Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma abordagem histórica, demonstrativa e investigativa de tópicos em Matemática no Ensino Básico

por

Lorranny Cruz Santos

Brasília

2019

Uma abordagem histórica, demonstrativa e investigativa de tópicos em Matemática no Ensino Básico

LORRANNY CRUZ SANTOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Ricardo Ruviaro

Brasília

2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CL876a

Cruz Santos, Lorranny
Uma abordagem histórica, demonstrativa e investigativa de tópicos em Matemática no Ensino Básico / Lorranny Cruz Santos; orientador Ricardo Ruviaro; co-orientador Vinicius Rispoli. -- Brasília, 2019.
95 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Ensino e aprendizagem. 2. Metodologias de ensino. 3. História da matemática. 4. Demonstrações matemáticas. I. Ruviaro, Ricardo, orient. II. Rispoli, Vinicius, co-orient. III. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma abordagem histórica, demonstrativa e investigativa de tópicos em Matemática no Ensino Básico

por

Lorranny Cruz Santos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de maio de 2019.

Comissão Examinadora:

Ricardo Ruviaro

Prof. Ricardo Ruviaro (Orientador)

Tarcísio Castro Silva

Prof. Tarcísio Castro Silva – MAT/UnB

Paulo Henrique P. da Costa

Prof. Paulo Henrique Pereira da Costa - MAT/UnB

"Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina"

Agradecimentos

Não poderia começar de maneira diferente: agradeço a Deus que é meu sustento de cada dia. Me dá forças a ânimo para continuar.

Agradeço ao meu esposo Paulo, que me compreendeu nos momentos de ausência, me incentivou em todos estes anos de estudo e me deu conselhos para que eu não desistisse.

Aos meus pais Laudicéia e Jonas e meu irmão Junio, que foram meu refúgio e abrigo em todos os momentos. Me acolhem e me dão todo o carinho. Sem eles, certamente não teria chegado até aqui.

Aos professores e coordenadores do PROFMAT, Andreia, Tatiane, Edson, José Eduardo, Rogério, Rui, Tarcísio e Vinicius que sempre se dispuseram a ajudar todos os alunos durante esta jornada.

Aos amigos que fiz durante estes dois anos no curso. Cada um contribuindo de alguma maneira para que os colegas não desistissem, com grupos de estudos virtuais e presenciais, até mesmo aos fins de semana e feriados. Sem vocês, estes anos seriam muito mais difíceis.

A todos os profissionais da escola que se dispuseram a participar do projeto, cedendo o espaço e materiais necessários para o seu pleno desenvolvimento. Desde à direção a todos os professores que sempre me incentivaram a concluir este curso.

Aos meus alunos que participaram da pesquisa. Obrigada por abraçarem o projeto e entenderem a importância dele para mim.

E ao meu orientador Ricardo Ruviaro, professor exemplar, que desde a graduação acompanhou meus estudos, em seguida me auxiliou no projeto PIC OBMEP e agora se dispôs a me orientar neste trabalho.

Resumo

Metodologias de ensino surgem a todo instante nas diversas áreas do conhecimento, e na Matemática não poderia ser diferente. Dentre estas metodologias destaca-se uma em particular que serve de embasamento para esta pesquisa: a utilização de demonstrações matemáticas com alunos do Ensino Fundamental.

As demonstrações matemáticas são, na maioria das vezes, utilizadas apenas no Ensino Superior. Mas neste trabalho, objetiva-se mostrar que é possível sim, abordar esta temática em sala de aula com alunos de nível básico, mais especificamente do Ensino Fundamental. Além de verificar as influências que esta metodologia pode acarretar para o aprendizado dos alunos nas aulas de Matemática.

Esta pesquisa também detalha como surgiram as demonstrações matemáticas e como se desenvolveram desde a antiguidade até hoje. E mostra a importância de incluir o estudo de história da Matemática nos currículos escolares.

Por outro lado, também apresenta os desafios encontrados no ambiente escolar e como os sujeitos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem devem exercer o seu papel para que as novas metodologias de ensino ganhem cada vez mais espaço neste cenário.

Palavras-Chaves: ensino e aprendizagem; metodologias de ensino; história da matemática; demonstrações matemáticas; raciocínio.

Abstract

Teaching methodologies arise all the time in the various knowledge areas. In mathematics it couldn't be different. Among these methodologies, one in particular stands out. This one serves as the holder for all this research: the use of mathematical demonstrations with middle school students.

Mathematical demonstrations are, most of the times, only used in higher education. But this research will show that it's plainly possible to approach this matter inside a classroom, with basic level students - middle school students. It also aims to verify the influence of this methodology over students learning skills during math class.

This research also details how mathematical demonstrations arose and how they developed from ancient times to today. And it shows the importance of including mathematics history in school syllabuses.

On the other hand, it also presents the challenges found in the school environment and how the subjects involved in the teaching-learning process should accomplish their role, so that new teaching methodologies may gain more and more space in this scenario.

Key-Words: teaching-learning; teaching methodologies; mathematics history; mathematical demonstrations; reasoning.

Lista de Figuras

Lista de Siglas

- ANA - Avaliação Nacional de Alfabetização
- ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio
- INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
- LDBEN - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
- OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas e privadas
- SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática
- SBM - Sociedade Brasileira de Matemática

Sumário

Introdução

O ensino de matemática na Educação Básica possui características bem peculiares. É notório observar como os professores de Matemática planejam as suas aulas. De um modo geral, eles começam com uma parte teórica, geralmente resumida (pois é praticamente impossível abordar todos os tópicos previstos nos extensos currículos e livros didáticos), trazendo fórmulas, propriedades ou teoremas importantes sobre aquele assunto. Em seguida resolvem uma série de exemplos, e por fim, passam uma lista de exercícios (bem parecidos com os exemplos, ou não) para verificar se o aprendizado dos alunos foi eficaz.

Porém, essa prática muitas vezes leva aos alunos pensarem que são apenas uma máquina de reprodução. Afinal, eles precisam resolver os exercícios exatamente como o professor resolveu os exemplos, pois se assim não o fizerem, sua solução estará errada (é o que eles pensam). E quando os exercícios não são exatamente como os que o professor resolveu, eles se desesperam, pois não sabem nem por onde começar (é o que eles afirmam).

Nesse sentido, observa-se uma dicotomia de pensamento, pois não é exatamente este o objetivo do professor. É claro que os alunos precisam saber executar os cálculos, mas esta é apenas uma parte do processo. O que geralmente os professores de Matemática desejam vai muito além de uma simples reprodução. Seu objetivo é que os alunos aprendam a raciocinar, interpretar, contextualizar e executar.

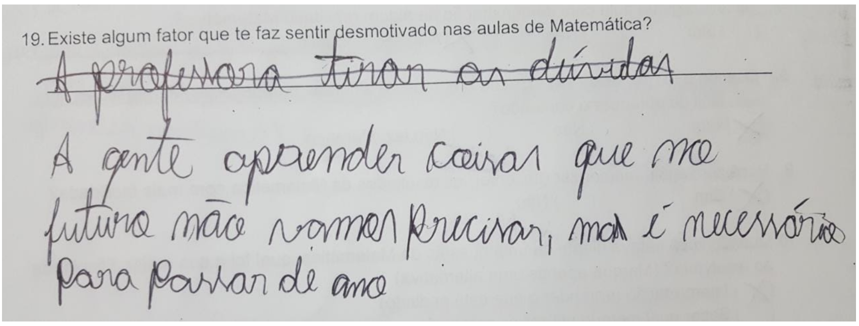
Mas aí surge um questionamento: *É possível incentivar os alunos a raciocinarem em uma aula totalmente engessada?*

Em outras palavras: Como é possível o professor de Matemática alcançar todos estes objetivos se mantiver a mesma postura de um ensino tradicional? Portanto, é necessário que o professor reflita se as suas metodologias estão contribuindo para que a aula seja um momento de reflexão e não apenas de transmissão. Ele deve conduzir a aula para que juntamente a seus alunos construam o raciocínio de maneira mútua.

Essa tarefa não é tão simples, pois os alunos já enxergam a Matemática com um certo preconceito. É como se existisse uma fala em seu subconsciente dizendo: *"Matemática é muito difícil"*, *"Você não consegue aprender matemática"*, *"Matemática não é para você"*.

Falas como estas muitas vezes são reproduzidas pelos próprios professores e de certa forma, aos alunos, fica uma sensação de que a Matemática é muito distante de sua realidade e que os resultados são muito difíceis de serem compreendidos.

Além disso, também deve ser levado em consideração a reclamação constante dos alunos sobre a falta de aplicabilidade da Matemática. Eles enxergam esta disciplina apenas como um algoritmo a ser seguido, ou como uma série de métodos sem fundamentos, que ele não utilizará em nada na sua vida, como pode se observar na figura abaixo


19. Existe algum fator que te faz sentir desmotivado nas aulas de Matemática?

~~A professora tirar as dúvidas~~

A gente aprender coisas que no futuro não vamos precisar, mas é necessário para passar de ano

Figura 1: Resposta 6

Os alunos estão acostumados a simplesmente aceitarem que os resultados matemáticos são verídicos sem entender o porquê. Os professores, em sua maioria, alegam: *"É muito complexo explicar isso para vocês. Apenas aceitem que é verdade"*. E obviamente, alguns alunos curiosos ficam decepcionados ao ouvirem isso. Afinal o que eles querem mesmo é saber a origem dos conhecimentos.

É fato que certos resultados não são cabíveis de demonstração em turmas de Nível Fundamental ou Médio, mas uma boa parte dos conteúdos, permite sim esta abordagem. Então por que os professores evitam levar demonstrações matemáticas para a sala de aula?

Ao conversar com alguns colegas de profissão sobre esta pergunta, as respostas foram as mais variadas: *"Não tem necessidade disso, os alunos não vão utilizar para nada"*, *"É muito difícil fazer eles entenderem, as aulas demorariam muito"*, *"Os alunos ficariam esgotados e achariam muito chato"* ou então *"Não me sinto seguro para fazer demonstrações com os alunos"*.

Estas respostas, foram devolvidas com uma reflexão: *"Mas você já experimentou desenvolver esse tipo de aula?"*. Talvez o que esteja faltando aos professores seja uma experimentação de novos métodos. Falta abrir o leque de possibilidades para fazer uma aula diferenciada. E mesmo que não dê certo, a tentativa já é super válida. Além disso, os alunos sempre valorizam uma aula que foge da rotina.

Portanto, a utilização de novas metodologias precisa ser uma tema de discussão pertinente ao ambiente escolar. As tecnologias e o avanço do mundo moderno têm feito com que o ensino metódico não conquiste tanto espaço quanto se tinha há trinta anos atrás, por exemplo.

Mas além das discussões é necessário prática, para isso é necessário refletir sobre como inserir estas novas metodologias na escola. Metodologias que não se submetam apenas ao ensino tradicional massificado, no qual o aluno é um mero ouvinte. Metodologias que tragam renovação ao planejamento do professor.

Diante disso, nasceu a motivação de elaborar uma pesquisa que retratasse as influências que uma nova metodologia pode acarretar nas aprendizagens dos alunos, durante as aulas de matemática.

As aulas do projeto funcionariam como um teste para verificar se a utilização de demonstrações matemáticas em sala de aula com alunos do ensino fundamental poderiam colaborar para o melhor entendimento e interesse da disciplina.

Para situar o leitor no desenvolvimento deste trabalho, descreve-se abaixo, resumidamente, os principais pontos de cada capítulo, para que a evolução da pesquisa seja acompanhada da melhor maneira possível.

Primeiramente, o contexto educacional precisa ser levado em consideração. Para isso o Capítulo 1 abordará todas as questões de educação que norteiam o processo de ensino e aprendizagem.

Os desafios encontrados durante a jornada do professor e do aluno são os temas norteadores para toda a discussão, além dos fatores que influenciam na aprendizagem, bem como as ferramentas e ambientes de aprendizagem que enriquecem o processo educacional.

Outro aspecto abordado no capítulo é sobre qual seria o real papel do professor, pois no ensino moderno o professor não se resume a um mero transmissor do conhecimento, mas pode ser visto como um sujeito que precisa criar uma relação instínseca com seu aluno.

Com relação ao ensino de Matemática, o capítulo também aborda quais aspectos podem corroborar para a sua eficácia, como: a utilização de demonstrações matemáticas, abordagem de história da matemática e também o uso de tecnologias.

O segundo capítulo disserta um pouco da história da Matemática, desde os babilônicos e egípcios, até a sua evolução na Grécia, com nomes imponentes como Tales e Pitágoras. Além disso, mostra o desenvolvimento das demonstrações matemáticas e como eram utilizadas na antiguidade.

Os tipos de raciocínio indutivo e dedutivo dentro das demonstrações matemáticas também são temas deste capítulo. Através da abordagem teórica, é levantado o seguinte questionamento: *É possível ensinar demonstrações matemáticas para alunos do ensino básico?*

Esta indagação foi a base para o tema escolhido neste trabalho, pois a partir daí se embasou toda a pesquisa e metodologias utilizadas para o desenvolvimento deste projeto. Metodologia esta, que será abordada no Capítulo 3, com o intuito de descrever o funcionamento do projeto, bem como o público e local escolhidos, além dos materiais utilizados.

Também detalha a motivação para se discorrer sobre o tema, além de explanar quais foram as metodologias utilizadas durante as aulas. E por fim, apresenta detalhadamente os conteúdos escolhidos e as atividades desenvolvidas em cada aula.

O Capítulo 4 objetiva analisar todos os resultados apanhados desde o primeiro dia em que o projeto foi apresentado aos alunos. Em detalhes, cada aula e atividade é relatada, fazendo-se a utilização de gráficos e imagens para a melhor compreensão do leitor.

Por fim, as considerações finais, vêm com o objetivo de compilar tudo o que foi analisado e tentar responder aos questionamentos feitos durante toda a pesquisa.

Capítulo 1

A Educação

Definir a palavra educação não é uma tarefa muito fácil. Em sua origem mais tradicional, a palavra é definida como "o ato de instruir", porém quando se trata de educação no âmbito escolar percebe-se que vai muito além disso. A educação está relacionada às práticas de ensinar e aprender ao mesmo tempo. Assim, os sujeitos envolvidos no processo educacional precisam estar dispostos a compreender e colocar em prática esta definição.

Nesse sentido então, vale a pena se falar sobre a educação de qualidade. Em um mundo tão globalizado, a qualidade da educação fica, muitas vezes, restrita à meros resultados satisfatórios. Para Moreira e Kramer em ([28], p.7), as visões de educação de qualidade acabam priorizando:

> desempenho satisfatório em exames nacionais; domínio de conhecimentos, habilidades e competências que se estabeleçam previamente; emprego de tecnologias avançadas; supervalorização da competitividade e da produtividade; novos métodos de gerenciamento de sistemas e instituições educacionais; procedimentos integrados e flexíveis no trabalho pedagógico.

Em outras palavras, é como se a escola estivesse preparando o aluno apenas para o mercado de trabalho. Mas esse deveria ser apenas um dos objetivos da educação e não o primordial. Pois a educação de qualidade vai muito além disso.

A educação de qualidade tem a ver com a escola que prepara o seu aluno para o mundo, para que ele se torne um sujeito ativo em seu ambiente. Nesta educação ideal, o sujeito não só absorve conhecimentos, mas ele também o transmite enquanto aprende. O aluno precisa se transformar em um sujeito ativo que fará a diferença em seu meio social, devolvendo todo o seu aprendizado em forma de conhecimento.

Mas diante dos ideias que se deseja alcançar, também se encontram os obstáculos, desafios e barreiras que norteiam este processo. Pois alcançar a educação de qualidade é uma tarefa árdua; é um processo que envolve dificuldades.

Destarte, a seção seguinte procura responder se é possível alcançar a educação de qualidade, em meio a tantos desafios, de maneira que a aprendizagem dos alunos não seja prejudicada.

1.1 Os desafios da educação

A imagem de educação vista pela sociedade pode ser definida como um conjunto de exercícios que fazem com que o indivíduo desenvolva habilidades para observar e decifrar os códigos das diversas linguagens, para que através dessas descobertas, ele avançe os seus conhecimentos nas áreas da ciência, tecnologia e arte, conforme David, *et al.* em [12].

Esse conceito, porventura, pode parecer utópico diante de um sistema educacional que foi flexibilizado demais a ponto de comprometer os objetivos dessa educação. Pode-se citar como exemplo a célere democratização das escolas públicas, no final do século XX[1] em que os números estatísticos passaram a ter mais importância do que a qualidade do ensino.

Diante disso, os desafios encontrados em sala de aula aumentam cada vez mais. Por um lado, o Estado, cumprindo seu papel legal, garante o acesso e permanência do aluno na escola, embora estes nem sempre sejam efetuados com sucesso; já que a aprovação automática tem se tornado cada vez mais comum no atual sistema educacional brasileiro. Nesse mesmo cenário o Estado tem se preocupado muito mais com os números e resultados estatísticas do que com a qualidade, ficando esta com maior atenção da escola. Aí entra um questionamento: Como alcançar uma educação de qualidade para os nossos alunos, diante desses contrapontos?

Por outro lado, a escola (equipe de profissionais), ao mesmo tempo que tenta responder a essa indagação buscando as melhores soluções, sofre com a falta de recursos organizacionais, como formação precária e baixa remuneração dos professores, carência de materiais pedagógicos (e que muitas vezes estão em péssimo estado), infraestrutura precária, autorresponsabilização por problemas de ordem social, dentre outros.

Também deve-se destacar o importante papel da família, o qual é sempre enfatizado na legislação educacional (juntamente ao Estado)[2]. Pois de nada adianta o Estado prover o acesso, a escola incluir o aluno e a família não acompanhar o rendimento do aluno ao longo do ano. Essa, talvez, seja uma das maiores reivindicações da escola, pois para que o processo educacional seja satisfatório é necessário um trabalho coletivo, com a colaboração de todos os segmentos da sociedade, como cita Bastos em [2].

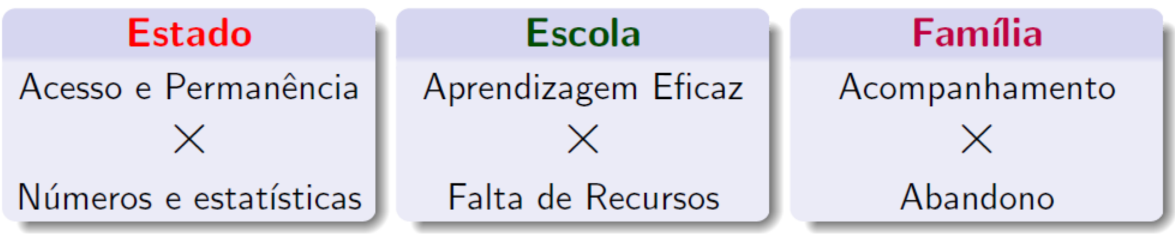


Figura 1.1: Estado, Escola e Família

Outro fator que não deve ser ignorado são algumas políticas públicas que acabam por criar responsabilidades impertinentes aos docentes e gestores. Dentre elas, pode-se citar os intrumentos de avaliações externas, padronizadas, em larga escala[3] que se apresentam como mecanismos capazes de mensurar a

[1] O termo democratização das escolas públicas é usado fazendo referência à inclusão da universalização do ensino fundamental nas legislações educacionais no final do século XX; embora segundo o educador Jorge Nagle, a democratização do ensino só acontecerá de fato quando houver qualidade.

[2] A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) traz em seu artigo 2º o seguinte texto: A educação, dever da **família** e do **Estado**, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

[3] Essas avaliações são desenvolvidas e aplicadas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio

qualidade do ensino. No entanto, essas ferramentas são bastante limitadas, pois como cita Silva e Souza em ([7], p.776):

> ... as políticas de avaliação em curso desconsideram uma variedade de determinantes da qualidade da educação, tanto intra quanto extraescolares, e responsabilizam a escola e o professor pelos baixos resultados.

Essas avaliações possuem o objetivo de traçar esratégias para criar e melhorar as políticas públicas voltadas para a educação [37], embora sejam limitadas em vários aspectos: primeiro, pois não retratam e nem consideram os problemas enfretados em sala de aula e o cotidiano da relação professor-aluno, segundo, pois nem sempre o conteúdo cobrado é o mesmo abordado em sala e por fim, criam uma certa pressão tanto ao aluno quanto ao professor; àquele, já que nem sempre alcança os objetivos de modo satisfatório e a este para que desenvolva métodos que melhorem o desempenho dos alunos.

Diante dos pontos apresentados, vale destacar que para enfrentar esses desafios e buscar soluções, é necessário que todos os envolvidos (professores e gestores, alunos, família, sociedade e Estado) assumam a sua parcela de responsabilidade e coloquem em prática aquilo que lhes foi incumbido.

Nesse contexto, Santos cita em [14], que é necessário observar essa problemática sob duas perspectivas: dialógica e tridimensional. Ele diz ([14], p.3) que:

> Existe uma estreita relação entre educação e sociedade e por isso é necessário pensá-la dentro de uma reflexão dialógica dela com as demais dimensões sociais. Ao mesmo tempo, esse diálogo acontece em três direções: olhar a escola a partir do tecido social[4], a partir dela mesma, de seu papel e suas finalidades e do educador, enquanto, sujeito-social-educador.

1.2 O ensino da Matemática

O ensino de Matemática da atualidade tem sido cada vez mais questionado pela propria comunidade de Educação Matemática. Professores têm feito uma autocrítica sobre como ensinar uma Matemática em que os alunos de fato aprendam, mais interativa, mais aplicável ao cotidiano.

É fato que as aulas expositivas (na lousa) ainda dominam esse ramo, já que se trata de uma disciplina muito mais abstrata do que História, por exemplo; pois se tratando da Matemática, uma aula oral nem sempre é suficiente. É necessário mostrar e demonstrar os resultados aos alunos, fazer exemplos e propor exercícios para que eles pratiquem aquilo que foi visto na aula. E esse método é o mais frequente utilizado pela maioria dos professores, mas será que essa prática é a única que pode levar ao aprendizado eficaz?

Ao tentar responder a esse questionamento, D'Ambrosio em [9], diz que essa ação pode desencadear uma série de consequências ao professor e ao aluno. Este, passa a acreditar que a Matemática se resume a um conjunto de fórmulas e regras que devem ser seguidas, como o professor ensinou; de modo que ele sempre tenta assimilar cada questão a um algoritmo ensinado em sala de aula e quando ele não encontra a "fórmula" para resolver aquele problema, ele se frusta. Complementando, D'Ambrosio destaca que ([9], p.1):

> É bastante comum o aluno desistir de solucionar um problema matemático, afirmando não ter aprendido como resolver aquele tipo de questão ainda, quando ela não consegue reconhecer

Teixeira (INEP), como exemplo: Avaliação Nacional de Alfabetização (ANA), Prova Brasil, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)

[4] O termo tecido social, também conhecido como capital social é utilizado para se referir aos aspectos sociais de uma comunidade, faz menção às relações entre os indivíduos e suas coletividades

> qual o algoritmo ou processo de solução apropriado para aquele problema. Falta aos alunos uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas, diferentes das propostas pelos professores.

Dessa forma, o aluno acaba por supervalorizar a veracidade dos conceitos matemáticos, acreditando que estes são inquestionáveis, pois ele pensa que todos foram descobertos por gênios. E isto faz com que o aluno perca a sua autoconfiança em buscar soluções não padronizadas, e que muitas vezes estão corretas. Mas na mente dele, só vale a que o professor ensinou, pois sem perceber, ele está inserido em um ambiente automatizado de decorar e repetir aquilo que lhe foi passado.

Em contrapartida, o professor acredita que, durante as aulas, o aluno está aprendendo a raciocinar e não simplesmente reproduzir. Mas muitas vezes, o que o professor está fazendo é apenas replicando o método de "Quanto mais se faz, mais se aprende". E nesse processo, o aluno continua se vendo como uma figura meramente observadora e passiva, enquanto o professor se torna o sujeito ativo, detentor do conhecimento.

Outro fator importante é a preocupação que o professor carrega de terminar o conteúdo a qualquer custo. Essa prática, frequentemente, implica a uma transmissão de conhecimento acelerada, sem muito foco naqueles tópicos que são mais relevantes. Dessa forma, o professor acaba nem percebendo se de fato o aluno teve o maior aproveitamento possível, ou se o aprendizado foi produtivo.

Assim sendo, o processo de ensino-aprendizagem ideal, para D'Ambrosio (1989), seria aquele em que o aluno se torna o sujeito ativo, investigador, criativo e que descobre o conhecimento juntamente ao professor, que passa a ser um orientador e monitor das atividades. Ainda destaca algumas propostas (que serão descritas nas próximas seções) que fazem com que o aluno ganhe esse papel de destaque no processo educacional.

1.2.1 Resolução de problemas e Modelagem Matemática

A resolução de problemas já é uma tática muito adotada por alguns professores. Nela, o professor propõe desafios e permite que o aluno interprete, investigue e tente resolvê-los utilizando conceitos prévios e sua experiência até aquele momento. O objetivo é que através dessa investigação ele aprimore o seu conhecimento de modo a alcançar novas definições.

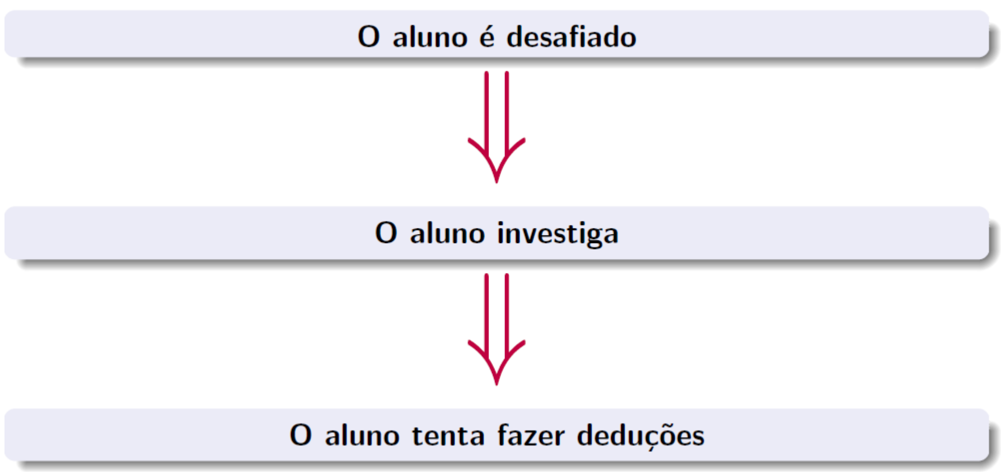


Figura 1.2: Resolução de problemas

É fato que nesse método, o processo de aprendizagem se torna um pouco mais lento, já que o professor proporciona uma experiência ao aluno, na qual ele será o sujeito ativo, sairá de sua zona de conforto e não esperará por respostas prontas, mas buscará suas próprias soluções, mesmo que informalmente. A ideia é que, com o passar do tempo essas concepções informais, deixem de ser apenas conjecturas e se tornem evidências, através do raciocínio dedutivo (será melhor detalhado na seção 2.2.2).

E vale também destacar que nem sempre será um processo satisfatório, pois nem todos os alunos estão dispostos a se submeterem a este procedimento, visto que a maioria está acostumada com aquilo que já foi citado anteriormente: o comodismo de esperar as fórmulas e regras que o professor passará no quadro.

Neste contexto, entra a modelagem matemática, que segundo Barbosa, em ([1], p.5) é:

> ... uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento.

O intuito é que o aluno seja mais consciente sobre a utilidade da Matemática em seu cotidiano e que ele encontre caminhos para ligar os conceitos da matemática formal à sua aplicabilide no dia a dia.

1.2.2 O ensino de História da Matemática

A história da Matemática é uma área importantíssima a ser trabalhada em sala de aula, embora ainda não tenha ganhado o seu devido espaço no processo de ensino-aprendizagem. Essa defasagem muito se dá pela formação deficiente dos professores, dado que essa disciplina nem sempre está inclusa nos currículos de licenciatura em matemática. Sendo assim, os professores acabam deixando de lado a sua abordagem durante as aulas.

D'Ambrosio (1989) defende em [9] que estudar história da Matemática leva a uma melhor compreensão dos conceitos, pois ao passo que o aluno vai conhecendo a história, ele desperta uma curiosidade intrínseca que o conduz a um maior interesse no decorrer das aulas. Interesse esse que é o primeiro passo para provocar a motivação nos estudantes.

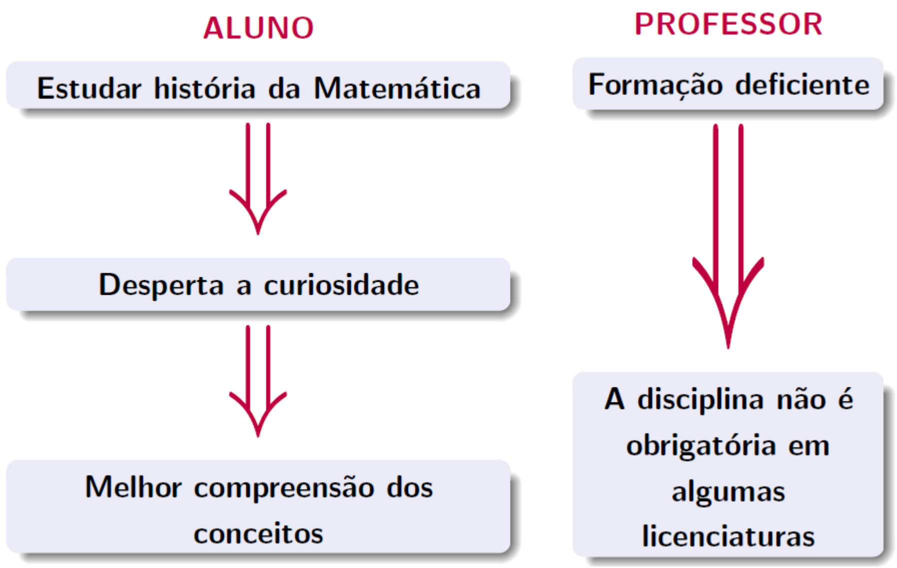


Figura 1.3: História da Matemática

Por outro lado alguns autores acreditam que embora o ensino de História na Matemática seja crucial, ele não tem esse poder todo de motivação, pois se fosse assim, o ensino da própria História seria automotivador ([26], p.24), e isso não é um fato atestado pelos professores de História.

Schubring acredita que

> ... a motivação histórica estaria associada diretamete à cultura e à sociedade, não podendo ser encarada da mesma forma para todos os países, em todos os momentos históricos. ([26], p.25)

Nesse sentido, é importante ressaltar que o ensino de História da Matemática se passa em duas perspectivas: a primeira é a produção histórico-cultural do conhecimento construído do passado até o momento e a segunda, do conhecimento atual e as formas de apropriação dessa cultura produzida, através da investigação acadêmica e das práticas pedagógicas [26]. Portanto, o estudo da história matemática está totalmente ligado à etnomatemática[5].

Sob uma visão cronológica, pode-se dizer que a importância que se dá à história da matemática hoje é graças aos movimentos e lutas do passado. No início do século XX (no Brasil), alguns pesquisadores acreditavam que o uso da história-anedotária[6] poderia ser uma espécie de renovação da educação brasileira; pois era uma momento de ampla discussão sobre o ensino de História nas aulas de Matemática. Discussões estas, que fizeram surgir o *Movimento da Escola Nova*[7]

Já no fim do século XX, também contribuindo para essas discussões, surgiu a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) trazendo muitas conquistas para a comunidade de educação matemática, pois até então só existia a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Nesse contexto, Pereira ([31], p.24) ainda reforça que:

> ... o processo de criação efetiva da SBEM, segundo o nosso entendimento, foi eminentemente democrático. A necessidade de se criar uma Sociedade de Educação Matemática como contraponto à já existente, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), também se localiza nesse contexto, tanto do ponto de vista da organização interna, quanto das concepções mais gerais sobre Educação.

Sendo assim, pode-se perceber que vários fatores políticos, sociais e culturais influenciaram e ainda influenciam no processo de ensino-aprendizagem da matemática, mas a história ainda merece o seu lugar de destaque nesse processo, pois é importante aos alunos compreenderem que *"a matemática não cai do céu"* ([26], p. 28).

1.2.3 O uso de tecnologias

O uso de tecnologias na educação é um assunto muito discutido atualmente, pois cada vez mais a sociedade tem se globalizado e desenvolvido novas ferramentas tecnológicas. Com isso, os jovens sempre querem acompanhar este avanço, de modo a não perder nenhuma novidade. E aí entram dois questionamentos: Como a escola, enquanto ambiente educacional pode se inserir nesse processo? E como tornar a tecnologia na educação um tema agradável e convidativo aos alunos?

[5] A etnomatemática é um ramo que estuda a relação histórico-cultural da matemática. Segundo D'ambrosio (2002) em [10], a etnomatemática se desenvolve a partir do processo de evolução dos entendimentos matemáticos, através dos encontros culturais dos diversos grupos sociais.

[6] Os defensores da abordagem história-anedotária acreditam que o ensino de história durante as aulas de matemática, de forma episódica, possui um papel de descontrair e relaxar os alunos, em meio à exaustão do esforço exigido pela aprendizagem da Matemática, segundo Miguel e Miorim em [26].

[7] Esse movimento - que ganhou bastante força na primeira metade do século XX - defendia o pensamento liberal, em que a educação era o único meio para se construir uma sociedade verdadeiramente democrática.

Para responder a essas perguntas é necessário analisar que, primeiramente, a escola precisa passar por mudanças estruturais e pedagógicas a partir do momento em que as tecnologias forem inseridas neste ambiente. A mudança estrutural é fundamental para uma utilização adequada das tecnologias, pois os materiais, equipamentos e salas adaptadas são apenas alguns dos recursos que passarão a integrar o ambiente escolar; e esses recursos precisam de um suporte adequado para que sejam bem aproveitados.

Por outro lado, as mudanças pedagógicas, que também fazem parte deste processo, perpassam tanto no âmbito teórico quanto na prática em sala de aula. No âmbito teórico é necessário rever o currículo, enquanto instrumento que retrata questões de classe, de conteúdo e relação professor-aluno, ele precisa ser adaptado para que a inserção de tecnologias seja acessível a todos. Na prática, tudo aquilo que foi ordenado no currículo deve encontrar amparo para sua efetivação em sala de aula.

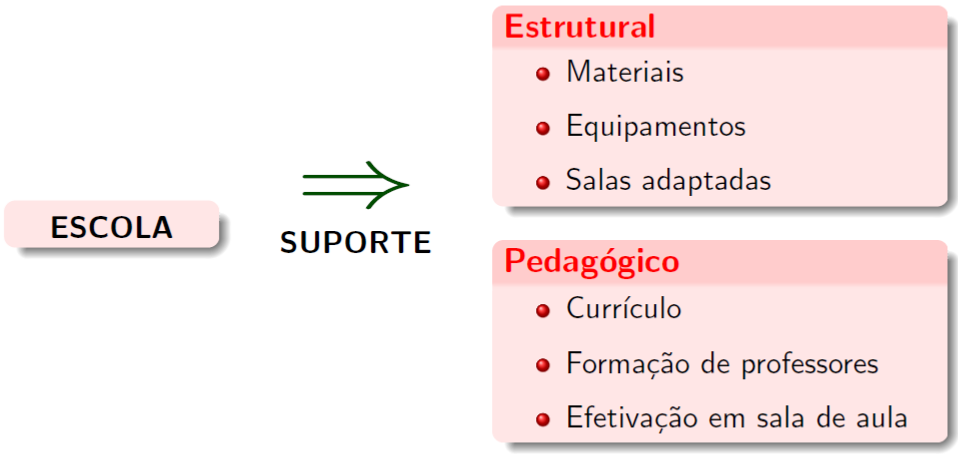


Figura 1.4: Suporte escolar

Para isso é imprescindível que o professor atue como um sujeito maleável, como reforça Moreira em ([28], p. 1041):

> Na educação, o comportamento flexível é tanto demandado dos professores quando difundido, como habilidade a ser adquirida, aos estudantes, futuros trabalhadores. Estimula-se o professor, por diferentes meios, a adaptar-se a circunstâncias variáveis, a produzir em situações mutáveis, a substituir procedimentos costumeiros (às vezes repetitivos, às vezes bem-sucedidos) por "novas" e sempre "fecundas" formas de promover o trabalho docente. Deseja-se um professor disposto a correr riscos e a investir em sua atualização.

Se o professor exerce esse papel flexível em sala de aula, trazendo sempre novidades, explorando novos meios tecnológicos de transmitir o conhecimento; o aluno deixa de ser apenas o sujeito receptor e passa a se sentir mais integrado às aulas, pois a tecnologia faz parte do seu cotidiano. Seja por meio de um jogo, ou uma aula com computadores; o fato é que a relação do aluno com estes meios, segundo D'Ambrosio em ([9], p.5):

> ... tem o poder de dar ao aluno a autoconfiança na sua capacidade de criar e fazer matemática. Com essa abordagem a matemática deixa de ser um corpo de conhecimentos prontos e simplesmente transmitidos aos alunos e passa a ser algo em que o aluno faz parte integrante no processo de construção de seus conceitos.

Portanto, é necessário sim que o ambiente escolar utilize da tecnologia como mais uma ferramenta que pode auxiliar nas aprendizagens dos alunos, pois com a modernização da sociedade, a escola (como um local inserido neste contexto) precisa se modernizar também.

1.3 Fatores que influenciam na Aprendizagem

A aprendizagem, para Tapia e Fita em ([36], p.67) é definida como:

> ... a mudança que se produz num sistema que chamamos aluno ao passar de um estado inicial a um estado final.

De um modo sistemático, a aprendizagem é um processo de interação com o meio, na qual o aluno observa, assimila e processa os estímulos exteriores - os estímulos, neste caso, podem ser os conteúdos abordados pelo professor-. Em seguida, ele internaliza os estímulos de modo organizacional para serem incorporados em seus esquemas cognitivos [36].

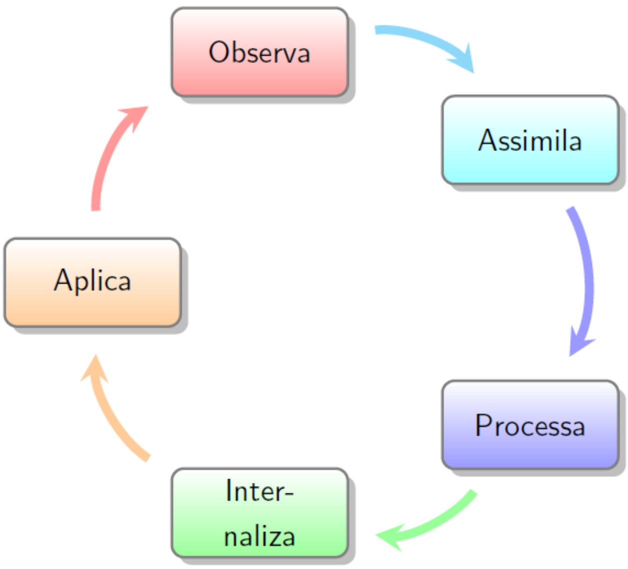


Figura 1.5: Aprendizagem

Para Vigotsky, em [16], o desenvolvimento da criança possui bastante influência das aprendizagens que ela adquire com os sujeitos mais experientes.

Neste sentido, vale ressaltar a diferença entre desenvolvimento e aprendizagem. Ainda segundo Vigostsky, as aprendizagens adquiridas no decorrer da vida impulsionam o desenvolvimento de novas habilidades, e através das novas habilidades o sujeito está aprendendo mais, de modo que este ciclo nunca se finda.

Isso mostra como o desenvolvimeto e as aprendizagens estão ligados à cultura em que a criança está inserida. E nesse âmbito, ele também reforça a ideia da imitação, já que os sujeitos mais novos estão sempre buscando referências nas vivências dos sujeito mais velhos da socidade.

No contexto escolar, essa ideia se reforça quando um estudante, ao resolver um problema, tenta imitar seu professor, dentro dos seus próprios níveis cognitivos. Raramente, o aluno pensará em um resolução diferente da que foi exposta em sala de aula, por exemplo.

Este caso mostra a importância da relação professor-aluno no processo de ensino-aprendizado e como este se vê fortemente influenciado por aquele. Mas afinal, além da figura do professor (que será melhor abordada na seção 1.6), quais são os outros fatores que influenciam nesta aprendizagem?

Para tentar responder este questionamento, alguns destes fatores serão detalhado nas seções posteriores.

1.3.1 Motivação

A motivação pode ser definida como o impulso necessário para fazer o ser humano agir, resumidamente é o *motivo para a ação*. No contexto educacional, é válido e imprescindível considerar a motivação como um fator de influência no processo de ensino-aprendizagem. Para Lourenço e Paiva, em ([25], p.132):

> ... a relação entre a aprendizagem e a motivação vai além de qualquer pré-condição estabelecida, ela é recíproca e, dessa forma, a motivação pode produzir um efeito na aprendizagem e no desempenho, assim como a aprendizagem pode interferir na motivação.

Essa relação motivação-aprendizagem acontece, pois o aluno motivado procura novos conhecimentos [25]. Intrinsecamente, ele é mais curioso e entusiasmado, e esse comportamento gera um maior interesse, o qual amplia as oportunidades para se obter uma aprendizagem mais eficaz.

Por outro lado, à medida que o aluno aprende estes conhecimentos, ele se sente mais realizado (com uma sensação de missão cumpurida) neste processo de ensino-aprendizagem, pois os seus objetivos são alcançados e ele percebe que aqueles coteúdos que pareciam desafiadores, não são tão difíceis quanto ele imaginava. Com isso, a sua motivação interior para aprender cada vez mais novos conhecimentos aumenta. E esse ciclo motivação-aprendizagem volta a se repetir.

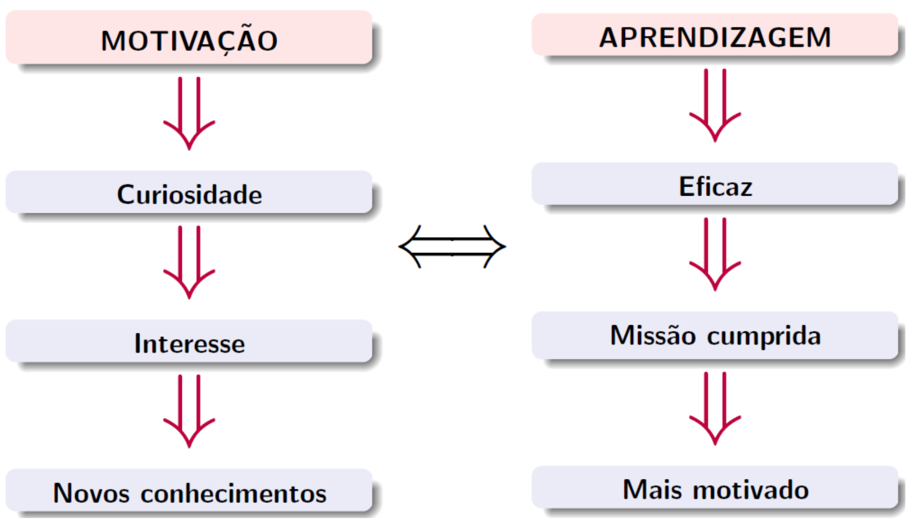


Figura 1.6: Motivação e Aprendizagem

Vale ressaltar ainda que a motivação está totalmente ligada ao contexto em que o aluno está inserido e às metas as quais ele deseja alcançar. A saber: um aluno que busca apenas a aprovação no final do ano se comportará de modo diferente daquele que está buscando compreender os conteúdos, como cita Tapia e Fita em [36], p.14.

Mas nesse jogo de interlocuções, surgem os obstáculos a serem enfretados, pois no contexto escolar o aluno se encontra diante de processos cognitivos que dificilmente são capazes de motivá-lo. Dentro destes processos, Lourenço e Paiva [25] citam tarefas como atenção, concentração, processamento de informações, raciocínios e resolução de problemas; e ainda ressaltam em p.134 que:

> ... aplicar conceitos gerais sobre a motivação humana no ambiente escolar não seria muito adequado sem a consideração das particularidades deste ambiente.

Tendo consciência dessa complexidade, o professor precisa assumir o papel de motivador, mas para isso é necessário, primeiramente, que ele esteja motivado em sua profissão, pois o seu entusiasmo terá forte influência na motivação dos seus alunos. Os alunos, ao perceberem que o professor exerce suas tarefas com prazer, se sente ao menos constrangido a retribuir da mesma forma. Enquanto um professor desmotivado dificilmente conseguirá fomentar o interesse dos alunos em suas aulas.

Ao assumir esse papel, o professor se torna um mediador entre os obstáculos, anteriormente citados, e os alunos. Nesse sentido ele deve tentar solucionar as dificuldades que os alunos encontram durante o processo de ensino-aprendizagem utilizando novas metodologias como uma aula mais interativa, com jogos, músicas, desafios e competições, que também são ótimos instrumentos de estímulo. O professor precisa investigar a turma e decidir a melhor estratégia para planejar e desenvolver a aula de modo que seus alunos possam ser mais participativos nesse processo.

Contudo é válido enfatizar que o professor também enfrenta desafios em seu percurso educacional e muitas vezes a motivação que ele carrega consigo acaba se desgastando no decorrer do tempo, visto que a desvalorização e a desmoralização desses profissionais têm sido cada vez mais mais recorrentes. Tapia e Fita destacam em ([36], p.89):

> Portanto é urgente valorizar o ofício de professor. O governo, as escolas e os próprios professores devem considerar isso o objetivo primordial. Caso contrário, encontraremos professores cada vez mais desmotivados que não serão psicologicamente capazes sequer de abordar o problema da motivação de seus alunos.

É fato que ainda existem muitas barreiras a serem vencidas para se solucionar o problema da motivação em sala de aula. Mas essa discussão não pode ser ignorada, pois a motivação é um critério determinante para mensurar o nível e qualidade do desempenho e aprendizagem dos alunos, segundo Lourenço e Paiva [25]. Pois o aluno motivado está sempre tentando vencer seus desafios para aperfeiçoar cada vez mais seus resultados.

1.3.2 Pré-requisitos

Quando se fala do ensino de Matemática nas escolas, muitas queixas são levantadas pelos professores no que diz respeito ao fracasso escolar dos alunos nesta disciplina. Dentre os questionamentos - alguns já mencionados na seção 1.1 - entra a questão dos pré-requisitos ou a falta deles.

Segundo Piaget, citado por Visca em ([38], p.47):

> A inteligência não é inata nem adquirida, mas sim o resultado de uma construção devida à interação das pré-condições do sujeito e às circunstâncias do meio social.

Sendo assim, para falar deste assunto é necessário que, primeiramente, o professor observe a realidade de cada aluno, o seu histórico escolar e o ambiente em que ele está inserido socialmente, pois cada um traz consigo diversidades culturais que influenciam fortemente no seu aprendizado.

O primeiro contato que o professor tem com o seu aluno - seja através de uma conversa, de uma atividade ou de uma avaliação diagnóstica - é muitíssimo importante para se observar quais são essas inteligências que o aluno adquiriu durante a sua vida escolar. Neste momento, é muito comum aos professores (de matemática, principalmente) observarem quais são os alunos que possuem uma certa facilidade com a disciplina e aqueles que nem tanto.

Aí o professor começa a se questionar: *"Por que esse aluno tem tanta facilidade com Matemática?"*, *"Que experiências ele teve com a Matemática?"*, *"O que o fez não gostar de Matemática?"*, *"Será que ele é muito dedicado aos estudos em casa?"*. De um modo geral, percebe-se que estes questionamentos já trazem consigo uma boa parte das respostas que o professor procura.

Assim, é possível perceber que não são apenas os fatores internos ao ambiente escolar que influenciam nas habilidades e competências que o aluno adiquiriu com o passar do tempo, mas fatores externos também são de extremamente relevância e devem, sim, ser considerados no processo de ensino-aprendizagem.

Portanto, ao se deparar com situações em que o aluno não possui os pré-requisitos necessários para absorver um determinado conteúdo, o professor como um investigador, precisa sondar quais foram as experiências que aquele aluno teve com a matemática e o porquê de tal defasagem. Para aí então, tentar solucionar o problema em sua essência.

Neste sentido, Lorenzato evidencia em ([24], p. 27) que:

> Ninguém vai a lugar algum sem partir de onde está, toda aprendizagem a ser construída pelo aluno deve partir daquela que ele já possui, isto é, para ensinar, é preciso partir do que ele conhece, o que também significa valorizar o passado do aprendiz, seu saber extra-escolar, sua cultura primeira adquirida antes da escola, enfim, sua experiência de vida.

É fato que durante a vida escolar, os estudantes vão acumulando conhecimentos e habilidades que podem ir se perdendo com o tempo. E como não poderia ser diferente, na matemática este efeito pode gerar prejuízos mais complicados no futuro; pois como ressalta Imenes em [23], o ensino da matemática utilizado por boa parte dos professores segue o modelo de formalização de Euclides, o qual pode ser comparado ao ato de *subir uma escada*. Para evidenciar esta afirmação, ele exemplifica em p.5

> ... se o conteúdo A é pré-requisito lógico (no sentido euclidiano) para B, então A vem antes de B.

Por conta dissso, uma grande parcela dos alunos sempre alegam que não conseguem aprender matemática, e uma certa parte deste problema é por conta da formalização que é adotada, na qual: se o aluno não aprendeu o conteúdo A, então não coseguirá aprender o conteúdo B. E isso acaba gerando uma frustração por parte do aluno, pois no momento em que o professor avança para o conteúdo B e ele nem compreendeu o A ainda, ele se sente abandonado no processo de ensino-aprendizagem.

Portanto, cabe ao professor tentar resgatar este aluno, para que ele não se sinta cada vez mais desmotivado e alegando que não consegue aprender matemática (como já foi citado). É neste momento que o professor - ao perceber que aquele aluno ficou para trás - precisa agir; seja com uma revisão, uma atividade diferenciada ou até mesmo indicando aquele aluno para uma aula de reforço.

O que não pode se perder no construção da aprendizagem é a disposição e dedicação do aluno para aprender, e a sensibilidade do professor de notar as dificuldades do seu aluno e tentar solucioná-las sempre que possível, para que ele se sinta, realmente, como sujeito ativo neste processo.

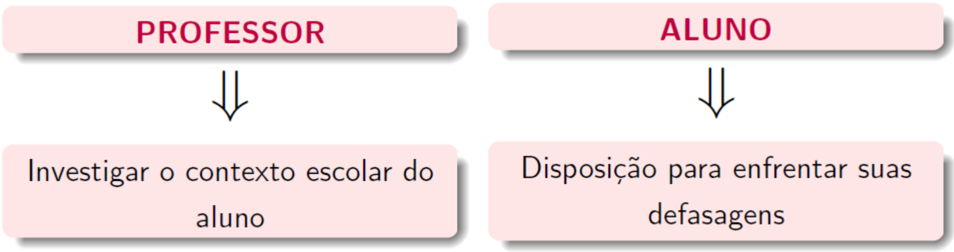


Figura 1.7: Pré-requisitos

1.3.3 Interdisciplinaridade

A interdisciplinaridade pode ser entendida como um diálogo entre várias disciplinas. Ela é construída na busca de uma globalização do conhecimento, de modo que cada disciplina seja respeitada dentro de suas particularidades, mas no processo de integração elas se encontram para a formação de novos conhecimentos.

Segundo Bonatto *et al.* em ([3], p.4):

> Na perspectiva escolar, a interdisciplinaridade não tem a pretensão de criar novas disciplinas ou saberes, mas de utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista.

Por este lado, pode se dizer que a interdisciplinaridade está totalmente ligada à aplicabilidade do conteúdo (tópico que será melhor abordado posteriormente), pois se o aluno percebe que os conteúdos de história podem ser aplicados nas aulas de matemática, por exemplo; ele consegue articular a produção do conhecimento à realidade. Portanto, é imprescindível que o professor empregue a interdisciplinaridade em sala de aula, sempre que possível.

Uma maneira de se abordar tal tema é utilizar do momento da coordenação pedagógica para planejar de que maneira cada professor pode incluir temas interdisciplinares em sala de aula. E não só na sala de aula propriamente dita, mas também com projetos que envolvam toda a escola e a comunidade escolar.

Neste âmbito, também vale ressaltar a importância da transversalidade, que está totalmente ligada a essa discussão. Aqui, a transversalidade tem como objetivo abordar temas do cotidiano, relacionados à valores básicos para o exercício da cidadania, dentro do ambiente escolar. Questões pertinentes à ética, saúde, meio ambiente, tabalho, consumo, dentre outros, são alguns dos temas transversais abordados nos PCN's.

O aluno precisa entender que os ensinos da sala de aula não estão desconectados da sua relidade. O seu aprendizado não deve ser somente para uma formação intelectual ou para o exercício de uma profissão, mas também para o seu bom convívio em sociedade; daí a seriedade de se abordar estes temas na escola.

1.3.4 Aplicabilidade do conteúdo

Ao se falar em aplicabilidade do conteúdo, a primeira pergunta que os alunos fazem é: *"Quando vou usar isso na minha vida?"* ou *"Isso é mesmo importante, professor?"*. Esses questionamentos são muito recorrentes em sala de aula, principalmente nas aulas de Matemática, pois os alunos têm uma impressão de que a Matemática está muito distante de sua realidade. E esse pensamento que eles carregam consigo, tem uma certa influência da postura dos próprios professores, já que na maioria das vezes as aulas de

Matemática se resumem àquele ensino tradicional, no qual o aluno é um mero observador e apenas repete o que o professor ensina. Reforçando cada vez mais que a matemática é uma disciplina puramente metódica, sem aplicabilidade.

Vale ressaltar que a Matemática é uma ciência muito antiga, que foi se desenvolvendo no decorrer dos anos. As necessidades que existiam no passado não são as mesmas da atualidade e isso é um fator primordial para se discutir a importância que a sociedade dá à Matemática hoje. Dessa forma, dificilmente os alunos irão encarar a Matemática como algo útil em suas vidas. D'Ambrosio (2009) ressalta em ([11], p.31) que:

> É muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta.

Ainda segundo D'Ambrosio (2009), o "problema" da geração atual é o imediatismo, pois o que interessa à criança e ao jovem são seus objetivos materiais e intantâneos. Por isso em todo tempo eles estão se questionando se a Matemática é realmente útil em suas vidas. Por outro lado, existem raros casos de alunos que buscam um desafio intelectual, estes, diferente daqueles procuram estudar a matemática em todo seu contexto cultural e histórico, se aprofundando em conhecimento e não simplesmente como algo aplicável ou não.

Nesse aspecto, talvez o grande desafio para o professor, ao enfrentar essa realidade, seja mostrar aos alunos que é necessário ter um equilíbrio entre a busca pelo imediatismo e o desafio intelectual. Fazer eles perceberem historicamente como a matemática se desenvolveu, a importância que ela tinha no passado e como isso implica diretamente no contexto atual.

Em alguns casos, o professor, ao ensinar determinado conteúdo, está sempre buscando justificativas internalistas[8], como: *"Você precisa aprender produtos notáveis para utilizar em equações de 2º grau"*. É como se a aplicabilidade de um conteúdo se justificasse apenas na utilização de um outro. Por outro lado, o aluno ao fazer aqueles questionamentos citados anteriormente, não está procurando esse tipo de resposta do professor, mas sim, justificativas contextualizadas (externalistas).

Essa talvez seja uma das maiores causas do desinteresse dos alunos em sala de aula, pois ao perceberem que um conteúdo estudado não terá relevância alguma em seu futuro, nem se esforçarão para aprendê-lo ou deixarão cair no esquecimento.

Uma maneira de despertar o interesse dos alunos pela matemática é utilizando aulas práticas, nas quais ele seja o protagonista e realmente faça parte do desenvolvimento da aula. Por exemplo, um professor que leciona o conteúdo de *Semelhança de Triângulos* em turmas de 9º ano pode fazer uma aula externa em que os alunos consigam medir a altura da escola, apenas com a utilização de sombras. Em grupos de 3 alunos, o professor pede que um deles meça o comprimento da sombra que a escola faz no chão; e em paralelo os outros dois medirão a altura de um deles e o comprimento da sombra que este faz no chão (no mesmo momento em que se mede a sombra da escola). Com estas medidas, agora em sala de aula, o professor pode solicitar aos alunos que façam um esboço colocando todas as medidas no papel, utilizando triângulos retângulos. Em seguida, os alunos precisam aplicar o conteúdo (que já deve ter sido introduzido previamente) a essa situação-problema e depois compararem resultados com outros grupos.

[8] A posição filosófica que defende o internalismo acredita que os fatores internos são necessários e suficientes para a justificação dos fatos, enquanto a vertente externalista defende que os fatores internos são apenas necessários (e não suficientes) para essa justificação.

Essa aula é um ótimo exemplo de como mostrar aos alunos a aplicabilidade de um conteúdo estudado. Esse tipo de vivência dá um incentivo a mais aos alunos, principalmente àqueles que estavam totalmente desinteressados, alegando que matemática "não entra na sua cabeça".

É fato que nem todos os conteúdos possuem uma aplicação tão prática quanto este exemplo citado acima. Mas se o professor buscar ferramentas sempre que possível, mesmo que seja uma vez ao bimestre, isso já fará total diferença em suas aulas; pois os alunos percebem quando o professor se esforça para trazer uma aula diferenciada e com certeza retribuirão com dedicação e maior participação.

1.3.5 Currículo e Avaliação

Ao se falar de aprendizagem é inevitável a abordagem sobre currículo e avaliação, visto que esses três conceitos são interdependentes neste âmbito. Essa relação se dá, a princípio, pois as aprendizagens e os objetivos a serem alcançados pelos alunos são determinados por meio de um currículo e são validados mediante uma avaliação.

O currículo, enquanto instrumento flexível no processo de ensino-aprendizagem, deve se fundamentar naquilo que é essencial para este processo. Nesse sentido, não é possivel falar de currículo sem abranger aspectos culturais, sociais e históricos do ambiente em que os alunos estão inseridos.

Ao se elaborar um currículo, a princípio o que se leva como objetivo principal são os conteúdos que devem ser absorvidos pelos alunos, visto que o ensino brasileiro ainda segue um viés muito tradicional e conteudista. O professor, por um lado, tenta vencer aqueles tópicos, na maioria das vezes de forma acelerada; e mesmo assim, quase nunca consegue concluir tudo o que precisa. O aluno, por outro lado, serve como um "depósito de informações" e se vê na obrigação de conseguir acompanhar aquelas aulas a qualquer custo, senão ele fica para trás.

Neste embrólio, está faltando uma reflexão (principalmente no âmbito do corpo pedagógico) sobre o que realmente é importante para aquele aluno. Será que as aulas conteudistas ainda são as mais eficazes diante de uma realidade tão moderna em que os alunos estão submetidos? O excesso de informações ensinadas de forma superficial são absorvidos com eficiência por estes alunos?

Estes questionamentos precisam nortear o processo de construção e elaboração de um currículo. Aqui, podemos destacar o currículo como objeto social, pois como foi mencionado anteriormente as questões externas ao ambiente escolar são de extrema relevância para esta discussão.

Mas então afinal, qual seria o currículo ideal? A SEEDF, por exemplo, propõe, em ([34], p. 21):

> O currículo como um instrumento aberto em que os conhecimentos dialogam entre si, estimulando a pesquisa, a inovação e a utilização de recursos e práticas pedagógicas mais criativas, flexíveis e humanizadas.

Na prática, o currículo precisa estar intrinsecamente relacionado não somente às competências e saberes que o aluno precisa obter, mas também aos valores, práticas e costumes que serão abordados no ambiente escolar. Ressaltando, aqui, a importância de se conciliar os aspectos de um currículo formal[9] a um currículo real e universal, que perpassa os muros da escola, através de projetos pedagógicos - por exemplo - que envolvam a comunidade escolar nas atividades internas da escola.

Nesta perspectiva também é necessário refletir sobre a Avaliação como um instrumento essencial no processo de ensino-aprendizagem, pois é através dela que os conhecimentos são validados. De antemão,

[9] O currículo formal é um documento elaborado pelos sistemas educacionais de ensino com uma lista de conteúdos e que deve ser utilizado pelos professores em sala de aula. Também é conhecido como currículo prescrito.

já é importante falar que a Avaliação mencionada aqui não se resume apenas à aplicação de provas para a atribuição de uma nota final.

A avaliação é um dos componentes do processo de ensino que tem como objetivo averiguar, de forma qualitativa e quantitativa, as aprendizagens adquiridas pelo aluno e comparar com as que ele ainda não alcançou. Também pode se dizer que a avaliação é um retorno fundamental ao professor para a elaboração de novas estratégias a fim de que o aluno obtenha as habilidades necessárias.

Primeiramente, pode se destacar três tipos de avaliação: diagnóstica, formativa e somativa. A diagnóstica é aquela que se dá no início do processo, com o objetivo de sondar os conhecimentos prévios que o aluno já possui. Ela serve como um norte para todo o planejamento de aula do professor, pois é neste momento que ele irá observar as características e especificades de cada turma e/ou aluno.

A avaliação formativa (também conhecida como processual) é realizada ao longo de todo o processo. É a mais abrangente das três, pois todos os registros sobre o que os alunos estão realmente aprendendo e as estratégias que o professor utilizará para que ele possa alcançar os objetivos serão avaliados neste momento; seja através de uma tarefa realizada, um trabalho apresentado, uma resposta em um exercício, dentre outros. Toda a participação em sala de aula será considerada na avaliação formativa.

Por fim, entra a avaliação somativa que possui uma característica de controle tanto para os pais como para a escola a fim de saber o que realmente os alunos aprenderam durante o processo. Esta avaliação é realizada no fim do percurso educacional e geralmente se utiliza de notas para registrar as metas alcançadas.

É importante ressaltar que todas as formas de avaliação devem ser consideradas pelo professor, pois a avaliação não serve apenas como um *feedback* dos resultados obtidos pelos alunos, mas também como uma reflexão sobre a prática docente do professor em sala de aula.

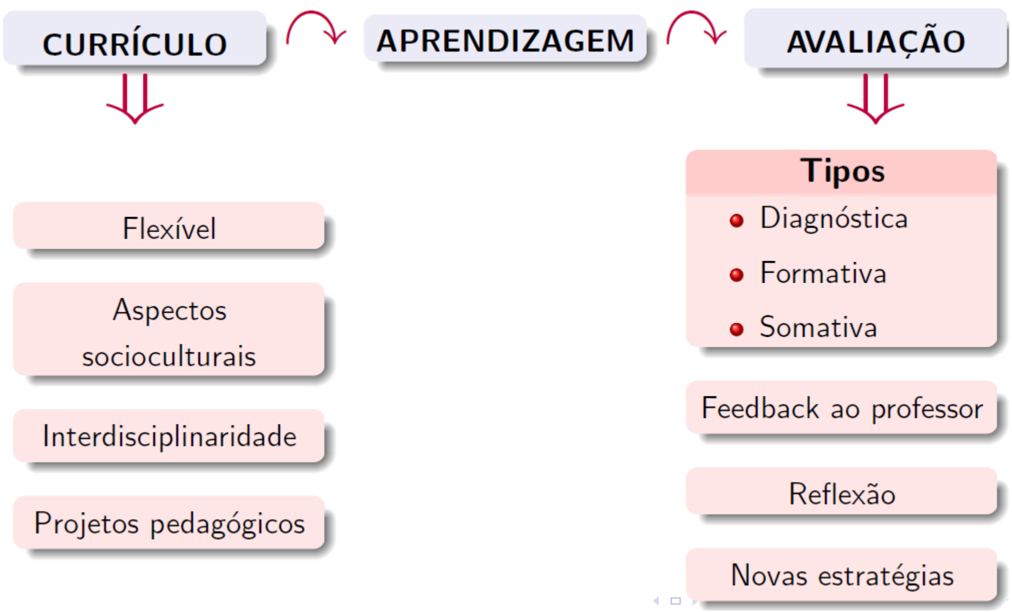


Figura 1.8: Currículo e Avaliação

1.4 Ferramentas de Aprendizagem

As ferramentas de aprendizagem podem ser consideradas como quaisquer meios ou instrumentos que impulsionem o desenvolvimento da aprendizagem do ser humano.

Para Vygotsky em [16], a primeira ferramenta que utilizamos, intelectualmente, é a linguagem. Pois é através dela que nos comunicamos, interagimos, trocamos experiências e nos desenvolvemos socialmente. Sendo assim, a linguagem deve ser entendida como um instrumento de total relevância no contexto educacional.

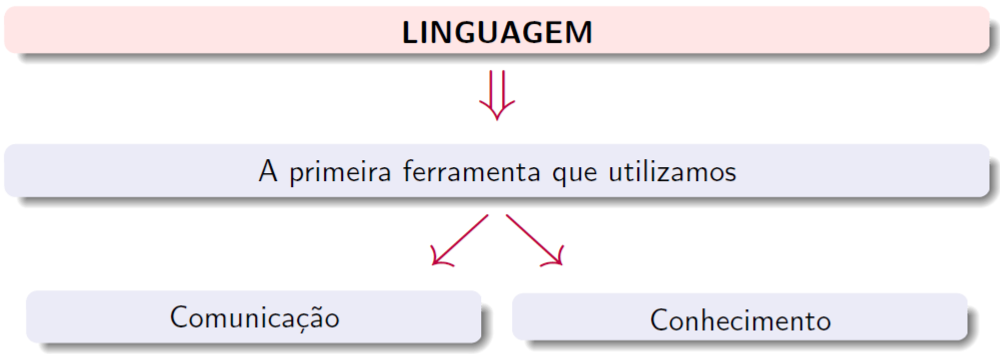


Figura 1.9: Linguagem

A linguagem pode se referir às capacidades humanas para a utilização da comunicação. Portanto, a comunicação simples e direta deve ser um ponto a ser considerado na sala de aula, pois a falta dela pode gerar indagações do tipo: *"Eu não entendo o que aquele professor fala"*.

Santos (1995), citado por Garnica e Pinto em ([20], p.211), defende que:

> A linguagem seja valorizada como estratégia para a criação de um ambiente de comunicação do conhecimento matemático, relatando sua importância no aprendizado em sala de aula, apontando insistentemente a necessidade de um "olhar cuidadoso" para as linguagens matemática e materna, considerando-as fundamentais no processo de ensino-aprendizagem, declaradamente, seu principal foco de atenção.

Desta forma, a comunicação deve ser zelada, pois ela tem uma parcela de influencia na aprendizagem dos alunos. Isso ocorre, pois o primeiro contato entre docentes e dicentes se dá por meio de uma comunicação, seja através de um olhar, uma fala ou uma escuta. É através dela que toda a relação professor-aluno será desenvolvida. Além disso, para Vigotsky é a partir da comunicação que criam-se oportunidades de interção entre os pares. [16]

Ao criar-se oportunidades de interação, outra ferramenta de aprendizagem surge, pois a interação desenvolve os processos sociais. E estes, por sua vez, trazem consigo os artefatos culturais, os quais geram troca de experiência entre os indivíduos trazendo enriquecimento ao seu escopo de conhecimentos.

Percebe-se então que ferramentas de aprendizagem não são apenas os instrumentos utilizados para o desenvolvimentos de uma aula, mas todo instrumento que possa transformar a mente humana, de modo que os conhecimentos sejam absorvidos.

1.5 Ambientes de Aprendizagem

Para que as ferramentas de aprendizagem sejam efetivadas, é necessário que haja ambientes de aprendizagem compatíveis com as mesmas. Por ambientes de aprendizagem entende-se qualquer ambiente em que o aluno possa desenvolver os seus conhecimentos e habilidades. Estes ambientes podem ser físicos ou não.

Com relação a ambientes físicos, é importante que o professor consiga explorar os vários meios que estão disponíveis no espaço escolar e fora dele também. Na disciplina de Matemática, por exemplo, esta exploração pode acontecer através de aulas práticas - como foi citado na seção 1.3.4 (Aplicabilidade do conteúdo) -, através de um passeio cultural, ou até mesmo em uma aula expositiva fora das quatro paredes da sala de aula.

É importante que o docente considere estes momentos diferenciados no seu planejamento escolar, já que frequentemente os professores e alunos ficam desgastados daquela mesma rotina escolar: entrar na sala, copiar várias coisas no quadro, escutar uma explicação (no caso dos alunos), realizar uma tarefa, trocar de sala e repetir este ciclo.

Por outro lado, existem os ambientes não físicos, que seriam os momentos que impulsionem o desenvolvimento do aluno. Espaços que forneçam a experimentação, investigação e exploração do conhecimento por parte dele; onde ele realmente seja o sujeito ativo do processo de ensino e aprendizagem.

Figura 1.10: Ambientes de Aprendizagem

Estes ambientes são reforçados quando o professor permite que o aluno se sinta desafiado e começe a entender que ele também é responsável pela sua aprendizagem. Questionamentos como: "Isto é mesmo verdade?" ou "Por que disto?" devem fazer parte do cotidiano do aluno, principalmente na disciplina de matemática, na qual os questionamentos são imprescindíveis para o desenvolvimento de seu raciocínio.

Além dos ambientes de investigação, também vale ressaltar os ambientes de interação, pois segundo Faustino e Passos em ([15], p.68):

> ... a aprendizagem é potencializada pela interação entre educadores e educandos por intermédio do diálogo. A organização dos alunos e das alunas em grupos otimiza as interações entre eles e faz com que cada um tenha oportunidade de ouvir as estratégias do outro, organizar e expor sua forma de pensar.

Desta forma, nota-se que a interação é um fator que pode potencializar a aprendizagem, pois através da troca de experiências, tanto na relação aluno-aluno, quanto na relação professor-aluno, os conhecimentos são ampliados.

Sendo assim, os ambientes de aprendizagem devem ser um instrumento a mais neste processo. Pois se forem explorados da maneira correta, podem trazer muito enriquecimento às práticas educacionais.

1.6 O Papel do professor

Nos dias atuais, muito se discute sobre qual deve ser o real papel do professor na educação e como ele pode exercer este papel. Aliás, pode-se dizer em papéis do professor, já que suas atribuição acabam por se difundir nas inúmeras funções que ele desempenha no dia a dia.

Primeiramente, é inegável que aquela visão de um professor apenas fornecedor do conhecimento já não cabe mais à realidade atual, pois o ensino se modernizou, os ambientes de aprendizagem mais ainda e obviamente os alunos acompanharam este avanço. Neste cenário, o professor, como peça chave, precisa se reiventar para não ser apenas um transmissor de conhecimentos.

É claro que muitos profissionais ainda são resistentes a tais mudanças e preferem continuar com o ensino tradicional, nem sempre por falta de vontade, mas muitas das vezes por encontrar desafios - que já foram mencionados na seção 1.1 - os quais frequentemente desmotivam o professor a elaborar uma aula mais interativa. Pois quando ele se depara com obstáculos, acaba desistindo e pensando que o caminho mais fácil é continuar na mesmice.

Entretanto, um professor entusiasmado não se deixa abalar nem por estes desafios; pois em meio a todos os problemas ele consegue focar no objetivo maior: a aprendizagem de seus alunos. E no fundo ele sabe que uma grande parte da motivação dos seus alunos está ligada à dele.

Desta forma, é fato que um dos primeiros papéis exercidos pelo docente, involuntariamente, é o de motivador, pois mesmo que ele nem perceba, os alunos o enxergam como uma inspiração. Tanto que muitos alunos escolhem a profissão de docente por causa de algum professor que admiraram muito na infância ou adolescência e consequentemente passaram a se interessar mais pela disciplina.

Por esse ângulo, percebe-se que o professor encontra-se em um campo no qual ele não interferirá apenas nos conhecimentos e habilidades acadêmicas que o aluno pode adquirir, mas também em sua vida, de um modo geral, nas questões de convivência social, valores, dignidade e respeito, como afirma Bonatto *et al.* em ([3], p.5):

> O professor tem em suas mãos a possibilidade de elaborar objetivos e procedimentos que tenham por meta melhorar ou promover a competência social e as relações interpessoais dos alunos.

Assim, é inevitável dizer que a relação do professor com o aluno interferirá diretamente em sua aprendizagem; pois do ponto de vista afetivo, segundo Bonatto *et. al* em [3] o aluno deposita uma confiança no professor e muitas vezes enxerga nele um modelo a ser seguido. Ainda afirma que: "a qualidade do vínculo afetivo entre o professor e seus alunos exerce grande influência sobre o relacionamento que crianças e jovens estabelecem entre si".

O professor também deve se enxergar como um mediador do processo de ensino-aprendizagem. Para Saviani, em [33], a prática pedagógica não deve partir apenas do professor como um provedor do conhecimento - como seguia a Pedagogia Tradicional[1] - e nem do aluno, como na Pedagogia Nova[2]; mas sim de ambos, segundo uma perspectiva de construção social, pois nesta, os dois são sujeito ativos e parceiros intelectuais neste processo, e a construção do conhecimento acontece de forma mútua.

Para Bulgraen em ([4], p.1):

> ... o docente contribuirá para que o aluno desenvolva o senso crítico e possa cada vez mais participar ativamente de sua "prática social" atuando como sujeito em meio a sociedade.

Nesta prática é imprescindível considerar o contexto social em que o aluno está inserido, pois é através de suas experiências que o aluno assimila o conhecimento. É fato que cada estudante traz consigo uma bagagem socio-cultural enorme, dentre problemas intelectuais, familiares, emocionais, psicológicos. E o professor ao se deparar com todas estas realidades se sente desafiado a acolher todos estes alunos, para que nenhum se sinta excluído.

A aula ideal para um professor seria aquela em que todos os alunos estão na idade certa, possuem todos os pré-requisitos para a aprendizagem, estão motivados e interessados para aprender. Mas infelizmente, com toda essa carga que os alunos trazem do ambiente extra-escolar, é impossível existir a aula ideal; portanto cabe ao professor encontrar um equilíbrio em meio a estas divergências para que todos os alunos, mesmo aqueles que estão totalmente desmotivados, estejam incluídos no processo de ensino-aprendizagem.

Existem várias maneiras de ampliar esta inclusão, na prática. O vínculo afetivo que o professor estabelece com seus alunos - seja com uma conversa, um gesto ou uma mera escuta - é de extrema importância para que o aluno perceba que ele é importante. Talvez, para o professor, não seja muito relevante, mas para o aluno, aquele gesto pode mudar seu dia.

Além das questões emocionais, é preciso considerar os aspectos cognitivos. Cada aluno possui individualidades e ritmos diferentes de aprendizagem. Um aluno pode ter dificuldade de concentração, outro de memorização, outro de raciocínio, outro de interpretação, etc. E mais uma vez, o professor precisa considerar todas estas individualidades em seu planejamento, sempre buscando metodologias e formas de ensinar que alcançem a todos.

Ele também deve atuar como um provocador, que fomenta a curiosidade dos alunos, pois assim, ele acaba por ampliar as possibilidades de fazer o aluno pensar e questionar aquilo que está sendo absorvido. Neste sentido, Garnica (2001) afirma ([19], p.19):

> O professor deve propor questões que elucidem, engagem e desafiem os alunos, deve ouvir cuidadosamente suas idéias e questioná-los (oralmente e por escrito) para promover a clareza do pensamento e das justificativas dadas, deve trazer à cena o que for julgado essencial nas argumentações dos alunos, escolher o momento oportuno para ater-se à linguagem e à notação específica e, cuidadosamente, decidir quando e como deve dar informações, esclarecer questões e apresentar modelos

As aulas não podem funcionar como uma mera transmissão de informações, em que um fala e o outro escuta; deve ir muito além, pois é necessário que haja uma provocação por parte do professor para que o aluno saia de sua zona de conforto e participe ativamente do processo de ensino-aprendizagem.

[1] A Pedagogia Tradicional é baseada no método do autoritarismo em que o professor é a figura suprema em sala de aula. O aluno é um mero receptor, que não possui voz ativa no processo de ensino e deve obedecer a todas as ordens do professor. A relação estabelecida entre os dois se dá de forma vertical.

[2] Na Pedagogia Nova, diferentemente da Pedagogia Tradicional, a iniciativa de todo o processo de ensino-aprendizagem sempre parte do aluno. Aqui, o professor é apenas um orientador e estimulador quando necessário.

Desta forma, o professor está desenvolvendo o seu papel de mediador, pois para ele, ensinar não é simplesmente dar uma aula, é se preocupar se o alvo foi atingido, no caso, os alunos. Um professor mediador se importa com a eficiência da aprendizagem de seus alunos.

É fato que todas estas reflexões levam um tempo para serem absorvidas. A prática e experiência são extremamente relevantes para que o professor faça uma auto crítica sobre a sua profissão, mas o que nunca pode ser deixado é o compromisso que o docente tem com a sociedade. Bulgraen reforça em ([4], p.2):

> ... a ação docente é a base de uma boa formação escolar e contribui para a construção de uma sociedade pensante. Entretanto, para que isso seja possível, o docente precisa assumir seu verdadeiro compromisso e encarar o caminho do aprender a ensinar.

Portanto, pode-se dizer que o professor encara uma responsabilidade muito grande ao ensinar pessoas que serão o futuro da sociedade; mas vale ressaltar que os aspectos citados nesta seção não têm o objetivo de pressionar ou culpar o professor, mas sim de fazê-lo refletir sua prática docente e perceber que o ambiente escolar é um campo fértil que deve ser bem aproveitado para uma boa formação social dos estudantes.

Capítulo 2

Demonstrações Matemáticas

As demonstrações matemáticas nem sempre tiveram o destaque que mereciam ao longo da história, pois por muitos anos a Matemática era vista como uma ciência muito mais aplicada e técnica do que filósofica. Foram anos de história até que a Matemática se mostrasse como uma ciência teórica na sociedade. Por isso, um breve histórico de como esta narrativa se desencadeou será abordado abaixo.

2.1 Breve histórico

A origem dos objetos e conhecimentos matemáticos sempre foi muito questionada ao longo da história; e parte desses questionamentos sempre esteve muito ligada à filosofia ocidental. Filósofos como Platão, Aristóteles, Leibniz e Kant estão entre os nomes que mais influenciaram estas discussões [8]. Pode se dizer então que a Matemática é uma eterna fonte de indagações, as quais ultrapassam os seus próprios limites e muitas vezes alcançam os ramos da filosofia. Por isso, desde a antiguidade há uma relação intrínseca entre estas duas áreas do pensamento.

Esta relação ficou ainda mais estreita no fim do século XIX com a chamada *Crise dos Fundamentos*[3], que se estendeu por muitos anos até as primeiras décadas do século XX. Segundo da Silva ([8], p.27), esta crise teve impacto na matemática, mas principalmente na filosofia, pois:

> Acostumados às crises, a maioria dos matemáticos prosseguiu seu trabalho como de hábito (um pouco mais preocupados, talvez); já os filósofos viram aí uma oportunidade única para refletir sobre a natureza do conhecimento matemático. Nascia assim uma filosofia da matemática de caráter sistemático, que nesse período inicial esteve inevitável e estreitamente ligada às tentativas de se colocar a matemática sobre bases sólidas confiáveis, num esforço para superar a crise dos fundamentos.

Desde os primórdios históricos, quando a Matemática entrou na cultura humana, os seus objetivos eram basicamente: efetuar cálculos aritméticos e geométricos, pois ela era vista pela sociedade como uma ciência mais técnica. Segundo a história, os egípcios dominavam muito bem essas técnicas, mas foram os

[3]A Crise dos Fundamentos foi gerada por uma série de acontecimentos que mudaram as perspectivas da Matemática a partir de então. Na geomeria, por exemplo, se deu pela descoberta da existência de geometrias não-euclidianas, o que trouxe incertezas sobre a veracidade dos postulados de Euclides.

babilônicos que conseguiram lidar melhor com elas.

É fato que estes povos trouxeram muito enriquecimento aos conhecimentos matemáticos de sua época e à atualidade também, porém lhes faltava uma visão mais rigorosa e sistemática, procurando saber se tais conhecimentos eram realmente verídicos. Faltava a eles uma busca pelas argumentações e demonstrações matemáticas. Aí entra a filosofia da Matemática, com o objetivo de responder sobre a veracidade da natureza dos conhecimentos matemáticos.

Um dos primeiros relatos de demonstrações matemáticas se deu por volta do século VI a.C. com Tales de Mileto, um dos míticos sábios da Grécia. Certamente influenciado por egípcios e babilônicos, ele conseguiu ampliar o pensamento matemático para além de cálculos e aplicações técnicas; mas trouxe uma visão mais profunda desta ciência, uma maneira de se pensar, ao mesmo tempo filosófica, mas também pautada no debate racional. [8]

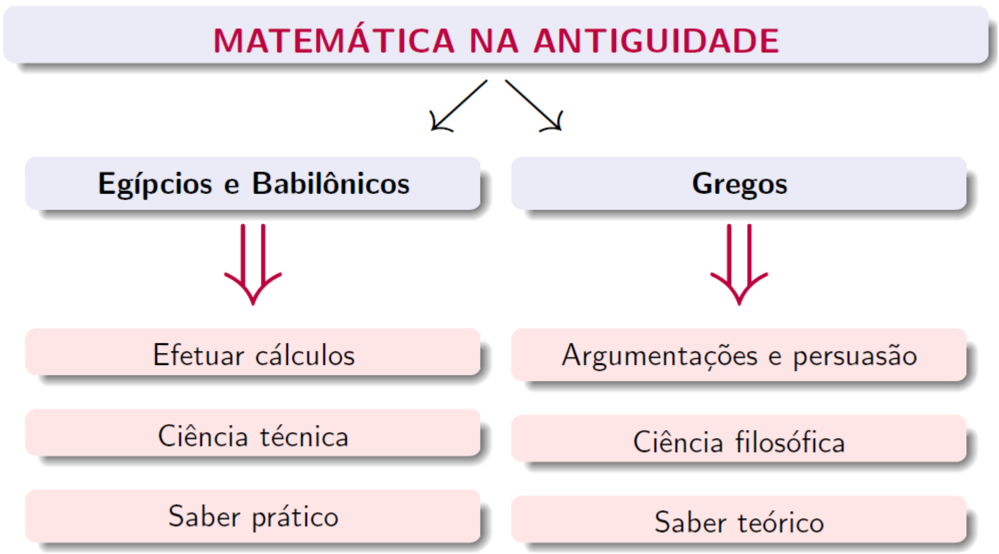


Figura 2.1: Matemática na Antiguidade

Mas o auge das demonstrações matemáticas se deu com Euclides, em seu livro *Os Elementos*, pois ele introduziu o chamado método axiomático. da Silva, em ([8], p.34) define este método como "um sistema mínimo e supostamente completo de verdades não-demonstradas e indemonstráveis - axiomas e postulados". Com isso, Euclides estava criando um sistema reduzido à racionalidade, o qual se utilizava de ferramentas lógico-dedutivas (termo que será melhor abordado posteriormente) e que serviria de base para toda a matemática a partir de então.

Neste momento, percebe-se uma certa ruptura nos estudos da matemática, na qual as técnicas que passaram a ter destaque não eram apenas de cálculos, como seguiam os egípcios e babilônicos, mas sim, de persuasão. Pode-se dizer que os gregos revolucionaram a matemática e através das demonstrações lógicas, estavam sempre em busca da verdade por trás das teses. E "quem soubesse persuadir sempre poderia convencer os outros de que sua tese era verdadeira" ([32], p.96). E desde então a matemática começou a ganhar espaço não apenas como um saber prático, mas principalmente como um saber teórico.

Um pouco mais tarde, já no século XVII, as demonstrações tinham como objetivo o esclarecimento, antes do convencimento [29]. Este período é chamado por muitos de *O apogeu da matemática*. Neste cenário surgem nomes ilustres como Isaac Newton, com o episódio da maçã caindo em sua cabeça. E logo em seguida, trazendo a teoria da gravidade. Também pode se citar o surgimento da geometria analítica com as teorias de René Descartes.

Avançando um pouco mais, chega-se ao século XIX, no qual as demonstrações passam a ter mais rigor e surge a ideia de formalismo matemático [29]. Este período ficou marcado pelo término das pesquisas do século XVIII. Teorias como: lei da reciprocidade quadrática, a repartição dos números primos a o avanço das demonstrações do último teorema de Fermat ganhavam espaço.

Nomes imponentes como Gauss, Legendre e Einsten contribuíram para o enriquecimento da matemática. E até hoje as demonstrações trazem consigo o peso destes protagonistas que marcaram a história da matemática.

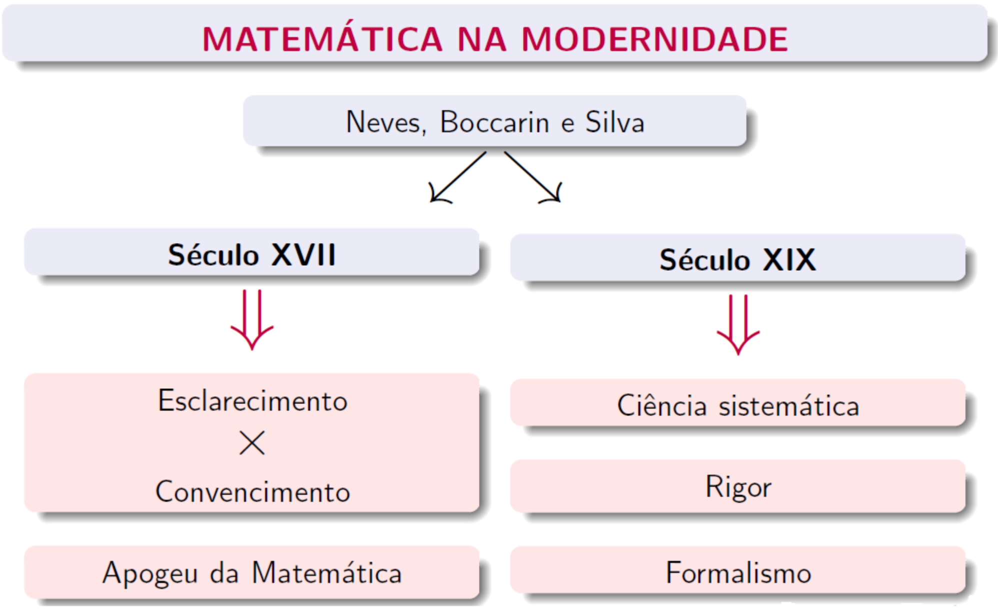


Figura 2.2: Matemática na Modernidade

Outro ponto relevante é que as demonstrações trouxeram para a matemática o uso da lógica, já que para argumentar era necessário etabelecer um passo-a-passo, um algoritmo que possuísse uma base sólida por trás de cada argumento. Desta maneira, todo argumento a ser provado deveria ser baseado em outro que já foi demonstrado previamente. A lógica da demontração se desencadeia a partir de uma hipótese que será assumida como verdadeira, para então se provar a tese, que é o resultado propriamente dito. É o tal método dedutivo, que será melhor detalhado nas seções seguintes.

2.2 Desenvolvimento do Raciocínio

O objetivo primordial ao se ensinar Matemática, seja na Educação Básica ou Superior, é desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos. Este objetivo, às vezes, parece difícil de ser alcançado, até porque o raciocínio em si vai muito além de decorar fórmulas, regras ou definições. É necessário um trabalho contínuo e de muita dedicação, por parte do aluno e também do professor.

Para Garnica (2001) em ([19], p.19), o professor deve:

> Motivar os alunos a ouvir, responder e questionar, a iniciar questões e problemas, fazer conjecturas e apresentar soluções explorando exemplos e contra-exemplos, tentar convencer a

> si-próprios e aos outros da validade de suas propostas, representações, soluções ou conjecturas.

Pode-se dizer que o desenvolvimento do raciocínio acontece quando o indivíduo internaliza e entende os conceitos, assimila estes conceitos a outros previamente compreendidos e consegue aplicar em situações-problemas. Nesse sentido, Oliveira (2008), citado por da Ponte *et al.* em ([6], p.357), afirma que:

> ... a expressão *raciocínio matemático* é utilizada para referir um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio).

Do ponto de vista epistemológico, o raciocínio lógico pode ser subdivido em duas categorias: indução e dedução.

2.2.1 Indução

O raciocínio por indução é baseado nos métodos fracos[4]. Aqui o raciocínio se inicia mediante informações, fatos ou evidências particulares e a partir daí se estabelecem conjecturas generalizando estas informações.

Segundo da Ponte *et al.*, em ([6], p.357):

> O raciocínio indutivo é heurístico, desenvolvendo-se do particular para o geral, sem conduzir a conclusões necessárias, mas com um papel chave na criação de novo conhecimento.

Na indução, os raciocínios prévios, embora verdadeiros, não garantem a veracidade das conclusões. Observe o exemplo abaixo em que se utiliza de indução para concluir uma afirmação.

$$\begin{cases} \text{Esta gaveta possui puxador.} \\ \underline{\text{As gavetas da minha casa possuem puxador.}} \\ \text{Portanto, todas as gavetas possuem puxador.} \end{cases}$$

Este exemplo mostra claramente que na indução, as conclusões são feitas mediante analogia e semelhança das hipóteses. A pessoa que utiliza indução tem uma esperança (mas não certeza) de que aquele resultado seja verdadeiro; é como se as conclusões futuras fossem uma repetição e/ou dependessem exclusivamente do passado.

2.2.2 Dedução

O raciocínio dedutivo é baseado nos métodos fortes, nos quais as conclusões são obtidas com veracidade e perfeição. A partir de uma hipótese verídica, uma série de raciocínios são desencadeados até se concluir a tese, mas sem nenhuma suposição ou expectativa, como na indução. Aqui, cada argumentação utilizada para a conclusão já foi previamente demonstrada.

Segundo Garnica (2001) em ([19], p.8):

> No léxico, tanto quanto no jargão matemático, prova e demonstração são tidos como sinônimos: é a argumentação que atesta a veracidade ou autenticidade; o que dá garantias; é

[4] Os métodos fracos são baseados em uma sequência de fatos que resultam em uma afirmação que não necessariamente é verdadeira, apenas provável

> testemunho, processo de verificação da exatidão de cálculos ou raciocínios; é **dedução** que mantém a verdade de sua conclusão, apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras.

Diferentemente do que ocorre na indução, aqui, o raciocínio que leva às conclusões se desenvolve de afirmações gerais para particulares. Observe um exemplo claro de dedução:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Todos os gatos são mamíferos.}\\ \underline{\text{Todos os mamíferos mamam.}\qquad\qquad}\\ \text{Portanto, todos os gatos mamam.}\end{array}\right.$$

Perceba que o desencadeamento de asserções é lógico, não gerando dúvidas quanto à conclusão, pois ela ocorre de maneira natural e formal ao mesmo tempo. Como afirma da Ponte: "desde que a cadeia de deduções esteja isenta de erros, o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas". ([6], p.358)

2.2.3 Demonstrações no Ensino Básico

O uso de demonstrações matemáticas muitas vezes está associado apenas ao ensino superior, já que, na visão de muitos professores, as demonstrações são muito complexas e exigem uma certa maturidade dos alunos para compreendê-las. Mas de alguma maneira, esse tipo de pensamento acaba subestimando a capacidade de seus alunos.

Segundo Neves *et al.* em ([29], p.172):

> A experiência docente em matemática, em especial, no contexto das aulas de geometria, tem nos ensinado que a palavra demonstração gera inquietude entre os estudantes sejam eles da Educação Básica, sejam do Curso de Licenciatura em matemática. Muitos relatam que o incômodo é resultante das dificuldades relacionadas à atividade, pelo fato dela exigir alta capacidade de argumentação e linguagem própria.

É fato que incluir este método no currículo não é uma tarefa simples, pois demanda um maior tempo de aulas teóricas, um melhor planejamento do professor e mais dedicação do aluno. Mas ainda que seja de forma lenta, o professor deve estimular seus alunos a desenvolverem um raciocínio nesse sentido, pois o processo de raciocínio ajuda na compreensão de um conhecimento mais amplo. Ele tira o aluno de sua zona de conforto, e o faz pensar além do que está habituado.

O primeiro passo deve partir do professor, pois ao invés de apenas enunciar resultados e propriedades no quadro, ele pode iniciar a aula com questionamentos, desafios relacionados ao tema da aula, buscando despertar a curiosidade dos alunos. E através de suas respostas, tentar mostrá-los o que é verídico ou não.

Vamos ilustrar como um professor pode introduzir esta metodologia através do relato abaixo que ocorreu em uma turma de 6º ano do ensino fundamental.

O professor propõe o seguinte problema aos alunos: *É possível que a soma de dois números naturais maiores que 3 seja 7?*

Um aluno responde: *Não, porque* $3 + 4 = 7$.

O professor observa sua resposta e o questiona: *Por que isso justifica o seu resultado?*

O aluno pensa um pouco e responde: *Porque tem que ser maior que 3.*

O professor questiona novamente: *Isto é suficiente para mostrar que este resultado nunca será possível?*

O aluno: *Não sei, mas acho que sim.*

Então o professor propõe a seguinte pergunta: *Quais são todas as somas que você consegue escrever entre dois números naturais, na qual o resultado seja 7?*

O aluno volta ao seu lugar e alguns minutos depois traz a seguinte resposta: $3+4,\ 2+5,\ 1+6$

O professor afirma: *Falta uma.* (Aqui o professor está considerando o zero como número natural)

O aluno demora mais um tempo, não consegue encontrar e pede ajuda ao professor.

O professor pergunta: *Qual o primeiro número natural que você conhece?*

O aluno fala: *Aaaah, já sei.* $7+0$

O professor o questiona: *Você entendeu porque a sua justificativa estava incompleta?*

O aluno: *Sim. Então é isso?*

O professor conclui: *Falta escrever uma resposta mais conclusiva, justificando os argumentos não só com cálculos, mas com palavras.*

O aluno não entende muito bem e pergunta ao professor: *Como eu escrevo?*

E o professor conclui: *Você pode dizer que em qualquer soma de dois números naturais, cujo resultado seja 7, um das parcelas sempre é menor que 3.*

Esta situação traz muitas reflexões. Primeiramente, o aluno tentou utilizar um caso particular verdadeiro para generalizar sua resposta. Ou seja, ele claramente está utilizando o método de indução para justificar o seu raciocínio. Embora, de fato, a resposta fosse *"Não é possível"*, ele precisava compreender que o seu argumento não era suficiente para concluir o resultado.

Por outro lado, tem o professor tentando clarear as ideias do aluno, mas sem entregar a resposta. E essa atitude de estimular o raciocínio e instigar a curiosidade do aluno é o papel ideal do professor numa situação como esta, pois ele está fazendo com que o estudante compreenda a matemática de um modo mais amplo, levando-o a utilizar o método-dedutivo em suas justificativas.

Ao final também se observa a dificuldade que o aluno possui em escrever a sua justificativa. E isso é mais comum do que se imagina, pois os alunos têm um vício de linguagem na matemática que se resume apenas aos cálculos. Raramente eles conseguem concluir suas justificativas com palavras.

Provavelmente, um aluno de 6º ano não teve esse tipo de contato com a matemática durante sua vida escolar, mas aí cabe ao professor estimular e cobrar uma postura diferente de seus alunos; tirá-los de sua zona de conforto; desafiá-los a ver a matemática com outros olhos, de modo que se este trabalho for exercitado continuamente, certamente os resultados virão e o desenvolvimento do raciocínio acontecerá de maneira natural.

Por outro lado, o aluno, ao estudar Matemática, precisa entender que as propriedades, teoremas e proposições não surgem por acaso; existe uma lógica dedutiva por trás delas. Por isso é importante o professor trazer demonstrações (mesmo de que de um modo mais informal) durante as aulas, pois desperta a curiosidade e consequentemente o interesse dos alunos.

Neves *et al.* ainda afirma em ([29], p.176):

> Entendemos que as demonstrações foram e são instrumentos importantes para e na produção de conhecimento matemático e podem se transformar, também, em instrumentos importantes para a prática discente e docente em sala de aula seja na Educação Básica, seja na licenciatura

em matemática.

Desta forma, esta pesquisa defende a utilização de demonstrações matemáticas em sala de aula com alunos de ensino básico, e traz nos capítulos abaixo um compilado de como isto foi feito em turmas de 9º ano. Além de mencionar os resultados obtidos após o desenvolvimento da mesma.

Capítulo 3

Metodologia do Projeto

Neste capítulo serão apresentados os objetivos e as metodologias que foram utilizadas no projeto, dentre elas: o questionário diagnóstico, as aulas teóricas (com uma abordagem diferente da que os alunos estavam acostumados), as atividades ao final de cada aula e o questionário final, no término do projeto.

Em cada seção abaixo será descrito detalhadamente como ocorreu cada metodologia, a escolha do local e participantes, além dos recursos e materiais utilizados em cada aula. Este capítulo também serve de respaldo para a análise de resultados, que será descrita no capítulo seguinte.

3.1 O Projeto

O projeto realizado possui o objetivo de abordar, nas aulas de Matemática, metodologias mais aprofundadas de alguns conteúdos, incluindo a abordagem histórica, demonstrações matemáticas e atividades ao final de cada aula.

Os conteúdos escolhidos para o desenvolvimento do projeto estavam pautados no currículo do 9º ano. Como o projeto foi desenvolvido no segundo semestre de 2018, os tópicos abordados foram: Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, Relações trigonométricas, Zero da função quadrática e Gráfico da função quadrática. A princípio o conteúdo *Estudo da Circunferência* estava previsto na pesquisa, mas devido a imprevistos no calendário escolar, o tópico não pode ser incluído no projeto, pois foi um semestre muito atípico, com muitos feriados e outras atividades da escola, que acabaram ocupando algumas aulas que estavam no planejamento.

O projeto foi realizado no turno matutino, no horário das aulas de Matemática das turmas, portanto não houve prejuízo às aulas, uma vez que os tópicos abordados foram exatamente aqueles que estavam previstos no currículo para este segundo semestre.

A primeira ação foi conversar com a equipe gestora e explicar a importância dos temas envolvidos no projeto. Neste caso, não houve emepecilhos, já que o mesmo só enriqueceria o aprendizado dos alunos. Aos alunos, foi entregue uma autorização (Anexo - Autorização) para a ciência de seus responsáveis e para que eles se comprometessem durante as aulas.

A segunda foi conversar com os alunos e explicá-los que em alguns dias combinados do semestre eles teriam uma aula diferenciada, com um teor mais avançado, nas quais seriam abordadas demonstrações matemáticas (o que para muitos era novidade). Eles foram muito receptivos à proposta e alguns já demonstraram uma certa ansiedade pelo início do projeto.

No primeiro momento, foi realizado um questionário diagnóstico para nortear todo o projeto. A partir de então os alunos eram sempre avisados previamente sobre quais dias aconteceriam as aulas, mediante os dias combinados. Vale ressaltar que algumas aulas precisaram ser modificadas, por conta de imprevistos que aconteciam na escola.

Ao final do projeto, foi entregue um questionário final, semelhante ao primeiro, para observar a evolução dos alunos, após a pesquisa.

3.2 O Local

O projeto foi desenvolvido em uma escola pública municipal localizada no Valparaíso de Goiás. O bairro de localização da escola é considerado um bairro de periferia e um dos mais perigosos do Valparaíso, entretanto a comunidade escolar ao redor e os alunos, de um modo geral, são muito tranquilos. Sendo assim, não há muitos problemas de disciplina nesta escola.

Embora a etrutura da escola seja bastante precária, a equipe de professores é muito dedicada para tentar melhorar este ambiente, e está sempre convidando a comunidade para participar dos projetos da escola. A saber, no ano de 2017, uma grande equipe de alunos, pais e professores se uniu para renovar a pintura da escola. Além dos diversos projetos que a escola desenvolve todos os anos, como Grupos de Teatro que se apresentam em vários eventos do Valparaíso, projetos culturais como Semana da Consciência Negra, Festa Junina, Chá literário e Desfiles temáticos. Ja no âmbito pedagógico, a escola oferece aulas de reforço para alguns alunos no contraturno e também já acolheu o programa OBMEP na Escola[5].

Devido a todo esse engajamento, hoje a escola já é muito conhecida em todo o município de Valparaíso; sendo muitas vezes citada como escola referência. Frequentemente participa de eventos da Secretaria de Educação e de outras secretarias com o seu grupo de teatro.

3.3 Materiais utilizados

Em cada aula desenvolvida, a pesquisa se dividia em duas partes: momento de aula expositiva e momento de atividades.

Para as aulas expositivas, foi necessário o uso de projetor, caso contrário, o tempo estimado não seria suficiente para desenvolver tudo em uma única aula. Porém, como a escola dispunha apenas de um projetor, muitas vezes era necessário esperar um professor terminar de utilizar para conseguir fazer o uso do material.

Além disso, também se observaram dificuldades no deslocamento entre uma sala e outra, pois não havia nenhum suporte para deslocar o material (muitas vezes a professora pedia auxílio dos alunos nesse deslocamento); o que acabava prejudicando o tempo de aula, já que as salas não são ambiente[6]. Assim, em todo horário se fazia necessário a montagem e desmontagem do material, gerando um certo desgaste.

Para os momentos de atividades, após cada aula expositiva, o único material necessário eram cópias

[5] O programa OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas e privadas) na Escola é voltado para professores de matemática das escolas públicas e para alunos de licenciatura em matemática; e tem como objetivo contribuir para a formação destes profissionais, estimulando estudos mais avançados para melhorar a sua prática didática. Também conta com a participação de alunos que se interessem em participar de grupos de estudos, seguindo a prática de resolução de exercícios.

[6] O conceito de sala ambiente, no meio educacional, é utilizado para definir quando o aluno troca de sala, ao invés do professor.

das atividades. Como a escola dispõe de uma copiadora própria para materias pedagógicos, não houve maiores problemas com relação a isto.

3.4 Os Participantes

Os participantes da pesquisa são alunos de três turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, das turmas 9ºA, 9ºB e 9ºC, totalizando 81 alunos. Como a pesquisa foi desenvolvida no horário de aula, todos os alunos participaram ativamente de todas as aulas.

Os alunos destas turmas, de um modo geral, são muito comprometidos nas aulas de Matemática. A maioria está sempre muito interessada e curiosa para aprender. Eles sempre diziam à professora que a aula de matemática era uma das mais interessantes que eles tinham, dentre as outras disciplinas.

Talvez esse interesse dos alunos se desenvolveu de forma mútua, pois eles sempre eram desafiados a pensar além do óbvio. E constantemente, a professora levava desafios para estimular o aprendizado deles. E este foi um dos motivos para o desenrolar desta pesquisa, como será detalhado abaixo.

3.5 Motivação

A professora que desenvolveu a pesquisa lecionava há 3 anos nesta escola para turmas de 9º ano, no turno matutino.

Sua motivação para o desenvolvimento desta pesquisa se deu após observar que muitos alunos sempre a questionavam sobre a origem dos conhecimentos matemáticos, alguns mais curiosos até perguntavam como era cursar matemática, o que se estudava neste curso.

Foi aí que impulsionada por estes questionamentos, a professora resolveu trazer algumas aulas mais teóricas, com uma abordagem um pouco mais aprofundada para estes alunos. Mostrando a eles justamente a origem de certos conhecimentos e como se desenvolveram.

Portanto, esta pesquisa tem o objetivo de verificar se a metodologia utilizada nas aulas de matemática geram algum efeito positivo para o aprendizado dos alunos.

3.6 Atividades Desenvolvidas

As atividades da presente pesquisa foram desenvolvidas no 3º e 4º bimestre do ano letivo de 2018, no período de 26 de julho a 29 de novembro. Cada tema abordado foi inserido na pesquisa de acordo com o planejamento e currículo escolar.

Portanto, os tópicos *Teorema de Tales*, *Teorema de Pitágoras* e *Relações Trigonométricas* foram abordados no 3º bimestre. Já os tópicos *Zero da função quadrática* e *Gráfico da função quadrática* foram desenvolvidos no 4º bimestre.

Cada atividade foi realizada em uma aula dupla de 45 minutos cada. Portanto, o primeiro horário era reservado à aula expositiva e o segundo horário ao momento de exercícios. Em algumas atividades, fez se necessário a utilização de mais um dia para que os alunos conseguissem concluir os exercícios propostos.

3.6.1 Questionário Diagnóstico

O questionário diagnóstico (Apêndice - questionário diagnóstico) foi o primeiro contato dos alunos com o projeto. O mesmo era composto de 19 questões de aspecto sociocultural e de opinião sobre os interesses dos alunos pela Matemática.

As questões eram variadas entre objetivas e subjetivas e em todas os alunos deveriam marcar apenas uma resposta.

Após a aplicação da diagnóstica, foi explanado aos alunos como funcionaria o projeto e quais conteúdos seriam abordados, além disso, também foi explicado a eles o que eram axiomas, propriedades, teoremas e demonstrações matemáticas, pois estes termos seriam abordadas nas próximas aulas.

3.6.2 Atividade 1: Teorema de Tales

Para iniciar a aula foi introduzido o contexto histórico sobre a vida de Tales, explicando da importância que ele teve para a Matemática de sua época e como ele foi influente para o desenvolvimento das demonstrações matemáticas, como pode ser observado abaixo:

Tales nascido em Mileto (uma cidade da Grécia) no ano 624 a.C. ficou conhecido como um dos precursores das demonstrações matemáticas. Fortemente influenciado por egípcios e babilônicos, ele conseguiu ampliar o pensamento matemático para uma visão mais profunda e filosófica dos conhecimentos.

Foi considerado um dos Sete Sábios da Grécia[7] e foi fundador da Escola Jônica, que é considerada a mais antiga escola filosófica, na qual os seus pensadores buscavam explicações para teorias cosmológicas, como o surgimento do universo.

Tales viajava muito ao Egito e Babilônia disseminando seus conhecimentos. E segundo relatos, foi em uma destas viagens que surgiu a ideia do Teorema de Tales, quando ele foi convidado pelos egípcios (especificamente por um faraó) para medir a altura da pirâmide de Quéops.

Para solucionar o problema Tales apoiou-se a uma vara espetada perpendicularmente ao chão e esperou que a sua sombra tivesse comprimento igual ao da vara. Após isto acontecer disse então a um colaborador: “Vai e mede depressa a sombra da pirâmide. Esta medida é igual a altura da pirâmide”.

A partir de então sua fama de grande matemático ficou ainda maior e o seu Teorema foi disseminado pelos estudiosos.

Após o contexto histórico, foi enunciado o seguinte teorema (que serviria de base para o Teorema de Tales).

Teorema: Se um feixe de retas paralelas determina sobre uma reta transversal segmentos congruentes, determinará sobre qualquer outra transversal, segmentos congruentes.

A demonstração foi desenvolvida como um passo a passo, para que os alunos pudessem compreender cada argumento que era inserido. Além disso, foram utilizadas várias figuras e a cada passo da demonstração, esboçáva-se no desenho para que a compreensão fosse mais clara.

Demonstração:

- Considere duas retas r e s.
- Sejam A, B, C pontos na reta r, com B entre A e C, tais que $AB \equiv BC$.
- Sejam A', B', C' pontos na reta s, com B' entre A' e C'.
- Estes pontos são tais que AA', BB' e CC' são retas paralelas entre si.

[7] Os Sete Sábios da Grécia era um nome utilizado para fazer referência a sete filósofos, aos quais eram atribuídas máximas e preceitos. Essa lista nem é um consenso entre os historiadores. Uma delas, citada por Platão, inclui: Tales de Mileto, Solon de Atenas, Quilon de Esparta, Pítaco de Mitilene, Bias de Priene, Cleóbulo de Lindos, Periandro de Corinto.

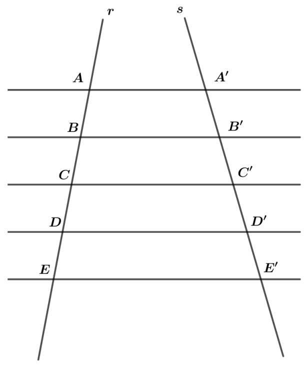


Figura 3.1: Retas paralelas

- Trace uma reta t paralela à AB passando por A' e marque o ponto F como sendo a interseção entre t e BB'.
- Trace uma reta u paralela à AB passando por B' e marque o ponto G como sendo a interseção entre u e CC'.
- Observe que $AA'FB$ é um paralelogramo, pela forma que construímos. Logo $AB \equiv A'F$.
- Da mesma maneira $BC \equiv B'G$.
- Como $A'F$ e $B'G$ são ambos paralelos a AB, então $A'F$ é paralelo a $B'G$.
- Por este motivo, os ângulos $A'FB'$ e $B'GC'$ são correspondentes. Logo são congruentes.
- E também os ângulos $FA'B'$ e $GB'C'$.
- Portanto, os triângulos $A'FB'$ e $B'GC'$ são congruentes pelo caso de congruência ALA.
- Por fim, pela congruência dos triângulos, conclui-se que $A'B' \equiv B'C'$.

Em seguida, foi enunciado o Teorema de Tales e sua demonstração.

Teorema de Tales: Um feixe de retas paralelas determina sobre duas retas transversais segmentos proporcionais.

Em outras palavras, sejam duas retas r e s. Considere os pontos A, B e C em r com B entre A e C. Da mesma forma, considere os pontos A', B' e C' em s com B' entre A' e C', de modo que AA', BB' e CC' sejam paralelos entre si.

O que se deseja provar é: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$.

Vale ressaltar que a demonstração mais utilizada para o Ensino Fundamental, considera o caso em que os segmentos AB e CD são comensuráveis.

Demonstração:

- Considere AB e BC segementos comensuráveis.
- Então, existem inteiros p e q e um segmento de medida u tais que $AB = p \cdot u$ e $BC = q \cdot u$.

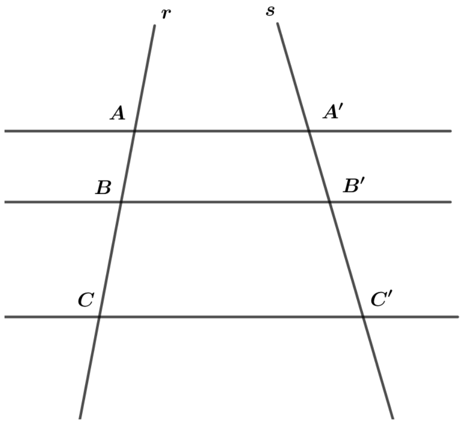


Figura 3.2: Teorema de Tales

- Se $AB = p \cdot u$, então existe um ponto $D \in r$ tal que $BD = p \cdot u$.
- Se $AB \equiv BD = p \cdot u$ e como AA' é paralelo a BB', então pelo Teorema provado anteriormente, existe $D' \in s$ tal que $A'B' \equiv B'D'$.
- Portanto, existe um segmento de medida u' tal que $A'B' \equiv B'D' = q \cdot u$.
- Da mesma forma, se $BC = q \cdot u$, então $B'C' = q \cdot u'$.
- Portanto, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{p \cdot u}{p \cdot u'} = \dfrac{u}{u'}$.
- Analogamente, $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{q \cdot u}{q \cdot u'} = \dfrac{u}{u'}$.
- Assim, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.
- Logo, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$.

Por fim, foi enunciado um Corolário do Teorema de Tales:

Corolário:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

Demonstração:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{AB + BC} = \frac{A'B'}{A'B' + B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

Este foi um compilado da primeira aula expositiva, na qual se fez a utilização de figuras e esboços no quadro sempre que um novo passo da demonstração era desenvolvido. Esta metodologia foi utilizada para facilitar a compreensão dos alunos de modo que as ideias pudessem ser absorvidas da melhor maneira possível.

Também é importante enfatizar que os alunos participaram ativamente do desenvolvimento da demonstração, pois a cada passo que era apresentado, eles eram questionados sobre qual seria a próxima conclusão, quais conceitos deveriam aplicar e como poderiam argumentar dedutivamente e não apenas intuitivamente.

Na demonstração do primeiro teorema, por exemplo, muitos lembraram dos casos de congruência de triângulos (conteúdo que foi estudado no 8º ano), e eles argumentavam de modo que a demonstração não partisse apenas da professora.

Após este momento, foi entregue aos alunos a primeira Atividade (Apêndice - Atividade 1). Ocorreu que neste dia, o tempo de aula não foi suficiente para o término da Atividade 1, portanto, na aula seguinte foi separado um momento no início do horário para que os alunos pudessem concluí-la.

Todas as questões se resumiam em alguma aplicação do Teorema de Tales ou do seu Corolário. Em alguns casos os alunos deveriam aplicar o teorema mais de uma vez para chegar a solução final.

3.6.3 Atividade 2: Teorema de Pitágoras

Para iniciar a aula, primeiramente foi abordado o contexto histórico da vida de Pitágoras, como detalhado abaixo:

Pitágoras nasceu em 570 a.C., na ilha grega de Samos (localizada a leste do mar Egeu). Ele era conhecido como um matemático, astrônomo, filósofo, milagreiro, profeta e muitas vezes, um charlatão. Por outro lado, alguns estudiosos não conseguiam afirmar a sua real existência, pois não existem relatos originais sobre sua vida; além disso, muito do que se sabe sobre ele foi escrito séculos após sua morte.

Outros acreditavam que ele tenha sido discípulo de Tales, devido a proximidade das regiões onde eles nasceram, visto que Tales nasceu em Mileto.

Pitágoras foi fundador da tão conhecida Escola Pitagórica, que formou vários discípulos com tendências místico-religiosas e científico-racionais. Os pitagóricos, como eram conhecidos, trouxeram fortes influênias ao desenvolvimento da matemática. A própria palavra "matemática" foi estabelecida por eles.

Sobre o surgimento do Teorema de Pitágoras, conta-se que foi desenvolvido em uma das várias viagens que Pitágoras fazia pelo Egito. Em uma dessas, ele se encantou com as pirâmides e passou a estudar a estrutura dos triângulos retângulos, até se formular o enunciado de seu Teorema tão famoso, que virou lei universal.

Em contrapartida, estudiosos contam que o resultado apresentado por Pitágoras já era muito utilizado por egípcios e babilônicos (antes de Pitágoras) na construção de seus monumentos. Porém, ninguém havia formulado e demonstrado este resultado como um teorema.

Portanto, os créditos foram dados a Pitágoras, pois ele foi o primeiro a demonstrar este teorema (ou algum discípulo de sua Escola, o que não fazia diferença, pois os créditos daquela época sempre eram dados ao mestre).

A primeira demonstração utilizava basicamente argumentos geométricos envolvendo áreas. Mas após esta, várias outras surgiram. Inclusive, estima-se que existem mais de 300 demonstrações deste teorema.

Após esta abordagem, os alunos ficaram bem curiosos para ver a demonstração do Teorema, pois eles já estavam familiarizados com o resultado, uma vez que o conteúdo já havia sido abordado em aulas anteriores, mas não de maneira aprofundada.

Teorema: Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

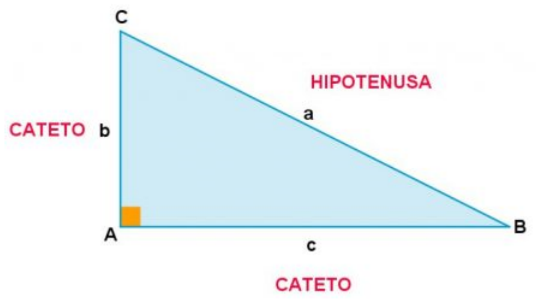


Figura 3.3: Triângulo retângulo

Em outras palavras, se b e c são catetos de um triângulo retângulo e a é a hipotenusa. Então, o que se deseja provar é que $a^2 = b^2 + c^2$.

<u>**Demonstração**</u>:

- Considere um triângulo retângulo T de catetos com medidas "b" e "c" e hipotenusa de medida "a".
- Considere um quadrado Q de lado "a".
- Encaixe quatro triângulos retângulos congruentes a T sobre os lados de Q, de forma que a hipotenusa coincida com os lados deste quadrado, formando a seguinte figura:

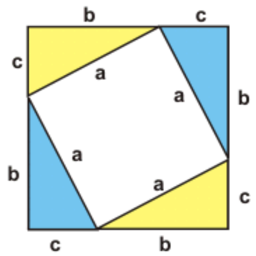


Figura 3.4: Quadrado pitagórico

- Estes polígonos formam um quadrado de lado "$b + c$".
- Sejam A, A_T, A_Q as áreas do quadrado de lado "$b + c$", do triângulo T e do quadrado Q, respectivamente.
- Note que $A = 4 \cdot A_T + A_Q$. Portanto

$$A = 4 \cdot \left(\frac{bc}{2}\right) + a^2.$$

$$A = 2bc + a^2.$$

- Por outro lado, $A = (b + c)^2$. E assim

$$A = b^2 + 2bc + c^2.$$

- Logo, é verdade que

$$\begin{aligned} 2bc + a^2 &= b^2 + 2bc + c^2 \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + 2bc + c^2 - 2bc \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2. \end{aligned}$$

A parte de aula expositiva foi bastante rápida, visto que a demonstração não demandava muitos passos. Em seguida, foi aplicada a Atividade 2 (Apêndice - Atividade 2), que consistia de 4 exercícios sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras.

3.6.4 Atividade 3: Relações Trigonométricas

A primeira abordagem nesta aula foi sobre a origem da palavra trigonometria, a qual significa medida das partes de um triângulo.

Esta área da matemática se desenvolveu por volta do século IV a.C. com os egípcios e babilônicos. E parte deste desenvolvimento ocorreu devido a estudos nas áres de Navegação, Astronomia e Cartografia.

Pde-se dizer que Hiparco de Nicéia (astrônomo grego), fortemente influenciado pelos babilônicos, é um dos nomes apontados como precursor da Trigonometria, devido a sua grande contribuição para a Astronomia, como a determinação da duração de 365 dias do ano terrestre (com erro de apenas 6 horas); a elaboração de um catálogo estelar; e o tamanho da lua, por exemplo.

Também foi ele o primeiro a dividir o círculo em 360° na sua tábua de cordas e com isso construiu a primeira tabela trigonométrica. Esta se baseava em uma "função", na qual cada arco de circunferência de raio arbitrário era associada a sua respectiva corda. Além disso, ele observou que que num dado círculo, a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180º para 0º. [5]

Com todas estas descobertas, ele proporcionou um grande avanço para a Astronomia e acabou ganhando o título de "pai da trigonometria".

Grande parte de seu trabalho foi sistematizado e compilado na obra *Almagesto*[8] de Ptolomeu, por isso tem-se acesso às tabelas trigonométricas de Hiparco nos dias atuais, visto que os livros originais se perderam com o tempo, enquanto o *Almagesto* perdurou por anos. [5]

Com esta obra, os árabes tiveram acesso aos estudos da trigonometria e difundiram pela europa por vários anos. Estes utilizavam a trigonometria aplicada a cálculos de navegação.

No século XVIII, um outro avanço creditado a Leonhard Euler, trouxe as definições de *seno*, *cosseno* e *tangente* como números e utilizou as notações conhecidas atualmente.

Atualmente, a trigonometria não se resume apenas a aplicações na astronomia. Ela é muito utilizada também em áreas como mecânica, eletricidade, música, engenharia e medicina.

Após a abordagem histórica, foram conceituadas as relações trigonométricas, que já haviam sido introduzias na aula anterior (mas não de maneira aprofundada). Em seguida, foi explicado aos alunos que esta aula não explanaria nenhuma demonstração, como havia sido nas duas primeiras. Mas seria feita uma análise gráfica da relação trigonométrica *seno* e a mesma ideia poderia ser aplicada para *cosseno* e *tangente*.

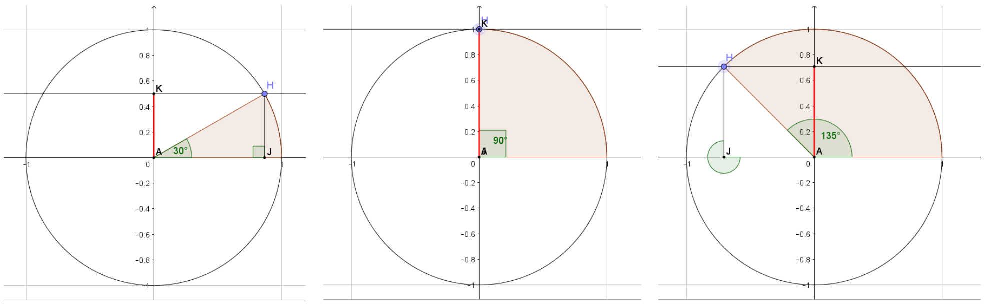
Para esta análise gráfica, se fez necessário o uso do programa *Geogebra*[9]. Primeiramente, foi feita uma animação com o círculo trigonométrico centrado no plano cartesiano Oxy para que os alunos percebessem

[8] *Almagesto* significa em árabe "A maior", pois era considerada como a maior obra existente da época. Esta obra tratava de uma síntese de vários resultados importantes da astronomia, incluindo nomes como Arisóteles, Hiparco e Posidônio.

[9] O Geogebra é um *software* de Matemática dinâmica, o qual combina conceitos de álgebra e geometria, além de disponibilizar de tabelas e gráficos em uma multiplataforma que pode ser utilizada por todos os níveis de ensino.

como se desenvolvia os valores de seno para um ângulo dado.

Através de um controle deslizante, o arco era variado a partir do eixo Ox, no sentido anti-horário, e a medida que isto acontecia um segmento (repesentado por uma barra vermelha no eixo Oy) calculava o valor do seno deste ângulo. Como pode ser observado nas figuras abaixo:



(a) Figura 1: Seno(30°) (b) Figura 2: Seno(90°) (c) Figura 3: Seno(135°)

Em seguida, foi feita uma animação, também no Geogebra, que foi construída da seguinte forma:

- No plano cartesiano Oxy foi criado um círculo de raio 1, com centro na origem $(0, 0)$.
- Através de um controle deslizante, o arco foi sendo variado, no sentido anti-horário, a partir do eixo Ox, como exemplificado acima.
- A medida que o arco variava, o seno do ângulo era calculado através da projeção ortogonal deste ângulo no eixo Oy.
- A função seno então foi definida como: O valor desta projeção em função da medida do arco.
- Através de um controle deslizante, foi estabelecida uma animação que projetasse o gráfico desta função no plano cartesiano.
- O gráfico está representado pelo traçejado marrom nas figuras abaixo:

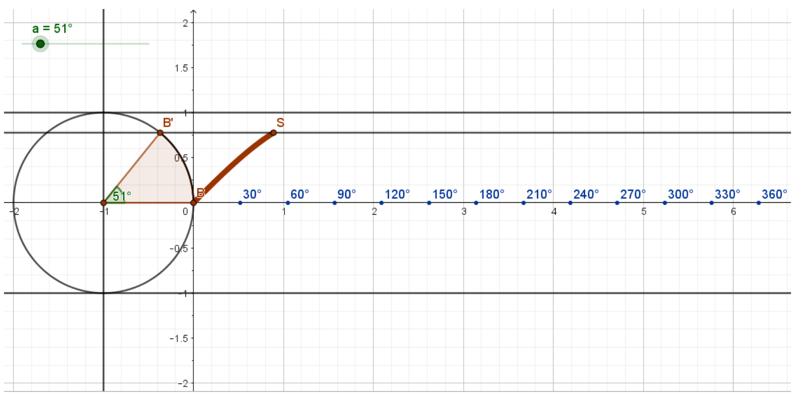


Figura 3.5: Seno(51°)

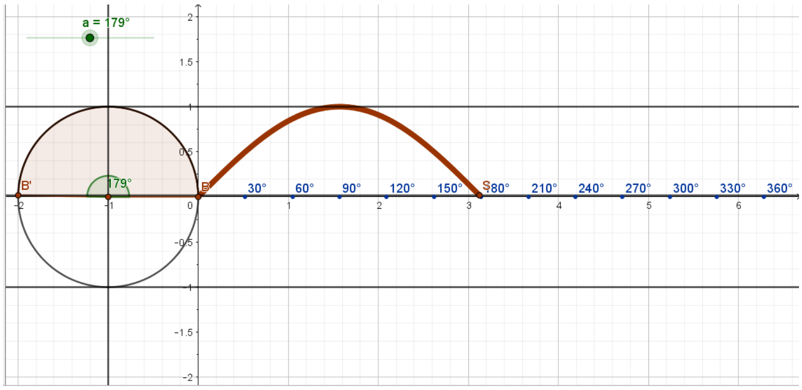


Figura 3.6: Seno(179°)

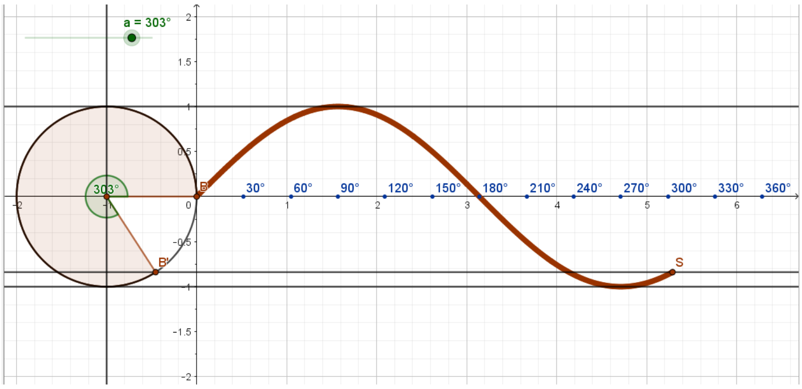


Figura 3.7: Seno(303°)

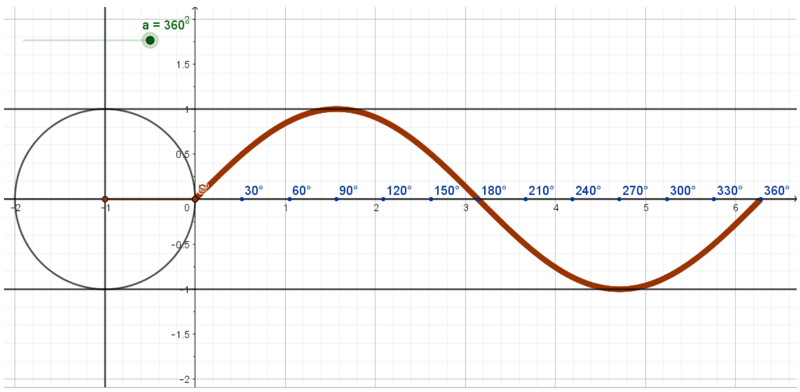


Figura 3.8: Gráfico do Seno

Devido ao curto tempo, o gráfico das funções *cosseno* e *tangente* não foram detalhados, mas foi explicado aos alunos como seria a ideia para desenvolver cada um deles. Após este momento, foi aplicada a Atividade 3 (Apêndice - Atividade 3), que abordava conceitos sobre as relações trigonométricas.

3.6.5 Atividade 4: Zero da Função Quadrática e a Fórmula de Bhaskara

Esta foi a primeira atividade desenvolvida no 4º bimestre. Neste dia, algumas aulas acabaram atrasando por conta de uma apresentação que aconteceria no primeiro horário para toda a escola. Isto acabou prejudicando o planejamento da pesquisa. E em algumas turmas foi necessário separar mais um dia para o seu desenvolvimento.

Primeiramente, foi definido o conceito de função de um modo geral e apresentados alguns dos nomes que contribuíram para os resultados que temos hoje, como se observa abaixo:

O conceito de função surge desde os babilônicos nas suas tabelas de argila. Eles construíam algumas colunas em que cada número de uma coluna era associado a um número em outra coluna.

Os egípcios também construíam tabelas (muitas vezes em papiros), que apresentavam o resultado de algumas hipóteses matemáticas.

Dentre os gregos, pode-se citar a contribuição de Ptolomeu com sua obra *Almagesto* (como já tinha sido mencionada na aula anterior).

Já no século XVI, obteve-se um relativo avanço no que se diz respeito à Álgebra, onde François Viéte inicia seus estudos baseado em parâmetros e variáveis. E segundo estudiosos, foi ele quem fez a distinção entre Álgebra e Aritmética.

No século XVII, Descartes e Fermat deram início, separadamente, ao método analítico para a introdução ao estudo das relações.

Por outro lado, Isaac Newton e Leibniz são os destaques do século XVIII. No conceito de função, acredita-se que a maior ajuda de Newton foi sua descoberta a respeito de uma série de potências, introduzindo o termo variável independente.

Neste mesmo século, surge pela primeira vez o conceito de função explicitamente na Matemática, com estudos de Leonhard Euler, pois foi ele quem definiu os termos: função contínua e descontínua, levando em consideração a lei de formação de cada uma.

Em seguida, foi explicitado a forma geral de uma função quadrática (os alunos já estavam um pouco familiarizados com a linguagem de função, pois haviam acabado de estudar função afim).

Após a definição, foi conceituado o zero da função e questionado aos alunos se eles conseguiam relacionar aquele conceito a algum conteúdo já estudado.

Alguns prontamente responderam: *"Fórmula de Bhaskara"*.

Mas antes de iniciar a demonstração da fórmula, foram explanados os pontos históricos sobre sua origem:

Bhaskara foi um matemático, professor, astrólogo e astrônomo indiano nascido em Vijayapura (1114-1185), o mais importante matemático do século XII e último medieval importante da Índia.

O costume de se dar o nome de Bhaskara para a fórmula de resolução de equação de 2º grau é aparentemente brasileiro, visto que não se encontra o nome Bhaskara para essa fórmula na literatura internacional.

Não foi ele quem deduziu esta fórmula, até porque as fórmulas surgem na Matemática só 400 anos após a sua morte.

As referências mais antigas sobre a resolução de problemas envolvendo equações do segundo grau foram encontradas em textos babilônicos escritos há cerca de 4000 anos atrás. Estes textos babilônicos eram conhecidos como **Regras**, as quais descreviam por extenso os procedimentos que deveriam ser feitos, sem utilizar a linguagem algébrica, hoje conhecida.

Foi só na Era das Fórmulas (1600) que se iniciaram as tentativas de desenvolver um procedimento único para a resolução de equações de 2° grau.

Embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de Bhaskara (Lilavati), não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação do 2ºgrau.

Em seguida, foi apresentada a demonstração da fórmula de Bhaskara para os alunos:

Teorema: Seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ uma função qudrática na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, então o zero da função será o(s) número(s) da forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}.$$

Demonstração: Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então o zero da função é o valor de x, tal que

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Como $a \neq 0$, então multiplique tudo por $\mathbf{4a}$. Assim,

$$\mathbf{4a} \cdot ax^2 + \mathbf{4a} \cdot bx + \mathbf{4a} \cdot c = \mathbf{4a} \cdot 0$$

$$\Longrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Agora, some $\mathbf{b^2}$ em ambos os termos da equação.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + \mathbf{b^2} = \mathbf{b^2}.$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac.$$

O lado esquerdo da equação é um trinômio quadrado perfeito, portanto:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Extraindo raiz quadrada em ambos os lados, obtém-se:

$$\sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Longrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Isolando x, tem-se:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Após a demonstração, os alunos resolveram 3 questões de aplicações sobre a utilização da fórmula de Bhaskara (Apêndice - Atividade 4). Em duas turmas, foi necessário utilizar a aula seguinte para a finalização da questões 2 e 3.

3.6.6 Atividade 5: Gráfico da Função Quadrática

Esta foi a última aula do projeto, aplicada no final de novembro. Foi complicado cativar a atenção dos alunos, pois eles já estavam em clima de férias, ainda mais por ser o último ano na escola.

No momento da aula, alguns nem queriam mais participar do projeto, outros ficavam de cabeça baixa ou mexendo no celular. Foi necessário chamar a atenção dos alunos várias vezes durante a aula.

Mas a maioria ainda estava interessada, pois sabiam da importância da pesquisa. Além disso, este seria um conteúdo abordado nas provas na semana seguinte.

Foi explicado aos alunos que esta aula seria sobre o gráfico da função quadrática; então primeiramente foi esboçado o gráfico da função $f(x) = x^2$ para que eles percebessem que curva se formaria.

Em seguida, foi pedido aos os alunos que sugerissem algumas funções quadráticas e utilizando o programa Geogebra estes gráficos eram esboçados. Os alunos começaram a perceber que cada curva possuía uma característica própria e começaram a questionar: *"Professora, por que às vezes fica pra cima e às vezes fica para baixo?"*

Antes de responder aos questionamentos, foi abordado o contexto histórico sobre a parábola:

O estudo das curvas, na matemática, é tão antigo quanto os três problemas clássicos da geometria[1]. Os gregos classificavam os lugares geométricos em três categorias: os lugares planos (incluíam todas as retas), os lugares sólidos (incluíam todas as cônicas) e os lugares lineares (incluíam as demais curvas). [35]

Mas a partir do século IV a.C., Menaecmus (discípulo de Platão) descobriu as secções planas de um cone - parábola, elipse e hipérbole. E utilizou estas curvas para tentar solucionar o problema da duplicação do cubo, que até então era impossível de ser solucionado utilizando régua e compasso.

As cônicas também foram estudadas de forma mais avançada por Apolônio de Perga, por volta de 225 a.C. Apolônio também foi astrônomo e criou um modelo para explicar o movimento dos planetas, chamado epiciclo. Este modelo foi, posteriormente, aperfeiçoado por Ptolomeu (o qual também apareceu em sua obra *Almagesto*).

Nesta época, os gregos não exploravam todas as curvas admitidas por eles, além disso, os seus estudos se baseavam apenas no ponto de vista geométrico. Mas com o surgimento de problemas práticos da astronomia, foram incentivados a estudarem as cônicas.

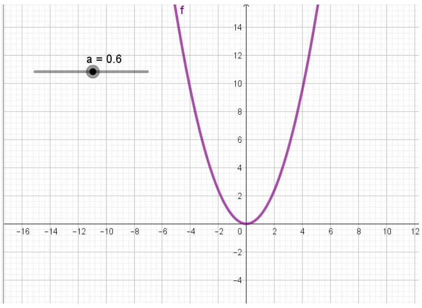
Muito tempo depois, por volta do século XVII, surge a geometria analítica. Com isso, o estudo dos objetos geométricos (em particular: as curvas) se tornou cada vez mais parte da álgebra. Aqui, ao invés de analisar a curva em si, considerava-se uma equação que relacionava as coordenadas x e y através de pontos das curvas.

Uma cônica, em particular, é muito estudada no ensino básico: a parábola; visto que esta curva pode ser associada ao gráfico de uma função quadrática. Nesta aula, o objetivo seria mostrar aos alunos as características desta curva.

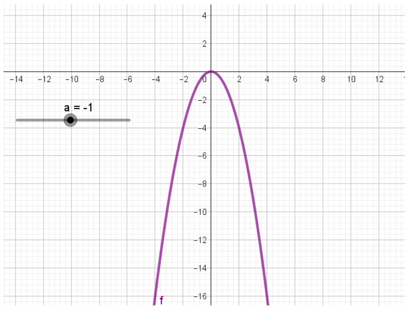
Após a abordagem histórica, foi detalhado como é feita a construção da parábola através de uma função quadrática pré-estabelecida e também foi detalhado as suas propriedades, através do estudo dos coeficientes da função, como será descrito abaixo:

Com o auxílio do Gegogebra, uma função quadrática foi criada de modo que um dos coeficientes fosse um controle deslizante. Por exemplo, no primeiro caso, foi utilizada a função $f(x) = a \cdot x^2$, na qual, a medida que o coeficiente a variava o gráfico se movia, como se observa nas figuras abaixo:

[1] Os três problemas clássicos da geometria - a duplicação do cubo, a trisecção do ângulo e a quadratura do círculo - são conhecidos como impossíveis de serem solucionados com régua e compasso.



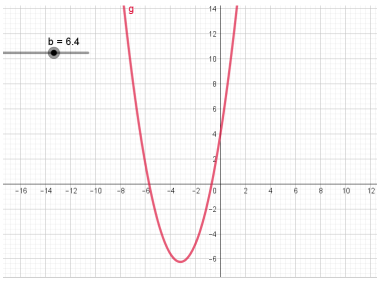
(a) Figura 4: $f(x) = 0,6x^2$



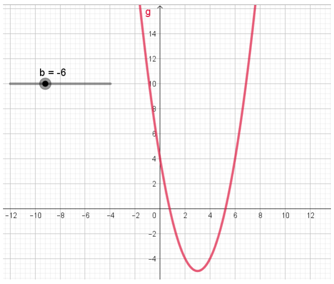
(b) Figura 5: $f(x) = -x^2$

Aí foi questionado aos alunos o que eles estavam observando. Eles prontamente responderam que se o “a” fosse positivo a parábola ficava para cima e se fosse negativo ficava para baixo. Então foi definida a ideia de concavidade e também foi perguntado o que aconteceria se o “a” fosse zero. Um aluno já percebeu e falou: *“Se o “a” fosse zero, ficaria uma reta e não uma parábola”*

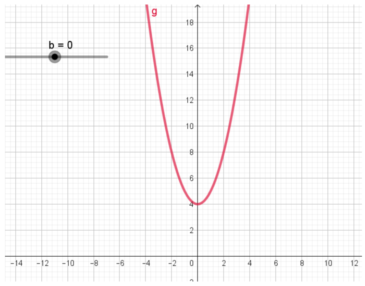
Também foi analisado o coeficiente “b”, através da função $f(x) = x^2 + bx + 4$. E novamente, se variava o coeficiente e observava-se os resultados no gráfico:



(c) Figura 6: $f(x) = x^2 + 6,4x + 4$



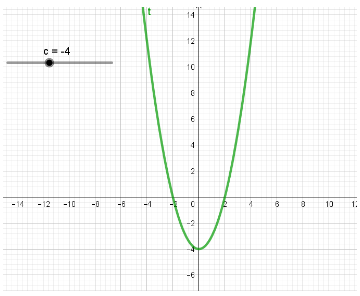
(d) Figura 7: $f(x) = x^2 - 6x + 4$



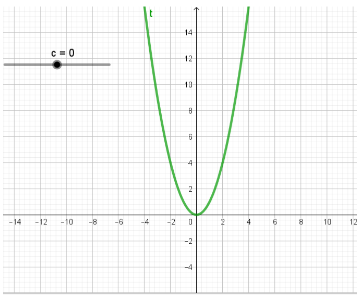
(e) Figura 8: $f(x) = x^2 + 4$

Os alunos observaram então, que o coeficiente “b” determinava em qual ramo (crescente ou descrescente) a parábola cortaria o eixo Oy.

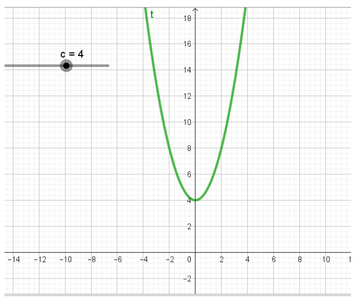
Também foi analisado o coeficiente “c”, da mesma maneira que os anteriores, agora através da função $f(x) = x^2 + c$



(f) Figura 9: $f(x) = x^2 - 4$



(g) Figura 10: $f(x) = x^2$



(h) Figura 11: $f(x) = x^2 + 4$

Além disso foram explicados os papéis do vértice e do zero da função no gráfico. E também foi apresentado o método de encontrar as raízes da equação utilizando soma e produto.

Por fim, os alunos resolveram 3 questões da Atividade 5 (Apêndice - Atividade 5). Nas questões 1 e 2 eles deveriam esboçar o gráfico das funções seguindo cada um dos passos que eram sugeridos; e a questão 3 era relacionada ao cálculo do vértice.

3.6.7 Questionário final

O questionário final (Apêndice - Questionário final) foi aplicado no dia 29 de novembro de 2018, finalizando assim as pesquisas para que se pudesse dar início ao desenvolvimento desta dissertação.

O questionário era composto de 19 questões com perguntas variadas desde a satisfação do projeto à relevância que ele teve ao aprendizado dos alunos.

Algumas perguntas do Questionário diagnóstico foram repetidas para que pudesse se observar com precisão a evolução dos alunos e de que maneira as aulas teriam influenciado em seus conhecimentos.

Pelo calendário escolar, esta seria praticamente a última semana de aula ativa, o que prejudicou o desenvolvimento do questionário, visto que alguns alunos já não estavam mais comparecendo à escola. Portanto, dos 81 alunos que iniciaram o projeto, 4 não preencheram este questionário.

Assim, os dados que serão apresentados na análise da seção 4.1.7 abrangem apenas os 77 alunos presentes.

Capítulo 4

Análise de Resultados

4.1 Análise das Atividades

4.1.1 Questionário Diagnóstico

Ao iniciar o questionário, os alunos estavam apreensivos sobre o que iriam responder. Alguns ficavam observando a resposta dos colegas; outros tinham um certo receio de marcar as opções *Não* ou *Não sei*. Mas a professora falou que não precisavam se identificar e assim eles ficaram mais tranquilos.

O público era composto de 51 mulheres e 30 homens, todos entre 13 e 16 anos. A grande maioria (96%) destes alunos estudou a maior parte de sua vida em Escola Pública e apenas 1 aluno alegou fazer uso de aulas particulares de Matemática.

Com relação à Matemática, 60% dos alunos afirmaram gostar desta disciplina. E em uma escala de 0 (péssimo) a 10 (excelente), eles deveriam responder sobre como classificam os seus conhecimentos em Matemática. A média das respostas obtidas pelos alunos que afirmaram gostar da disciplina foi 6,0; já entre os que afirmaram não gostar, a média foi 4,0.

Por outro lado, ao serem questionados sobre o quanto eles achavam as aulas de Matemática interessante (também em uma escala de 0 a 10), a média obtida dentre os alunos que afirmaram gostar da disciplina foi 8,0; e dentre os que afirmaram não gostam, foi 6,0.

Este último resultado mostra que embora os alunos sintam dificuldades em aprender Matemática, eles acham as aulas interessantes e se esforçam para tentar compreendê-las.

Na questão oito, os alunos deveriam marcar uma das opções (nunca, raramente, às vezes, quase sempre, sempre) sobre sua capacidade de conseguir responder aos exercícios após as explicações do (a) professor (a) nas aulas de matemática. As respostas, em porcentagem, estão exibidas no gráfico abaixo:

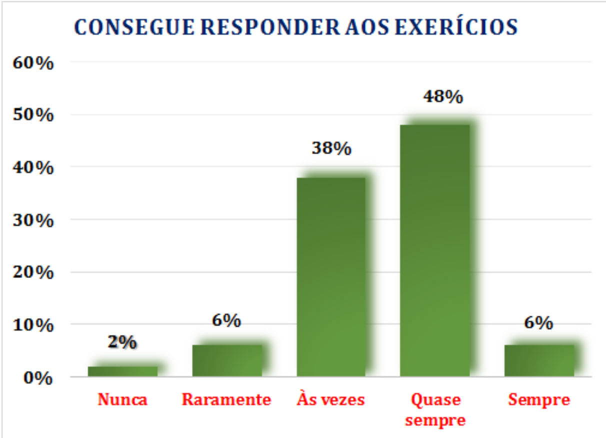


Figura 4.1: Gráfico 1

Também foram questionados sobre qual seria a maior dificuldade quando estão diante de uma questão de matemática. As respostas, também em porcentagem, estão representadas no gráfico abaixo:

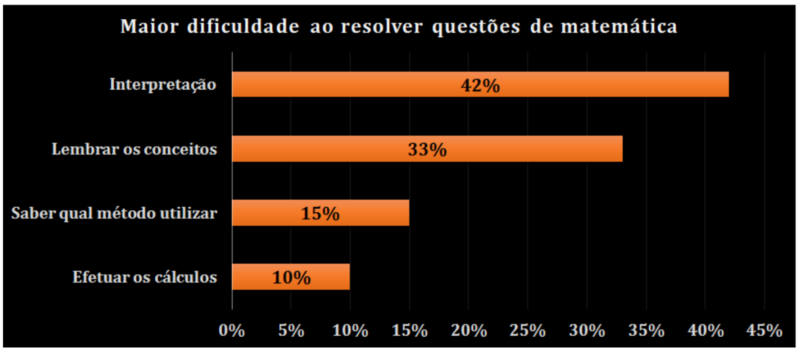


Figura 4.2: Gráfico 2

Com relação aos termos matemáticos, 67% dos alunos afirmaram saber o que é uma propriedade ou teorema. Enquanto, apenas 33% disseram saber o que é uma demonstração.

Ao serem questionados se eles achavam mais fácil entender o conteúdo quando o professor explica o porquê deles ou quando aborda o seu contexto histórico, eles deveriam responder: *Sim*, *Não* ou *Não faz diferença*. Os resultados obtidos podem ser observados abaixo:

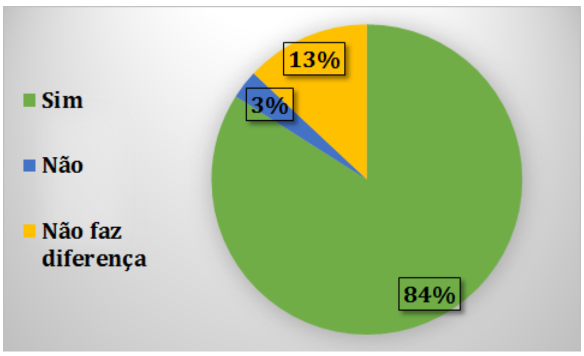


Figura 4.3: Gráfico 3

Por outro lado, 90% dos alunos responderam que gostariam de conhecer "os porquês" das propriedades matemáticas e também da história dos conteúdos. Porcentagem maior do que a observada no gráfico acima (pelos alunos que marcaram a opção *Sim*).

Percebe-se então que embora uma pequena parte dos alunos não deem tanta importância a estudar matemática de maneira mais aprofundada, eles têm uma certa curiosidade intrínseca para descobri as verdades por trás de cada resultado.

4.1.2 Atividade 1: Teorema de Tales

Esta foi a primeira aula do projeto. Sendo assim, os alunos estavam um pouco apreensivos e ansiosos para saber como seria. Os olhares eram os mais diversos, alguns se mostravam muito atentos e outros nervosos, com medo de não conseguirem compreender o que seria dito, pois eles estavam cientes de que seria uma aula mais avançada.

Durante a abordagem histórica eles ficaram muito curiosos para compreender o que estava sendo dito. Alguns faziam questionamentos, outros não demonstraram muito interesse.

Na primeira demonstração, percebeu-se um certo desespero no olhar de alguns, pois eles acharam muito difícil o passo a passo. Mas quando surgiam as dúvidas, os passos eram retomados para que ninguém ficasse perdido.

Para demonstrar o Teorema de Tales, demorou-se um tempo para que eles compreendessem a definição de segmentos comensuráveis, pois na mente deles, não tinha como dois segmentos não serem comensuráveis. Um aluno até comentou: *"Você sempre consegue dividir um segmento em partes bem pequenininhas para que caiba no outro segmento também"*.

Depois de definido este conceito, as demonstrações do Teorema de Tales e do Corolário foram de fácil compreensão para todos. Porém alguns alunos atrapalhavam o desenvolvimento da aula com conversas paralelas, tirando a concentração de outros colegas. Foi necessário chamar a atenção várias vezes durante a aula.

Com relação a Atividade, o maior problema que se observou em basicamente todas as questões era na interpretação de como aplicar o Teorema de Tales (embora todas as questões tivessem figuras).

Questão 1: Nesta primeira questão, todas aplicaram o Teorema de Tales corretamente, mas na hora de desenvolver a equação, alguns esqueceram de utilizar a propriedade distributiva. Portanto, um dos erros mais observados foi este:

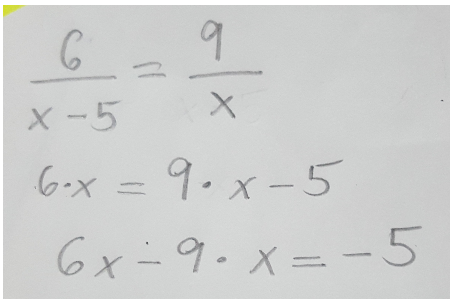


Figura 4.4: Resolução 1

Outro erro, não tão comum quanto o primeiro, mas bem notado foi o seguinte: quando o coeficiente da váriavel era um número negativo, os alunos pensavam que ele estava subtraindo e não multiplicando, como se vê abaixo:

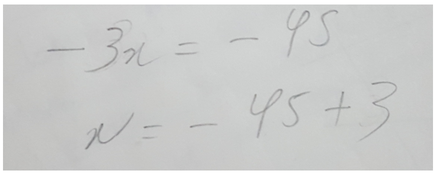


Figura 4.5: Resolução 2

Este último erro chama muito a atenção, porque ao ser questionado sobre isto, o aluno respondeu: *"Eu aprendi assim: se o número está negativo, passa positivo pro outro lado"*. Por isso, é necessário que os professores tenham muito cuidado com a comunicação que estão tendo com seus alunos, pois muitas vezes a mensagem que se fala pode ser interpretada equivocadamente pelos alunos.

Questão 2: Esta foi uma das questões que gerou mais dúvidas com relação a aplicação do Teorema, pois os alunos não conseguiram perceber que os segmentos que não possuíam um valor específico na figura seriam justamente as variáveis do problema. Além disso, eles estavam fazendo uma certa confusão sobre quais eram as retas paralelas e as transversais.

Foi necessário intervir para que toda a turma entendesse que eles poderiam chamar o segmento AE de x e o segmento FG de y, por exemplo. Após esta intervenção, a maioria compreendeu o que deveria ser feito, mas alguns alunos ainda não percebiam que deveriam aplicar o Teorema de Tales duas vezes.

No desenvolvimento da equação, não se observaram erros muito relevantes, mas notou-se que muitos alunos apenas calcularam a medida dos segmentos AE e FG, mas não calcularam a medida de AG, devido a uma falta de atenção no enunciado.

Questão 3: As dúvidas da questão 3 foram muito parecidas com a questão 1, mas neste caso eles já ficaram mais atentos com relação ao uso da propriedade distributiva. Alguns focaram tanto na propriedade que acabaram "utilizando" onde nem deveriam, como na resolução abaixo:

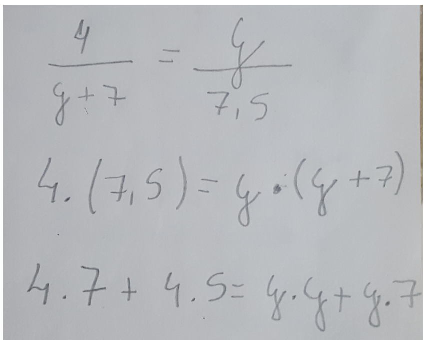


Figura 4.6: Resolução 3

Outro erro muito observado foi no desenvolvimento da equação de 2º grau. Quando chegavam no passo: $y^2 + 7y = 30$, alguns já queriam aplicar a fórmula de Bhaskara, sem antes reduzir a equação ao formato $ax^2 + bx + c = 0$.

Sem contar que muitos alunos ao perceberem que deveriam aplicar a fórmula de Bhaskara se recusaram a terminar a questão, querendo deixá-la incompleta. Mas foram instruídos que poderiam pular para a próxima, mas que voltassem para ela depois.

Questão 4: De início, se observou que muitos alunos já estavam fadigados desta Atividade e queriam entregar sem terminar esta questão. Muito reclamaram porque queriam calcular só o "x", mas diante de muito insistência da professora, eles acabaram finalizando.

Com relação à resolução, esta, sem dúvidas, foi a questão mais trabalhosa para os alunos. Primeiro, pois eles tinham que aplicar o Teorema de Tales mais de uma vez, segundo pois deveriam utilizar o Corolário em uma das aplicações e por fim, alguns se confundiram na identificação de quais eram os segmentos proporcionais.

Muitos alunos escreveram a seguinte proporção: $\frac{6}{y} = \frac{z}{12}$, pois ao invés de tentarem compreender quais eram os segmentos proporcionais, eles simplesmente olharam para o desenho e escreveram a razão "de cima para baixo".

Outros não conseguiram aplicar a informação que foi dada no enunciado sobre a soma dos segmentos x e z.

Conclusão: De um modo geral, esta primeira atividade mostrou que os alunos apresentam dificuldades de aplicar o Teorema de Tales quando o "desenho" não está esboçado como na questão 1.

Com relação ao desenvolvimento, o que mais se observa é um certo esquecimento com relação a propriedades estudadas anteriormente, como se mostrou no caso da distributiva.

Mas após todas as correções, observou-se que a compreensão do Teorema de Tales foi satisfatória dentro do que se esperava para esta aula.

4.1.3 Atividade 2: Teorema de Pitágoras

No início da aula, os alunos estavam menos apreensivos do que na primeira, pois já haviam entendido como seria o ritmo. Mas estavam perguntando se a demonstração seria difícil de entender. A professora explicou que estima-se a existência de mais de 300 demonstrações do Teorema de Pitágoras; algumas mais simples outras mais elaboradas, mas que para todos pudessem acompanhar e compreender a aula tranquilamente, a demonstração escolhida utilizaria apenas conceitos de áreas.

No desenrolar da demonstração, notou-se que alguns alunos não lembravam as fórmulas destas áres, enquanto outros prontamente responderam quando foram questionados.

O passo a passo foi construído de maneira dedutiva com a participação dos alunos, de modo que a cada argumentação eles eram questionados sobre qual manipulação algébrica poderia ser feita para se chegar no resultado desejado.

Ao final da aula expositiva, eles ficaram surpresos com a simplicidade, pois eles esperavam uma demonstração muito mais elaborada deste teorema, dada a sua popularidade. Percebeu-se então, um certo brilho em seus olhares, pois eles começaram a perceber que a Matemática pode ser acessível a todos.

No momento de Atividade, observou-se uma certa dificuldade em "identificar o triângulo retângulo" nas questões 2 e 3, pois estas não vinham anexadas de figuras. E nas que apresentavam o desenho, observou-se outras dificuldades que serão relatadas abaixo:

Questão 1: O problema mais observado assim que eles iniciaram esta questão foi com relação a não identificação correta dos lados do triângulo, visto que alguns alunos escreveram a equação da seguinte forma:

$$x^2 + (x+4)^2 = (x-4)^2$$

Mesmo após a montagem correta, muitos não se atentaram ao desenvolvimento correto dos produtos notáveis e cometeram aquele "erro clássico" que sempre aparece nas aulas de matemática:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Neste momento, foi necessário uma intervenção geral, já que 90% da turma não conseguia lembrar como deveriam utilizar os produtos notáveis.

Também foram observados muitos erros básicos nos cálculos de potência, jogos de sinais na divisão e desenvolvimento de equações. Mas uma solução, em particular, chamou atenção pela criatividade e por fugir do que era esperado pela professora.

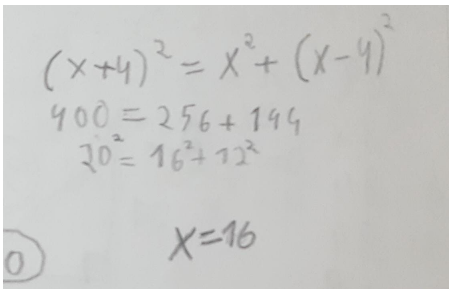


Figura 4.7: Resolução 4

Esta solução, mostra um pouco do que tem sido dissertado neste trabalho. Sobre a importância da investigação e exploração do aluno. Sobre pensar além do óbvio e enxergar várias possibilidades em situações-problemas.

Após o desenvolvimento dos produtos notáveis os alunos estavam saturados da questão, pois ainda teriam que reduzir a equação e aplicar fórmula de Bhaskara. Alguns não queriam terminar este processo e foram logo para a questão 2, deixando esta questão incompleta.

Questão 2: Nesta questão, os maiores problemas foram a interpretação e a falta do desenho. Após entenderem que eles deveriam esboçar o desenho, eles assim o fizeram e preencheram os lados com as medidas informadas no enunciado, mas não sabiam o que deveriam fazer em seguida. Foi perguntado a eles o que faltava para que o comprimento da pista fosse calculado e só então eles compreenderam que deveriam calcular a hipotenusa.

No desenvolvimento da questão, não se observaram muitas dificuldades, apenas no final quando precisaram calcular $\sqrt{1225}$. A maioria ficou testando vários números que pudessem ser a solução, mas sem pensar logicamente em quais opções seriam válidas. Por exemplo, alguns alunos estavam testanto 21×21, e aí foram questionados pela professora: *"Qual será o algarismo da unidade do produto* 21×21*?"*, *"Vale a pena testar este número?"*. Após os questionamentos, alguns perceberam que só precisariam testar os números terminados em 5, mas a grande maioria prefiriu seguir o caminho mais exaustivo.

Após determinarem o valor da hipotenusa, muitos alunos não calcularam o comprimento da pista, pois pensavam que a questão terminava apenas no cálculo da hipotenusa, talvez por uma desatenção na leitura do enunciado.

Questão 3: Aqui, os alunos estavam um pouco confusos sobre a aplicação do Teorema. Um aluno até questionou: *"Mas professora, como vou usar Pitágoras se ele ta falando do quadrado e não do triângulo?"*. Aí se observa novamente uma falta de atenção ao que foi pedido no enunciado e provavelmente o aluno não deu tanta relevância a palavra "diagonal", que era a chave do problema.

Após entenderem como deveriam esboçar o desenho, eles conseguiram aplicar o Teorema; entretanto observou-se uma série de erros no desenvolvimento algébrico.

Nas duas soluções a seguir, observa-se o uso indevido dos parênteses e/ou a falta deles.

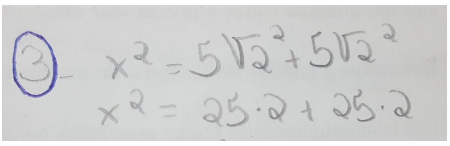


Figura 4.8: Resolução 5

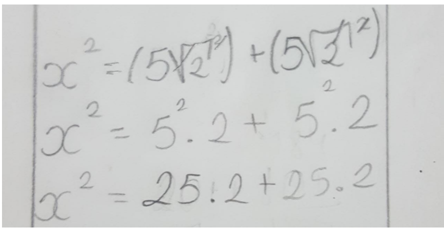


Figura 4.9: Resolução 6

Este outro aluno provavelmente confundiu a medida dos lados com a medida das diagonais.

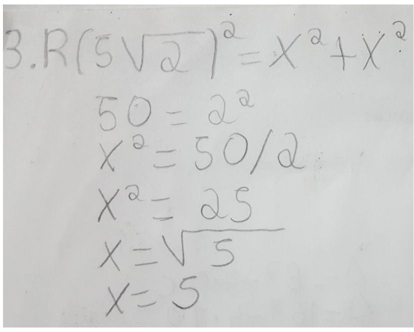


Figura 4.10: Resolução 7

Por outro lado, uma solução (correta) em particular chamou a atenção, pois o aluno respondeu diferente de todos os outros:

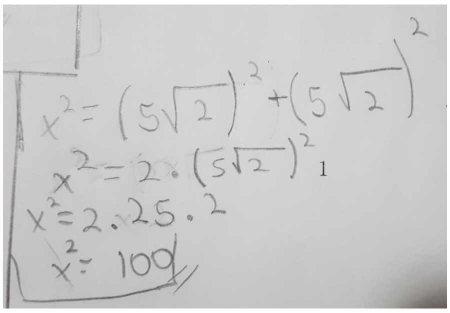


Figura 4.11: Resolução 8

Questão 4: Logo no início da questão, a mesma pergunta era feita por todos os cantos: *"Professora, o que é um triângulo isósceles mesmo?"*, ainda que o desenho estivesse esboçado logo abaixo. Aí já se nota que muitas vezes os alunos nem terminam de ler a questão (não procuram entender de forma independente) e já recorrem ao professor.

Após a explanação, logo se observou que a maioria identificou erroneamente os lados congruentes de medida $15cm$. Alguns colocaram este valor na base.

Além disso, uma parte dos alunos tentava aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo isósceles, pois não perceberam que havia um triângulo retângulo interno ao isósceles.

Outro erro muito comum foi na montagem da equação, pois eles eram impulsionados a escrever "$x^2 = ...$", como se o "x" sempre fosse a hipotenusa, assim como pode ser observado na resolução abaixo:

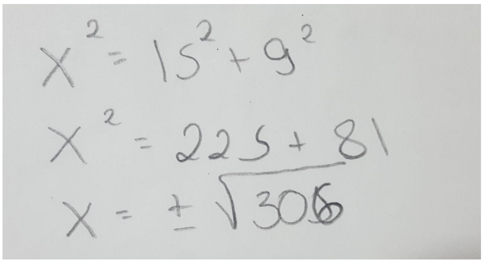


Figura 4.12: Resolução 9

No momento de calcular a área, a maioria dos alunos considerou o valor da base como sendo apenas o valor da hipotenusa que haviam calculado, sem se atentar que este valor correspondia somente à metade desta base. Sem contar a quantidade de alunos que nem calculou a área.

Observou-se também que os estudantes não estão acostumados a efetuar divisão pelo algoritmo da divisão euclidiana, pois a maioria deles recorria à várias tentativas exaustivas de multiplicação para encontrar a solução desejada.

Conclusão: Por fim, o que se resume desta análise é que os alunos têm uma certa dificuldade de aplicar o Teorema de Pitágoras, porém as dificuldades mais apresentadas estão sempre relacionadas a dúvidas ou esquecimento de conceitos e propriedades básicas estudadas em momentos anteriores.

4.1.4 Atividade 3: Relações Trigonométricas

O desenvolvimento desta aula foi um pouco atípico comparado às duas primeiras, a começar pelo fato de ter acontecido no final do 3º bimestre. Assim, os alunos estavam ansiosos e nervosos ao mesmo tempo, com aquele sentimento pré-prova e também pela sensação de estarem finalizando o ano letivo. Alguns estavam aflitos por não estarem entendendo este conteúdo.

Muitos deles alegavam que este era o conteúdo mais difícil do ano. Então o início da aula já foi de certa maneira conturbado, devido a estes fatores. Eles queriam tirar muitas dúvidas com relação a um exercício da aula passada; e isso acabou atrasando o andamento da aula.

Após se acalmarem, foi explicado a eles que esta aula seria um pouco mais leve, pois não teria demonstração, mas que eles iriam aprender um conteúdo que só seria abordado no ensino médio. Neste momento, muitos se sentiram entusiasmados e curiosos (afinal, eles estariam estudando um conteúdo mais avançado); outros desmotivados (pois pensavam que não conseguiriam acompanhar o ritmo da aula).

Mas a professora explicou a eles que mesmo o conteúdo sendo mais avançado, ela abordaria de uma maneira que todos pudessem compreender. Com isso, eles ficaram mais tranquilizados.

Primeiramente foi necessário explicar aos alunos como funcionava o círculo trigonométrico (que até então eles desconheciam). Como as explicações eram bastante visuais (devido ao uso do geogebra), eles conseguiram entender.

Em seguida, foi explanado como seria construído o gráfico e após detalhar todos os passos, a animação foi apresentada. Este foi o momento mais gratificante da aula, pois a feição dos alunos era de total surpresa. Eles ficaram muito empolgados com a construção do gráfico.

Muitos afirmaram que essa tinha sido a aula mais interessante de todas. Uma aluna chegou a dizer o seguinte: *"Professora, eu estou tão feliz que consegui entender. Nunca pensei que fosse aprender matemática assim"*. Tal fala chamou bastante a atenção da professora, pois esta aluna, geralmente, não se sentia muito capaz nas aulas de matemática.

Sem dúvidas, foi uma aula muito surpreendente, pois os alunos que chegaram totalmente desiludidos, perceberam que a matemática pode, sim, ser interessante.

No momento de atividade, as dúvidas mais recorrente eram: identificar qual relação trigonométrica deveria ser aplicada e contruir o triângulo retângulo nas questões que não tinham o desenho.

Questão 1: De início, a confusão maior era por onde começar. Um aluno perguntou: *"Professora, como vou calcular x e y ao mesmo tempo?"*. A professora sugeriu: *"Esqueça uma das variáveis por enquanto, digamos y, e olhe apenas para os lados que sobraram"*. Assim, todos que alegavam ter esta dúvida, recebiam a mesma sugestão e conseguiam resolver.

Após a identificação da relação trigonométrica, os alunos apresentaram muitas dúvidas em operações com radicais (conteúdo que havia sido trabalhado no 1º bimestre e que muitos não lembravam). Foi necessária uma intervenção geral, no quadro, para relembrar algumas propriedades.

Além disso, algo muito comum foi observado: todos os alunos começaram calculando o valor de x (utilizando *seno*) que era $\sqrt{3}$ e com exceção de uma aluna, todos utilizaram *cosseno* para calcular o valor de y. Apenas esta aluna utilizou a *tangente* no seu desenvolvimento, pois ela percebeu que seria mais vantajoso trabalhar com o $x = \sqrt{3}$ (que ela acabara de calcular) do que utilizar a hipotenusa que era $6\sqrt{3}$. Os outros alunos prefiriram não fugir do óbvio, mesmo sendo sugerido pela professora. Alguns até alegaram: *"Não professora, desse jeito é mais fácil"*

Destarte se percebe que a visão de "mais fácil" para eles é, na verdade, a solução mais confortável e óbvia, mesmo que ela não seja, de fato, "mais fácil".

Questão 2: Aqui, novamente se apresentaram os mesmos problemas da aula anterior: interpretar a questão de modo que fossem capazes de identificar o triângulo retângulo, que a princípio não estava esboçado.

Outra dúvida muito comum foi com relação à posição do ângulo reto e do ângulo agudo. E novamente uma intervenção foi necessária para que eles conseguissem identificar corretamente.

Em seguida, alguns alunos posicionaram os valores dos lados de maneira errônea, colocando o comprimento da escada no lugar da altura e vice-versa, como se pode observar abaixo:

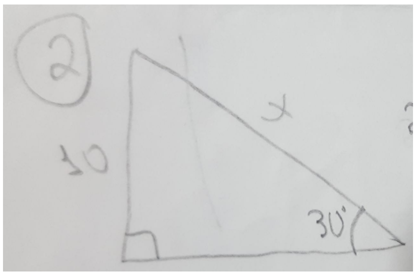


Figura 4.13: Resolução 10

Questão 3: Os mesmos problemas com relação a falta de figura se repetiram, mas desta vez, em menor quantidade, pois a maioria dos alunos já havia entendido que eles deveriam fazer o esboço e marcar corretamente os ângulos e lados de acordo com as informações.

Em contrapartida, alguns alunos não queriam resolver esta questão, pois como o horário de aula estava findando, eles queriam guardar os materias e alegaram que já estavam cansados e que terminariam depois. Outros ficaram apenas esperando os colegas resolverem para copiar a solução.

Neste momento a professora precisou conversar com os alunos e explicar novamente da importância do projeto para ambas as partes. Alguns retomaram as tarefas, outros continuaram enrolando até que tocasse o sinal.

Em uma parte da resolução, alguns alunos estavam se confundindo sobre a posição correta dos lados e qual destes deveriam calcular. Uma aluna tentou calcular a hipotenusa ao invés do cateto oposto, como se observa abaixo:

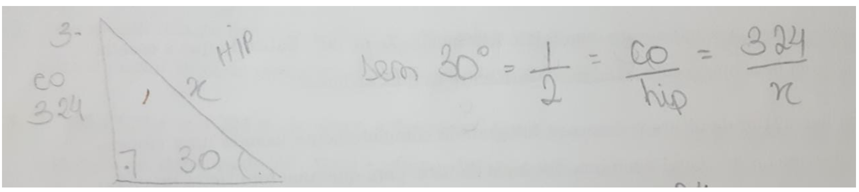


Figura 4.14: Resolução 11

Além disso, muito não substituíram o valor de $\sqrt{3}$ no final da questão, pois como o radical aparecia no denominador da fração, eles não sabiam o que fazer. Ao notar esta problemática, a professora relembrou como racionaliza denominadores, para que ao invés de uma divisão, eles utilizassem a multiplicação. E assim, eles acharam mais fácil efetuar os cálculos.

Questão 4: Poucos alunos conseguiram chegar nesta questão até o fim da aula. Portanto, foi separado um momento no início da aula seguinte para que eles finalizassem.

Como o conceito de triângulo isósceles havia sido relembrado na aula de *Teorema de Pitágoras*, muitos alunos lembraram, mas se esqueceram que neste triângulo, além dos lados, os ângulos da base também eram congruentes.

Após a explanação, a maioria conseguiu desenhar e identificar o triângulo retângulo. Enquanto outros, que não haviam traçado a altura, estavam tentando aplicar as relações trigonométricas direto no triângulo isósceles.

Uma solução bem peculiar chamou a atenção da professora, pois o aluno entendeu que o 45° era o comprimento da base e não do seu ângulo. Observe:

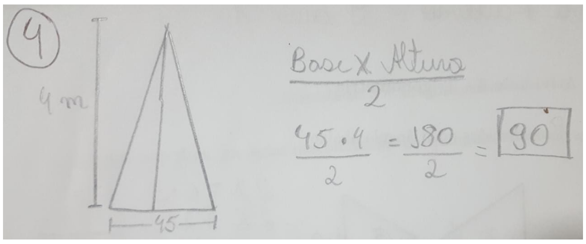


Figura 4.15: Resolução 12

Após calcularem a hipotenusa do triângulo retângulo, mais da metade dos alunos utilizaram este valor para efetuar o cálculo da área do triângulo isósceles, sem se atentar que este representava apenas a metade da base.

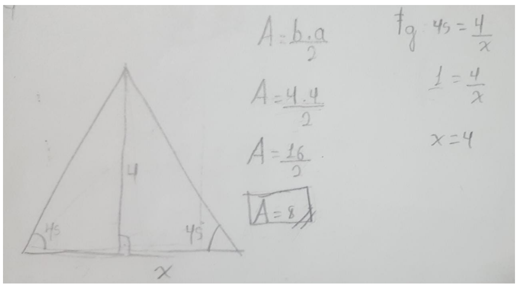


Figura 4.16: Resolução 13

Conclusão: De um modo geral, nesta aula foi observado que os alunos apresentam dificuldades de identificar qual relação trigonométrica devem utilizar, além de uma insegurança quando os problemas não apresentam figuras.

Com relação a desenvolvimento de cálculos, os maiores problemas analisados foram em questões que abordam operações e propriedades com radicais.

4.1.5 Atividade 4: Zero da Função Quadrática e a Fórmula de Bhaskara

Esta, sem dúvidas, foi a aula mais aguardada pelos alunos, pois a professora já havia dito previamente que eles estudariam a demonstração da fórmula de Bhaskara (conteúdo abordado no início do 2º bimestre).

Em toda aula eles perguntavam: *"É hoje que a gente vai ver a demonstração de Bhaskara?"*. Assim, notava-se uma ansiedade demasiada em alguns olhares. Além disso, eles também ficaram surpresos ao saber que não foi exatamente Bhaskara quem inventou a fórmula.

Como a demonstração seguia uma lógica dedutiva e de manipulações algébricas, a cada passo efetuado, a professora questionava aos alunos se eles imaginavam qual seria o passo seguinte. E quando estava finalizando a demonstração, alguns já tinham percebido qual manipulação deveriam fazer para se obter o resultado.

Ao terminar, eles ficaram admirados pela facilidade da demonstração, pois eles esperavam algo mirabolante. Ficaram tão maravilhados, que em uma das turmas os alunos aplaudiram quando a demonstração finalizou.

Depois deste momento, alguns alunos conversaram com a professora afirmando que estavam começando a gostar mais de Matemática; outros falaram que estavam pensando em cursar Matemática. Foi um momento muito especial.

Em seguida, no momento de atividade, os alunos deveriam resolver as 3 questões sugeridas.

Questão 1: Nesta questão, nenhum aluno conseguiu associar o texto a uma equação algébrica e alguns nem lembravam o que era produto.

Após terem compreendido, observou-se que eles queriam resolver a questão por tentativa e erro e não através de uma solução dedutiva. Como a dúvida era muito geral, a professora deu uma introdução no quadro para clarear as ideias.

Após este momento, eles conseguiram escrever a equação, mas tiveram algumas dificuldades no desenvolvimento, pois precisavam utilizar a propriedade distributiva da multiplicação e alguns já não lembravam como fazer.

Um erro muito comum foi o seguinte:

$$(18 + x) \cdot (15 + x) = 18 \cdot 15 + 18 \cdot x \cdot 15 \cdot x + x \cdot x.$$

Como se observa na figura abaixo:

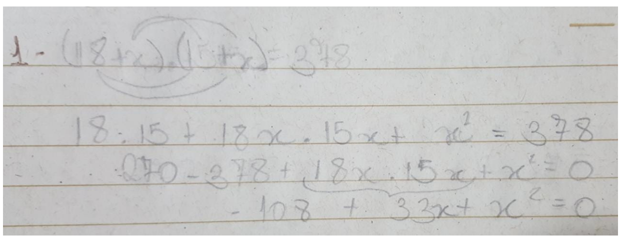


Figura 4.17: Resolução 14

Ao serem questionados sobre esta solução, os alunos não sabiam responder, mas talvez eles pensaram que na segunda vez que aplicaram a distributiva, precisariam repetir a multiplicação. Eles não perceberam que a multiplicação já estava sendo utilizada na "ligação" entre um parênteses e outro.

Após as devidas correções, os alunos conseguiram aplicar a fórmula de Bhaskara tranquilamente.

Questão 2: Aqui, o problema maior foi lembrar a fórmula para calcular a área do trapézio. Menos de 5 alunos conseguiram lembrar com precisão.

Uma certa confusão no uso dos parênteses também foi observada. Alguns nem utilizaram, escrevendo da seguinte forma:

$$\frac{2x + 1 + 9 \cdot x + 3}{2}.$$

Também se observaram erros no desenvolvimento da expressão, como o da figura abaixo:

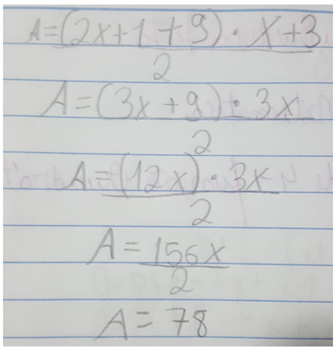


Figura 4.18: Resolução 15

Este erro é muito comum nas soluções dos alunos, pois eles esquecem que só podem adicionar termos semelhantes. E mesmo isso sendo reforçado várias vezes pela professora, vez ou outra eles cometem este equívoco.

Após o desenvolvimento da expressão que representava a área, eles conseguiram resolver os itens “a”, “b” e “c” sem maiores problemas.

Questão 3: Nesta questão, eles não estavam confortáveis para resolver, porque as variáveis eram diferentes daquilo que era de seu costume. E por incrível que pareça, os alunos sentem um certo bloqueio quando são tirados de sua zona de conforto, mesmo que isto signifique um simples troca de variáveis.

Ao obervar estas indagações, a professora explicou que a variável era apenas um símbolo, e que eles poderiam trocar “t” por x se achassem melhor.

Na letra “a”, eles conseguiram resolver sem maiores dúvidas. Já na “b” alguns não estavam entendendo como calculariam o tempo que foi solicitado. Assim lhes foi explicado que a bola atinge o solo quando a sua altura é zero, ou seja, eles deveriam calcular o zero da função.

Muitos recorreram à fórmula de Bhaskara, mas outros lembraram dos métodos para resolver equações de 2º grau incompletas e preferiram resolver por fatoração. Um dos alunos, entretanto esqueceu de considerar o caso $t = 0$, como se vê abaixo:

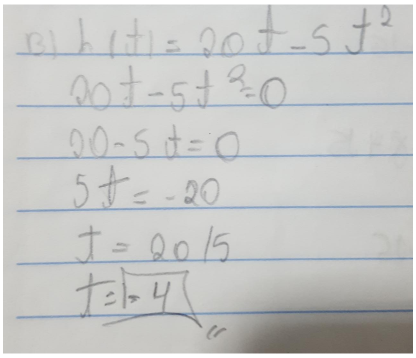


Figura 4.19: Resolução 16

Conclusão: De um modo geral, pode-se dizer que os alunos conseguem utilizar corretamente a fórmula de Bhaskara, mas esquecem algumas propriedades básicas, além de se repetir a problemática da interpretação.

4.1.6 Atividade 5: Gráfico da Função Quadrática

Neste dia, muitos alunos não queriam participar da Atividade, pois além de ser a penúltima semana de aula, no dia seguinte aconteceria o projeto Consciência Negra na escola e muitos estavam envolvidos. Algumas alunas até pediram para sair de sala para ensaiarem suas apresentações e a professora conversou com elas sobre importância desta última aula e que o projeto abordava conteúdos que seriam cobrados posteriormente; mas ainda assim elas preferiram sair.

A aula, então, foi desenvolvida com os alunos que estavam interessados em participar. Eles acharam muito interessante o detalhamento do gráfico e o estudo dos coeficientes, mas no momento em que foi abordado o conceito do vértice, alguns já estavam desanimados e cansados.

No desenvolvimento das questões, os alunos conseguiram efetuar o passo a passo que era pedido, mas não estavam conseguindo marcar os pontos no gráfico corretamente.

Questão 1: Na questão 1, os alunos conseguiram responder os itens "a","b" e "c" tranquilamente, mas não compreenderam como utilizariam estes valores para esboçar o gráfico.

Alguns não lembraram que o zero da função representava a interseção do gráfico com o eixo Ox, embora tal propriedade tivesse sido abordada na própria aula. Portanto, a prfessora precisou explanar novamente esta propriedade. Com isto, eles conseguiram marcar corretamente estes pontos.

O vértice também foi marcado corretamente pela maioria, mas muitos não se atentaram ao papel do coeficiente $c = -5$ no gráfico. Como pode ser observado na figura abaixo.

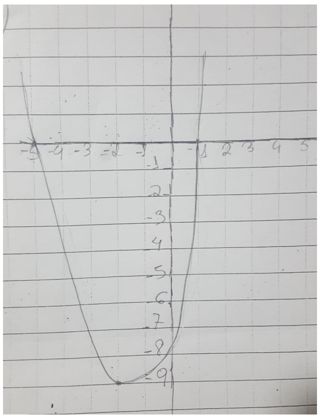


Figura 4.20: Resolução 17

Questão 2: O desenvolvimento da questão 2 foi bem parecido com o da questão 1, pois a resolução era exatamente a mesma. Os alunos apenas ficaram confusos porque a concavidade da parábola era para baixo e eles estavam tentando fazer como se fosse para cima.

Questão 3: Foi observado que os alunos estavam tentando resolver como as questões 1 e 2. Porém a questão pedia para calcular apenas a coordenada y do vértice.

Eles não haviam compreendido que a altura máxima estava relacionada ao vértice. Quando foi explicado, eles conseguiram resolver.

Conclusão: Com relação à utilização de gráficos eles apresentaram dificuldades quando precisavam fazer alteração de escalas dos eixos e faziam uma certa confusão na hora de marcar os pontos no plano cartesiano, trocando as coordenadas em alguns momentos.

E por fim, o que foi observado nesta última aula é que os alunos já estavam saturados, tanto do projeto, quanto do ano letivo. Foi uma aula bem difícil, sendo necessárias várias intervenções da professora, pois os alunos estavam dispersos e desatentos. Além disso, o interesse deles já não era o mesmo dos primeiros dias, mas, de um modo geral, o desenvolvimento da aula foi regular dentro do que era esperado.

4.1.7 Questionário final

Este dia foi bem atípico na escola, pois o horário seria compactado. Com isso alguns alunos faltaram e também não foi possível entrar em todas as turmas que participaram do projeto. Foi necessário então, solicitar que os outros professores pudessem ceder uns minutos de suas aulas para que os alunos conseguissem responder ao questionário.

Vale ressaltar que os dados apresentados abaixo se baseiam no total de 77 alunos que estiveram presentes no dia que foi entregue o questionário.

Novamente se observou que uma parte deles estavam apreensivos sobre a resposta que deveriam marcar. Notou-se um certo receio em desagradar a professora, mas novamente eles foram instruídos que não precisavam ter este receio, pois a relevância da pesquisa estava relacionada à sinceridade deles para que os resultados relatassem com precisão a realidade dos fatos.

Também se observou que muitos queriam marcar mais de uma alternativa nas questões 10 e 16, por exemplo. Mas lhes foi instruído que escolhessem aquela que fosse mais prioritária.

Ao serem questionados sobre o seu aprendizado durante estas aulas, em uma escala de 0 (péssimo) e 10 (excelente), a média obtida foi 7,0. E nesta mesma escala, eles deram uma nota média 8,0 para o quanto haviam achado as aulas do projeto interessante.

Com relação à capacidade de resolução de exercícios após a explicação, eles deveriam responder: *Nunca*, *Raramente*, *Às vezes*, *Quase sempre* e *Sempre*. Os resultados obtidos, em porcentagem, podem ser observados abaixo:

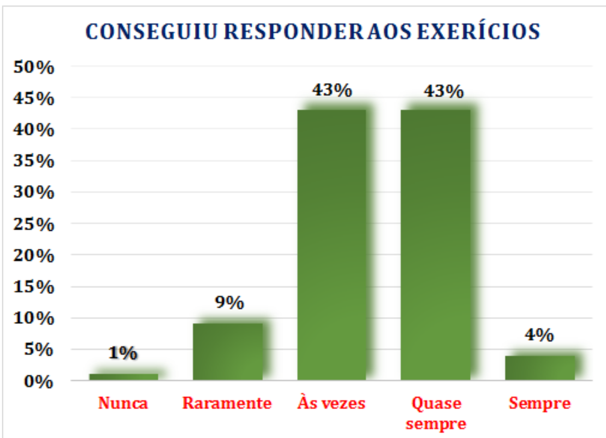


Figura 4.21: Gráfico 4

Com relação as dificuldades apresentadas no momento de resolver as questões, os alunos responderam conforme se observa no gráfico abaixo:

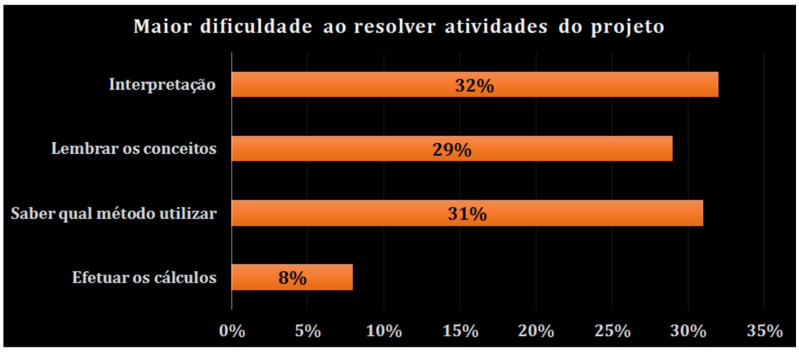


Figura 4.22: Gráfico 5

Ao serem questionados se sabiam o que era um teorema, 95% respondeu que sim, enquanto 66% responderam saber o que era uma propriedade. Por outro lado, 71% disse saber o que era uma demonstração, uma diferença considerável com relação às respostas do questionário diagnóstico, embora a professora esperasse uma porcentagem maior para este último.

Outro resultado surpreendente foi com relação à questão 11, na qual 79% alegaram ter conhececido a história de algum matemático, apesar de todas as aulas abordarem contexto histórico dos conteúdos e matemáticos envolvidos.

Com relação à influência que as aulas promoveram para os conhecimentos dos alunos, eles deveriam responder com *Sim*, *Não* ou *Não fez diferença* se as demonstrações matemáticas e abordagem histórica facilitaram o seu aprendizado dos conteúdos, como se observa no gráfico abaixo:

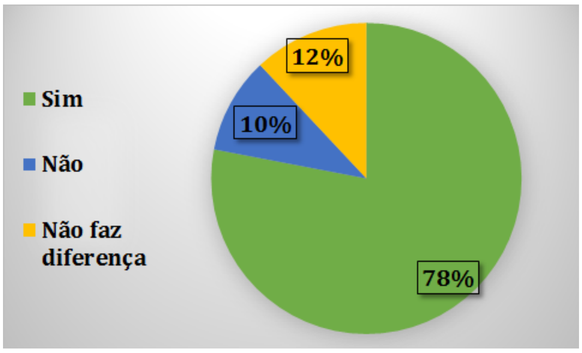


Figura 4.23: Gráfico 6

Sobre a memorização dos conteúdos, 64% responderam que conseguiram memorizá-los com mais facilidades após as aulas.

Com relação a abordagem do contexto histórico, 88% dos alunos disseram que esta metodologia tornou as aulas mais interessantes. Enquanto 80% afirmaram ter gostado de aprender estas histórias matemáticas.

No que diz respeito ao nível de dificuldade das demonstrações, os alunos responderam entre *Fácil*, *Médio* ou *Difícil* e os dados estão dispostos abaixo:

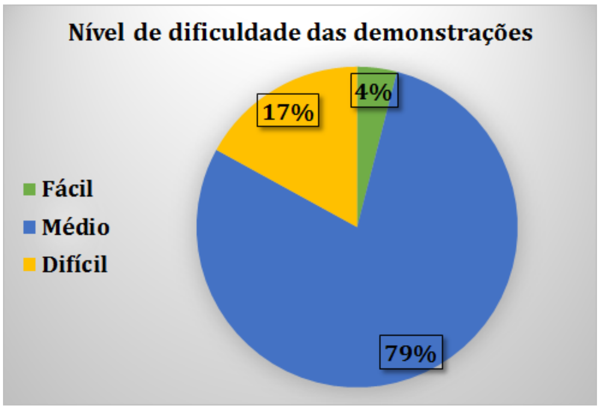


Figura 4.24: Gráfico 7

Este último resultado se ratifica no seguinte: 85% dos alunos afirmaram ter compreendido as demonstrações, ou seja, a menos de 2%, estes 85% seriam justamente o total de alunos que responderam *Fácil* ou *Médio* para o nível de dificuldade das demonstrações.

Ao serem questionados sobre qual teria sido a aula mais interessante, observa-se o seguinte:

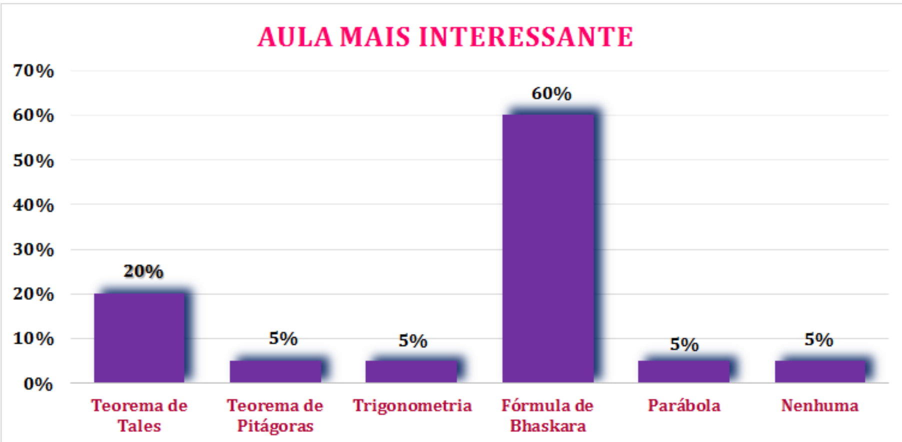


Figura 4.25: Gráfico 8

Sobre motivação, 57% dos alunos afirmaram se sentir mais motivados a estudar Matemática após as aulas desenvolvidas no projeto. E por fim, eles deveriam relatar, de maneira subjetiva, qual o principal fator que os desmotivava nas aulas de Matemática. E algumas das mais diversas respostas estão expostas abaixo:

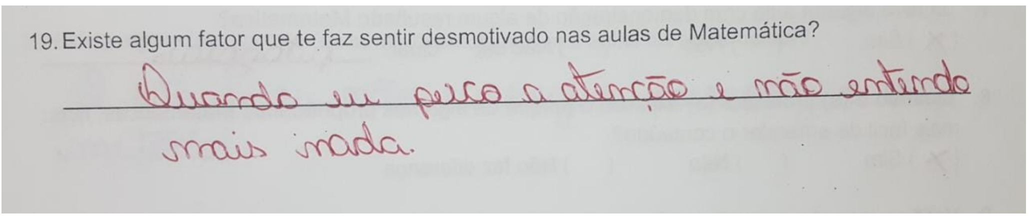
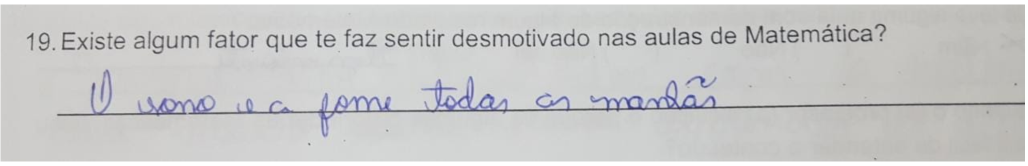
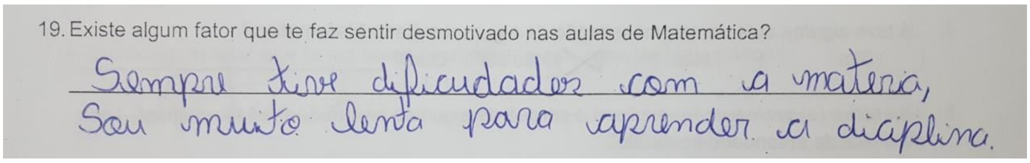


Figura 4.26: Resposta 1


19. Existe algum fator que te faz sentir desmotivado nas aulas de Matemática?

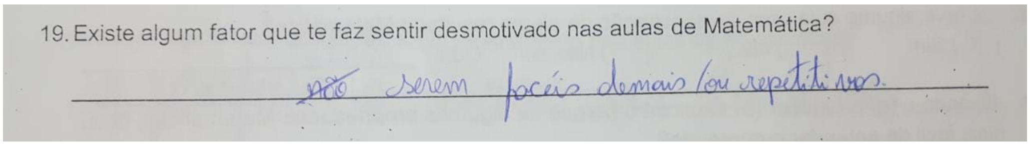
O sono e a fome todas as manhãs

Figura 4.27: Resposta 2


19. Existe algum fator que te faz sentir desmotivado nas aulas de Matemática?

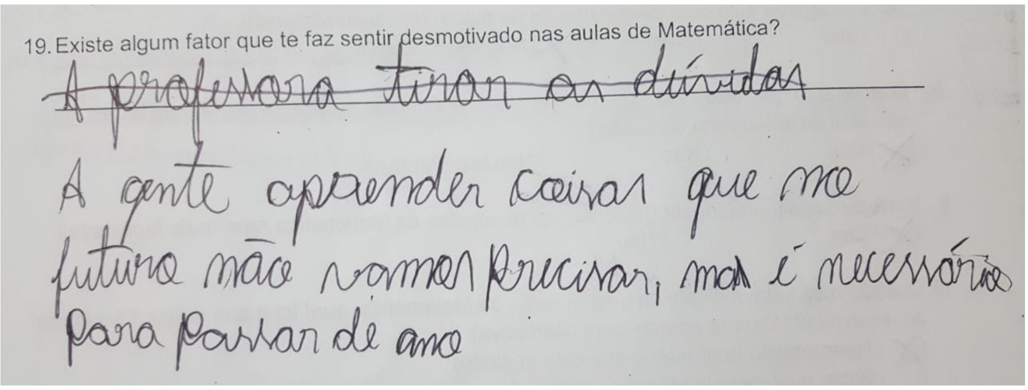
Sempre tive dificudades com a materia, Sou muito lenta para aprender a diciplina.

Figura 4.28: Resposta 4


19. Existe algum fator que te faz sentir desmotivado nas aulas de Matemática?

~~não~~ serem fáceis demais (ou repetitivos.

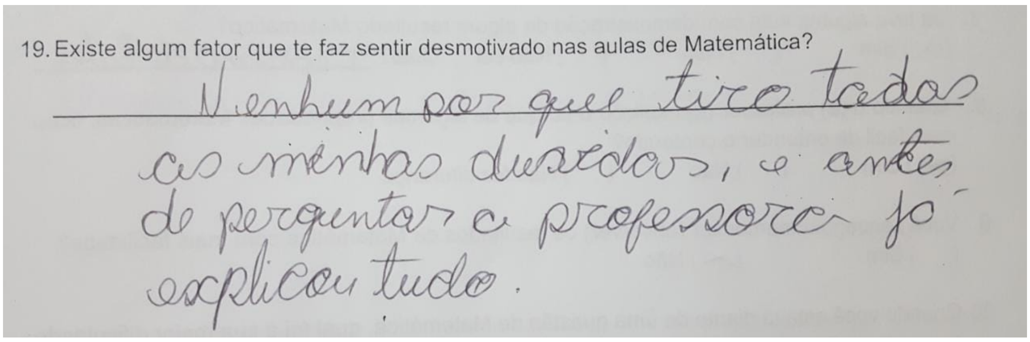
Figura 4.29: Resposta 5


19. Existe algum fator que te faz sentir desmotivado nas aulas de Matemática?

~~A professora tirar as dúvidas~~

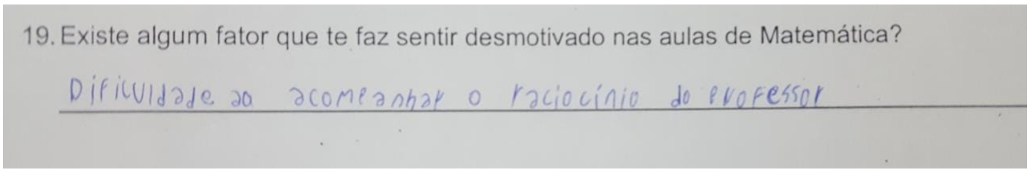
A gente aprender coisas que no futuro não vamos precisar, mas é necessário para passar de ano

Figura 4.30: Resposta 6


19. Existe algum fator que te faz sentir desmotivado nas aulas de Matemática?

Nenhum por que tiro todas as minhas duvidas, e antes de perguntar a professora já explicou tudo.

Figura 4.31: Resposta 7


19. Existe algum fator que te faz sentir desmotivado nas aulas de Matemática?

Dificuldade ao acompanhar o raciocínio do professor

Figura 4.32: Resposta 8

Capítulo 5

Considerações finais

O desenvolvimento desta pesquisa traz muitas considerações importantes. A primeira diz respeito aos desafios encontrados no ambiente escolar. As surpresas e imprevistos na escola são frequentes e o professor deve se organizar em meio a tudo isto, precisa estar preparado para efetuar mudanças em seu planejamento e ainda assim conseguir dar a mesma aula que havia planejado antes.

Em segundo plano, é necessário estar disposto a lidar com um público de pessoas o mais diverso possível. Ele precisa ao mesmo tempo valorizar as particularidades de cada aluno, mas também inserir todos ao mesmo tempo no processo de ensino. E talvez este seja o maior desafio da sala de aula.

Por um lado, alunos interessados, motivados e apaixonados pela disciplina, por outro, alunos sem pré-requisitos, com problemas familiares ou sem motivação alguma para estudar. Lidar com todas estas diferenças não é uma tarefa fácil; por isso o professor deve ter flexibilidade em sua profissão.

Entretanto em meio a tantas diferenças, alguns fatores comuns são observados em muitos alunos, ou em sua grande maioria, principalmente no que diz respeito à matemática, como pode se observar ao longo de toda esta pesquisa.

Com relação às atividades aplicadas, como detalhado no Capítulo 4, o maior problema que os alunos alegam diante de questões matemáticas é a dificuldade de interpretação, como pode ser visto tanto no questionário diagnóstico (Figura 4.2), quanto no questionário final (Figura 4.22). E também nas análises das Atividades 1, 2, 3, 4 e 5, as quais retrataram com afinco este problema: os alunos sempre chamavam a professora para explicar o que deveria ser feito.

Por outro lado, eles alegaram que a menor dificuldade era efetuar os cálculos, como pode ser observado nas mesmas figuras citadas acima. E novamente, isto foi atestado nas atividades, pois eles conseguiram desenvolver os cálculos, mas só após as instruções da professora.

Já na Figura 4.1 observou-se que mais da metade dos alunos (54%) havia respondido - no questionário diagnóstico - que conseguira resolver os exercícios quase sempre ou sempre após as explicações da professora. Já no questionário final (Figura 4.21), este número caiu para 47%. Ou seja, percebe-se que os alunos sentiram que o nível de dificuldade das questões aumentou com relação àquelas que eles estavam acostumados.

Outro comparativo interessante é no que diz respeito às Figuras 4.3 e 4.23. Ambas retratam as respostas dos alunos sobre a facilidade de compreender os conteúdos após a abordagem histórica e/ou demonstrações. No primeiro, 84% respondeu que Sim: facilita o entendimento; já no segundo, essa porcentagem caiu para 78%. Mas ainda assim, este resultado mostra que para a maioria dos alunos a metodologia utilizada no projeto facilitou sim na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Com este compilado de análises fica atestado que a utilização de metodologias mais aprofundadas para o ensino de matemática talvez seja uma das ferramentas que o professor pode e deve utilizar a seu favor, dentre tantas outras que a Matemática possibilita.

Utilizar demonstrações em sala de aula mostra aos alunos um caminho novo no ensino da matemática. Mostra a eles que a matemática é muito mais do que fórmulas prontas e resultados que eles são obrigados a decorar. Estimula o raciocínio dedutivo e desenvolve habilidades de compreensão. Retira um pensamento de que a matemática é tudo ou nada.

O contexto histórico, que também foi utilizado como uma das metodologias do projeto deveria ser um aliado imprescindível nos currículos de matemática. Todo professor deveria considerá-lo em seu planejamento, pois ele possibilita interdisciplinaridade e aplicabilidade dos conteúdos. Ele mostra aos alunos que a matemática é uma ciência que não surge ao acaso e que foi desenvolvida aos poucos ao longo da história. Afinal, não tem como responder à *"Quem inventou a Matemática?"*, como muitos alunos questionam.

Pelo contrário, ao estudar história da matemática os alunos desenvolvem a capacidade de compreender a importância que a matemática tinha e tem para a sociedade e como o avanço da tecnologia nos permitiu ter tantos conhecimentos sobre ela que não existiam há séculos atrás, graças aos "heróis da Matemática", que em sua grande maioria são desconhecidos pelos alunos e até mesmo por professores.

Diante de tudo isto, é fato que o ensino de matemática ainda é um trabalho árduo, pois em meio a tantos desafios o professor precisa se reiventar para que as metodologias ativas de aprendizagem possam ganhar cada vez mais espaço no ambiente escolar.

As metodologias que serão escolhidas e utilizadas pelo docente são de extrema relevância para o processo de ensino-aprendizagem, pois são elas que conduzirão o ritmo e nível da aula. É através da metodologia que o docente escolhe o melhor caminho para que seu aluno se sinta inserido neste processo.

Nesse sentido, para Oliveira em ([13], p.22):

> Assumir uma nova postura educacional, estar aberto a novos entendimentos e práticas pedagógicas, aceitar o aluno como participante e não como objeto a ser lapidado, e aceitar ser também um aprendiz dentro da sala de aula não é uma tarefa fácil de se conseguir. Uma mudança de entendimentos, conceitos e hábitos demandam tempo, muita dedicação e, acima de tudo, muita coragem.

Destarte, esta pesquisa trouxe uma perspectiva diferenciada sobre o ensino de matemática, o qual geralmente traz muitas influências tradicionais. Pois o que se percebe é que, geralmente, professores de matemática são um pouco fechados para aceitarem novas tendências de ensino; e insistem em manter uma mesma metodologia, afinal *"Sempre deu certo assim, não é agora que eu vou mudar"*, é o que muitos afirmam.

Mas com o crescente avanço tecnológico na atualidade, as práticas educacionais têm se renovado a cada dia que passa. E juntamente a estes avanços, os sujeitos do processo educacional (professores e alunos) devem acompanhar estas mudanças.

Talvez o que esteja faltando a alguns professores é uma sensibilidade de escuta ao que seu aluno está pensando ou falando. E ao aluno, ferramentas de motivação para que ele perceba a importância dos estudos em sua vida.

A exemplo disto, se oberva na Figura 4.27 que o *sono* e a *fome* são citados como fatores de desmotivação durante as aulas por um aluno. O professor poderia entender esta resposta apenas como uma "piadinha de mal gosto" e simplesmente ignorá-la. Mas talvez seja exatamente isso que o aluno esteja esperando.

Por outro lado, ele poderia se questionar: *"Será que este aluno tem problemas com insônia?"* ou *"Será que ele passa necessidades em casa?"*. Ao abrir espaço para esta relexão e chamar este aluno para conversar, por exemplo; sem perceber, o professor está mostrando ao seu aluno que ele é importante e que merece ser ouvido.

E muitas das vezes o que este aluno está buscando é justamente isso: um apoio, uma escuta, uma conversa. Talvez ele só queira atenção (que muitas vezes não recebe da família). São momentos como este que tornam o professor mais sensível e faz com que ele crie uma relação de respeito com seu aluno. E com certeza, ao perceber que o professor se importa, o aluno retribuirá da mesma maneira.

Desta forma, o objetivo deste trabalho é trazer uma reflexão nesse sentido. Ao professor: compreendas que tens muito poder de influência na vida de seus alunos e utilize-o de maneira sábia, para que o aluno te enxergues como um sujeito primordial que conduzirá toda a sua vida escolar. Ao aluno: entendas o seu papel ativo na educação, valorize seu professor e agarre as oportunidades que a escola te proporciona.

É fato que muitos são os fatores presentes no ambiente educacional: fatores que influenciam a aprendizagem, fatores que desmotivam tanto alunos quanto professores, fatores que inovam a educação. Os desafios são imensos e a caminhada não é simples; mas diante de tantas complexidades, cada sujeito envolvido neste processo deve entender e executar o seu papel com excelência. Mas além disso: não apenas assumir o seu papel, mas também ter empatia com o papel do outro, para que a racionalidade não perpasse os muros da sensibilidade.

Capítulo 6

Apêndice

Destaca-se neste apêndice todo o material utilizado para desenvolvimento do projeto, bem como as atividades aplicadas aos alunos durante as aulas.

ATIVIDADE 1

TEOREMA DE TALES

1. Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que as retas r, s, t são paralelas.

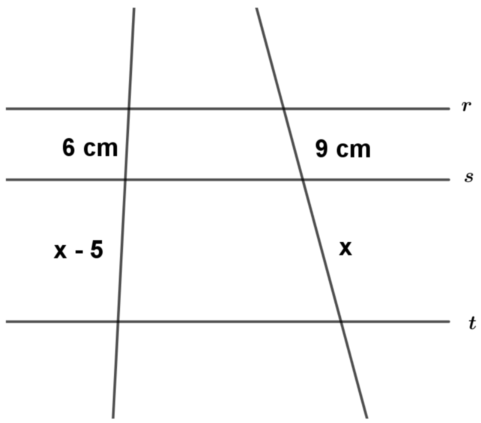


Figura 6.1: Tales 1

2. Calcule a medida de AG sabendo que $BE//CF//DG$.

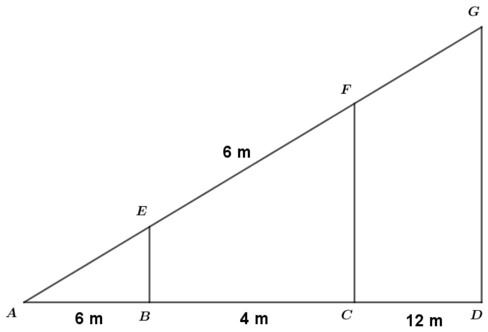


Figura 6.2: Tales 2

3. Determine o valor de y sabendo que as retas m, n, o são paralelas.

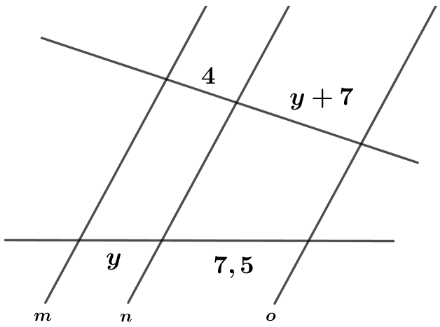


Figura 6.3: Tales 3

4. Calcule o valor de x, y e z, sabendo que as retas a, b, c, d são paralelas e que $x + z = 10$.

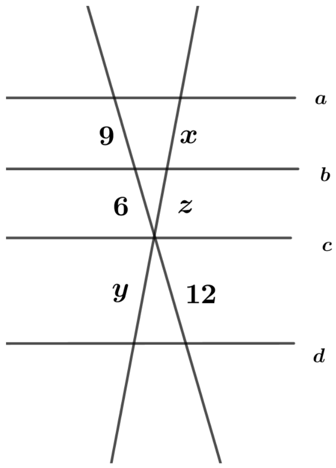


Figura 6.4: Tales 4

ATIVIDADE 2

TEOREMA DE PITÁGORAS

1. Determine a medida dos lados do triângulo abaixo.

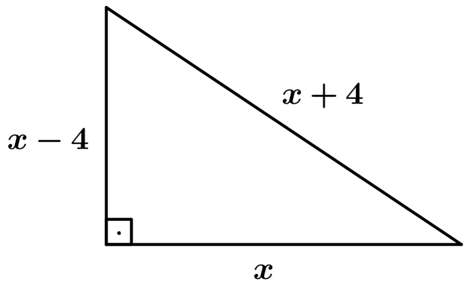


Figura 6.5: Pitágoras 1

2. Uma pista no formato de triângulo retângulo tem seus catetos medindo 21 metros e 28 metros. Calcule quantas voltas é preciso dar nessa pista para completar 420 metros de corrida.

3. Determine a medida da diagonal de um quadrado de lado $5\sqrt{2}$.

4. Um triângulo isósceles possui seus lados congruentes medindo $15cm$ e altura $9cm$. Calcule a área deste triângulo.
OBS: Lembre-se que no triângulo isósceles, a altura divide a base na metade.

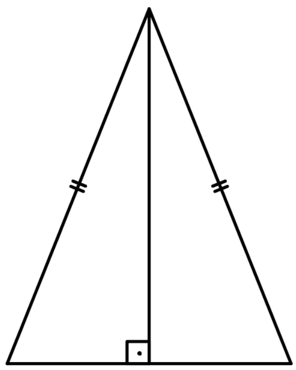


Figura 6.6: Pitágoras 2

ATIVIDADE 3

TRIGONOMETRIA

1. Determine a medida dos lados desconhecidos no triângulo abaixo.

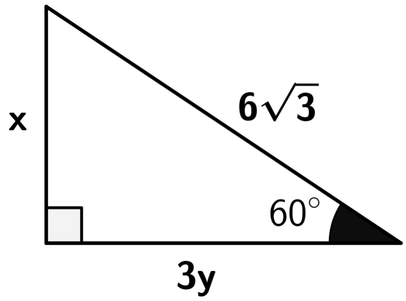


Figura 6.7: Trigonometria

2. Uma escada rolante liga dois andares de uma loja e faz um ângulo de 30° com o chão. Sabendo que a escada rolante possui 10 m de comprimento, qual é a altura entre os dois andares?

3. A Torre Eiffel tem 324 m da altura e deseja-se fotografá-la completamente usando uma câmera com lente de abertura de 30°. Qual a mínima distancia da torre para que uma foto (feita do chão) com essa câmera capture a torre inteira? Considere $\sqrt{3} \approx 1,73$

4. Calcule a área de um triângulo isósceles, cujos ângulos da base medem 45° e altura 4 m.

ATIVIDADE 4

FUNÇÃO QUADRÁTICA E FÓRMULA DE BHASKARA

1. Mário possui 18 anos e Augusto 15. Daqui quantos anos o produto de suas idades será igual a 378?

2. Na figura abaixo, temos um trapézio no qual sua área pode ser representada por uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.

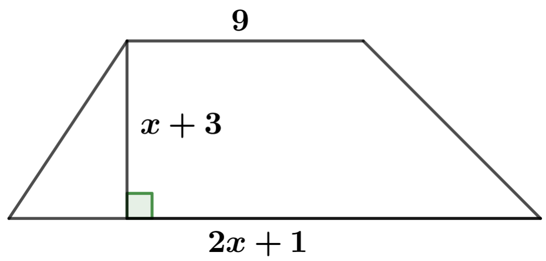


Figura 6.8: Bhaskara

Determine:

a) Os valores de a, b e c, desta função.

b) Qual a área do trapézio para $x = 3$.

c) O valor de x para que a área seja 35.

3. Uma bola lançada verticalmente para cima, a partir do solo, tem sua altura h (em metros) expressa em função do tempo t (em segundos), decorrido após o lançamento, pela lei:

$$h(t) = 20t - 5t^2$$

Determine:

a) A altura (h) que a bola se encontrará após 3 segundos.

b) Depois de quanto tempo a bola atingirá o solo.

ATIVIDADE 5

PARÁBOLA

1. Considere a função quadrática $f(x) = x^2 + 4x - 5$

a) Determine os seus coeficientes.

b) Calcule o zero da função.

c) Calcule o vértice da função.

d) Faça um esboço do gráfico desta função no papel quadriculado.
Se precisar, utilize mais pontos.

2. Considere a função quadrática $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$

a) Determine os seus coeficientes.

b) Calcule o zero da função.

c) Calcule o vértice da função.

d) Faça um esboço do gráfico desta função no papel quadriculado.
Se precisar, utilize mais pontos.

3. Um jogador de futebol chutou uma bola que teve sua trajetória descrita pela função $f(t) = ?t^2 + 9$, em que t é o tempo em segundos e $f(t)$ é a altura da bola no instante t, em metros. Qual a altura máxima alcançada por essa bola?

AUTORIZAÇÃO

Valparaíso de Goiás, 26 de julho de 2018.

Prezado Pai e/ou responsável,

Levo ao seu conhecimento que neste segundo semestre de 2018, a professora de Matemática, Lorranny Cruz Santos, estará desenvolvendo uma pesquisa com seus alunos de 9º ano, com vista a contribuir em sua dissertação do Mestrado - PROFMAT.
Estas pesquisas contarão com a participação do seu filho durante algumas aulas de Matemática e serão compostas de aulas diferenciadas, com o auxílio de projetor.
Ressalto, também, que estas aulas serão de aprofundamento de alguns conceitos matemáticos visando concluir de que forma o método que será aplicado pode acrescentar na aprendizagem do seu filho.
Além disso, cada aula desenvolvida valerá como nota de participação na disciplina de Matemática durante este semestre.
Se concorda com a participação do seu filho, assine o termo de responsabilidade abaixo.
Desde já, agradeço a sua atenção e confiança.

Atenciosamente,
Prof. Lorranny Cruz Santos

....

TERMO DE RESPONSABILIDADE

Autorizo o (a) aluno (a) ____,
da turma __________ a participar da pesquisa desenvolvida pela professora de Matemática, Lorranny Cruz Santos, durante o segundo semestre de 2018.

____

Assinatura do Responsável pelo (a) aluno (a)

QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

1. Qual a sua idade?

   ( ) 12 anos ( ) 13 anos ( ) 14 anos ( ) 15 anos
   ( ) 16 anos ( ) 17 anos ( ) 18 anos

2. Qual é o seu sexo?

   ( ) Masculino ( ) Feminino

3. Você gosta de estudar Matemática?

   ( ) Sim ( ) Não

4. Numa escala de 0 (péssimo) a 10 (excelente), como você classifica seus conhecimentos em Matemática?

   ( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5
   ( ) 6 ( ) 7 ( ) 8 ( ) 9 ( ) 10

5. A maior parte de sua vida escolar foi em uma escola

   ( ) Pública ( ) Particular

6. Faz uso de aulas particulares de Matemática?

   ( ) Não ( ) Sim. Há quanto tempo?____________

7. Numa escala de 0 (péssimo) a 10 (excelente), o quanto você acha as aulas de Matemática interessante?

   ( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5
   ( ) 6 ( ) 7 ( ) 8 ( ) 9 ( ) 10

8. Depois das explicações do (a) professor (a) de Matemática, você consegue responder aos exercícios?

   ( ) Nunca ( ) Raramente ( ) Às vezes ( ) Quase sempre ( ) Sempre

9. Você sabe o que é uma propriedade Matemática?

   ( ) Sim ( ) Nãos

10. Você sabe o que é um Teorema?

    ( ) Sim ( ) Não

11. Você sabe o que é uma demonstração Matemática?

    ( ) Sim ( ) Não

12. Já teve alguma aula com demonstração de algum resultado Matemático?
    ( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei

13. Quando o (a) professor (a) explica o porquê de algumas propriedades Matemáticas, fica mais fácil de entender o conteúdo?
    ( ) Sim ( ) Não ( ) Não faz diferença

14. Você consegue memorizar (absorver) os resultados da Matemática com mais facilidade?
    ( ) Sim ( ) Não

15. Quando você está diante de uma questão de Matemática, qual a sua maior dificuldade ao resolvê-la?
    ( ) Interpretação (entender o que está pedindo)
    ( ) Saber qual método utilizar na resolução
    ( ) Lembrar os conceitos que precisa utilizar para resolver
    ( ) Efetuar os cálculos

16. Conhece a história de algum matemático?
    ( ) Não ( ) Sim. Qual?__________________

17. Conhece alguma história na área da Matemática?
    ( ) Não ( ) Sim. Qual?__________________

18. Você gostaria de conhecer a história dos conteúdos que lhe são ensinados?
    ( ) Sim ( ) Não

19. Durante as aulas, se o (a) professor (a) explica o contexto histórico de algum conteúdo matemático, você acha que a aula fica mais interessante?
    ( ) Sim ( ) Não ( ) Não faz diferença

QUESTIONÁRIO FINAL

1. Numa escala de 0 (péssimo) a 10 (excelente), como você classifica seu aprendizado nessas aulas desenvolvidas no Projeto?

   ( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5
   ( ) 6 ( ) 7 ( ) 8 ( ) 9 ( ) 10

2. Numa escala de 0 (péssimo) e 10 (excelente), o quanto você achou as aulas de Matemática interessante?

   ( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5
   ( ) 6 ( ) 7 ( ) 8 ( ) 9 ( ) 10

3. Depois das explicações do (a) professor (a) de Matemática, você conseguiu responder aos exercícios?

   ( ) Nunca ( ) Raramente ( ) Às vezes ( ) Quase sempre ( ) Sempre

4. Você sabe o que é uma propriedade Matemática?

   ( ) Sim ( ) Nãos

5. Você sabe o que é um Teorema?

   ( ) Sim ( ) Não

6. Você sabe o que é uma demonstração Matemática?

   ( ) Sim ( ) Não

7. Já teve alguma aula com demonstração de algum resultado Matemático?

   ( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei

8. Quando o (a) professor (a) explicou o porquê de algumas propriedades Matemáticas, ficou mais fácil de entender o conteúdo?

   ( ) Sim ( ) Não ( ) Não fez diferença

9. Você conseguiu memorizar (absorver) os resultados da Matemática com mais facilidade?

   ( ) Sim ( ) Não

10. Quando você estava diante de uma questão de Matemática, qual foi a sua maior dificuldade ao resolvê-la?

    ( ) Interpretação (entender o que está pedindo)
    ( ) Saber qual método utilizar na resolução
    ( ) Lembrar os conceitos que precisa utilizar para resolver
    ( ) Efetuar os cálculos

11. Conheceu a história de algum matemático?
    ( ) Não ( ) Sim. Qual?____________________

12. Você gostou de conhecer a história dos conteúdos que lhe foram ensinados?
    ( ) Sim ( ) Não ( ) Não fez diferença

13. Durante as aulas, quando o (a) professor (a) explicou o contexto histórico de algum conteúdo matemático, você achou que a aula ficou mais interessante?
    ( ) Sim ( ) Não ( ) Não fez diferença

14. O Projeto desenvolvido ao longo destes dois bimestres te ajudou a entender melhor os conteúdos?
    ( ) Sim ( ) Não ( ) Não fez diferença

15. Você se sentiu mais motivado a estudar Matemática após estas aulas?
    ( ) Sim ( ) Não ( ) Não fez diferença

16. Destas aulas, qual você achou mais interessante? (Marque apenas uma alternativa)
    ( ) Teorema de Tales
    ( ) Teorema de Pitágoras
    ( ) Trigonometria
    ( ) Fórmula de Bhaskara
    ( ) Parábola
    ( ) Nenhuma

17. Qual foi o nível de dificuldade das demonstrações apresentadas?
    ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

18. Você conseguiu entender as demonstrações com clareza?
    ( ) Sim ( ) Não

19. Existe algum fator que te faz sentir desmotivado nas aulas de Matemática?

    ____

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. *Reunião anual da ANPED 24*, 7 (2001), 1–15.

[2] BASTOS, M. d. J. Os desafios da educação brasileira.

[3] BONATTO, A., BARROS, C. R., GEMELI, R. A., LOPES, T. B., and FRISON, M. D. Interdisciplinaridade no ambiente escolar. *Seminário de pesquisa em educação da região Sul 9* (2012), 1–12.

[4] BULGRAEN, V. C. O papel do professor e sua mediação nos processos de elaboração do conhecimento. *Revista Conteúdo, Capivari 1*, 4 (2010), 30–38.

[5] da COSTA, N. M. L. A história da trigonometria. *Artigo–Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Disponível em< http://www. paulofreire. org/Biblioteca/histtrigon. pdf>. Acesso em 25* (2003).

[6] da PONTE, J. P., MATA-PEREIRA, J., and HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa 7*, 2 (2012), 355–377.

[7] da SILVA, A. F., and de SOUZA, A. L. L. Condições do trabalho escolar: desafios para os sistemas municipais de ensino. *Cadernos de Pesquisa 43*, 150 (2014), 772–787.

[8] da SILVA, J. J. *Filosofias da matemática.* Unesp, 2007.

[9] D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. *Temas e debates 2*, 2 (1989), 15–19.

[10] D'AMBROSIO, U. Etnomatemática e educação. *Reflexão e Ação 10*, 1 (2002), 7–19.

[11] D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática.* Papirus Editora, 2009.

[12] DAVID, C. M., SILVA, H. M. G. d., RIBEIRO, R., and LEMES, S. d. S. Desafios contemporâneos da educação.

[13] de OLIVEIRA, A. A. B. Metodologias emergentes no ensino da educação física. *Journal of Physical Education 8*, 1 (1997), 21–27.

[14] dos SANTOS, J. B. Avanços e desafios da educação brasileira na atualidade: Uma reflexão a partir das contribuições de hannoun e a educação infantil como uma aposta enactante.

[15] FAUSTINO, A. C., and PASSOS, C. L. B. Cenários para investigação e resolução de problemas: reflexões para possíveis caminhos. *Revista Educação e Linguagens 2*, 3 (2014).

[16] FINO, C. N. Vygotsky e a zona de desenvolvimento proximal (zdp): três implicações pedagógicas. *Revista Portuguesa de educação 14* (2001), 273–291.

[17] FIRMINO, F., and LIMA, F. *Interdisciplinaridade e Transdisciplinaridade do conhecimento. Avaliação escolar e suas implicações pedagógicas.* Estratégia Concursos, 2016.

[18] FROTA, M. C. R., and BORGES, O. Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na educação matemática. *Anais da 27ª reunião anual da Anped* (2004).

[19] GARNICA, A. V. M. É necessário ser preciso? é preciso ser exato?: um estudo sobre argumentação matemática ou uma investigação sobre a possibilidade de investigação. *Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS* (2001), 49–87.

[20] GARNICA, A. V. M., and PINTO, T. P. Considerações sobre a linguagem na sala de aula de matemática some remarks on language and how language works in mathematics classrooms p.(207-244). *Zetetiké: Revista de Educação Matemática 18* (2011).

[21] GOIS, A. Ensino se massifica no século xx, mas perde qualidade, 2003. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/folha/educacao/ult305u13812.shtml>, Acesso em: 11 jan. 2019.

[22] HAMZE, A. Escola nova e o movimento de renovação. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/gestao-educacional/escola-nova.htm>, Acesso em: 21 jan. 2019.

[23] IMENES, L. M. Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática. *Bolema-Boletim de Educação Matemática 3*, 6 (1990), 21–27.

[24] LORENZATO, S. *Para aprender matemática.* 2008.

[25] LOURENÇO, A. A., and de PAIVA, M. O. A. A motivação escolar e o processo de aprendizagem. *Ciências & Cognição 15*, 2 (2010), 132–141.

[26] MIGUEL, A., and MIORIM, M. Â. *História na educação matemática: propostas e desafios.* Autêntica, 2013.

[27] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 11. ed. Ldb - lei n. 9394, de 20 de dezembro de 1996, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm>, Acesso em: 11 jan. 2019.

[28] MOREIRA, A. F. B., and KRAMER, S. Contemporaneidade, educação e tecnologia. *Educação & Sociedade 28*, 100 (2007), 1037–1057.

[29] NEVES, R. d. S. P., BACCARIN, S. A. d. O., and SILVA, J. C. A formação geométrica de licenciandos em matemática: uma análise a partir da replicação de questões do exame nacional de desempenho de estudantes (enade). 169–186.

[30] PACHECO, J. A. Currículo, aprendizagem e avaliação: Uma abordagem face à agenda globalizada. *Revista Lusófona de Educação*, 17 (2011), 75–90.

[31] PEREIRA, D. J. R., ET AL. Historia do movimento democratico que criou a sociedade brasileira de educação matematica-sbem.

[32] ROQUE, T. *História da matemática*. Zahar, 2012.

[33] SAVIANI, D. *Escola e democracia*. Autores Associados, 2018.

[34] SEEDF, G. Currículo em movimento da educação básica: Pressupostos teóricos, 2013.

[35] TALAVERA, L. M. B. *Parábola e catenária: história e aplicações*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2008.

[36] TAPIA, J. A., AND FITA, E. C. A motivação em sala de aula: o que é, como se faz. *São Paulo: Loyola* (1999).

[37] TODOS PELA EDUCAÇÃO. Quais são as avaliações brasileiras e por que elas são importantes?, 2018. Disponível em: <https://www.todospelaeducacao.org.br/conteudo/uais-sao-as-avaliacoes-brasileiras-e-porque-elas-sao-importantes/>, Acesso em: 11 jan. 2019.

[38] VISCA, J. *Psicopedagogia: Novas Contribuições*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1991.

[12] [2] [7] [14] [21] [27] [37] [9] [1] [10] [26] [22] [31] [18] [28] [25] [36] [11] [30] [34] [17] [3] [38] [24] [23] [33] [4] [16] [6] [8] [32] [13] [5] [35] [19] [20] [29]