



UnB

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

LAÍS PINHEIRO DA SILVA ARAÚJO

Dissertação de Mestrado

**O problema de
Hilbert-Cohn-Vossen
nos espaços tridimensionais**

Brasília
2019

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

LAÍS PINHEIRO DA SILVA ARAÚJO

**O problema de
Hilbert-Cohn-Vossen
nos espaços tridimensionais**

Orientador: José Luis Teruel Carretero

Brasília
2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

AAR663p Araújo, Lais Pinheiro da Silva
O Problema de Hilbert & Cohn-Vossen nos espaços
tridimensionais / Lais Pinheiro da Silva Araújo; orientador
José Luis Teruel Carretero. -- Brasília, 2019.
62 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2019.

1. Hilbert & Cohn-Vossen. 2. Curvatura negativa. 3.
Teorema de Efimov. 4. espaços tridimensionais. I. Carretero,
José Luis Teruel , orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O problema de Hilbert-Cohn-Vossen nos espaços tridimensionais

por

Laís Pinheiro da Silva Araújo

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 19 de julho de 2019.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. José Luis Teruel Carretero - MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. João Paulo dos Santos – MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro– UFG (Membro)

A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.
Galileu Galilei

Aos meus pais, Lair e Dirlene, por sempre acreditarem em mim e por terem abdicado de suas vidas em prol das realizações e da felicidade de seus filhos.

Aos meus irmãos, Dirley e Deyvila, pelo carinho e incentivo.

Aos meus avós, Argemiro e Florinda (in memoriam), Paulo (in memoriam) e Elisa (in memoriam), que desde os meus primeiros passos foram exemplo de perseverança. Ao meu esposo Leandro, por todo amor, incentivo, apoio e compreensão. Nada disso teria sentido se você não existisse na minha vida.

Agradecimentos

A Deus, por me permitir realizar tantos sonhos, em especial, a concretização do sonho dessa dissertação de mestrado. Agradeço ainda por Ele me permitir errar, aprender e crescer, por Sua eterna compreensão e tolerância, por Seu infinito amor, e por não me permitir desistir e principalmente por ter me dado uma família tão especial.

Agradeço ainda minha "mãezinha", Nossa Senhora de Fátima, pela intercessão, por não me deixar desistir e que eu lutasse até o fim.

Ao Prof. José Luis Teruel Carretero pela orientação e dedicação durante esse período. Obrigada por acreditar em mim.

Aos Professores do Departamento de Pós-graduação de Matemática, em especial, Aline G. da Silva Pinto, Carlos A. P. dos Santos, Daniele B. Martins Neto e João Paulo dos Santos, pela dedicação, apoio e todo conhecimento compartilhado.

A todos os demais amigos e amigas da matemática, a que agradeço na pessoa da minha amiga Fernanda Caixeta, obrigada pelo convívio, amizade e apoio demonstrado.

À minha família, tios(as), primos(as), aos meus irmãos Dirley e Deyvila, ao meu cunhado e cunhada Jorge e Kalina, às minhas sobrinhas Maria Beatriz e Lis Maria, aos meus sogros Oriol e Fátima, pelo apoio e compreensão.

À minha mãe e ao meu pai deixo um agradecimento especial, por todas as vezes que me permitiram buscar meus sonhos, mesmo que fosse em lugares tão distantes. Em meio disso tudo, destaco os momentos que tiveram ao meu lado me apoiando e me vendo chorar por causa de provas, de disciplinas, de exames e na escrita desse trabalho.

Ao meu esposo Leandro pelo apoio e cuidado, principalmente, como o meu ombro amigo a cada dia. Sinto-me orgulhosa pelas lições de amor, de amizade, compreensão e perdão.

Por fim, a todos aqueles que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização desta dissertação, o meu sincero agradecimento.

Resumo

No presente trabalho, apresentamos inicialmente o Teorema de Hilbert e no seguimento desse teorema abordamos o Problema de Hilbert & Cohn-Vossen e sua respectiva solução em \mathbb{R}^3 : O teorema de Efimov. Ademais, mostramos problemas relacionados à ele, alguns dos quais ainda permanecem abertos.

Palavras-chave: Hilbert & Cohn-Vossen, Efimov, espaços tridimensionais, curvatura negativa.

Abstract

In this work, we first present the Hilbert Theorem and following this theorem we approach the Hilbert & Cohn-Vossen Problem and its respective solution in \mathbb{R}^3 : The Efimov Theorem. In addition, we show problems related to it, some of which are still open.

Keywords: Hilbert & Cohn-Vossen, Efimov, three-dimensional spaces, negative curvature.

Sumário

Introdução.	i
1 O Teorema de Hilbert	1
1.1 Preliminares	1
1.2 Superfícies com curvatura não positiva	4
1.3 O Teorema de Hilbert	8
2 O Teorema de Efimov	12
2.1 Introdução	12
2.2 Preliminares	13
2.3 O Teorema de Efimov	15
2.4 O Lema Principal	30
3 Problemas relacionados ao Teorema de Efimov	44
3.1 Introdução	44
3.2 Primeira linha de Trabalho	44
3.3 Segunda linha de trabalho	47

Introdução.

Em 1901, Hilbert provou o seguinte teorema:

Não existe uma imersão isométrica do plano hiperbólico em \mathbb{R}^3 .

Sabe-se que toda superfície completa, simplesmente conexa e de curvatura constante negativa é isométrica a um plano hiperbólico. Então o teorema de Hilbert afirma que nenhuma superfície regular de curvatura Gaussiana constante e negativa pode ser imersa de forma isométrica no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 .

O trabalho desenvolvido por Hilbert atraiu outros geométricos que começaram a se fazer perguntas em relação as hipóteses do teorema.

Em 1936, Cohn-Vossen [14] sugeriu a validade do Teorema de Hilbert caso a curvatura não fosse constante. Esse problema foi conhecido como Conjectura de Hilbert & Cohn-Vossen.

O fato de que a curvatura Gaussiana é limitada superiormente é essencial, pois pode-se pensar no hiperbolóide de uma folha, que é uma superfície regular completa em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana negativa mas que não é limitada superiormente por uma constante negativa.

Em 1955, E.Heinz [10] demonstrou que não existem gráficos inteiros (completos) imersos em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana limitada superiormente por uma constante negativa, ou seja, deu uma solução parcial do problema de Hilbert & Cohn-Vossen.

Em 1964, Efimov [4] foi quem solucionou totalmente esse problema, estabelecendo o seguinte resultado:

Não existem superfícies completas imersas em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana limitada superiormente por uma constante negativa.

No capítulo 1, se provará um teorema que estende o clássico Teorema de Hilbert para superfícies de curvatura constante negativa imersas nas formas espaciais \mathbb{H}^3 , \mathbb{R}^3 e \mathbb{S}^3 . Baseado no curso que Gálvez apresentou no Impa em 2009 [6], serão apresentados resultados preliminares de suma importância para a prova do mesmo.

O capítulo 2 é baseado no artigo de T. Klotz Milnor [11], que fez uma exibição altamente detalhada e organizada da demonstração do Teorema de Efimov.

Por fim, no capítulo 3, concluímos o trabalho dando informações sobre problemas relacionados ao Teorema de Efimov, alguns dos quais ainda permanecem abertos.

Capítulo 1

O Teorema de Hilbert

Nesse capítulo são apresentados alguns resultados com o objetivo de demonstrar o Teorema de Hilbert estendido à formas espaciais.

1.1 Preliminares

Antes de introduzir resultados são necessários alguns conceitos preliminares.

Definição 1. Uma **Métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0) \implies \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

é uma função diferenciável em U .

As funções g_{ij} são expressões da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana é chamada de **Variedade Riemanniana**.

Segue abaixo o conceito de Variedades Riemannianas completas e de curvatura seccional de uma variedade.

Definição 2. Uma variedade Riemanniana M é dita **geodesicamente completa** se $\forall p \in M$, a aplicação exponencial \exp_p , está definida $\forall v \in T_pM$, equivalentemente, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3. Dado um ponto $p \in M$ e um plano $\sigma \subset T_p M$ o número real $K(x, y) = (x, y, x, y)/|x \wedge y|^2 = K(\sigma)$ onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado **curvatura seccional** de σ em p , onde $(x, y, x, y) = g(R(x, y)x, y)$ e R o respectivo tensor de curvatura.

O seguinte teorema garante a unicidade de Variedades Riemannianas completas simplesmente conexas com curvatura seccional constante. Sabe-se que \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , \mathbb{H}^n são variedades completas e simplesmente conexas de curvatura seccional constante 0, 1 e -1 , respectivamente, ver [2].

A partir das definições acima e do Teorema de Cartan pode-se provar o seguinte Teorema de Classificação da teoria de Geometria Riemanniana:

Teorema 4. Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e de curvatura seccional constante c . Então o recobrimento universal \tilde{M} de M , com a métrica do recobriemnto, é isométrico a:

- a) \mathbb{H}^n , se $c = -1$;
- b) \mathbb{R}^n , se $c = 0$;
- c) \mathbb{S}^n , se $c = 1$.

Observação 5. As variedades Riemannianas completas simplesmente conexas e de curvatura seccional constante são chamadas de **Formas Espaciais**. No livro [2] se faz um estudo bem detalhado do teorema citado acima e se apresentam \mathbb{H}^3 , \mathbb{R}^3 e \mathbb{S}^3 .

Denota-se por $\mathbb{M}^3(c)$ a forma espacial com curvatura seccional constante c dada por:

- \mathbb{H}^3 , se $c = -1$.
- \mathbb{R}^3 , se $c = 0$.
- \mathbb{S}^3 , se $c = 1$.

Definição 6. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se além disto, M tiver uma métrica \langle, \rangle e

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = \langle v, w \rangle_p, \quad v, w \in T_p M$$

dizemos que φ é uma **imersão isométrica**.

Seja $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{M}^3(c)$ uma imersão isométrica, onde Ω é uma superfície Riemanniana orientável com métrica induzida $I = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dados parâmetros locais $(x, y) \in U$, (U, X) =vizinhança coordenada, escrevemos a primeira e a segunda forma fundamental de φ como sendo:

$$\begin{aligned} I &= Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2 \\ II &= edx^2 + 2fdx dy + gdy^2, \end{aligned}$$

onde $E(x, y) = E, F(x, y) = F, G(x, y) = G, e(x, y) = e, f(x, y) = f$ e $g(x, y) = g$ são os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental, respectivamente.

Ao decorrer do trabalho, $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{S}^2$ será a aplicação de Gauss e consequentemente $dN_p : T_p\Omega \longrightarrow T_p\mathbb{S}^2$, $p \in \Omega$ sua diferencial. E ainda $A = -dN$ será o endomorfismo de Weingarten da imersão.

Para quaisquer campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$, com $\mathfrak{X}(\Omega)$ denotando o conjunto de campos vetoriais em Ω , define-se a terceira forma fundamental III da imersão como sendo:

$$III(X, Y) := \langle dN(X), dN(Y) \rangle \quad (1.1.1)$$

Observe que III é a métrica induzida sobre Ω por N , quando N é um difeomorfismo local. Como N é unitário, escolhendo um sistema de coordenadas (u, v) segue que:

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Além disso,

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (1.1.3)$$

Então segue de (1.1.2) e de (1.1.3) que

$$N_u \wedge N_v = KX_u \wedge X_v \quad (1.1.4)$$

E segue de (1.1.4) que N é difeomorfismo local se, e somente se, $K \neq 0$. Aplicando o módulo dos dois lados da igualdade (1.1.4) vemos que

$$dA_{III} = |K|dA_I \Rightarrow \int_{\Omega} dA_{III} = \int_{\Omega} |K|dA_I. \quad (1.1.5)$$

Em que dA_I e dA_{III} são os elementos de área para as métricas I e III , respectivamente. Ou seja, a curvatura total para I coincide com a área esférica da superfície.

Denotamos por k_1 e k_2 as curvaturas principais da imersão φ , sendo k_1 e k_2 os autovalores de A . Vamos denotar por

$$K = k_1 k_2 \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

onde K é a curvatura da imersão e H é a curvatura média da imersão.

Essas duas grandezas são **extrínsecas** e dependem de como Ω é imersa em $\mathbb{M}^3(c)$.

No entanto, vamos denotar por $K(I)$ a curvatura da métrica I , ou seja a curvatura Gaussiana que é uma grandeza **intrínseca**.

Uma relação entre grandezas intrínsecas e extrínsecas para a imersão $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{M}^3(c)$ é a Equação de Gauss escrita da forma:

$$K(I) = K + c.$$

1.2 Superfícies com curvatura não positiva

Da teoria de superfícies, uma curva regular conexa s em uma vizinhança coordenada $(U, X(x, y))$ é uma curva assintótica quando sua segunda forma fundamental associada é nula, ou seja, quando

$$edx^2 + 2fdxdy + gdy^2 = 0. \quad (1.2.1)$$

Seja Ω uma superfície com curvatura não positiva, então todos os seus pontos são hiperbólicos ($eg - f^2 < 0$). Assim, pode-se mostrar que sempre existem curvas assintóticas e para que as curvas coordenadas da parametrização sejam curvas assintóticas é necessário que $e = g = 0$. De fato, se isso ocorre, da equação (1.2.1) segue que $f dx dy = 0$ e as curvas coordenadas são soluções dessa equação, como queríamos.

Na prova do Teorema de Hilbert se faz necessário os próximos resultados, para que se possa estabelecer a existência global de uma rede de Tschebyscheff, para isso vejamos sua definição:

Definição 7. *As curvas coordenadas de uma parametrização constituem uma rede de Tschebyscheff se, os comprimentos dos lados opostos de qualquer quadrilátero formado por elas são iguais.*

Proposição 8. *As curvas coordenadas de uma parametrização constituem uma rede de Tschebyscheff se, e somente se*

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Proposição 9. *Se as curvas coordenadas constituem uma rede de Tschebyscheff então é possível reparametrizar a vizinhança coordenada de tal maneira que os novos coeficientes da primeira forma fundamental são*

$$E = 1, \quad F = \cos \omega, \quad G = 1,$$

onde ω é o ângulo formado pelas curvas coordenadas.

Da teoria de superfícies, a Equação de Gauss a partir dos símbolos de Christoffel é escrita da seguinte forma:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -EK(I) \quad (1.2.2)$$

E tem as seguintes Equações de Compatibilidade:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = F_u - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \frac{1}{2} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} G_v \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Portanto, pode-se provar o seguinte resultado:

Teorema 10. *Sejam $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{M}^3(c)$ uma imersão de curvatura extrínseca K constante e negativa. Então existem coordenadas locais (u, v) e uma função diferenciável $\omega(u, v) \in (0, \pi)$ tal que*

$$\begin{aligned} I &= du^2 + 2 \cos \omega dudv + dv^2, \\ II &= 2\sqrt{-K} \sin \omega dudv \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Além disso,

1. *Se Ω é simplesmente conexa, então existem funções globais $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que (u, v) são coordenadas locais nas condições acima em uma vizinhança de cada ponto.*
2. *Se Ω é simplesmente conexa e I é completa, então a aplicação $(u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo global.*

Demonstração. Sejam (u, v) coordenadas locais de tal forma que podemos escrever :

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ II &= 2fdudv, f > 0. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Sejam Γ_{ij}^k os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita com a métrica I . São explícitos da seguinte forma:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} \quad (1.2.6)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} \quad (1.2.7)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial v}. \quad (1.2.8)$$

Fazendo $D = EG - F^2$ e usando as equações de compatibilidade (1.2.3) temos que

$$\begin{aligned} \frac{D_u}{2D} &= \frac{E_u G + EG_u - 2FF_u}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{E_u G - 2FF_u + E_u F - E_u F + EG_u}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{E_u G - 2FF_u + E_u F}{2(EG - F^2)} + \frac{EG_u - E_u F}{2(EG - F^2)} \\ &= \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{D_v}{2D} &= \frac{E_v G + EG_v - 2FF_v}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{E_v G - 2FF_v - FG_u + FG_u + EG_v}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{E_v G - FG_u}{2(EG - F^2)} + \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \\ &= \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Pela equação de Mainardi-Codazzi

$$\begin{aligned} 0 &= -e_v + f_u + e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ &= f_u + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \\ \Rightarrow \frac{f_u}{f} &= \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Analogamente,

$$\frac{f_v}{f} = \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1. \quad (1.2.12)$$

Agora de (1.1.3) e de (1.2.5) segue que $K = -f^2/D$. Mas K é uma constante negativa por hipótese, então derivando em relação a u , segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-2ff_uD + f^2D_u}{D^2} = \frac{-2ff_u}{D} + \frac{f^2D_u}{D^2} \\ \Rightarrow 2ff_u &= \frac{f^2D_u}{D} \\ \Rightarrow \frac{f_u}{f} &= \frac{D_u}{2D}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Substituindo (1.2.9) e (1.2.11) em (1.2.13) temos

$$\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = 0 \quad (1.2.14)$$

Analogamente, derivando $K = -f^2/D$ em relação a v , e usando (1.2.10) e (1.2.12) temos

$$\frac{f_v}{f} = \frac{D_v}{2D} \Rightarrow \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = 0. \quad (1.2.15)$$

Agora, substituindo (1.2.14) e (1.2.15) em (1.2.7) segue que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} = 0$.

Como $E_v = 2 \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$ e $G_u = 2 \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$ segue que $E_v = G_u = 0$, ou seja o sistema de coordenadas escolhido é uma rede de Tschebyscheff. Agora fazemos a seguinte mudança de coordenadas

$$\tilde{u} = \int \sqrt{E(u)} du \text{ e } \tilde{v} = \int \sqrt{G(v)} dv$$

podemos reescrever I e II como sendo

$$\begin{aligned} I &= d\tilde{u}^2 + 2F d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2 \\ II &= 2f d\tilde{u}d\tilde{v}. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Note que, como a curvatura é uma constante negativa, podemos fazer o seguinte:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{f^2}{1-F^2} \Rightarrow (1-F^2)K = -f^2 \\ \Rightarrow K - F^2K &= -f^2 \Rightarrow K = -f^2 + F^2K \\ \Rightarrow 1 &= \frac{-f^2 + F^2K}{K} \Rightarrow 1 = \left(\frac{f}{\sqrt{-K}} \right)^2 + F^2. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Então existe uma função diferenciável ω tal que

$$\begin{aligned} F &= \cos \omega \\ \left(\frac{f}{\sqrt{-K}} \right) &= \sin \omega \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &= du^2 + 2 \cos \omega dudv + dv^2 \\ II &= 2 \sin \omega dudv, \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

com $0 < \omega < \pi$ e $1 - F^2 > 0$. Além disso, se Ω é simplesmente conexa, temos que $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo local. Portanto, se considerarmos a nova métrica Riemanniana

$$III = du^2 - 2 \cos \omega dudv + dv^2$$

então

$$I + III = 2(du^2 + dv^2)$$

que é completa, pois I é completa. Portanto

$$\tilde{u}, \tilde{v} : (\Omega, du^2 + dv^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é uma isometria local e deve ser um difeomorfismo global. \square

1.3 O Teorema de Hilbert

Considere Ω uma superfície com uma métrica Riemanniana completa, tal que Ω tenha curvatura Gaussiana constante e negativa $K(I)$. Assim, segue do teorema de Cartan-Hadamard, ver [2], que se Ω é simplesmente conexa, então Ω é isométrica a um plano hiperbólico com curvatura $1/K(I)$.

Sabemos da equação de Gauss que $K(I) = K + c$, ou seja, se uma superfície tem curvatura Gaussiana constante e negativa então tal superfície também deve ter curvatura extrínseca constante negativa em \mathbb{R}^3 e \mathbb{S}^3 . Já em \mathbb{H}^3 , se $K(I) < -1$ teremos também que a curvatura extrínseca é negativa.

O teorema de Hilbert que apresentaremos nesse capítulo se refere a imersões de superfícies completas com curvatura Gaussiana constante e negativa em formas espaciais.

Para demonstrar tal teorema faz-se uso do seguinte Lema, que é uma consequência da Equação de Gauss:

Lema 11. *A partir da equação de Gauss $\omega_{uv} = -(K + c) \sin \omega$.*

Demonstração. As curvas coordenadas no teorema (10) formam uma rede de Tscheytscheff então, pela proposição (9) temos $E = G = 1$ e $F = \cos \omega$. Calculando os Símbolos de Christoffel nas Equações de Compatibilidade (1.2.3) temos:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 \cos \omega = 0 \\ \Gamma_{11}^1 \cos \omega + \Gamma_{11}^2 = -\omega_u \sin \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{11}^2 \cos \omega \\ -\Gamma_{11}^2 \cos^2 \omega + \Gamma_{11}^2 = -\omega_u \sin \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \cos \omega = 0 \\ \Gamma_{12}^1 \cos \omega + \Gamma_{12}^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{12}^2 \cos \omega \\ -\Gamma_{12}^2 \cos^2 \omega + \Gamma_{12}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \cos \omega = -\omega_v \sin \omega \\ \Gamma_{22}^1 \cos \omega + \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^2 \cos^2 \omega = -\omega_v \sin \omega \\ \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{22}^1 \cos \omega \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{11}^2 \cos \omega \\ \Gamma_{11}^2 (1 - \cos^2 \omega) = -\omega_u \sin \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{11}^2 \cos \omega \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{\omega_u}{\sin \omega} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{12}^2 \cos \omega \\ \Gamma_{12}^2 (1 - \cos^2 \omega) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{12}^1 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 (1 - \cos^2 \omega) = -\omega_v \sin \omega \\ \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{22}^1 \cos \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{22}^1 = -\frac{\omega_v}{\sin \omega} \\ \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{22}^1 \cos \omega \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \omega_u \frac{\cos \omega}{\sin \omega}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-\omega_u}{\sin \omega}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{12}^2 = 0, \\ \Gamma_{22}^2 &= \omega_v \frac{\cos \omega}{\sin \omega}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-\omega_v}{\sin \omega}. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Substituindo (1.3.1) na equação de Gauss (1.2.2) temos:

$$\begin{aligned} -K(I) &= \left(\frac{\omega_u}{\sin \omega} \right)_v + \frac{\omega_u \omega_v \cos \omega}{\sin^2 \omega} \\ &= \frac{\omega_{uv} \sin \omega - \omega_u \omega_v \cos \omega}{\sin^2 \omega} + \frac{\omega_u \omega_v \cos \omega}{\sin^2 \omega} \\ &= \frac{\omega_{uv}}{\sin \omega}. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Como $K(I) = K + c$, então

$$\omega_{uv} = -(K + c) \sin \omega.$$

□

Teorema 12 (Hilbert). *Seja Ω uma superfície completa com curvatura Gaussiana constante e negativa $K(I)$, com $K(I) < -1$ para $c = -1$. Então não existe imersão isométrica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{M}^3(c)$.*

Demonstração. Usando o teorema (10), podemos garantir a existência de parâmetros globais $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\begin{aligned} I &= du^2 + 2 \cos \omega dudv + dv^2, \\ II &= 2\sqrt{-K} \sin \omega dudv \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

onde ω é a função ângulo tal que $0 < \omega < \pi$.

Pelo Lema (11), temos:

$$\omega_{uv} = -(K + c) \sin \omega, \quad (1.3.4)$$

com $c_0 = -(K + c) > 0$.

Queremos mostrar que a equação $\omega_{uv} = c_0 \sin \omega$ não tem solução em \mathbb{R}^2 , ou seja tendo isso provamos o teorema.

Anteriormente vimos que:

- $0 < \omega(u, v) < \pi$;
- $c_0 = -(K + c) > 0$.

Então a partir de (1.3.4) $(\omega_u(u, v))_v$ é positivo e assim $\omega_u(u, v)$ é crescente para v . Dessa forma, considerando $v > 0$ temos:

$$\omega_u(u, v) > \omega_u(u, 0). \quad (1.3.5)$$

Integrando (1.3.5) com $a < b$ e $v > 0$ temos o seguinte:

$$\int_a^b \omega_u(u, v) du > \int_a^b \omega_u(u, 0) du \implies \omega(b, v) - \omega(a, v) > \omega(b, 0) - \omega(a, 0). \quad (1.3.6)$$

Visto que ω_u não pode ser identicamente nula, a menos translação, podemos supor que $\omega_u(0, 0) \neq 0$. Além disso, $\omega(-u, -v)$ também satisfaz (1.3.4). Então podemos

supor sem perda de generalidade que $\omega_u(0, 0) > 0$, substituindo $\omega(u, v)$ por $\omega(-u, -v)$ se necessário.

Considere agora $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ tais que $0 < u_1 < u_2 < u_3$ e $\omega_u(u, 0) > 0$, $\forall u \in [0, u_3]$. Definimos

$$\epsilon = \min\{\omega(u_3, 0) - \omega(u_2, 0), \omega(u_1, 0) - \omega(0, 0)\} > 0,$$

com $\epsilon > 0$.

Da desigualdade (1.3.6) e como ω_u é crescente para v temos que:

$$\int_0^{u_1} \omega_u(u, v) du > \int_0^{u_1} \omega_u(u, 0) du \Rightarrow \omega(u_1, v) - \omega(0, v) > \omega(u_1, 0) - \omega(0, 0) \geq \epsilon.$$

Analogamente,

$$\int_{u_2}^{u_3} \omega_u(u, v) du > \int_{u_2}^{u_3} \omega_u(u, 0) du \Rightarrow \omega(u_3, v) - \omega(u_2, v) > \omega(u_3, 0) - \omega(u_2, 0) \geq \epsilon.$$

Consequentemente, se $u \in [u_1, u_2]$ e $v \geq 0$,

$$0 < \omega(u, v) < \pi \Rightarrow \epsilon < \omega(u, v) < \pi - \epsilon.$$

Assim, integrando o retângulo $[u_1, u_2] \times [0, v]$ temos, por um lado:

$$\begin{aligned} \int_0^v \int_{u_1}^{u_2} \omega_{uv} dudv &= \int_0^v \omega_v(u_2, v) - \omega_v(u_1, v) dv \\ &= \omega(u_2, v) - \omega(u_2, 0) - (\omega(u_1, v) - \omega(u_1, 0)) \\ &= \omega(u_2, v) - \omega(u_2, 0) - \omega(u_1, v) + \omega(u_1, 0) \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \int_0^v \int_{u_1}^{u_2} \omega_{uv} dudv &= c_0 \int_0^v \int_{u_1}^{u_2} \sin \omega dudv > c_0 \int_0^v \int_{u_1}^{u_2} \sin \epsilon dudv = \\ &= c_0(u_2 - u_1)v \sin \epsilon. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

De (1.3.7) e (1.3.8) segue que $\omega(u_2, v) - \omega(u_1, v) > \omega(u_2, 0) - \omega(u_1, 0) + c_0(u_2 - u_1)v \sin \epsilon$.

Agora, tomando o limite $v \rightarrow \infty$ temos $\omega(u_2, v) - \omega(u_1, v) \rightarrow \infty$, mas isso é um absurdo visto que $0 < \omega(u, v) < \pi$.

□

Capítulo 2

O Teorema de Efimov

2.1 Introdução

No capítulo anterior apresentamos o Teorema de Hilbert para formas espaciais.

Através da linha de raciocínio de Hilbert houve matemáticos que se dedicaram mais a fundo nesse aspecto. Um deles foi Stefan Cohn-Vossen que conjecturou a ideia de que seria possível estender o resultado de Hilbert a superfícies de curvatura não constante, mas limitada superiormente por uma constante negativa. Esse problema foi conhecido como **Conjectura de Hilbert & Cohn-Vossen**.

Heinz [10] demonstrou em 1955 o seguinte teorema:

Seja $z(x, y)$ uma função de classe C^2 definida no disco aberto $x^2 + y^2 < R^2$, com $K(x, y) \leq -\alpha < 0$ e K a curvatura Gaussiana do gráfico associado a função $z = z(x, y)$. Então $R \leq e(3/\alpha)^{\frac{1}{2}}$, onde e é o número de Euler.

Como Heinz mostrou que $R \leq e(\frac{3}{\alpha})^{\frac{1}{2}}$ significa que o raio R fica limitado pela constante α que limita a curvatura superiormente. Ora, mas se o gráfico fosse inteiro implicaria que o raio R seria ilimitado, contradição. Portanto, não existem gráficos inteiros (completos) imersos em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana limitada superiormente por uma constante negativa. Assim, o Teorema de Heinz resolve parcialmente a conjectura de Hilbert & Cohn-Vossen.

Em 1964, Efimov resolve totalmente tal conjectura.

Ao decorrer desse capítulo queremos dar caminhos necessários para demonstrar o principal teorema do trabalho que é o Teorema de Efimov, que afirma que não existem superfícies completas C^2 -imersas em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana limitada superiormente por uma constante negativa.

2.2 Preliminares

A prova do Teorema de Efimov está baseada em dois fatos de suma importância. Toda superfície nas hipóteses de Efimov satisfaz uma certa propriedade de convexidade, para a métrica induzida pela aplicação de Gauss, o que implica certas limitações na área da superfície com a métrica induzida pela imersão.

Definição 13. *Uma variedade Riemanniana M completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional não-positiva é chamada de **Variedade de Hadamard**.*

Teorema 14 (Teorema de Hadamard,[2]). *Se M^n é uma variedade de Hadamard com $K(p, \sigma) \leq 0$, $\forall p \in M, \forall \sigma \in T_p M$. Então M é difeomorfa a \mathbb{R}^n , mais precisamente, $\exp : T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo.*

Corolário 15. *Toda variedade de Hadamard tem área infinita.*

Demonstração. Sejam $p \in M, v \in T_p M$. Pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias, garante-se a existência de uma única geodésica γ passando por p com velocidade v , ou seja, $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Como $\exp : T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo local, então ela induz um produto interno em $T_p M$.

Escreve-se, em coordenadas cartesianas (x, y) , a primeira forma fundamental como sendo $I = E dx^2 + F dx dy + G dy^2$. Para escrever I em coordenadas polares faça $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, assim:

$$\begin{aligned} dx &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta \\ dx^2 &= dr^2 \cos^2 \theta - 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} dy &= dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta \\ dy^2 &= dr^2 \sin^2 \theta + 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Além disso, veja que $\bar{E}(r, \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, $\bar{G}(r, \theta) = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$ e $\bar{F} = -r \sin \theta \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta = 0$. Observe ainda que $\lim_{r \rightarrow 0} \bar{G} = 0$ e $\lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{\bar{G}})_r = 1$. Então reescrevendo I segue que:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= dr^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + dr^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 = dr^2 + \bar{G} d\theta^2 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

A curvatura Gaussiana pode ser escrita então como

$$K = -\frac{(\sqrt{\bar{G}})_{rr}}{\sqrt{\bar{G}}}$$

Como $K \leq 0$ em Ω , então a equação anterior implica que $(\sqrt{\bar{G}})_{rr} \geq 0$, ou seja, $\sqrt{\bar{G}}_r$ é uma função crescente. Portanto, $\sqrt{\bar{G}}_r \geq \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{\bar{G}})_r = 1$ e isso implica que $\sqrt{\bar{G}} \geq r, \forall r$. Em particular $\bar{G} \geq r^2$ e assim segue que $\bar{I} = dr^2 + \bar{G}d\theta^2$ é maior ou igual que $\bar{I} = dr^2 + rd\theta^2$. Mas feito isso, \exp é uma aplicação de recobrimento e consequentemente se Ω é simplesmente conexa, \exp é um difeomorfismo. Mas note ainda que, se denotarmos $\sigma(\Omega)$ como sendo a área de Ω , segue que

$$\sigma(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{\bar{G}} dr d\theta \geq \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r dr d\theta = \infty \quad (2.2.4)$$

como queríamos. □

Definição 16. Considere Γ um arco circular não geodésico na esfera \mathbb{S}^2 e p_1 um ponto interior de Γ . Podemos construir geodésicas que passam pelo centro de Γ e por cada $p_i \in \Gamma$. Seja γ_1 a geodésica que passa pelo centro de Γ e por p_1 . Em seguida, percorra nessa geodésica uma distância ϵ de Γ , com ϵ suficientemente pequeno. Então teremos um segmento de geodésica de comprimento ϵ . Agora faça isso para todas as geodésicas γ_i , então essa "faixa" construída em volta de Γ é chamado **Retângulo Geodésico externo a Γ** e será denotado por $R(\Gamma, \epsilon)$. Veja a figura (2.1)

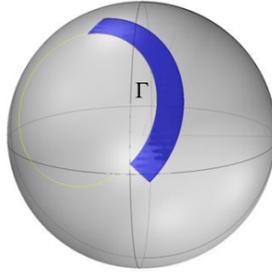


Figura 2.1: Retângulo externo de um arco não geodésico de \mathbb{S}^2 .

Definição 17. Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e uma função $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$. A função d é chamada distância sobre X se satisfaz as seguintes propriedades:

1. d é não negativa e separa pontos distintos, ou seja, para quaisquer $a, b \in X$, $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
2. d é simétrica, ou seja, para qualquer par $(a, b) \in X \times X$, $d(a, b) = d(b, a)$;

3. d satisfaz a desigualdade triangular, ou seja, para quaisquer $a, b, c \in X$, $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

O par (X, τ_d) é chamado **espaço métrico**, sendo τ_d a topologia métrica induzida por d .

Definição 18. Seja $p \in \Omega$ e $r > 0$. Definimos como **disco geodésico**, de raio $r > 0$, suficientemente pequeno, e centro p , o conjunto $D_r(p) = \{q \in \Omega / d(p, q) < r\}$. O disco geodésico será dito completo se podemos partir de p em todas as direções ao longo de um raio geodésico semi-aberto de comprimento r em Ω .

2.3 O Teorema de Efimov

Considere Ω como uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 . Podemos supor Ω orientada, caso contrário basta tomar seu recobrimento duplo orientável. Como já foi observado nos preliminares do capítulo 1, a terceira forma fundamental *III* é a métrica induzida pela aplicação de Gauss sobre Ω . Se dita aplicação de Gauss é um difeomorfismo local e por 1.1.4, essa aplicação de Gauss será um difeomorfismo local quando a curvatura da imersão é não nula. Seja então $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma C^2 -imersão com curvatura Gaussiana K limitada superiormente por uma constante negativa, $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss associada e *III* a terceira forma fundamental da imersão, que nesse caso é métrica Riemanniana.

Denotemos por d_{III} a distância associada a métrica *III*. Nesse caso $(\Omega, \tau_{d_{III}})$ é um espaço métrico. Denotaremos por $(\tilde{\Omega}, \tau_{d_{III}})$ o seu respectivo completamento como espaço métrico. Se Ω for completo então $\tilde{\Omega} = \Omega$. É válido observar que N é isometria local e \mathbb{S}^2 é completa, então podemos estender N , de forma contínua a $\tilde{N} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^2$.

À título de notação, se $U \subset \Omega$ denotaremos \bar{U} pelo fecho de U em Ω e se $U \subset \tilde{\Omega}$ denotaremos \tilde{U} pelo fecho de U em $\tilde{\Omega}$. Definimos $\partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \setminus \Omega$.

Definição 19. Chamamos $\tilde{\Omega}$ de **côncavo** em $p \in \partial\tilde{\Omega}$ se p estiver em \tilde{U} , onde $U \subset \Omega$ é um conjunto aberto, tal que:

- \tilde{N} é injetiva em \tilde{U} ;
- $N(U)$ contém o interior de um retângulo externo em $\tilde{N}(p)$.

Definição 20. Chamamos Ω de **pseudo-convexo** se $\nexists p \in \partial\tilde{\Omega}$, com $\tilde{\Omega}$ côncavo. Em outras palavras, Ω é pseudo-convexo se $\tilde{\Omega}$ não é côncavo em nenhum ponto.

Definição 21. Um subconjunto $H \neq \emptyset$ de Ω é chamado de **convexo** se quaisquer dois de seus pontos puderem ser ligados por um único arco geodésico contido em H , cujo comprimento é igual a distância em Ω entre esses dois pontos.

Vamos assumir a veracidade do seguinte lema, o qual, devido à extensão da sua prova, será demonstrado de forma resumida na seção (2.4).

Lema 22 (Lema Principal). *Sejam $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma imersão e λ_1, λ_2 os autovalores de dF . Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e satisfazem*

$$-\alpha \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \alpha$$

para alguma constante α . Então D com a distância d_D^ não é um espaço métrico completo.*

Como já foi comentado nos preliminares desse capítulo, o Teorema de Efimov está baseado em dois fatos importantes. Vamos chamar esses fatos de Lema A e Lema B. Denotaremos por conveniência $(\Omega, III) \equiv (\Omega, \tau_{d_{III}})$.

Lema 23 (Lema A). *Seja Ω uma superfície orientada, completa, imersa em \mathbb{R}^3 com $K \leq -k < 0$, onde K é a curvatura Gaussiana e k uma constante positiva. Se (Ω, III) é obtida usando em Ω a métrica induzida pela aplicação de Gauss $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$. Então (Ω, III) é pseudo-convexa.*

Demonstração. Suponha que (Ω, III) não é pseudo-convexa, então (Ω, III) é côncava em algum ponto $p \in (\tilde{\Omega}, III) \setminus (\Omega, III)$. Assim, pela definição (19), segue que $p \in \tilde{U} \subset \tilde{\Omega}(III)$ para algum subconjunto aberto $U \subset (\Omega, III)$, \tilde{N} é injetiva em \tilde{U} e $N(U)$ contém o interior de um retângulo externo $R(\Gamma, \epsilon)$ a $\tilde{N}(p)$.

Substituindo U por um conjunto menor, se necessário, podemos assumir que $N(U)$ é precisamente o interior do retângulo $R(\Gamma, \epsilon)$, ou seja $N(U) = R(\Gamma, \epsilon)$, com $\epsilon > 0$ e Γ um arco não geodésico. Girando Ω em torno de \mathbb{R}^3 , se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que $\tilde{N}(p)$ leva o ponto p ao pólo norte $(0, 0, 1)$ de \mathbb{S}^2 e que Γ está no hemisfério $y \geq 0$ em \mathbb{S}^2 . Note que o arco não geodésico Γ que contém $\tilde{N}(p)$ é tangente a um grande círculo ($y = 0$) em $\tilde{N}(p)$.

Finalmente, substituindo $R(\Gamma, \epsilon)$ por um retângulo menor, se necessário, podemos assumir que $R(\Gamma, \epsilon)$ está no pólo norte, mais precisamente está contido na região $z > \frac{\sqrt{2}}{2}$ em \mathbb{S}^2 .

Seja $N(q)$ o vetor unitário com $q \in U$ arbitrário. Vimos acima que $z > \frac{\sqrt{2}}{2}$, então

$$\langle N(q), (0, 0, 1) \rangle > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ou seja o ângulo formado entre $N(q)$ e $(0, 0, 1)$ é menor que 45° .

Assim, a projeção vertical π de U no plano $z = 0$ é uma imersão. Usando a inversa local de π^{-1} de π , qualquer vizinhança suficientemente pequena em U pode ser descrita

por uma função $f(x, y)$ de classe C^2 , com o vetor normal a $q = (x, y, f(x, y)) \in U$ em Ω dado por

$$N(q) = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Agora observe que

$$z > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2} > \frac{1}{2} \Rightarrow 2 > 1 + f_x^2 + f_y^2 \Rightarrow f_x^2 + f_y^2 < 1.$$

Portanto $f_x^2 + f_y^2 < 1$ para toda a vizinhança em questão. Substituiremos o interior $N(U)$ do retângulo externo $R(\Gamma, \epsilon)$ pela região plana que é o domínio da definição para um mapa coberto pelo Lema Principal. Para isso, sejam H o hemisfério norte e $\mu : H \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear dada por

$$\mu((x, y, z)) = \left(\frac{-y}{z}, \frac{x}{z}, 0\right) \equiv \left(\frac{-y}{z}, \frac{x}{z}\right),$$

com $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} > 0$.

Geometricamente, μ leva (x, y, z) pela projeção radial no plano $z = 1$, em seguida projeta essa imagem verticalmente no plano $z = 0$ e rotaciona essa imagem com um ângulo de 45° no sentido anti-horário.

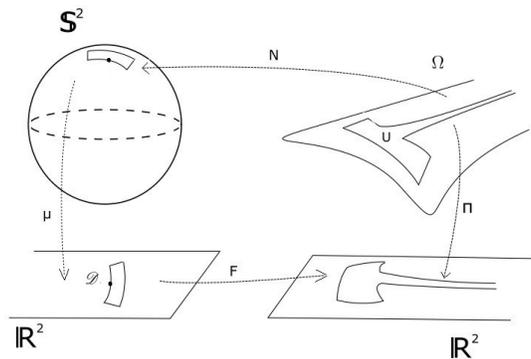


Figura 2.2: Construindo a imersão F .

Assim, μ é um difeomorfismo sobre sua imagem e aplica $N(U) = R(\gamma, \epsilon)$ em uma região aberta \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 . Logo, $\mu(\tilde{N}(p)) = (0, 0)$, $\mu(\gamma)$ tangencia o eixo y em $(0, 0)$ e está no plano $x \leq 0$.

Finalmente a aplicação $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $F = \pi \circ N^{-1} \circ \mu^{-1}$ que leva \mathcal{D} de volta ao plano xy é claramente uma imersão em \mathbb{R}^2 . Vamos aplicar o Lema Principal na imersão F .

As restrições sobre a curvatura Gaussiana K em Ω produzem as seguintes informações sobre $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Afirmção 24. *Os autovalores λ_1 e λ_2 de dF são reais e com sinais opostos e uniformemente limitados em \mathcal{D} , ou seja existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$-\alpha \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \alpha.$$

Demonstração. Usando a descrição local $z = f(x, y)$ para alguma vizinhança de $q = (x, y, z) \in U$ temos que:

$$\begin{aligned} \mu \circ N(x, y, z) &= \mu \circ N(x, y, f(x, y)) = \mu \left(\frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = \\ &= \left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}{1}, \frac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}{1} \right) \\ &= (f_y, -f_x) \end{aligned}$$

Portanto qualquer inversa local de $F^{-1} = \mu \circ N \circ \pi^{-1}$ pode ser expressa por

$$F^{-1}(x, y) = \mu \circ N \circ \pi^{-1}(x, y) = \mu \circ N(x, y) = f_y(x, y), -f_x(x, y).$$

A matriz jacobiana de F^{-1} é

$$dF^{-1} = \begin{bmatrix} f_{yx} & f_{yy} \\ -f_{xx} & -f_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(dF^{-1}) = -f_{yx}f_{xy} + f_{yy}f_{xx} = f_{yy}f_{xx} - f_{xy}^2.$$

Pela conhecida fórmula da curvatura Gaussiana para gráficos, ver [2], no ponto $(x, y, f(x, y))$, temos:

$$\det(dF^{-1}) = K(1 + f_x^2 + f_y^2)^2. \quad (2.3.1)$$

Mas por hipótese, $K \leq -k < 0$. Então $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$. Por definição os autovalores t_1 e t_2 de dF^{-1} são as raízes da equação $\det(dF^{-1} - tI) = 0$, então

$$\det(dF^{-1} - tI) = \begin{vmatrix} f_{yx} - t & f_{yy} \\ -f_{xx} & -f_{xy} - t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t^2 = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} > 0$$

ou seja, t_1 e t_2 têm sinais opostos.

Portanto, usando 2.3.1 e a hipótese sobre a curvatura, temos que:

$$\begin{aligned} \det(dF^{-1}) = t_1 t_2 < 0 &\Rightarrow K(1 + f_x^2 + f_y^2)^2 \leq -k < 0 \\ \Rightarrow |t_1 t_2| = |t_1|^2 = |t_2|^2 &\geq k \Rightarrow |t_1| = |t_2| \geq \sqrt{k}. \end{aligned}$$

Assim segue que os autovalores de dF são $\lambda_1 = \frac{1}{t_1}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{t_2}$, onde λ_1 e λ_2 são reais e tem sinais opostos. Além disso note que:

$$\begin{aligned} |t_1| \geq \sqrt{k} &\Rightarrow t_1 \leq -\sqrt{k} \text{ ou } t_1 \geq \sqrt{k} \Rightarrow \frac{1}{t_1} \geq -\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ ou } \frac{1}{t_1} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \\ |t_2| \geq \sqrt{k} &\Rightarrow t_2 \leq -\sqrt{k} \text{ ou } t_2 \geq \sqrt{k} \Rightarrow \frac{1}{t_2} \geq -\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ ou } \frac{1}{t_2} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Portanto

$$-\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \frac{1}{\sqrt{k}}. \quad (2.3.2)$$

Então basta considerar $\alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}$ que a afirmação é válida para uma vizinhança de q em U , mas como a desigualdade (2.3.2) não depende de F^{-1} temos o afirmado. \square

Resta notar uma propriedade de F implicada pela completude de Ω . Para esse fim, sejam c e r constantes positivas. Considere $D \subseteq \mathcal{D}$ como o conjunto

$$D = \{(x, y); 0 < x^2 + y^2 \leq r^2 \text{ e } x \geq -cy^2\},$$

onde \mathcal{D} é a região aberta de \mathbb{R}^2 , simplesmente conexa que não contém a origem, descrita acima.

Seja g^* a métrica Riemanniana em \mathcal{D} induzida pela imersão F . Façamos \mathcal{D} ser um espaço métrico onde se pode medir a distância $d_D^*(q, q')$ de q a q' , com $q, q' \in D$. A distância $d_D^*(q, q')$ é definida tomando o ínfimo dos g^* -comprimento de arcos em D ligando q e q' .

Afirmção 25. D com a métrica d_D^* é um espaço métrico completo.

Para provar essa afirmação considere \bar{g}^* uma métrica Riemanniana em U que corresponde a métrica g^* em \mathcal{D} sob o difeomorfismo $\mu \circ N$. É claro que g^* é a métrica em U induzida pela métrica Euclidiana $dx^2 + dy^2$ do plano xy com a imersão π . Vamos supor agora que o subconjunto $U = N^{-1} \circ \mu^{-1}(D)$ esteja num espaço métrico medindo a distância $d_U^*(q, q')$, com $q, q' \in U$ e $d_U^*(q, q')$ sendo o ínfimo dos \bar{g}^* -comprimento de arco em U ligando q e q' . Para terminar essa demonstração devemos estabelecer a seguinte afirmação:

Afirmção 26. U com a métrica d_U^* é um espaço métrico completo.

De fato, veja que U é um conjunto fechado de Ω , pois caso contrário haveria um ponto de acumulação $q \in U$ em $\Omega \setminus U$. Como a aplicação de Gauss $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ é contínua, então segue que $N(q)$ pertence ao fecho de $N(U)$ em \mathbb{S}^2 . Mas $N(q)$ não pode estar em $N(U)$, pois $\tilde{N} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{S}^2$ é injetiva e $q \notin U$. Pela construção de D , o

único ponto de acumulação de $N(U) = \mu^{-1}(D)$ que está em $\mathbb{S}^2 \setminus N(U)$ é o polo norte $\tilde{N}(p)$. Daí

$$\tilde{N}(p) = N(q) = \tilde{N}(q) \Rightarrow p = q,$$

mas isso não pode ocorrer visto que $p \in \partial(\tilde{\Omega}, III)$ e $q \in \Omega \setminus U$.

Como U é suconjunto fechado de uma superfície completa Ω , segue que U é completo. Além disso, U é ainda completo se medirmos a distância $d_U(q, q')$ entre pontos de U como o ínfimo dos I -comprimento de arcos em U ligando q e q' . Daí segue que U é uma subvariedade de Ω com fronteira C^1 por partes.

Para mostrar que U está completo na métrica d_U^* , precisamos agora apenas da observação elementar que

$$d_U^*(q, q') \leq d_U(q, q') \leq \sqrt{2}d_U^*(q, q') \quad (2.3.3)$$

Mostremos (2.3.3). Seja s^* um \bar{g}^* -comprimento de arco para γ , sendo γ um arco ligando q e q' . Note que qualquer arco γ em U dado por

$$z = f(x(s^*), y(s^*))$$

tem parâmetro comprimento de arco $s(s^*)$ dado por

$$s(s^*) = \int_0^{s^*} \sqrt{1 + (x'f_x + y'f_y)^2} ds^*. \quad (2.3.4)$$

Como $f_x^2 + f_y^2 \leq 1$, enquanto que $x'^2 + y'^2 = 1$, temos:

$$\begin{aligned} f_x^2 + f_y^2 &= (x'^2 + y'^2)(f_x^2 + f_y^2) = x'^2 f_x^2 + x'^2 f_y^2 + y'^2 f_x^2 + y'^2 f_y^2 \\ &= (x'f_x + y'f_y)^2 - 2x'f_x y'f_y + y'^2 f_x^2 + x'^2 f_y^2 \\ &= (x'f_x + y'f_y)^2 + (y'f_x - x'f_y)^2 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

E assim segue que

$$(x'f_x + y'f_y)^2 = f_x^2 + f_y^2 - (y'f_x - x'f_y)^2 \leq f_x^2 + f_y^2 \leq 1 \quad (2.3.6)$$

Substituindo a equação (2.3.6) em (2.3.4) temos

$$s^* \leq s(s^*) \leq \sqrt{2}s^* \Rightarrow d_U^*(q, q') \leq d_U(q, q') \leq \sqrt{2}d_U^*(q, q'),$$

para todo $q, q' \in U$, como queríamos.

Portanto se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy na distância d_U^* e $d_U(q, q') \leq \sqrt{2}d_U^*(q, q')$, então $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy na distância d_U e portanto deve convergir na métrica d_U . Mas usando (2.3.3) novamente temos $d_U^*(q, q') \leq d_U(q, q')$,

a convergência na métrica d_U implica convergência na métrica d_U^* . Portanto U com a métrica d_U^* é um espaço métrico completo, como queríamos. O que conclui a afirmação (26).

Para finalizar a prova da afirmação (25) veja que agora tendo que U com a métrica d_U^* é um espaço métrico completo, temos também que D com a métrica d_D^* é um espaço métrico completo, pois a métrica Riemanniana \bar{g}^* em U , corresponde à métrica Riemanniana g^* em \mathcal{D} , sob o difeomorfismo $\mu \circ N$. Portanto, as afirmações (24) e (25) dizem que os autovalores associados a diferencial da imersão são reais com sinais opostos e que D com a métrica d_D^* é um espaço métrico completo contradizendo o Lema Principal. Portanto o Lema A fica demonstrado. \square

Após demonstrar o Lema A, a fim de provar o Lema B, vamos considerar daqui para a frente Ω uma superfície isometricamente imersa na esfera e $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal imersão. Além disso, vamos sempre supor que Ω é pseudo-convexo. Observe que se γ uma geodésica em Ω . Se $l(\gamma) < \pi$ então γ é um arco minimizante em \mathbb{S}^2 entre quaisquer dois dos seus pontos e além disso $N|_\gamma$ é injetiva.

Lema 27. *Se $D_r(p)$ é um disco geodésico completo em Ω , com $r > \pi$. Então Ω é uma esfera e $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma isometria.*

Demonstração. Primeiramente observe que do fato de $r > \pi$ segue que $D_r(p) \supset D_\pi(p)$. Agora vamos supor que $D_r(p)$ seja um disco completo, com $r > \pi$. Vejamos que $N|_{D_\pi(p)}$ é injetiva. De fato, sejam $q_1, q_2 \in D_\pi(p)$ tal que $q_1 \neq q_2$. Construa arcos geodésicos α_i ligando p a $q_i, i = 1, 2$. As curvas $N \circ \alpha_i$ são grandes círculos de \mathbb{S}^2 , com comprimento menor que π , pois pela construção α_i tem comprimento menor que π . Pela observação anterior segue que $N|_{\alpha_i}$ é injetiva. Daí se $q_1 = p$ ou $q_2 = p \Rightarrow N(q_1) \neq N(q_2) \Rightarrow N|_{D_\pi(p)}$ é injetiva.

Além disso $N(D_\pi(p)) = \mathbb{S}^2 \setminus \{-N(p)\}$. De fato, se γ é arco geodésico partindo de p com $l(\gamma) < \pi$, então N leva γ numa porção do grande círculo partindo de $N(p)$ com o mesmo comprimento de γ . Mas vimos acima que $N|_{D_\pi(p)}$ é injetiva. Então $N(D_\pi(p)) = \mathbb{S}^2 \setminus \{-N(p)\}$. Como N é contínua, temos $N(\partial D_\pi(p)) = -N(p)$. Observe que $\partial D_\pi(p)$ é conexo e N é localmente injetiva. Então $\partial D_\pi(p)$ é um único ponto. Portanto segue que $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma isometria. \square

Lema 28. *Se $D_r(p)$ é um disco geodésico completo, com $r > \pi/2$, então Ω é uma esfera e $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma isometria.*

Demonstração. Sejam $r > \pi/2$ e $D_r(p)$ um disco geodésico em Ω . O objetivo nessa demonstração é aumentar o raio r para um outro raio \tilde{r} tal que $\tilde{r} > \pi$, pois tendo isso basta aplicar o lema (27) que temos o resultado.

Suponhamos por absurdo que $\pi/2 < r \leq \pi$. Sem perda de generalidade, suponhamos ainda que r é máximo, ou seja, $\nexists D_{\tilde{r}}(p)$, com $r > \tilde{r}$. Então $\exists \hat{p}$ tal que $\hat{p} \in$

$\partial D_r(p), \widehat{p} \in \widetilde{\Omega}$ e $\widehat{p} \notin \Omega$. Mas vimos acima $N(D_r(p))$ é injetiva em \mathbb{S}^2 de mesmo raio r . Isso implica que $\widetilde{p} \in \partial N(D_r(p))$.

Seja γ um arco aberto de Γ que contém $\widetilde{N}(\widehat{p})$, onde Γ é um círculo não geodésico. A escolha desse Γ é tal que a maior das regiões abertas em \mathbb{S}^2 delimitada por Γ esteja contida em $N(D_r(p))$. Agora tome ϵ pequeno o suficiente e faça $U = N^{-1}(R(\gamma, \epsilon))$. Assim, pela definição (19) segue que $\widetilde{\Omega}$ é côncavo em p . Mas isso é um absurdo visto que por hipótese Ω é pseudo-convexo. \square

Afirmção 29. *Se Ω não é a uma esfera, então qualquer arco geodésico γ ligando p_1 e p_2 , com $p_1, p_2 \in \text{int}(\Omega)$ tem comprimento $l(\gamma) < \pi$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $l(\gamma) \geq \pi$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $l(\gamma) = \pi$, pois basta substituir γ por um porção dele mesmo. Seja $N \circ \gamma$ uma parametrização da parte $y \leq 0$ do equador de \mathbb{S}^2 , ou seja, $N \circ \gamma$ é um semicírculo máximo de \mathbb{S}^2 .

Definimos como ϵ -faixa em torno de $N \circ \gamma$ como a união de todos os discos geodésicos abertos $D_\epsilon(p_i)$ em \mathbb{S}^2 , com p_i pontos de $N \circ \gamma$.

Como γ é compacto em Ω e $l(\gamma) = \pi$ então existe $\epsilon > 0$ e uma vizinhança V_0 de γ em Ω tal que $N|_{V_0}$ é localmente injetiva sobre a ϵ -faixa de $N \circ \gamma$.

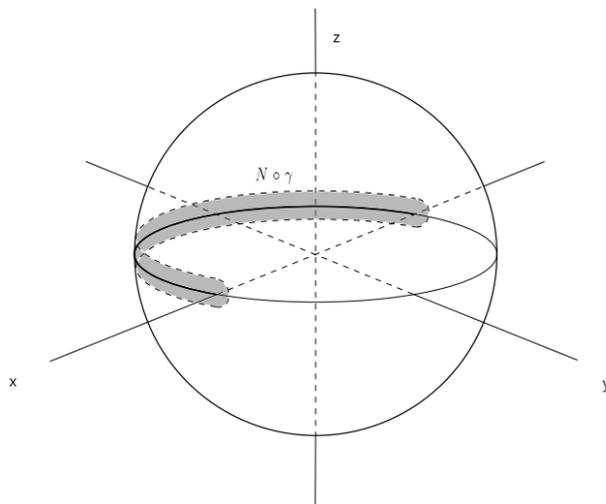


Figura 2.3: A parte hachurada da figura acima é a ϵ -faixa de $N \circ \gamma$.

Tomando ϵ suficientemente pequeno, podemos supor que $N(\widetilde{V}_0) \subset \Omega$, lembrando que \widetilde{V}_0 é o fecho de V_0 em $\widetilde{\Omega}$.

Dado um número $\theta \geq 0$, considere as rotações possíveis de \mathbb{S}^2 da ϵ -faixa em torno do eixo x . Vamos chamar de θ -região o interior do conjunto dos pontos de \mathbb{S}^2

atingidos durante essas rotações. Assim, por exemplo a 0-região de $N \circ \gamma$ em \mathbb{S}^2 é justamente ϵ -faixa. Além disso, se $0 < \theta' \leq \theta$ então θ -região $\supset \theta'$ -região.

Considere como $\widehat{\theta}$ o supremo de todos os valores de θ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ para os quais alguma vizinhança V_θ de γ em Ω seja aplicado por N de forma biunívoca na θ -região de $N \circ \gamma$ em \mathbb{S}^2 .

Agora observe que o caso que $\widehat{\theta} > \pi/2 - \epsilon$ não ocorre. De fato, pois se $\widehat{\theta} > \pi/2 - \epsilon$ então $\exists D_r(p)$, onde $p = (0, -1, 0)$ e $r > \pi/2$ tal que $D_r(p)$ está contido em uma θ -região, ou seja existe $D_r(p)$ em Ω centrado em $N^{-1}(p)$ que não é uma esfera, mas isso contradiz o lema (28).

Além disso, o caso $\widehat{\theta} \leq \pi/2 - \epsilon$ também não ocorre. De fato, suponha por absurdo que $\widehat{\theta} \leq \pi/2 - \epsilon$, então existe $V_{\widehat{\theta}}$ em Ω . Mas note que o fecho de $V_{\widehat{\theta}}$ em $\widetilde{\Omega}$ contém algum ponto p tal que $p \in \partial \widetilde{\Omega}$. Isso implica que $p \notin \widetilde{N}_0$ pois $N(V_0)$ é a ϵ -faixa e $\widetilde{V}_0 \subset \Omega$. Logo, $\widetilde{N}(p)$ deve estar a uma distância maior do que ϵ de ambos extremos de $N \circ \gamma$. Ora, mas isso significa que $\widetilde{N}(p)$ pertence a uma parte da fronteira de $N_{\widehat{\theta}}$ que está sobre um arco não geodésico. Então segue que $\widetilde{\Omega}$ é côncavo em p , mas isso é um absurdo visto que por hipótese Ω é pseudo-convexo. \square

Afirmção 30. *Se Ω não é uma esfera e se γ é um arco geodésico em Ω ligando os centros dos discos geodésicos de $D_r(a)$ e $D_r(b)$ em Ω , então:*

- i) $l(\gamma) + 2r \leq \pi$;
- ii) *Existe um conjunto aberto convexo H em Ω contendo $D_r(a) \cup \gamma \cup D_r(b)$;*
- iii) *γ é a única geodésica em Ω ligando a e b . Além disso, tem-se $l(\gamma) = d(a, b)$*

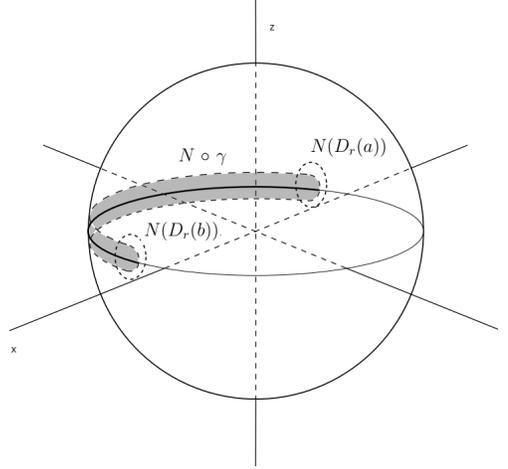
Demonstração. Vamos supor ao longo da demonstração que $a \neq b$, pois o caso em que $a = b$ a verificação dos itens (i),(ii) e (iii) é imediata.

Para provar o item (i) vamos supor por absurdo que $l(\gamma) + 2r > \pi$, daí podemos estender γ a alguma outra geodésica que tenha comprimento π , mas isso contradiz a afirmação (29), logo $l(\gamma) + 2r \leq \pi$.

Vejam agora o item (ii). Observe que exceto movimentos na esfera, podemos considerar $N \circ \gamma$ como sendo a parametrização de uma parte frontal $y < 0$ do equador de \mathbb{S}^2 com o ponto médio $(0, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$. Pelo item (i), N é injetiva em $D_r(a) \cup \gamma \cup D_r(b)$ e o leva ao hemisfério frontal de \mathbb{S}^2 .

No entanto, a seguir faremos a suposição adicional de que os fechos $\widetilde{D}_r(a)$ e $\widetilde{D}_r(b)$ em $\widetilde{\Omega}$ estão no interior de Ω . Note que N é injetiva restrita a $\widetilde{D}_r(a) \cup \gamma \cup \widetilde{D}_r(b)$. Provando (ii) sob estas hipóteses, estabeleceremos (ii) no caso geral.

Considere $\epsilon > 0$, $N : V(\epsilon) \rightarrow \Omega$, com $V(\epsilon)$ sendo uma vizinhança de γ . Como N é difeomorfismo local, segue que N é injetiva para uma ϵ - faixa ao redor de $N \circ \gamma$. Seja $\bar{\epsilon} > 0$ o supremo de todos os valores de ϵ que pertencem ao intervalo $(0, r)$ para



o qual $V(\epsilon)$ exista. Pela regularidade das funções envolvidas segue que $V(\epsilon)$ existe em Ω .

Afirmamos que $\bar{\epsilon} = r$. De fato, suponha por absurdo que $\bar{\epsilon} < r$. Então existe $p \in \partial\tilde{\Omega}$ em algum lugar do fecho métrico de $V(\bar{\epsilon})$. Além disso, $\tilde{N}(p)$ está situado em um segmento de círculo não geodésico da fronteira de $N(V(\bar{\epsilon}))$. Mas então $\tilde{\Omega}$ seria côncavo em p , contradizendo o fato de que Ω é pseudo-convexo. Daí concluímos que $\bar{\epsilon} = r$.

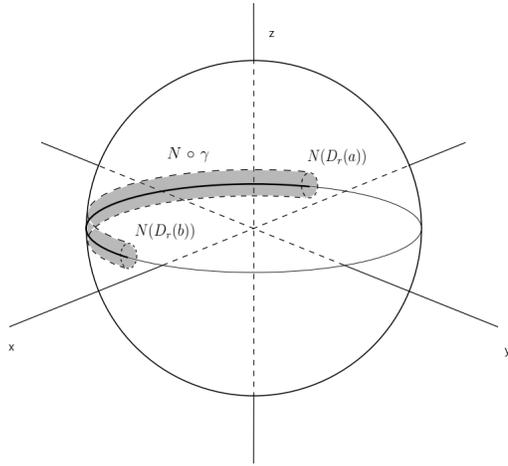


Figura 2.4: A parte hachurada da figura acima, agora é a r -faixa de $N \circ \gamma$.

O próximo passo da prova é construir uma família crescente de vizinhanças \mathcal{N}_θ em Ω , com $0 < \theta < \bar{\theta} < \pi/2$, de modo que $N(\mathcal{N})$ é a r -faixa em torno de $N \circ \gamma$ e então $\mathcal{N}_{\bar{\theta}}$ é convexa. A construção segue.

Seja \mathcal{C} o cilindro elíptico reto de \mathbb{R}^3 formado pela união de todas as linhas paralelas ao eixo x entre as bordas de $N(D_r(a))$ e $N(D_r(b))$.

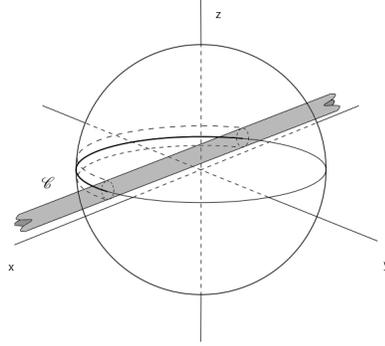
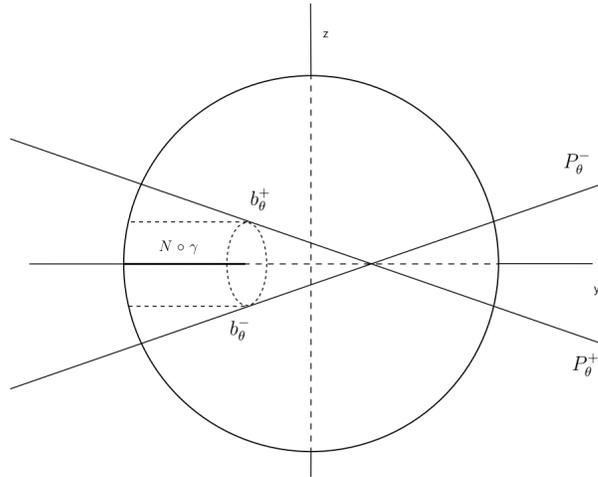


Figura 2.5: A parte hachurada da figura acima é o cilindro \mathcal{C} .

Defina os planos horizontais em \mathbb{R}^3 tangentes a \mathcal{C} de cima e de baixo por P_0^+ e P_0^- respectivamente.

Seja $y_0 < 0$ a coordenada y no centro de $N(D_r(a))$ e $N(D_r(b))$. Para qualquer θ no intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$, seja P_θ^+ e P_θ^- os planos de \mathbb{R}^3 que formam um ângulo θ com o plano $z = 0$ e que são tangentes a \mathcal{C} ao longo de uma reta $y = \text{constante} \geq y_0$ com $z = \text{constante} \geq 0$ e $z = \text{constante} \leq 0$ respectivamente. É claro que os planos $P_{\frac{\pi}{2}}^+$ e $P_{\frac{\pi}{2}}^-$ coincidem e são verticais.



Devido a regularidade de N , é claro que existe um único valor de $\bar{\theta}$ de θ no intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $P_{\bar{\theta}}^+$ e $P_{\bar{\theta}}^-$ atinjam a origem de \mathbb{R}^3 . Os planos $P_{\bar{\theta}}^+$ e $P_{\bar{\theta}}^-$ cortam

os grandes círculos em \mathbb{S}^2 que são tangentes aos bordos circulares de $N(D_r(a))$ e $N(D_r(b))$. Antes de definir vizinhanças em \mathcal{N}_θ em Ω para valores θ em $[\theta, \bar{\theta}]$, algumas construções adicionais serão necessárias em \mathbb{S}^2 .

Sejam a_θ^+ e b_θ^+ os pontos onde P_θ^+ intercepta os fechos de $N(D_r(a))$ e $N(D_r(b))$ respectivamente, a_θ^- e b_θ^- os pontos onde P_θ^- intercepta os fechos de $N(D_r(a))$ e $N(D_r(b))$ respectivamente. Seja $\bar{\gamma}_\theta^a$ o arco ao longo do lado esquerdo do bordo de $N(D_r(a))$ ligando a_θ^+ e a_θ^- e seja $\bar{\gamma}_\theta^b$ o arco ao longo do lado direito do bordo de $N(D_r(b))$ ligando b_θ^+ e b_θ^- . Finalmente para qualquer valor θ em $[0, \bar{\theta}]$, a região aberta na face frontal de \mathbb{S}^2 abaixo de P_θ^+ , acima de P_θ^- , a direita de $\bar{\gamma}_\theta^a$ e a esquerda de $\bar{\gamma}_\theta^b$ será chamada de θ -vizinhança de $N \circ \gamma$ em \mathbb{S}^2 . Observe então que a 0 -vizinhança de $N \circ \gamma$ é a r -faixa e a θ -vizinhança contém qualquer θ' -vizinhança, onde $0 \leq \theta' \leq \theta \leq \bar{\theta}$.

Agora seja $\tilde{\theta} > 0$ o supremo de todos os valores de θ no intervalo $[0, \bar{\theta}]$ tal que alguma vizinhança \mathcal{N}_θ de y em Ω é mapeada por N em uma θ -vizinhança de $N \circ \gamma$ em \mathbb{S}^2 . Por esse fato, $\mathcal{N}_{\tilde{\theta}}$ existe. Mas se $\tilde{\theta} < \bar{\theta}$, deve existir algum ponto p no fecho métrico de $\mathcal{N}_{\tilde{\theta}}$ em $\tilde{\Omega}$ que está em $\partial\tilde{\Omega}$. Como supomos que Ω contém os fechos $\tilde{D}_r(a)$ e $\tilde{D}_r(b)$ em $\tilde{\Omega}$, $\tilde{N}(p)$ deve ter distância maior que r dos pontos extremos de $N \circ \gamma$. Portanto $\tilde{N}(p)$ deve estar ao longo do arco de um círculo não geodésico $\bar{\gamma} = P_\theta^+ \cap \mathbb{S}^2$ ou $\bar{\gamma} = P_\theta^- \cap \mathbb{S}^2$, cujo centro em \mathbb{S}^2 está do lado oposto de $\bar{\gamma}$ da $\tilde{\theta}$ -vizinhança de $N \circ \gamma$. Assim, se $\tilde{\theta} < \bar{\theta}$, então $\tilde{\Omega}$ deve ser côncavo em p , contradição. Assim segue que $\tilde{\theta} = \bar{\theta}$.

Considere H como o conjunto $\mathcal{N}_{\bar{\theta}}$ em Ω . Então H é convexo pois a $\bar{\theta}$ -vizinhança de $N \circ \gamma$ em \mathbb{S}^2 é convexa, onde N é uma isometria injetiva de H em uma $\bar{\theta}$ -vizinhança de $N \circ \gamma$.

Assim, para completar a prova de (ii), precisamos apenas resolver o caso em que os fechos métricos de $D_r(a)$ e $D_r(b)$ em $\tilde{\Omega}$ não estão completamente dentro de Ω .

Mas observe que para cada valor de ρ em $(0, r)$, os discos geodésicos completos $D_\rho(a)$ e $D_\rho(b)$ tem fechos métricos em $\tilde{\Omega}$ que estão dentro de Ω . Os argumentos anteriores aplicam-se para fornecer conjuntos abertos convexos H_ρ em Ω contendo $D_\rho(a) \cup \gamma \cup D_\rho(b)$. Então basta considerar H como a união de todos H_ρ com $\rho \in (0, r)$, ou seja

$$H = \bigcup_{0 < \rho < r} H_\rho.$$

O conjunto aberto H é convexo e contém $D_r(a) \cup \gamma \cup D_r(b)$ como queríamos.

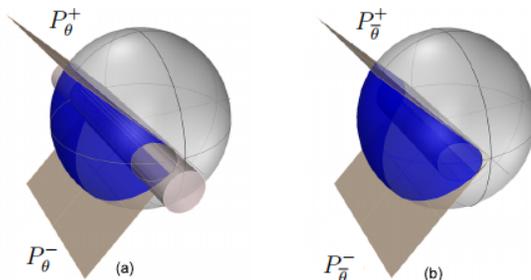


Figura 2.6: Construção do subconjunto convexo H .

Finalmente observe que para provar (iii) basta ver que segue de (i) e (ii), ou seja de (i) e (ii) temos $l(\gamma) = d(a, b) < \pi$ e assim $N(a)$ e $N(b)$ pertencem ao mesmo hemisfério aberto em \mathbb{S}^2 e a unicidade ocorre pois se existisse outra geodésica γ' ligando a e b teríamos $l(\gamma') > \pi$, que é um absurdo. \square

Com os resultados anteriores estamos prontos para demonstrar o seguinte lema:

Lema 31 (Lema B). *Seja Ω uma superfície munida de uma métrica Riemanniana. Se $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma imersão isométrica de classe C^1 e Ω é pseudo-convexo então:*

- a) N é injetiva em Ω ;
- b) $N(\Omega) = \mathbb{S}^2$ ou $N(\Omega)$ é convexa. (Em particular, Ω é simplesmente conexa.)
- c) Ω tem área finita. Se $N(\Omega) = \mathbb{S}^2$ então a área finita é 4π e é menor ou igual a 2π caso contrário.

Demonstração. Observe primeiramente que se Ω é a esfera então temos (a), (b) e (c) válidos. Portanto no desenvolvimento dessa demonstração vamos supor que Ω não é a esfera.

Sejam $p, q \in \Omega$ tais que $p \neq q$. Como Ω é conexo podemos construir um arco parametrizado $\bar{\gamma}$ em Ω ligando p a q . Temos ainda que $\bar{\gamma}$ é compacto e N é uma isometria local. Dessa forma, escolha $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que cada ponto de $\bar{\gamma}$ seja o centro de um disco geodésico completo e com raio ϵ . Agora fixe um conjunto finito de pontos $p = p_0, p_1, \dots, p_n = q$ em $\bar{\gamma}$ tais que $d(p_{j-1}, p_j) < \epsilon, \forall j = 1, \dots, n$. Seja D_j o disco geodésico completo centrado em p_j e com raio ϵ . Observe que por construção o centro de D_j está dentro de D_{j-1} , ou seja $p_j \in D_{j-1}$. Assim, note que em Ω , p_0 pode ser ligada a p_1 por uma única geodésica γ_1 , com $l(\gamma_1) = d(p_0, p_1)$. Usando o processo de indução, suponhamos que $\forall j = 1, \dots, n-1$, podemos ligar p_0 a p_j por uma única geodésica $\gamma_j \subset \Omega$ tal que $l(\gamma_j) = d(p_0, p_j)$. Resta-nos mostrar o

caso $j = n + 1$. Mas sabemos pela afirmação (30) que existe um conjunto H aberto e convexo contendo γ_j, D_0 e D_j . Como $p_{j+1} \in D_j$ então existe um conjunto H aberto e convexo contendo γ_{j+1}, D_0 e D_{j+1} e pelo item (iii) da afirmação (30) segue que existe uma única geodésica γ_{j+1} ligando p_0 e p_{j+1} tal que $l(\gamma_{j+1}) = d(p_0, p_{j+1})$. Portanto por indução $p = p_0$ pode ser ligado a $q = p_n$ por uma única geodésica γ_n tal que $l(\gamma) = d(p, q)$. E daí concluímos que Ω é convexa.

Para mostrar (a) basta tomar γ como a geodésica que liga p a q como a geodésica no desenvolvimento do argumento feito acima. Mas como $N|_\gamma$ é injetiva temos $N(p) \neq N(q)$ portanto N é injetiva em Ω . Além disso, para demonstrar (b) como N é injetiva em Ω e Ω é convexa então $N(\Omega)$ é a imagem isométrica de uma superfície convexa o que implica que qualquer conjunto em \mathbb{S}^2 deve ser simplesmente convexa (em particular Ω é simplesmente conexo.)

Antes de demonstrar (c) vejamos a seguinte afirmação:

Afirmação 32. *Se E é um subconjunto convexo de \mathbb{S}^2 , então E está contido em um hemisfério de \mathbb{S}^2 .*

De fato, seja q um ponto arbitrário de \mathbb{S}^2 cuja distância r de \overline{E} é maximal.

- Se $r \geq \pi/2$ a afirmação está demonstrada.
- Não ocorre o caso $0 < r < \pi/2$. De fato, suponha por absurdo que $0 < r < \pi/2$ então vamos admitir que existe um único $p \in \overline{E}$ tal que a distância de p a q seja r . Tome D' como um disco geodésico de raio $\epsilon < r/2$ e centro p . Temos que o conjunto compacto $\overline{E} - (D' \cap \overline{E})$ tem uma distância $\rho > r$ de q .

Translade o ponto q a uma distância δ do ponto p , onde $\delta = \min\{\rho - r, \pi/2 - r\}$ ao longo do grande círculo que passa por p e q na esfera. Seja $\hat{q} \in \mathbb{S}^2$ o ponto final do percurso então \hat{q} está a uma distância maior do que r do conjunto $\overline{E} \cap \overline{D'}$, pois $\overline{D'}$ está no hemisfério (aberto) de \mathbb{S}^2 que tem todos os seus pontos mais próximos de q do que de \hat{q} .

Assim, a escolha de δ nos diz que a distância entre \hat{q} e o subconjunto $\overline{E} - (D' \cap \overline{E})$ é também maior que r . Assim, \hat{q} está mais distante de \overline{E} do que de q , mas isso não ocorre visto que escolhemos q como sendo a distância máxima de \overline{E} . Então existe pelo menos dois pontos $p_1, p_2 \in \overline{E}$ a uma distância r de q .

Considere agora o arco geodésico em \mathbb{S}^2 que minimiza a distância entre p_1 e p_2 . Exceto em seus pontos extremos, este arco está fora de \overline{E} (pois $0 < r < \pi/2$). Mas, próximos de p e q podemos considerar respectivamente pontos $q_1, q_2 \in \overline{E}$ e assim escolher o arco geodésico minimizante que liga q_1 e q_2 mas que tenha pontos fora de \overline{E} . Ora, mas E é convexo, portanto isso não ocorre, como queríamos.

- Não ocorre o caso $r = 0$. Como \mathbb{S}^2 não é um subconjunto convexo de \mathbb{S}^2 , então existe um ponto $q \in \mathbb{S}^2$ mas $q \notin E$, ou seja, $\mathbb{S} - E \neq \emptyset$. Agora considere o hemisfério (aberto) H com centro em q e defina um triângulo geodésico T em H , cujo interior de T contenha q . Observe que E é denso em \mathbb{S}^2 então podemos supor sem perda de generalidade que os vértices $p_1, p_2, p_3 \in T$ pertencem a E . Assim, podemos escolher $p_1, p_2, p_3 \in E$ de modo que o triângulo geodésico que eles determinam tem q no interior de H . Assim, o arco geodésico mais curto em \mathbb{S}^2 ligando p_1 a q se estende a um arco geodésico mais curto em \mathbb{S}^2 de p_1 ao ponto \hat{p} do arco geodésico minimizante ligando p_2 e p_3 . Como E é convexo, então por essa construção $q \in E$, mas isso é um absurdo pois supomos $q \notin E$.

O item (c) fica demonstrado com a afirmação acima, pois N é imersão isométrica e $N(\Omega) \subset \mathbb{S}^2$ é convexo. \square

Depois de todos os resultados acima estamos prontos para demonstrar o principal resultado do capítulo:

Teorema 33 (Efimov). *Não existem superfícies completas C^2 -imersas em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana limitada superiormente por uma constante negativa.*

Demonstração. Suponha que Ω é orientável. Precisamos dessa suposição para usar o Lema A. Mas caso Ω não seja orientável, basta tomar o seu recobrimento orientável. Além disso, vamos supor que Ω é completa na métrica Riemanniana g induzida por ψ , onde $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão. Seja K a curvatura Gaussiana da imersão. Por hipótese temos $K \leq -k < 0$. Fixado uma orientação para Ω , tome a correspondente aplicação normal de Gauss N associada a imersão. Portanto estamos nas condições do Lema A e daí segue que (Ω, III) é pseudo-convexo.

Observe que (Ω, III) não é completa. De fato, se (Ω, III) fosse completa, então pelo Teorema de Bonnet Myers, ver [2], (Ω, III) seria compacta. Porém (Ω, I) é variedade de Hadamard que implicaria que $(\Omega, I) \cong \mathbb{R}^n$, que por sua vez não é compacto. Portanto (Ω, III) não é completa. Então pelo item (b) do Lema B, segue que $N(\Omega)$ não é toda a esfera. Portanto, segue pelo item (c) do Lema B que $N(\Omega)$ tem área menor ou igual a 2π .

Fixe agora um ponto qualquer $p \in S$ e seja $\sigma(r)$ a área em Ω (na métrica I) do disco geodésico $D_r(p)$, com centro em p e raio $r > 0$. Considere ainda $\sigma^*(r)$ a área em Ω (na métrica III). Assim, pela conclusão do parágrafo anterior, temos que

$$\sigma^*(r) \leq 2\pi. \quad (2.3.7)$$

Além disso, sabemos que

$$\sigma^*(r) = \int_{D_r(p)} |N_u \wedge N_v| d(u, v) = \int_{D_r(p)} dA_{III} \quad (2.3.8)$$

Mas vimos em (1.1.5) que $|N_u \wedge N_v| = |K||X_u \wedge X_v|$, então

$$\sigma^*(r) = \int_{D_r(p)} |K||X_u \wedge X_v| d(u, v) = \int_{D_r(p)} |K| dA_I \quad (2.3.9)$$

Então pelas equações (2.3.7), (2.3.8), (2.3.9) e pelo fato que $K \leq -k$ então $|K| \geq k$ e segue que

$$\begin{aligned} 2\pi \geq \sigma^*(r) &= \int_{D_r(p)} |K| dA_I \geq k \int_{D_r(p)} dA_I = k\sigma(r) \\ &\Rightarrow 2\pi \geq k\sigma(r) \\ &\Rightarrow \sigma(r) \leq \frac{2\pi}{k}. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Sabemos pelo item (b) do Lema B que (Ω, III) é simplesmente conexa implicando assim que Ω é simplesmente conexa para I . Daí, (Ω, I) é variedade de Hadamard e tem área infinita, ver corolário (15), o que contradiz (2.3.10). □

2.4 O Lema Principal

O Lema Principal do Teorema de Efimov afirma que se existe uma imersão de uma certa região especial em \mathbb{R}^2 , tal que seus autovalores associados à diferencial da imersão são reais e verificam uma certa desigualdade, então existe um conjunto dentro dessa região especial que não é um espaço métrico completo com a distância na métrica induzida pela dita imersão.

Devido à extensa prova do Lema Principal, ver [11], dedicamos essa seção a apresentá-la de forma resumida.

Começamos construindo a região especial \mathcal{D} .

Primeiramente fixe constantes $c > 0$ e r . Sejam P a parábola $y^2 = -cx$ e C o círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Considere D o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^2 + y^2 \leq r^2, y^2 \geq -cx\}$$

e escolha $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ qualquer região aberta, simplesmente conexa, contendo D , mas não definido na origem, ou seja $(0, 0) \notin \mathcal{D}$.

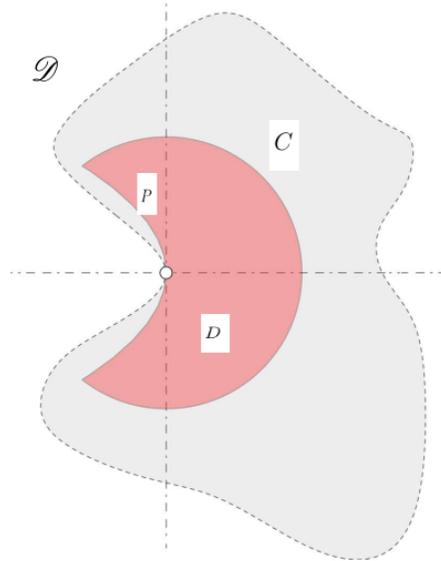


Figura 2.7: Região aberta \mathcal{D} simplesmente conexa que contém D .

No Lema Principal, uma região muito específica D é indicada para simplificar a prova. A conclusão do Lema permanece válida sob várias alterações no formato de D . Mas é essencial que D seja côncavo na origem que não pertence a D . O seguinte exemplo destina-se a enfatizar esse ponto.

Exemplo 34. Considere a aplicação $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$F(x, y) = \left(x, \frac{1}{x} - y\right),$$

onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$. Agora observe que escrevendo a derivada dF na forma matricial temos

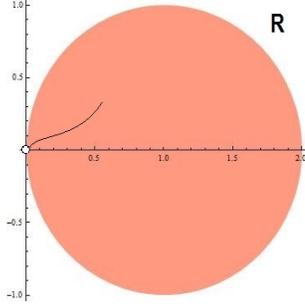
$$dF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(dF - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = -(1 - \lambda^2).$$

Mas as raízes de $\det(dF - \lambda) = -(1 - \lambda^2)$ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, ou seja, a derivada dF tem dois autovalores reais que satisfazem

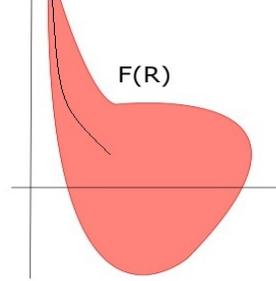
$$-\alpha \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \alpha \Rightarrow -2 \leq -1 \leq 1 \leq 2.$$

E além disso $\det(dF) = -1 \neq 0$ e isso implica que dF é injetiva, de onde segue que F é uma imersão. Observe ainda que essa imersão F leva a região convexa

$$R := (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x > 0$$



(a) Figura1



(b) Figura2

em um subconjunto fechado do plano.

As curvas em R que vão para a origem são aplicadas por F em curvas que tendem a infinito, o que implica que os comprimentos de suas imagens em $F(R)$ divergem para a métrica Euclidiana usual. Logo R munido com a distância d_D^* associada a métrica Riemanniana g^* induzida por F é um espaço completo.

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um arco não necessariamente regular. Considere $\mathcal{P}([a, b])$ o conjunto de todas as partições de $[a, b]$. Uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$ determina uma sequência de pontos $\gamma_{t_0}, \gamma_{t_1}, \dots, \gamma_{t_n}$ no traço de γ que definem uma poligonal com comprimento dado por

$$V(P) = \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

Observe que se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a, b])$ e P_1 é um refinamento de P_2 então $V(P_1) \geq V(P_2)$.

Definição 35. Nas condições anteriores, dizemos que γ é um **arco retificável** quando o conjunto

$$\{V(P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

é limitado superiormente. Nesse caso definimos o **comprimento de arco** γ como sendo o número

$$L = \sup\{V(P); P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

Definição 36. Uma função ξ é dita ser de **variação limitada** em um arco $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se existe um número real positivo $M > 0$ tal que para todas as partições $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$ temos que

$$V_\xi(P) = \sum_{k=1}^n \|\xi(\gamma(t_k)) - \xi(\gamma(t_{k-1}))\| \leq M.$$

Se define a **Varição total** de ξ em γ denotado por $l_\xi(\gamma)$ como sendo o menor limite superior da variação de ξ entre todas as partições $P \in \mathcal{P}$, ou seja

$$l_\xi(\gamma) = \sup\{V_\xi(P); P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

Suponha $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma imersão e considere em \mathcal{D} a métrica g^* induzida pela métrica usual do plano, denotando por d^* a sua distância associada. Dessa forma o g^* -comprimento de um arco γ em \mathcal{D} é o comprimento Euclidiano de $F \circ \gamma$.

Dados $q, q' \in D$ arbitrários, considere $d_D^* : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ a função que associa o par (q, q') ao ínfimo dos g^* -comprimentos de arcos retificáveis em D ligando q a q' . Como d_D^* é uma distância e $D \subset \mathcal{D}$ temos

$$d^*(q, q') \leq d_D^*(q, q'), \quad \forall q, q' \in D.$$

Apesar da existência independente de D como espaço métrico, reservamos os símbolos \bar{U} e ∂U para denotar o fecho e a fronteira de $U \subset D$ respectivamente. Assim, por exemplo, D pode ser visto como uma variedade com limite $D \cap \partial D$.

Definição 37. Um arco γ em D , parametrizado por g^* -comprimento de arco, que liga dois pontos p e q , com $p, q \in D$ é chamado de arco **g^* -minimizante** se não existe outro arco em D que liga p e q que tenha um g^* -comprimento menor que o g^* -comprimento de γ .

Definição 38. Um arco $\rho : [0, \infty) \rightarrow D$ é chamado de **raio distinguido** se a restrição de ρ ao intervalo finito $[0, s]$ é um arco g^* -minimizante em D .

Definição 39. Dado algum valor real θ , considere a função linear

$$\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$$

em \mathbb{R}^2 . Seja γ um arco retificável e $l_\xi(\gamma)$ a variação total de ξ em γ . Assim, veja que se $\theta = 0$ teremos $l_x(\gamma)$ que é a variação total de x em γ . E se $\theta = \pi/2$ teremos $l_y(\gamma)$ que é a variação total de y em γ .

Agora, se $\gamma \in \mathcal{D}$ vamos denotar por $l_\xi^*(\gamma)$ como sendo a variação total de ξ em $F \circ \gamma$, de tal forma que

$$l_\xi^*(\gamma) = l_\xi(F \circ \gamma).$$

Em particular, note que $l_x^*(\gamma) = l_x(F \circ \gamma)$ e $l_y^*(\gamma) = l_y(F \circ \gamma)$. Além disso $l_\xi^*(\gamma) \leq l^*(\gamma)$.

Suponha que λ_1 e λ_2 de dF são reais, e satisfazem a inequação

$$-\alpha \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \alpha, \quad (2.4.1)$$

em \mathcal{D} para alguma constante α .

Definição 40. Definimos uma **quase-distância** \hat{d} como uma função real $D \times D$ com todas as propriedades usuais de distância, exceto que $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$, ou seja, podemos ter $\hat{d}(p, q) = 0$, mesmo tendo $p \neq q$. Além disso, definimos o quase-comprimento de um caminho retificável $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ como sendo

$$\hat{l}(\gamma) = \sup \sum_{k=1}^n \hat{d}(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)),$$

para todas as partições finitas $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$.

Lema 41. Se a sequência de arcos $\beta_j : [0, 1] \rightarrow D$ converge uniformemente na distância d_D^* para um arco $\beta : [0, 1] \rightarrow D$, necessariamente contínuo, e se \hat{d} é uma quase-distância com a propriedade de que $\hat{d}(p, q) \leq d_D^*(p, q)$, $\forall p, q \in D$, então

$$\hat{l}(\beta) \leq \liminf \hat{l}(\beta_j).$$

Corolário 42. Se a sequência de arcos $\beta_j : [0, 1] \rightarrow D$ converge uniformemente na distância d_D^* para um arco $\beta : [0, 1] \rightarrow D$, necessariamente contínuo, então

$$l_\xi^*(\beta) \leq \liminf l_\xi^*(\beta_j).$$

com $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$.

Corolário 43. Se a sequência de arcos g^* -minimizantes $\gamma_j : [a, b] \rightarrow D$ converge uniformemente na métrica d_D^* para um arco $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, então γ é um arco g^* -minimizante.

Após esses resultados dados acima, estamos em condições de demonstrar o seguinte lema.

Lema 44. Se D é completo na distância d_D^* então existe um raio distinguido em D .

Demonstração do lema (44). Suponha que D é completo usando a distância d_D^* . Queremos contruir um raio distinguido $\rho : [0, \infty) \rightarrow D$. Para isso considere $p_0 = (r, 0) \in D$ arbitrário, tal que p_0 seja o ponto inicial do raio distinguido ρ , ou seja $\rho(0) = p_0$ e $r > 0$ seja o raio do cilindro \mathcal{C} usado na construção de D .

Seja $D(k) = \{(x, y) \in D; x^2 + y^2 \geq r^2/2^k\}$ um conjunto compacto para cada $k \in \mathbb{N}^*$. Além disso, vamos denotar a distância em $D(k)$ por $d_{D(k)}^*$ de tal forma que

$$d_{D(k)}^*(q, q') = \inf\{l^*(\gamma); \gamma \text{ é um arco diferenciável por partes ligando } q \text{ a } q' \text{ em } D(k)\}.$$

Como $C(k) = \{(x, y) \in D; x^2 + y^2 = r^2/2^k\}$ é compacto para cada $k \in \mathbb{N}^*$, então podemos garantir a existência de $p_k \in C(k)$ tal que $d_{D(k)}^*(p_0, p_k) = c_k$, com

c_k sendo o mínimo dessa distância. O arco $\gamma : [0, l^*(\gamma)] \rightarrow D(k)$ será chamado de g^* -minimizante em $D(k)$ se γ for parametrizado pelo g^* -comprimento de arco e se $l(\gamma)$ é igual a distância $d_{D(k)}^*$ entre seus pontos finais.

Vamos construir para cada $k \in \mathbb{N}^*$ um arco g^* -minimizante em $D(k)$ de p_0 a p_k . Fixando k e olhando para a definição de $d_{D(k)}^*$ encontramos uma sequência de arcos

$$\beta_j : [0, l(\beta_j)] \rightarrow D(k)$$

de p_0 a p_k , tal que cada β_j seja parametrizado por g^* -comprimento de arco e que $\lim_{j \rightarrow \infty} l^*(\beta_j) = c_k$.

Como $D(k)$ é compacto podemos garantir a existência de uma subsequência de $\beta_j|_{[0, c_k]}$ que converge uniformemente para um arco $\gamma_k : [0, c_k] \rightarrow D(k)$ de p_0 a p_k . Como $\lim_{j \rightarrow \infty} l^*(\beta_j|_{[0, c_k]}) = c_k$ segue do lema (41)

$$l^*(\gamma_k) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} l^*(\beta_j|_{[0, c_k]}) = c_k \quad (2.4.2)$$

Ora, mas γ_k é um arco ligando p_0 a p_k e como c_k é mínimo temos que

$$l^*(\gamma_k) \geq c_k \quad (2.4.3)$$

Portanto, segue das equações (2.4.2), (2.4.3) que $l^*(\gamma_k) = c_k$. Para mostrar que γ_k é g^* -minimizante resta-nos mostrar que γ_k é parametrizado por g^* -comprimento de arco. Para isso, considere $s \in [0, c_k]$ e aplique novamente o lema (41) em $\gamma|_{[0, s]}$ e em $\beta_j|_{[s, c_k]}$, então segue que

$$l^*(\gamma|_{[0, s]}) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} l^*(\beta_j|_{[0, s]}) = s \quad (2.4.4)$$

$$l^*(\gamma|_{[s, c_k]}) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} l^*(\beta_j|_{[s, c_k]}) = c_k - s \quad (2.4.5)$$

Mas vimos acima que $l^*(\gamma_k) = c_k$, e portanto $l^*(\gamma|_{[0, s]}) + l^*(\gamma|_{[s, c_k]}) = c_k$ e isso juntamente com (2.4.5) implica em

$$\begin{aligned} l^*(\gamma|_{[0, s]}) &= l^*(\gamma|_{[0, s]}) + l^*(\gamma|_{[s, c_k]}) - l^*(\gamma|_{[s, c_k]}) \\ &= c_k - l^*(\gamma|_{[s, c_k]}) \geq c_k - c_k + s \\ &= s \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Agora veja que, das equações (2.4.4) e (2.4.6) segue que $l^*(\gamma|_{[0, s]}) = s$. Portanto γ_k é um arco g^* -minimizante em D ligando p_0 a p_k , como queríamos.

Definimos $\gamma_k^m := \gamma_k|_{[0, c_m]}$, para cada $m = 1, 2, 3, \dots, k$. Pela definição de γ_k^m vemos que $\gamma_k^m \subset D(m)$.

Sabemos que $D(1)$ é compacto, então podemos garantir a existência de uma subsequência $n_1 \subset \mathbb{N}$, tal que o arco $\gamma_k^1 : [0, c_1] \rightarrow D(1)$, $k \in n_1$, converge uniformemente para o arco $\rho_1 : [0, c_1] \rightarrow D(1)$, quando $k \rightarrow \infty$. Ora, mas aplicando o corolário (43), segue que ρ_1 é um arco g^* -minimizante em D . De forma análoga, como $D(2)$ é compacto, existe uma subsequência $n_2 \subset n_1$, tal que o arco $\gamma_k^2 : [0, c_2] \rightarrow D(2)$, $k \in n_2$, converge uniformemente para o arco $\rho_2 : [0, c_2] \rightarrow D(2)$, quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, ρ_2 é uma extensão de ρ_1 e assim segue que ρ_2 é também um arco g^* -minimizante em D .

Por indução, podemos afirmar que a extensão $\rho_m : [0, c_m] \rightarrow D(m)$ de ρ_1 , para cada $m = 3, 4, \dots, k$, também é um arco g^* -minimizante em D .

Veja que $0 < c_1 < c_2 < \dots$. Seja $c_\infty < \infty$ o limite da sequência $\{c_m\}$ quando $m \rightarrow \infty$. Defina $\rho : [0, c_\infty)$ dada por $\rho(s) = \rho_m(s)$, com m suficientemente grande para que $c_m \geq s$. Dessa forma, segue que ρ é um arco g^* -minimizante entre quaisquer dois pontos.

Devemos lembrar que o objetivo da demonstração é mostrar que ρ é um raio distinguido e para isso, resta-nos mostrar que $c_\infty = \infty$. Suponha por absurdo que $c_\infty = l^*(\rho) < \infty$. Note ainda que

$$d_D^*(p_0, p_1) < d_D^*(p_0, p_2) < \dots < d_D^*(p_0, p_m) < \dots < c_\infty.$$

Dessa forma, os pontos $\rho(c_m) = \rho_m(c_m) = p_m$ formariam uma sequência de Cauchy na métrica d_D^* , isso ocorre pois $d_D^*(p_r, p_t) = d_D^*(\rho(c_r), \rho(c_t)) = |c_r - c_t|$. Como D é completo então a sequência $\rho(c_m)$ deve convergir para um ponto de D . Todavia, por construção, os pontos $\rho(c_m)$ convergem para a origem de \mathbb{R}^2 , mas isso é um absurdo, visto que D é côncavo na origem. Portanto concluímos que $c_\infty = \infty$. e consequentemente que ρ é um raio distinguido. \square

Lema 45 (Lema da Comparação). *Seja γ um arco ligando p e q , g^* -minimizante em D . Além disso, considere ψ um arco simples (que não possui autointerseções), diferenciável e por partes, ligando p e q . Então*

$$l_\xi^*(\gamma) \leq l_\xi^*(\psi),$$

com $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ fixo.

Lembre-se que nos resultados abaixo estamos nos referindo a $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$.

Definição 46. *Se γ é uma arco diferenciável em \mathcal{D} e é tangente, em cada ponto, a alguma direção principal, então γ é chamado de arco próprio. Além disso, se C é um arco diferenciável formado por uma quantidade finita de arcos próprios e $\xi|_C$ é crescente, então C é chamado de ξ -cadeia.*

Proposição 47. *Seja $p \in D$ tal que $\xi(p) \geq 0$, então existe uma ξ -cadeia que tem início em p e termina num ponto da ∂D .*

Lema 48. *Para qualquer ξ -cadeia C , temos*

$$l_\xi^*(C) \leq \alpha l_\xi(C),$$

com α sendo a constante da desigualdade (2.4.1).

Lema 49. *Se ρ é um raio distinguido, então $l_x^*(\rho)$ é finito e conseqüentemente $l_y^*(\rho)$ é infinito.*

Definição 50. *Considere γ um arco parametrizado em \mathcal{D} . γ é dito pré-horizontal se $F \circ \gamma$ produzir um segmento de reta em \mathbb{R}^2 que seja paralelo ao eixo x e além disso que γ seja parametrizado por comprimento de arco.*

Veja que se fixarmos um raio distinguido $\rho \in D$ e denotarmos $u = t(s)$ pela variação total de y sobre $F \circ \gamma|_{[0,s]}$ (isso vale pois $u = t(s) = l_y(F \circ \rho|_{[0,s]}) = l_y^*(\rho|_{[0,s]})$), garantimos a existência de uma função $t : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que é diferenciável. Em particular, segue do lema (49) que, $t(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$.

Denote por P_0 a porção da parábola P no interior de D , mas disjunta do círculo C . Seja P_0^+ e P_0^- as componentes de P_0 sobre e sob o eixo x , respectivamente.

Lema 51. *Suponha que D é completo na distância d_D^* e seja ρ um raio distinguido fixado. Considere Ω como sendo o subconjunto de \mathbb{R}^+ , formado por todos os valores de u tais que a seção pré-horizontal h_u satisfaça as seguintes condições:*

- a) *intersecta ρ transversalmente e,*
- b) *intersecta ∂D transversalmente em um ponto $b^+(u)$ sobre P_0^+ e outro $b^-(u)$ sobre P_0^- .*

Então Ω é aberto e $(\mathbb{R}^+)^* - \Omega$ tem medida finita.

Definição 52. *Definimos h_u como sendo o arco pré-horizontal máximo em D contendo $\rho(s)$. Além disso, dado $u \in \Omega$ defina*

$$H(u) = \bigcup_{u' \in \Omega, u' > u} h_{u'},$$

ou seja, $H(u)$ é a união de todos os arcos pré-horizontais $h_{u'}$, quando $u' > u \in \Omega$. E dado um intervalo $I \subset (\Omega \cap (u, \infty))$, H_I será a união de todos os arcos pré-horizontais $h_{u'}$, para os valores de $u' \in I$, ou seja

$$H_I = \bigcup_{u' \in I} h_{u'}.$$

Denotaremos a g^* -área de H_I por

$$\text{area}^*(H_I) = \int_I z(u)du,$$

onde z é uma função que associa cada $u \in \Omega$ a $l^*(h_u)$. Assim, temos que a g^* -área de $H(u)$ é

$$\sigma^*(u) := \text{area}^*(H(u)) = \sum \left(\int_I z(u)du \right). \quad (2.4.7)$$

E a área Euclidiana de $H(u)$ será denotada por $\sigma(u)$.

Definição 53. Cada ponto p no eixo das abcissas determina duas retas L^+ e L^- que são tangentes a parábola P , ver figura (2.8). Para cada p denote por G a região finita, fechada e limitada por L^+ , P e L^- .

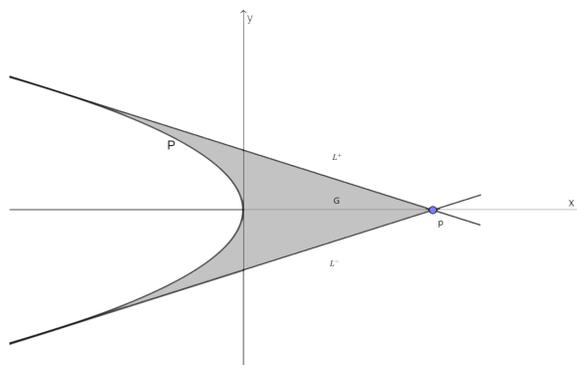
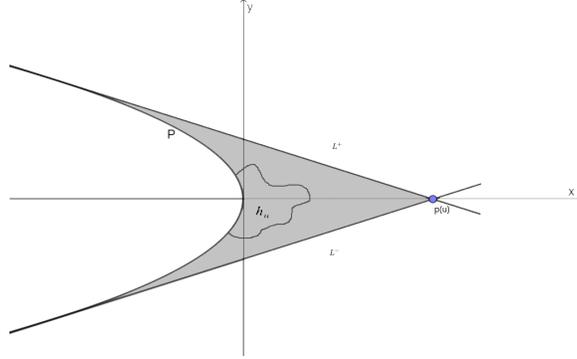


Figura 2.8: Conjunto G

Definição 54. Para cada $u \in \Omega$, considere $p = p(u)$, o ponto mais próximo da origem de \mathbb{R}^2 , tal que a região $G = G(u)$ contenha h_u . Denotaremos por $A(u)$ a área Euclidiana da região $G(u)$, ver figura (2.9).

Figura 2.9: Conjunto $G(u)$

Lema 55. A função $\sigma^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $\sigma^*(u) = \text{area}(H(u))$ é estritamente decrescente e além disso

$$\frac{d\sigma^*(u)}{du} = -z(u).$$

Proposição 56. Suponha que $W \subset \mathbb{R}^+$ é um conjunto aberto e que $\mathbb{R}^+ - W$ tem medida finita. Então não existe uma função $f : W \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$u_1 - u \leq t \frac{f(u)^2}{f(u_1)},$$

com $u, u_1 \in W$ e $t > 0$ uma constante.

Pode-se agora provar o seguinte Lema, que é o resultado principal da seção.:

Lema 57 (Lema Principal). *Sejam $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma imersão e λ_1, λ_2 os autovalores de dF . Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e satisfazem*

$$-\alpha \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \alpha$$

para alguma constante α . Então D com a distância d_D^* não é um espaço métrico completo.

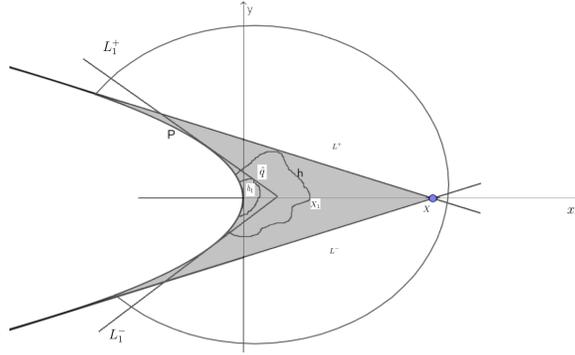
Demonstração. Usando todas as definições anteriores de D, \mathcal{D} e $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nessa seção, suponhamos por absurdo que D com a distância d_D^* seja um espaço métrico completo. Então pelo lema (44) sabemos que existe um raio distinguido $\rho \in D$, fixemos esse raio ρ .

Seja Ω , definido no lema (51). Como $|\det(dF)| \leq \alpha^2$ em cada ponto de \mathcal{D} e lembrando que $H(u) \subset G(u), \forall u \in \Omega$, temos que

$$\sigma^*(u) \leq \alpha^2 \leq \alpha^2 A(u), \quad (2.4.8)$$

onde $\sigma^*(u)$, $\sigma(u)$ e $A(u)$ estão definidas em (52).

Agora seja $X = X(u)$ a função estritamente decrescente em Ω que associa a coordenada x a cada $p = p(u)$, então existe X_0 que é limite superior de $X(u)$. Usaremos as seguintes notações: $A = A(u)$, $A_1 = A(u_1)$, $\sigma = \sigma(u)$, $\sigma_1 = \sigma(u_1)$, $\sigma^* = \sigma^*(u)$, $\sigma_1^* = \sigma^*(u_1)$, $z = z(u)$, $z_1 = z(u_1)$, $h = h_u$, $h_1 = h_{u_1}$, $G = G(u)$, $G_1 = G(u_1)$, $X = X(u)$, $X_1 = X(u_1)$, com $u_1, u \in \Omega$ e $u_1 > u$. Seja γ o arco de ρ ligando $\rho(t^{-1}(u_1))$ entre $\rho(t^{-1}(u))$, então segue de fato que $u_1 - u = l^*(\gamma)$. Mas se $u_1 > u$ e $G_1 \subset G$ e $X_1 < X$. Pela definição de G_1 segue o arco pré-horizontal h_1 deve ser tangente a uma das retas L_1^+ ou L_1^- , considere \hat{q} esse ponto de tangência. Sem perda de generalidade, suponhamos que \hat{q} esteja na reta L_1^+ .



Como $u_1 \in \Omega$, temos pelo lema (51), h_1 deve cruzar o eixo x . Considere q como sendo o ponto de h_1 cuja coordenada x seja a maior possível. Como a coordenada x em q é positiva, segue pela proposição (47), que existe uma x -cadeia C que começa em q e termina num ponto da fronteira de D . Daí, C deve cruzar o arco pré-horizontal h . O primeiro ponto dessa interseção será chamado de q' e o arco dessa x -cadeia ligando q e q' será denotado por C' . Pelo lema (48), temos $l_x^*(C') \leq \alpha l_x(C')$. Além disso, pela definição (46) temos $l_x(C') \leq X$. Ora, mas dessas informações concluímos que

$$l_x^*(C') \leq \alpha l_x(C') \leq \alpha X \quad (2.4.9)$$

Agora queremos aplicar o Lema da Comparação (45). Para isso considere o arco γ g^* -minimizante como sendo $\gamma = \rho|_{[s, s_1]}$ e ψ como sendo o arco diferenciável por partes ligando também $\rho(s)$ e $\rho(s_1)$, de tal forma que ψ seja formado por C' , h e h_1 . Assim temos

$$l_x^*(\gamma) \leq l_x^*(C') + l_x^*(h) + l_x^*(h_1).$$

Logo, da equação (2.4.9) e das definições (39) e (52) temos

$$l_x^*(\gamma) \leq \alpha X + z + z_1. \quad (2.4.10)$$

Através de um cálculo elementar chegamos a

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{3}{2}\sqrt{c}A\right)^{\frac{2}{3}} \\ X_1 &= \left(\frac{3}{2}\sqrt{c}A_1\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Reescrevendo (2.4.10) temos

$$l_x^*(\gamma) \leq \alpha_0(A)^{\frac{2}{3}} + z + z_1, \quad (2.4.12)$$

onde $\alpha_0 = \alpha \left(\frac{3}{2}\sqrt{c}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Agora veja que

$$l_y^*(\gamma) \sin \theta_1 - l_x^*(\gamma) \cos \theta_1 \leq l_{\xi_1}^*(\gamma).$$

De fato, façamos $(F \circ \gamma)(t) = (x(t), y(t))$. Então

$$|\xi_1((F \circ \gamma)(t)) - \xi_1((F \circ \gamma)(t_0))| = |(x(t) - x(t_0)) \cos \theta_1 + (y(t) - y(t_0)) \sin \theta_1|$$

E isso implica que

$$\begin{aligned} |(y(t) - y(t_0)) \sin \theta_1 - (x(t) - x(t_0)) \cos \theta_1| &\leq |\xi_1((F \circ \gamma)(t)) - \xi_1((F \circ \gamma)(t_0))| \\ \Rightarrow l_y^*(\gamma) \sin \theta_1 - l_x^*(\gamma) \cos \theta_1 &\leq l_{\xi_1}^*(\gamma). \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Mas observe que θ_1 é tomado positivo, então

$$l_{\xi_1}^*(\gamma) \geq l_y^*(\gamma) |\sin \theta_1| - l_x^*(\gamma) |\cos \theta_1| \Rightarrow l_{\xi_1}^*(\gamma) \geq l_y^*(\gamma) |\sin \theta_1| - l_x^*(\gamma) \quad (2.4.14)$$

Fazendo um cálculo elementar chegamos que

$$\sin \theta_1 = 2 \left(\frac{cX_1}{4cX_1 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $X_0 > X > X_1$ temos

$$\sin \theta_1 > \alpha_1 A_1^{\frac{1}{3}}, \quad (2.4.15)$$

com $\alpha_1 = (12c^2)^{\frac{1}{3}} / \sqrt{4cX_0 + 1} > 0$.

Das equações (2.4.12), (2.4.14) e (2.4.15) segue que

$$l_{\xi_1}^* \geq \alpha_1 l_y^*(\gamma) A_1^{\frac{1}{3}} - (z + z_1 + \alpha_0 A^{\frac{2}{3}}) \quad (2.4.16)$$

Definimos ξ em (39), além dessa coordenada retangular agora vamos precisar de mais uma que chamaremos de η de modo que $\eta = -x \cos \theta + y \cos \theta$. Observe que essas coordenadas ξ, η foram obtidas após uma rotação por um ângulo θ dos eixos coordenados x, y em \mathbb{R}^2 .

Note ainda que nas coordenadas ξ e η , a reta L_1^+ tem a equação $\xi = \xi_1$ e isso faz com que a coordenada ξ do ponto \hat{q} seja $\xi = \xi_1 > 0$. Ora, mas então segue da proposição (47) que existe uma ξ -cadeia a qual começa em \hat{q} e termina num ponto na fronteira de D . Analogamente ao argumento anterior, chegamos ao fato de que

$$l_{\xi_1}^*(\gamma) \leq \alpha_0(A)^{\frac{2}{3}} + z + z_1, \quad (2.4.17)$$

Das equações (2.4.16) e (2.4.17) temos

$$\alpha_1 l_y^*(\gamma) A_1^{\frac{1}{3}} \leq 2(z + z_1 + \alpha_0 A^{\frac{2}{3}}). \quad (2.4.18)$$

Pelo lema (55) temos que $\sigma^*(u_1) \leq \sigma^*(u)$ e fazendo $l_y^*(\gamma)u_1 - u$, podemos reescrever (2.4.18) como

$$(u_1 - u)\alpha_1 A_1^{\frac{1}{3}} \leq 2 \left(\left| \frac{d\sigma^*}{du}(u) \right| + \left| \frac{d\sigma^*}{du}(u_1) \right| \right) + 2\alpha_0 A^{\frac{2}{3}} \quad (2.4.19)$$

Observe que de (2.4.8) temos que

$$g(u_1) \leq g(u) \leq (\alpha)^{\frac{1}{3}} f(u),$$

onde f e g são funções definidas em Ω dadas por $f(u) = A^{\frac{1}{3}}(u)$ e $g(u) = \sigma^{*\frac{1}{3}}(u)$. Como

$$\frac{d\sigma^*}{du} = 3g^2 \frac{dg}{du}$$

podemos reescrever (2.4.19) em termos de f e g ,

$$(u_1 - u)f(u_1) \leq f^2 \left(3\alpha_2 \alpha^{\frac{4}{3}} \left(\left| \frac{dg}{du}(u) \right| + \left| \frac{dg}{du}(u_1) \right| \right) + \alpha_3 \right), \quad (2.4.20)$$

onde α_2 e α_3 foram constantes positivas escolhidas de forma apropriada.

Usando o lema (55) e a definição (52) e dado que $g(u) = \sigma^{*\frac{1}{3}}(u)$ vemos que dg/du é contínua em Ω , onde g é uma função estritamente decrescente e positiva. Dessa forma, definindo $\Omega' \subset \Omega$ por

$$\Omega' = \{u \in \Omega; \left| \frac{dg}{du}(u) \right| \geq 1\}$$

temos que Ω' é fechado em Ω e tem medida finita.

Definindo $W = \Omega - \Omega'$ temos que W é aberto em Ω . Seja $u, u_1 \in W$ então segue da desigualdade (2.4.20) que

$$(u_1 - u)f(u_1) \leq tf^2(u),$$

onde $t = 6\alpha_2\alpha^{\frac{4}{3}}$. Portanto, temos uma função f definida no aberto $W \subset \mathbb{R}^+$, com seu respectivo complemento tendo medida finita. Além disso, f é positiva e estritamente decrescente tal que

$$u_1 - u \leq t \frac{f(u)^2}{f(u_1)},$$

com $u, u_1 \in W$ e $t > 0$ uma constante. Ora, mas isso contradiz a proposição (56). Portanto, fica demonstrado o Lema Principal do Teorema de Efimov.

□

Capítulo 3

Problemas relacionados ao Teorema de Efimov

3.1 Introdução

O presente trabalho se refere fundamentalmente ao Problema de Hilbert & Cohn-Vossen nos espaços tridimensionais. O Teorema de Efimov é de fato uma solução desse problema para o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Contudo é plausível a pergunta do que aconteceria com a validade do Teorema de Efimov se houvessem mudanças nas suas hipóteses, como por exemplo na curvatura, no espaço ambiente ou na superfície.

Nos anos posteriores apareceram problemas relacionados com o Teorema de Efimov que podem ser divididos fundamentalmente em duas linhas de trabalho. A primeira delas trata de encontrar uma extensão desse teorema para superfícies completas em \mathbb{R}^3 . E a segunda procura um resultado equivalente ao teorema de Efimov para superfícies completas imersas em espaços tridimensionais não Euclidianos.

3.2 Primeira linha de Trabalho

Depois de alguns anos, o próprio Efimov estendeu o resultado de 1964 de duas maneiras diferentes. Uma delas é o seguinte Teorema [ver [3]]:

TEOREMA I (EFIMOV,68): Suponha que ds^2 é completa em uma superfície de curvatura negativa. Se o valor recíproco da curvatura da métrica ds^2 tiver variação com uma estimativa linear, então a métrica ds^2 não admite uma imersão C^2 -regular em \mathbb{R}^3 .

A nova hipótese sobre a curvatura pode-se escrever da seguinte forma

$$\left| \frac{1}{\sqrt{-K(p)}} - \frac{1}{\sqrt{-K(q)}} \right| \leq \epsilon_1 d(p, q) + \epsilon_2,$$

onde p, q são pontos arbitrários da superfície e ϵ_i são constantes positivas para $i = 1, 2$. Observe que a família de superfícies imersas que satisfazem a desigualdade anterior contém as famílias de superfícies com $K \leq -\epsilon < 0$. Basta tomar $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}$. Por conta disso, vamos chamar as **hipóteses fortes** de Efimov, as hipóteses sobre a curvatura do teorema (33). Já as **hipóteses fracas** de Efimov serão as hipóteses sobre a curvatura do Teorema I.

Note que o que Efimov fez foi enfraquecer a condição sobre a curvatura do teorema (33). E o Teorema I (Efimov,68) implicou nos seguintes resultados:

Proposição 58. *Em \mathbb{R}^3 , para cada superfície Ω , completa C^2 -regular e com curvatura Gaussiana negativa tem-se $\inf k = 0$.*

Proposição 59. *Se a curvatura Gaussiana da superfície Ω tem um gradiente então $\sup |\nabla \frac{1}{k}| = +\infty$.*

Posteriormente, em 1975, Efimov provou o seguinte resultado [5]:

TEOREMA II (EFIMOV,75): *O semiplano de Lobachevski não admite uma C^4 -imersão isométrica dentro do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 .*

Observe que esse resultado valida o Teorema de Efimov, quando é permitida uma borda na superfície. No mesmo ano, Vorobéva([17]) relaxou a hipótese de C^4 -diferenciável do Teorema II para C^2 -diferenciável.

Na linha dos Teoremas I, II, no ano de 2015, Galvez, Martinez e Teruel, [7], mostraram que:

- i) impondo as hipóteses fracas de Efimov em uma superfície fora de um subconjunto compacto da mesma, então a imersão tem curvatura total finita, a superfície é parabólica (as únicas funções sub-harmônicas negativas sobre Ω são constantes) e tem topologia finita, ou seja é homeomorfa a uma superfície compacta menos uma quantidade finita de pontos que são chamados de finais.
- ii) impondo as hipóteses fortes de Efimov em uma superfície fora de um subconjunto compacto da mesma, então a imersão tem topologia finita, é propriamente imersa e tem área finita. Além disso, cada final da imersão é assintótico a uma semirreta do \mathbb{R}^3 , ver figura (3.1)

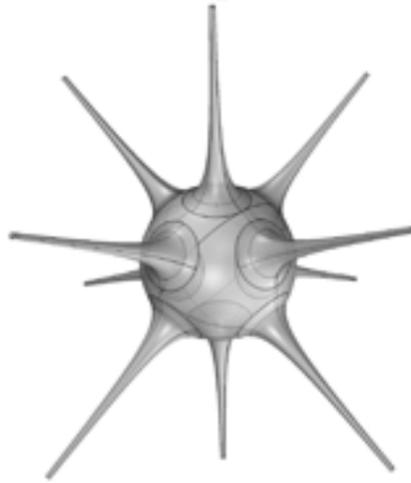


Figura 3.1: Superfície completa com finais de curvatura negativa

Mesmo com o surgimento de resultados importantes nessa área, de como se comportam superfícies de curvatura negativa, há problemas abertos em relação ao Teorema de Hilbert (12). Por exemplo, a conjectura apresentada por John Milnor [12] em 1966:

Seja Ω uma superfície completa, sem pontos umbílicos, C^2 -imersa em \mathbb{R}^3 tal que

$$k_1^2 + k_2^2 \geq b > 0,$$

onde b é uma constante e k_1, k_2 são as curvaturas principais da imersão. Então a curvatura Gaussiana K muda de sinal ou S é um cilindro generalizado ($K = 0$).

Se este resultado fosse verdadeiro, as superfícies imersas completas, com curvatura não positiva em \mathbb{R}^3 , seriam cilindros generalizados ou as curvaturas principais tenderiam simultaneamente para zero. Ou seja, se fosse verdadeiro, estenderia o Teorema de Efimov, pois o fato das duas curvaturas principais tenderem simultaneamente a zero implicaria que o produto das mesmas tenderiam a zero, como afirma Efimov.

Em 1987, Smyth e Xavier [15] obtiveram o seguinte resultado:

TEOREMA DE SMYTH-XAVIER: *Seja Ω uma superfície de curvatura não positiva imersa isometricamente em \mathbb{R}^3 . Se $k_i^2 \geq b > 0$ para uma das curvaturas principais, $i = 1, 2$, e b uma constante. Então a superfície é um cilindro generalizado.*

Observe que esse teorema acima dá uma solução parcial para Conjectura de John Milnor quando $K \leq 0$. Pois, se o quadrado de uma das curvaturas principais fica uniformemente afastada de zero, conseqüentemente a soma dos quadrados das duas curvaturas principais também ficam uniformemente afastadas de zero.

3.3 Segunda linha de trabalho

Como foi dito na introdução, um problema associado ao Teorema de Efimov consiste na procura de um teorema equivalente para superfícies completas em espaços tridimensionais não Euclidianos. Apesar das diferentes contribuições até o momento, o problema ainda permanece em aberto.

Em 2001, Schlenker [13] demonstrou o seguinte teorema:

Seja (Σ, σ) uma superfície Riemanniana completa tal que $\|\nabla K\|/|K|^{\frac{3}{2}}$ esteja limitada.

- a) *Se $K \leq -1 - \epsilon$. Então (Σ, σ) não admite C^3 -imersão isométrica em \mathbb{H}^3 .*
- b) *Se $K \leq -\epsilon < 0$. Então (Σ, σ) não admite C^3 -imersão isométrica em \mathbb{S}^3 .*

Pelo fato de ter hipóteses adicionais sobre o módulo do gradiente da curvatura, o Teorema de Schlenker seria um bom teorema tipo Efimov mas não equivalente a ele.

Muitos resultados clássicos da teoria de superfícies em \mathbb{R}^3 são uma consequência da equação de Codazzi, que ainda é válida em outras formas espaciais. Conseqüentemente, não é surpreendente que diferentes resultados das superfícies imersas em \mathbb{R}^3 podem ser provados no contexto abstrato dos pares de Codazzi. Por esse fato os pares de Codazzi aparecem de maneira natural, na teoria de subvariedades.

Um par de Codazzi é um par (I, II) de formas quadráticas sobre a superfície Ω tal que I é métrica Riemanniana e o par (I, II) satisfaz a equação de Codazzi como na teoria de superfícies, isto é, que satisfaz a seguinte equação:

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = 0,$$

onde A é o único endomorfismo auto-adjunto tal que $II(X, Y) = I(AX, Y)$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$, com ∇ sendo a conexão de Levi-Civita. Além disso, A é dita operador de forma ou endomorfismo de Weingarten.

Os conceitos de curvaturas principais, curvatura Gaussiana, curvatura média, em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 , podem ser definidos de maneira habitual no contexto abstrato de pares de Codazzi.

Nesse aspecto, no ano de 2015, Gálvez, Martínez e Teruel, ver [8], demonstraram o seguinte resultado:

Seja (I, II) um par de Codazzi em Ω com curvaturas principais estritamente separadas. Se (Ω, I) é uma superfície completa com curvatura Gaussiana $K(I) \leq 0$, então somente um dos itens abaixo é válido:

- a) *I é uma métrica plana e Ω é homeomorfa a um plano, a um cilindro ou a um toro plano.*
- b) *I não é plana, Ω é homeomorfa ao plano e $\int_{\Omega} |K(I)| d_{A_I} \leq 2\pi$.*

A partir desse teorema abstrato para superfícies, pode-se obter resultados tipo Efimov para superfícies imersas em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 .

Corolário 60 (Gálvez-Martínez-Teruel, 2015). *Seja $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^3$ (resp. $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$) uma imersão com curvatura Gaussiana $K \leq -1$ (resp. $K \leq -\alpha < 0$, α constante) com uma das curvaturas principais k_i satisfazendo $k_i^2 \geq \epsilon^2 > 0$, para ϵ uma constante positiva. Então ψ não é uma imersão completa.*

Com esse corolário concluímos então que não existem imersões em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 com $K \leq -1$ e $K \leq -\alpha < 0$, respectivamente, quando uma de suas curvaturas principais é uniformemente separada de zero. E assim encontramos resultados tipo Efimov para \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 . Observe que, por causa da hipótese da curvatura principal, esses resultados também podem ser ditos tipo Milnor.

A prova do resultado anterior pode ser adaptada admitindo a hipótese fora de um subconjunto compacto C da superfície, então $(\Omega \setminus C, I)$ tem curvatura total finita. Em particular, Ω é do tipo parabólico e tem topologia finita. Consequentemente, os seguintes resultados são válidos:

Corolário 61 (Gálvez-Martínez-Teruel, 2015). *Seja $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^3$ (resp. $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^3$) uma imersão completa e $C \subset \Omega$ um subconjunto compacto. Suponha que em $\Omega \setminus C$ a curvatura Gaussiana de ψ verifica $K \leq -1$ (resp. $K \leq -\alpha < 0$) e uma das curvaturas principais k_i satisfaça $k_i^2 \geq \epsilon^2 > 0$, para ϵ uma constante positiva. Então ψ tem área finita, Ω é parabólico e tem topologia finita.*

Para terminar, vale ressaltar um resultado ligado às ideias de Heinz [10], que é abordado em 2015 por Galvez e Teruel, [9], relativamente à validade do Teorema de Efimov para gráficos em espaços produto tridimensionais do tipo $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$:

Seja \mathbb{M}^2 uma superfície Riemanniana com um pólo. Se a curvatura Gaussiana de \mathbb{M}^2 é não negativa, então não existe gráfico inteiro Σ em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura extrínseca limitada superiormente por uma constante negativa.

Então nos espaços produto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ temos as duas condições:

1. Se $K_{\mathbb{M}^2} \geq 0$ e \mathbb{M}^2 tem um pólo então o Teorema de Efimov vale para gráficos verticais inteiros imersos em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.
2. Se $K_{\mathbb{M}^2} < 0$ então é possível construir exemplos de superfícies de rotação completas e imersas em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ de curvatura limitada superiormente por uma constante negativa. Tendo como consequência que o teorema de Efimov não é válido nesse caso.

Referências Bibliográficas

- [1] DO CARMO, M.P, Geometria diferencial de curvas e superficies, *SBM, Rio de Janeiro* (2012).
- [2] DO CARMO, M.P., Geometria Riemanniana, *IMPA*(2015).
- [3] EFIMOV, N.V., Differential Criteria for Homeomorphism of Certain Mappings with Applications to the Theory of Surfaces, *Mat. Sbornik*, Tom.76 (118), No.4 (1968), 475-488.
- [4] EFIMOV, N.V., Generation of Singularities of Surfaces on Negative Curvature (Russian), *Mat. Sbornik*, 64 (1964), 286-320.
- [5] EFIMOV, N.V., Nonimmersibility of the Lobachevskii half-plane *Moscow Univ. Math. Bull.*, 30 (1975) 139-142.
- [6] GALVÉZ, J.A., Surfaces of constant curvature in 3-dimensional space forms, *Matemática Contemporânea, SBM*, (2009), vol 37, 01-42.
- [7] GALVEZ, J.A.; MARTÍNEZ, A.; TERUEL, J.L., Complete surfaces with ends of non positive curvature, *Advances in Mathematics*, 281, (2015), 1202-1215.
- [8] GALVEZ, J.A.; MARTINEZ, A.; TERUEL, J.L., Complete surfaces with non-positive extrinsic curvature in \mathbb{H}^3 and \mathbb{S}^3 , *J. Math. Anal. Appl.*, 430, (2015), 1058-1064.
- [9] GALVEZ, J.A.; TERUEL, J.L., Complete surfaces with negative extrinsic curvature in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, *J. Math. Anal. Appl.*, 423, (2015), 538-546.
- [10] HEINZ, E., Über Flächen mit eindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind, *Math. Ann.* **129** (1955) 451-454
- [11] KLOTZ, T., Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature, *Advances in Math.*, 8 (1972), 474-543.

- [12] KLOTZ, T.; OSSERMAN, R., Complete surfaces in E^3 with constant mean curvature, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 41 (1966-67), 313-318.
- [13] SCHLENKER, J.M., Surfaces à courbure extrinsèque négative dans l'espace hyperbolique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **34** (2001) 79-130
- [14] S.E. COHN-VOSSEN, Bending of surfaces in the large, *Uspekhi Mth. Nauk*, (1936), 33-76.
- [15] SMYTH, B.; XAVIER, F., Efimov's theorem in dimension greater than two, *Invent. Math.*, 90 (1987), no. 3, 443-450.
- [16] SPIVAK, M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, *Publish or Perish*, Texas, 3rd Edition, 1995.
- [17] VOROBÉVA, L.I., Estimate of the upper bound on the Gaussian curvature of certain surfaces with boundary, *Math. Notes*, 20 (1976) 621-624.