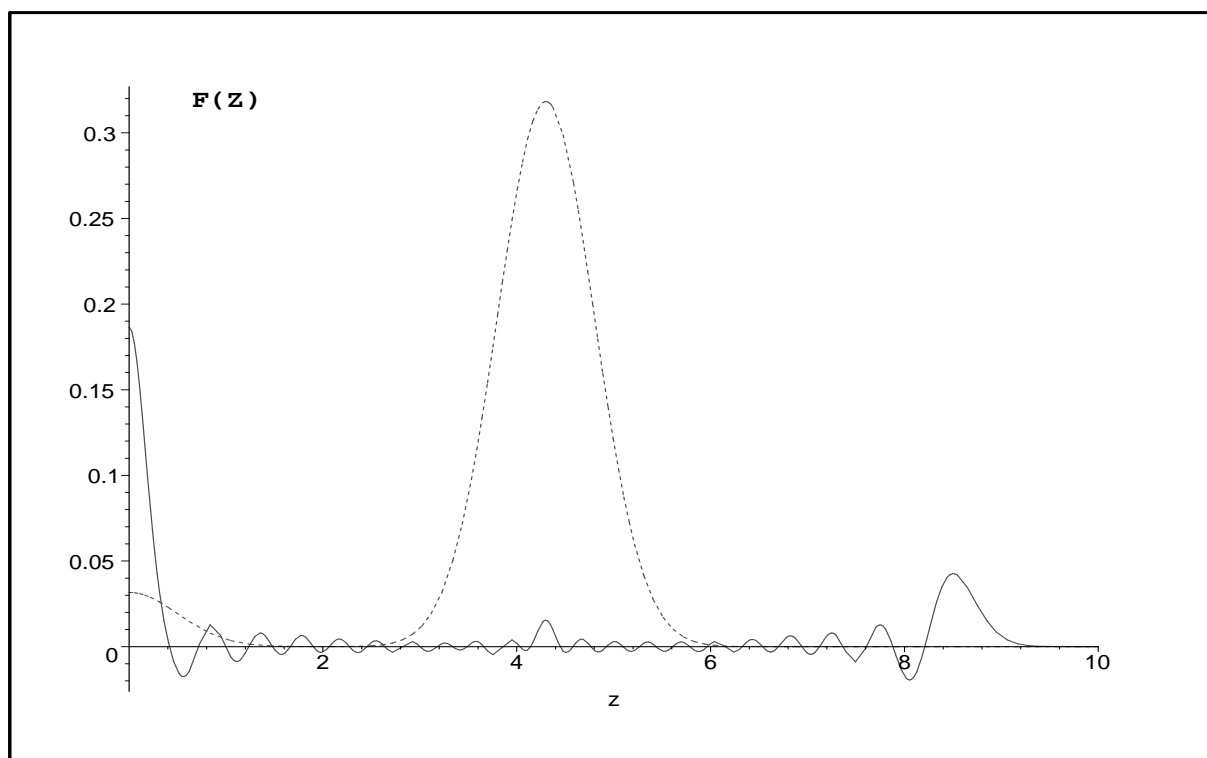


Figura 2.8: Os mesmos dados da figura 6, mas para $\tau_4 = 0.075 = 3\tau_3$

háviamos obtido este resultado e concluímos que ele sozinho não era suficiente para descrever o processo de descoerência. Porém na expansão da equação (2.37), o segundo termo indica que após algum intervalo de tempo finito (embora pequeno) a função $f_m(\tau)$ pode decrescer mais **lentamente** para grandes valores de m enquanto que para valores menores de m a função decrescerá mais **rapidamente**. Isto pode ser confirmado na figura 2.9.

Um outro fato que podemos observar através $f_m(\tau)$ dada pela fórmula (2.37), é que para $\alpha > 50$ os gráficos se sobrepõem para diferentes valores de m . Em outras palavras o comportamento da função de Wigner na origem para uma superposição de estados de número deslocados com o deslocamento das componentes $\alpha > 50$, é o mesmo comportamento de uma superposição de estados coerentes com o deslocamento das componentes $\alpha > 50$, ou seja, o tempo de descoerência é o mesmo em todas superposições. Isto pode ser conferido nas figuras 2.10. Um tempo de descoerência condicional τ_β^m pode ser definido como um tempo necessário

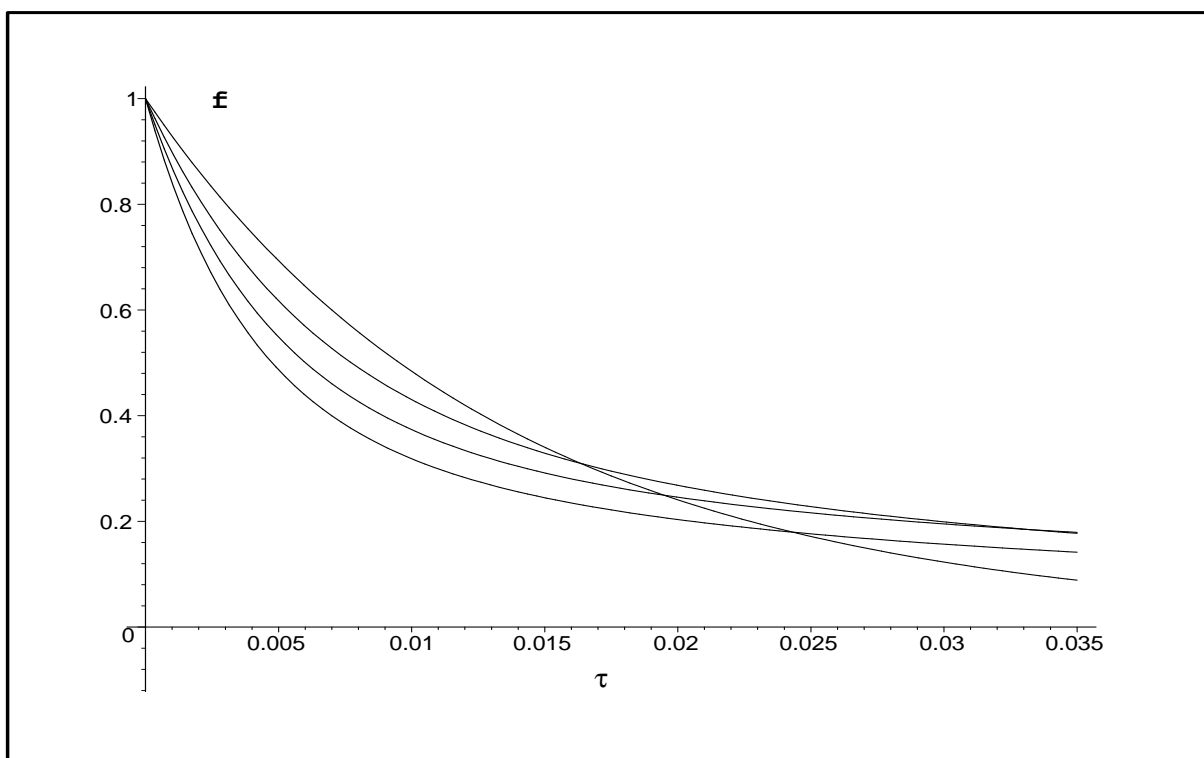


Figura 2.9: A dependência da altura do pico de interferência normalizado da função $f_m(\tau)$ dada pela fórmula (2.37), "no tempo compacto" τ , para um sistema atenuador com temperatura zero, para $\alpha = 6$ e $m = 0, 18, 36, 54$ (esta ordem corresponde às linhas de cima para baixo próximo do eixo vertical)

para diminuir a função $f_m(\tau)$ do valor inicial 1 para algum valor fixado $\exp(-\beta) < 1$, então propomos a equação:

$$f_m(\tau_\beta^{(m)}) = \exp(-\beta). \quad (2.39)$$

Esta definição pode ser chamada de "tempo de descoerência final do pico de interferência" (**TDF**).

Como ilustração vamos usar um caso simples para $\sigma = 1$ (sistema atenuador em uma temperatura zero). Neste caso temos

$$f_m(\tau) = (1 - 2\tau)^m \exp(-2\tau|\alpha|^2) L_m \left(\frac{4\tau^2|\alpha|^2}{2\tau - 1} \right) \quad (2.40)$$

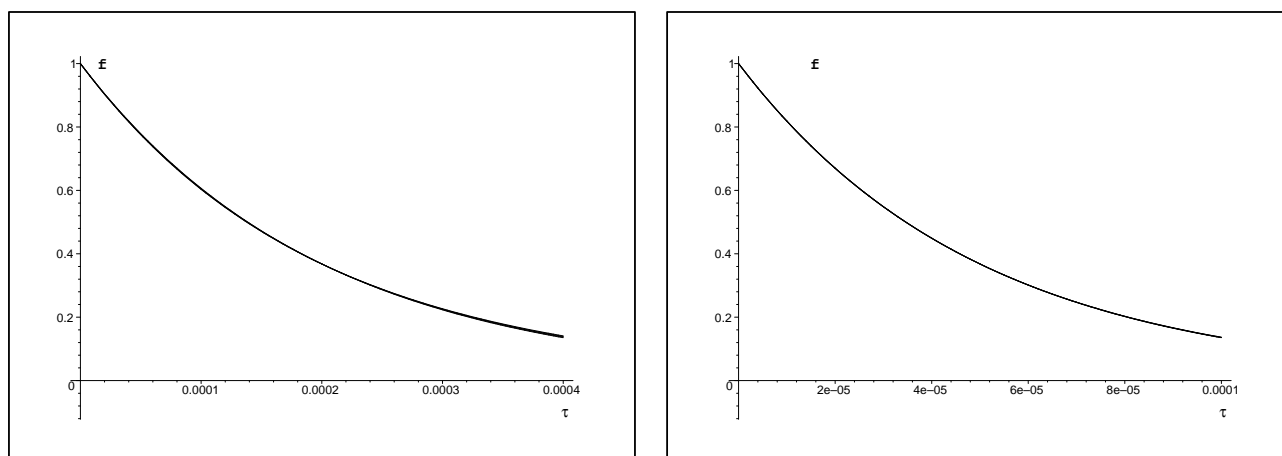


Figura 2.10: Esquerda: dependência da altura do pico de interferência normalizado da função $f_m(\tau)$ dada pela fórmula (2.37), “no tempo compacto” τ , para um sistema atenuador com temperatura zero, para $\alpha = 50$ e $m = 0, 18, 36, 54$. Direita: a dependência da altura do pico de interferência normalizado da função $f_m(\tau)$ dada pela fórmula (2.37), “no tempo compacto” τ , para um sistema atenuador com temperatura zero, para $\alpha = 100$ e $m = 0, 18, 36, 54$

e para $m = 0$ ou seja, uma superposição de estados coerentes, a equação (2.39) torna-se

$$\tau_\beta^{(0)} = \beta / (2|\alpha|^2) \quad (2.41)$$

e verificando esta equação concluímos que ela está de acordo com a equação (1.4). Substituindo a equação (2.41) em (2.40) e usando os polinômios de Laguerre de ordem 1, nós obtemos a função $f_1(\tau)$ como sendo

$$f_1(\tau_\beta^{(0)}) = e^{-\beta} [1 + \beta(\beta - 1) / |\alpha|^2]. \quad (2.42)$$

neste caso podemos verificar que $\tau_1^{(1)} = \tau_1^{(0)}$, onde $\tau_\beta^{(1)} < \tau_\beta^{(0)}$ para $\beta < 1$ e $\tau_\beta^{(1)} > \tau_\beta^{(0)}$ para $\beta > 1$. Este exemplo mostra que para $\beta > 1$ o tempo de descoerência pode aumentar com o incremento do número de excitação m , neste caso na função (2.42) aparece um fator multiplicativo que indica um acréscimo na altura do pico de interferência, significando que o pico levará mais tempo para diminuir até a altura $\exp(-\beta)$. Este efeito pode ser verificado com mais evidência quando temos $m \sim \alpha^2 \gg 1$. Para ficar mais claro comparamos as figuras 2.6 e 2.8, as quais mostram

o comportamento da função de Wigner para um intervalo de tempo que é três vezes maior que o tempo “inicial de descoerência” $(2\alpha^2)^{-1}$. O pico central de interferência da superposição de estado com o número de Fock $m = 20$ na figura 2.8 ainda tem uma significativa altura e uma boa estrutura desenvolvida, enquanto o pico de interferência gaussiano da superposição de estados para $m = 0$ já está quase desaparecendo neste momento.

Para grandes valores dos parâmetros m e α o tratamento numérico dos polinômios de Laguerre torna-se muito difícil. Por esta razão nós faremos algumas modificações para facilitar a busca por melhores resultados. Notando que os polinômios de Laguerre na fórmula (2.37) são negativos para $0 < \tau < (1 + \sigma)^{-1}$, nós podemos fazer uso da fórmula assintótica de Hilb dada em [45], $L_n(-x) \sim \exp(-x/2)I_0(\sqrt{4nx})$, esta aproximação acontece uniformemente com respeito a x (incluindo valores pequenos de x) para $n \gg 1$ (onde I_0 é a função de Bessel modificada), reescrevendo a função (2.37) com o auxílio da aproximação anterior, nós conseguimos uma nova função na qual podemos trabalhar com grandes valores de m e α sem nenhum problema, e esta nova função é:

$$f_m(\tau) \approx \frac{[1 - \tau(1 + \sigma)]^m}{[1 + \tau(1 - \sigma)]^{m+1}} \exp\left(-\frac{2\tau|\alpha|^2(1 - \sigma\tau)}{(1 - \sigma\tau)^2 - \tau^2}\right) \times I_0\left(\frac{4\tau|\alpha|\sqrt{m}}{[(1 - \sigma\tau)^2 - \tau^2]^{1/2}}\right). \quad (2.43)$$

Uma solução aproximada de (2.37) para grandes valores de α^2 e m pode ser encontrada se o parâmetro β for também grande (é suficiente atribuir ao parâmetro β poucas unidades a mais que 1). Entretanto, para $m \sim \alpha^2$, nós podemos esperar, olhando para fórmula (2.41), que $\tau_\beta\alpha\sqrt{m} \sim \beta > 1$. Neste caso nós podemos usar a fórmula assintótica para a função de Bessel modificada $I_0(x) \sim (2\pi x)^{-1/2} \exp(x)$ e escrever o lado direito da função (3.38) como $f_m(\tau) = \exp[-R_m(\tau)]$. Para pequenos valores de τ nós podemos aproximar a função $R_m(\tau)$ para:

$$R_m(\tau) \approx 2\tau(\alpha - \sqrt{m})^2(1 + \sigma\tau) + \frac{1}{2} \ln(8\pi\tau\alpha\sqrt{m}) + \tau(1 - \sigma/2) - \frac{1}{4}\tau^2(1 - 4\sigma + \sigma^2), \quad (2.44)$$

onde os termos que contêm as potências τ^k com $k > 2$ não são mostrados.

Se os valores de α , m e $|\alpha - \sqrt{m}|$ são grandes, então a principal contribuição no lado direito da equação (2.44) é dada pelo primeiro termo, assim a solução aproximada para a equação $R_m(\tau) = \beta$ é

$$\tau_\beta^{(m)} \approx \beta/[2(\alpha - \sqrt{m})^2]. \quad (2.45)$$

Desta última equação nós podemos verificar que o tempo de descoerência τ_β^m aumenta com o crescimento de m , neste caso temos que $m < \alpha^2$. Logicamente que a fórmula (2.45) não é válida para $m \approx \alpha^2$, porque neste caso o segundo termo no lado direito da equação (2.44) excede o primeiro para $|1 - \sqrt{m}/\alpha| < \sqrt{4\pi\beta} \exp(-\beta)$. A solução aproximada para $m = m_* = \alpha^2$ é

$$\tau_\beta^{(m_*)} \approx \exp(2\beta)/[8\pi\alpha^2]. \quad (2.46)$$

Assim podemos verificar que o tempo de descoerência para superposições com $m \approx \alpha^2$ pode exceder o tempo de descoerência dado na equação (2.41) por $\exp(2\beta)/(4\pi\beta)$ vezes. Para $\beta = 3$ (quando temos $\exp(-\beta) \approx 0.05$ a razão dada pela equação (2.46) em relação a equação (2.41) é da ordem de 10. Analisando com atenção a equação (2.44) nós podemos verificar que o terceiro e quarto termos no lado direito podem ser eliminados, contando que α^2 seja bastante grande. Conseqüentemente, o parâmetro σ (que representa a temperatura efetiva) tem muito pouca influência na taxa de descoerência na escala de τ . Se o coeficiente de difusão D dado na equação de Fokker-Planck for fixado, então a mesma conclusão é válida para a taxa de descoerência em termos do tempo usual t . Se o parâmetro fixado for o coeficiente de amortecimento γ , então o tempo de descoerência neste caso será proporcional ao produto $\sigma\tau_\beta$, assim o tempo de descoerência diminui com o decrescimento de $|\sigma|$ (isto é, com o aumento da temperatura efetiva), como se espera

Na figura 2.11 mostramos a dependência do tempo de descoerência em uma escala dada por

$$T = 2\alpha^2\tau_\beta^{(m)}/\beta \quad (2.47)$$

na razão $x = m/\alpha^2$ para $\alpha = 50$ e $\beta = 3$. A normalização foi escolhida de tal maneira que $T \equiv 1$ para $m = 0$. Em acordo com equação (2.46), T depende apenas de x e β não dependendo de α , pois α é fixado e x depende de m . Cálculos numéricos mostram que, realmente, T praticamente não depende de α para $\alpha > 50$, para comprovar este fato basta comparar as figuras 2.11, 2.12, e 2.13 para as quais os valores de α são respectivamente ($\alpha = 50; 10; 100$) e os valores máximos de T respectivamente são ($T = 10, 70; 7, 33; 10, 72$) e a dependência $T(\alpha)$ para os valores fixados de x e β para grandes valores de α é bastante fraca. Na figura 2.14 nós mostramos a dependência do valor máximo de T (o qual é encontrado para $m = \alpha^2$) em função do parâmetro β , nesta figura podemos verificar que aumentando o valor de beta, também aumentamos o tempo de descoerência, e este resultado concorda qualitativamente com fórmula aproximada dada em (2.46).

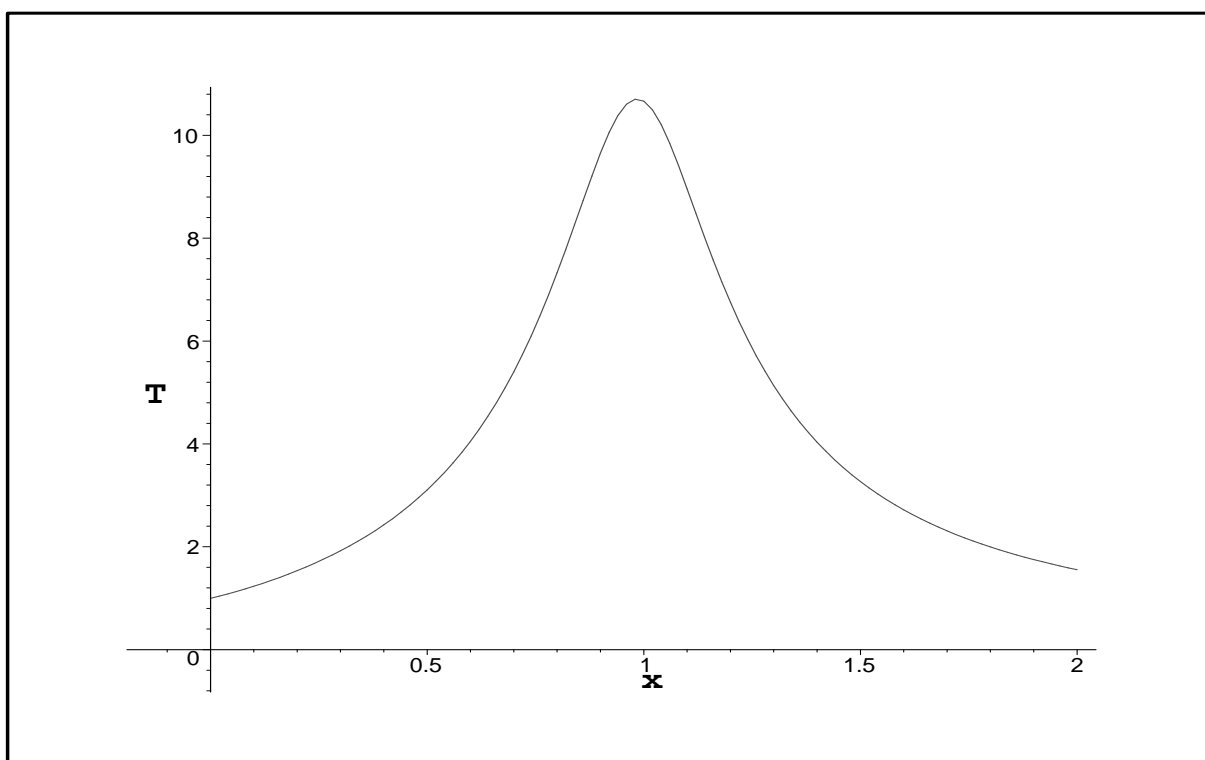


Figura 2.11: A dependência do tempo de descoerência em escala (2.47) na razão $x = m/\alpha^2$ para $\alpha = 50$ e $\beta = 3$

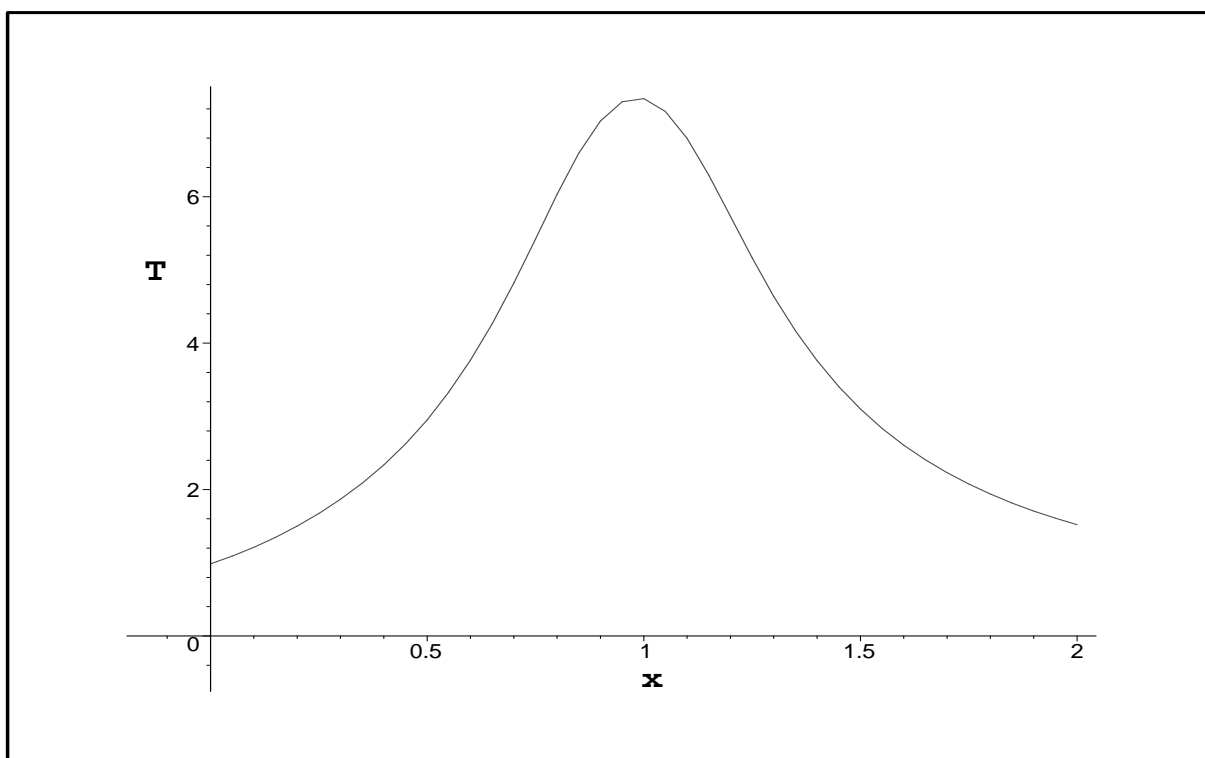


Figura 2.12: A dependência do tempo de descoerência em escala (2.47) na razão $x = m/\alpha^2$ para $\alpha = 10$ e $\beta = 3$

Nós definimos e normalizamos a função $f_m(\tau)$ dada em (2.37) como sendo a altura do pico central de interferência dependente do tempo (isto foi feito tomando o terceiro termo de (2.26) e dividindo-o pela função $F_m(\tau)$ inicial, ou seja, em $\tau = 0$ e $z = 0$). Nós também podemos normalizar a função de Wigner com o dobro do valor no centro do estado de Fock deslocado; isto pode ser feito fazendo $z = \pm G(t)\alpha$ no mesmo instante (veja fórmula (2.37)). Esta nova função renormalizada é dada pela função

$$g_m(\tau) = \exp\left(-\frac{2\tau\alpha^2}{1 + \tau(1 - \sigma)}\right) L_m\left(\frac{4\tau^2\alpha^2}{\tau^2 - (1 - \sigma\tau)^2}\right), \quad (2.48)$$

cuja expansão em série de Taylor resulta em

$$g_m(\tau) = 1 - 2\tau\alpha^2 + 2\tau\alpha^2(1 - \sigma + 2m + \alpha^2) + \dots \quad (2.49)$$

O TDI definido no termo linear desta expansão não depende de m . Mas podemos

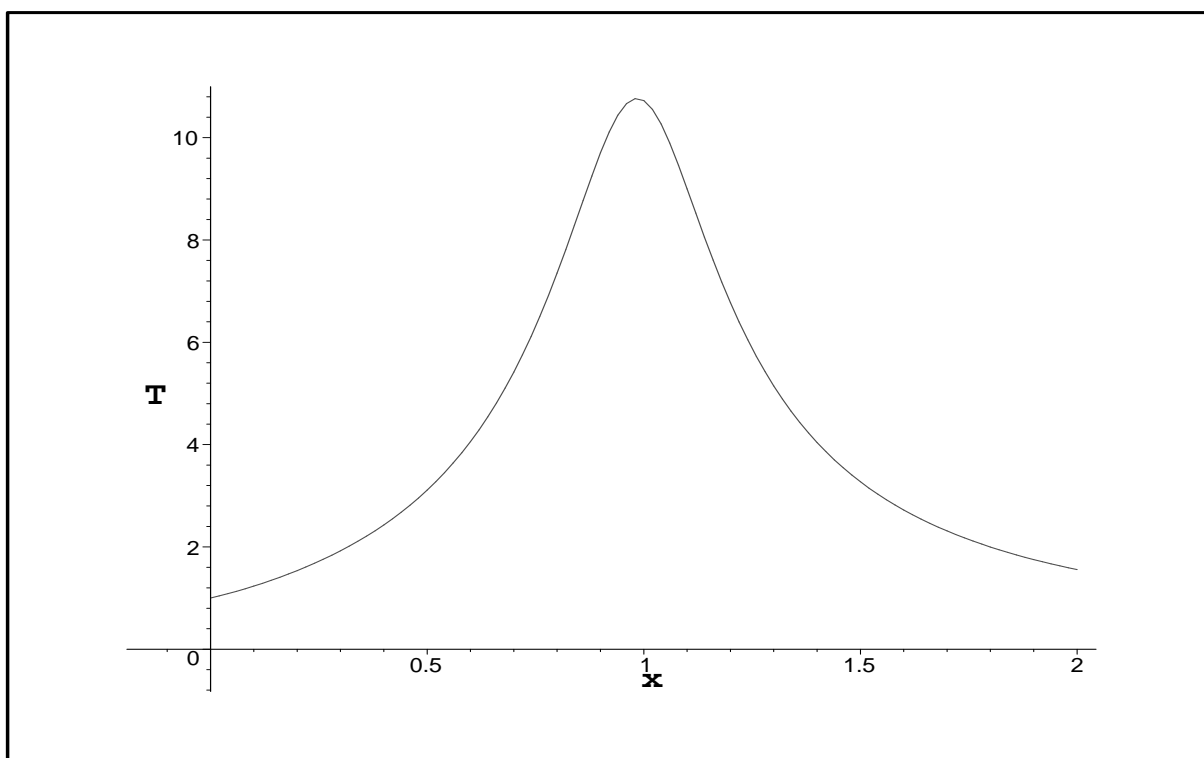


Figura 2.13: A dependência do tempo de descoerência em escala (2.47) na razão $x = m/\alpha^2$ para $\alpha = 100$ e $\beta = 3$

verificar na figura 2.15 que as curvas com grandes valores de m estão acima das curvas com menores valores de m . Este comportamento pode ser interpretado como outra confirmação da manifestação de que a superposição de estados de número deslocados com grandes valores de m são mais robustos à descoerência. Além do mais, isto reflete outra característica importante no processo de descoerência para superposições com grandes valores do “número quântico interno” m , o qual pode ser vista com clareza também na figura (2.8), nesta figura verificamos que a estrutura que constitui o pacote da função de Wigner em $z = \pm\alpha$ é destruída mais rapidamente quando comparado com o termo de interferência entre estes pacotes na origem. Este fato ilustra mais uma vez que é muito difícil, ou quase impossível, achar um único tempo de descoerência, porque este tempo depende, na realidade, da escolha da base com respeito à qual a descoerência irá acontecer [53]. O rápido desaparecimento das franjas de interferência

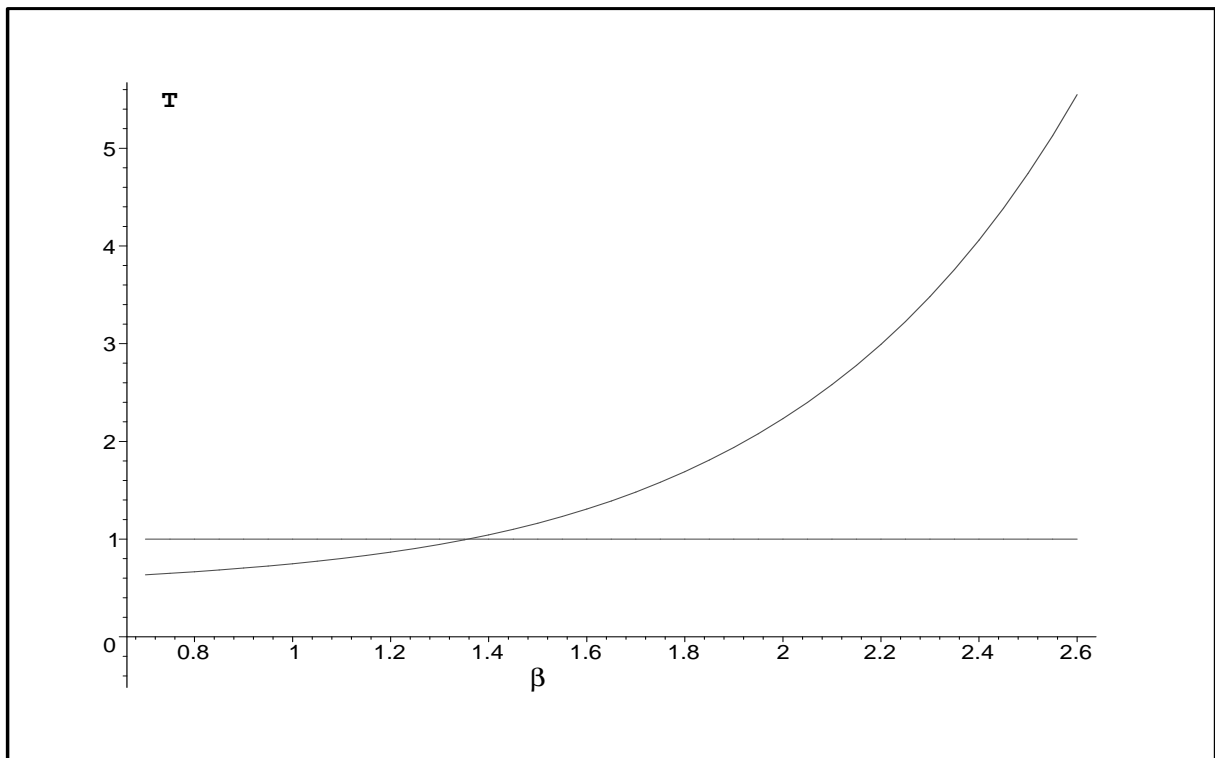


Figura 2.14: A dependência do valor máximo de T (o qual é encontrado para $m = \alpha^2$) em função do parâmetro β (neste caso $\alpha = 50$)

na região “sob a Gaussiana” (veja figura 2.8) pode ser explicado pelo efeito de destruição dos elementos fora da diagonal do operador densidade que descreve a superposição de estados de número deslocado em $z = \pm\alpha$, isto acontece porque os estados de Fock apresentam uma maior fragilidade com respeito à influência do ambiente. Por outro lado as franjas centrais, que correspondem aos elementos fora da diagonal do operador densidade para uma superposição de estados coerentes par e ímpar, se mostram mais resistentes em relação à influência do ambiente.

2.5 Conclusão

Calculamos vários parâmetros para a caracterização da razão de descoerência para

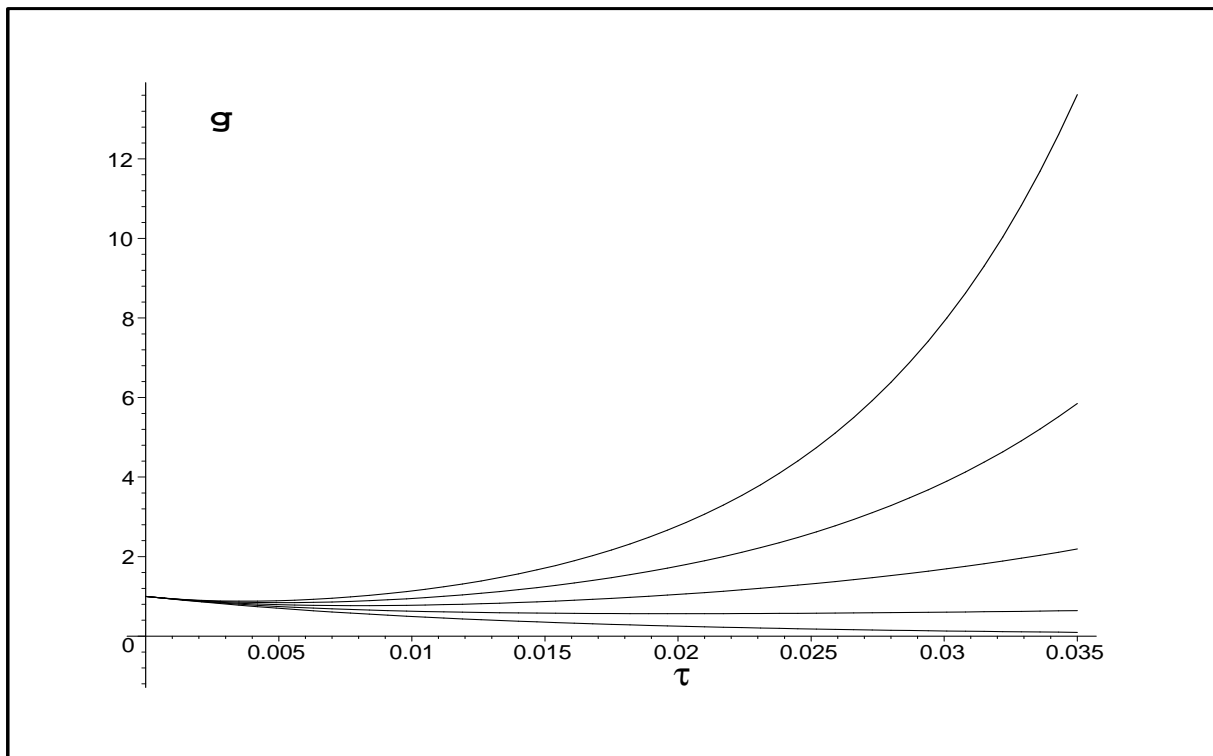


Figura 2.15: A dependência da altura do pico de interferência renormalizado $g_m(\tau)$ (2.48) no tempo compacto τ , neste caso para um sistema atenuador na temperatura zero, para $\alpha = 6$ e $m = 0, 18, 36, 54, 72$ (os valores são os mesmos da figura 8, mas agora a ordem das linhas é invertidas, ou seja, as linhas mais próximas do topo correspondem aos maiores valores de m)

uma superposição de estados de número deslocados no ambiente, descrita pela equação mestre padrão para sistemas amplificadores e atenuadores insensíveis à fase. As principais motivações para o nosso estudo foram: a carência de estudos em descoerência dentro da área da Óptica Quântica, a possibilidade de análise de um modelo com uma estrutura analiticamente simples e como uma rica estrutura interna das superposições quânticas (além do tamanho delas) influencia a descoerência. Sabendo que os efeitos de interferência quântica são fortemente suprimidos por objetos macroscópicos reais, os quais não são apenas grandes, mas têm também uma estrutura interna muito complicada. Alguém poderia esperar que um aumento do *número quântico interno* m para uma superposição de estados de número deslocados $|\alpha; m\rangle$ com o parâmetro $|\alpha|$

fixado resultaria no decrescimento do tempo de descoerência. Porém uma situação real torna-se mais complicada porque o tempo de descoerência pode variar inversamente proporcional ao $|\alpha|^2$ apenas para superposição de estados coerentes, quando temos $m = 0$. Mostramos que o tempo de descoerência para superposições mais complicadas depende, de fato, da escolha da medida de descoerência e do nível de confiança, que é usado para decidir se a coerência inicial é perdida ou não. O tempo de descoerência, deduzido da derivada em relação ao tempo do valor inicial da pureza quântica, mostra oscilações como uma função de m para $m > |\alpha|^2$. Por essa razão nós propusemos outra definição para o tempo de descoerência, que é baseada na análise da altura do pico central de interferência da função de Wigner dada pela função normalizada $f_m(\tau)$ dependente do tempo. Considerando que a função $f_m(\tau)$ não possui nenhum fator de proporcionalidade para $m \neq 0$, nós definimos um nível $\xi = \exp(-\beta) < 1$ abaixo do qual a função $f_m(\tau)$ pode ser considerada tão pequena que podemos afirmar que a coerência inicial foi perdida. Nossos resultados mostram que, para $\xi = 1/2$ ou $\xi = 1/e \approx 0.37$, o “tempo de descoerência final do pico de interferência” **TDF** decresce monotonicamente com o incremento de m . Alguém poderia questionar que estas duas escolhas de ξ são completamente arbitrárias, embora elas sejam freqüentemente usadas por certas razões. Porém, o valor 0.37 não é muito pequeno, estritamente falando. Um resultado interessante obtido neste trabalho é que baixando o nível de ξ , por exemplo para o valor $\xi \approx 1/\exp(-1.4) \approx 0.25$ (veja figura 2.14), o qual não está muito distante de 0.5 e também não é muito pequeno, podemos verificar que se aumentarmos o valor de $m = 0$ até $m = |\alpha|^2$ o **TDF** será também aumentado. A razão dos valores do **TDF** para $m = |\alpha|^2$ e $m = 0$ é da ordem de 5 para $\xi \sim 0.1$ e 10 para $\xi \sim 0.05$. Estas observações mostram que, dentro de certas condições, (e talvez dentro de um certo senso) superposições macroscópicas com uma estrutura interna rica pode apresentar um tempo de descoerência maior que as superposições mais simples, como a superposições de estados coerentes, embora este re-

sultado pareça ser contraditório. Portanto, seria muito interessante estudar, nesta mesma linha de trabalho, outros tipos de superposição quântica “com estrutura interna”, além da superposição de estados de número deslocados, e também outros tipos de reservatórios, além de outros tipos de processos de relaxação/amplificação.

Capítulo 3

Generalização da Descoerência da Superposição de N Estados de Número Deslocados

Como mencionado na introdução deste trabalho, no capítulo 2 estudamos a descoerência da superposição de dois estados de número deslocados, e neste no capítulo iremos generalizar o estudo da Descoerência para Superposição de N Estados de Número Deslocados. Para isto, nós consideraremos a generalização da fórmula (1.2)

$$|\alpha\rangle = N_{\pm}(|\alpha\rangle)[\hat{D}(\alpha) \pm \hat{D}(-\alpha)]|0\rangle,$$

onde N_{\pm} é o fator de normalização, $|0\rangle$ é o estado de vácuo, que generalizando resulta em:

$$|\psi\rangle = A^{-1/2} \sum_{k=1}^N c_k \hat{D}(\alpha_k) |m\rangle.$$

Nesta nova equação c_k representa coeficientes complexos constantes, lembrando que neste caso A é um fator de normalização, $|m\rangle$ é o estado de Fock e $\hat{D}(\alpha)$ é o operador deslocamento.

Seguindo a mesma linha de trabalho do capítulo anterior, na Sec.I, nós analisaremos a estrutura da função de Wigner de uma superposição genérica de estados de número deslocados, com um grande número de componentes, enfatizando o papel do pico central de interferência, o qual está ausente na representação de coordenadas da densidade de probabilidade. A evolução da superposição de estado dada em (1.5), inicialmente pura, governada pela equação mestre, é estudada na Sec. II. Estudaremos diferentes aproximações para a definição do “*tempo de descoerência*”, na Sec. III, onde nós compararemos a evolução temporal da pureza quântica com a altura do pico central de interferência da função de Wigner. A comparação entre tempo de descoerência final e inicial em função dos parâmetros α, m e N para estados superpostos em um círculo e em uma linha é feita na Sec. IV. Na Sec. V nós mostramos a passagem da superposição quântica inicial para um estado clássico, isto para o caso de sistemas amplificados. Na secção VI nós apresentamos os resultados e discussão.

3.1 Função de Wigner da Superposição de N Estados de Número Deslocados

Se o valor absoluto da diferença entre os parâmetros de deslocamentos α_k e α_j for bastante grande (para $k \neq j$), então podemos afirmar que as componentes da superposição de estado dadas em (1.5) praticamente não se sobrepõem. Neste caso, como alguém poderia verificar se a superposição em estudo é uma mistura clássica ou uma superposição quântica? A melhor maneira para fazer esta análise é, ao invés de analisarmos a densidade de probabilidade no espaço das coordenadas, analisamos a estrutura da função de Wigner [41].

Usando os mesmos procedimentos do capítulo 2, e considerando que a função de Wigner $F_g(z)$ de um estado $|g\rangle$ não deslocado seja conhecida (neste caso nós estamos supondo que o

estado de Fock $|m\rangle$ dado na equação (1.5) seja um estado arbitrário $|g\rangle$. Então fazendo uso de um pouco de álgebra, depois de um certo esforço, conseguimos chegar à função de Wigner para superposição de estados dada em (1.5) que tem a seguinte forma generalizada:

$$F_\psi(z) = A^{-1} \sum_{j,k=1}^N c_j c_k^* F_g(z - \alpha_{jk}^{(+)}) \times \exp(2i \operatorname{Im}[2\alpha_{jk}^{(-)} z^* - \alpha_{jk}^{(-)} \alpha_{jk}^{(+)*}]), \quad (3.1)$$

onde temos

$$\alpha_{jk}^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\alpha_j \pm \alpha_k) = \pm \alpha_{kj}^{(\pm)}. \quad (3.2)$$

Podemos verificar facilmente que a função dada em (3.1) é real se a função de Wigner $F_g(z)$ for real. Cada um dos N^2 termos incluídos na soma dada em (3.1) tem a mesma estrutura da função de Wigner do estado $|g\rangle$, mas estes termos são deslocados por um valor complexo $\alpha_{jk}^{(+)}$ no espaço de fase e multiplicado por um fator de fase dependente z (com exceção para os termos da diagonal, ou seja, $j = k$). A interferência quântica aparece devido aos termos fora da diagonal (os termos fora da diagonal, não aparecem em misturas clássicas). Estes termos de interferência são mais explícitos no caso em que o número de componentes da superposição N seja par, e se todos os parâmetros de deslocamentos α_k puderem ser divididos em $N/2$ pares $(\alpha_k, -\alpha_k)$ com os pesos iguais para os coeficientes $|c_k|^2$ e para cada componente de fase do par, porque neste caso nós podemos constatar um grande pico de interferência no ponto central em $z = 0$, a altura destes pico pode ser N vezes maior que a altura de cada pico constituinte da função de Wigner em $z = \pm \alpha_k$. Isto é verdade para qualquer estado arbitrário $|g\rangle$, obedecendo sempre à condição de que a quantidade $|\alpha_k \pm \alpha_j|$ tem que ser bastante grande (obviamente, para $k \neq j$ no caso do sinal negativo). Desde então nós podemos assumir que a condição de sobreposição entre as diferentes componentes da superposição dada em (1.5) é desprezível. Usando esta condição, nós podemos escrever o fator de normalização da seguinte maneira

$$A = \sum_{k=1}^N |c_k|^2, \quad (3.3)$$

com uma pequena correção da ordem de $\exp(-|\alpha_k \pm \alpha_j|^2)$.

A existencia da altura do pico central de interferência é a melhor manifestação de uma superposição e também uma ótima indicação da natureza quântica de um estado. Além do mais, o valor da função de Wigner na origem *pode ser medido*, e esta medida tem muitos significados físicos importantes [58]. Por outro lado, a estrutura do pico central é muito sensível em relação a qualquer perturbação do estado quântico. Essa sensibilidade é devida à presença de fortes oscilações dos termos onde temos $j \neq k$. Por esta razão, estudando a evolução temporal da parte central da função de Wigner, nós podemos obter informações sobre a descoerência da superposição quântica de um modo muito simples (veja também [56,59]).

Neste trabalho nós consideraremos a função de Wigner para o estado de Fock $|m\rangle$ dada em [43] por

$$F_m(z) = (2/\pi)(-1)^m \exp(-2|z|^2)L_m(4|z|^2), \quad (3.4)$$

onde $L_m(x) \equiv L_m^{(0)}(x)$ são os polinômios de Laguerre, definidos de acordo com [60],

$$L_m^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^m \frac{(m+k)!}{(m-n)!n!(k+n)!} (-z)^n. \quad (3.5)$$

Fazendo a substituição da equação (3.4) na equação (3.1), isto resultará na função de Wigner para uma superposição de N de estados de Fock Deslocados, que é escrita do seguinte modo:

$$F_\Psi(z) = \frac{2(-1)^m}{\pi A} \sum_{j,k=1}^N c_j c_k^* \exp \left[-2|z - \alpha_{j,k}^{(+)}|^2 + 2i \text{Im}(2\alpha_{j,k}^{(-)} z^* - \alpha_{j,k}^{(-)} \alpha_{j,k}^{(+)*}) \right] L_m \left(4|z - \alpha_{j,k}^{(+)}|^2 \right). \quad (3.6)$$

Esta equação é a generalização da fórmula encontrada em [34] para a superposição de estados coerentes ($m = 0$) ela também generaliza a fórmula deduzida em [38] para m arbitrário (mas para o caso onde $c_k = 1$ e $|\alpha_k| = \text{constante}$, distribuido uniformemente no espaço de fase). O comportamento da função $f_m(x) = \exp(-2x)L_m(4x)$ é mostrado na figura (3.1 e 3.2). Nós vimos que esta função mostra uma estrutura muito rica se $m \gg 1$, e isto é interessante para

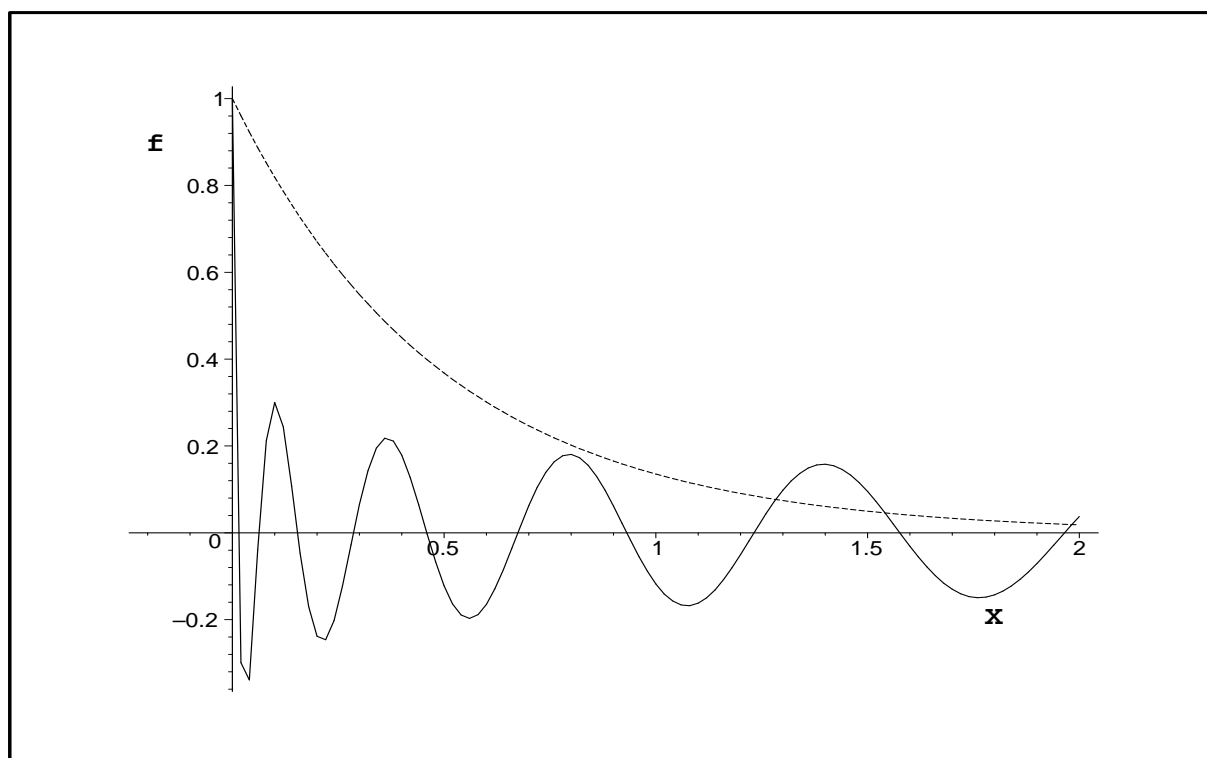


Figura 3.1: Esta figura mostra a função $f(x) = \exp(-2x)L_m(4x)$ para $m = 30$ juntamente com a função $\exp(-2x)$ (gráfico pontilhado) no intervalo $x < 2$

estudarmos como esta estrutura influencia o tempo de descoerência nas susperposições. Neste momento é extremamente importante mencionar uma significativa diferença no comportamento da função $f_m(x)$ para o caso com $m = 0$ e $m \gg 1$: $f_0(x)$ vai rapidamente para zero quando $x > 1$, para $m \gg 1$ este mesmo fenômeno ocorre somente se $x > m$. Conseqüentemente, a função (3.4) decresce exponencialmente na *região classicamente proibida* $|z|^2 > m$, onde a energia do oscilador excede o valor $m\hbar\omega$ (relembrando que $|z|^2 = (q^2 + p^2)/2$).

3.2 Evolução Temporal da Função de Wigner

Assumimos que uma evolução irreversível do estado quântico na representação de interação (onde as oscilações rápidas do oscilador de alta-frequência são eliminadas) é governada

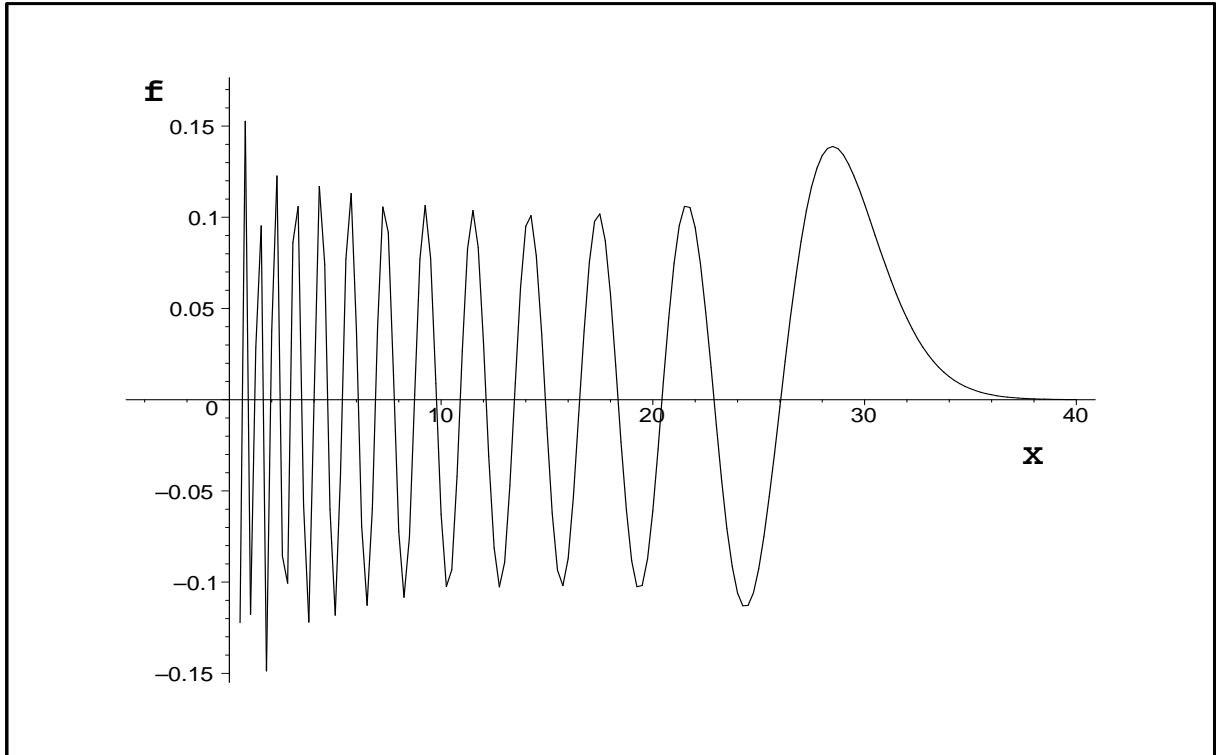


Figura 3.2: Esta figura mostra a função $f(x) = \exp(-2x)L_m(4x)$ para $m = 30$ no intervalo $x > 1$

pela equação mestre padrão dada em (2.16) [47–50].

A função de Wigner dependente do tempo $W(q, p, t)$ obedece à equação de Fokker-Planck, a qual podemos encontrar com um pouco de álgebra a partir da equação (2.16)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\gamma q W \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\gamma p W \right) + D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} \right), \quad (3.7)$$

onde os valores de D e γ são dados em (2.18). O parâmetro de assimetria σ pode variar no intervalo $[-1, 1]$, sendo este parâmetro positivo para sistemas atenuadores, e negativo para sistemas amplificadores. A solução da equação (3.7) pode ser escrita em termos das coordenadas complexas dada por:

$$F(z; t) = \int \mathcal{K}(z; t | z', 0) F(z'; 0) dz'. \quad (3.8)$$

onde $\mathcal{K}(z; t | z'; 0)$ é um propagador e pode ser calculado por muitas maneiras diferentes [7, 61].

Transformando a forma explícita, dada em [7, 62], de (q, p) para a variável z (e levando em conta

que $dqdp = 2d^2z$), nós obtemos

$$\mathcal{K}(z; t|z'; 0) = \frac{2}{\pi\tau(t)} \exp\left(-\frac{2}{\tau(t)}|z - G(t)z'|^2\right), \quad (3.9)$$

onde t , $G(t)$ e $\tau(t)$ são dados em (2.22). Aqui podemos notar que $\tau(t) \geq 0$ é independente do sinal do parâmetro σ . Notamos também que no limite $t \rightarrow \infty$ nós temos

$$\tau \approx 2\eta\nu_0 t = 4Dt = 2\gamma t/\sigma,$$

então verificamos que o parâmetro τ não depende de σ (isto é, não depende da temperatura efetiva) se o coeficiente de difusão D for fixado. Porém, para um coeficiente de amortecimento γ fixado, o usual tempo t pode ser muito menor que τ , logicamente que isto acontece se $|\sigma| \ll 1$ (isto é o caso de altas-temperaturas). Para sistemas atenuadores nós temos $G(t) \leq 1$ e para sistemas amplificadores $G(t) \geq 1$.

Se $\sigma > 0$ (isto é, um banho térmico com temperatura não-negativa), então $G(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, de maneira que $\mathcal{K}(z; \infty|z'; 0)$ não depende de z' . Isto significa que qualquer função de Wigner inicial tenderá assintoticamente para a função de Wigner de equilíbrio.

$$F_{eq}(z) = (2\sigma/\pi) \exp(-2\sigma|z|^2). \quad (3.10)$$

Conseqüentemente todas as características individuais da função (3.1), incluindo sua *estrutura fina* mostradas nas figuras (3.1 e 3.2), desaparece para $t \gg t_{th} = \gamma^{-1}$. Assim t_{th} pode ser chamado de tempo de thermalização do sistema. Este tempo não depende, em detalhes, da superposição de estados inicial.

Porém, temos outras escalas de tempo, da ordem de $t_{th}/|\alpha_k|^2 \ll t_{th}$, a qual corresponde a um processo de descoerência, isto é, uma rápida transformação do estado quântico inicial para uma mistura clássica e o desaparecimento dos efeitos de interferência. Estas escalas são altamente sensíveis em relação ao estado inicial.

Aplicando o propagador dado na equação (3.9) para a função inicial, dada em (3.1) com $F_g(z)$ dado por (3.4), e usando a fórmula (a qual é uma versão complexa de uma fórmula análoga encontrada em [57])

$$\int d^2z \exp(-g|z|^2 + \xi z + \eta z^*) L_n(a|z|^2) = \frac{\pi(g-a)^n}{g^{n+1}} \exp\left(\frac{\xi\eta}{g}\right) L_n\left(\frac{a\xi\eta}{g(g-a)}\right), \quad (3.11)$$

Nós obtemos após uma certa álgebra a seguinte forma explícita para a função de Wigner dependente do tempo:

$$\begin{aligned} F(z; t) = & \frac{2(-1)^m r^m}{A\pi s^{m+1}} \sum_{j,k=1}^N c_j c_k^* \exp\left[-\frac{2}{s}|z|^2 - \frac{r}{s}\alpha_j\alpha_k^* \right. \\ & \left. + \frac{2G}{s}(z\alpha_k^* + z^*\alpha_j) - \frac{1}{2}(|\alpha_j|^2 + |\alpha_k|^2)\right] \\ & \times L_m\left(\frac{4}{rs}[Gz - \gamma_{jk}][Gz - \chi_{jk}]^*\right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{2}(r\alpha_j + s\alpha_k), \quad \chi_{jk} = \frac{1}{2}(s\alpha_j + r\alpha_k), \quad (3.13)$$

$$r(t) = 2Y \quad s(t) = 2X \quad (3.14)$$

e as expressões para X e Y são dadas pela equação (2.27). Uma expressão equivalente para a função de Wigner (menos compacta) foi obtida em [11] para o caso de estados de número deslocados, distribuídos uniformemente ao longo de um círculo $|\alpha_k| = \text{const}$ com coeficientes iguais $c_k = 1$.

Como mencionamos no capítulo anterior, descoerência significa o desaparecimento dos termos de interferência gerados pelas diferentes componentes de uma superposição de estados inicial. No capítulo 2, nas figuras 2.5-2.8, mostramos a função de Wigner para superposição de dois estados de número deslocados, e verificamos que o pico central de interferência da superposição com $m = 0$ (sem a “estrutura fina” da função de onda inicial) desaparece mais rápido do que no caso quando $m \neq 0$. Além disso, o tempo de sobrevivência da estrutura de interferência

no centro aumenta com o incremento da razão m/α^2 . Para uma razão m/α^2 relativamente pequena, a estrutura de interferência na origem para uma “estrutura fina”, desaparece muito mais rapidamente, quando comparada com os picos laterais constituintes do sistema. Porém, esta situação torna-se invertida quando temos a razão $m/\alpha^2 \approx 1$. Essas mesmas observações foram verificadas quando nós temos superposições com um número maior de componentes, tais como: quatro e seis componentes. Além do mais, verificamos que o tempo de sobrevivência da estrutura de interferência, que ocorre fora da origem, também aumenta com o incremento da razão m/α^2 . Por último, verificamos que para o caso de seis componentes, mesmo após um tempo três vezes maior que o tempo $\tau = (1/2\alpha^2)$, a função de Wigner, ainda apresenta uma estrutura de oscilações tanto para as componentes, quanto para os termos de interferência. Isto pode ser verificado nas figura 3.3-3.6.

Os termos da diagonal ($j = k$) da função (3.12) representa uma mistura quântica da função descrevendo uma evolução independente de cada componente que constitui a superposição inicial:

$$F_d(z; t) = \frac{2(-1)^{m_r m}}{A\pi s^{m+1}} \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \exp\left(-\frac{2}{s} |z - G\alpha_k|^2\right) \times L_m\left(\frac{4G^2}{rs} |z - G\alpha_k|^2\right). \quad (3.15)$$

Com um pouco de álgebra e usando as equações (3.3) e (3.11), verificamos que a integral de $F_d(z, t)$ sobre todo o plano de fase apresenta uma normalização correta,

$$\int F_d(z; t) d^2z \equiv 1,$$

logicamente que neste caso devemos excluir um pequeno fator de correção exponencial devido à contribuição dos termos fora da diagonal, os quais são proporcionais a $\exp(-|\alpha_j - \alpha_k|^2/2)$.

Se $\sigma > 0$, então todos picos individuais com centro dado nos pontos $\zeta_k = G\alpha_k$ são transferidos para um único pico em $z = 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e, neste caso, a função (3.15),

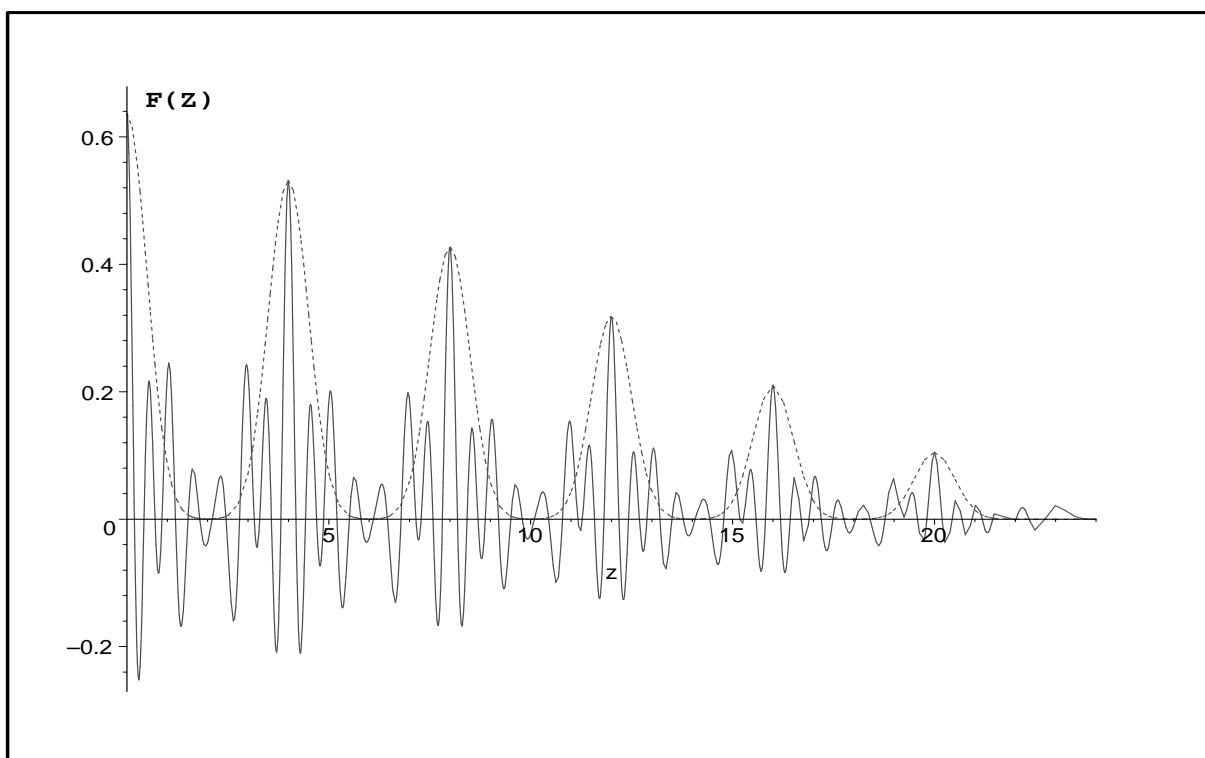


Figura 3.3: A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (3.12) (para z real) para uma superposição par de seis estados de número deslocados, com $\alpha_1 = 4; \alpha_2 = -4; \alpha_3 = 12; \alpha_4 = -12; \alpha_5 = 20; \alpha_6 = -20$, para $m = 10$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_3 = 0$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)

transforma-se na função (3.10). A memória do estado quântico inicialmente puro, dado em (3.1), está contida nos termos fora da diagonal $j \neq k$ encontrada em (3.12). Os pesos relativos destes termos podem ser caracterizado pela altura dos picos de interferência criados por dois termos com índices j e k fixados nos pontos

$$\zeta_{jk} = G(\tau)(\alpha_j + \alpha_k)/2 \quad (3.16)$$

(na equação (3.16), verificamos que o fator $G(\tau)$ é o responsável pela flutuação da posição do pico em relação ao tempo). Substituindo z por $G(\tau)(\alpha_j + \alpha_k)/2$ no lado direito da soma dada

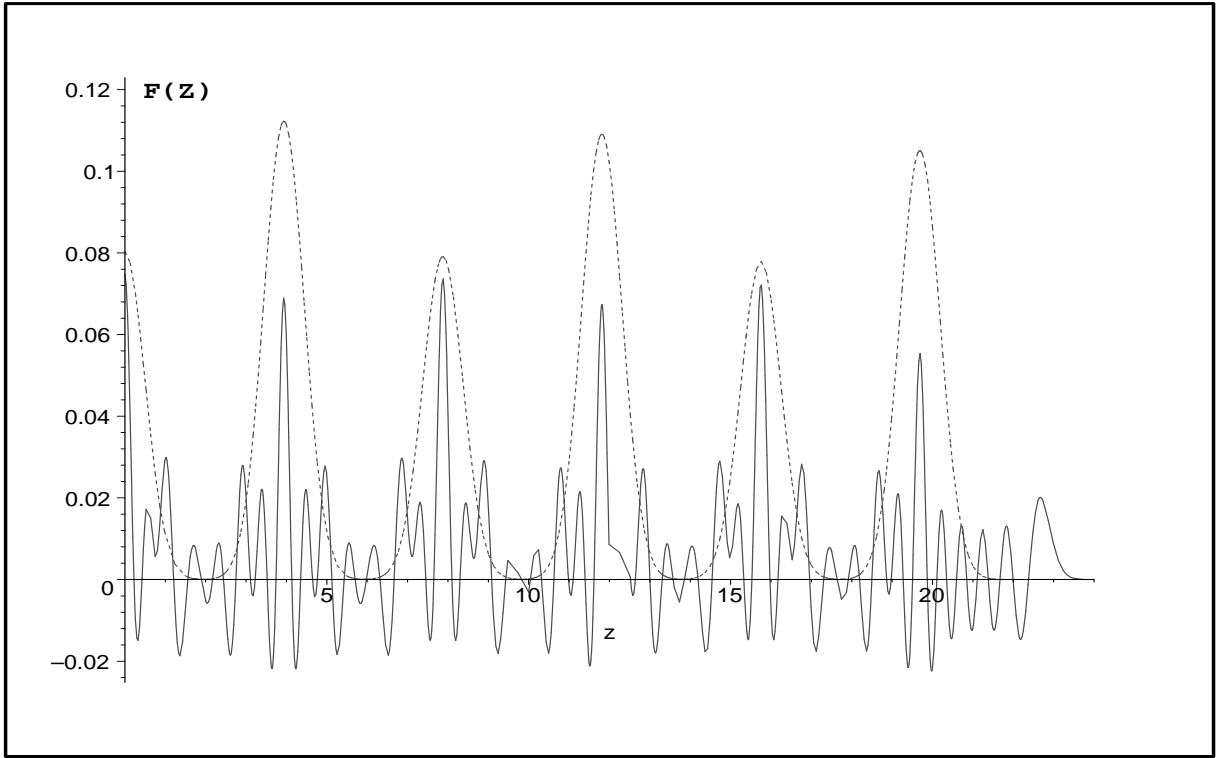


Figura 3.4: A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (3.12) (para z real) para uma superposição par de seis estados de número deslocados, com $\alpha_1 = 4; \alpha_2 = -4; \alpha_3 = 12; \alpha_4 = -12; \alpha_5 = 20; \alpha_6 = -20$, para $m = 10$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_1 = 0.031 (\approx (2\alpha^2))$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)

equação (3.12), podemos expressar a altura reduzida dos picos como:

$$F_{jk} = B_{jk} \exp \left[-\frac{\tau}{2s} |\alpha_k - \alpha_j|^2 \right] \times L_m \left(-\frac{\tau^2}{rs} |\alpha_k - \alpha_j|^2 \right), \quad (3.17)$$

onde

$$B_{jk} = 2\text{Re} \{ c_j c_k^* \exp [i\text{Im} (\alpha_j \alpha_k^*)] \}. \quad (3.18)$$

Logicamente que o valor total da função de Wigner $F(\zeta_{jk})$ pode ser diferente de F_{jk} devido a pequenas correções dos outros termos da superposição. Além disto, o ponto ζ_{jk} pode acidentalmente pertencer a mais de um par de índices ou coincidir acidentalmente com algum valor de ζ_m .

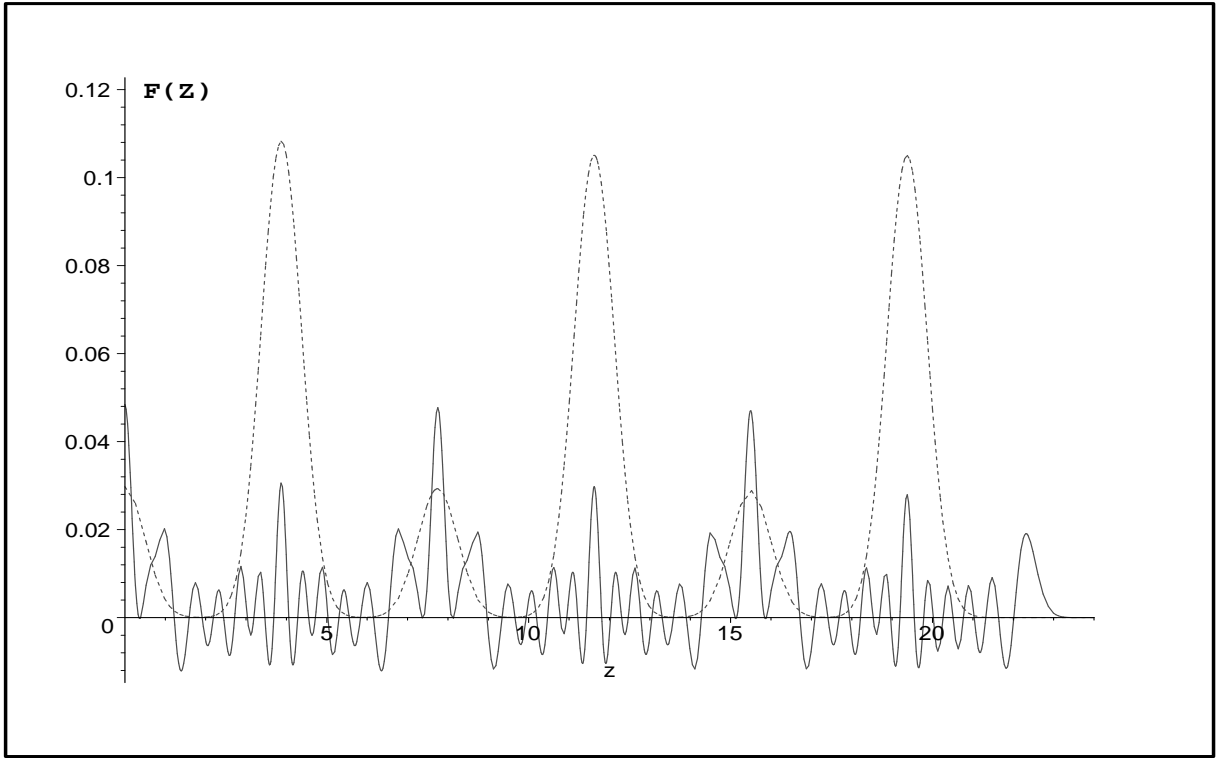


Figura 3.5: A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (3.12) (para z real) para uma superposição par de seis estados de número deslocados, com $\alpha_1 = 4; \alpha_2 = -4; \alpha_3 = 12; \alpha_4 = -12; \alpha_5 = 20; \alpha_6 = -20$, para $m = 10$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_2 = 0.062 = 2\tau_1$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$)

Se $\sigma > 0$, então $G(t) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 1/\sigma$, $s \rightarrow 1/\sigma$, e $r \rightarrow -1/\sigma$ quando $t \rightarrow \infty$.

Conseqüentemente

$$|F_{jk}|_{t \rightarrow \infty} \leq 2 |c_j c_k| \exp\left(-\frac{1}{2} |\alpha_k - \alpha_j|^2\right) \times L_m(|\alpha_k - \alpha_j|^2), \quad (3.19)$$

e neste caso, podemos verificar que o lado direito da equação (3.19) é muito menor que a unidade para $|\alpha_k - \alpha_j|^2 \gg 1$ e para qualquer valor de m [57]. Isto de fato ocorre como nós esperamos, os termos fora da diagonal tornam-se assintoticamente desprezíveis. Isto pode ser interpretado como o tempo de descoerência total. Além disso, como $\zeta_{jk} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, podemos concluir que os termos $F_{jk}(\infty)$ (ou seja a equação (3.17)) são cancelados exatamente pelos termos exponencialmente pequenos da constante de normalização A , os quais foram omitidos

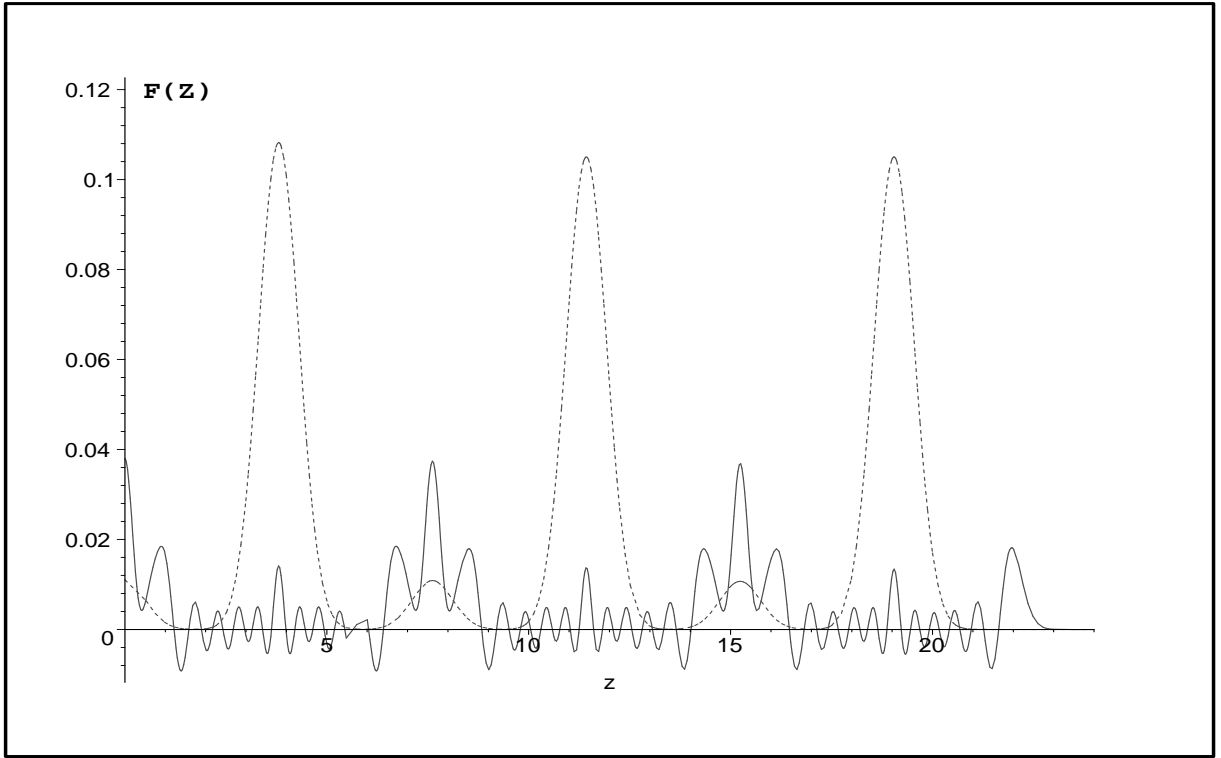


Figura 3.6: A função de Wigner $F_m(z; \tau)$ (3.12) (para z real) para uma superposição par de seis estados de número deslocados, com $\alpha_1 = 4; \alpha_2 = -4; \alpha_3 = 12; \alpha_4 = -12; \alpha_5 = 20; \alpha_6 = -20$, para $m = 10$ (linha contínua) e $m = 0$ (linha pontilhada), no instante do tempo compacto $\tau_3 = 0.093 = 3\tau_1(\approx (1/2\alpha^2))$, no caso de um sistema atenuador em uma temperatura zero ($\sigma = 1$) na equação (3.3). Conseqüentemente, os termos fora da diagonal desaparecem, levando a função dada em (3.12) assintoticamente a concordar com a função dada em (3.10).

A desigualdade dada em (3.19) permanece válida no caso limite $\sigma = 0$, quando temos: $\gamma = 0$, $G(t) \equiv 1$, $\tau = 4Dt$, $r = 1 - \tau$ e por último $s = 1 + \tau$. Conseqüentemente, os termos fora da diagonal desaparecem assintoticamente, sendo este um caso de descoerência não dissipativa. Nesta situação, os centros dos pacotes iniciais não mudam de posição, embora as larguras dos pacotes tornem-se tão grande que eles podem se sobrepor. Ainda podemos perceber que os fatores exponenciais $\exp(-2|z - \alpha_k|^2/s)$ não são extremamente pequenos apenas na região $|z - \alpha_k|^2 < \tau$, e para $|rs| \approx \tau^2$ quando $\tau \gg 1$, os polinômios de Laguerre no lado direito da

equação dada em (3.15) tende para 1, e a função de Wigner tende assintoticamente para uma mistura diagonal de pacotes Gaussianos

$$F(z; \tau) \rightarrow \frac{2}{A\pi\tau} \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \exp\left(-\frac{2}{\tau} |z - \alpha_k|^2\right). \quad (3.20)$$

O comportamento assintótico da função de Wigner para $t \gg |\gamma|^{-1}$, no caso para sistemas amplificadores $\sigma < 0$, é mais interessante, especialmente quando σ é um valor próximo de -1 . Este é um caso especial que nós iremos considerar na Sec. V. Na secção III, estudaremos em detalhes o que acontece com os termos fora da diagonal da função dada em (2.26) na escala do tempo dada como: $t \sim |\gamma\alpha_k^2|^{-1}$.

3.3 Tempo de Descoerência

3.3.1 A Pureza Quântica Como Indicador de Descoerência

A *pureza quântica* $\mu \equiv \text{Tr}(\hat{\rho}^2)$ é usada freqüentemente como um dos indicadores mais simples da coerência [?, 63, 64], a qual pode ser calculada por meios da fórmula

$$\mu = \pi \int F^2(z) d^2 z. \quad (3.21)$$

O valor inicial da pureza é dado por $\mu(0) = 1$, e quando $t \gg t_{th}$ a pureza vai para o valor de equilíbrio $\mu_{eq} = \sigma$ (isto para $\sigma > 0$). Mas antes que isto ocorra, a pureza vai rapidamente (durante um tempo da ordem de $t_{th}/|\alpha_k|^2$) para um valor intermediário

$$\mu_{int} = \sum_{k=1}^N d_k^2, \quad (3.22)$$

onde

$$d_k = |c_k|^2 / \sum_{k=1}^N |c_k|^2, \quad \sum_{k=1}^N d_k = 1. \quad (3.23)$$

A fórmula dada em (3.22) corresponde à pureza de uma mistura de N estados ortogonais puros. Para o nosso caso, temos uma aproximação, isto porque as componentes da superposição (1.5) não são exatamente ortogonais, mas as correções são exponencialmente pequenas, da ordem de $\exp(-|\alpha_k|^2)$, $\exp(-|\alpha_k - \alpha_j|^2)$ ($k \neq j$), isto para $|\alpha_n| \gg 1$. A pureza de cada componente é aproximadamente conservada em uma escala de tempo da ordem de $t_{th}/|\alpha_k|^2$, porque nesta escala de tempo nós podemos omitir as mudanças das funções $s(\tau)$ e $r(\tau)$ dadas na equação (3.12), logicamente que nesta escala nós substituiremos $s(\tau)$ e $r(\tau)$ pelo valor da unidade. Assim nós podemos definir o tempo de descoerência como o tempo necessário para tornar a função inicial $\mu(t)$ próxima do valor dado em (3.22).

A integral dada em (3.21) em conjunto com a função (3.12) pode ser facilmente calculada para $m = 0$, o que na verdade é uma superposição de estados coerentes em $t = 0$. Usando a fórmula (3.11) com $n = 0$ nós obtemos

$$\mu = \sum_{j,k,m,n=1}^N \frac{g_{jk}g_{mn}}{A^2s} \exp \left[\frac{\tau}{s} (\alpha_j - \alpha_m)(\alpha_n - \alpha_k)^* \right], \quad (3.24)$$

onde

$$g_{jk} = c_j c_k^* \exp \left[\alpha_j \alpha_k^* - \frac{1}{2} (|\alpha_j|^2 + |\alpha_k|^2) \right]. \quad (3.25)$$

Como supomos inicialmente que $|\alpha_j - \alpha_k| \gg 1$ para $j \neq k$, então podemos perceber que os únicos termos que contribuem significativamente para a soma dada na equação (3.24) são os termos com $j = k$ e $m = n$ para $t \ll t_{th}$. Assim podemos simplificar a equação (3.24) para (aqui nós fizemos $s = 1$)

$$\mu = \sum_{k,m=1}^N d_k d_m \exp \left(-\tau |\alpha_k - \alpha_m|^2 \right), \quad \tau \ll 1, \quad (3.26)$$

onde os coeficientes d_k foram definidos na equação (3.23). A equação (3.26) mostra claramente que, para superposições com mais de dois estados coerentes (uma superposição mesoscópica), pode possuir mais de um tempo de descoerência.

Nesta, secção e na seguinte, limitamos a uma superposição com um número par de estados coerentes, os quais podem ser divididos simetricamente em pares com respeito a origem do plano de fase. Assumindo que

$$\alpha_{2k-1} = -\alpha_{2k}, \quad c_{2k-1} = c_{2k}, \quad (3.27)$$

e também $|\alpha_2| \leq |\alpha_4| \leq \dots \leq |\alpha_N|$. Neste caso a equação (3.26) será substituída por

$$\mu = 2 \sum_{k,m=1}^{N/2} d_{2k} d_{2m} \left[\exp\left(-\tau|\alpha_{2k} - \alpha_{2m}|^2\right) + \exp\left(-\tau|\alpha_{2k} + \alpha_{2m}|^2\right) \right], \quad (3.28)$$

e para $\tau \ll 1$ obtemos

$$\mu = 1 - 4\tau \sum_{k=1}^{N/2} d_{2k} |\alpha_{2k}|^2 + \mathcal{O}(\tau^2). \quad (3.29)$$

O tempo de descoerência inicial mencionado em (2.29) pode ser escrito na forma

$$\tau_{in}^{-1} = |d\mu/d\tau|_{\tau=0} = 4 \sum_{k=1}^{N/2} d_{2k} |\alpha_{2k}|^2. \quad (3.30)$$

O lado direito da equação (3.30) é proporcional ao número médio de fons $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ no estado inicial. A vantagem do **TDI**, baseado na pureza quântica, é que este tempo pode ser calculado para um estado inicial arbitrário, até mesmo quando as integrais (3.8) e (3.21) não podem ser calculadas analiticamente. Realmente, uma consequência imediata da equação (2.16) é a fórmula dada na equação (2.31) e citada em [55, 57, 63], que pode ser escrita na forma

$$\dot{\mu}|_{t=0} = -2\eta\nu_0 \left(1 - \sigma + 2 \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - |\langle \hat{a} \rangle|^2 \right]_{t=0} \right). \quad (3.31)$$

Os valores médios em $t = 0$ podem ser calculados para qualquer valor de m com a ajuda das relações dadas em (2.34) e auxílio da relação

$$\hat{D}^\dagger(\alpha_k) \hat{D}(\alpha_j) = \hat{D}(\alpha_j - \alpha_k) \exp[i\text{Im}(\alpha_k^* \alpha_j)],$$

em conjunto com as fórmulas para os elementos de matriz $\langle m | \hat{D}(\gamma) | n \rangle \equiv D_{mn}^{(\gamma)}$ [44]

$$D_{mn}^{(\gamma)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (-\gamma^*)^{n-m} e^{-|\gamma|^2/2} L_m^{(n-m)}(|\gamma|^2), & n \geq m \\ \sqrt{\frac{n!}{m!}} \gamma^{m-n} e^{-|\gamma|^2/2} L_n^{(m-n)}(|\gamma|^2), & m \geq n \end{cases}$$

Em [57] foi mostrado que $|\exp(-x/2)L_m^{(k)}(x)| \ll 1$ para $k = 0, 1$ e $x \gg 1$, independentemente do valor do índice m (isto é, até mesmo se $m \sim x$). Por essa razão, calculando o dobro da soma dos valores médios, nós estamos retendo apenas os termos da diagonal com $\alpha_j = \alpha_k$. Isto resulta na seguinte generalização da fórmula dada em (3.30) dentro das condições de (3.27):

$$\tau_{in}^{-1} \approx 2m + 4 \sum_{k=1}^{N/2} d_{2k} |\alpha_{2k}|^2. \quad (3.32)$$

O termo omitido mostra alguns comportamentos de oscilações como função de m , se $m > |\alpha_1|^2$. Porém como foi mostrado em [57], a máxima amplitude destas oscilações é da ordem de $|\alpha|^{4/3}$ se $m \sim |\alpha|^2$. Conseqüentemente, estas oscilações não mudam significativamente o **TDI** (veja em [57]).

Porém, o **TDI** não pode ser uma medida universal da taxa de descoerência, porque τ_{in} pode se tornar muito pequeno, simplesmente pelo acréscimo do maior valor de $|\alpha_N|^2$, sem a realização de mudança de valores nos outros parâmetros, até mesmo se $d_N \ll d_k$ com $k \neq N$. Obviamente, que o último membro da superposição é completamente insignificante neste caso, e nada realmente ocorre com o estado quântico para o tempo τ_{in} .

3.3.2 Taxa de Decaimento do Pico Central de Interferência

Outro indicador simples do *grau de descoerência* pode ser a altura de alguns picos de interferência dentro da estrutura da função de Wigner [56, 57, 59]. As posições destes picos são fornecidas pela fórmula dada em (3.16). A altura máxima inicial de cada pico (em $\tau = 0$) dada por $|B_{jk}|$ pode ser duas vezes maior que altura do pico constiuente de cada componente da superposição, que neste caso é centrado em $z = G\alpha_k$ ou em $z = G\alpha_j$ (se for o caso de $|c_j| \approx |c_k|$). Porém, o valor de B_{jk} é muito sensível para valores concretos dos números complexos α_j e α_k (em relação a suas fases), a não ser que eles fiquem localizados no mesmo raio com origem no ponto $z = 0$. Além disso, B_{jk} pode exceder o dobro da altura dos picos constituintes, se

acidentalmente η_{jk} coincidir com alguns valores de η_n ou até mesmos com outros pares (α_m, α_s) dando os mesmos valores $\zeta_{ms} = \zeta_{jk}$. conseqüentemente a função $F(\zeta_{jk})$ não pode servir como um indicador universal para qualquer combinação de índice (j, k) .

Um bom indicador de descoerência é a altura do pico central de interferência em $z = 0$ (isto dentro das condições impostas em (3.27), porque todos N pares de estados localos nos pontos α_k e $-\alpha_k$ contribui para $F(0, \tau)$, logicamente que isto implica no comportamento da altura inicial de $F(0, 0)$, podendo esta altura ser N vezes maior que a altura de qualquer pico das componentes da superposição $F(\alpha_j, 0)$ (isto ocorre se todos os coeficientes c_j apresentarem os mesmos valores). Além disso, o valor dado por $F(0, 0)$ não depende em momento algum da posição α_k do centro de cada pico dos componenetes da superposição. Diante disto é razoável usar a altura normalizada como um indicador de descoerência, para isto dividimos $F(o, \tau)$ pelo valor inicial. Assim conseguimos chegar ao seguinte indicador de descoerência:

$$f(\tau) = \frac{F(z = 0; \tau)}{F(z = 0; 0)}. \quad (3.33)$$

Fazendo uso das condições dada em (3.27) nós conseguimos obter uma fórmula explicita para a altura normalizada do pico central de interferência dada por:

$$f(\tau) = \frac{2r^m}{s^{m+1}} \sum_{k=1}^{N/2} d_{2k} \exp \left[-\frac{2\tau}{s} |\alpha_{2k}|^2 \right] \times L_m \left(-\frac{4\tau^2}{rs} |\alpha_{2k}|^2 \right), \quad (3.34)$$

onde os coeficientes d_k são definidos pela equação (3.23). A equação (3.34) mostra claramente que a evolução da altura do pico central de interferência não é exponencial em qualquer caso genérico, onde o número de componentes da superposição for maior que 2. Por esta razão, é muito difícil ou quase impossível a introdução de um único *tempo de descoerência* para um caso genérico. O **TDI** τ_{in} fornece unicamente o tempo de desaparecimento da interferência entre as componentes da superposição que estão mais distantes. Contudo este parâmetro é insuficiente para caacterizar todo o processo, especialmente se $N \gg 1$ ou se $d_N \ll 1$. O padrão

de interferência desaparece totalmente somente após um tempo *final de descoerência* $\tau_f \sim |\alpha_1|^{-2}$ (contando que d_1 não seja muito menor que os outros coeficientes d_k). o qual pode ser muito maior que o tempo de desocoeência inicial τ_{in} . Em particular, o incrementando o tamanho das componentes da superposição de estado pelo aumento do $|\alpha_N|$ (ou adicionado novas componetes com parâmetros de deslocamentos maiores) não afeta o tempo de descoerencia final τ_f .

Os primeiros termos da expansão em série de Taylor do lado direito da equação (3.34) são os seguintes:

$$f(t) \approx 1 - \tau \left[2m + 1 - \sigma + 4 \sum_{k=1}^{N/2} d_{2k} |\alpha_{2k}|^2 \right] + \tau^2 \left[4 \sum_{k=1}^{N/2} d_{2k} |\alpha_{2k}|^2 \left(|\alpha_{2k}|^2 + 4m + 2 - 2\sigma \right) + 2m^2 + 2m(1 - 2\sigma) + (1 - \sigma)^2 \right]. \quad (3.35)$$

Olhando para o termo linear (com respeito à τ) em (3.35), podemos concluir que o *o tempo f-descoerência inicial* definido como $\tau_{in}^{-1} = |df/d\tau|_{\tau=0}$, coincide com o *tempo μ -descoerência* dado em (3.32) (onde o termo $1 - \sigma$ foi omitido). De fato esta coincidência acontece para superposições arbitrárias, contando que elas tenham uma paridade definida com respeito à reflexão $x \rightarrow -x$. Entretanto a quantidade $\partial W/\partial t|_{t=0}$ pode ser encontrada diretamente da equação de Fokker-Plank (2.17), sem qualquer conhecimento da função de Wigner $W(q, p, t)$ para $t > 0$. Por outro lado, a função de Wigner para um estado quântico puro com paridade definida tem uma propriedade notável, esta propriedade afirma que as derivadas da função de Wigner na origem do espaço de fase (q, p) são determinadas completamente pelos valores médios dos domínios e o produto dos operadores canônicos [65]. Em particular, podemos escrever:

$$\frac{-1}{4W} \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} \Big|_{q=p=0} = \langle \hat{p}^2 \rangle, \quad \frac{-1}{4W} \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} \Big|_{q=p=0} = \langle \hat{q}^2 \rangle. \quad (3.36)$$

Colocando estas expressões no lado direito da equação 2.17) em $t = 0$, levando em conta as equações (2.18) e (2.22), nós obtemos a derivada $df/d\tau|_{\tau=0} = \sigma - \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{q}^2 \rangle$, a qual coincide exatamente com a equação (2.31), devido às relações $\langle \hat{p}^2 \rangle + \langle \hat{q}^2 \rangle = 2\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + 1$ e $\langle \hat{a} \rangle = 0$.

Verificamos que o **TDI** quando levado em conta apenas os dois primeiros termos da expansão dada em (3.35) decresce com o incremento do parâmetro m . Mas por outro lado, se levarmos em conta os três primeiros termos da expansão dada em (3.35), o termo quadrático indica que aumentado o valor de m , nós podemos reduzir a velocidade de decaimento da função f . Conseqüentemente, os estados com $m > 0$ pode possuir um *tempo de descoerência final* maior que os estados com $m = 0$. Este comportamento torna-se especialmete mais claro quando nós temos $m \gg 1$, desde então a fórmula dada em (3.35) mostra que a influência do parâmetro m é mais significante para $m \sim |\alpha|^2 \gg 1$. Neste caso nós podemos substituir os polinômios de Laguerre de argumento negativos pela fórmula de aproximação assintótica de Hilb dada em [45]

$$L_m(-x) \sim \exp(-x/2)I_0(\sqrt{4mx}), \quad (3.37)$$

onde $I_0(z)$ representa as funções de Bessel modificadas. A fórmula (3.37) acontece uniformemente com respeito a x (incluindo pequenos valores) para $m \gg 1$. Então podemos escrever a equação (3.34) da seguinte forma:

$$f(\tau) \approx \frac{2r^m}{s^{m+1}} \sum_{k=1}^{N/2} d_{2k} \exp\left(-\frac{2\tau}{rs}G^2|\alpha_{2k}|^2\right) \times I_0\left(\frac{4\tau|\alpha_{2k}|\sqrt{m}}{\sqrt{rs}}\right). \quad (3.38)$$

Para $\tau \ll 1$ e $m \gg 1$, o raio r^m/s^{m+1} pode ser representado com uma precisão suficiente, e da mesma forma para a parte exponencial $\exp(-2m\tau)$ (os termos da ordem de $m\tau^2$ no argumento da função exponencial podem ser omitidos obviamente). Por outro lado, se o argumento da função de Bessel, $4\tau|\alpha_{2k}|\sqrt{m}$, é significativamente maior que uma unidade (isto acontece somente no regime final da descoerência, quando a função $f(\tau)$ poderá ser muito pequena), Então nós podemos usar a fórmula assintótica para as funções de Bessel modificadas, $I_0(x) \approx (2\pi x)^{-1/2} \exp(x)$. Além disso, podemos ainda substituir $s(\tau) = r(\tau) = G(\tau) = 1$ no argumento da parte exponencial e na função de Bessel (as correções são da ordem $|\alpha|^2\tau^2 \ll 1$,

if $|\alpha|^2\tau \sim 1$). Com estas aproximações nós podemos reescrever a equação (3.38) como:

$$f(\tau) \approx \sum_{k=1}^{N/2} \frac{d_{2k} \exp \left[-2\tau (|\alpha_k| - \sqrt{m})^2 \right]}{\left(2\pi\tau |\alpha_k| \sqrt{m} \right)^{1/2}}. \quad (3.39)$$

Testes numéricos não mostram diferença visível entre as funções (3.38) e (3.39) para $|\alpha|^2\tau > 2$ e quando $m/|\alpha|^2 > 1/3$.

De acordo com a equação (3.39), nós podemos verificar que a taxa de decrescimento do pico central de interferência se torna essencialmente lento, se um dos valores de $|\alpha_k|$ for um valor próximo de \sqrt{m} . Para superposições nestas condições que mencionamos, o *tempo de descoerência final* pode ser muito maior que o *tempo de descoerência inicial*. τ_{in} . Estas características são ilustradas na próxima secção.

3.4 Exemplos

3.4.1 Superposição de Estados de Número Deslocados em um Círculo

Consideraremos dois casos. O primeiro exemplo corresponde a uma superposição de estados de número deslocados, distribuídos uniformemente ao longo de um círculo $|\alpha_n| = const$ com idênticas amplitudes, ou seja, $c_n = const$, de modo que $d_n \equiv 1/N$ e também

$$\alpha_n = |\alpha| \exp \left[\frac{2\pi i(n-1)}{N} \right], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

A condição $|\alpha_1 - \alpha_2| \gg 1$ implica $2|\alpha| \sin(\pi/N) \gg 1$. Assim assumimos que $N < N_{max} \sim 2\pi|\alpha|$. Dentro destas condições, a fórmula dada em (3.34) não depende mais do parâmetro N (para ver isto basta observar que a exponencial e os polinômios de Laguerre dentro da soma não dependem de N podendo ser retirado de dentro da soma, sobrando na soma somente d_k cuja soma é a

unidade) para a altura do pico central de interferência normalizado. Como uma consequência, o tempo de descoerência inicial não depende do número estados superpostos neste caso.

Notando que a altura do pico central de interferência é N vezes maior que a altura de qualquer pico das componentes da superposição (centralizado em $z = \alpha_k$ quando $\tau = 0$, nós definimos o *tempo de descoerência final* (**TDF**) τ_f como a solução da equação

$$f(\tau_f) = 1/(N\beta), \quad \beta \geq 1, \quad (3.40)$$

esta equação mostra o instante quando o pico de interferência se torna β vezes menor que a altura inicial do pico central de das componentes. Esta definição parece ser bem razoável, porque dificilmente alguém pode dizer que o pico de interferência desapareceu, se o pico de interferência permanece mais alto que os picos das componentes da superposição. A escolha de β é simplesmente por conveniência. Este parâmetro pode ser fixado de tal modo que para uma simples superposição de estados coerentes (quando a função $f(\tau)$ é simplesmente uma função exponencial para $\sigma = 1$) temos o tempo de *descoerência inicial e final* coincidindo. Para verificar os cálculos, basta calcular o tempo de descoerência inicial e final e depois igualar os resultados e resolver para β ; neste caso nós vamos encontrar $\beta = e/2 \approx 1.36$. Se estamos interessados em um tempo de descoerência final maior que o tempo de descoerência inicial, basta fazer $\beta > e/2$ na equação (3.40).

Em todas ilustrações nesta secção, consideramos o caso para $\sigma = 1$ (ou seja, a temperatura no reservatório é zero), quando $s \equiv 1$ e $r = 1 - 2\tau$. Para estas condições pode ser mostrado que **TDF** reduzido na escala τ_f quase não depende do parâmetro σ , incluindo seus sinais. Se levamos em conta o valor concreto de σ , nós teremos uma correção da ordem de $\delta\tau_f \sim |\gamma\alpha_k^4|^{-1}$, a qual pode ser omitida. Na usual *escala - t*, o tempo de descoerência diminui com o decrescimento do parâmetro σ (que corresponde a um crescimento no valor absoluto da temperatura T), falando aproximadamente, como $t_f \sim \tau_f\sigma/\gamma$ (isto é, a medida que T^{-1}

esteja no limite da alta temperatura) em acordo com a equação (2.22) para $\tau \ll 1$. Porém, t_f permanece finito até mesmo para uma infinita temperatura; isto se o coeficiente de difusão D , definido na equação (2.18) for fixado.

Para $m = 0$ nós temos uma fórmula exata e simples

$$\tau_f^{(0)}(N) = \frac{\ln(N\beta)}{2|\alpha|^2} = \ln(N\beta)\tau_{in}^{(0)}. \quad (3.41)$$

Conseqüentemente, colocando mais estados coerentes no círculo com um raio fixado no plano complexo- α (isto é, para a energia e o tempo de descoerência inicial fixados) isto resultaria em um incremento logarítmico para o tempo de descoerência final em função do número de estados superpostos N .

Um comportamento típico da função $f(\tau)$ dada em (3.38), para pequenos valores de τ e diferentes valores de m , é mostrada na figura 3.7. Para uma escolha do valor de α como sendo $|\alpha| = 10$, o tempo de descoerência inicial para uma superposição de estados coerentes ($m=0$) é dado por $\tau_{in}^{(0)} = 0.005$, e nesta situação podemos verificar através da figura (3.7), que a função $f(\tau)$ decresce mais rapidamente com o incremento dos valores de m quando $\tau < \tau_{in}^{(0)}$. De acordo com a equação (3.32), o tempo de descoerência inicial decresce mais devagar com o incremento do valor de m , que pode ser verificado com o resultado $\tau_{in}^{(m=|\alpha|^2)} = \tau_{in}^{(0)}/2$. Uma outra maneira de observar este comportamento, é verificar que o declive da linha, que corresponde a $m = 10$, está muito mais próximo da linha que o corresponde a $m = 0$ quando comparado com $m = 100 = |\alpha|^2$ (a linha para $m = 0$ não é mostrada na figura (3.7)). Porém o valor de $f(\tau_{in}) = 1/e \approx 0.37$ não é extremamente pequeno, e olhando para pequenos valores de f para τ maior que τ_{in} , nós podemos verificar que a situação torna-se invertida, ou seja, o decaimento do pico central de interferência das superposições de estados com valores de m maior, torna-se mais lento. Isto pode ser visto na figura 3.8.

É conveniente normalizar o tempo de descoerência final em relação ao tempo de de-

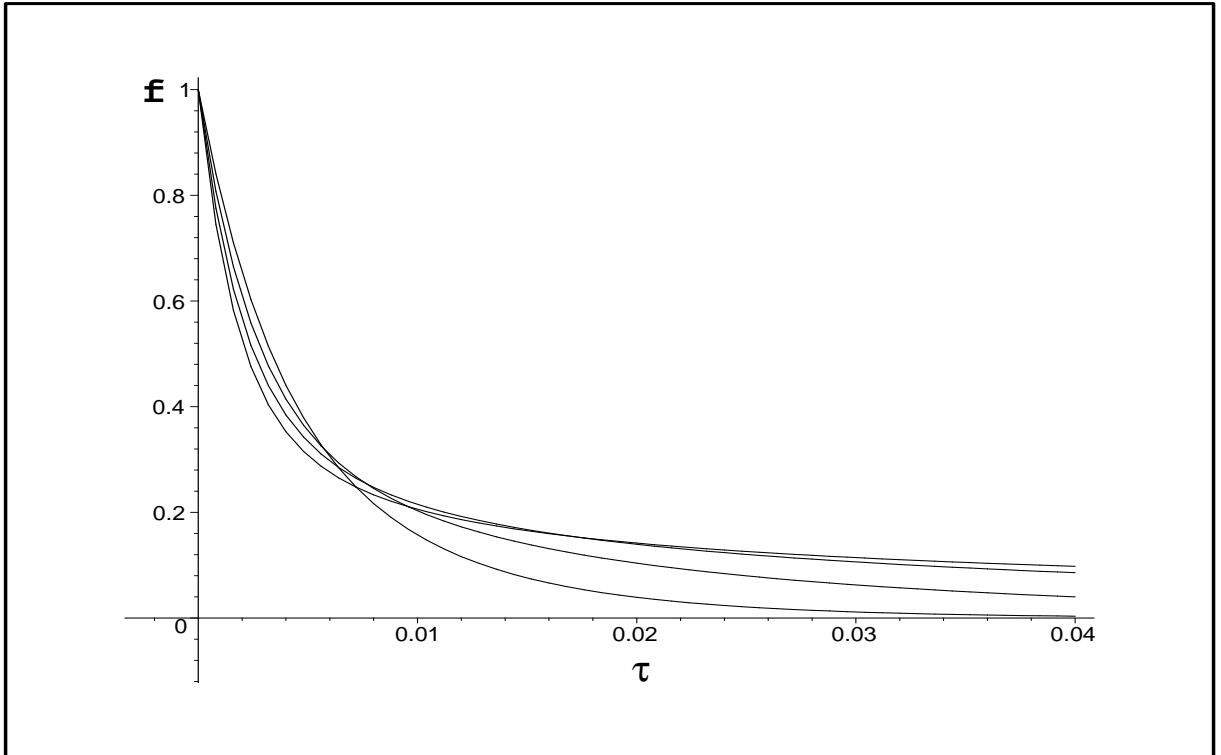


Figura 3.7: A altura normaliza do pico central de interferência dada pela função (3.38) versus o tempo τ para superposições dos estados de número deslocados em um círculo com raio $|\alpha| = 10$ e diferentes valores do número de Fock, $m = 10, 40, 70, 100$ (seguindo esta ordem no lado esquerdo da figura de cima para baixo e invertendo no lado direito).

scorência inicial $\mathbf{TDI} \tau_{in}^{(0)} = (2|\alpha|^2)^{-1}$, isto é, nós consideraremos a quantidade $T = 2|\alpha|^2\tau_f$. Resolvendo a equação (3.38) numericamente, obtemos a dependência de T em relação a m e N , que estão mostradas nas figuras 3.9 e 3.10. Podemos perceber que uma superposição de estados com $m = |\alpha|^2$ apresenta um tempo de descoerência máximo, o qual pode ser muito maior que o tempo de descoerência para superposições de estados coerentes ($m = 0$), especialmente quando temos um grande número de componentes N . Este comportamento é explicado pela equação (3.39), a qual resulta em uma simples fórmula aproximada, para o tempo de descoerência final máximo:

$$\tau_f^{(m=|\alpha|^2)} \approx \tau_{in}^{(0)} N^2 \beta^2 / (4\pi). \quad (3.42)$$

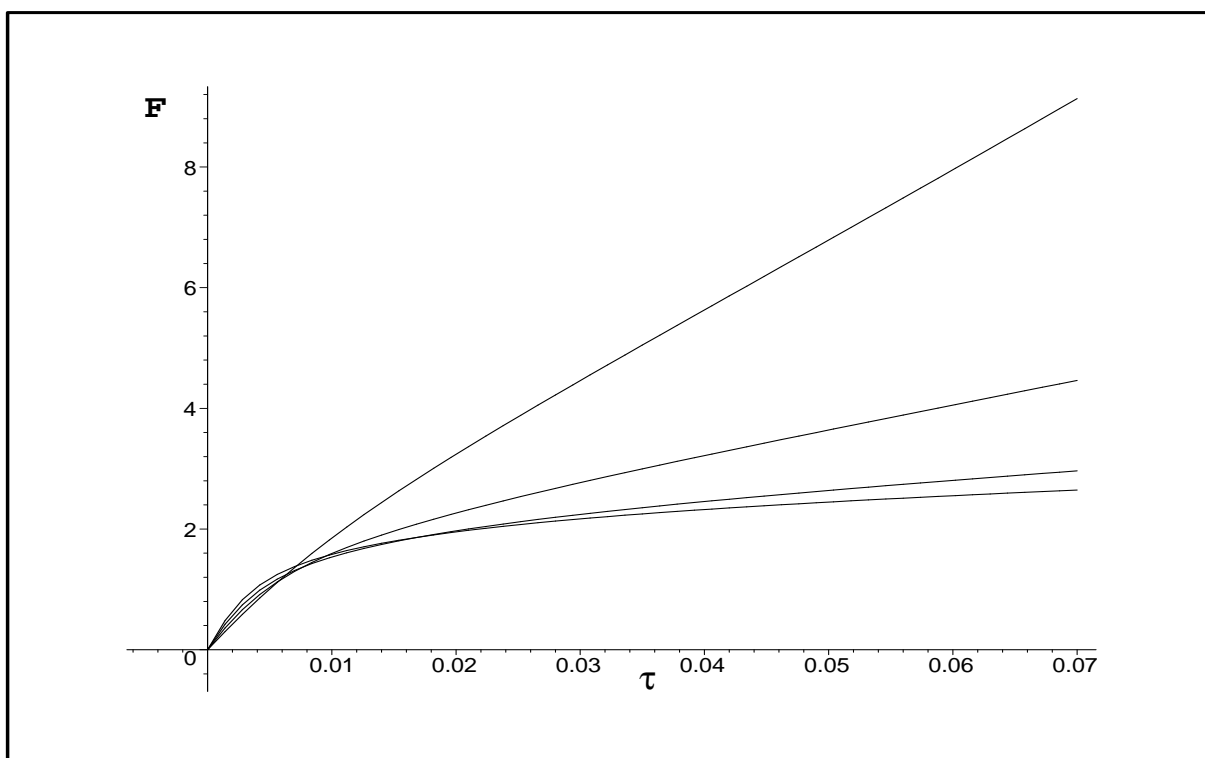


Figura 3.8: O negativo do logaritmo da altura do pico central de interferência $F = -\ln(f)$ versus o tempo τ adimensional para superposição de estados de número deslocados em um círculo com raio $|\alpha| = 10$ para diferentes valores do número de Fock $m = 10, 40, 70, 100$ (de cima para baixo, no lado direito da figura)

Conseqüentemente, o tempo de descoerência final cresce como N^2 para $N \gg 1$ e $|\alpha|^2 \approx m$. Isto pode ser visto claramente na figura 3.9. Neste caso 3.10 mostra que τ_f decresce com o incremento de m para $N = 2$, em contraste com as superposições que possuem mais de duas componentes. Isto é devido ao fato de termos escolhido um valor de β relativamente pequeno dado por $\beta = e/2$. Fazendo com que beta assumia valores maiores como por exemplo: $\beta > 2$, nós observamos o incremento do tempo descoerência final τ_f para $N = 2$.

Note que quando deduzimos a fórmula (3.34), nós omitimos a contribuição das componentes da superposição com termos $j = k$ para o valor da função de Wigner na origem ($z = 0$).

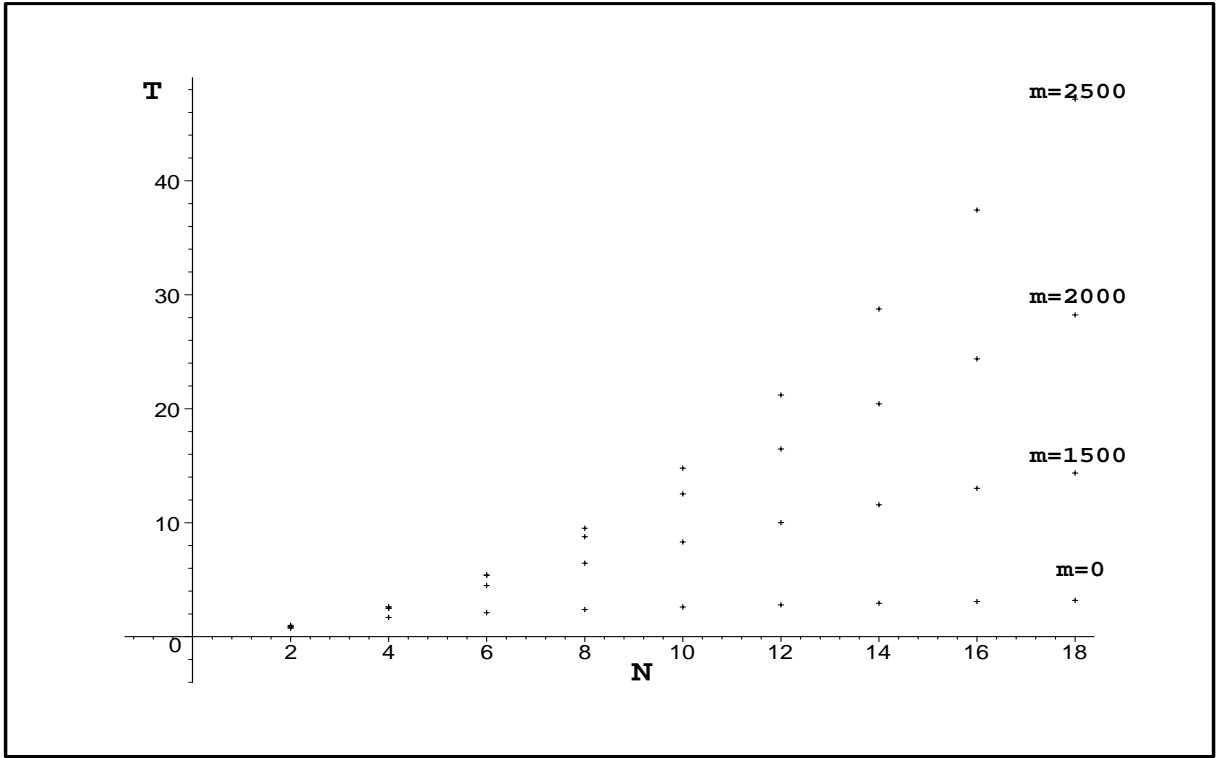


Figura 3.9: O tempo de descoerência final normalizado $T = 2|\alpha|^2\tau_f$ versus o números de componentes N de uma inicial superposição de estados de números deslocados em um círculo com $|\alpha| = 50$, para $\beta = e/2$ com diferentes valores de excitação m fixados.

O peso relativo desta contribuição em $\tau = 0$ é igual

$$\delta f = \exp\left(-2|\alpha|^2\right)L_m\left(4|\alpha|^2\right) \approx J_0\left(4|\alpha|\sqrt{m}\right) \quad (3.43)$$

(aqui usamos novamente a fórmula assintótica de Hilb, onde $J_0(x)$ representa a usual função de Bessel). Conseqüentemente,

$$|\delta f| \leq \left(2\pi|\alpha|\sqrt{m}\right)^{-1/2} \ll 1, \quad |\alpha| \gg 1,$$

até mesmo se $m \sim |\alpha|^2$. Para $m \ll |\alpha|^2$ nós temos uma correção exponencialmente pequena, da ordem dê:

$$|\delta f| \sim \exp\left(-2|\alpha|^2\right).$$

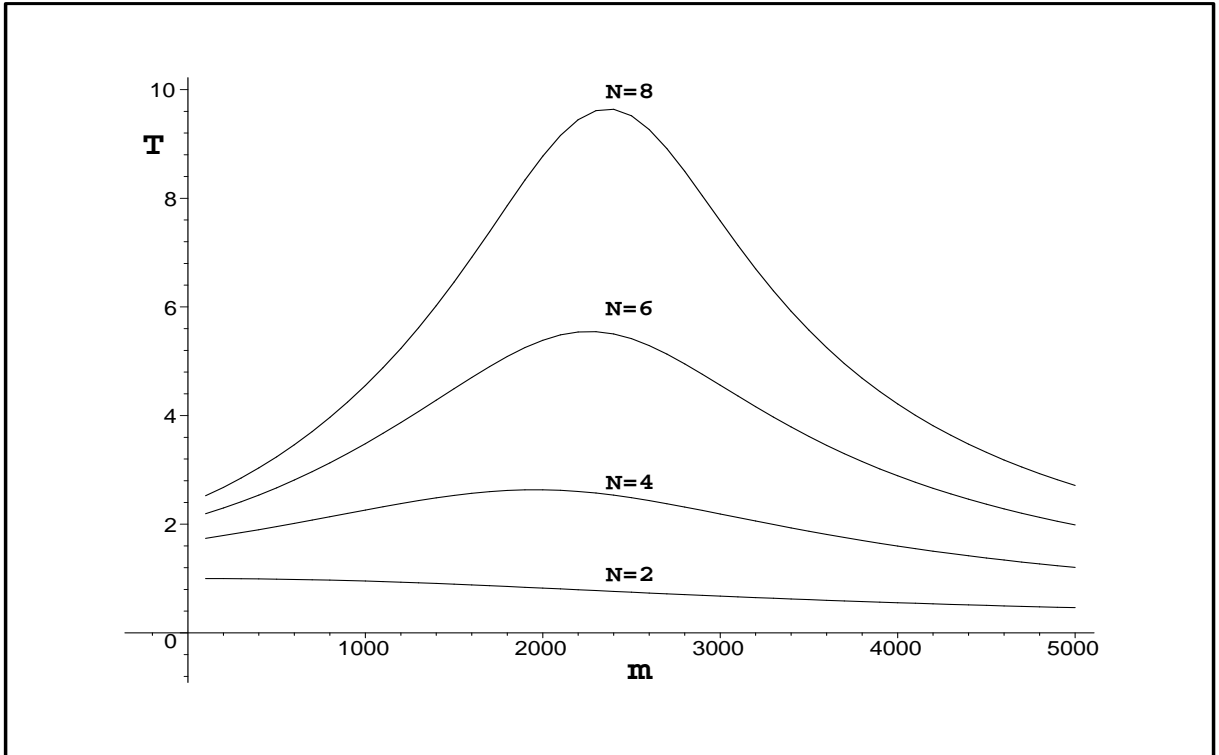


Figura 3.10: O tempo de descoerência final normalizado $T = 2|\alpha|^2\tau_f$ versus o número de excitação m de uma superposição inicial de estados de números deslocados em um círculo com $|\alpha| = 50$, para $\beta = e/2$ com diferentes números de componentes N fixados.

Para $m = 0$, a dependência temporal da *pureza*, no caso especial da fórmula (3.26) é dada por:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp[-4\tau|\alpha|^2 \sin^2(\pi k/N)]. \quad (3.44)$$

Usando a fórmula da soma de Euler-Maclaurin dada em [66]:

$$\sum_{k=0}^N F(k) \approx \int_0^N F(k) dk + \frac{1}{2} [F(0) + F(N)] \quad (3.45)$$

e a conhecida representação integral das funções de Bessel modificadas

$$2\pi I_0(z) = \int_0^{2\pi} \exp[z \cos \phi] d\phi,$$

nós obtemos uma fórmula aproximada, a qual é boa para $N \gg 1$ (mas claro que N deve também estar dentro da condição $N < 2\pi|\alpha|$):

$$\mu \approx \exp(-2\tau|\alpha|^2)I_0(2\tau|\alpha|^2). \quad (3.46)$$

O comportamento da função $L = -\ln \mu$ para diferentes valores de N está mostrado na figura 3.11. Todas as linhas apresentam o mesmo declive inicial, de acordo com a equação (3.29).

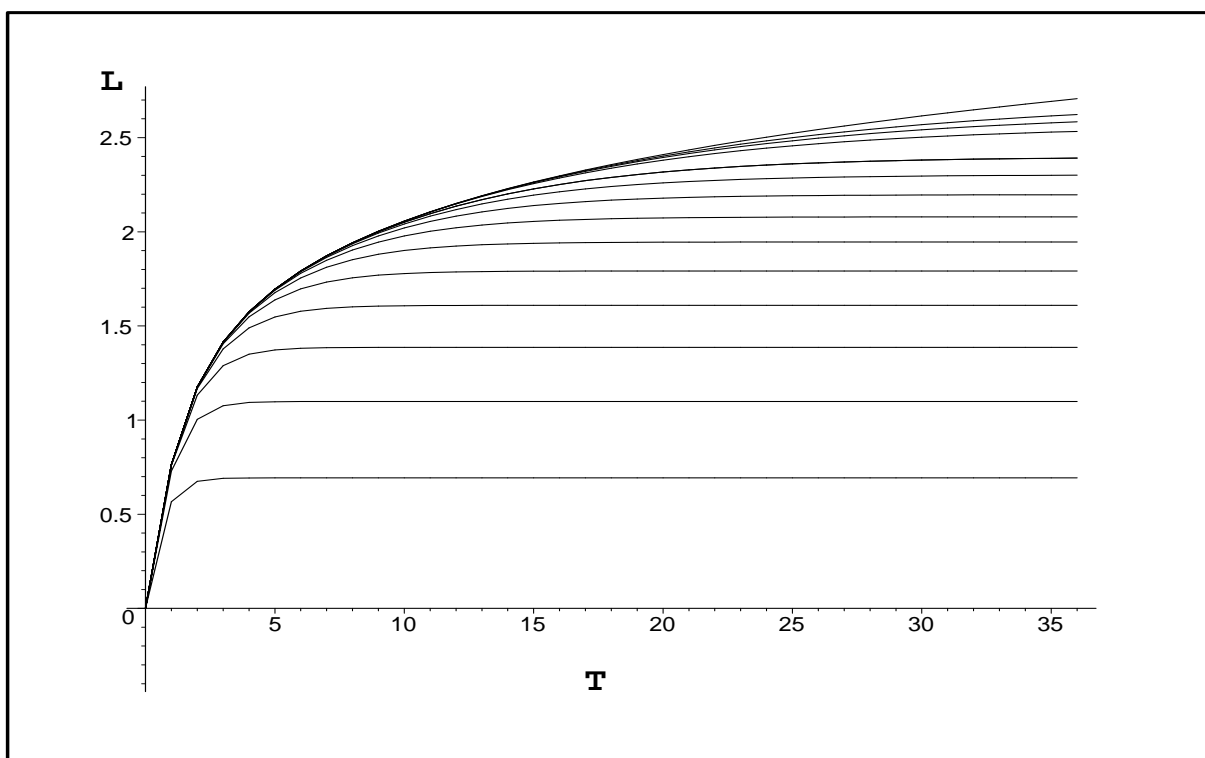


Figura 3.11: O negativo da função logarítmica da pureza quântica $L = -\ln \mu$ para uma superposição inicial de N estados coerentes (quando $m = 0$ e μ é dado pela equação (3.44) versus o parâmetro $T = 2|\alpha|^2 \tau$. As linhas de baixo para cima corresponde aos valores de N variando de 2 até 14 (neste exemplo N pode ser tanto par quanto ímpar). A linha envelope corresponde à fórmula aproximada (3.46).

Porém para grandes valores de N , os valores intermediários assintóticos da pureza quântica, $\mu_{int} = 1/N$, são alcançados após um tempo, o qual é significativamente maior que o **TDI**

$$\tau_{in} = (2|\alpha|^2)^{-1}.$$

Podemos definir o *tempo de descoerência final para a pureza* $\tau_{f\mu}$ como sendo a solução da equação

$$\left[\mu(\tau_{f\mu}) - \mu_{int} \right] / \mu_{int} = \epsilon, \quad (3.47)$$

onde ϵ é um número pequeno fixado $\epsilon \ll 1$. Exigindo que $\tau_{f\mu} = \tau_{in}$ para $N = 2$, obtemos o valor $\epsilon = e^{-2} \approx 0.135$. Usando a equação (3.44) em conjunto com a equação (3.47), nós encontramos uma nova equação aparentemente mais fácil de trabalhar

$$\sum_{k=1}^{N-1} \exp \left[-4\tau_f |\alpha|^2 \sin^2 \left(\pi k / N \right) \right] = \epsilon. \quad (3.48)$$

Obviamente, que para $\epsilon \ll 1$ and $N \gg 1$, é suficiente levar em conta apenas o primeiro termo no lado direito da equação (3.48) (se este termo for igual a ϵ , então o segundo termo é da ordem de ϵ^4). Assim podemos obter uma dependência quadrática do tempo de μ -descoerência final em função no número de componentes da superposição N dada por:

$$\tau_{f\mu} = \left(\frac{N}{2\pi|\alpha|} \right)^2 \ln(1/\epsilon) = \frac{1}{2} \tau_{in} (N/\pi)^2 \ln(1/\epsilon). \quad (3.49)$$

a qual deixa claro que a equação escrita, nesta forma, apresenta uma visão analítica mais simples e compacta.

3.4.2 Superposição do Estado de Número Deslocados em Uma Linha Reta

Agora iremos trabalhar com superposições com um número para de estados $N \ll 2|\alpha|$ com pesos iguais a $d_k = 1/N$, distribuídos uniformemente ao longo de uma linha reta,

$$\alpha_{2k-1} = a(2k-1), \quad k = 1, 2, \dots, N/2,$$

de forma que $2a$ é uma distância constante entre as componentes vizinhas; o parâmetro de deslocamento máximo é dado por $|\alpha_N| = a(N - 1)$. Então para $m = 0$ e $\sigma = 1$

$$\tau_{in}^{-1} = \frac{2a^2}{3} (N^2 - 1) = \frac{2}{3} \alpha_N^2 \frac{N+1}{N-1} = \begin{cases} 2\alpha^2, & N = 2 \\ \frac{2}{3} \alpha_N^2, & N \gg 1 \end{cases}. \quad (3.50)$$

Conseqüentemente, se o deslocamento máximo $|\alpha_N|$ for fixado, então o tempo de descoerência inicial não depende do número de componentes N (isto para $N \gg 1$). Comparando as equações (3.34) e (3.40) e também levando em conta que os termos com $k > 1$ decresce mais rapidamente que os primeiros termos, nós podemos concluir que o tempo de descoerência final pode encontrado da equação dada por:

$$\frac{2r^m}{s^{m+1}} \exp \left[-\frac{2\tau}{s} |\alpha_1|^2 \right] L_m \left(-\frac{4\tau^2}{rs} |\alpha_1|^2 \right) = \frac{1}{\beta}, \quad (3.51)$$

a qual não contém N . Para $m = 0$ obtemos, ao invés de uma dependência logarítmica em N como obtida na equação dada em (3.41), uma dependência quadrática em relação ao número de componentes da superposição N para o tempo de descoerência final (isto se τ_{in} for fixado):

$$\tau_f^{(0)}(N) = \frac{\ln(2\beta)}{2|\alpha_1|^2} = \frac{1}{3} N^2 \ln(2\beta) \tau_{in}, \quad N \gg 1. \quad (3.52)$$

O tempo de descoerência final aumenta com o incremento de m , mas a sua dependência em relação a m é muito menos expressiva quando se trata de superposições em um círculo (a não ser que $\beta \gg 1$). O valor máximo para o tempo de descoerência final τ_f é alcançado novamente quando $m = |\alpha_1|^2$ (isto para $\beta > 2$):

$$\tau_f^{(m=|\alpha_1|^2)} \approx \frac{\beta^2}{2\pi|\alpha_1|^2} = \frac{\beta^2}{3\pi} N^2 \tau_{in}, \quad N \gg 1. \quad (3.53)$$

O tempo de descoerência final praticamente não depende de m , quando m é pequeno, comparado com o deslocamento do último estado superposto $m \leq |\alpha_1|^2 \ll |\alpha_N|^2$. Nós não consideramos

valores para $m \gg |\alpha_1|^2$, porque estes valores resultaria na sobreposição entre as componentes da superposição da função de Wigner inicial.

A fórmula (3.26) para o caso considerado em estudo poder ser reescrita como (para $m = 0$)

$$\mu = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} (N - k) \exp\left(-\tau a^2 (2k)^2\right), \quad \tau \ll 1, \quad (3.54)$$

de forma que a equação dada em (3.47) assume a forma

$$\sum_{k=1}^{N-1} (1 - k/N) \exp\left(-\tau a^2 (2k)^2\right) = \epsilon/2. \quad (3.55)$$

aqui mais uma vez nós consideraremos apenas o primeiro termo no lado esquerdo da equação (3.55). assim nós obtemos

$$\tau_{f\mu} = \ln(2/\epsilon)/a^2 = \frac{1}{6} \tau_{in} N^2 \ln(2/\epsilon), \quad N \gg 1. \quad (3.56)$$

3.4.3 Superposição de Quatro Estados de Número Deslocados em Linha Reta

Para facilitar o entendimento em relação a dinâmica da descoerência da superposição de muitos componentes, consideraremos uma superposição de quatro estados deslocados e distribuídos ao longo de uma linha reta. Nas figuras 3.12 e 3.13, nós ilustramos o caso no qual todas as componentes da superposição possuem pesos iguais. Na figura 3.12 nós mostramos a função de Wigner (3.12) com a parte imaginária de z igual a zero $\text{Im}(z) = 0$ para $m = 0$ (uma superposição de estados coerentes), em três instantes de tempo: $\tau = 0$, $\tau = \tau_{in}$ (calculados de acordo com a equação (3.30)) e $\tau = \tau_f$ (calculado de acordo com a equação (3.40) com $\beta = e/2$). Os picos representando cada uma das componentes da superposição são localados nos pontos $z = \pm 5$ e $z = \pm 15$, e os picos que aparecem nos pontos $z = 0$ e $z = 10$ são causados pelos termos de interferência. A altura inicial do pico em $z = 5$ é três vezes maior que a altura

do pico inicial em $z = 15$ devido à coincidência acidental do pico de interferência formado pelo par de estados com $\alpha_2 = -5$ e $\alpha_3 = 15$. Já que $F(z) = F(-z)$ para os estados que estamos trabalhando, não mostramos a função de Wigner correspondente ao semi-eixo negativo. Podemos verificar que, embora a altura do pico central de interferência no instante τ_{in} é duas vezes menor quando comparada com a altura em $\tau = 0$, ele é ainda maior que a altura dos picos correspondentes de cada uma componentes. De fato, dificilmente alguém poderia acreditar que ocorreria uma descoerência vital neste instante de tempo. Somente após um tempo τ_f (o qual é 5 vezes maior que τ_{in} ; neste exemplo) a altura do pico central de interferência torna-se menor que os picos das componentes da superposição

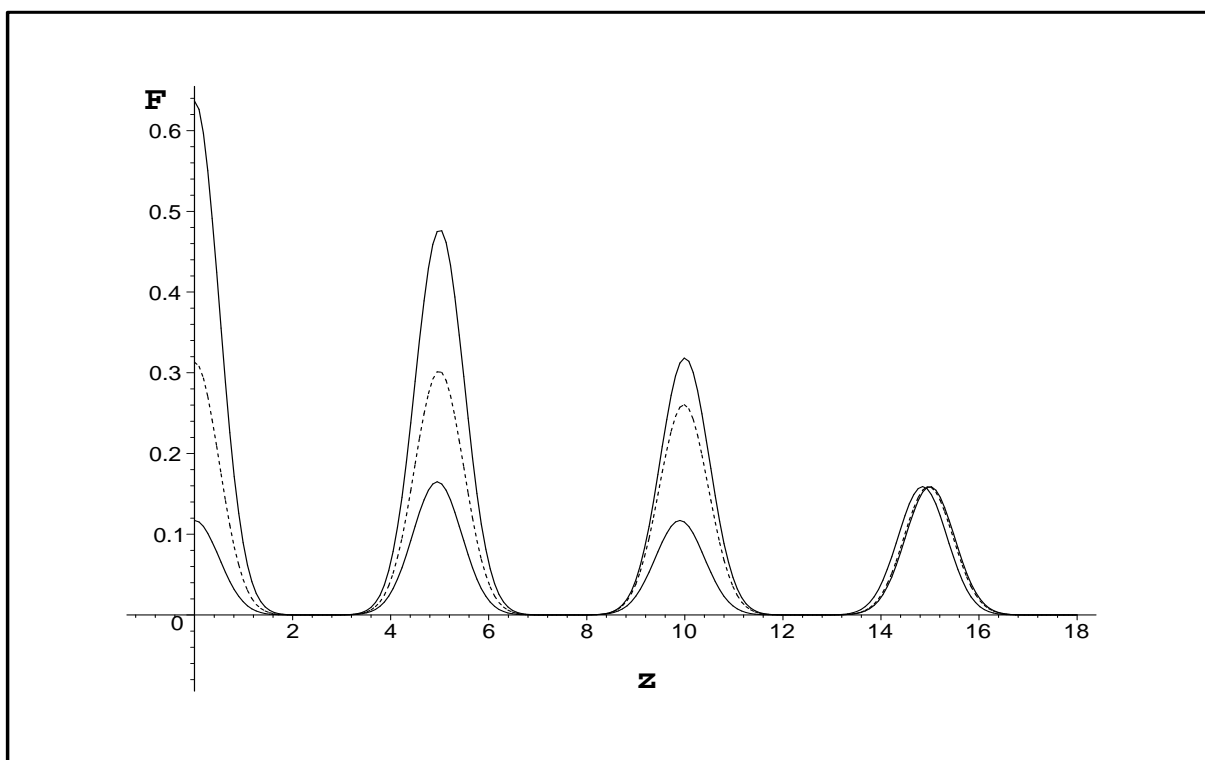


Figura 3.12: Função de Wigner $F(z)$ (3.12) com $\text{Im}(z) = 0$ para uma superposição de quatro estados coerentes ($m = 0$) em uma linha, com pesos iguais, localizados inicialmente nos pontos $\alpha_1 = -\alpha_2 = 5$ e $\alpha_3 = -\alpha_4 = 15$ para três instantes de tempo $\tau = 0$ (linha superior), $\tau = \tau_{in} = 0.004$ (linha intermediária) e $\tau = \tau_f = 0.02$ (linha inferior) a qual corresponde para um parâmetro $\beta = e/2$.

Na figura 3.13, nós ilustramos a diferença entre superposição de estados coerentes e estados de número deslocados com grandes valores do número de Fock (m). O tempo escolhido é o instante $\tau = 0.04$, o qual é 6.4 vezes maior que o tempo de descoerência inicial, calculado em acordo com a equação (3.30). Este tempo também é maior que o tempo final de descoerência (TDF) 0.033 para superposições Gaussianas, calculadas de acordo com a equação (3.52). Para este contexto nós podemos verificar que os picos de interferências da superposição Gaussiana estão significativamente abaixo dos picos das componentes da superposição. Neste mesmo tempo, os picos de interferências dos estados nao Gaussianos estão quase três vezes maior que o pico das componentes.

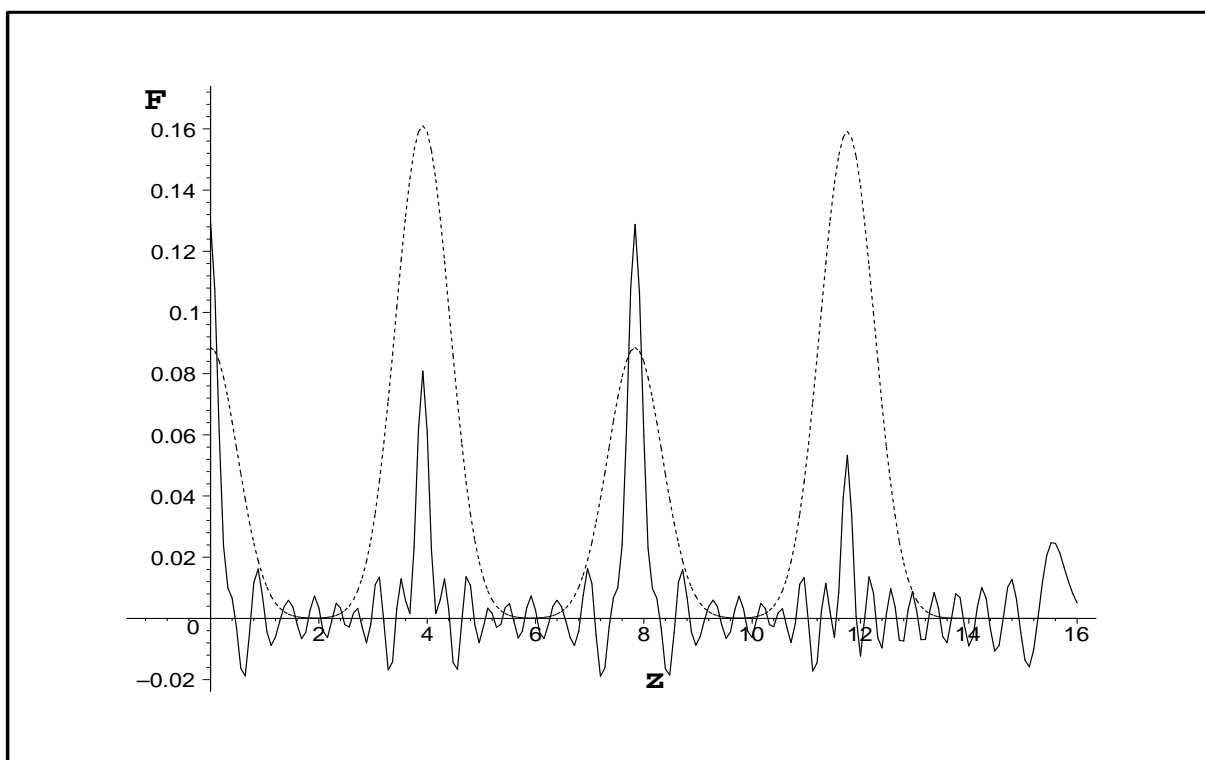


Figura 3.13: Função de Wigner $F(z)$ (3.12) com $\text{Im}(z) = 0$ para uma superposição de quatro estados em uma linha, com pesos iguais, localados inicialmente nos pontos $\alpha_1 = -\alpha_2 = 4$ e $\alpha_3 = -\alpha_4 = 12$ no instantes de tempo $\tau = 0.04$ com pesos iguais, mais diferentes valores de m , o gráfico pontilhado corresponde a $m = 0$ e a linha sólida corresponde a $m = \alpha_1^2 = 16$.

Para estudar a influência dos pesos das componentes diferentes da superposição no tempo de descoerência, nós vamos considerar superposições de quatro estado com $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\alpha_3 = -\alpha_4$, $d_1 = d_2 = x/2$ e $d_3 = d_4 = (1 - x)/2$. O número médio de fofons inicial, isto é, o tempo de descoerência primário (3.30) foi mantido fixo, imposto pela limitação

$$x|\alpha_1|^2 + (1 - x)|\alpha_3|^2 = (2\tau_{in})^{-1} = const. \quad (3.57)$$

Na figura 3.14 nós mostramos a função $L = -\ln\mu(\tau)$ para diferentes valores do peso x e fixados valores de $\alpha_1 = 5$ e $\tau_{in}^{-1} = 450$ (de forma que $\alpha_3 = 15$ para $x = 0$). Podemos ver através da equação (3.28) que a pureza se aproxima assintoticamente de um valor constante $\mu_\infty = [x^2 + (1 - x)^2]/2$ após um intervalo de tempo, o qual é significativamente maior que o TDI τ_{in} , até mesmo para pequenos valores de x . Na figura 3.15 mostramos que a diferença entre o tempo de descoerência inicial e final se torna bem mais evidente quando nós consideramos a dependência temporal do negativo da função logarítmica para a altura do pico central de interferência normalizado $F = -\ln(f)$, onde f é dado pela equação (3.34). Embora todas as curvas, começam com a mesma inclinação inicial em $\tau = 0$, correspondendo ao tempo de descoerência inicial τ_{in} , estes parâmetro não tem nada em comum com tempo real de descoerência, exceto para o caso em que o peso x das componentes interna da superposição seja muito pequeno (por exemplo: x menor que 0.1, e para este caso o parâmetro β na equação (3.52) é maior que $e/2$).

3.5 O Comportamento da Função de Wigner Para um Tempo Longo em Sistemas Amplificados

Nesta secção analizaremos o comportamento assintótico para a função de Wigner dada pela equação (3.12) quando $t \rightarrow \infty$ no caso de sistemas amplificados ($\sigma < 0$). Se $\sigma > -1$, então

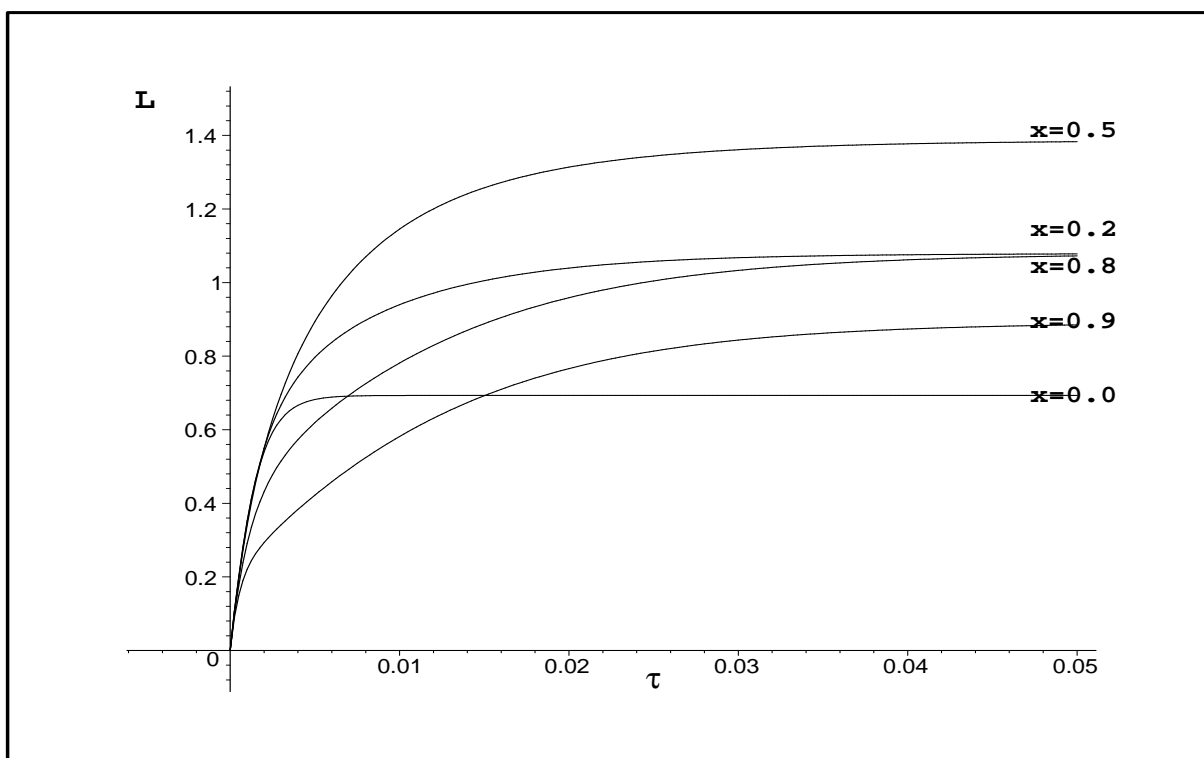


Figura 3.14: O negativo da função logarítmica para a pureza quântica $L = -\ln(\mu)$ (onde a pureza é dada pela equação (3.28))

versus o tempo τ para superposições de quatro estados coerentes em uma linha, sendo os pesos x das componentes da superposição diferentes. Os parâmetros são fixados no tempo de descoerência inicial $\tau_{in} = 1/450$ e na posição inicial da primeira componente $\alpha_1 = 5$ (veja a equação (3.57)).

assintoticamente nós podemos escrever

$$G = \exp(|\gamma|t) \gg 1, \quad \tau \approx \frac{G^2}{|\sigma|},$$

$$r \approx \frac{-G^2(1 - |\sigma|)}{|\sigma|} < 0, \quad s \approx \frac{G^2(|\sigma| + 1)}{|\sigma|}.$$

Conseqüentemente, fazendo a substituição de $z = G(t)\tilde{z}$, nós podemos reescrever a função (3.12) para $\tau \gg 1$ como:

$$F(z; t) = G^{-2}(\tau)\tilde{F}(\tilde{z}), \quad (3.58)$$

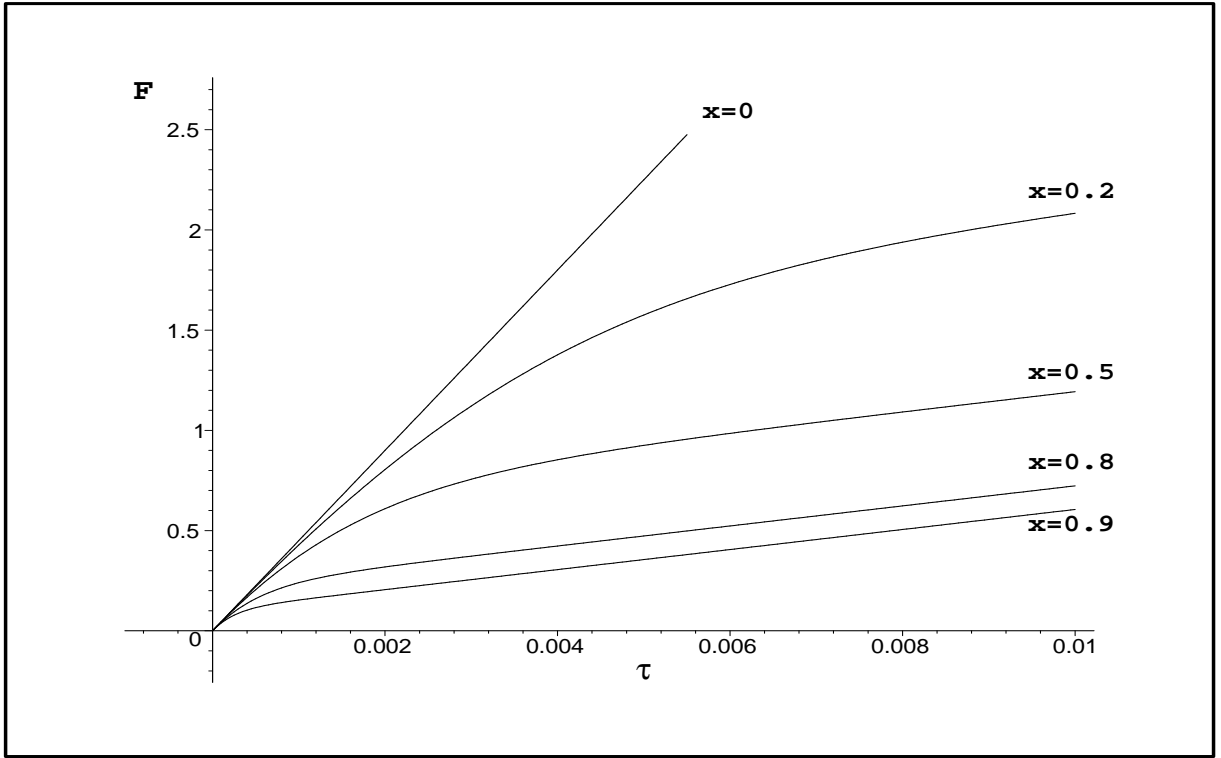


Figura 3.15: O negativo da função logarítmica para a altura do pico central de interferência normalizado $F = -\ln(f)$ (onde f é dada pela equação (3.34)) versus o tempo τ para superposições de quatro estados coerentes em uma linha, sendo os pesos x das componentes da superposição diferentes. Os parâmetros são fixados no tempo de descoerência inicial $\tau_{in} = 1/450$ e na posição inicial da primeira componente $\alpha_1 = 5$ (veja a equação (3.57)).

onde

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{z}) = & \frac{2|\sigma|(1-|\sigma|)^m}{A\pi(1+|\sigma|)^{m+1}} \sum_{j,k=1}^N c_j c_k^* \times \exp \left[-\frac{2|\sigma|}{1+|\sigma|} |\tilde{z}|^2 + \frac{1-|\sigma|}{1+|\sigma|} \alpha_j \alpha_k^* \right. \\ & \left. + \frac{2|\sigma|}{1+|\sigma|} (\tilde{z} \alpha_k^* + \tilde{z}^* \alpha_j) - \frac{1}{2} (|\alpha_j|^2 + |\alpha_k|^2) \right] \times L_m \left(-\frac{4}{1-\sigma^2} Z_{jk}^{(+)} Z_{jk}^{(-)*} \right), \end{aligned} \quad (3.59)$$

e

$$Z_{jk}^{(\pm)} = |\sigma| \left[\tilde{z} - \frac{1}{2} (\alpha_j + \alpha_k) \right] \pm \frac{1}{2} (\alpha_j - \alpha_k). \quad (3.60)$$

Percebemos que a função de Wigner assintótica toma uma forma congelada em termos da variável escalada \tilde{z} . O fator dependente do tempo $G^{-2}(\tau)$ na equação (3.58) é o responsável

pela normalização correta, devido a relação $d^2z = G^2 d^2\tilde{z}$. Por outro lado, analisando a função (3.58) verificamos que $F^2(z)$ decai em função do tempo de acordo com $G^{-4}(\tau)$, enquanto a pureza quântica dada pela equação (3.21) decai em concordância com $G^{-2}(\tau) = \exp(-2|\gamma|t)$.

No entanto, a contribuição dos termos fora da diagonal na função (3.59), não podem ser omitidos quando $\tau \gg 1$, porque os valores absolutos dos argumentos dos polinômios de Laguerre no lado direito da equação são muito maiores que os valores absolutos da função exponencial com argumentos correspondentes, com os mesmos valores da variável \tilde{z} (isto é, para σ próximo de -1) Este fato pode ser interpretado como um resurgimento dos efeitos de interferência (a função de Wigner assintótica depende da fase dos coeficientes c_j , e não apenas de seus valores absolutos). Isto é claramente visto, quando comparamos as figuras 3.16 e 3.17, as quais mostram uma parte da função de Wigner congelada $\tilde{F}(\tilde{z})$ com \tilde{z} real para superposições pares e ímpares de dois estados de número deslocados com diferentes valores do número de Fock m . Para $m = 0$ e $m = 1$, as curvas das superposições pares e ímpares praticamente coincidem inicialmente, de tal forma que estes valores de m não são considerados na figura 3.17. Mas quando m está próximo de $|\alpha|^2$, a diferença se torna bastante notável. Por exemplo, o pico central de interferência para uma superposição par com $m = 16$ (veja figura 3.16) é totalmente destruído no caso de uma superposição ímpar, como mostrado na figura 3.17.

Porém, estas interferências têm uma natureza clássica, e não quântica (ou talvez tenha a natureza mais clássica da quântica). Na forma mais distinta, este fenômeno pode ser visto no caso de limite, como um amplificador quântico ideal, caracterizado pelo parâmetro $\sigma = -1$ (este caso pode também ser pensado como sendo um amplificador com temperaturas não positivas). Então $\tau \approx G^2$ e $s \approx 2\tau$, mas $r \equiv 1$, de maneira que a função (3.12) passa a ter a forma assintótica

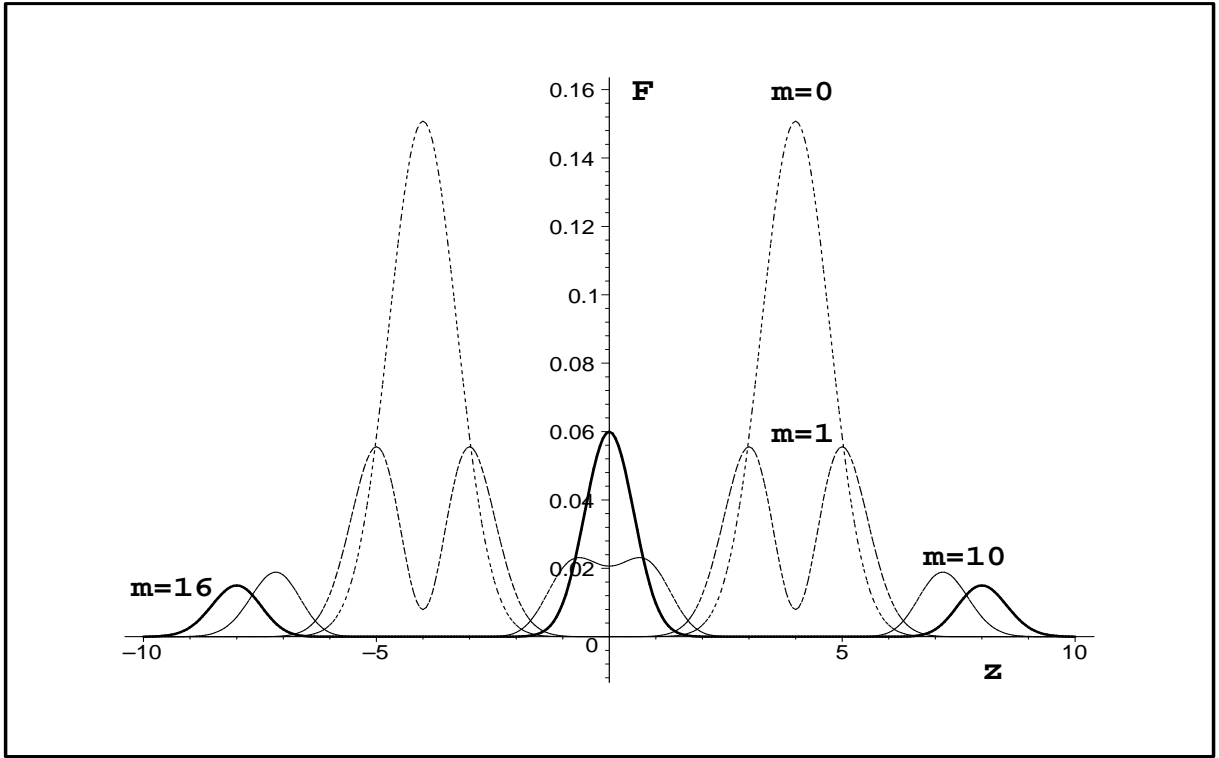


Figura 3.16: A função de Wigner em escala $\tilde{F}(\tilde{z})$, dada pela equação (3.59) com $\text{Im}(z) = 0$, contra o argumento \tilde{z} em escala (os tilds sobre z foram omitidos) no caso de amplificação do sistema ($\sigma = -0.9$) da construção inicial de uma superposição de dois estados de número deslocado com $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$, para diferentes valores de $m = 0, 1, 10, 16$. A linha sólida para $m = 16$ tem um pico forte no centro, enquanto a linha para $m = 10$ mostra dois picos no centro abaixo do pico para $m = 16$.

$$F(z; \tau) = \frac{2(-1)^m}{A\pi(2\tau)^{m+1}} \sum_{j,k=1}^N c_j c_k^* \exp \left[-|\tilde{z}|^2 + \tilde{z} \alpha_k^* + \tilde{z}^* \alpha_j - \frac{1}{2} (|\alpha_j|^2 + |\alpha_k|^2) \right] L_m \left(2\tau [\tilde{z} - \alpha_k] [\tilde{z} - \alpha_j]^* \right). \quad (3.61)$$

Dentro da condição

$$2\tau \left| (\tilde{z} - \alpha_k) (\tilde{z} - \alpha_j)^* \right| \gg m^2, \quad (3.62)$$

Podemos substituir os polinômios de Laguerre pelo maior termo da soma dada na equação (3.5), ou seja, $L_m(x) \approx (-x)^m/m!$, e assim simplificar o lado direito da função dada em (3.61)

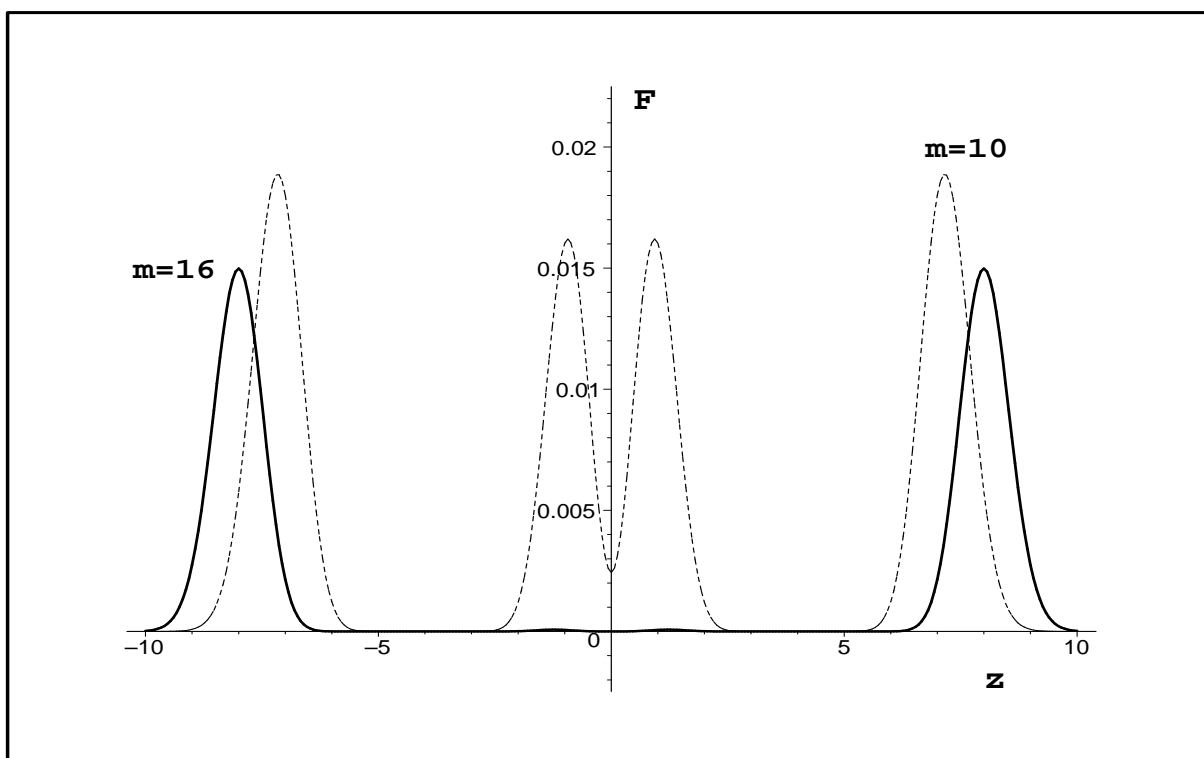


Figura 3.17: A mesma figura 3.16, mas para uma superposição inicial ímpar de dois estados de número deslocado com $c_1 = -c_2 = 1/\sqrt{2}$ e $\alpha_1 = -\alpha_2 = 4$, para dois valores $m = 10, 16$. A linha sólida corresponde a $m = 16$ e não mostra nenhum pico no centro.

para

$$F(z; \tau) = (A\pi\tau m!)^{-1} \sum_{j,k=1}^N c_j c_k^* \left[(\tilde{z} - \alpha_k)(\tilde{z} - \alpha_j)^* \right]^m \times \exp \left[-|\tilde{z}|^2 + \tilde{z}\alpha_k^* + \tilde{z}^*\alpha_j - (|\alpha_j|^2 + |\alpha_k|^2)/2 \right]. \quad (3.63)$$

É notável que o lado direito da equação (3.63) pode ser representada por uma forma fatorada como o módulo quadrado de alguma função de onda de Wigner

$$F(z; \tau) = \Psi(z; \tau)\Psi^*(z, \tau), \quad (3.64)$$

de tal forma que podemos escrever

$$\Psi(z; \tau) = (A\pi\tau m!)^{-1/2} \sum_{j=1}^N c_j (\tilde{z} - \alpha_j)^{*m} \times \exp \left[-\frac{1}{2} |\tilde{z} - \alpha_j|^2 + i\text{Im}(\tilde{z}^* \alpha_j) \right]. \quad (3.65)$$

A equação (3.64) mostra que a função de Wigner assintótica é positiva em todos os pontos do espaço de fase. Isto significa que o estado assintótico é totalmente clássico. Por outro lado, a equação (3.65) mostra que estes estados clássicos são muito sensíveis em relação à fase dos coeficientes c_j . Vale mencionar que a função (3.65) não só lembram os valores exatos de coeficientes da superposição quântica inicial (2.1), mas também preserva a memória da forma inicial dos pacotes de onda que constitui a superposição, através do fator pre-exponencial m .

3.6 Conclusão

Os principais resultados deste trabalho são os seguintes: Obtivemos uma fórmula simples para a função de Wigner dada pela equação (3.1) para uma superposição de estados de número deslocados arbitrários, (gerados por um operador de deslocamento atuando em um estado de número) em termos da função de Wigner do estado de número não deslocado. Nós obtivemos uma fórmula exata dada em (3.12), para descrever a evolução da função de Wigner de uma superposição de um número arbitrário de estados de número deslocados com o mesmo número de excitação m , governado pela equação mestre padrão (2.16), ambas no caso de relaxação para um estado térmico com uma temperatura arbitrária, no caso de um amplificador quântico insensível à fase.

Comparamos duas definições para o tempo de descoerência: uma baseada na evolução temporal da pureza quântica (*tempo μ -descoerência*) e a outra baseada na evolução temporal do pico central de interferência *o tempo f -descoerência inicial*. Mostramos que ambas aproximações correspondem a resultados idênticos para o tempo de descoerência inicial (**TDI**) no

caso de superposições simétricas. Nós demonstramos que o (**TDI**) pode ser considerado como uma característica confiável no processo de descoerência, apenas para os casos mais simples como a superposição de dois estados coerentes. Em casos com uma estrutura mais rica, tais como superposições com mais de duas componentes de estados coerentes bem separadas, ou componentes com uma estrutura interna (representada pelos estados de número deslocados), nós introduzimos o conceito de *tempo de descoerência final* **TDF**. A Função *f-aproximada* para o cálculo do tempo de descoerência final **TDF** é muito mais simples e transparente que a função *μ -aproximada*, porque esta última pode ser usada de fato, somente para uma superposição inicial de estados coerentes. Para superposições com um estrutura mais fina, o cálculo da pureza quântica em qualquer instante do tempo se torna um problema extremamente difícil, até mesmo se for conhecido uma expressão explícita para a função de Wigner. Ao contrário disto, a análise e o cálculo do pico de interferência podem ser facilmente executados para qualquer da variável tempo. Mostramos também que, embora o μ -**TDF** e *f*-**TDF** não coincidam em nenhum caso genérico, os seus comportamentos qualitativos são similares. Ambos os tempos incrementam significativamente (por várias vezes ou até mesmo por ordens de magnitudes), se for acrescentado o número de componentes N ou o número de excitação m na superposição de estados, mantendo o valor do **TDI**. Conseqüentemente superposições com uma estrutura mais rica pode ser mais resistente contra a descoerência do que simples superposições de dois estados coerentes (pacotes Gaussinos), embora estes resultados possam ser vistos contra a intuição. Finalmente, nós mostramos como uma susperposição quântica inicial é transformada em uma superposição clássica no caso de amplificações insensíveis à fase.

Capítulo 4

Descoerência da Superposições Estados Coerentes de Muitos Modos

Nos últimos anos, vários trabalhos sobre estados coerentes pares e ímpares de um único modo do oscilador tem sido apresentado na literatura. Os estados coerentes pares e ímpares de um único modo foram inicialmente estudados em [18] e analisados mais detalhadamente em [34, 67, 68]. A teoria para a geração destes estados foi discutidas em [69, 70]. Estados não-clássicos de dois modos, via superposição de estados coerentes de dois modos, foram estudados em [71], neste caso foi mostrado que dentro de certas condições estas superposições de estados podem exibir efeitos não clássicos, tais como: compressão de dois modos e estatística sub-Poissoniana. A superposição par e ímpar de *muitos-modos* do estado coerentes foi analisada em [91], para este caso foi mostrada a forma explícita para: a distribuição de fótons, função-Q e função de Wigner. Em particular é mostrado que, dentro de certas condições, para o caso de dois modos, existe uma forte correlação entre esses modos, que é responsável pela compressão dos dois modos no caso de uma superposição de estados coerentes par. Estados

coerentes emaranhados, teletransporte e descoerência foram estudados em [73], neste estudo foi verificado que estados coerentes emaranhados são resistentes à absorção do ruído de fóton quando comparado com estados polarizados bifotons emaranhados. Multi-partes do estado coerente emaranhado foram considerados em [74], neste caso foi proposto um esquema para a geração de multi-partes do estado coerente emaranhado, via emaranhamento trocado, com um exemplo de realização física em ion armadilhado.

Como pode ser visto, existem poucos estudos sobre a descoerência da superposição de estados coerentes de *muitos-modos*. Neste capítulo nós estudaremos a descoerência de superposições de estados coerentes de *muitos-modos*, comparando duas famílias de estados. A Primeira consiste de estados totalmente fatorizados, que neste caso, nada mais é o produto direto dos estados coerente par/ímpar.

$$|\mathbf{A}\rangle_{\pm f} = \prod_{k=1}^n \mathcal{N}_{\pm}(|\alpha_k|) (|\alpha_k\rangle \pm |-\alpha_k\rangle). \quad (4.1)$$

A segunda família consiste estados coerentes par com *muitas-dimensões* introduzido em [72, 78]

$$|\mathbf{A}\rangle_{\pm} = N_{+} (|\mathbf{A}\rangle \pm |-\mathbf{A}\rangle) \quad (4.2)$$

onde $|A\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n\rangle$. Ao contrário do estado (4.1), todos os modos do estado (4.2) são *fortemente emaranhados*. Nosso objetivo é verificar como o incremento do número de modos n influencia taxa de descoerência e se existe alguma diferença entre a taxa de descoerência dos estados (4.1) e (4.2), com o mesmo vetor \mathbf{A} , pois, informações sobre o emaranhamento quântico e a descoerência são extremamente importantes para informação quântica.

Este capítulo será desenvolvido da seguinte maneira. Na I secção nós estudaremos a função de Wigner dependente do tempo para uma superposição de estados coerentes de *muitos-modos* nos padrões da equação mestre. A pureza quântica será analisada na secção II. Na secção III, nós estudaremos o emaranhamento para uma superposição de estados coerentes de *muitos-modos*. Concluiremos na secção IV.

4.1 Função de Wigner Independente do Tempo Para Uma Superposição de Estados Coerentes de Muitos-Modos

Neste trabalho, usaremos a definição da superposição de estados coerentes de *muitos-modos*, definida em [78] e dada pela equação (4.2)

$$|A_{\pm}\rangle = N_{\pm}(|A\rangle \pm |-A\rangle)$$

onde o estado coerente de muitos modos $|A\rangle$ é definido como:

$$|A\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n\rangle = D(A)|0\rangle \quad (4.3)$$

o qual é criado pela atuação do operador de deslocamento de *muitos-modos* $D(A)$ no estado de vácuo de $|0\rangle$. Logicamente, a superposição de estados coerentes de muitos modos nada mais é que uma generalização de uma superposição de estados coerentes de um único modo [?]. O fator de normalização N_{\pm} para uma superposição de estados coerentes de *muitos-modos* é dado por:

$$N_{\pm} = \frac{1}{\left(2(1 \pm \exp(-2|A|^2))\right)^{1/2}}, \quad (4.4)$$

onde $A = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ é um vetor complexo e seu módulo é:

$$|A|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = \sum_{m=1}^n |\alpha_m|^2. \quad (4.5)$$

Após um pouco de álgebra, podemos escrever a superposição de estados coerentes de muitos modos na base de número da seguinte maneira:

$$|A_{\pm}\rangle = N_{\pm} \sum_n \frac{e^{\frac{-1}{2}|A|^2} \alpha_1^{n_1} \dots \alpha_n^{n_n}}{\sqrt{n_1!} \dots \sqrt{n_n!}} \times \left(1 \pm (-1)^{n_1+n_2+\dots+n_n}\right) |n\rangle. \quad (4.6)$$

A função de Wigner independente do tempo para os estados coerentes de *muitos-modos*, é dada pela equação (16) em [91]

$$W_{A,B}(qp) = 2^n \exp \left[-2ZZ^* + 2AZ^* + 2ZB^* - AB^* - \frac{|A|^2}{2} - \frac{|B|^2}{2} \right] \quad (4.7)$$

Para superposições de estados coerentes de muitos modos, par e ímpar, a função de Wigner independente do tempo, será uma combinação da equação (4.7)

$$W_{A_{\pm}}(q, p) = |N|^{-2} \left[W_{(A,B=A)}(q, p) \pm W_{(A,B=-A)}(q, p) \pm W_{(-A,B=A)}(q, p) + W_{(-A,B=-A)}(q, p) \right], \quad (4.8)$$

onde a fórmula explícita de N_{\pm} é dada na equação (4.4). Para o caso de muitos modos foram usadas as seguintes notações

$$Z = (Z_1, Z_2 \dots Z_n) \quad Z_k = (q_k + ip_k)/\sqrt{2} \quad (4.9)$$

$$AZ^* = \alpha_1 Z_1^* + \alpha_2 Z_2^* + \dots + \alpha_n Z_n^*$$

$$|Z|^2 = Z_1 Z_1^* + Z_2 Z_2^* + \dots + Z_n Z_n^* \quad (4.10)$$

4.2 Evolução Temporal da Função de Wigner

Novamente assumiremos que a evolução irreversível de um estado quântico (onde as oscilações rápidas do oscilador de alta-frequência são eliminadas) é governada pela equação mestre. Supomos que cada modo é acoplado para o seu próprio reservatório térmico, de forma que a equação mestre é uma generalização direta da equação da (2.16):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \eta \sum_{k=1}^n \left[N_{1k} \left(2\hat{a}_k \rho \hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rho - \rho \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) + N_{2k} \left(2\hat{a}_k^\dagger \rho \hat{a}_k - \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \rho - \rho \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \right) \right]. \quad (4.11)$$

Onde \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger são os usuais operadores de aniquilação e criação. O parâmetro positivo η é proporcional ao coeficiente de acoplamento entre o oscilador e o reservatório. Os parâmetros N_{1k} e N_{2k} podem ser interpretados como o número de átomos do reservatório interagindo ressonantemente com o oscilador no estado fundamental e excitado respectivamente.

A função de Wigner dependente do tempo $W(q, p, t)$ obedece à equação de Fokker-Plank, a qual pode ser determinada através da equação (4.11),

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (\gamma_k q_k W) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\gamma_k p_k W) + D_k \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_k^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial p_k^2} \right) \right] \quad (4.12)$$

onde os parâmetros são definidos da seguinte maneira:

$$\gamma_k = \eta \sigma N_{0k}, \quad D_k = \frac{1}{2} \eta N_{0k} = \gamma_k 2\sigma k, \quad N_{0k} = N_{1k} + N_{2k}, \quad \sigma k = \frac{N_{1k} - N_{2k}}{N_{1k} + N_{2k}} \quad k = 1 \dots n. \quad (4.13)$$

Como mencionamos nos capítulos anteriores, o parâmetro σ pode variar no intervalo $[-1, 1]$, sendo positivo para um sistema atenuador e negativo para um sistema amplificador. A solução da equação (4.12) pode ser escrita em termos das coordenadas complexas como

$$W(z; t) = \int \mathcal{K}(z; t | z', 0) W(z'; 0) d^2 z'. \quad (4.14)$$

onde cada argumento complexo seria substituído por um vetor n -dimensional. Obviamente que a equação (4.11) não mistura os diferentes modos. Nesta condição o propagador total é um produto de n propagadores

$$\mathcal{K}(\mathbf{z}; t | \mathbf{z}'; 0) = \prod_{j=1}^n \mathcal{K}_j(z_j; t | z'_j; 0), \quad (4.15)$$

onde cada função $\mathcal{K}_j(z_j; t | z'_j; 0)$ tem a forma (3.9). Em princípio, todos coeficientes η_k , N_{1k} e N_{2k} podem ser diferentes (como funções de k). Mas aqui nós trabalharemos com todos índices iguais em k . Usando a forma explícita, dada em (3.9)

$$\mathcal{K}(\mathbf{z}_j; t | \mathbf{z}'_j; 0) = \frac{2}{\pi \tau(t)} \exp \left(- \frac{2}{\tau(t)} |\mathbf{z}_j - G(t) \mathbf{z}'_j|^2 \right), \quad (4.16)$$

onde as expressões para $G(t)$, $\tau(t)$ e $t(\tau)$ são dadas em (2.22).

Aplicando o propagador dado na equação (4.16) para a função inicial dada em (4.8) e usando (4.15) em conjunto com a fórmula (a qual é uma versão complexa de uma fórmula

análoga encontrada em [57])

$$\int d^2z \exp(-g|z|^2 + \xi z + \eta z^*) L_n(a|z|^2) = \frac{\pi(g-a)^n}{g^{n+1}} \exp\left(\frac{\xi\eta}{g}\right) L_n\left(\frac{a\xi\eta}{g(g-a)}\right), \quad (4.17)$$

nós obtemos após uma certa álgebra (fazendo $F = W/\pi$), uma fórmula explícita para a função de Wigner dependente do tempo para o estado emaranhado inicial dado em (4.3):

$$F(z, \tau) = \frac{|N|^2 2^n}{\pi^n (|G|^2 + \tau)^n} \left\{ \exp\left(\frac{-2|z - GA|^2}{(|G|^2 + \tau)}\right) + \exp\left(\frac{-2|z + GA|^2}{(|G|^2 + \tau)}\right) \right. \\ \left. \pm 2 \exp\left[-2\frac{(|z|^2 + \tau|A|^2)}{(|G|^2 + \tau)}\right] \cos\left[\frac{4i \text{Im}AZ^*}{(|G|^2 + \tau)}\right] \right\}. \quad (4.18)$$

Para o estado fatorizado inicial (4.1), nós temos

$$F_{\pm f}(\mathbf{z}, \tau) = \prod_{k=1}^n \frac{2\mathcal{N}_{\pm}^2(|\alpha_k|)}{\pi s(\tau)} \left\{ \exp\left[-\frac{2}{s(\tau)}|z_k - G\alpha_k|^2\right] + \exp\left[-\frac{2}{s(\tau)}|z_k + G\alpha_k|^2\right] \right. \\ \left. \pm 2 \exp\left[-\frac{2}{s(\tau)}(|z_k|^2 + \tau|\alpha_k|^2)\right] \cos\left[\frac{4}{s(\tau)}\text{Im}(\alpha_k z_k^*)\right] \right\}. \quad (4.19)$$

Neste capítulo, temos dois bons motivos para trabalhar com a função Wigner na origem. Primeiro: levando em conta um alto grau de dificuldade em trabalhar com z diferente de zero dado na expressão (4.10). Segundo: as observações feitas nos dois capítulos anteriores e também discutidas em [57], onde nós mostramos que informações importantes sobre o tempo de descoerência podem ser obtidas analisando a altura do pico central de interferência. Então, seguindo esta mesma linha de raciocínio, nesta secção, nós estudaremos o tempo de descoerência para o caso de uma superposição de estados coerentes de muitos modos, através do pico central de interferência, que é dado pelo último termo da função de Wigner dependente do tempo (4.18), em $z = 0$. Normalizando esta quantidade pelo seu valor inicial em $\tau = 0$, nós obtemos a seguinte função

$$\frac{f(0, \tau)}{f(0, 0)} = \frac{1}{(|G|^2 + \tau)^n} \exp\left(\frac{-2\tau|A|^2}{|G|^2 + \tau}\right) \quad (4.20)$$

É interessante comparar se existe diferença entre o tempo de descoerência inicial para os estados emaranhados e fatorizado. Para estudar uma superposição estados coerentes de *muitos modos* emaranhados, (um caso particular) fazemos $|A|^2 = n|\alpha|^2$ na equação (4.20). A figura (4.1) mostra dois gráficos de f contra τ , de cima para baixo, o primeiro gráfico corresponde à $\alpha = 5$ e $n = 25$, o segundo corresponde à $\alpha = 25$ e $n = 5$, os quais mostram que o crescimento de n faz com que o tempo de descoerência inicial do pico central de interferência decaia mais suavemente quando comparado com o crescimento de α . Para uma superposição de coerentes de *muitos modos* fatorizados, basta fazer f^n . A figura (4.2) possui os mesmos parâmetros da figura (4.1) e são idênticas. Com isto podemos verificar que o tempo de descoerência inicial para o pico central de interferência é o mesmo, tanto para estados emaranhados quanto para estados fatorizados.

Definimos o tempo de descoerência final nos dois capítulos anteriores, como sendo o tempo necessário para a função f variar do valor inicial 1 até uma altura fixada $1/2\beta < 1$. O tempo descoerência final para o pico central de interferência da função de Wigner para estados emaranhados $f(\tau) = 1/2\beta$ é dado por

$$\tau = \frac{1}{2n|\alpha|^2} \ln(2\beta), \quad (4.21)$$

o qual pode ser obtido fazendo algumas aproximações e levando em conta que $|A|^2 \gg 1$. Quando repetimos os cálculos para $f^n(\tau) = 1/2^n\beta$, que corresponde a estados separados, obtemos a equação

$$\tau = \frac{1}{2n|\alpha|^2} \ln(2^n\beta). \quad (4.22)$$

Podemos observar que os tempos de descoerência final para os estados emaranhados e fatorizados apresentam comportamentos diferentes, o que pode ser verificado através das equações (4.21) e (4.22) e nas figuras (4.3) e (4.4). O contrário ocorre com o tempo de descoerência inicial para os mesmo estados. Uma outra observação interessante pode ser feita quando fazemos

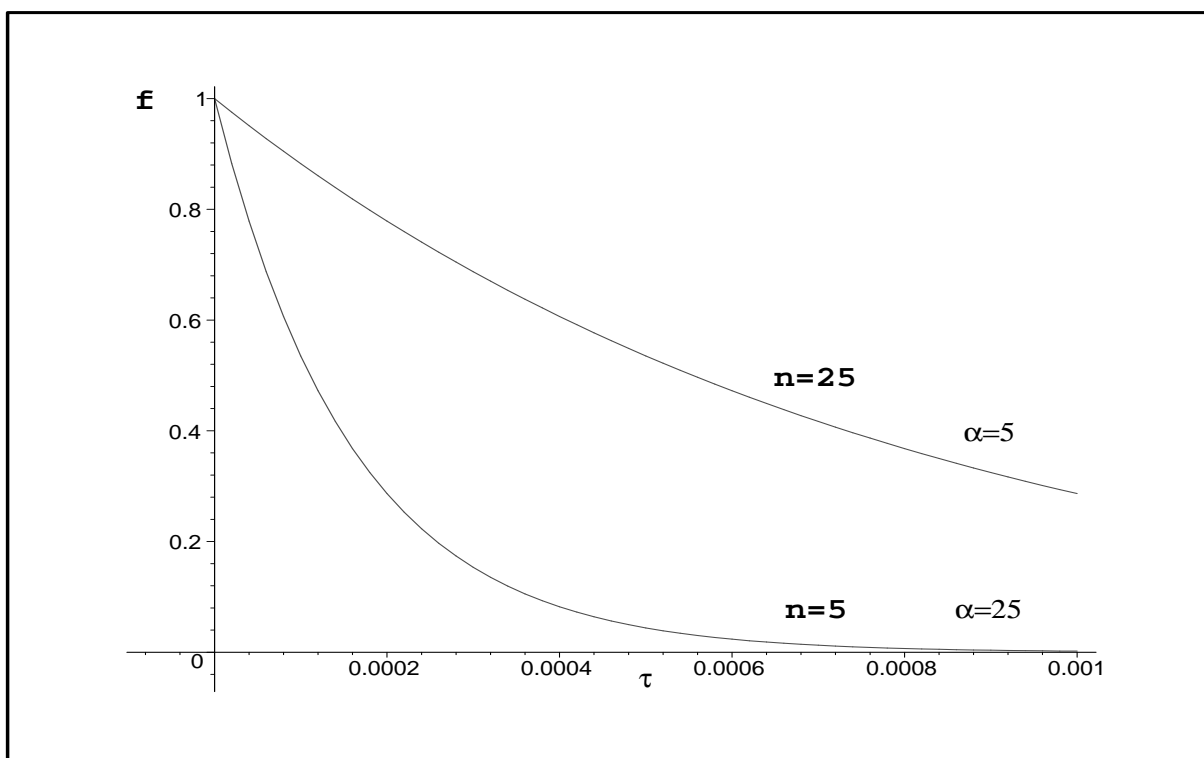


Figura 4.1: Função de Wigner na origem dada pela equação (4.20) para estados emaranhados $|A|^2 = n|\alpha|^2$ com os parâmetros $\alpha = 5$ e $n = 25$ para o primeiro gráfico de cima para baixo e o segundo gráfico com $\alpha = 25$ e $n = 5$.

$n \rightarrow \infty$ na equação para estados fatorizados correspondente ao tempo final de descoerência (4.22), que resulta em:

$$\tau = \frac{\ln(2)}{2|\alpha|^2}. \quad (4.23)$$

Desta equação e também das figuras (4.3) e (4.4), podemos observar que o tempo de descoerência final para estados fatorizados não depende de n , quando n é muito grande, dependendo apenas de $1/|\alpha|^2$. Enquanto que o tempo de descoerência final para estados emaranhados depende de $1/n|\alpha|^2$ e conseqüentemente decaindo mais rápido com o incremento de n . Também observamos que o tempo de descoerência final torna-se constante quando o número de modos é muito grande, ou seja, $n \gg 1$.

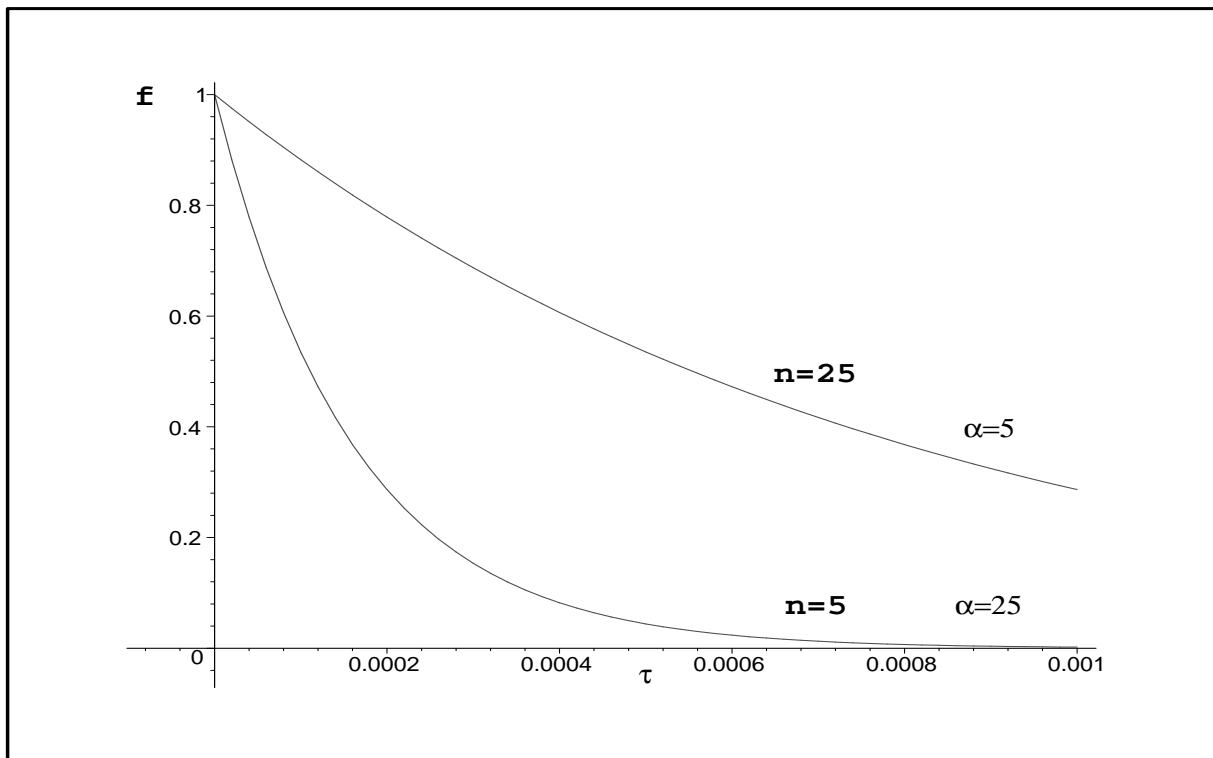


Figura 4.2: Função de Wigner na origem dada pela equação (4.20) fazendo f^n para estados fatorizados com os parâmetros $\alpha = 5$ e $n = 25$ para o primeiro gráfico de cima para baixo e o segundo gráfico com $\alpha = 25$ e $n = 5$.

4.3 A pureza Quântica Como Indicador de Descoerência

Como falamos antes, a *pureza quântica* $\mu \equiv \text{Tr}(\hat{\rho}^2)$ é usada freqüentemente como um dos indicadores mais simples da coerência [?, 63, 64], a qual pode ser calculada por meio da fórmula

$$\mu = \pi \int F^2(z) d^2z. \quad (4.24)$$

O valor inicial da pureza é dado por $\mu(0) = 1$, e quando $t \gg t_{th}$ a pureza vai para o valor de equilíbrio $\mu_{eq} = \sigma$ (isto para $\sigma > 0$).

Podemos calcular a integral (4.24) com certa facilidade, usando a função (4.18), após

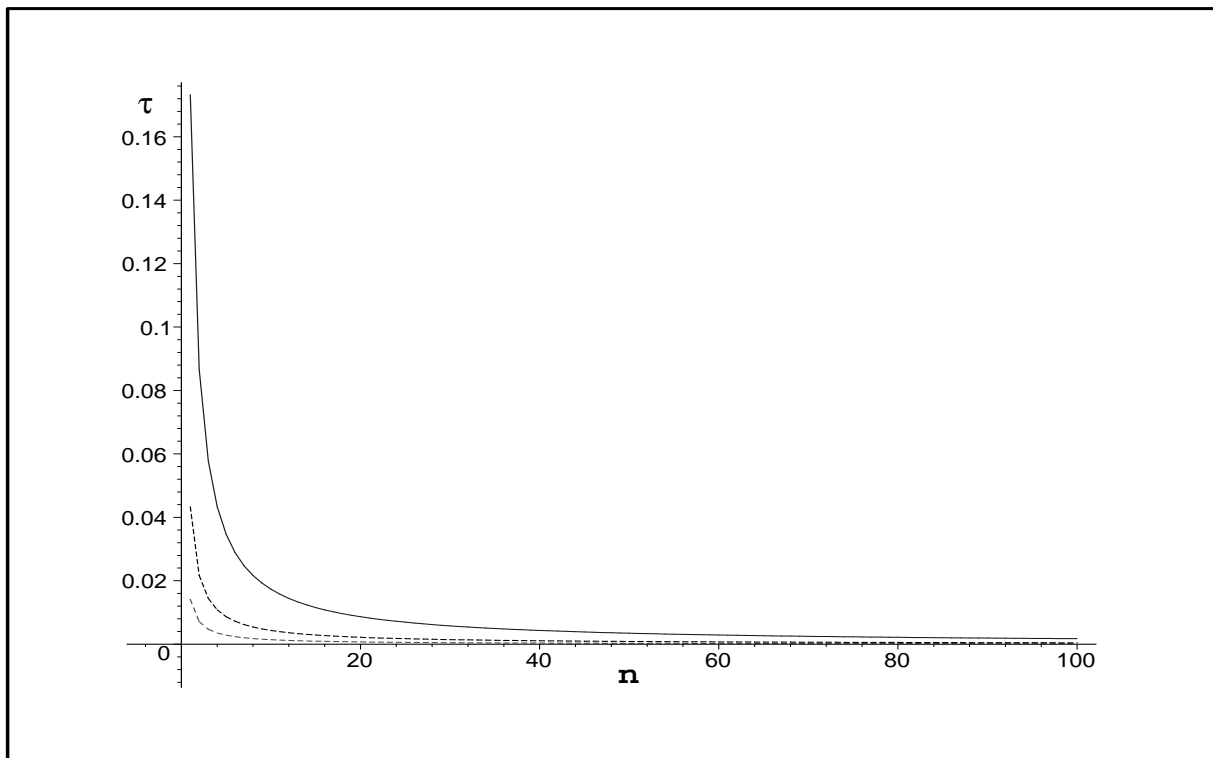


Figura 4.3: Tempo de descoerência final contra n para estados emaranhados, dado pela equação (4.21) com os parâmetros $\beta = 2$, $\alpha = 2$, $\alpha = 4$, $\alpha = 7$ e n variando no intervalo $1 \leq n \leq 100$, de cima para baixo temos o primeiro gráfico para $\alpha = 2$ o segundo para $\alpha = 4$ e terceiro para $\alpha = 7$.

uma certa álgebra nós obtemos

$$\mu(\tau) = \frac{|N|^{42}}{(|G|^2 + \tau)^n} \left\{ 1 + \exp[-4|A|^2] \pm 4\exp[-2|A|^2] + \exp\left[\frac{-4|GA|^2}{|G|^2 + \tau}\right] + \exp\left[\frac{-4\tau|A|^2}{|G|^2 + \tau}\right] \right\}. \quad (4.25)$$

Na figura (4.5), apresentamos os gráficos da pureza quântica dada pela equação (4.25). O primeiro gráfico de cima para baixo próximo do eixo vertical representa a pureza quântica para estados fatorizados, onde fizemos $\mu(\tau)^n$. O segundo representa a pureza quântica para estados emaranhados, onde usamos $|A|^2 = n|\alpha|^2$, ambas purezas com $\alpha = 0.7$ e $n = 25$. O terceiro e quarto gráfico representam a pureza quântica para estados emaranhados e fatorizados

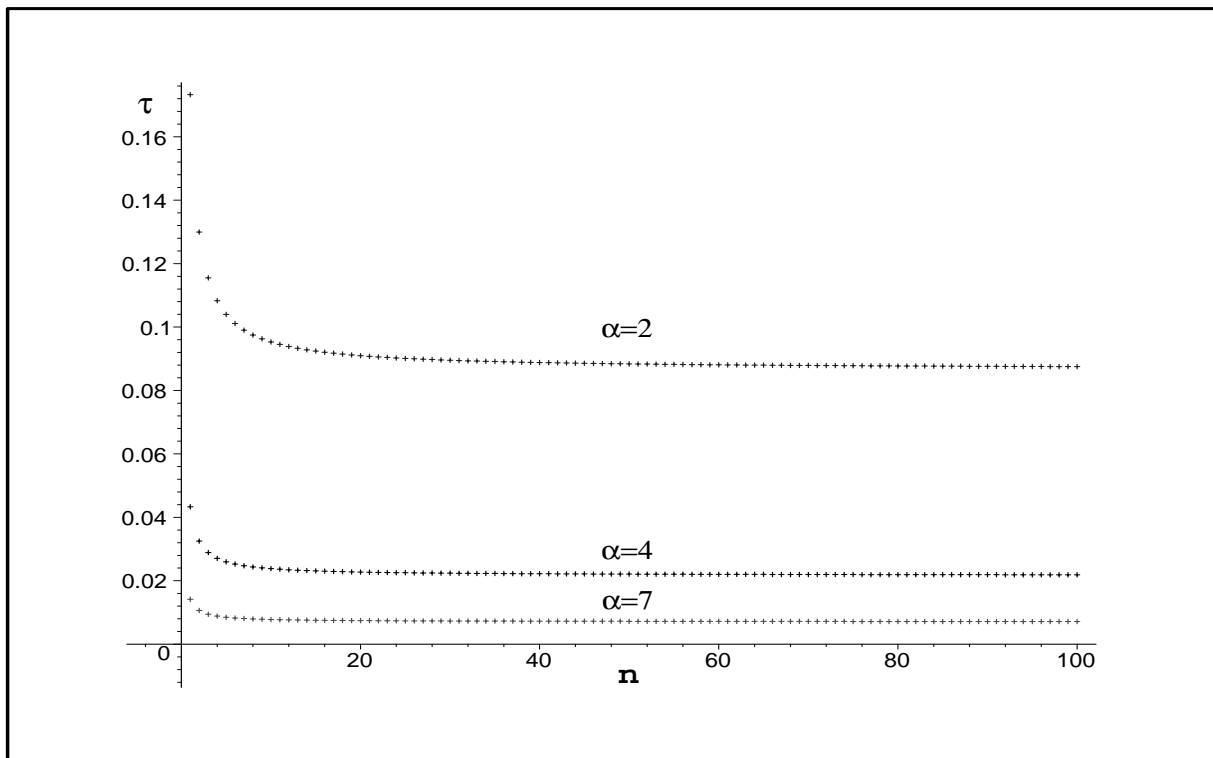


Figura 4.4: Tempo de descoerência final contra n para estados fatorizados, dado equação (4.22) com os parâmetros $\beta = 2$, $\alpha = 2$, $\alpha = 4$, $\alpha = 7$ e n variando no intervalo $1 \leq n \leq 100$.

respectivamente, com parâmetros $\alpha = 5$ e $n = 5$. Verificamos que a pureza quântica é mais robusta para estados fatorizados quando comparada com estados emaranhados, ambas com parâmetros $\alpha = 0.7$ e $n = 25$. Quando incrementamos o valor de α , fazendo $\alpha = 5$ e $n = 5$, a situação fica invertida.

Podemos definir tempo de descoerência final para a pureza com estados emaranhados como sendo a solução da equação

$$\frac{\mu - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \epsilon \quad (4.26)$$

onde ϵ é algum número pequeno $\epsilon \ll 1$ (da ordem de $\epsilon = 0.1$ ou $\epsilon = 0.05$). Levando a equação dada em (4.25) na equação (4.26) e considerando o fato que $|A|^2 \gg 1$, nós conseguimos chegar

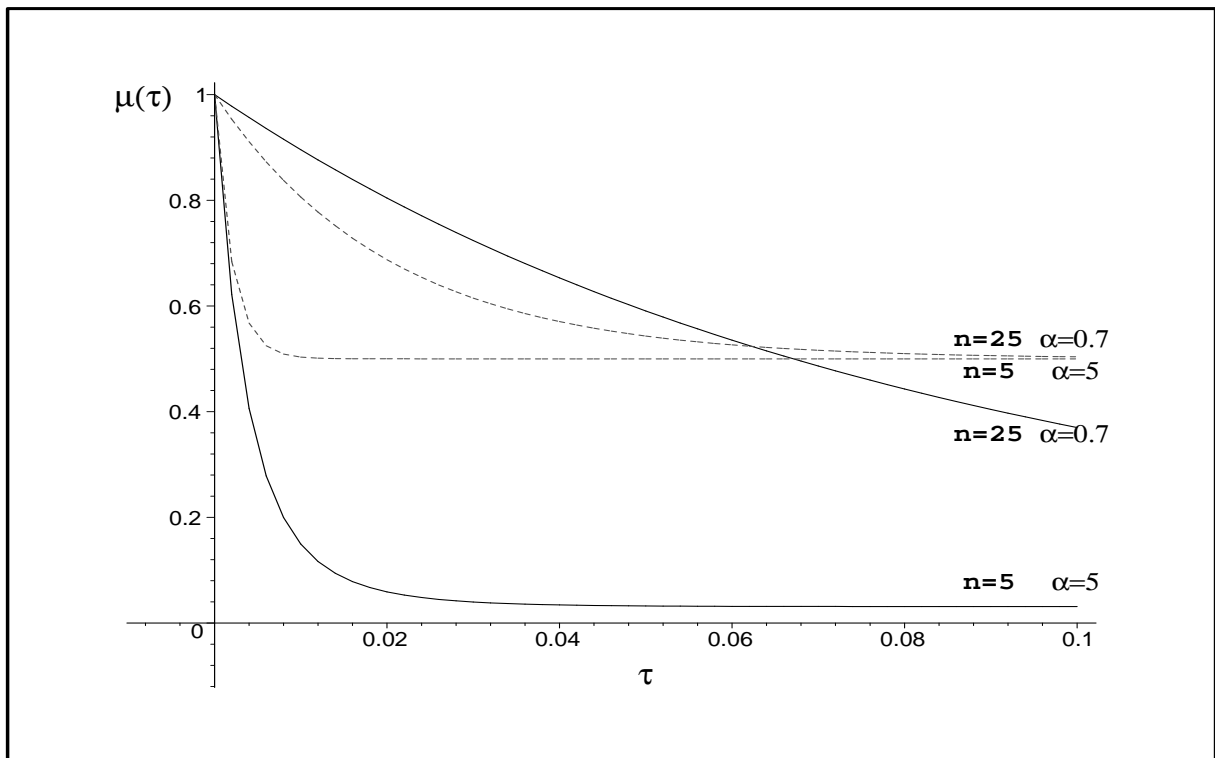


Figura 4.5: A pureza quântica dada pela equação (4.25) para estados emaranhados e fatorizados contra o tempo τ , de cima para baixo próximo do eixo vertical. O primeiro e o quarto gráficos representam a pureza quântica para estados fatorizados com $\alpha = 0.7$, $n = 25$, $\alpha = 5$ e $n = 5$ respectivamente. O segundo e o terceiro gráficos representam os estados emaranhados com $\alpha = 0.7$, $n = 25$, $\alpha = 5$ e $n = 5$ respectivamente.

a

$$\tau = \frac{1}{4n|\alpha|^2} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right). \quad (4.27)$$

O tempo de descoerência final relacionado com a pureza para os estados fatorizados, pode ser obtido a partir da solução da equação

$$\frac{\mu(\tau)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \epsilon, \quad (4.28)$$

a qual após a substituição de $\mu(\tau)$ dada na equação (4.25) em (4.28) e com o auxílio de algumas

aproximações (levando em conta que $|A|^2 \gg 1$) chegamos a

$$\tau = \frac{1}{4|\alpha|^2} \ln\left(\frac{n}{\epsilon}\right). \quad (4.29)$$

Das equações (4.27) e (4.29) podemos verificar que o tempo de descoerência final da pureza quântica para estados emaranhados decresce em função $1/4n|\alpha|^2$, enquanto que o tempo de descoerência final da pureza quântica para estados fatorizados decai em função de $1/4|\alpha|^2$. Também podemos verificar nestas equações, que sendo $n > 1$, o tempo de descoerência final para os estados fatorizados é maior que o tempo de descoerência final para os estados emaranhados, pois, neste caso, o tempo de descoerência final para estados fatorizados é multiplicado por $\ln(n/\epsilon)$. (lembrando que estamos trabalhando com muitos modos, mais estes modos são iguais $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \dots = \alpha_n = \alpha$).

4.4 Conclusão

Calculamos parâmetros que caracterizam a razão de descoerência para uma superposição de estados coerentes de muitos modos, descrito pela equação mestre insensível à fase para sistemas amplificadores e atenuadores. Estudamos a descoerência de duas maneiras: decaimento do pico central de interferência e pureza quântica. Verificamos que o tempo de descoerência inicial, representado pelo pico central de interferência, é o mesmo para estados emaranhados quanto para estados fatorizados. O tempo de descoerência final para o pico central de interferência mostra que os estados fatorizados são mais robustos que os estados emaranhados, também verificamos que o tempo de descoerência final para estados fatorizados não depende do número de modos n quando $n \rightarrow \infty$. Verificamos que o decaimento inicial da pureza quântica pode ser alternado, ou seja, para $\alpha < 1$, os estados fatorizados são mais robustos que os estados emaranhados, quando $\alpha > 1$, a situação se inverte. O tempo de descoerência final para a

pureza quântica mostra que os estados fatorizados são mais robustos quando comparados com os estados emaranhados, além disto, não depende do número de modos n , dependem apenas de $1/|\alpha|^2$ e ϵ .

Capítulo 5

Descoerência da Superposição de Estados Coerentes via Amortecimento na Fase

Nesta secção nós estudaremos a descoerência de uma superposição de estados coerentes via amortecimento da fase. Podemos considerar a interação com o ambiente via operador de número do oscilador. Neste tipo de amortecimento a energia não é amortecida. O operador de $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ é uma constante de movimento, pois $[\hat{a}^\dagger\hat{a}; H] = 0$ e neste caso $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ é também um observável quântico não demolidor.

A equação mestre para o operador densidade reduzido do sistema na representação de interação para uma temperatura finita [76] é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} \left[2\hat{n}\hat{\rho}\hat{n} - \hat{\rho}\hat{n}^2 - \hat{n}^2\hat{\rho} \right] \quad (5.1)$$

onde γ é uma constante de amortecimento.

O cálculo de $\rho_{mn} = \langle m|\hat{\rho}|n\rangle_\tau$ pode ser feito da seguinte maneira: introduzindo $\langle m|n\rangle$ nos dois lados da equação (5.1) e usando relação cíclica para os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger , nós conseguimos chegar à equação

$$\frac{\partial \langle m|\hat{\rho}|n\rangle}{\langle m|\hat{\rho}|n\rangle} = -\frac{\gamma}{2}(m-n)^2 \partial t. \quad (5.2)$$

Resolvendo esta última equação obtemos

$$\langle m|\hat{\rho}|n\rangle_t = \langle m|\hat{\rho}|n\rangle_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\gamma t(m-n)^2\right]. \quad (5.3)$$

A equação (5.3) mostra que a coerência entre uma superposição de dois estados de número diferentes é amortecida pelo fator $\exp[-\frac{1}{2}\gamma t(m-n)^2]$. Calculando $\langle m|\hat{\rho}|n\rangle_0$ para uma superposição de estados coerentes, que pode ser expandida na base de número, obtemos

$$\langle m|\hat{\rho}_\pm|n\rangle_0 = |N'|^2 e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^m (\alpha^*)^n}{\sqrt{m!n!}} [1 + (-1)^{m+n} \pm (-1)^n \pm (-1)^m] \quad (5.4)$$

onde N' é um fator de normalização dado por:

$$N' = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm \exp(-2|\alpha|^2))}}. \quad (5.5)$$

Obviamente que, para os estados coerentes par e ímpar iniciais, apenas os elementos de matriz dos estados com números m e n pares ou ímpares simultaneamente são diferentes de zero

$$\langle 2k|\hat{\rho}_+|2j\rangle_0 = \frac{\alpha^{2k} (\alpha^*)^{2j}}{\cosh(|\alpha|^2 \sqrt{(2k)!(2j)!}}. \quad (5.6)$$

$$\langle 2k+1|\hat{\rho}_-|2j+1\rangle_0 = \frac{\alpha^{2k+1} (\alpha^*)^{2j+1}}{\sinh(|\alpha|^2 \sqrt{(2k+1)!(2j+1)!}}. \quad (5.7)$$

Uma medida razoável da coerência de um estado quântico superposto pode ser dada por:

$$\mathcal{C}(t) = \sum_{j \neq k} |\langle k|\hat{\rho}|j\rangle_t|^2. \quad (5.8)$$

Desde então os elementos $\langle m|\hat{\rho}_\pm|n\rangle_t$ são simétricos com respeito a m e n , e a dupla soma em (5.8) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{C}(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j>k} |\langle k|\hat{\rho}|j\rangle_t|^2 \equiv 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle k|\hat{\rho}|k+n\rangle_t|^2. \quad (5.9)$$

Daqui por diante nós usaremos a variável tempo como sendo $\tau = \gamma t$. Para um fixado valor de n , a última soma sobre k em (5.9) pode ser facilmente calculada para os elementos $\langle k|\hat{\rho}|k+n\rangle$ dados pelas equações (5.6) e (5.7). Fazendo uma comparação destas somas com uma expansão em série de Taylor para as funções de Bessel $J_\nu(2x)$ e as funções Bessel modificadas $I_\nu(2x)$

$$J_\nu(2x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\nu}}{m!(m+\nu)!}, \quad I_\nu(2x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{m!(m+\nu)!} \quad (5.10)$$

e separando as somas sobre os valores pares e ímpares do somatório de índice m , conseguimos obter a coerência para um estado coerente par inicial que é como segue

$$\mathcal{C}_+(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{2n}(2|\alpha|^2) + J_{2n}(2|\alpha|^2)}{[\cosh(|\alpha|^2)]^2} e^{-4n^2\tau}, \quad (5.11)$$

e para um estado ímpar inicial, obtemos

$$\mathcal{C}_-(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{2n}(2|\alpha|^2) - J_{2n}(2|\alpha|^2)}{[\sinh(|\alpha|^2)]^2} e^{-4n^2\tau}. \quad (5.12)$$

As somas (5.11) e (5.12) podem ser calculadas analiticamente em $\tau = 0$, para isto fazemos uso das identidades

$$J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \equiv 1, \quad I_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k}(x) \equiv \cosh(x) \quad (5.13)$$

e

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1 = 1 + 2\sinh^2(x). \quad (5.14)$$

Os resultados são os seguintes:

$$\mathcal{C}_+(0) = 1 - \frac{I_0(2|\alpha|^2) + J_0(2|\alpha|^2)}{2[\cosh(|\alpha|^2)]^2}, \quad (5.15)$$

$$\mathcal{C}_-(0) = 1 - \frac{I_0(2|\alpha|^2) - J_0(2|\alpha|^2)}{2[\sinh(|\alpha|^2)]^2}. \quad (5.16)$$

Na figura 5.1, nós mostramos $-\ln(C)$ contra τ onde C é a coerência quântica dada pela equação (5.11). O cálculo numérico para os gráficos foi feito com o limite superior da soma em (5.11)

sendo 100, ou seja, o número de fons é truncado em 100. Este valor é grande suficiente para a convergência numérica. Nós observamos que, quando incrementamos o parâmetro α , o decaimento da coerência quântica torna-se mais acentuado. Verificamos também que o TDI para este caso apresenta o mesmo comportamento dos estados com a amplitude amortecida. Porém, para longos tempos o TDF para sistemas com a fase e amplitude amortecida são completamente diferentes, porque o estado estacionário assintótico não é termico, mas sim um estado fortemente não-clássico (embora altamente misturado).

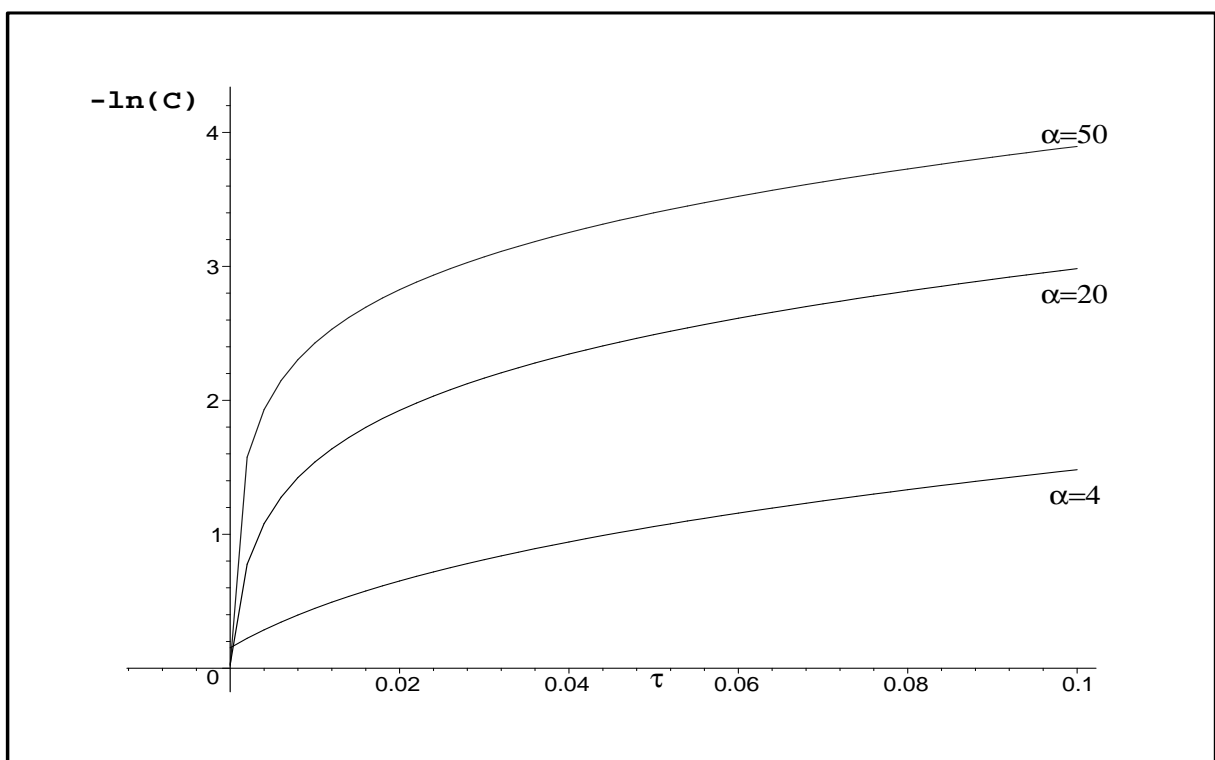


Figura 5.1: O $-\ln(C)$ onde C é coerência quântica dada pela equação (5.11) para estados coerentes inicial par, contra o tempo

τ .

5.1 Evolução da Função de Wigner

Considerando que os elementos de matriz do operador estatístico dependente do tempo são conhecidos na base de Fock (5.3), a função de Wigner dependente do tempo pode ser calculada com a ajuda da fórmula Cahill–Glauber.

$$W(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \langle n | \hat{\rho} \hat{D}(2z) | n \rangle = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^n \langle n | \hat{\rho} | m \rangle \langle m | \hat{D}(2z) | n \rangle, \quad (5.17)$$

onde $z = (q + ip)/\sqrt{2}$ é uma variável complexa e $\hat{D}(2z) \equiv \exp(2z\hat{a}^\dagger - 2z^*\hat{a})$ é o conhecido operador deslocamento. Os elementos de matriz $\langle m | \hat{D}(2z) | n \rangle$ são também bem conhecidos:

$$\langle m | \hat{D}(2z) | n \rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (-2z^*)^{n-m} e^{-2|z|^2} L_m^{(n-m)}(4|z|^2), & n \geq m \\ \sqrt{\frac{n!}{m!}} (2z)^{m-n} e^{-2|z|^2} L_n^{(m-n)}(4|z|^2), & m \geq n \end{cases} \quad (5.18)$$

onde os $L_n^{(\alpha)}$ significam os polinômios de Laguerre generalizados. É conveniente dividir a dupla soma na segunda igualdade de (5.17) em três partes: uma única soma com $m = n$ e duas duplas somas com $m > n$ e $n > m$, respectivamente. Nas duas últimas somas, escrevemos $m = n + k$ ou $n = m + k$ e fazemos a primeira soma sobre n ou m para valores fixados de $k = 1, 2, \dots$. Então usanda a fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(n+k)!} L_n^{(k)}(x) = (xy)^{-k/2} e^y J_k(2\sqrt{xy}), \quad (5.19)$$

nós obtemos, para o estado par inicial a seguinte expressão para a função $F(z) \equiv W(z)/\pi$:

$$F_+(z, \tau) = \frac{\exp(-2|z|^2)}{\pi \cosh(|\alpha|^2)} \left\{ e^{-|\alpha|^2} I_0(4|z\alpha|) + e^{|\alpha|^2} J_0(4|z\alpha|) \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-|\alpha|^2} I_{2n}(4|z\alpha|) + e^{|\alpha|^2} J_{2n}(4|z\alpha|) \right] \cos(2n\varphi) e^{-2\tau n^2} \right\}, \quad (5.20)$$

onde a fase φ é definida de acordo com a relação

$$\exp(2i\varphi) = \frac{z\alpha^*}{z^*\alpha}. \quad (5.21)$$

Para estados ímpares iniciais, obtemos

$$F_-(z, \tau) = \frac{\exp(-2|z|^2)}{\pi \sinh(|\alpha|^2)} \left\{ e^{-|\alpha|^2} I_0(4|z\alpha|) - e^{|\alpha|^2} J_0(4|z\alpha|) \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-|\alpha|^2} I_{2n}(4|z\alpha|) - e^{|\alpha|^2} J_{2n}(4|z\alpha|) \right] \cos(2n\varphi) e^{-2\tau n^2} \right\}. \quad (5.22)$$

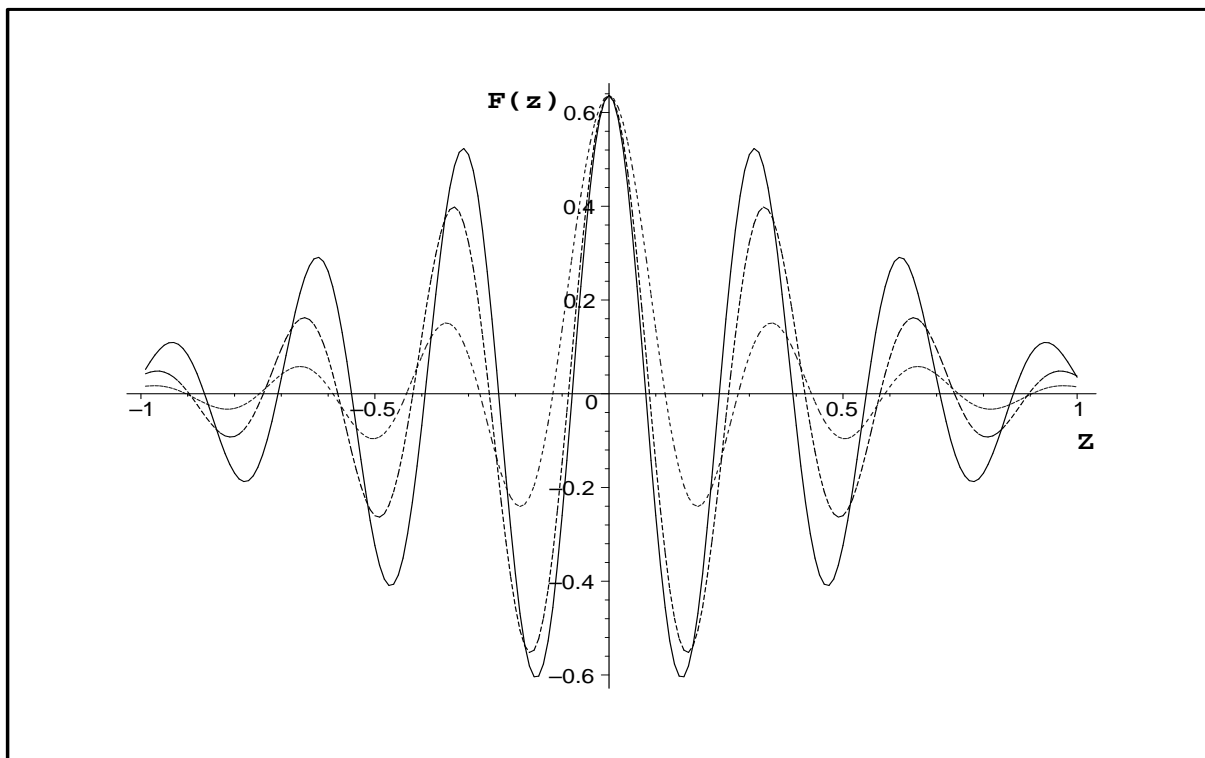


Figura 5.2: A função $F(z)$ para z imaginário puro e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0; 0.2; 2.7$ (de cima para baixo).

A figura (5.2) mostra o gráfico de $F(z)$, dado pela equação (5.20), onde mais uma vez truncamos o limite superior da soma dada pela equação (5.20) em 100, suficiente para a série numérica convergir. Nessa figura, z é um número imaginário puro, $\alpha = 5$ e $\tau = 0; 0.2; 2.7$ de cima para baixo respectivamente. Observamos que, mesmo com um tempo relativamente grande, as oscilações ainda são visíveis, mostrando que o amortecimento na fase não atinge fortemente os termos de interferência.

As figuras 5.3 e 5.4 mostram gráficos de $F(z)$, dados pela equação (5.20), onde z é um

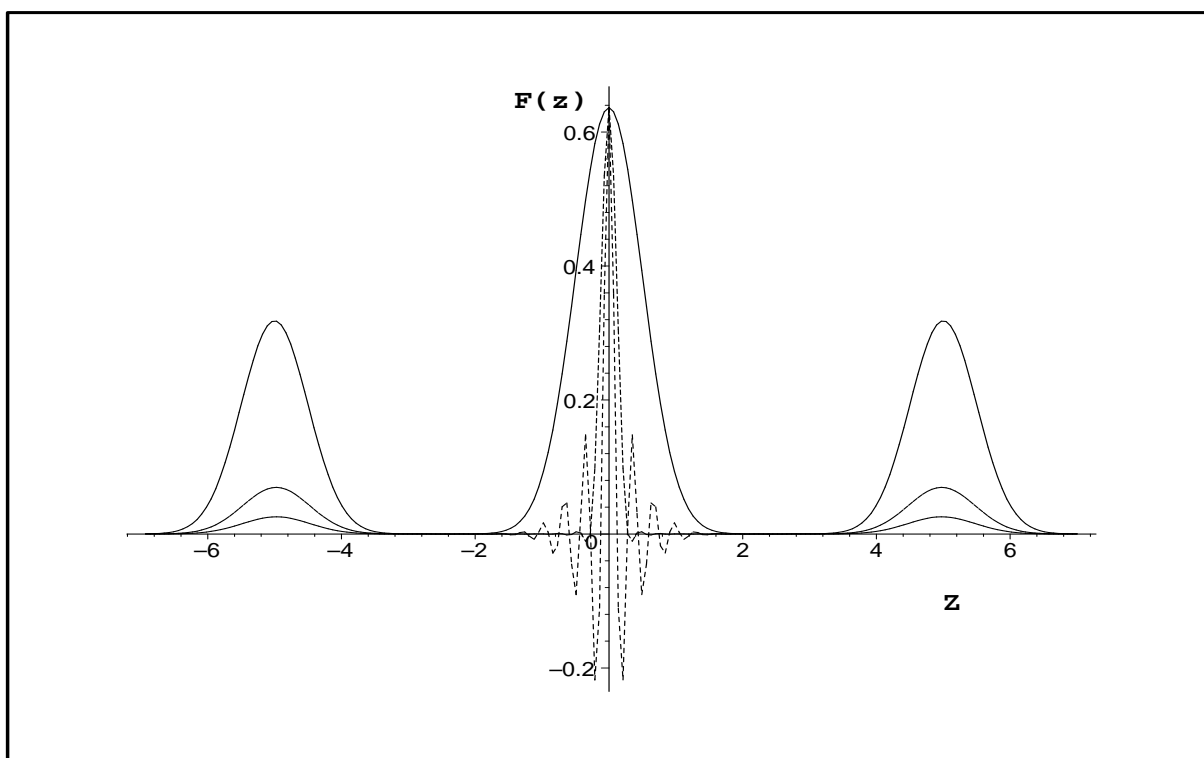


Figura 5.3: A função $F(z)$ para z real e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0; 0.2; 2.7$ (de cima para baixo).

número real, $\alpha = 5$ e $\tau = 0; 0.2; 2.7$, de cima para baixo respectivamente. Podemos verificar que as oscilações próximas da origem são mais resistentes quando comparadas com as componentes da superposição, mesmo para tempos relativamente grandes. Observamos que os estados estacionários que surgem do processo de amortecimento da fase, continuam sendo altamente não-clássicos, pois a função de Wigner próxima da origem no espaço de fase apresenta valores negativos. Assim podemos dizer que o estado é um estado de mistura altamente não-clássico. A figura (5.5) mostra o gráfico de $F(z)$ dado pela equação (5.20), para o número complexo z com uma fase $\varphi = \pi/4$ com $\alpha = 5$ e $\tau = 0; 0.2; 2.7$ de cima para baixo respectivamente. Mais uma vez, mesmo para tempos relativamente grandes as oscilações não são totalmente destruídas

Nas figuras 5.6-5.8, são mostrados gráficos para $f(z) = F(z, \tau) - F(z, \infty)$, sendo a função $F(z, \tau)$ dada pela equação (5.20). Nestes gráficos temos $f(z)$ para $\tau = 0; 0.2$ e $\alpha = 5$

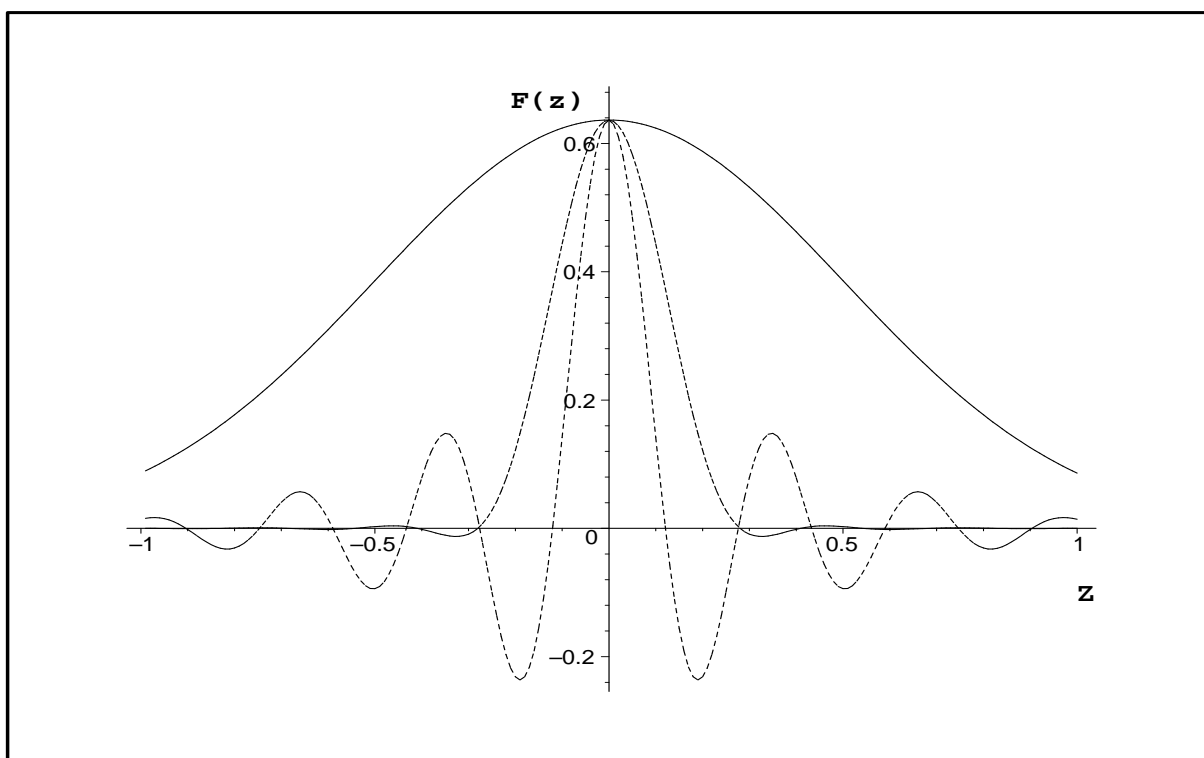


Figura 5.4: A função $F(z)$ para z real e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0; 0.2; 2.7$ (de cima para baixo).

para todas as figuras e uma fase $\varphi = \pi/2; \pi/4; 0$ para cada uma das figuras respectivamente. $f(z)$ fornece informações sobre o termo de interferência de $F(z, \tau)$, mostrando que cada componente da superposição tem uma contribuição direta na interferência, pois na ausência dos termos das componentes, o termo de interferência na origem é zero. Na figura (5.6), podemos observar que o termo de interferência para $\tau = 0; 0.2$ e uma fase $\varphi = \pi/4$, quase não apresenta oscilações próximo da origem, ou seja, para estes instante a descoerência já evoluiu bastante. Nas figuras (5.7 e 5.8), que corresponde às fases $\varphi = \pi/2; 0$, $\alpha = 5$ e os mesmos tempos da figura anterior, as oscilações de $f(z)$ ainda são bem explicitas, mostrando uma maior resistência em relação a descoerência. Para as figuras (5.6-5.8), nós verificamos que a fase foi fundamental para o processo de descoerência.

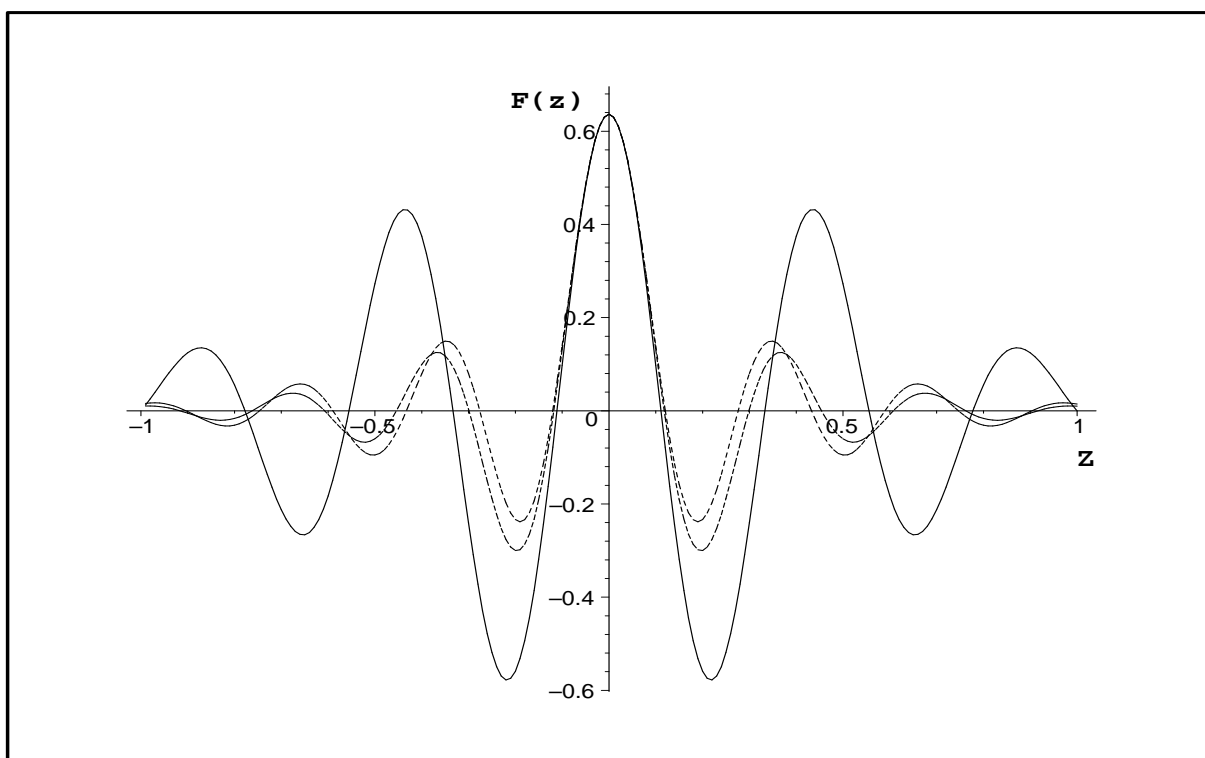


Figura 5.5: A função $F(z)$ para $\varphi = \pi/4$ e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0, 0.2, 2.7$ (de cima para baixo).

5.2 Conclusão

Estudamos a descoerência para uma superposição de estados coerentes par e ímpar de um único modo do campo, descrito pela equação mestre sensível à fase. Analisamos a descoerência de duas maneiras: através da coerência quântica e da função de Wigner. Verificamos que a coerência quântica para esses estados apresenta um decaimento mais acentuado quando incrementamos a distância entre as componentes da superposição. A função de Wigner, mostra que a superposição de estados coerentes com amortecimento na fase, é mais resistente quando comparada com superposições de estados insensíveis à fase, pois os estados com fase amortecida, mesmo para tempos grandes apresentam oscilações mais ou menos acentuado, dependendo da fase do número complexo z . Isto ocorre porque o estado estacionário assintótico não é térmico, mas sim um estado fortemente não-clássico (embora altamente misturado)

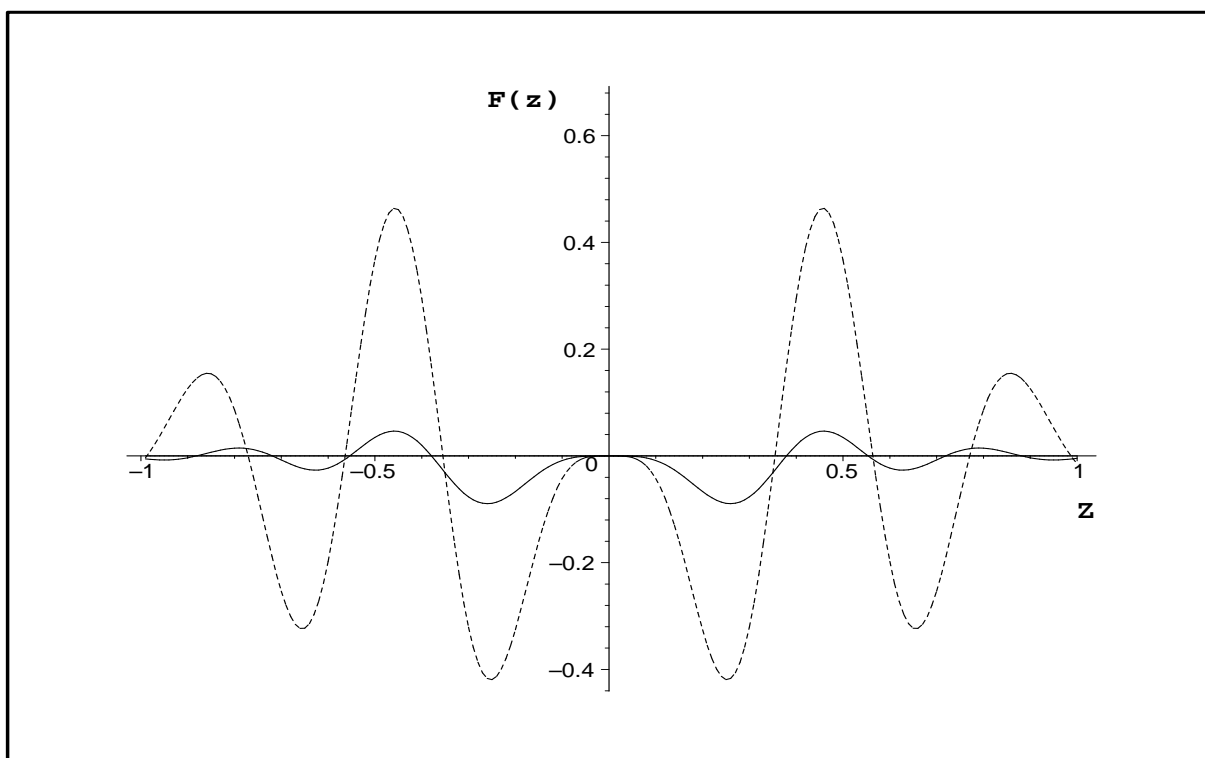


Figura 5.6: A função $f(z) = F(z, \tau) - F(z, \infty)$ para $\varphi = \pi/4$ e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0, 0.2$ (de cima para baixo).

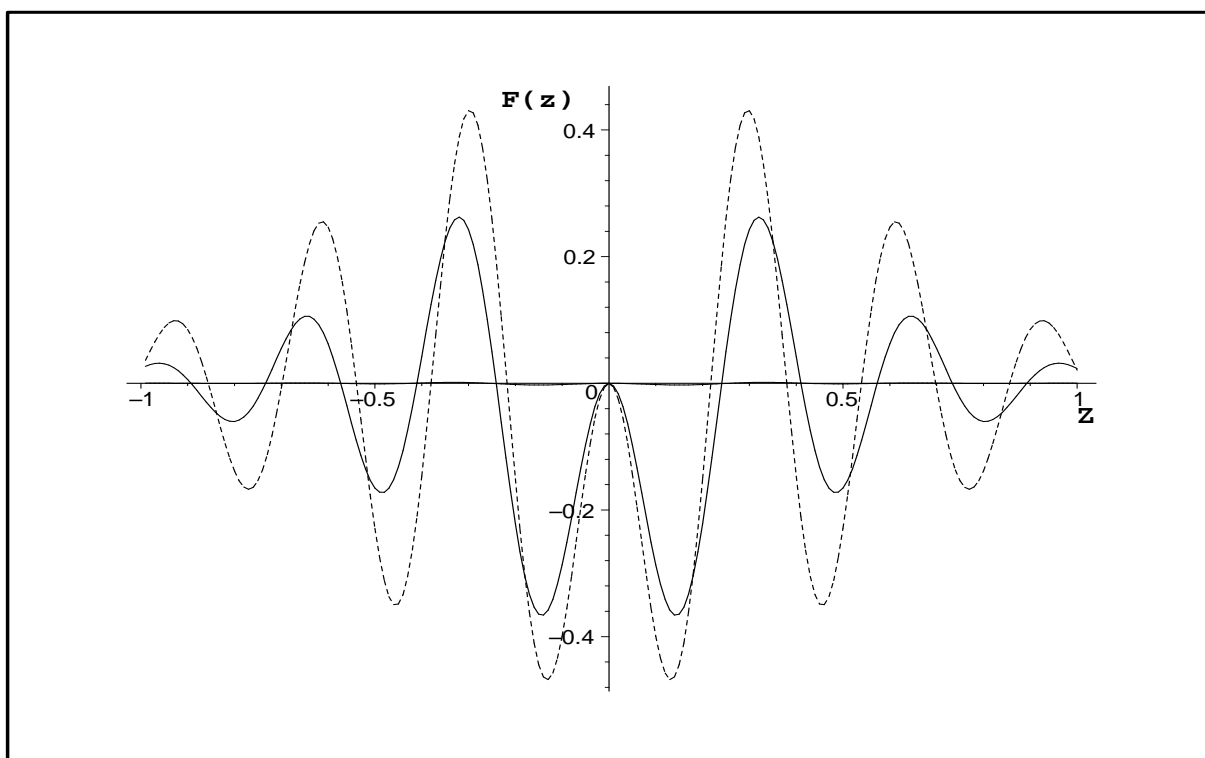


Figura 5.7: A função $f(z) = F(z, \tau) - F(z, \infty)$ para $\varphi = \pi/2$ e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0, 0.2$ (de cima para baixo).

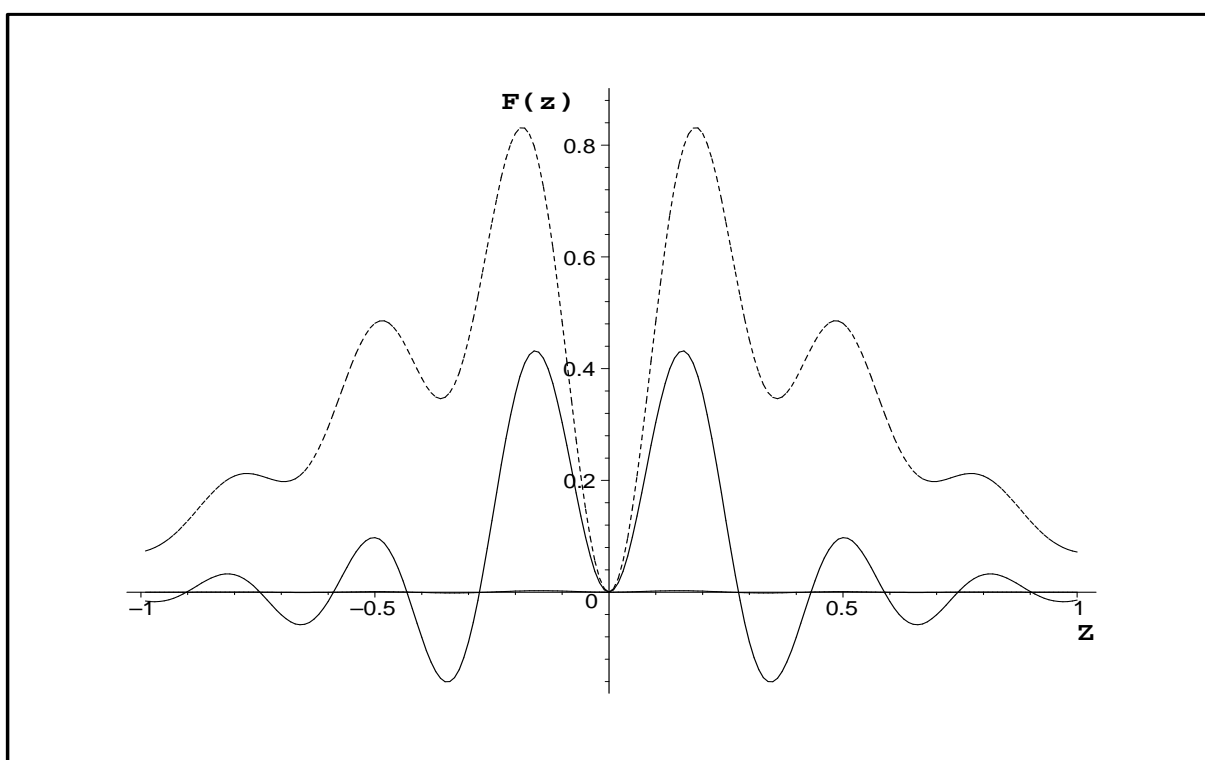


Figura 5.8: A função $f(z) = F(z, \tau) - F(z, \infty)$ para $\varphi = 0$ e $\alpha = 5$; para diferentes valores de $\tau = 0, 0.2$ (de cima para baixo).

Capítulo 6

Descoerência de Superposições de Estados Adicionado-Fótons

No terceiro e quarto capítulos deste trabalho e em [57], estudamos como o número inicial de fótons m influencia a razão descoerência das superposições

$$|m, \alpha\rangle_{\pm} = B_{m\alpha}^{(\pm)} \left[\hat{D}(\alpha) \pm \hat{D}(-\alpha) \right] |m\rangle = \tilde{B}_{m\alpha}^{(\pm)} \left[\hat{D}(\alpha) \pm \hat{D}(-\alpha) \right] \hat{a}^{\dagger m} |0\rangle, \quad (6.1)$$

onde $B_{m\alpha}^{(\pm)}$ e $\tilde{B}_{m\alpha}^{(\pm)}$ são fatores de normalização. Isto é interessante para comparar o comportamento destas superposições com a descoerência de outras superposições, onde os operadores $\hat{D}(\alpha)$ e $\hat{a}^{\dagger m}$ são colocados na ordem oposta:

$$|\alpha, m\rangle_{\pm} = B_{\alpha m}^{(\pm)} \hat{a}^{\dagger m} [|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle] = B_{\alpha m}^{(\pm)} \hat{a}^{\dagger m} \left[\hat{D}(\alpha) \pm \hat{D}(-\alpha) \right] |0\rangle. \quad (6.2)$$

O estado $|\alpha, m\rangle = \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle$ foi introduzido por Agarwal e Tara [77] e chamado *estado coerente adicionado-fótons*. O estado (6.2), foi introduzido e estudado em [78], e chamado *estados coerentes par/ímpar adicionado-fótons* (ECPIAF). Foi mostrado em [78] várias expressões analíticas das funções que caracterizam estes estados. Foi verificado que os estados (6.2) não exibem o

fenômeno de compressão nas quadraturas do campo. Os autores também demonstraram que a estatística do campo nestes estados é sub-Poissoniana. Foi mostrado que a função-Q tem, em sua forma, um único pico com uma cratera funda em um gama extensiva de parâmetros, porém com o incremento de m a largura do pico também aumenta, e a diferença entre a função-Q do estado par e ímpar desaparece. Comparando a função de Wigner do estado par e ímpar, verificou-se que suas formas são similares, mas a parte central do estado ímpar é invertida em relação ao estado par. Contudo naquele trabalho não foi estudada a função de Wigner com grandes parâmetros como: $\alpha = 2, 3, 4..$ e $m = 20, 50, 100$. Também não foi estado a descoerência desses estados.

Nesta seção estudaremos a descoerência dos estados coerentes pares e ímpares, excitados através da função de Wigner e também estudaremos a função de Wigner, com grandes parâmetros. Vamos partir dos resultados já obtidos em [78]. A função de Wigner normalizada do estado (6.2) é dada por:

$$F_{\pm}(z) = \frac{(-1)^m e^{|\alpha|^2}}{\pi \mathcal{L}_m^{\pm}(|\alpha|^2)} \left\{ e^{-2|z-\alpha|^2} L_m(|2z-\alpha|^2) + e^{-2|z+\alpha|^2} L_m(|2z+\alpha|^2) \right. \\ \left. \pm 2e^{-2|\alpha|^2} \operatorname{Re} \left[\exp(-2(z-\alpha)(z^*+\alpha^*)) L_m((2z-\alpha)(2z^*+\alpha^*)) \right] \right\}, \quad (6.3)$$

onde $z = (q + ip)/\sqrt{2}$ e

$$\mathcal{L}_m^{\pm}(z) = e^z L_m(-z) \pm e^{-z} L_m(z) \quad (6.4)$$

onde $L_m(z)$ representa os polinômios de Laguerre.

Infelizmente, a integral (3.8) não pode ser calculada de uma forma analítica simples, devido aos diferentes argumentos da função exponencial e os polinômios de Laguerre em (3.9) e (6.3). Mas uma vez nós podemos mostrar a vantagem de estudar a evolução da altura do pico central de interferência. Neste caso não podemos calcular a função de Wigner em todo espaço de fase mas podemos calculá-la na origem. Estes cálculos são baseados na notável representação

da função de Wigner em termos dos elementos de matriz do operador estatístico na base de Fock [44].

$$W(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \langle n | \hat{\rho} \hat{D}(2z) | n \rangle. \quad (6.5)$$

Sua consequência imediata é uma fórmula simples para o valor $W(z)$ no ponto $z = 0$:

$$W(0) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \langle n | \hat{\rho} | n \rangle. \quad (6.6)$$

A saber esta fórmula deu origem à métodos de reconstrução experimental da função de Wigner [42].

Uma vantagem da fórmula (6.6) para estudar a descoerência é que ela nos permite calcular a evolução da altura do pico central de interferência sem calcular a função de Wigner dependente do tempo em todos os pontos do espaço de fase, em particular sem qualquer conhecimento da função de Wigner inicial. Isto ocorre porque $W(0, t)$ é nada mais que duas vezes o valor da *função geradora* dos elementos da diagonal

$$G(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) y^n \quad (6.7)$$

(onde y é uma variável auxiliar) no ponto $y = -1$. A função $G(y)$ para o ECPIAF inicial, foi calculado em [78]:

$$G_{\pm}(y) = y^m \frac{\mathcal{L}_m^{\pm}(y|\alpha|^2)}{\mathcal{L}_m^{\pm}(\alpha^2)}. \quad (6.8)$$

Por outro lado a função $G(y, t)$ satisfaz a equação diferencial de primeira ordem [7]

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 2\gamma(1-y)[1 + \nu(1-y)] \frac{\partial G}{\partial y} - 2\gamma\nu(1-y)G, \quad (6.9)$$

A qual é uma consequência imediata da equação mestre (??). O coeficiente de amortecimento γ foi definido na equação Eq. (2.18) e $\nu \equiv \langle \hat{n} \rangle$ é o número médio de quanta no equilíbrio definido pela equação. (2.19). Uma solução geral para a equação (6.9) pode ser verificada em [7, 79–83]

$$G(y, t) = [1 + \nu u(1-y)]^{-1} G_0 \left(\frac{y + u(1+\nu)(1-y)}{1 + \nu u(1-y)} \right), \quad (6.10)$$

onde $G_0(y) \equiv G(y, 0)$ e $u \equiv 1 - \exp(-2\gamma t)$. Fazendo $y = -1$ e levando em conta as relações $1 + 2u\nu = s(\tau)$ e $1 - 2u(1 + \nu) = r(\tau)$, onde as funções (τ) e $r(\tau)$ foram definidas nas equações (3.14 e 2.22), nós obtemos

$$F(0, t) = \frac{2}{\pi s(\tau)} G_0 \left(-\frac{r(\tau)}{s(\tau)} \right).$$

A função $G_0(y)$ é dada pela equação (6.8). Fazendo uso da propriedade $\mathcal{L}_m^\pm(z) = \pm \mathcal{L}_m^\pm(-z)$, nós chegamos na fórmula para altura do pico central de interferência dependente do tempo normalizado, que é dada por:

$$f_{\alpha m}^{(\pm)}(\tau) = \frac{[r(\tau)]^m \mathcal{L}_m^\pm(|\alpha|^2 r(\tau)/s(\tau))}{[s(\tau)]^{m+1} \mathcal{L}_m^\pm(|\alpha|^2)}. \quad (6.11)$$

Como nós estamos interessados no caso $|\alpha| \gg 1$, O segundo termo na função $\mathcal{L}_m^\pm(z)$ pode ser omitido para $z \gg 1$ (porque $L_m(z) < \exp(z/2)$ para $z > 0$ [45]). Conseqüentemente, a equação (6.11) pode ser simplificada como segue (note que $s - r = 2\tau$)

$$f_{\alpha m}^{(\pm)}(\tau) = \frac{[r(\tau)]^m L_m(-|\alpha|^2 r(\tau)/s(\tau))}{[s(\tau)]^{m+1} L_m(-|\alpha|^2)} \exp\left(-\frac{2\tau}{s} |\alpha|^2\right), \quad (6.12)$$

de maneira que não existe diferença no comportamento entre as superposições pares e ímpares.

A fórmula (6.12) é bastante diferente da fórmula (3.34) para superposição de estados de número deslocados $|m, \alpha\rangle$ e $|m, -\alpha\rangle$ (se $N = 2$). Testes numéricos mostram que ambos, TDI e TDF que seguem da equação (6.12), decrescem monotonicamente com o incremento do número de excitação m , ao contrário do caso representado pela equação (3.34), veja a figura 6.1. Porém, a figura 6.2, a qual é completamente diferente da figura 3.7 mostra de fato que a função (6.12) está muito próxima de uma função exponencial. Neste caso, o TDF pode ser obtido do TDI por uma simples transformação dos cálculos (2.30). Talvez, a diferença notável no comportamento do pico central de interferência das superposições de estados de número deslocados (SEND) e os estados coerentes par/ímpar adicionado-fótons (ECPIAF), seja explicada pelo fato de as fórmulas das funções correspondentes à cada um destes estados serem completamente diferentes.

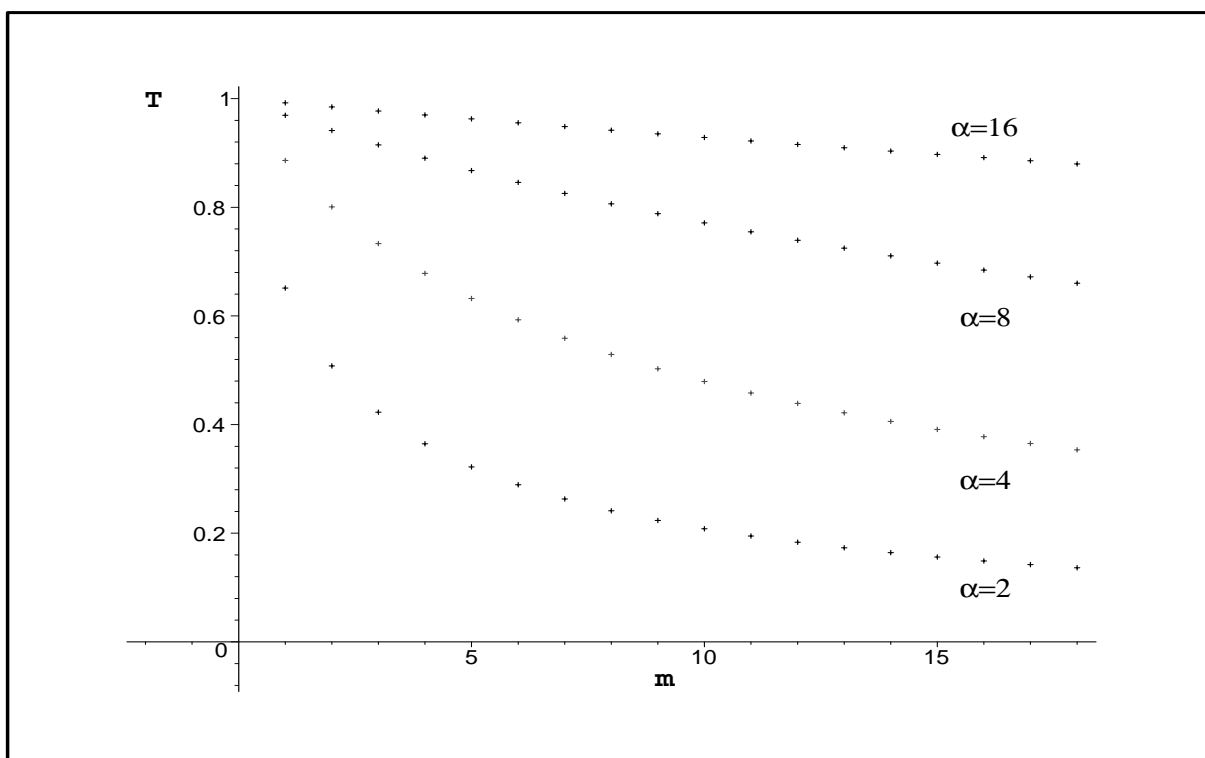


Figura 6.1: O tempo de descoerência final normalizado $T = 2|\alpha|^2\tau_f$ contra o número de excitação m para um estado coerente adicionado-fótons inicial, com diferentes valores de $\alpha = 2, 4, 8, 16$. O TDF τ_f é a solução da equação $f(\tau_f) = 1/(2\beta)$, onde a função $f(\tau)$ é dada por (6.12) e valor limiar é escolhido como $\beta = 2$.

A função de Wigner para uma SEND tem uma *estrutura interna rica* mostrada na figura 3.3; ao contrário, a função de Wigner para ECPIAF com grandes parâmetros de separação $|\alpha|$, não exibe nenhuma estrutura fina, como pode ser visto na figura 6.3. Nesta figura também verificamos que quando aumentamos o valor de $m = 0$ para $m = 10$, as posições dos picos das componentes são deslocados, como se tivéssemos aumentado o valor do parâmetro $\alpha = 7$ para $\alpha = 9$. Esta característica não foi observada em [78]. Na figura 6.4, nós mostramos $W_+(z)$ para z imaginário. Neste caso, verificamos que os estados mais excitados são mais robustos. Estes gráficos também mostram que a função de Wigner assume valores negativos, o que ocorre para estados não-clássicos.

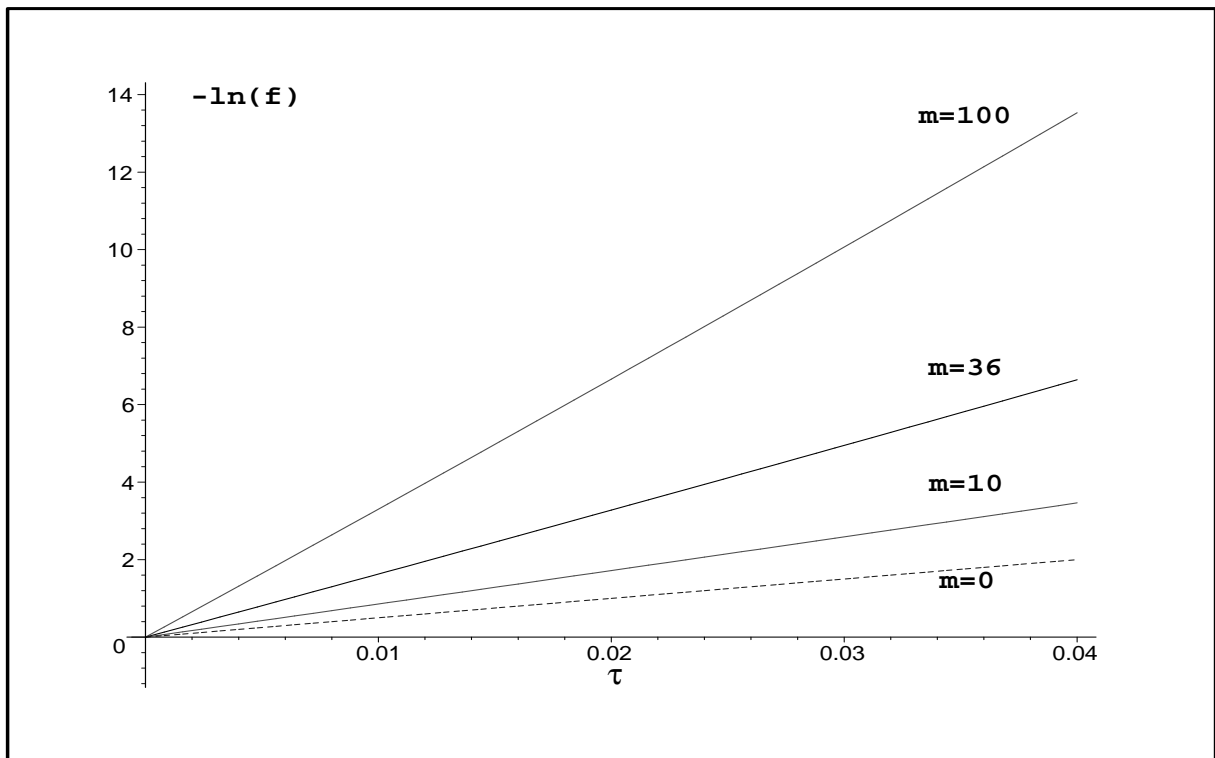


Figura 6.2: O negativo do logaritmo da altura do pico central de interferência normalizado do estado coerente adicionado-fótons

(6.12) com $\alpha = 5$ e diferentes números de excitação m .

6.0.1 Conclusão

Partimos da Função de Wigner independente do tempo para ECPIAF. Devido às dificuldades em calcular uma integral para o produto dos diferentes argumentos da função exponencial e os polinômios de Laguerre em todo espaço de fase, nós calculamos a função de Wigner na origem onde usamos os elementos de matriz do operador estatístico na base de Fock [44]. Verificamos que não há diferença entre o tempo de descoerência inicial e final. Também verificamos que o ECPIAF não apresenta nenhuma estrutura interna, e quando incrementamos a excitação m , as componentes são deslocadas.

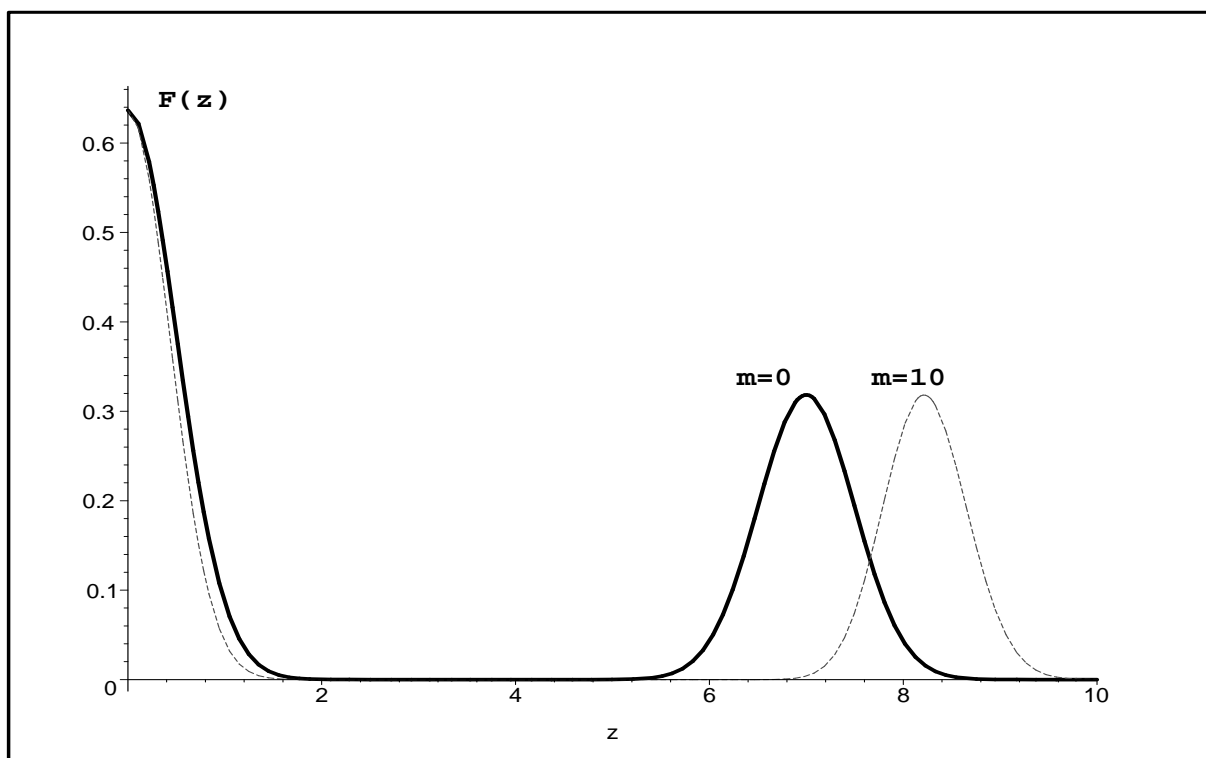


Figura 6.3: A função de Wigner $F(z)$ (6.3), (para z real e positivo) para um estado coerente par ($m = 0$) e $\alpha = 7$ (linha sólida) e o estado coerente par adicionado-fótons (6.3), com $\alpha = 7$ e $m = 10$ (linha pontilhada).

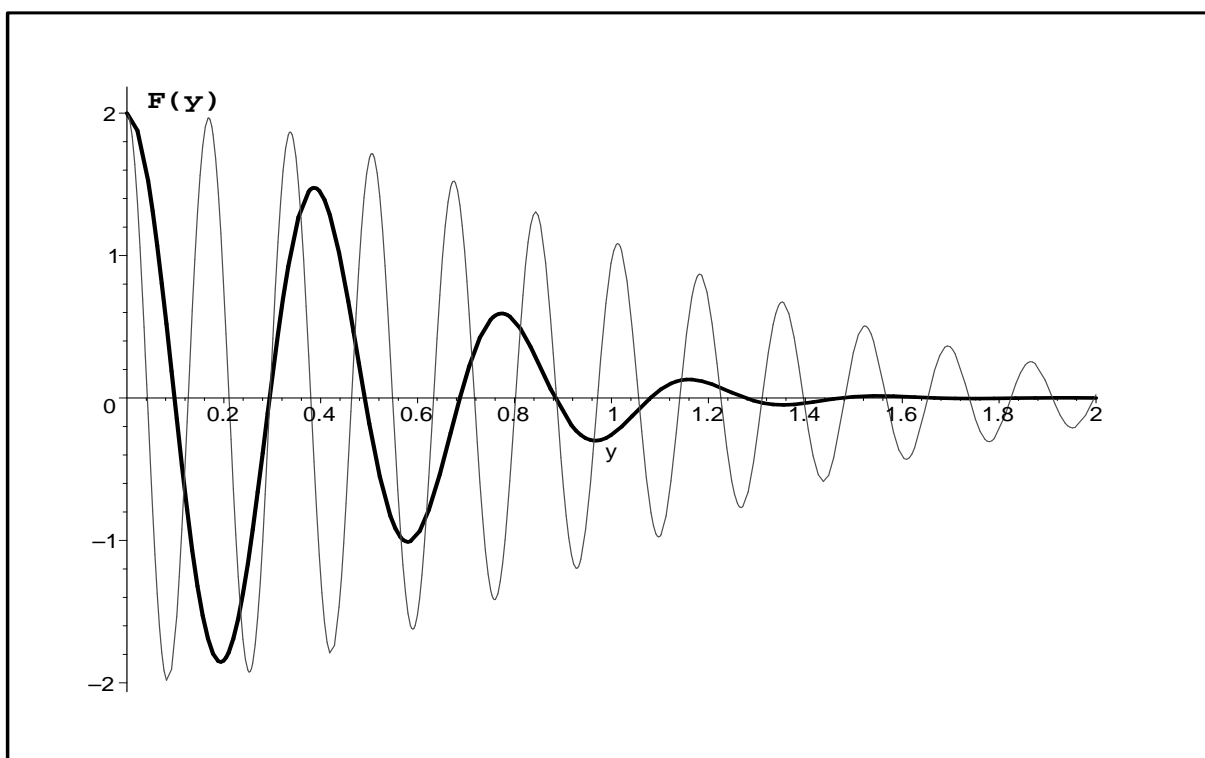


Figura 6.4: A função de Wigner $F(z)$ (6.3) (para $z = iy$ com y real e positivo) com $\alpha = 7$ e $m = 10$. Estes gráficos mostram que a função de Wigner assume valores negativos, o que ocorre apenas para estados não clássicos.

Conclusões

Obtivemos uma fórmula simples para determinar a função de Wigner de superposições de estados de número deslocados, em termos da função de Wigner não deslocada 2.7. Obtemos fórmulas exatas governadas pela equação mestre padrão (2.16), sensível e insensível à fase, que descrevem a evolução temporal da função de Wigner para várias superposições como: superposição de N estados de número deslocados, superposição de estados coerentes de muitos modos, superposição de estados coerentes sensíveis à fase. Por último os estados coerentes par/ímpar adicionado-fótons (ECPIAF) foram também considerados.

Comparamos duas definições para o tempo de descoerência: uma baseada na evolução temporal da pureza quântica (*tempo μ -descoerência*) e a outra, baseada na evolução temporal do pico central de interferência *o tempo f -descoerência inicial*. Nós mostramos que ambas aproximações correspondem a resultados idênticos para o tempo de descoerência inicial (**TDI**), no caso de superposições simétricas. Nós demonstramos que o (**TDI**) pode ser considerado como uma característica confiável no processo de descoerência, apenas para os casos mais simples como a superposição de dois estados coerentes. Em casos com uma estrutura mais rica, tais como superposições com mais de duas componentes de estados coerentes bem separadas, ou componentes com uma estrutura interna (representada pelos estados de número deslocados), nós introduzimos o conceito de *tempo de descoerência final* **TDF**. A Função *f*-aproximada para o cálculo do tempo de descoerência final **TDF** é muito mais simples e transparente que a função

μ -*aproximada*, porque esta última pode ser usada de fato, somente para uma superposição inicial de estados coerentes. Para superposições com um estrutura mais fina, o cálculo da pureza quântica em qualquer instante do tempo se torna um problema extremamente difícil, até mesmo se for conhecida uma expressão explícita para a função de Wigner. Ao contrário disto, a análise e o cálculo do pico de interferência podem ser facilmente executados para qualquer valor da variável tempo. Mostramos também que, embora o μ -**TDF** e f -**TDF** não coincidam em nenhum caso genérico, os seus comportamentos qualitativos são similares. Ambos os tempos incrementam significativamente (por várias vezes ou até mesmo por ordens de magnitudes), se for acrescentado o número de componentes N ou o número de excitação m na superposição de estados, mantendo o valor do **TDI**. Conseqüentemente superposições com uma estrutura mais rica podem ser mais resistentes contra a descoerência do que simples superposições de dois estados coerentes (pacotes Gaussianos), embora estes resultados possam ser vistos contra a intuição. Para uma superposição de estados coerentes par e ímpar sensíveis à fase, a função de Wigner é mais resistente quando comparada com superposições de estados insensíveis à fase, pois os estados com fase amortecida, mesmo para tempos grandes apresentam oscilações mais ou menos acentuadas, dependendo da fase do número complexo z . Para os estados coerentes de muitos modos, verificamos que os tempos de descoerência inicial para o pico de interferência, são os mesmo para os estados emaranhados e fatorizados, o mesmo não ocorrendo para os tempos finais. Os tempos de descoerência iniciais para a pureza quântica podem se inverter dependendo do valor de α_k . Para ECPIAF, verificamos que não há diferença entre o tempo de descoerência inicial e final. Também verificamos que o ECPIAF não apresenta nenhuma estrutura interna, e, quando incrementamos a excitação m , as componentes são deslocadas.

Apêndice A

Fatores de Boltzmann

Vamos discutir neste apêndice um modelo drasticamente simplificado constituído por N_0 átomos em um reservatório (interagindo ressonantemente com um oscilador) que podem ser encontrados em dois estados, com energias 0 ou $\epsilon > 0$, ou seja, estado fundamental e excitado respectivamente. A especificação do estado microscópico desse sistema requer o conhecimento da energia de cada átomo. Estamos, portanto, diante de um problema combinatório. Considerando uma situação com N_1 átomos no estado fundamental (energia nula) e $N_2 = N_0 - N_1$ átomos no estado excitado (energia $\epsilon > 0$), o número de estados microscópicos acessíveis ao sistema é dado pelo fator combinatório

$$\kappa = \frac{N_0!}{N_1!(N_0 - N_1)!}. \quad (\text{A.1})$$

Dada a energia total $E = \epsilon(N_0 - N_1)$, ficam definidos os valores de N_1 e N_2 . Então podemos escrever a equação anterior em função da energia E e o número total de átomos N_0 ,

$$\kappa(E, N_0) = \frac{N_0!}{\left(N_0 - \frac{E}{\epsilon}\right)! \left(\frac{E}{\epsilon}\right)!}. \quad (\text{A.2})$$

Calculando o logaritmo da equação (A.2), nós obtemos

$$\ln[\kappa(E, N)] = \ln(N!) - \ln\left(N_0 - \frac{E}{\epsilon}\right)! - \ln\left(\frac{E}{\epsilon}\right)!. \quad (\text{A.3})$$

Para obter a entropia, vamos escrever a expansão de Stirling, para a equação (A.3)

$$\ln[\kappa(E, N)] = N\ln(N) - \left(N_0 - \frac{E}{\epsilon}\right)\ln\left(N_0 - \frac{E}{\epsilon}\right) - \left(\frac{E}{\epsilon}\right)\ln\left(\frac{E}{\epsilon}\right). \quad (\text{A.4})$$

No limite termodinâmico, quando temos, $N_0, E \rightarrow \infty$, com $E/N_0 = u$ sendo uma constante, podemos com um pouco de álgebra obter uma expressão para entropia que é como segue

$$s(u) = \lim_{N_0} \frac{1}{N_0} k_B \ln[\kappa(E, N_0)] = -k_B \left(1 - \frac{u}{\epsilon}\right) \ln\left(1 - \frac{u}{\epsilon}\right) - k_B \left(\frac{u}{\epsilon}\right) \ln\left(\frac{u}{\epsilon}\right). \quad (\text{A.5})$$

Note que a entropia é uma função côncava da energia. Para $u = 0$, a entropia deve ser nula, pois todos os átomos encontram-se no estado fundamental, com energia nula (pois a temperatura é nula, de acordo com a equação (2.18), $\sigma = 1$). A entropia é máxima para $u = \epsilon/2$, para verificar esta condição, basta derivar a equação (A.5) com relação a u e igualar a zero, e isto corresponde a uma situação de temperatura infinita, em que os dois níveis de energia dos átomos são praticamente idênticos. De acordo com a equação (2.18), temos $\sigma = 0$, com metade dos átomos em cada nível.

A equação de estado na representação da entropia é dada por

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{k_B}{\epsilon} \left[\ln\left(1 - \frac{u}{\epsilon}\right) - \ln\left(\frac{u}{\epsilon}\right) \right], \quad (\text{A.6})$$

A partir da equação de estado na representação da entropia, podemos obter uma expressão para energia em função da temperatura escrita na forma,

$$u = \frac{\epsilon e^{-\zeta\epsilon}}{1 + e^{-\zeta\epsilon}}, \quad (\text{A.7})$$

onde estamos utilizando a notação $\zeta = 1/k_B T$. Desta equação podemos determinar os valores de N_1 e N_2 em função de N_0 , sendo:

$$N_1 = \frac{N_0}{1 + \exp(-\zeta\epsilon)} \quad (\text{A.8})$$

e

$$N_2 = \frac{N_0 \exp(-\zeta\epsilon)}{1 + \exp(-\zeta\epsilon)}. \quad (\text{A.9})$$

onde fizemos

$$u = \frac{E}{N_0}$$

Considerando um átomo isolado, poderíamos atribuir as probabilidades

$$B_1 = \frac{1}{1 + e^{-\zeta\epsilon}} \quad e \quad B_2 = \frac{e^{-\zeta\epsilon}}{1 + e^{-\zeta\epsilon}} \quad (\text{A.10})$$

de que os níveis com energia nula ou energia $\epsilon > 0$ respectivamente estejam ocupados. Estes termos de probabilidades são conhecidos como os bem conhecidos fatores de Boltzmann, que definem as probabilidades de ocupação dos estados de um único átomo num sistema de átomos não-interagentes a uma determinada temperatura T . A energia representada pela equação, dada em (A.7), também pode ser obtida por meio da fórmula do valor médio, $u = 0xB_1 + \epsilon xB_2$. Na figura A.1, é apresentado um esboço de u contra a temperatura T (como $B_1 \geq B_2$, verifica-se a igualdade dos fatores de Boltzmann apenas para $T \rightarrow \infty$), a energia varia do valor nulo (no estado fundamental que corresponde a uma temperatura zero, quando todos os átomos encontram-se no estado fundamental, e novamente de acordo com (2.18), $\sigma = 1$), até o valor máximo $\epsilon/2$ (quando a temperatura $T \rightarrow \infty$ e os dois níveis ficam igualmente populados e, neste caso, novamente em concordância com (2.18) temos $\sigma = 0$). A parte superior do gráfico corresponde a energias negativas. Podemos observar que qualquer temperatura negativa corresponde a uma situação mais energética, com energias maiores do que as situações com temperaturas positivas. Neste caso, trabalhando com os fatores de Boltzmann, B_1 e B_2 , em uma situação com temperaturas negativas, deve-se ter $B_1 < B_2$; em outras palavras, deve-se inverter a população dos níveis, logicamente que isso poderia ser feito invertendo o sinal de ϵ .

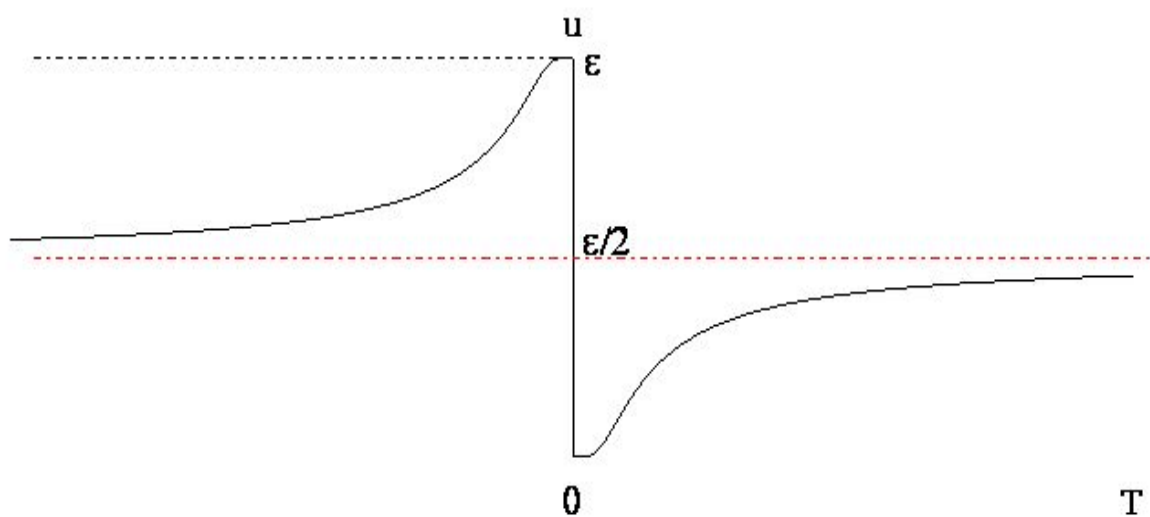


Figura A.1: Energia por átomo contra a temperatura para o sistema de átomos com dois níveis. Podemos observar que os valores de energias mais altas sempre correspondem a temperaturas negativas.

Apêndice B

Dedução da Fórmula (2.25)

Nesta secção vamos mostrar como podemos obter a fórmula dada em (2.25), para isto vamos designar o lado esquerdo da equação (2.25) pelo símbolo I_n . Usando a função geradora para os polinômios de Laguerre, que são bem conhecidas para ($|z| < 1$), nós podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)z^n = \left(1 - z\right)^{-1} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right), \quad (\text{B.1})$$

assim iremos calcular primeiramente a integral

$$I(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} I_n z^n = \int \frac{d^2}{1-z} \exp\left(\frac{g + (a-g)z}{z-1} r^2 + kr\right) \quad (\text{B.2})$$

onde nós introduzimos um novo vetor em duas dimensões $r = (x, y)$ e $k = (c, d)$. Obviamente que o lado direito da equação (B.2) é o produto de duas integrais Gassiana (relembrando que $|z| < 1$), deste modo podemos calcular a integral imediatamente:

$$I(z) = \frac{\pi}{g + (a-z)z} \exp\left(\frac{k^2(1-z)}{4[g + (a-g)z]}\right). \quad (\text{B.3})$$

Fazendo a substituição

$$y = \frac{z(g-a)}{g},$$

nós podemos reescrever o lado direito da equação (B.3) como

$$I(y) = \frac{\pi}{g(1-y)} \exp \left[\frac{k^2}{4g} \left(1 + \frac{ay}{(g-a)(y-1)} \right) \right]. \quad (\text{B.4})$$

Nós podemos perceber que (B.4) possui a mesma estrutura quando comparada com o lado direito da equação (B.1). Expandindo $I(y)$ em termos de uma série de potências em y , e logo em seguida substituindo y por $z(g-a)$ e retornando para a primeira igualdade em (B.2), então conseguimos finalmente chegar à fórmula (2.25).

Apêndice C

O Propagador da Equação de Fokker Planck

Dentro de certas condições, o processo de relaxação de sistemas quânticos lineares de n dimensões (tais como osciladores acoplados ou partículas carregadas num campo eletromagnético homogêneo e confinado por um potencial parabólico) pode ser descrito através da equação de Fokker Planck para a função de Wigner [84, 85]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[(Ay + K)_i W \right] + D_{ij} \frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_j} \quad (\text{C.1})$$

onde $i, j = 1, 2, \dots, 2n$, o vetor \mathbf{y} de $2n$ dimensões consiste de combinações lineares das coordenadas cartesianas q_i e dos momentos canonicamente conjugados p_i (no caso mais simples $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$). A matriz de deriva \mathbf{A} e o vetor \mathbf{K} não depende do vetor variável \mathbf{y} , embora eles possam, em geral, ter dependências temporais arbitrárias. Contudo a matriz de difusão simétrica $D \equiv ||D_{ij}||$ não pode ser arbitrária, pois as soluções fisicamente aceitáveis para a equação (C.1) devem satisfazer a condição da semidefinição positiva do operador estatístico correspondente. Essa condição é

atendida pela matriz

$$D_* = D + \frac{i\hbar}{4} \left(A\Sigma + \Sigma\tilde{A} \right),$$

que é semidefinida positiva. Os elementos da matriz anti-simétrica $\Sigma = \|\Sigma_{jk}\|$ são os comutadores

$$\Sigma_{jk} = \frac{i}{\hbar} [\hat{y}_j, \hat{y}_k].$$

No caso de uma única coordenada espacial, a condição matricial $D_* \geq 0$ é equivalente a três condições escalares [86–88]

$$D_{pp}D_{qq} - D_{pq}^2 \equiv \det D \geq \frac{\hbar^2}{16} \left(\text{Tr} A \right)^2 \quad (\text{C.2})$$

$$D_{pp} \geq 0, \quad D_{qq} \geq 0, \quad D = \begin{vmatrix} D_{pp} & D_{pq} \\ D_{pq} & D_{qq} \end{vmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Levando em conta que a equação dada em (C.1) equivale à equação de Schrö com um hamiltoniano quadrático efetivo (não hermitiano), o propagador $G(y, y', t)$, que satisfaz a equação seguinte

$$W(y, t) = \int dy' G(y, y', t) W(y', 0). \quad (\text{C.4})$$

Esse propagador pode ser calculado com a ajuda do método dos invariantes dependentes do tempo dado em [89, 90]. Contudo para obter sua forma explícita é suficiente saber que esse propagador é gaussiano, então, como qualquer função de Wigner gaussiana [84, 91], ele pode ser escrito como

$$G(y, y', t) = \frac{1}{2\pi} \left(\det K_*(t) \right)^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y - y_*(t)] K_*^{-1} [y - y_*(t)] \right\} \quad (\text{C.5})$$

onde $y_*(y', t)$ é o valor médio do vetor no espaço de fase y e $K_*(t)$ é a matriz das variâncias. As formas explícitas de y_* e K_* são encontradas resolvendo as equações que são definidas em

consequência imediata da equação de Fokker-Planck (C.1)

$$\dot{K}_* = AK_* + K_*\tilde{A} + 2D \quad (\text{C.6})$$

$$\dot{y} = ay + K. \quad (\text{C.7})$$

Dentro das condições iniciais $K_*(0) = 0$ e $y_*(y', 0) = y'$, que são equivalentes à propriedade $G(y, y', 0) = \delta(y - y')$ que distingue o propagador de todos os outros. No caso em que estamos trabalhando, as soluções das equações (C.6) e (C.7) nos levam ao propagador dado na equação (2.21).

Apêndice D

Dedução da Equação de Fokker-Planck na Forma de Wigner

Partindo da equação mestre dada em (2.16),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \eta N_1 (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \eta N_2 (2\hat{a}^\dagger\rho\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\rho - \rho\hat{a}\hat{a}^\dagger), \quad (\text{D.1})$$

vamos determinar a equação (2.17). Para isto fazemos

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad \hat{a} = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.2})$$

e, em seguida, substituímos \hat{a} e \hat{a}^\dagger dados em (D.2) na equação (D.1) e com um pouco de álgebra, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & (N_1 + N_2) \left(\hat{q}\hat{\rho}\hat{q} + \hat{p}\hat{\rho}\hat{p} - \frac{\hat{q}^2\rho}{2} - \frac{\hat{p}^2\rho}{2} - \frac{\hat{\rho}\hat{q}^2}{2} - \frac{\hat{\rho}\hat{p}^2}{2} \right) \\ & + (N_1 - N_2) \left(i\hat{p}\hat{\rho}\hat{q} + i\hat{q}\hat{\rho}\hat{p} + \frac{i\hat{q}\hat{p}\hat{\rho}}{2} + \frac{i\hat{p}\hat{q}\hat{\rho}}{2} + \frac{i\hat{\rho}\hat{q}\hat{p}}{2} + \frac{i\hat{\rho}\hat{p}\hat{q}}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

No passo seguinte, faremos uso da definição de \hat{p} e \hat{q} como segue

$$\hat{p} = p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q} \quad \hat{q} = q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}. \quad (\text{D.4})$$

Em seguida devemos calcular cada termo da equação (D.3), lembrando que

$$\hat{\rho}\hat{q} = \left(q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right)W \quad \hat{\rho}\hat{p} = \left(p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right)W \quad \hat{q}\hat{p}\hat{\rho} = \left(q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right)\left(p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right)W \quad (\text{D.5})$$

e após uma álgebra exaustiva nós obtemos (fizemos $\hbar = 1$)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (N_1 - N_2) \frac{\partial}{\partial q} (qW) + (N_1 - N_2) \frac{\partial}{\partial p} (pW) + \frac{(N_1 + N_2)}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} + \frac{(N_1 + N_2)}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial q^2}. \quad (\text{D.6})$$

A partir da equação (D.6) nós podemos escrever a equação desejada

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} (\gamma qW) + \frac{\partial}{\partial p} (\gamma pW) + D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} \right) \quad (\text{D.7})$$

onde

$$\gamma = \eta\sigma N_0 \quad D = \frac{1}{2}\eta N_0 \quad N_0 = N_1 + N_2 \quad \sigma = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \quad (\text{D.8})$$

Bibliografia

- [1] M. Brune et al. Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 4887.
- [2] S. Brattke, B. T. H. Varcoe, H. Walther, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 3534.
- [3] A. Rauchenbeutel et al., Phys. Rev. Lett **83** (1999) 5166.
- [4] P. Bertet, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 143601.
- [5] S. Haroche, M. Brune and J. M. Raimond, La Recherche 301 (2001) 50.
- [6] Bužek V and Knight P L 1995 *Progress in Optics* vol 34, ed E Wolf (Amsterdam: Elsevier) pag. 1
- [7] V. V. Dodonov 2003 *Theory of Nonclassical States of Light*, eds V V Dodonov and V I Man'ko (London: Taylor & Francis) p 153
- [8] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Phys. Rev. A **31** 1059 (1985).
- [9] S. L. Braunstein, Phys. Rev. A **45**,6803(1992).
- [10] M. A. Moraes, M. J. F. S. Souza, and C. M. A. Dantas, Physica A **291**, 467(2001).
- [11] M. A. Marchioli and W. D. José, Physica A **337**, 39(2004).
- [12] K. S. Lee, M. S. Kin, and V. Bužek, J. Opt. Soc. Am. B **11**, 1118(1994).

-
- [13] V. V. Dodonov, S. S. Mizrahi and A. L. de Souza Silva, *J. Ópt B: Quantum Semiclass. Opt* **2** 271 (2000).
- [14] G.M Abd Al-Kader, *Eur. Phys. J. B* **8**, 429 (1999).
- [15] G. J. Milburn and D. F. Walls, *Phys Rev. A* **38** 1087(1988).
- [16] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim, P. L. Knight and V. Buzek. *Phys Rev. A* **41** 2645 (1990).
- [17] M. S. Kim and V. Bužek, *Phys Rev. A* **46** 4239(1992).
- [18] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, *Physica.* **72**, 597 (1974).
- [19] J. Plebanski, *Bull. Acad. Polon. Sciences* **2**, 213(1954); I. R. Senitzky, *Phys. Rev.* **95**, 1115(1954); M. Boitenuz and A. Levelut, *J. Phys. A* **6**,589(1973); S. M. Roy and V. Singh, *Phys. Rev. D* **25**, 3413(1982); F. A. M. de Oliveira, M. S. Kin, P. L. Knight and V. Buzek, *Phys Rev. A* **41**, 2645(1990); A. Wünshe, *Quantum Opt.* **3**, 359(1991); R. Tanás, B. K. Murzakhmetov, T. Gantsog and A. V. Chizhov, *ibid.* **4**, 1(1992).
- [20] A. I. Lvovsky and S. A. Babichev, *Phys. Rev. A* **66**, 011801(2002).
- [21] A. Miranowicz, R. Tanás and S. Kielich, *Quantum Opt.* **2**, 253(1990).
- [22] K. Tara, G. S. Agarwal and S. Chaturvedi, *Phys. Rev. A* **47**, 5024(1993).
- [23] J. Janszky, P. Domsokos and P. Adam, *Phys. Rev. A* **48**, 2213(1996).
- [24] M. J. Gagen, *Phys. Rev. A* **51**, 2715(1995).
- [25] S. Szabo, P. Adam, J. Janszky and P. Domokos, *Phys. Rev. A* **53**, 2698(1996).
- [26] D. Mogilivtsev and S. Ya. Kilin, *Opt Commun* **132**, 452(1996).

- [27] S. Bose, K. Jacobs and P. L. Knight, Phys. Rev. A **56**, 4175(1997).
- [28] S. Chountasis and A. Vourdas, Phys Rev. A **58**, 848(1998).
- [29] A. Napoli and Messina, Eur. Phys. J. D **5** 441(1999).
- [30] R. Ragi, B. Baseia and S. S. Mizrahi, J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **2**, 299(2000);
W. D. José and S. S. Mizrahi, ibid. **2**, 306(2000).
- [31] A. S. F. Obada and G. M. Abd Al-kader, Int. J. Teor. Phys. **40**, 1715(2001).
- [32] Gamal M. Abd Al-Kader Pramana Jornal Of Physics. **53**, N^o 5, 877 (1999).
- [33] S. Kilin and D. Mogilevtsev, Phys. Lett. A **198**, 85(1995).
- [34] V. Bužek, A. Vidiella Barranco and P. L. Knight, Phys. Rev. A **45**, 6570(1992).
- [35] O. Castaños, R. López-Peña and V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. **16**, 477(1995).
- [36] P. Barberis and S. Hacyan, J. Opt B: Quantum Semiclassical Opt. **2** 230(2000).
- [37] A. L. Souza Silva, W. D. José, V. V. Dodonov and S. S. Mizrahi, Phys. Lett. A **282**
235(2001).
- [38] M. A. Marchioli, L. F. da Silva, P. S. Melo and C. A. Dantas, Physica A **291**, 449(2001);
Célia M. A. Dantas, J. R. Queiroz and B. Baseia, J. Mod. Opt., 1998, **45**, 1085.
- [39] Dodonov V. V., Malkin I. A. e Man'ko, Sov. Phys. - Theor. Math. Phys. **24**, 746(1975);
Dodonov V. V., Malkin I. A. e Man'ko, V., J. Theor. Phys. **14**, 37(1975); Dodonov V. V.
e Man'ko V.I., em Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems, Proc
Lebedev Physics Institute, Vol. **183**, New Science, New York, p 103(1989).
- [40] Wigner E., 1932a, Phys. Rev. **40**, 749.

-
- [41] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, *Phys. Rep* **106**, 121(1984).
- [42] Lutterbach L G and Davidovich L 1997 *Phys. Rev. Lett.*, **78** 2547(1997).
- [43] H. J. Groenewold 1946 *Physica* **12** 405(1946).
- [44] Cahill K E and Glauber R J 1969 *Phys. Rev.* **177** 1857(1969).
- [45] Erdélyi A (ed) 1953 *Bateman Manuscript Project: Higher Transcendental Functions* vol II (New York: McGraw-Hill)
- [46] Szegő G 1959 *Orthogonal Polynomials* (New York: American Mathematical Society)
- [47] W. Weidlich and F. Haake, *Phys. Z* **185** 30(1965).
- [48] M. Lax, *Phys. Rev.* **145** 110(1966).
- [49] W. H. Louisell and J. H. Marburger J H *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-3** 348(1967)
- [50] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley) p 347
- [51] M. C. Wang and G. E. Uhlenbeck, *Rev. Mod. Phys.* **17** 323(1945).
- [52] H. Haken, *Rev. Mod. Phys.* **47** 67(1975).
- [53] V. V. Dodonov, S. S. Mizrahi and Souza Silva A L 2000 *J. Opt. B: Quantum Semicl. Opt.* **2** 271
- [54] Zurek W H, Habib S and Paz J P 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1187
- [55] A. Isar, A. Sandulescu and W. Scheid, *Phys. Rev. E* **60** 6371(1999)
- [56] M. S. Kin and V. Bužek, *Phys. Rev. A* **46**, 4239(1992).
- [57] V. V. Dodonov and L. A. de Souza, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt* **7**, S490(2005).

- [58] S. Wallentowitz and W. Vogel, Phys. Rev. A **53**, 4528(1996); K. Banaszek and K. Wódkiewicz, Phys. Rev. Lett **76**, 4344(1996); G. Nogués et al., Phys. Rev. A **62**, 054101(2000).
- [59] W. T. Strunz and F. Haake, Phys. Rev. A **67**, 022102(2003).
- [60] Bateman Manuscript Project: Higher Transcendental Functions, Vol. **II**, edited by A. Erdélyi (McGraw-hill, New York, 1953).
- [61] G. S. Agarwal, in Progress in Optics. Vol. **XI**, edited by E. Wolf (Amsterdam, North-Holland, 1973), p. 1.
- [62] V. V. Dodonov, S. S. Mizrahi and A. L. de Souza Silva J. Opt B: Quantum Semiclassical Opt. **2**, 271(2000).
- [63] W. H. Zurek, S. Habib and J. P. Paz, Phys. Rev. Lett. **70**, 1187(1993).
- [64] H. P. Breuer, U. Dorner and F. Petruccione, Eur. Phys. J. D **14**, 377(2001).
- [65] V. V. Dodonov, Phys. Lett. A **364** 368(2007).
- [66] Handbook of Mathematical Functions, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun (Dover, New York, 1972), eq. 23.1.30.
- [67] Y. Xia and G. Guo, Phys. Lett. A **136**, 281(1989).
- [68] M. Hillery, Phys. Rev. A **36**, 3796(1987).
- [69] V. Busek, H. Moya-Cessa, P. L. Knight, and J. J. D. Phoenix, Phys. Rev. A **45**, 5193(1992).
- [70] M. Brune, S. Harouche, J. M. Raimond, L. Davidovich, and N. Zagury. Phys Rev. A **45** 5193(1992).

- [71] Chin-lin Chai, *Phys Rev. A* **46** 7187(1992).
- [72] Nadeem A. Ansari and V. I. Man'ko, *Phys Rev. A* **50** 1942(1994).
- [73] S. J. Van Enk and O. Hirota, *Phys. Rev. A* **64**, 022313(2001).
- [74] Xiaoguang Wang and Barry C. Sanders, *Phys. Rev. A* **65**, 012303(2001).
- [75] F. L. Semião and A. Vidiella-Barranco, *Phys. Rev. A* **72**, 064305(2005).
- [76] D. F. Walls, G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **31**, 2403 (1985).
- [77] Agarwal, G.S. and Tara, K., *Phys. Rev. A* **43** 492(1991).
- [78] V. V. Dodonov, Ya. A. Korennoy, V. I. Man'ko and Y. A. Moukhin, *Quantum Semiclass Opt* **8** 413(1996).
- [79] Shimoda, K., Takahasi, H, and Townes, C.H., *J. Phys. Soc. Japan* **12** 686(1957).
- [80] Schell, A. and Barakat, R., *J. Phys. A* **6** 826(1973).
- [81] Peřina, J., Peřinová, V., and Miřta, L., *Czechosl. J. Phys. B* **24** 482(1974).
- [82] Rockower, E.B., Abraham, N.B., and Smith, S.R., *Phys. Rev. A* **17** 1100(1978).
- [83] Arnoldus, H.F., *J. Opt. Soc. Am. B* **13** 1099(1996).
- [84] V. V. Dodonov and Man'ko, V. I., Group theory, gravitation and elementary particle physics, *Proceedings of Lebedev Physics Institute* vol **167**, ed A. A. Komar (Commack: Nova Science) p. 7(1987).
- [85] V. V. Dodonov and Man'ko, V. I., Classical e quantum effects in electrodynamics, *Proceedings of Lebedev Physics Institute* vol **176**, ed A. A. Komar (Commack: Nova Science) p. 53(1988).

- [86] V. V. Dodonov and Man'ko, V. I., Group theoretical methods in physics, Proceedings of the Second International Seminar, Svenigorod, vol **1**, eds M A Markov, V I Man'ko and A E Shabad (New York: Harwood Academic Publ.) p. 705(1985).
- [87] Barchielli, A., Continual measurements for quantum open systems, Nuovo Cim. B **74**, 113(1983).
- [88] H. e Valsakumar, M. C., A fundamental constraint on quantum mechanical diffusion coefficients, Phys. Lett. A **104**, 67(1984).
- [89] V. V. Dodonov and Man'ko, V. I., Integrals of motion, green-function, and coherent states of dynamical-systems, Int. J. Theor. Phys. **14**,37,(1975).
- [90] V. V. Dodonov and Man'ko, V. I., Integrals of motion, of pure and mixed quantum systems, Physica A **94** 403(1978).
- [91] V. V. Dodonov and Man'ko, V. I., Invariants and evolution of nonstationary quantum systems, Proceedings of Lebedev Physics Institute, vol **183**, ed M A Markov, (Commack: Nova Science) p. 263(1985).