



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática  
Programa de Mestrado Profissional  
em Matemática em Rede Nacional



# Alguns círculos congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes

Michell Ferreira Marques

Brasília

2019

Michell Ferreira Marques

# Alguns círculos congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB  
Departamento de Matemática - MAT  
PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. Rogério César dos Santos

Brasília  
2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M357a Marques, Michell Ferreira  
Alguns círculos congruentes aos círculos gêmeos de  
Arquimedes / Michell Ferreira Marques; orientador Rogério  
César dos Santos. -- Brasília, 2019.  
42 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em  
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Arbelos. 2. Círculos gêmeos de Arquimedes. 3. Círculos  
Arquimedianos. I. Santos, Rogério César dos, orient. II.  
Título.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Alguns círculos congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes.

Por

**MICHELL FERREIRA MARQUES**

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 26 de julho de 2019.

Comissão Examinadora:



---

Prof. Rogério César dos Santos (Orientador)



---

Prof. Vinícius de Carvalho Rispoli – MAT/UnB



---

Prof. Mônica Menezes de Souza - SEEDF

# Agradecimentos

O empenho e dedicação de muitas pessoas contribuíram para a conclusão desse trabalho.

Aos professores do PROFMAT/UnB, em especial ao meu professor orientador, Rogério César dos Santos, por ter aceitado esse desafio.

Aos colegas de turma. Em especial ao Rubens, que se tornou um grande amigo e incentivador. Obrigado por todo o esforço. E ao Yuri, que não me deixou desanimar, agradeço imensamente.

Aos meus pais, que sempre incentivaram os estudos.

E por último, mas mais importante, à minha namorada e futura esposa. Sem o seu apoio, carinho, compreensão e algumas broncas, nada disso seria possível. Agradeço por você fazer parte da minha vida.

*“Aquele que tentou e não conseguiu é superior àquele que nada tentou. ”*  
*Arquimedes de Siracusa*

# Resumo

Um arbelos é uma região delimitada por três semicírculos que se tangenciam ao longo de uma reta, sendo dois deles internos ao terceiro. Ao estudar essa estrutura, Arquimedes observou que ela delimita dois círculos com mesmo raio, os chamados círculos gêmeos de Arquimedes. Ao longo dos anos, outros círculos congruentes a esses foram surgindo, tendo como base essa mesma estrutura. Neste trabalho, mostramos seis círculos congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes, apresentados por An e García (2019). Para mostrarmos que os raios dos círculos que serão construídos são iguais aos raios dos círculos gêmeos de Arquimedes, usamos semelhança de triângulos e, dentre outros, o teorema de Stewart e as propriedades do quadrilátero pipa.

**Palavras-chaves:** Arbelos. Círculos gêmeos de Arquimedes. Círculos Arquimedianos.

# Abstract

An arbelos is a region bounded for three semicircles that tangential a long a straight line, two internal to the third. In the studied of this structure, Archimedes noted that this bounded two circles with the same radius, called Archimedes' twins. All over the years others circles congruent to those were arising, having the same structure. In this dissertation thesis, we show six Archimedean circles, presented by the article of An e García (2019). To show that the circles have the same radius that Archimedes' twins we use similar triangles and, among others, the Stewart theorem and the properties of the kite quadrilateral.

**Key-words:** Arbelos. Archimedean circles. Archimedes' twins.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Ângulos central e inscrito . . . . .	13
Figura 2 – O ângulo inscrito é metade do ângulo central . . . . .	14
Figura 3 – Triângulo inscrito com um dos lados sendo diâmetro . . . . .	14
Figura 4 – Teorema de Stewart . . . . .	15
Figura 5 – Pipa ou deltóide . . . . .	16
Figura 6 – Arbelos . . . . .	17
Figura 7 – Reta perpendicular a $\overline{AB}$ passando por $C$ . . . . .	17
Figura 8 – Raios dos semicírculos . . . . .	18
Figura 9 – Círculo com diâmetro $\overline{CD}$ . . . . .	18
Figura 10 – Triângulo $ADB$ é retângulo em $D$ . . . . .	19
Figura 11 – Círculos gêmeos de Arquimedes . . . . .	20
Figura 12 – Círculo Arquimediano 24, “ <i>The Power circles</i> ” . . . . .	20
Figura 13 – Círculo Arquimediano 51, “ <i>The insquare octet</i> ” . . . . .	21
Figura 14 – Círculos gêmeos de Arquimedes . . . . .	21
Figura 15 – Triângulo $O_1P'P$ . . . . .	22
Figura 16 – Triângulo $OP'P$ . . . . .	22
Figura 17 – Triângulo $OQ'Q$ . . . . .	23
Figura 18 – Triângulo $O_2Q'Q$ . . . . .	23
Figura 19 – Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes . . . . .	24
Figura 20 – Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes . . . . .	25
Figura 21 – Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes . . . . .	26
Figura 22 – Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes . . . . .	26
Figura 23 – Círculos com raios $\overline{HF}$ e $\overline{IG}$ são congruentes aos gêmeos de Arquimedes . . . . .	27
Figura 24 – Triângulo $O_1O_2F$ é retângulo em $F$ . . . . .	27
Figura 25 – Triângulo $O_1O_2F$ e triângulo $CO_1H$ . . . . .	28
Figura 26 – Círculos centrados em $S$ e $T$ são congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes. . . . .	29
Figura 27 – Pontos $M$ e $N$ . . . . .	29
Figura 28 – O quadrilátero $CO_1IH$ é uma pipa . . . . .	30
Figura 29 – Os segmentos $\overline{CM}$ e $\overline{O_2G}$ são paralelos . . . . .	30
Figura 30 – Semelhança dos triângulos $CO_1M$ e $O_2O_1G$ . . . . .	31
Figura 31 – Semelhança dos triângulos $CII'$ e $O_2O_1G$ . . . . .	31
Figura 32 – O quadrilátero $CO_2JH$ é uma pipa . . . . .	32
Figura 33 – Semelhança dos triângulos $CO_2N$ e $O_1O_2F$ . . . . .	32
Figura 34 – O círculo destacado é congruente aos círculos gêmeos de Arquimedes . . . . .	33

Figura 35 – Semelhança dos triângulos $CO_2N$ e $CJJ'$ . . . . .	33
Figura 36 – Triângulo $ASB$ . . . . .	34
Figura 37 – Círculos centrados em $R$ e $S$ são congruentes aos gêmeos de Arquimedes. . . . .	36
Figura 38 – Triângulos $AGC$ e $AFB$ são semelhantes . . . . .	36
Figura 39 – Triângulos $AG'G$ e $AGC$ são semelhantes . . . . .	37
Figura 40 – Triângulo $ARR'$ . . . . .	38
Figura 41 – Triângulo $ORR'$ . . . . .	38

# Lista de símbolos

$\perp$  Perpendicular a

$\parallel$  Paralelo a

$\equiv$  Congruente a

# Sumário

	Introdução . . . . .	12
1	ARBELOS E ALGUNS PRÉ-REQUISITOS . . . . .	13
1.1	Ângulos central e inscrito . . . . .	13
1.2	Teorema de Stewart . . . . .	14
1.3	Pipa ou deltóide . . . . .	15
1.4	Arbelos . . . . .	16
2	CÍRCULOS GÊMEOS DE ARQUIMEDES . . . . .	20
2.1	Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes . . . . .	24
3	CÍRCULOS ARQUIMEDIANOS . . . . .	27
4	SEQUÊNCIA DIDÁTICA . . . . .	40
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	41
	REFERÊNCIAS . . . . .	42

# Introdução

Arquimedes, em seu Livro dos Lemas, definiu um arbelos como sendo a figura formada por três semicírculos tangentes entre si, e também calculou a sua área em termos de seus raios (HEATH, 2002). Na citada obra, são construídos dois círculos de mesmo raio internos ao arbelos, chamados círculos gêmeos de Arquimedes. Ao longo dos anos novos círculos congruentes aos gêmeos de Arquimedes foram sendo encontrados e catalogados por Lamoen (2019). O presente trabalho pretende mostrar seis círculos congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes, que foram apresentados por An e García (2019).

No capítulo 1 apresentamos alguns pré-requisitos que serão usados ao longo da dissertação: ângulo central e inscrito (MORGADO; WAGNER; JORGE, 1990), teorema de Stewart (MORGADO; WAGNER; JORGE, 2002; NOS; SAITO; OLIVEIRA, 2014) e o quadrilátero chamado pipa (WEISSTEIN, 2019b). Definimos, ainda, um arbelos e mostramos algumas de suas propriedades (WEISSTEIN, 2019a).

No capítulo 2 definimos círculos gêmeos de Arquimedes e provamos que possuem o mesmo raio (DALCIN, 2019), e, ainda, fazemos sua construção por régua e compasso (SILVA, 2014).

No capítulo 3 enunciamos e provamos três teoremas que nos dão os seis círculos congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes.

No capítulo 4 sugerimos uma sequência didática que o professor pode seguir para apresentar os círculos gêmeos de Arquimedes aos alunos.

No capítulo 5 fazemos as considerações finais.

# 1 Arbelos e alguns pré-requisitos

Neste capítulo estudaremos o arbelos e algumas de suas propriedades, bem como alguns resultados importantes para o melhor entendimento deste trabalho. Começamos com alguns pré-requisitos, tais como: a relação entre ângulo inscrito e central, teorema de Stewart e pipa ou deltóide. Em seguida, definimos o arbelos e provamos algumas de suas propriedades.

## 1.1 Ângulos central e inscrito

**Ângulo central** é o ângulo cujo vértice é o centro do círculo. Sua medida é igual à medida do arco correspondente. **Ângulo inscrito** é o ângulo cujo vértice é um ponto do círculo e os lados são secantes ao círculo, como ilustra a Figura 1.

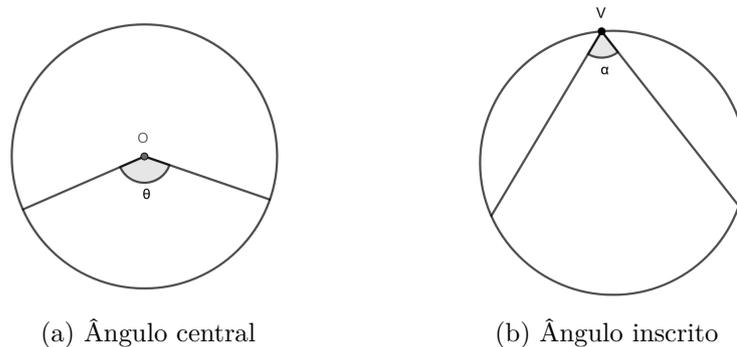


Figura 1 – Ângulos central e inscrito  
Fonte: o próprio autor.

**Proposição 1.1.** *A medida do ângulo inscrito,  $\alpha$ , é metade da medida do ângulo central,  $\theta$ , ou seja,  $\alpha = \frac{\theta}{2}$ .*

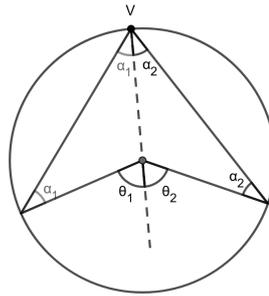


Figura 2 – O ângulo inscrito é metade do ângulo central

Fonte: o próprio autor.

*Demonstração.* Seja  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  e  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ . Pelo teorema do ângulo externo temos que

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha,$$

logo,  $\alpha = \frac{\theta}{2}$ . □

**Corolário 1.1.** *Qualquer triângulo inscrito em um círculo tendo um dos lados como diâmetro desse círculo é retângulo.*

*Demonstração.* Como  $\overline{AB}$  é diâmetro, a medida do ângulo central,  $A\hat{O}B$ , é igual a  $180^\circ$ , logo, a medida do ângulo inscrito,  $A\hat{C}B$ , é igual a  $90^\circ$  e o triângulo  $ABC$  é retângulo em  $C$ . □

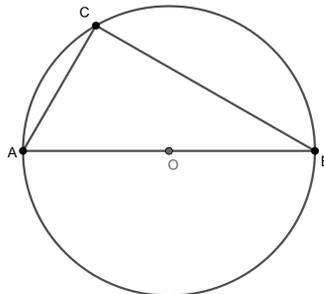


Figura 3 – Triângulo inscrito com um dos lados sendo diâmetro

Fonte: o próprio autor.

## 1.2 Teorema de Stewart

Seja  $ABC$  um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Seja  $d$  o comprimento da ceviana  $\overline{AD}$  que divide o lado  $\overline{BC}$  em dois segmentos,  $m$  e  $n$ , como mostra a Figura 4.

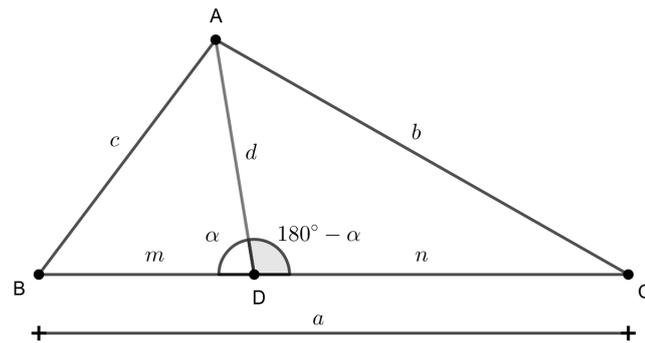


Figura 4 – Teorema de Stewart

Fonte: o próprio autor.

O Teorema de Stewart afirma que é válida a seguinte relação:

$$c^2n + b^2m = d^2a + mna \quad (1.1)$$

*Demonstração.* Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos  $ABD$  e  $ADC$  temos

$$c^2 = m^2 + d^2 - 2md \cos(\alpha) \quad (1.2)$$

$$b^2 = n^2 + d^2 - 2nd \cos(180^\circ - \alpha). \quad (1.3)$$

Multiplicando a Equação 1.2 por  $n$  e a Equação 1.3 por  $m$  e sabendo que  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$ , segue que

$$c^2n = m^2n + d^2n - 2mnd \cos(\alpha) \quad (1.4)$$

$$b^2m = n^2m + d^2m + 2mnd \cos(\alpha). \quad (1.5)$$

Observe que  $m + n = a$ . Somando as Equações 1.4 e 1.5, temos

$$c^2n + b^2m = mn(m + n) + d^2(m + n)$$

$$c^2n + b^2m = d^2a + mna.$$

Como queríamos demonstrar. □

### 1.3 Pipa ou deltóide

É um quadrilátero que possui dois pares de lados adjacentes congruentes, como mostra a Figura 5.

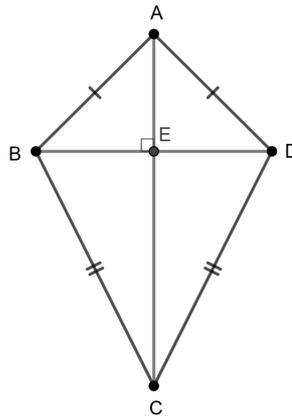


Figura 5 – Pipa ou deltóide  
Fonte: o próprio autor.

**Proposição 1.2.** *As diagonais de uma pipa são perpendiculares e  $E$  é ponto médio de  $\overline{BD}$ .*

*Demonstração.* Considere uma pipa  $ABCD$ , cujas diagonais se encontram no ponto  $E$ . Por definição,  $\overline{AB}$  é congruente a  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  é congruente a  $\overline{CD}$ , portanto, pelo critério lado-lado-lado, os triângulos  $ABC$  e  $ADC$  são congruentes. Daí, os ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{CAD}$  são congruentes e, pelo critério lado-ângulo-lado, temos que os triângulos  $BAE$  e  $DAE$  são congruentes. Logo, os ângulos  $\widehat{AEB}$  e  $\widehat{AED}$  são congruentes e suplementares, ou seja, medem  $90^\circ$ , o que mostra que as diagonais são perpendiculares.

Como os triângulos  $ABC$  e  $ADC$  são congruentes, os ângulos  $\widehat{BAE}$  e  $\widehat{EAD}$  também são congruentes e, pelo critério lado-ângulo-lado, os triângulos  $ABE$  e  $ADE$  são congruentes. Portanto,  $\overline{BE}$  é congruente a  $\overline{ED}$ , o que mostra que  $E$  é ponto médio de  $\overline{BD}$ .  $\square$

## 1.4 Arbelos

**Definição 1.1.** Dados três pontos colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$ , com  $C$  entre  $A$  e  $B$ , o arbelos é a região delimitada por três semicírculos de diâmetros  $AC$ ,  $CB$  e  $AB$ , como mostra a Figura 6.

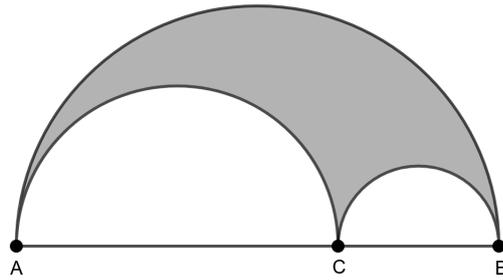


Figura 6 – Arbelos  
Fonte: o próprio autor.

Traçando uma reta perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$  passando pelo ponto  $C$  obtém-se o ponto  $D$ , que é a intersecção dessa reta com o semicírculo maior, como mostra a Figura 7.

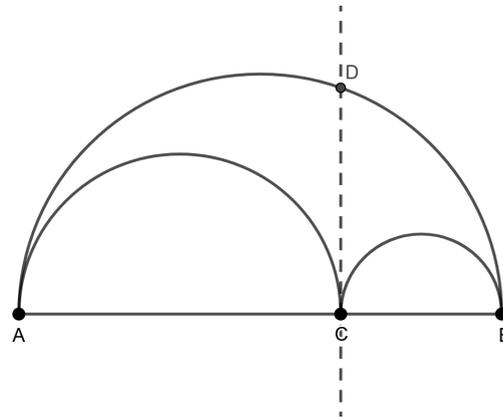


Figura 7 – Reta perpendicular a  $\overline{AB}$  passando por  $C$   
Fonte: o próprio autor.

**Proposição 1.3.** *O comprimento do semicírculo de um arbelos cujo diâmetro é  $\overline{AB}$  é igual à soma dos comprimentos dos semicírculos cujos diâmetros são iguais a  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$ .*

*Demonstração.* Seja  $r$  o raio do semicírculo cujo diâmetro é  $\overline{AB}$  e  $O$  seu centro,  $r_1$  o raio do semicírculo cujo diâmetro é  $\overline{AC}$  e  $O_1$  seu centro e  $r_2$  o raio do semicírculo cujo diâmetro é  $\overline{CB}$  com  $O_2$  sendo seu centro, como mostra a Figura 8.

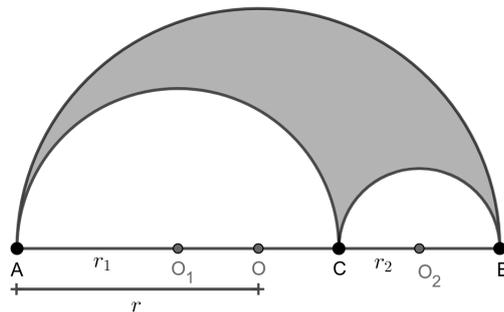


Figura 8 – Raios dos semicírculos  
 Fonte: o próprio autor.

Sabe-se que  $\overline{AB} = 2r$ ,  $\overline{AC} = 2r_1$  e  $\overline{CB} = 2r_2$ , logo,  $2r = 2(r_1 + r_2)$  e então  $r = r_1 + r_2$ . Multiplicando essa equação por  $\pi$  obtemos

$$\pi r = \pi r_1 + \pi r_2 \tag{1.6}$$

Os comprimentos dos semicírculos cujos diâmetros são  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$  são, respectivamente, iguais a  $\pi r$ ,  $\pi r_1$  e  $\pi r_2$ . Portanto, pela equação 1.6, temos o que queríamos mostrar.  $\square$

**Proposição 1.4.** *A área de um arbelos é igual à área do círculo de diâmetro  $\overline{CD}$ . (Figura 9)*

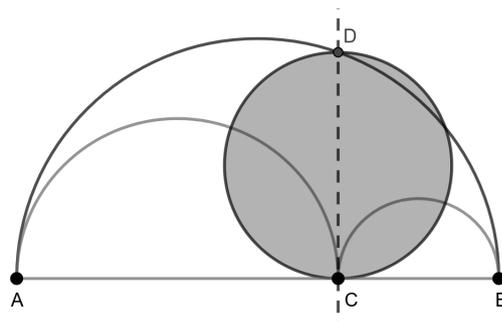


Figura 9 – Círculo com diâmetro  $\overline{CD}$   
 Fonte: o próprio autor.

*Demonstração.* Como o triângulo  $ADB$  está inscrito em uma semicircunferência com  $AB$  sendo o diâmetro, temos que o ângulo em  $D$  é reto, como mostra a Figura 10.

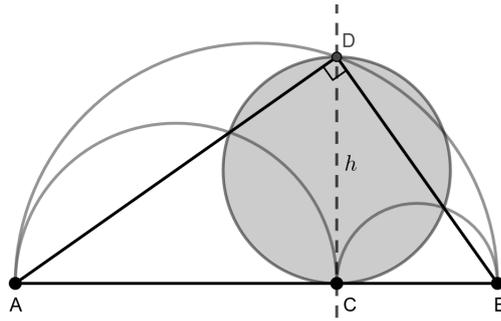


Figura 10 – Triângulo  $ADB$  é retângulo em  $D$   
 Fonte: o próprio autor.

Temos ainda que  $\overline{CD}$  é perpendicular à  $\overline{AB}$ , logo,  $\overline{CD}$  é altura do triângulo retângulo  $ADB$ . Sabendo que  $\overline{AC} = 2r_1$ ,  $\overline{CB} = 2r_2$  e que  $r = r_1 + r_2$  e denotando o comprimento  $\overline{CD}$  por  $h$ , temos que  $h$  pode ser calculado usando a seguinte relação métrica no triângulo retângulo: “o quadrado da altura é igual ao produto de suas projeções”. Daí,

$$h^2 = 2r_1 \cdot 2r_2 = 4r_1r_2 \quad (1.7)$$

A área do arbelos pode ser calculada subtraindo da área do semicírculo superior (cujo raio é igual a  $r$ ) a soma das áreas dos semicírculos inferiores (cujos raios são  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente), ou seja,

$$A = \frac{\pi r^2 - (\pi r_1^2 + \pi r_2^2)}{2} = \frac{\pi (r_1 + r_2)^2 - (\pi r_1^2 + \pi r_2^2)}{2} = \pi r_1 r_2. \quad (1.8)$$

A área do círculo de diâmetro  $\overline{CD} = h$ , denotada por  $A_h$ , é

$$A_h = \frac{\pi h^2}{4} = \frac{4\pi r_1 r_2}{4} = \pi r_1 r_2 \quad (1.9)$$

onde usamos a Equação 1.7.

Conclui-se que  $A = A_h$ , ou seja, a área do arbelos é igual a área do círculo de diâmetro  $\overline{CD}$ .  $\square$

## 2 Círculos gêmeos de Arquimedes

Os círculos gêmeos de Arquimedes são dois círculos tangentes ao segmento  $\overline{CD}$  e aos semicírculos cujos diâmetros são  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$ , como ilustra a Figura 11. De acordo com Lamoen (2019), já estão catalogadas 62 configurações diferentes dos círculos gêmeos de Arquimedes, algumas aparecem em pares, outras em grupos de 4 círculos (*Archimedean circles 24*, intitulado “*The Power circles*”, como mostra a Figura 12) e até em grupos com 8 círculos, como é o caso do “*The insquare octet*”, *Archimedean circles 51*, ilustrado na Figura 13.

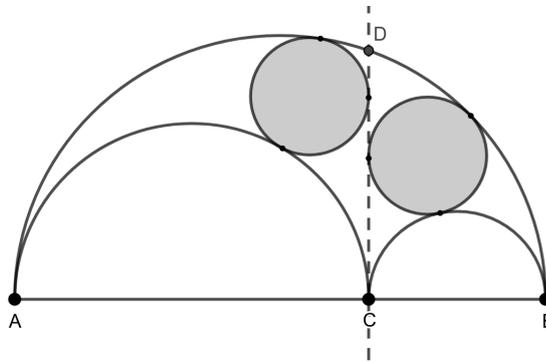


Figura 11 – Círculos gêmeos de Arquimedes  
Fonte: o próprio autor.

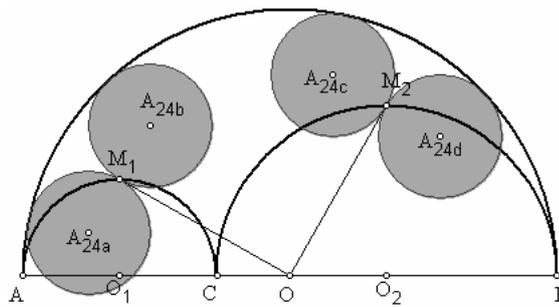


Figura 12 – Círculo Arquimadiano 24, “*The Power circles*”  
Fonte: adaptado de Lamoen (2019).

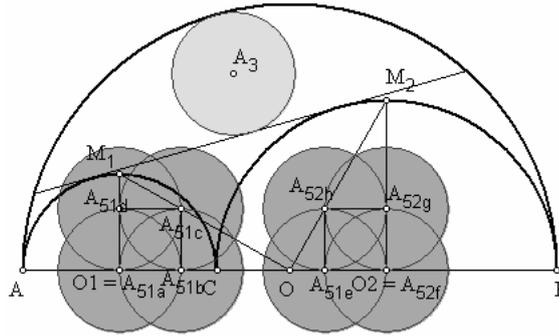


Figura 13 – Círculo Arquimediano 51, “The insquare octet”  
 Fonte: adaptado de Lamoen (2019).

**Proposição 2.1.** *Os círculos gêmeos de Arquimedes possuem o mesmo raio.*

*Demonstração.* Seja  $r$  o raio do semicírculo cujo diâmetro é  $\overline{AB}$  e  $O$  seu centro,  $r_1$  o raio do semicírculo cujo diâmetro é  $\overline{AC}$  e  $O_1$  seu centro e  $r_2$  o raio do semicírculo cujo diâmetro é  $\overline{CB}$  com  $O_2$  sendo seu centro. Sejam, ainda,  $P$  e  $Q$  os centros dos círculos gêmeos de Arquimedes e  $P'$  e  $Q'$  as projeções ortogonais dos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente, sobre o segmento  $\overline{AB}$ . Denotando por  $R$  o raio do círculo gêmeo com centro em  $P$  e por  $R_1$  o raio do círculo gêmeo cujo centro é  $Q$ , como ilustra a Figura 14, queremos provar que  $R = R_1$ .

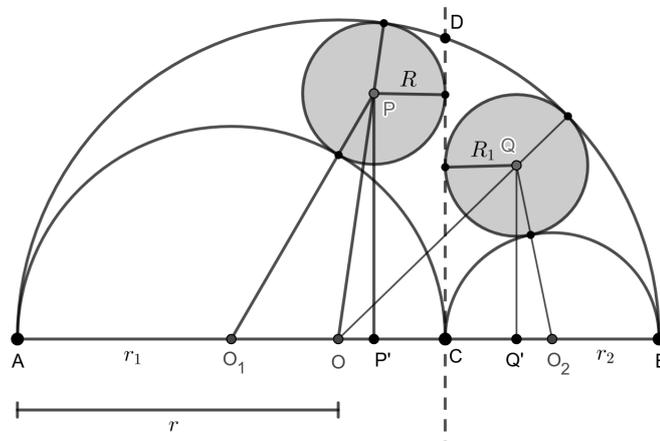


Figura 14 – Círculos gêmeos de Arquimedes  
 Fonte: o próprio autor.

Pelo triângulo retângulo  $O_1P'P$ , destacado na Figura 15, e sabendo que  $\overline{O_1P} = r_1 + R$  e que  $\overline{O_1P'} = r_1 - R$ , temos que

$$\begin{aligned} \overline{P'P}^2 &= \overline{PO_1}^2 - \overline{O_1P'}^2 \\ \overline{P'P}^2 &= (r_1 + R)^2 - (r_1 - R)^2 \\ \overline{P'P}^2 &= 4r_1R \end{aligned} \tag{2.1}$$

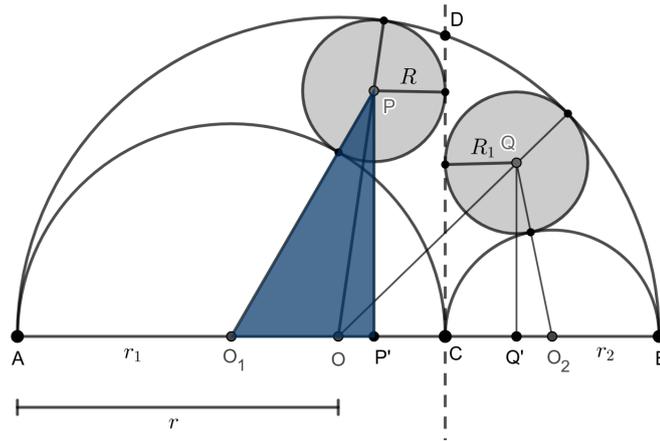


Figura 15 – Triângulo  $O_1P'P$   
 Fonte: o próprio autor.

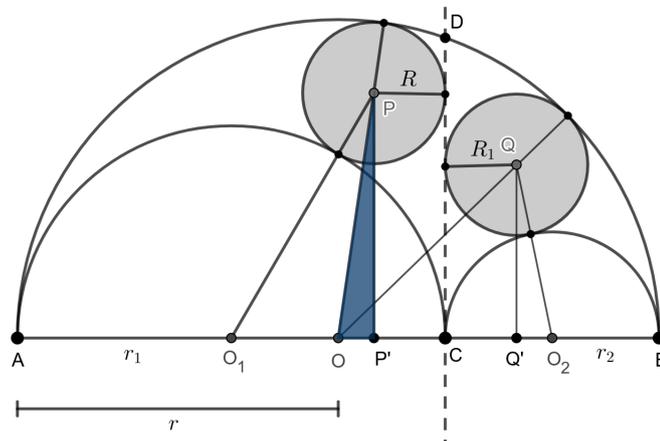


Figura 16 – Triângulo  $OP'P$   
 Fonte: o próprio autor.

Por outro lado, utilizando o triângulo retângulo  $OP'P$  (Figura 16) e sabendo que  $\overline{OP} = r - R$  e  $\overline{OP'} = \overline{OB} - \overline{CB} - \overline{P'C} = r - 2r_2 - R$ , temos que

$$\begin{aligned} \overline{P'P}^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{OP'}^2 \\ \overline{P'P}^2 &= (r - R)^2 - (r - 2r_2 - R)^2 \\ \overline{P'P}^2 &= 4rr_2 - 4r_2R - 4r_2^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Igualando as Equações 2.1 e 2.2, segue que

$$\begin{aligned} 4r_1R &= 4rr_2 - 4r_2R - 4r_2^2 \\ R(r_1 + r_2) &= r_2(r - r_2), \end{aligned}$$

como  $r_1 + r_2 = r$ , temos

$$R = \frac{r_2(r - r_2)}{r}. \tag{2.3}$$

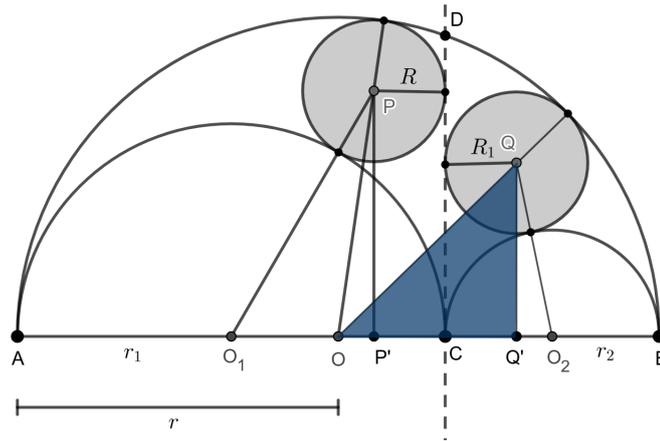


Figura 17 – Triângulo  $OQ'Q$

Fonte: o próprio autor.

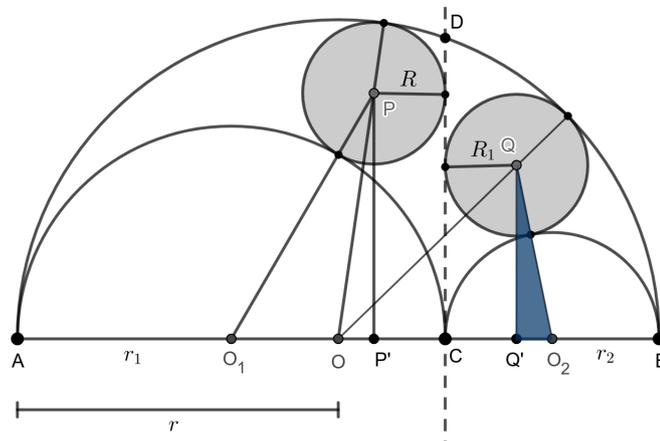


Figura 18 – Triângulo  $O_2Q'Q$

Fonte: o próprio autor.

Analogamente, pelos triângulos  $OQ'Q$  e  $O_2Q'Q$ , como mostra as Figuras 17 e 18, temos

$$\begin{aligned} \overline{Q'Q}^2 &= \overline{OQ}^2 - \overline{OQ'}^2 \\ \overline{Q'Q}^2 &= (r - R_1)^2 - (r - 2r_2 + R_1) \\ \overline{Q'Q}^2 &= 4rr_2 - 4rR_1 + 4r_2R_1 - 4r_2^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{Q'Q}^2 &= \overline{O_2Q}^2 - \overline{O_2Q'}^2 \\ \overline{Q'Q}^2 &= (r_2 + R_1)^2 - (r_2 - R_1)^2 \\ \overline{Q'Q}^2 &= 4r_2R_1, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde  $\overline{Q'O_2} = r_2 - R_1$  e  $\overline{OQ'} = \overline{OB} - \overline{O_2B} - \overline{Q'O_2} = r - r_2 - (r_2 - R_1) = r - 2r_2 + R_1$ . Igualando as Equações 2.4 e 2.5, temos

$$4rr_2 - 4rR_1 + 4r_2R_1 - 4r_2^2 = 4r_2R_1.$$

Daí,

$$R_1 = \frac{rr_2 - r_2^2}{r} = \frac{r_2(r - r_2)}{r}. \quad (2.6)$$

Como queríamos demonstrar, a Equação 2.3 é igual a Equação 2.6, ou seja,  $R = R_1$ .  $\square$

Assim, usando que  $r = r_1 + r_2$ , o raio dos círculos gêmeos de Arquimedes pode ser escrito como

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (2.7)$$

## 2.1 Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes

Veremos agora como construir os círculos gêmeos de Arquimedes por meio de régua e compasso. Trataremos as construções do ponto médio de um segmento, de uma reta perpendicular e da mediatriz como já conhecidas pelo leitor, pois são construções básicas e facilmente encontradas na literatura e *online*. A construção a seguir é baseada em Silva (2014) e pode ser acompanhada pelas Figuras 19, 20, 21 e 22.

Dado que os semicírculos que formam o arbelos já estejam desenhados façamos o seguinte:

- construa a reta perpendicular a  $\overline{AB}$  passando por  $C$  e intersectando o semicírculo  $AB$  no ponto  $D$ .
- construa as mediatrizes dos segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$ , sendo  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente, os pontos médios desses segmentos;
- marque as interseções das mediatrizes com os semicírculos  $AC$  e  $BC$  como  $E$  e  $F$ ;
- trace o segmento  $\overline{EO_2}$  e marque o ponto  $G$  como a interseção desse segmento com a reta  $\overleftrightarrow{CD}$ ;

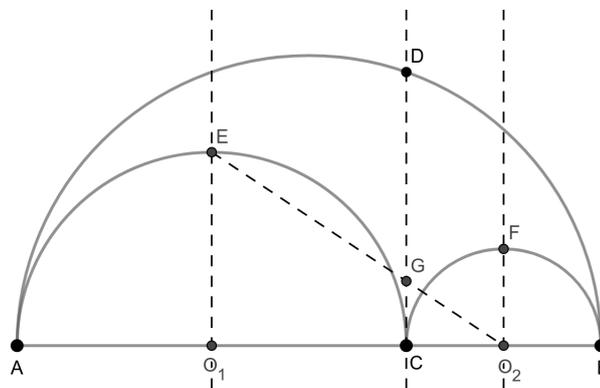


Figura 19 – Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes

Fonte: o próprio autor.

Como o triângulo  $O_1O_2E$  é retângulo em  $O_1$ , o triângulo  $CO_2G$  é retângulo em  $C$  e os ângulos  $\widehat{EO_2O_1}$  e  $\widehat{GO_2C}$  são congruentes, temos que os triângulos  $O_1O_2E$  e  $CO_2G$  são semelhantes. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CG}}{\overline{O_1E}} &= \frac{\overline{CO_2}}{\overline{O_1O_2}} \\ \frac{\overline{CG}}{r_1} &= \frac{r_2}{r_1 + r_2} \\ \overline{CG} &= \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Note que  $\overline{CG}$  possui o mesmo comprimento dos raios dos círculos gêmeos de Arquimedes, e portanto, o círculo centrado em  $G$  e raio  $\overline{GC}$  ou o círculo centrado em  $C$  e raio  $\overline{CG}$  são congruentes a eles.

Continuando a construção, temos:

- construa um círculo centrado em  $C$  e raio igual a  $\overline{CG}$ ;
- marque as interseções do círculo com o segmento  $\overline{AB}$  como  $I$  e  $J$ ;
- trace as perpendiculares ao segmento  $\overline{AB}$  que passam por  $I$  e  $J$ ;

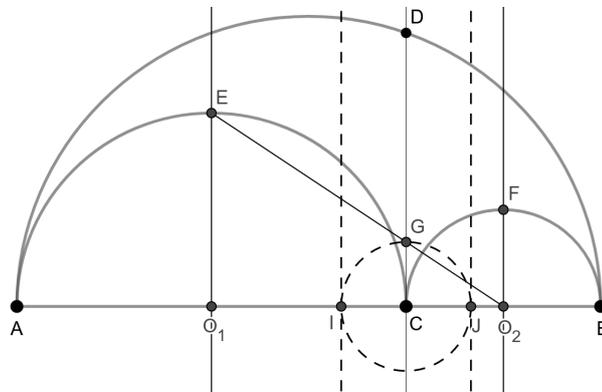


Figura 20 – Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes  
Fonte: o próprio autor.

- construa um círculo centrado em  $O_1$  com raio igual a  $\overline{O_1J}$  e outro centrado em  $O_2$  com raio igual a  $\overline{O_2I}$ ;
- marque as interseções dos círculos feitos no passo anterior com as retas perpendiculares a  $\overline{AB}$  passando por  $I$  e  $J$  como  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Os pontos  $P$  e  $Q$  obtidos são os centros dos círculos gêmeos de Arquimedes;

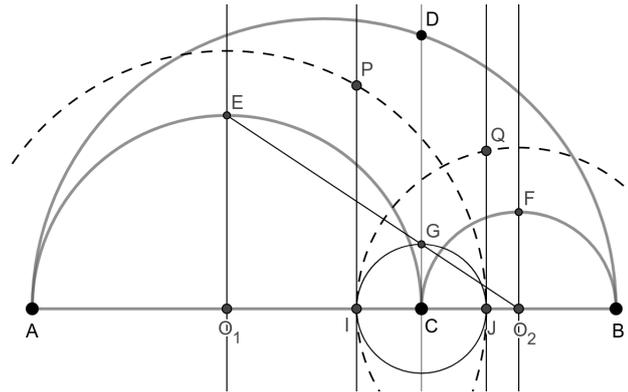


Figura 21 – Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes  
 Fonte: o próprio autor.

- trace o segmento  $\overline{O_1P}$  e marque como  $P'$  a interseção com o semicírculo  $AC$ ;
- trace o segmento  $\overline{O_2Q}$  e marque como  $Q'$  a interseção com o semicírculo  $BC$ ;
- os círculos centrados em  $P$  e  $Q$  com raios iguais a, respectivamente,  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$  são os círculos gêmeos de Arquimedes, pois,  $\overline{PP'} = \overline{CJ} = \overline{CG}$  que é o raio do círculo centrado em  $C$  (Equação 2.8). Analogamente,  $\overline{QQ'} = \overline{CI} = \overline{CG}$ .

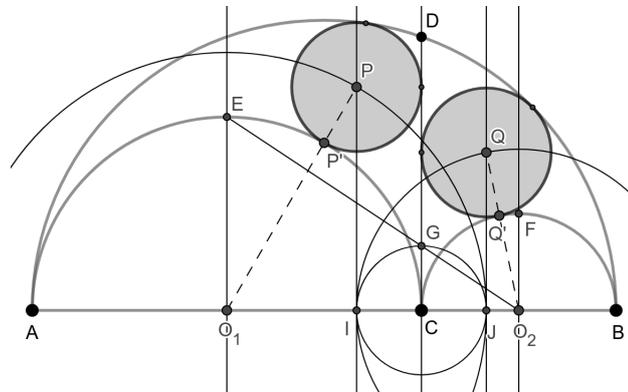


Figura 22 – Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes  
 Fonte: o próprio autor.

### 3 Alguns círculos congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes

Neste capítulo trataremos sobre seis novos círculos congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes, baseado em An e García (2019). São apresentados dois círculos gêmeos em cada um dos três teoremas que se seguirão.

**Teorema 3.1.** *Em um arbelos, sejam  $F$  e  $G$  os pontos de interseção do semicírculo  $O_1O_2$  com os semicírculos  $AC$  e  $BC$ , respectivamente. Seja  $H$  um ponto sobre a corda  $O_1F$  tal que  $\widehat{CHF} = 90^\circ$ . Construa  $I$  analogamente. Então, os círculos com raios  $\overline{HF}$  e  $\overline{IG}$  são congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes. (Veja Figura 23)*

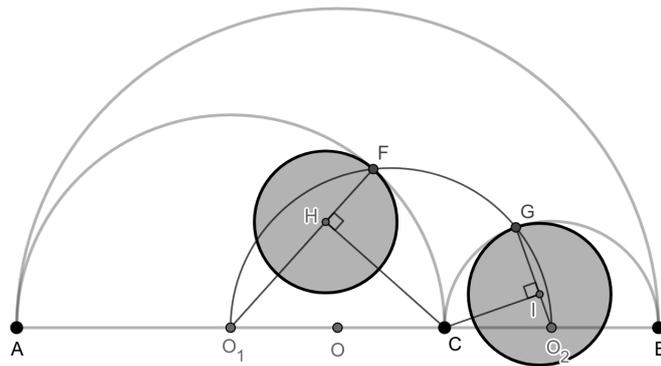


Figura 23 – Círculos com raios  $\overline{HF}$  e  $\overline{IG}$  são congruentes aos gêmeos de Arquimedes  
Fonte: o próprio autor.

*Demonstração.* Como  $\overline{O_1F}$  é raio do semicírculo  $AC$ , temos que  $\overline{O_1F} = r_1$ . Sabendo que o triângulo  $O_1O_2F$  está inscrito com um de seus lados como diâmetro temos, pelo Corolário 1.1, que ele é retângulo em  $F$ , como mostra a Figura 24.

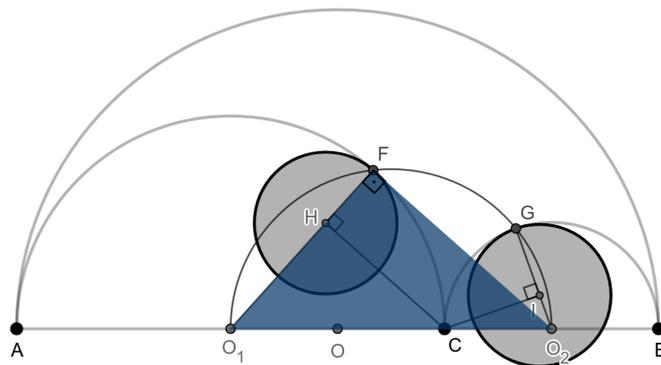


Figura 24 – Triângulo  $O_1O_2F$  é retângulo em  $F$   
Fonte: o próprio autor.

Logo, os triângulos  $CO_1H$  e  $O_2O_1F$ , destacados na Figura 25, são semelhantes e segue que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CO_1}}{\overline{O_1H}} &= \frac{\overline{O_2O_1}}{\overline{O_1F}} \\ \frac{r_1}{\overline{O_1H}} &= \frac{r_1 + r_2}{r_1} \\ \overline{O_1H} &= \frac{r_1^2}{r_1 + r_2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

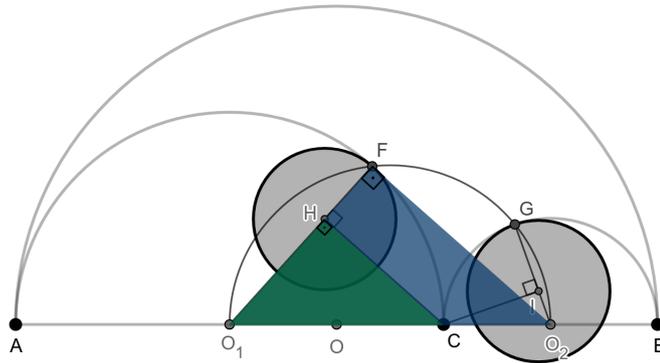


Figura 25 – Triângulo  $O_1O_2F$  e triângulo  $CO_1H$   
Fonte: o próprio autor.

O raio  $\overline{HF}$  pode ser escrito como

$$\overline{HF} = \overline{O_1F} - \overline{O_1H} = r_1 - \frac{r_1^2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1^2 + r_1r_2 - r_1^2}{r_1 + r_2},$$

ou seja,

$$\overline{HF} = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}.$$

Para o círculo centrado em  $I$  e raio  $\overline{IG}$  o procedimento é análogo. Temos que os triângulos  $O_2O_1G$  e  $O_2CI$  são semelhantes, logo

$$\begin{aligned} \frac{\overline{O_2I}}{\overline{O_2C}} &= \frac{\overline{O_2G}}{\overline{O_2O_1}} \\ \frac{\overline{O_2I}}{r_2} &= \frac{r_2}{r_1 + r_2} \\ \overline{O_2I} &= \frac{r_2^2}{r_1 + r_2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\overline{IG} = \overline{O_2G} - \overline{O_2I} = r_2 - \frac{r_2^2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}.$$

Portanto,  $\overline{HF} = \overline{IG} = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}$ , ou seja, a medida do raio dos círculos gêmeos de Arquimedes.  $\square$

**Teorema 3.2.** *Em um arbelos, a partir do ponto  $O_1$ , trace uma reta tangente ao semicírculo  $BC$ , em  $G$ . Construa  $F$  analogamente. Seja  $H$  o ponto de interseção das retas tangentes  $\overleftrightarrow{O_1G}$  e  $\overleftrightarrow{O_2F}$ . Sejam  $I$  e  $J$  as interseções do círculo com centro em  $H$  e raio igual a  $\overline{CH}$  com os semicírculos  $AC$  e  $BC$ , respectivamente, e  $I'$  e  $J'$  suas projeções ortogonais sobre  $\overline{AB}$ . Seja  $S$  o centro do círculo delimitado pelos círculos centrado em  $A$  com raio  $\overline{AJ'}$ , centrado em  $B$  com raio  $\overline{BI'}$  e pelo semicírculo  $AC$ . Construa o círculo centrado em  $T$  analogamente. Então, os círculos com centros em  $S$  e  $T$  são congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes. (Veja Figura 26)*

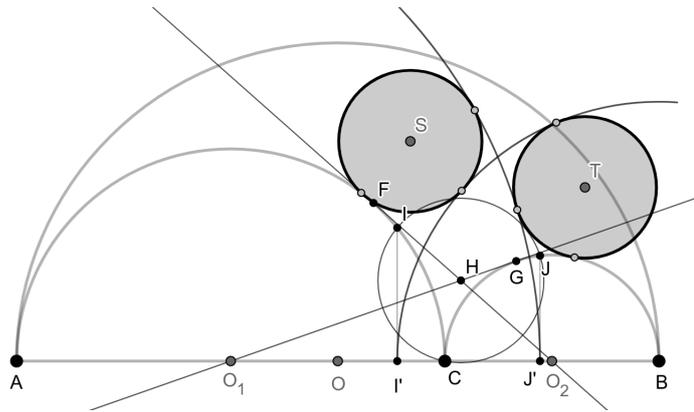


Figura 26 – Círculos centrados em  $S$  e  $T$  são congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes.

Fonte: o próprio autor.

*Demonstração.* Denote por  $r_1$  o raio do semicírculo  $AC$ ,  $r_2$  o raio do semicírculo  $BC$  e por  $r = r_1 + r_2$  o raio do semicírculo  $AB$ . Seja  $M$  a interseção dos segmentos  $\overline{CI}$  e  $\overline{O_1H}$ . Seja  $N$  a interseção dos segmentos  $\overline{CJ}$  e  $\overline{O_2H}$ , como mostra a Figura 27.

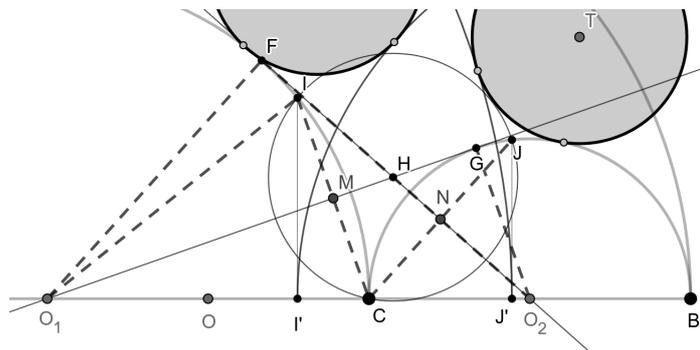


Figura 27 – Pontos  $M$  e  $N$

Fonte: o próprio autor.

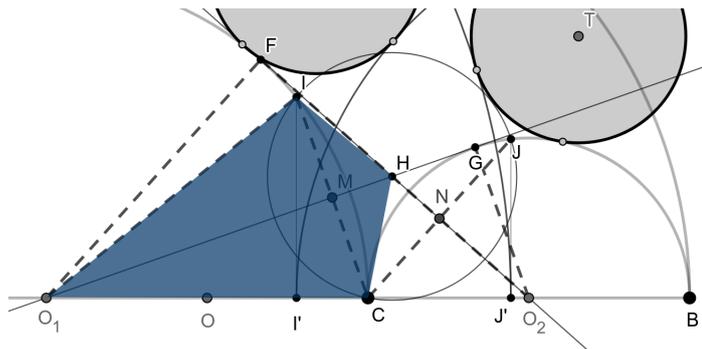


Figura 28 – O quadrilátero  $CO_1IH$  é uma pipa  
 Fonte: o próprio autor.

Observe que o quadrilátero  $CO_1IH$ , destacado na Figura 28, é uma pipa, pois  $\overline{CO_1} \equiv \overline{O_1I}$  (raio do semicírculo  $AC$ ) e  $\overline{HI} \equiv \overline{HC}$  (raio do círculo centrado em  $H$ ), logo,  $\overline{CI}$  é perpendicular a  $\overline{O_1H}$ , pela Proposição 1.2. Como consequência,  $\overline{CM}$  é paralelo a  $\overline{O_2G} = r_2$ , como mostra a Figura 29, pois  $O_1\widehat{MC} \equiv O_1\widehat{GO_2} = 90^\circ$ .

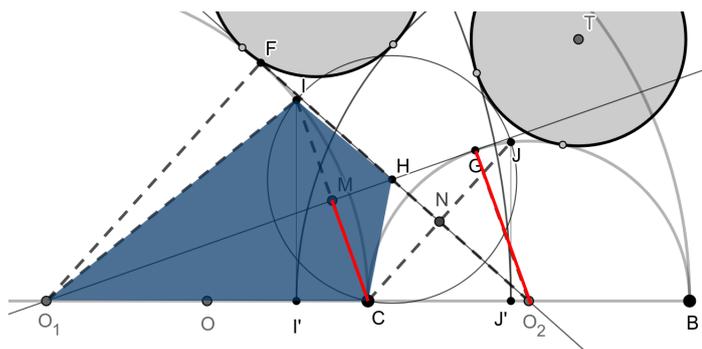


Figura 29 – Os segmentos  $\overline{CM}$  e  $\overline{O_2G}$  são paralelos  
 Fonte: o próprio autor.

Como os triângulos  $CO_1M$  e  $O_2O_1G$ , destacados na Figura 30, são semelhantes, temos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{O_2G}}{\overline{CM}} &= \frac{\overline{O_2O_1}}{\overline{CO_1}} \\ \frac{r_2}{\frac{\overline{CI}}{2}} &= \frac{r_1 + r_2}{r_1} \\ \overline{CI} &= \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

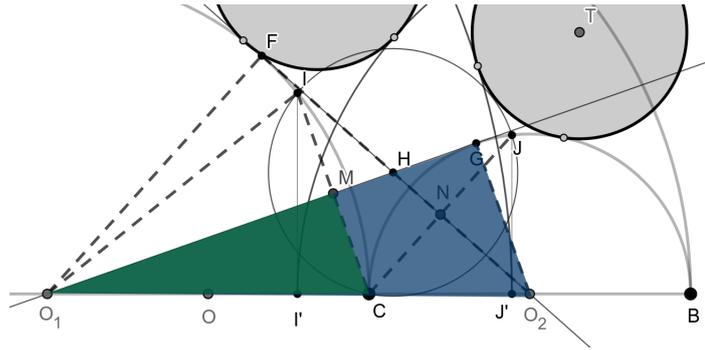


Figura 30 – Semelhança dos triângulos  $CO_1M$  e  $O_2O_1G$   
 Fonte: o próprio autor.

Observe que os triângulos  $CII'$  e  $O_2O_1G$ , destacados na Figura 31, também são semelhantes, pois  $C\hat{I}I' \equiv O_1\hat{G}O_2 = 90^\circ$  e  $I\hat{C}I' \equiv G\hat{O}_2O_1$ , então

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CI'}}{\overline{O_2G}} &= \frac{\overline{CI}}{\overline{O_2O_1}} \\ \frac{\overline{CI'}}{r_2} &= \frac{\overline{CI}}{r_1 + r_2} = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2r_1r_2}{(r_1 + r_2)^2} \\ \overline{CI'} &= \frac{2r_1r_2^2}{(r_1 + r_2)^2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

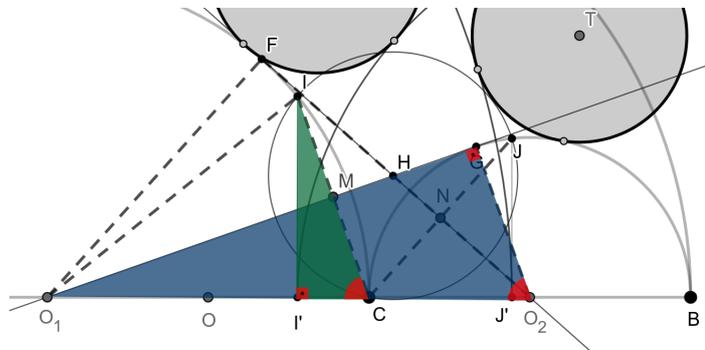


Figura 31 – Semelhança dos triângulos  $CII'$  e  $O_2O_1G$   
 Fonte: o próprio autor.

Como  $\overline{CO_2} \equiv \overline{O_2J}$  e  $\overline{CH} \equiv \overline{HJ}$ , o quadrilátero  $CO_2JH$ , mostrado na Figura 32, é uma pipa e, pela Proposição 1.2,  $\overline{CJ} \perp \overline{O_2H}$ , logo,  $C\hat{N}O_2 = 90^\circ = O_1\hat{F}O_2$ ,  $\overline{O_1F} \parallel \overline{CN}$  e então  $O_2\hat{O}_1F \equiv O_2\hat{C}N$ , ilustrados na Figura 33.

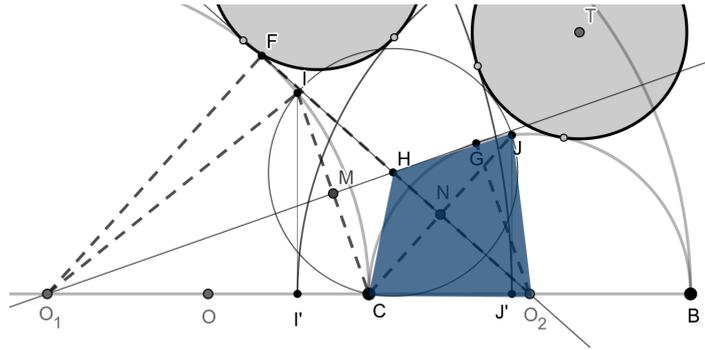


Figura 32 – O quadrilátero  $CO_2JH$  é uma pipa  
 Fonte: o próprio autor.

Como mostra a Figura 33, os triângulos  $CO_2N$  e  $O_1O_2F$  são semelhantes e temos que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{O_1F}}{\overline{CN}} &= \frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{CO_2}} \\ \frac{r_1}{\overline{CN}} &= \frac{r_1 + r_2}{r_2} \\ \overline{CN} &= \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

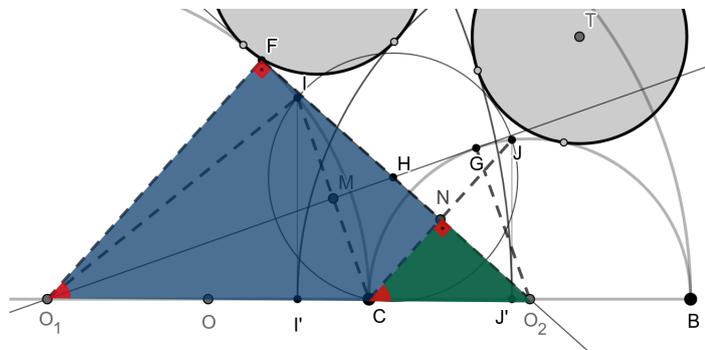


Figura 33 – Semelhança dos triângulos  $CO_2N$  e  $O_1O_2F$   
 Fonte: o próprio autor.

Note que o círculo centrado em  $N$  e raio  $\overline{NC}$  (Figura 34) e o círculo centrado em  $C$  e raio  $\overline{CN}$  são congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes.





$$\begin{aligned}
\left[2r_2 + \frac{2r_1r_2^2}{(r_1+r_2)^2} + x\right]^2 r_1 &= \left[2r_2 + x + \frac{2r_1r_2^2}{(r_1+r_2)^2}\right]^2 r_1 = \\
&= \left[(2r_2+x)^2 + 2(2r_2+x)\frac{2r_1r_2^2}{(r_1+r_2)^2} + \frac{4r_1^2r_2^4}{(r_1+r_2)^4}\right] r_1 = \\
&= 4r_1r_2^2 + 4r_1r_2x + r_1x^2 + \frac{8r_1^2r_2^3}{(r_1+r_2)^2} + \frac{4r_1^2r_2^2x}{(r_1+r_2)^2} + \frac{4r_1^3r_2^4}{(r_1+r_2)^4}. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Expandindo o termo do lado direito da igualdade, temos

$$\begin{aligned}
(2r_1+2r_2)\left[(r_1+x)^2 + r_1(r_1+2r_2)\right] &= (2r_1+2r_2)(2r_1^2+2r_1x+x^2+2r_1r_2) \\
&= 4r_1^3+4r_1^2x+2r_1x^2+4r_1^2r_2+4r_1^2r_2+4r_1r_2x+2r_2x^2+4r_1r_2^2 \\
&= 4r_1^3+4r_1^2x+2r_1x^2+8r_1^2r_2+4r_1r_2x+2r_2x^2+4r_1r_2^2. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Somando as Equações 3.7, 3.8, igualando à Equação 3.9 e fazendo os devidos ajustes, como cancelar os termos opostos e somar os semelhantes, temos

$$\begin{aligned}
\frac{4r_1^3r_2^2(r_1^2+2r_1r_2+r_2^2)}{(r_1+r_2)^4} + \frac{8r_1^2r_2(r_1^2+2r_1r_2+r_2^2)}{(r_1+r_2)^2} &= \left(\frac{4r_1^3r_2+4r_1^2r_2^2}{(r_1+r_2)^2} + 8r_1^2+8r_1r_2\right)x \\
\frac{4r_1^3r_2^2}{(r_1+r_2)^2} + \frac{8r_1^2r_2(r_1+r_2)^2}{(r_1+r_2)^2} &= \left(\frac{4r_1^2r_2(r_1+r_2)}{(r_1+r_2)^2} + \frac{8r_1(r_1+r_2)(r_1+r_2)^2}{(r_1+r_2)^2}\right)x.
\end{aligned}$$

Cancelando os denominadores, colocando alguns termos em evidência e sabendo que  $r_1 \neq 0$  e  $r_2 \neq 0$ , temos que

$$\begin{aligned}
x &= \frac{4r_1^2r_2(r_1r_2+2(r_1+r_2)^2)}{(r_1+r_2)4r_1(r_1r_2+2(r_1+r_2)^2)} \\
x &= \frac{r_1r_2}{(r_1+r_2)}.
\end{aligned}$$

Para o círculo centrado em  $T$  o procedimento é análogo. Portanto, os círculos centrado em  $S$  e  $T$  são congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes.  $\square$

**Teorema 3.3.** *Em um arbelos, seja  $F$  a interseção do círculo com centro em  $B$  e raio  $\overline{BC}$  e o semicírculo  $AB$ . Analogamente, construa  $I$ . Seja  $G$  a interseção do segmento  $\overline{AF}$  com o semicírculo  $AC$ ,  $H$  a interseção do segmento  $\overline{BI}$  com o semicírculo  $BC$  e  $G'$  e  $H'$  suas projeções ortogonais sobre  $\overline{AB}$ . O círculo centrado em  $R$  que é delimitado pelo semicírculo  $AB$ , pelo círculo centrado em  $A$  com raio  $\overline{AC}$  e pela semirreta  $\overrightarrow{G'G}$  e o círculo centrado em  $S$  que é delimitado pelo semicírculo  $AB$ , pelo círculo centrado em  $B$  com raio  $\overline{BC}$  e pela semirreta  $\overrightarrow{H'H}$  são congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes. (Veja Figura 37)*

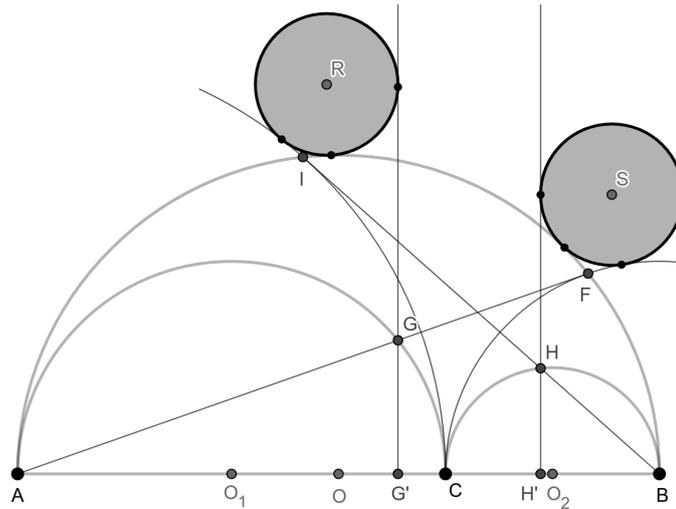


Figura 37 – Círculos centrados em  $R$  e  $S$  são congruentes aos gêmeos de Arquimedes.  
Fonte: o próprio autor.

*Demonstração.* Note que os triângulos  $AGC$  e  $AFB$ , mostrados na Figura 38, estão inscritos em uma circunferência com um dos lados sendo diâmetro, logo, são retângulos em  $G$  e  $F$ , pelo Corolário 1.1. Pelo caso de semelhança ângulo-ângulo os triângulos citados são semelhantes. Além disso,  $\overline{BF}$  é raio do círculo centrado em  $B$  por construção e mede  $2r_2$ . Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{GC}}{\overline{FB}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \\ \frac{\overline{GC}}{2r_2} &= \frac{2r_1}{2(r_1 + r_2)} \\ \overline{GC} &= \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

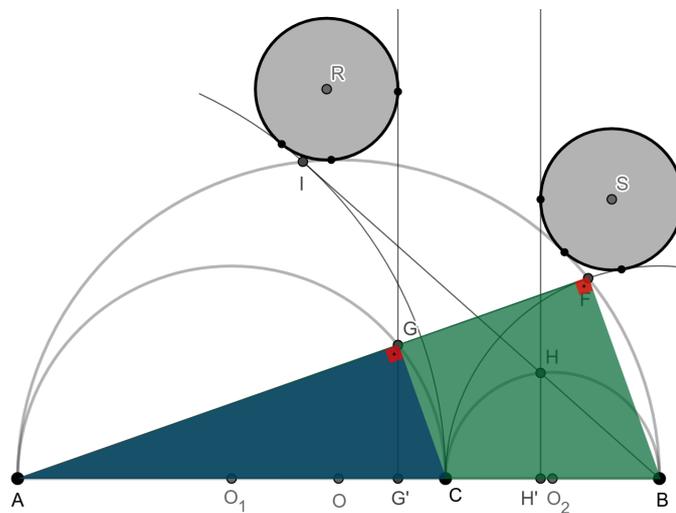


Figura 38 – Triângulos  $AGC$  e  $AFB$  são semelhantes  
Fonte: o próprio autor.

Por Pitágoras no triângulo  $AFB$ , temos

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= \sqrt{[2(r_1 + r_2)]^2 - (2r_2)^2} \\ \overline{AF} &= \sqrt{4(r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_2^2)} \\ \overline{AF} &= 2\sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Por semelhança dos triângulos  $AGC$  e  $AFB$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \\ \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} &= \frac{2r_1}{2(r_1 + r_2)} \\ \overline{AG} &= \frac{2r_1\sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2}}{r_1 + r_2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Como, ilustrado na Figura 39, os triângulos  $AG'G$  e  $AGC$  são semelhantes e pela Equação 3.12, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AG'}}{\overline{AG}} &= \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} \\ \overline{AG'} &= \frac{\overline{AG}^2}{\overline{AC}} \\ \overline{AG'} &= \frac{4r_1^2(r_1^2 + 2r_1r_2)}{(r_1 + r_2)^2} \cdot \frac{1}{2r_1} \\ \overline{AG'} &= \frac{2r_1(r_1^2 + 2r_1r_2)}{(r_1 + r_2)^2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

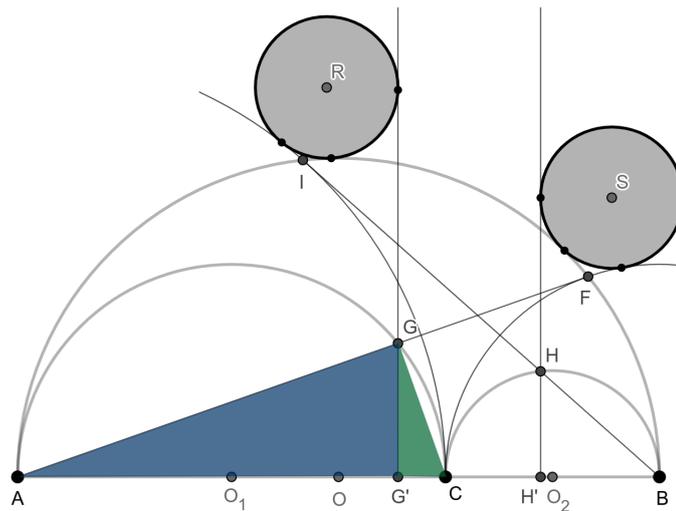


Figura 39 – Triângulos  $AG'G$  e  $AGC$  são semelhantes  
 Fonte: o próprio autor.

Seja  $R'$  a projeção ortogonal de  $R$  sobre  $\overline{AB}$ . Denotando por  $x$  o raio do círculo centrado em  $R$  e sabendo que  $\overline{AR'} = \overline{AG'} - x$  e que  $\overline{AR} = 2r_1 + x$ , temos, pelo teorema

de Pitágoras sobre o triângulo  $ARR'$  (Figura 40), que

$$\overline{RR'}^2 = (2r_1 + x)^2 - (\overline{AG'} - x)^2. \quad (3.14)$$

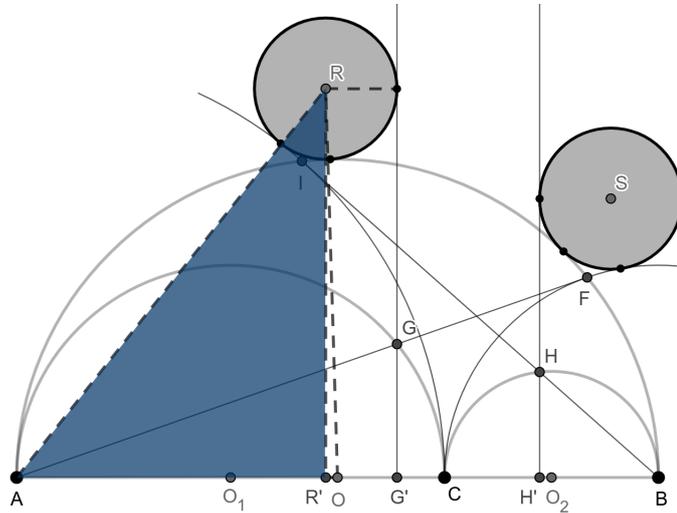


Figura 40 – Triângulo  $ARR'$   
Fonte: o próprio autor.

Aplicando novamente o teorema de Pitágoras sobre o triângulo  $ORR'$  (Figura 41) e sabendo que  $\overline{OR'} = \overline{AO} - \overline{AR'} = (r_1 + r_2) - (\overline{AG'} - x)$ , temos

$$\begin{aligned} \overline{OR}^2 &= \overline{RR'}^2 + \overline{OR'}^2 \\ (r_1 + r_2 + x)^2 &= (2r_1 + x)^2 - (\overline{AG'} - x)^2 + [(r_1 + r_2) - (\overline{AG'} - x)]^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

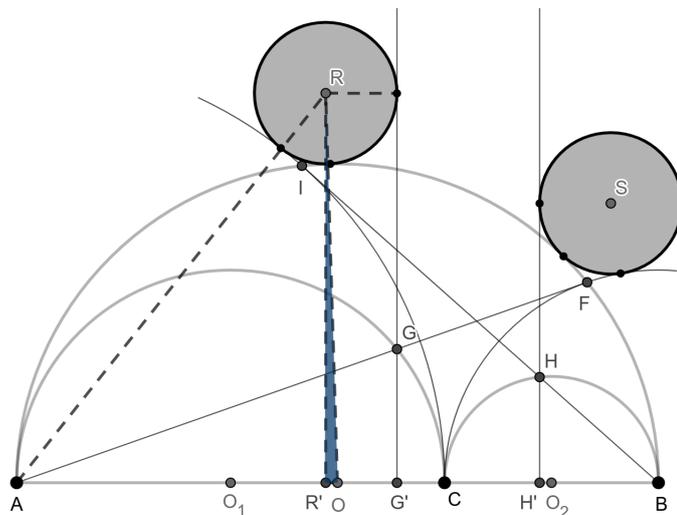


Figura 41 – Triângulo  $ORR'$   
Fonte: o próprio autor.

Substituindo a Equação 3.13 na Equação 3.15, temos

$$(r_1 + r_2 + x)^2 = (2r_1 + x)^2 - \left( \frac{2r_1(r_1^2 + 2r_1r_2)}{(r_1 + r_2)^2} - x \right)^2 + \left[ (r_1 + r_2) - \left( \frac{2r_1(r_1^2 + 2r_1r_2)}{(r_1 + r_2)^2} - x \right) \right]^2. \quad (3.16)$$

Desenvolvendo cada uma das expressões quadráticas da Equação 3.16 temos

$$(r_1 + r_2 + x)^2 = (r_1 + r_2)^2 + 2x(r_1 + r_2) + x^2 \quad (3.17)$$

$$(2r_1 + x)^2 = 4r_1^2 + 4r_1x + x^2 \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \left[ (r_1 + r_2) - \left( \frac{2r_1(r_1^2 + 2r_1r_2)}{(r_1 + r_2)^2} - x \right) \right]^2 &= (r_1 + r_2)^2 - \\ &- 2(r_1 + r_2) \left( \frac{2r_1(r_1^2 + 2r_1r_2)}{(r_1 + r_2)^2} - x \right) + \\ &+ \left( \frac{2r_1(r_1^2 + 2r_1r_2)}{(r_1 + r_2)^2} - x \right)^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo as expressões das Equações 3.17, 3.18 e 3.19 na Equação 3.16 e cancelando os termos opostos, temos

$$\begin{aligned} 2x(r_1 + r_2) &= 4r_1^2 + 4r_1x - 2(r_1 + r_2) \left( \frac{2r_1(r_1^2 + 2r_1r_2)}{(r_1 + r_2)^2} - x \right) \\ 2x(r_1 + r_2) &= 4r_1^2 + 4r_1x - \frac{4r_1(r_1^2 + 2r_1r_2)}{r_1 + r_2} + 2x(r_1 + r_2) \\ 4r_1x &= \frac{4r_1(r_1^2 + 2r_1r_2)}{r_1 + r_2} - 4r_1^2. \end{aligned}$$

Por fim, dividindo por  $4r_1$  (admitindo  $r_1 \neq 0$ ) e simplificando a expressão acima, temos o que queríamos mostrar

$$x = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}.$$

De forma análoga mostramos o mesmo para o círculo centrado em  $S$ .  $\square$

## 4 Sequência didática

Neste capítulo fazemos uma sugestão de sequência didática que o professor pode seguir para apresentar os círculos gêmeos de Arquimedes aos alunos.

### Círculos gêmeos de Arquimedes

#### **Conteúdo**

Teorema de Pitágoras; arbelos e círculos gêmeos de Arquimedes, bem como algumas propriedades relacionadas a eles.

#### **Objetivos**

- Reconhecer um arbelos e demonstrar algumas propriedades, como as Proposições 1.3 e 1.4.
- Definir os círculos gêmeos de Arquimedes e provar que eles possuem o mesmo raio.

**Anos:** 9º ano e ensino médio.

**Tempo estimado:** 4 aulas.

**Desenvolvimento:** Na primeira aula, apresente a Proposição 2.1 como um problema e aproveite a oportunidade para falar rapidamente sobre o arbelos e os círculos gêmeos. Comente que esse problema pode ser resolvido usando apenas o Teorema de Pitágoras e explique-o.

Na segunda aula, proponha alguns exercícios sobre o Teorema de Pitágoras, dê um tempo para que os alunos tentem resolver e corrija-os.

Na terceira aula, defina o arbelos e prove as Proposições 1.3 e 1.4.

Na última aula, retome o problema proposto na primeira aula e utilize o Teorema de Pitágoras para resolvê-lo, como feito na Proposição 2.1. Nessa aula, também, deixe como curiosidade ou até desafio, mostrar que os círculos que aparecem no Capítulo 3 são congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes, ou seja, possuem o mesmo raio.

## 5 Considerações Finais

Desde que Arquimedes começou a investigar as propriedades do arbelos e construiu os círculos gêmeos muito tempo se passou. E ainda hoje descobrem-se novos círculos que são congruentes aos gêmeos de Arquimedes.

O tema deste trabalho é muito rico em conteúdos que podem facilmente serem explorados nos ensinamentos fundamental e médio. Nas demonstrações usamos essencialmente a semelhança de triângulos, visto no 8º do ensino fundamental e retomado no ensino médio.

Arbelos é um tema pouquíssimo abordado no contexto escolar sendo completamente novo para a maioria dos estudantes. Esperamos que esse trabalho possa ser referência para alunos e professores. Que os alunos possam entender que as demonstrações são armas poderosas que podemos usar para garantir a verdade de algo. Que os professores se sintam motivados a buscar novas formas de aplicar o conhecimento que transmitem aos seus alunos.

Esse trabalho mostrou três pares de círculos que são congruentes aos círculos gêmeos de Arquimedes e mostrou, também, que esse tema permanece vivo e que há espaço para outros pares de círculos serem descobertos. Há ainda outras maneiras de abordar o mesmo problema. Usando Geometria Analítica podemos definir exatamente onde o centro dos círculos se encontram no plano. Podemos também nos preocupar em como construir esses círculos usando régua e compasso, como fizemos para os círculos gêmeos de Arquimedes na seção 2.1.

## Referências

- AN, L. V.; GARCÍA, E. A. J. *Some Archimedean Circles in an Arbelos*. 2019. Disponível em: <<http://forumgeom.fau.edu/FG2019volume19/FG201907.pdf>>. Acesso em: 28 de junho de 2019.
- DALCIN, M. *Circunferências gêmeas de Arquimedes*. 2019. RPM54. Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/54/5.htm>>. Acesso em: 30 de maio de 2019.
- HEATH, T. *The Works of Archimedes. Edited by T. L. Heath*. [S.l.]: Dover Publications, 2002.
- LAMOEN, F. M. V. *Online catalogue of Archimedean circles*. 2019. Disponível em: <<http://home.kpn.nl/lamoen/wiskunde/Arbelos/Catalogue.htm>>. Acesso em: 28 de junho de 2019.
- MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria I*. [S.l.]: Francisco Alves, 1990.
- MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria II*. Edição original. [S.l.]: FC & Z Livros, 2002.
- NOS, R. L.; SAITO, O. H.; OLIVEIRA, C. A. M. de. *Os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática*. 2014. Disponível em: <[http://paginapessoal.utfpr.edu.br/rudimarnos/publicacoes/publicacoes/cnmac\\_2014.pdf](http://paginapessoal.utfpr.edu.br/rudimarnos/publicacoes/publicacoes/cnmac_2014.pdf)>. Acesso em: 30 de maio de 2019.
- SILVA, F. F. da. *Arbelos*. 2014. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=577](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=577)>. Acesso em: 28 de maio de 2019.
- WEISSTEIN, E. W. *Arbelos. From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. 2019. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html>>. Acesso em: 28 de junho de 2019.
- WEISSTEIN, E. W. *Kite. From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. 2019. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/Kite.html>>. Acesso em: 28 junho de 2019.