

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE COMPARATIVA DE TÉCNICAS DE CÁLCULO
NUMÉRICO DE INTEGRAIS SINGULARES
NO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO**

RODNNY JESUS MENDOZA FAKHYE

ORIENTADOR: PAUL WILLIAM PARTRIDGE

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS
PUBLICAÇÃO: E.DM 007A/98

BRASÍLIA/DF: JULHO DE 1998

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE COMPARATIVA DE TÉCNICAS DE CÁLCULO
NUMÉRICO DE INTEGRAIS SINGULARES NO MÉTODO DE
ELEMENTOS DE CONTORNO**

ENG^o RODNNY JESUS MENDOZA FAKHYE

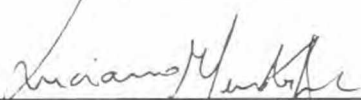
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:



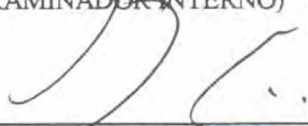
PAUL WILLIAM PARTRIDGE, PhD (UnB)

(ORIENTADOR)



LUCIANO MENDES BEZERRA, PhD (UnB)

(EXAMINADOR INTERNO)



WILSON SERGIO VENTURINI, PhD (EESC-USP)

(EXAMINADOR EXTERNO)

BRASÍLIA - DF, 13 de JULHO de 1998.

FICHA CATALOGRÁFICA

MENDOZA FAKHYE, RODNNY JESUS

Análise Comparativa de Técnicas de Cálculo Numérico de Integrais Singulares no Método de Elementos de Contorno [Distrito Federal] 1998.

xvi, 97 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas, 1998).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil.

1. Elementos de Contorno

2. Integração Numérica

3. Integrais Singulares

4. Elastostática linear

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MENDOZA FAKHYE, R. J. (1998). Análise Comparativa de Técnicas de Cálculo Numérico de Integrais Singulares no Método de Elementos de Contorno. Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM 007A/98, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília DF, 97 p.

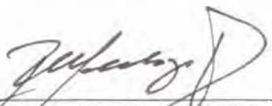
CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Rodnny Jesus Mendoza Fakhye

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Comparação de Técnicas de Cálculo Numérico de Integrais Singulares no Método de Elementos de Contorno

GRAU / ANO: Mestre / 1998

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.


Rodnny Jesus Mendoza Fakhye
Calle Moquegua 712 Miraflores
Arequipa - PERU
e-mail: rodny@hotmail.com

*A minha mãe Naty
e à memória de meu pai Manuel*

AGRADECIMENTOS

Aos professores do Mestrado em Estruturas, em especial ao meu orientador o professor Paul W. Partridge.

Aos meus irmãos Edda, Hady, Carlos, Gilda, Esther, Rita, Manuel e Héctor pelo constante incentivo, apoio, carinho, força e amor.

A Karina pelo incentivo, ajuda e motivação.

Aos colegas e amigos do mestrado, em especial à fantástica turma “chorona” de 1996.

Aos amigos: Ana Elisa, Ana Gabriela e Jorge, Carlos Alberto, Dennin, Henrique, Ricardo, Selênio, Silvana e Soraya. Nunca saberei o suficiente português para expressar os meus sentimentos de agradecimento.

Ao professor Marcos Aurélio Noronha, pela imensa colaboração.

Ao CNPq, ao Brasil e seu povo, pelo apoio financeiro e pela oportunidade de ser melhor.

A DEUS, por todas e cada uma das coisas que recebi na minha vida e as que continuo recebendo.

RESUMO

Nos últimos anos têm sido desenvolvidos muitas técnicas sobre cálculo numérico de integrais singulares no Método de Elementos de Contorno. O tratamento adequado e preciso destas integrais é essencial nas formulações de Elementos de Contorno, para poder obter soluções exatas e confiáveis.

Como não existem critérios geralmente aceitos para o cálculo numérico destas integrais, existe uma relativa confusão sobre as propriedades e aplicabilidade de cada uma, gerando as vezes um uso inadequado das mesmas, o que pode ser fonte de erros e análises incorretas.

Considerando isto, o presente trabalho faz uma descrição das características das principais técnicas em uso, assim como uma enumeração das propriedades de cada uma, desde o ponto de vista de exatidão, flexibilidade e a dificuldade para sua implementação nos códigos de MEC.

Assim, os diferentes esquemas foram analisados desde os pontos de vista de exatidão, eficiência e facilidade de implementação em códigos do MEC, numa tentativa de identificar quais dos esquemas são os mais apropriados.

Estas técnicas foram avaliadas em problemas de potencial e elastostática linear bidimensional, considerando diferentes números de pontos de integração e nível de discretização.

Por fim, conclui-se que as técnicas de quadraturas específicas (quadratura Gaussiana logarítmica e o método de Dumont) são as opções mais recomendáveis para integração singular nos tipos de problemas analisados já que apresentam boa convergência inclusive com um número baixo de pontos de integração.

ABSTRACT

Over the last few years many techniques have been developed for calculating singular integrals in the Boundary Element Method. The correct treatment and accuracy of these integrals is essential to the formulation of Boundary Element problems, in order to obtain correct and reliable solutions.

As generally accepted criteria for the numerical evaluation of these integrals do not exist, there is some confusion about the properties and applicability of each method, leading at times to inadequate use of the same, which may be a source of error and incorrect results.

In this context, the present study describes the principal methods in use, enumerating the properties of each from the viewpoints of accuracy, flexibility and difficulty of implementation in Boundary Element codes, in an attempt to identify which of these schemes is more appropriate.

These techniques were evaluated for potential and linear elastic problems in two dimensions considering different numbers of integration points and levels of discretization.

Finally it is concluded that the special quadrature techniques (Logarithmic Gaussian Quadrature and Dumont's Method) are the options recommended for singular integration for the types of problems analyzed, giving good convergence even using a small number of integration points.

ÍNDICE

Capítulo	Página
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - GENERALIDADES	1
1.1.1 - O Método de Diferenças Finitas (MDF)	1
1.1.2 - O Método de Elementos Finitos (MEF)	2
1.1.3 - O Método de Elementos de Contorno (MEC)	3
1.2 - PROBLEMATICA	5
1.3 - OBJETIVO E CONTEÚDO	7
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1 - PROBLEMAS DE POTENCIAL BIDIMENSIONAL	9
2.1.1 - Introdução	9
2.1.2 - Equação integral básica	9
2.1.3 - Solução Fundamental	11
2.1.4 - Equação integral de contorno	12
2.1.5 - Elementos constantes	15
2.1.6 - Avaliação das integrais	16
2.1.7 - Elementos Lineares	18
2.1.8 - Elementos quadráticos	22
2.2 - PROBLEMAS DE ELASTOSTÁTICA LINEAR BIDIMENSIONAL	26
2.2.1 - Introdução	26
2.2.2 - Solução fundamental	27
2.2.3 - Elementos quadráticos	30
3 - DIFERENTES TÉCNICAS DE CÁLCULO NUMÉRICO DE INTEGRAIS SINGULARES NO MEC	34
3.1 - INTRODUÇÃO	34
3.2 - TIPOS DE INTEGRAIS NO MEC	34

3.3 - DESCRIÇÃO DAS TÉCNICAS DE CÁLCULO NUMÉRICO DE INTEGRAIS SINGULARES	35
3.4 - DIFERENTES TÉCNICAS DE CÁLCULO NUMÉRICO DE INTEGRAIS SINGULARES NO MEC	36
3.4.1 - Quadratura Gaussiana Logarítmica Unidimensional, (Stroud e Secrest, 1966)	36
3.4.2 - Métodos de transformação de coordenadas	39
3.4.2.1 - Transformação quadrática, (Weeën, 1982)	40
3.4.2.2 - Transformação cúbica (Telles, 1987)	46
3.4.2.3- Tratamento de integrais quase-singulares	48
3.4.3 - Integração numérica com subdivisão de elementos	51
3.4.3.1 - Integração numérica por subdivisão progressiva elementos, (Mon-Ma et al., 1996).	52
3.4.4 - Técnica de pontos fictícios, (Patterson e Sheikh, 1981)	53
3.4.5 - Método de quadratura específica, (Dumont e de Souza, 1992)	55
3.4.5.1 - Obtenção das abcissas de integração	55
3.4.5.2 - Obtenção de pesos de integração específicos	56
4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS	58
4.1 - INTRODUÇÃO	58
4.2 - METODOLOGIA DAS ANÁLISES	58
4.3 - EXEMPLOS NUMÉRICOS DE POTENCIAL BIDIMENSIONAL	60
4.3.1 - Seção circular sob potencial Laplaciano	60
4.3.2 - Seção elíptica sob potencial Laplaciano	61
4.3.3 - Resultados dos exemplos 4.3.1 e 4.3.2	62
4.3.4 - Barra elíptica sob torção	69
4.3.5 - Resultados do exemplo 4.3.4	70
4.4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS DE ELASTOSTÁTICA BIDIMENSIONAL	72
4.4.1 - Viga em balanço com momento fletor no extremo	72
4.4.2 - Flexão de viga em balanço devido a uma força atuando no extremo	73
4.4.3 - Resultados dos exemplos 4.4.1 e 4.4.2	75
4.4.4 - Placa com furo submetida a tensão uniaxial constante	81
4.4.5 - Resultados do problema 4.4.4	82

5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	85
5.1 - CONCLUSÕES	85
5.2 - SUGESTÕES	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88
ANEXO A - PONTOS DE INTEGRAÇÃO DE QUADRATURAS GAUSSIANAS	91
A.1 - QUADRATURA DE GAUSS NORMAL	91
A.2 - QUADRATURA GAUSSIANA LOGARÍTMICA UNIDIMENSIONAL	91
ANEXO B - EXEMPLOS DE OBTENÇÃO DE PESOS PARA A IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE DUMONT	94
B.1 - INTRODUÇÃO	94
B.2 - EXEMPLO 1	94
B.3 - EXEMPLO 2	96
B.4 - CASO DE PONTO SINGULAR COMPLEXO	96

LISTA DE TABELAS

Tabelas	Página
4.1 - Resultados para problema de potencial atuando em domínio circular	63
4.2 - Resultados para problema de potencial atuando em domínio elíptico	66
4.3 - Resultados para problema de torção de barra de seção elíptica	70
4.4 - Resultados para problema de torção de barra de seção elíptica utilizando quadratura de Gauss simples	72
4.5 - Resultados para problema de viga em balanço com momento fletor no extremo	76
4.6 - Resultados para problema de viga em balanço com força cortante no extremo	78
4.7 - Resultados obtidos para o problema de placa com furo sob tensão uniaxial	82
A.1 - Abcissas e pesos para integração de Gauss unidimensional normal	92
A.2 - Abcissas e pesos para quadratura Gaussiana logarítmica unidimensional	93
B.1 - Abcissas para quadratura específica	95
B.2 - Pesos de quadratura específica com 5 abcissas	95
B.3 - Abcissas e pesos para quadratura específica do exemplo 2	97

LISTA DE FIGURAS

Figuras	Página
1.1 - Classificação dos métodos numéricos em mecânica do contínuo	2
1.2 - Comportamento singular de alguns integrandos no MEC	5
1.3 - Definição geométrica de r no MEC	6
1.4 - Comportamento de integrando quase-singular	6
2.1 - Pontos no contorno para os casos bi e tridimensional, com o domínio aumentado por uma semiesfera ou semicírculo	14
2.2 - Sistema de coordenadas para o elemento constante	17
2.3 - Características do elemento linear	20
2.4 - Elemento quadrático	23
2.5 - Modelo de elementos de contorno	25
3.1 - Sistemas de coordenadas geométricas para aplicação da quadratura Gaussiana unidimensional	37
3.2 - Cálculo da distância mínima desde o ponto singular até o contorno do elemento	49
3.3 - Definição dos parâmetros para o cálculo de r nas integrais normalizadas, mostrando situações típicas $\theta = 0$ e $\theta \neq 0$	49
3.4 - Técnica de pontos fictícios	54
4.1 - Fluxograma dos programas utilizados nas análises	59
4.2 - Seção circular discretizada com 16 elementos de contorno quadráticos	60
4.3 - Solução analítica para o fluxo numa seção circular sob a condição de contorno: $\bar{u} = x + y$	61
4.4 - Seção elíptica discretizada com 16 elementos de contorno quadráticos	61
4.5 - Solução analítica para o fluxo numa seção elíptica sob a condição de contorno: $\bar{u} = x + y$	62
4.6 - Representação gráfica da variação do erro para o problema 4.3.1	64
4.7 - Representação gráfica da variação do erro para o problema 4.3.2	67
4.8 - Resultados dos problemas 4.3.1 e 4.3.2 utilizando quadratura de Gauss simples	68

4.9 - Definição e discretização do problema 4.3.4	70
4.10 - Variação do erro para o problema 4.3.4	71
4.11 - Resultados do problema 4.3.4 utilizando quadratura de Gauss simples	72
4.12 - (a) Viga em balanço com momento fletor no extremo (b) modelo discretizado com 12 elementos de contorno quadráticos	73
4.13 - (a) Viga em balanço com força cisalhante no extremo (b) modelo discretizado com 12 elementos de contorno quadráticos	74
4.14 - Representação gráfica da variação do erro para o problema 4.4.1	77
4.15 - Representação gráfica da variação do erro para o problema 4.4.1	79
4.16 - Resultados dos problemas 4.4.1 e 4.4.2 utilizando quadratura de Gauss simples	80
4.17 - Propriedades geométricas e primeira discretização com elementos de contorno do problema 4.4.3	81
4.18 - Representação gráfica dos resultados do problema 4.4.3	83

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
a, b	: semi-eixos maior e menor de uma elipse
b_i	: forças de volume
c^l	: constante de termo livre
d	: valor da distância a um ponto
D	: distância normalizada ao ponto singular
E	: módulo de elasticidade
G	: módulo de cortante
G_l	: vetor de Galerkin
\mathbf{G}	: matriz de transformação de flexibilidade
$g(\xi)$: parte regular do integrando
g_{ij}	: submatriz de \mathbf{G}
\mathbf{H}	: matriz de incidência cinemática
h_{ij}	: submatriz de \mathbf{H}
I	: momento de inércia
i, j, k	: índices que assumem valores de 1, 2 e 3
l	: comprimento do elemento
J	: jacobiano de transformação
L	: comprimento de viga
M	: momento fletor
m	: parâmetro geométrico progressivo
MDF	: método de diferenças finitas
MEF	: método de elementos finitos
MEC	: método de elementos de contorno
n	: reta normal ao contorno
P	: força cisalhante
$P_n(\xi)$: polinômio de Legendre
q	: fluxo de potencial
q_{nk}	: componentes do tensor de trações de superfície

R	: resíduos da solução aproximada
r	: distância entre o ponto fonte e o ponto campo
sg	: ordem da singularidade
l	: reta tangente ao contorno
\bar{u}, \bar{q}	: valores conhecidos de u e q
u	: potencial
u_{ik}	: componentes do tensor de deslocamentos
u^*, q^*	: soluções fundamentais
v	: deslocamento na direção y
w_i	: pesos de integração
x, y, z	: eixos coordenados
δ_{ij}	: delta de Kronecker
Δ'	: delta de Dirac
ξ	: coordenada natural
$\xi_o, \bar{\xi}$: pontos singulares
∇^2	: operador de Laplace
$\phi(x,y)$: função de deformação
ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3	: funções de forma
ϵ_{ij}	: tensor de deformações
η, γ	: coordenadas de transformação
λ, μ	: constantes de Lamé
λ_i	: polinômio de Lagrange
\prod	: multiplicador de Lagrange
$\bar{\gamma}$: contrapartida transformada do ponto singular
σ_{ij}	: componentes do tensor tensão
σ_o	: tensão uniaxial constante
τ	: tensão de cisalhamento
θ	: ângulo de deformação por unidade de comprimento
$\omega(\xi)$: parte singular do integrando
Ω	: domínio
Γ	: contorno

$\bar{\Gamma}$

: projeção no contorno do ponto singular

ν

: coeficiente de Poisson

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - GENERALIDADES

Sem o uso das técnicas de cálculo numérico, seria quase impossível resolver problemas físicos reais. A complexidade envolvida no tratamento de todos os parâmetros relativos a um problema real força, em muitos casos, ao estudo de problemas equivalentes, matematicamente definidos, mas ainda com solução analítica difícil, ou às vezes, impossível de se obter. As técnicas de cálculo numérico permitem uma solução aproximada destes problemas, resolvendo as equações ou conjunto de equações que descrevem um problema físico.

Em Mecânica do Contínuo, os principais métodos de cálculo numérico podem se classificar em três: Método de Diferenças Finitas (MDF), Método de Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC).

1.1.1 - O Método de Diferenças Finitas (MDF)

O primeiro método aproximado largamente conhecido é o método de diferenças finitas, o qual aproxima as equações governantes usando expansões locais para as variáveis, geralmente séries de Taylor truncadas, de tal maneira que cada termo é expresso como uma proporção de diferenças em alguns pontos selecionados. Estes pontos são localizados nas interseções de uma malha retangular, triangular ou outra malha de referência, chamada malha de diferenças finitas, (Szilard, 1974).

Isto resulta num sistema linear de equações algébricas que fornecem uma solução única, contanto que as condições de contorno do problema em estudo sejam satisfeitas.

O MDF é o mais simples dos três e é relativamente fácil para se programar. Sua principal desvantagem, em problemas práticos de engenharia, é a sua dificuldade para se aplicar em problemas com geometrias irregulares, (Becker, 1992).

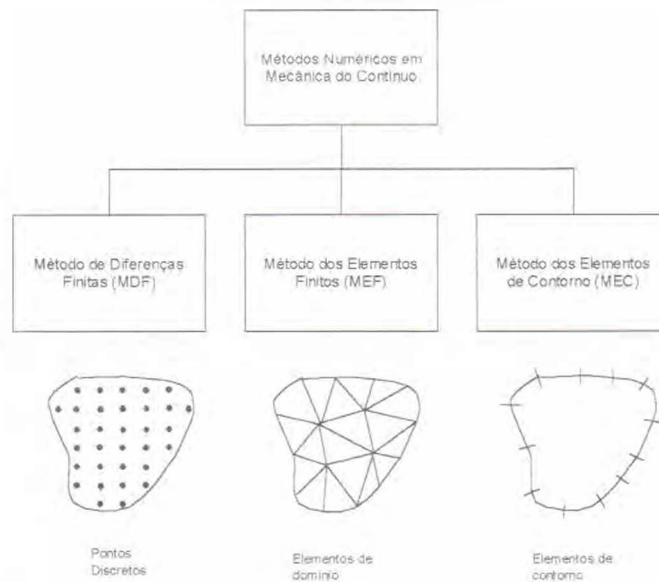


Figura 1. 1 - Classificação dos métodos numéricos em mecânica do contínuo

1.1.2 - O Método de Elementos Finitos (MEF)

Neste método, o domínio em análise é dividido em pequenas “partes” finitas (daí o nome de “elementos finitos”). O comportamento de cada parte ou elemento é descrito pelas equações diferenciais governantes. Todos os elementos finitos são montados juntos e os requerimentos de continuidade e equilíbrio são satisfeitos entre todos os elementos adjacentes.

Uma vez que todas as condições de contorno do problema em estudo sejam satisfeitas, pode-se obter uma solução única do sistema global de equações algébricas (normalmente com matrizes bandas como matrizes de solução).

O MEF é adequado para problemas práticos de engenharia com geometrias complexas, mas para se obter boa precisão, em regiões com variáveis de grandes gradientes, uma grande quantidade de elementos deve ser usada.

1.1.3 - O Método dos Elementos de Contorno (MEC)

O MEC é baseado em formulações integrais das teorias de potencial e de elasticidade que apareceram no final do século dezanove e no começo do século vinte, isto é, mais de cinquenta anos antes das formulações diferenciais destes problemas serem estabelecidas, (Dominguez, 1993). O primeiro trabalho rigoroso de equações integrais foi publicado por Fredholm (1905). Anteriormente Somigliana, em 1889, estabeleceu uma representação em equações integrais para elastostática. Foram necessários cerca de sessenta anos e, o que é mais importante, a aparição dos computadores digitais modernos, para incentivar o desenvolvimento de métodos numéricos baseados nestas formulações clássicas.

A base inicial para a formulação moderna do MEC pode ser achada em três artigos escritos por Jaswon (1963), Jaswon e Ponter (1963) e Symm (1963) para problemas de potencial estáticos e num artigo escrito por Rizzo (1967), para elastostática. Estes artigos usam a chamada formulação direta, exceto o artigo de Symm que utiliza uma formulação semi-indireta. Estas formulações diferem da chamada formulação indireta, em que as incógnitas são as variáveis físicas do problema. Hoje, a formulação direta é usada na grande maioria dos trabalhos de MEC e como tal, será também empregada nesta dissertação. Nestes artigos, a discretização do contorno e a solução numérica de um sistema algébrico de equações integrais foram feitas pela primeira vez. Os trabalhos de Lachat (1975) e Lachat e Watson (1976) representam um importante avanço no desenvolvimento do MEC como uma técnica numérica consistente. Eles incorporaram o uso das funções de forma, largamente utilizadas no MEF, como uma maneira sistemática de representação das variáveis do contorno. A denominação Método dos Elementos de Contorno foi utilizada pela primeira vez em 1977, onde aparece em três publicações: a tese de doutorado de Dominguez (1977) onde o nome aparece em espanhol (*Método de los Elementos de Contorno*), um artigo de um congresso de Banerjee e Butterfield (1977) e num artigo para periódico de Brebbia e Dominguez (1977), onde eles relacionaram o MEC com outras técnicas, introduzindo uma interpretação de resíduos ponderados.

No MEC as equações governantes são escritas em forma integral, e em princípio, para pontos no contorno. Estas equações são numericamente integradas e para se executar esta integração, o contorno é dividido em pequenos segmentos chamados elementos de

contorno.

Como nos outros métodos numéricos, cumpridas as condições de contorno, pode-se obter uma solução de um sistema linear de equações algébricas.

O MEC pode facilmente modelar geometrias de contornos complexos. Além disto, uma vez que todas as aproximações são restritas ao contorno, pode-se modelar regiões com variáveis de rápida variação com maior exatidão que no MEF.

Pode-se resumir as vantagens do MEC sobre o MEF, como segue:

1. Menor quantidade de tempo na preparação de dados. Esta é uma consequência direta da modelagem só do contorno. Esta vantagem é particularmente importante em problemas que precisam de refinamento de malhas ou de contornos móveis.
2. Melhor definição de tensões. As tensões têm uma melhor precisão em pontos internos devido ao fato de que não se empregam aproximações adicionais no seu cálculo, isto é, a solução é exata (e contínua) dentro do domínio.
3. Menor tempo e armazenamento computacional. Para um mesmo nível de precisão, o MEC usa um número menor de nós e elementos (mas com matrizes cheias). Visto que a aproximação nas soluções MEC é restrita ao contorno, as malhas do MEC não devem ser comparadas com malhas de MEF com os pontos internos retirados. Para se obter precisão comparável, as malhas de MEF precisariam de mais subdivisões no contorno do que uma malha equivalente de MEC.
4. Quantidade menor de informação processada. Em muitos problemas de engenharia, as condições mais desfavoráveis (como fratura, concentração de tensões, etc.) usualmente ocorrem na superfície. Em muitas normas de projeto e na engenharia prática, o analista está, usualmente, só preocupado com o que acontece na situação mais desfavorável. Assim, o MEC é mais eficiente na utilização de recursos computacionais devido ao fato de que a solução de pontos internos no MEC é opcional, ou seja, o usuário pode se concentrar somente em regiões particulares sem efetuar cálculos no domínio inteiro.

1.2 - PROBLEMÁTICA

É normalmente aceito que num programa de aplicação geral do MEC, os elementos isoparamétricos (usualmente quadráticos) têm que ser incluídos, tanto para problemas de potencial como para problemas de elasticidade, visto que os elementos constantes e lineares são necessariamente retos. No entanto, a implementação da técnica do MEC precisa, para a criação das matrizes de influência, do cálculo de integrais do tipo $(\ln 1/r)$, $(1/r)$, $(1/r^2)$ e outros susceptíveis a singularidades, figura 1.2. Uma vez que existe a possibilidade de se ter elementos curvos para se integrar, decorre normalmente que a integração analítica é desconsiderada e os códigos atuais de MEC, quase todos, implementam diversos esquemas para o cálculo das integrais acima mencionadas.

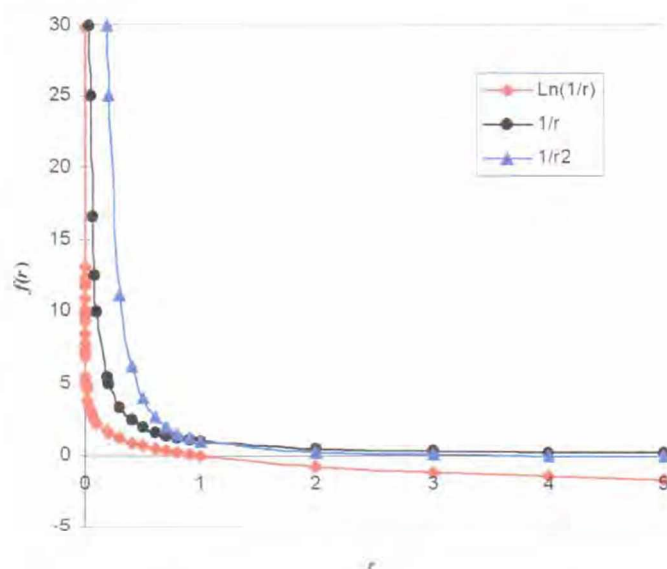


Figura 1.2 - Comportamento singular de alguns integrandos no MEC.

Uma característica destas integrais no caso do MEC é que, sendo r a distância entre o ponto onde a equação está sendo calculada (ponto fonte), e um ponto qualquer no contorno onde os elementos são definidos (ponto campo), r pode tomar efetivamente o valor zero. Isto acontece quando a integração é executada sobre um elemento que contém o ponto para o qual a equação foi escrita, nesse caso, obtém-se uma “integral singular”.

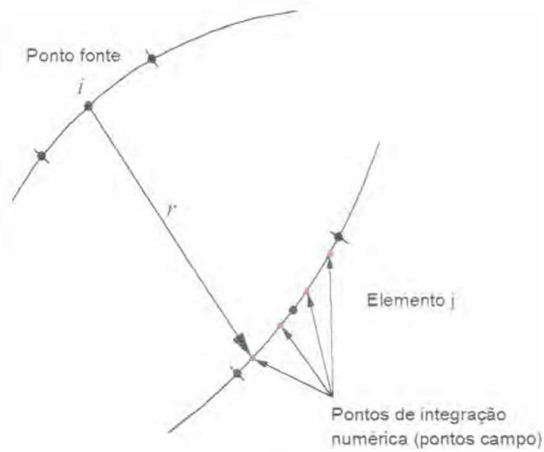


Figura 1.3 - Definição geométrica de r no MEC

Este é o tipo de mais comum de fonte de singularidade. Na literatura são encontradas outras fontes de singularidade que podem ser levadas em conta ou não:

- a) Quando o elemento não contém o ponto singular, mas este fica na vizinhança, ou seja a uma distância pequena do mesmo.
- b) Nós internos na vizinhança do elemento dentro de um raio de influencia da ordem do tamanho do intervalo de integração.

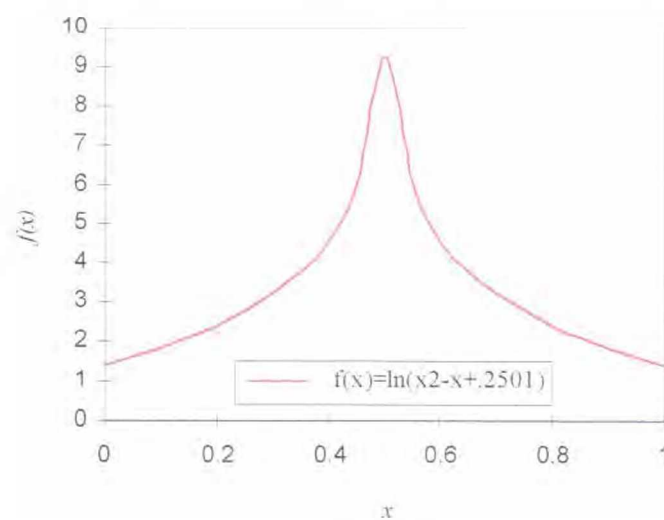


Figura 1.4 - Comportamento de integrando quase-singular

Nestes casos obtêm-se as chamadas integrais “quase-singulares”. Um exemplo do comportamento deste tipo de integrando é mostrado na figura 1.4, (Noronha, 1998).

Considerando estes fatos, muitos trabalhos foram publicados sobre este assunto. As integrais singulares são associadas aos termos na diagonal principal das matrizes. Além disso também é preciso considerar as integrais quase-singulares, já que a exatidão da avaliação destas integrais também é importante para a precisão geral do método.

1.3 - OBJETIVO E CONTEÚDO

Devido à não existência de critérios geralmente aceitos para o cálculo numérico de integrais singulares, torna-se necessário uma avaliação e comparação das diferentes técnicas propostas, para se tentar descobrir as vantagens e desvantagens de cada uma, bem como identificar que técnica é a mais adequada para determinado problema e a sua dificuldade de implementação computacional.

Assim, os diferentes esquemas serão analisados do ponto de vista da exatidão, eficiência e facilidade de implementação em códigos do MEC, numa tentativa de identificar quais dos esquemas são os mais apropriados.

O presente trabalho tentará avaliar estas técnicas em problemas de potencial e elastostática linear bidimensional, considerando diferentes números de pontos de integração e nível de discretização.

No capítulo 2, apresenta-se a revisão bibliográfica contendo os fundamentos do método dos elementos de contorno aplicado a problemas de potencial e problemas de elasticidade linear bidimensional, descrevendo os problemas de integração que aparecem para cada tipo de elemento e problema analisado.

No capítulo 3, descrevem-se em detalhe as diferentes técnicas existentes para o cálculo numérico de integrais singulares e quase singulares no MEC.

No capítulo 4, são apresentados exemplos de aplicação e os resultados obtidos com cada método, assim como as análises comparativas feitas, tanto para problemas de potencial como para problemas de elasticidade linear bidimensional.

Por último, no capítulo 5, estão apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - PROBLEMAS DE POTENCIAL BIDIMENSIONAL

2.1.1 - Introdução

Problemas de potencial são problemas governados por uma equação diferencial do tipo Laplace ou Poisson, esta última formada pelo Laplaciano mais outros termos independentes, os quais têm como incôgnita uma quantia escalar. Exemplos de problemas de potencial são fluxo de fluido ideal, torção de barras, difusão e condução de calor, entre outros.

2.1.2 - Equação integral básica

A equação integral básica de contorno requerida para o método, pode ser obtida de uma forma simples, baseando-se em considerações de resíduos ponderados. A vantagem de se usar resíduos ponderados é a sua generalidade que permite a extensão do método para resolver equações diferenciais parciais mais complexas. Esta abordagem é de fácil compreensão e pode ser utilizada também para relacionar elementos de contorno com outras técnicas, (Brebbia e Dominguez, 1989).

Considere que se procura a solução de uma equação de Laplace num domínio Ω bidimensional

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.1)$$

com as seguintes condições no contorno Γ

- (i) Condições ‘Essenciais’ do tipo $u = \bar{u}$ em Γ_1 (2.2)
- (ii) Condições ‘Naturais’ como $q = \partial u / \partial n = \bar{q}$ em Γ_2

Onde n é a normal ao contorno, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ e as barras indicam que esses valores são conhecidos.

O erro introduzido na equação acima, quando os valores exatos (mas não conhecidos) de u e q são substituídos por uma solução aproximada, pode ser minimizado ponderando esta com uma função de peso u^* , com derivadas no contorno $q^* = \partial u^* / \partial n$.

Em outras palavras, se os R são os resíduos, pode-se escrever em geral que:

$$\begin{aligned} R &= \nabla^2 u \neq 0 \\ R_1 &= u - \bar{u} \neq 0 \\ R_2 &= q - \bar{q} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde u e q são valores aproximados. Aplicando resíduos ponderados à equação (2.3):

$$\int_{\Omega} R u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} R_1 q^* d\Gamma \quad (2.4)$$

ou

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (2.5)$$

Integrando por partes, o lado esquerdo desta equação fornece:

$$-\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right\} d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (2.6)$$

Integrando mais uma vez por partes o termo do lado esquerdo, obtemos:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (2.7)$$

Esta é uma equação importante já que é o ponto inicial para a aplicação do método dos elementos de contorno. O objetivo agora é transformar a equação (2.7) numa equação integral de contorno. Isto é feito utilizando um tipo especial de função de peso u^* chamada solução fundamental.

2.1.3 Solução fundamental

A solução fundamental u^* satisfaz a equação de Poisson, onde o termo adicional é a função Delta de Dirac e representa o campo gerado por um carregamento unitário concentrado, atuando no ponto x^i . O efeito desta carga é propagado desde i até o infinito sem consideração das condições de contorno. Assim pode-se escrever a equação :

$$\nabla^2 u^* + \Delta^i = 0 \quad (2.8)$$

onde Δ^i representa a função Delta de Dirac que tende ao infinito no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^i$ e é igual a zero em qualquer outro ponto. A integral de Δ^i sobre o domínio no entanto é igual a um. O uso da função delta de Dirac é uma forma elegante de representar cargas unitárias como forças concentradas no tratamento de equações diferenciais.

A integral do delta de Dirac multiplicada por qualquer outra função é igual ao valor desta função avaliada no ponto x^i , assim

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Omega} u (-\Delta^i) d\Omega = -u^i \quad (2.9)$$

A equação (2.7) pode ser escrita agora como:

$$u^i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad (2.10)$$

É necessário lembrar que a equação (2.10) refere-se a uma carga concentrada em 'i' e, conseqüentemente, os valores de u^* e q^* correspondem àquela posição particular da carga. Para qualquer outra posição i , no interior do domínio, pode-se achar uma nova equação integral.

Para um meio isotrópico tridimensional, a solução fundamental da equação (2.8) é:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.11)$$

e no caso bidimensional,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.12)$$

onde r é a distância do ponto i de aplicação da função delta até qualquer ponto em consideração.

2.1.4 - Equação integral de contorno

A equação (2.10) é válida para qualquer ponto no domínio Ω . Em elementos de contorno é preferível por razões computacionais, aplicar a equação (2.10) no contorno. Portanto, precisa-se saber o que acontece quando o ponto i está em Γ . Uma maneira simples de se fazer isto é considerando que o ponto i esteja no contorno mas aumentando o domínio por uma semiesfera de raio ε (em 3D) como se mostra na figura 2.1 (para 2D é aplicável o mesmo critério, mas ao invés de uma semiesfera é usado um semicírculo). Considera-se que o ponto i esteja localizado no centro, em seguida calcula-se o limite quando ε tende a zero. Assim, o ponto em estudo tornar-se-á um ponto no contorno e a expressão resultante será a equação (2.10) aplicada no contorno Γ . Isto é aplicável somente para o caso de contornos suaves.

Considerando a equação (2.10) sem levar em conta as condições de contorno, pode-se diferenciar os dois tipos de integrais que aparecem, visto que a solução fundamental e a sua derivada têm comportamentos diferentes, isto é:

$$u^j + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad (2.13)$$

A integral mostrada no lado direito da equação (2.13) é de tratamento relativamente simples, porque apresenta uma singularidade de ordem baixa, isto é, para o caso tridimensional a integral em torno de Γ_ε fornece:

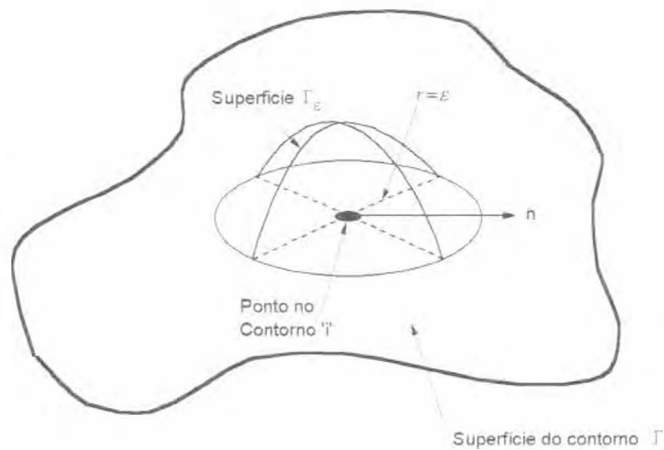
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q u^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{1}{4\pi\varepsilon} d\Gamma \right\} \equiv 0 \quad (2.14)$$

Em outras palavras, nada acontece no lado direito quando as equações (2.10) ou (2.13) são levadas ao contorno. A integral do lado esquerdo se comporta de maneira diferente. Tem-se aqui o resultado em torno de Γ_ε :

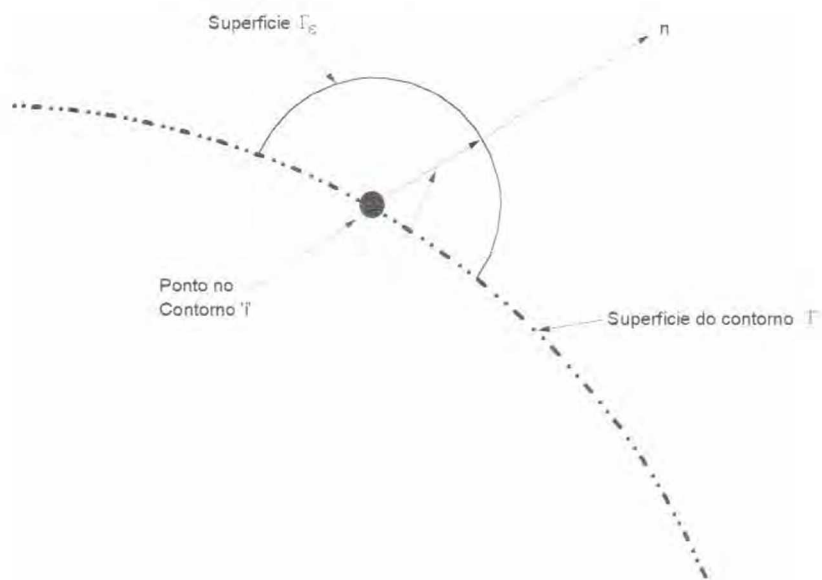
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u q^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} d\Gamma \right\} = -\frac{1}{2} u^j \quad (2.15)$$

A última expressão é chamada de termo livre e é fácil conferir que para o caso bidimensional ocorrerá o mesmo, isto é, a integral do lado direito em torno de Γ_ε é também idêntica a zero e a integral do lado esquerdo será:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u q^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{1}{2\pi\varepsilon} d\Gamma \right\} = -\frac{1}{2} u^j \quad (2.16)$$



(i) Caso tridimensional. Semiesfera em torno a i



(ii) Caso bidimensional em torno a i

Figura 2.1- Pontos no contorno para os casos bi e tridimensional, com o domínio aumentado por uma semiesfera ou semicírculo

Considerando (2.14), (2.15) e (2.16) pode-se escrever a seguinte expressão para problemas bidimensionais ou tridimensionais:

$$\frac{1}{2} u^i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (2.17)$$

onde a integral do lado esquerdo está no sentido do Valor Principal de Cauchy

Esta é a equação integral de contorno geralmente usada como ponto inicial para a aplicação do método dos elementos de contorno.

2.1.5 - Elementos constantes

A expressão (2.17) pode ser discretizada para achar um sistema de equações e obter deste, os valores do contorno. Considere um problema bidimensional, e que o contorno é dividido em N segmentos ou elementos. No caso de elementos constantes, o 'nó' onde são calculadas as variáveis desconhecidas, encontra-se dentro do elemento, como mostrado na figura 2.2.

Os valores de u e q são considerados como constantes sobre cada elemento e igual ao valor no nó na metade do elemento. A equação (2.17) pode ser discretizada para um ponto dado 'i' antes de se aplicar as condições de contorno como segue:

$$\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} uq^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} qu^* d\Gamma \quad (2.18)$$

O ponto i é um dos nós do contorno e Γ_j é o contorno do elemento ' j '. Nota-se que para o elemento constante, o contorno é sempre 'suave', uma vez que o nó está no centro do elemento, portanto o multiplicador de u^i é sempre $1/2$.

Os valores de u e q podem ser tirados fora das integrais já que eles são valores constantes sobre o elemento. Serão chamados u^j e q^j para o elemento ' j '. Portanto:

$$\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (q^* d\Gamma) u^j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (u^* d\Gamma) q^j \quad (2.19)$$

Nota-se que existem agora dois tipos de integrais a ser calculadas sobre os elementos:

$$\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (2.20)$$

Estas integrais relacionam o nó ' i ' onde a solução fundamental está atuando com qualquer outro nó ' j '. Devido a isto é que, às vezes, os resultados são chamados de coeficientes de influência. Eles serão chamados de \hat{H}^{ij} e \hat{G}^{ij} , isto é:

$$\hat{H}^{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma; \quad \hat{G}^{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (2.21)$$

Logo, pode-se escrever para um ponto particular ' i ' :

$$\frac{1}{2} u^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N \hat{G}^{ij} q^j \quad (2.22)$$

A posição de i também pode variar de 1 até N , isto é, considera-se que a solução fundamental esta sendo aplicada sucessivamente em cada nó, então pode-se obter um sistema de equações como resultado da aplicação da equação (2.22) a cada ponto no contorno.

Chamando :

$$H^{ij} = \begin{cases} \hat{H}^{ij} & \text{quando } i \neq j \\ \hat{H}^{ij} + \frac{1}{2} & \text{quando } i = j \end{cases} \quad (2.23)$$

Este conjunto de equações pode ser expresso em forma matricial:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq} \quad (2.24)$$

onde \mathbf{H} e \mathbf{G} são duas matrizes $N \times N$ e \mathbf{u} e \mathbf{q} são vetores de comprimento N .

2.1.6 - Avaliação das integrais

As integrais do tipo de \hat{G}^{ij} e \hat{H}^{ij} nas expressões acima podem ser calculadas usando integração numérica (quadratura de Gauss) para o caso $i \neq j$. Para o caso $i = j$, a presença

nesse elemento da singularidade devida à solução fundamental, em geral, precisa de esquemas de integração mais precisos, motivo do presente trabalho.

Para o caso particular de elementos constantes, as integrais de G^u e \hat{H}^u podem ser calculadas analiticamente, não requerendo tratamento especial. Os termos \hat{H}^u , por exemplo, são iguais a zero, uma vez que a normal e a direção do elemento são sempre perpendiculares.

$$\hat{H}^u = \int_{\Gamma_i} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \equiv 0 \quad (2.25)$$

As integrais G^u precisam de tratamento especial. Para o caso bidimensional tem-se:

$$G^u = \int_{\Gamma_i} u^* d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma \quad (2.26)$$

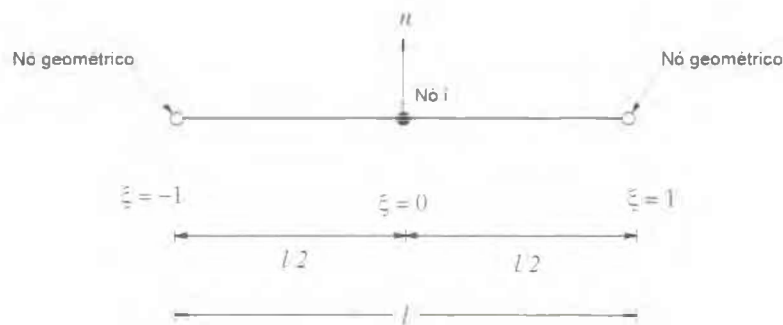


Figura 2.2 - Sistema de coordenadas para o elemento constante

Para integrar facilmente a expressão acima, pode-se mudar as coordenadas usuais para um sistema de coordenadas homogêneas sobre o elemento, como é mostrado na figura 2.2, colocando:

$$r = \left| \xi \frac{l}{2} \right| \quad (2.27)$$

onde l é o comprimento do elemento. Desta forma, levando-se em conta a simetria do elemento pode-se escrever a equação (2.26) como:

$$\begin{aligned}
 G^u &= \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Ponto 1}}^{\text{Ponto 2}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma = \frac{1}{\pi} \int_{\text{Nó 1}}^{\text{Ponto 2}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{l}{2}\right) \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi l/2}\right) d\xi \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{l}{2}\right) \left[\ln\left(\frac{1}{l/2}\right) + \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi \right]
 \end{aligned} \tag{2.28a}$$

O que fornece como resultado analítico final:

$$G^u = \frac{1}{\pi} \left(\frac{l}{2}\right) \left[\ln\left(\frac{1}{l/2}\right) + 1 \right] \tag{2.28b}$$

O elemento constante tem sido utilizado com êxito para a análise de muitos problemas de potencial. Este elemento tem a vantagem de que a constante c é sempre igual a $\frac{1}{2}$, independentemente da geometria do problema considerado. Diferente dos elementos lineares ou quadráticos, a serem considerados a seguir, nos quais esta constante precisa ser calculada sempre. Observa-se que não existem elementos finitos constantes devido a necessidade de derivar as funções de forma neste método.

2.1.7 - Elementos Lineares

Até aqui tem se considerado somente o elemento no qual os valores das variáveis são assumidas como constantes ao longo do comprimento do elemento. Para o caso em que existe uma variação linear de u e q , os nós ficam localizados nos extremos do elemento, figura 2.3. Pode-se escrever a equação (2.17) como segue:

$$c^t u^t + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \tag{2.29}$$

Nota-se que o coeficiente $\frac{1}{2}$ de u' foi substituído por um valor desconhecido c' . Isto é, $c' = 1/2$ somente é aplicável a contornos suaves. Pode-se mostrar que o valor de c' para qualquer outro tipo de contorno é:

$$c' = \frac{\theta}{2\pi} \quad (2.30)$$

onde θ é o ângulo interno em radianos.

Depois da discretização, a equação (2.29) pode ser escrita como:

$$c' u' + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma \quad (2.31)$$

As integrais nesta equação são mais difíceis de avaliar do que aquelas para elementos constantes, uma vez que u e q variam linearmente sobre cada contorno Γ_j e, em consequência, não é possível tirá-las fora da integral.

Pode-se definir os valores de u e q em qualquer ponto do elemento em termos dos valores nodais e das funções de interpolação lineares ϕ_1 e ϕ_2 , as quais são dadas em termos da coordenada homogênea ξ como mostrado na figura 2.3, isto é:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \phi_1 u^1 + \phi_2 u^2 = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \\ q(\xi) &= \phi_1 q^1 + \phi_2 q^2 = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde ξ é a coordenada adimensional que, de modo geral, varia de -1 até +1 e as duas funções de interpolação são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi); \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (2.33)$$

Considere agora as integrais sobre um elemento 'j'. Pode-se escrever o lado direito como

$$\int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \phi_2] q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} = [h_1^{ij} h_2^{ij}] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

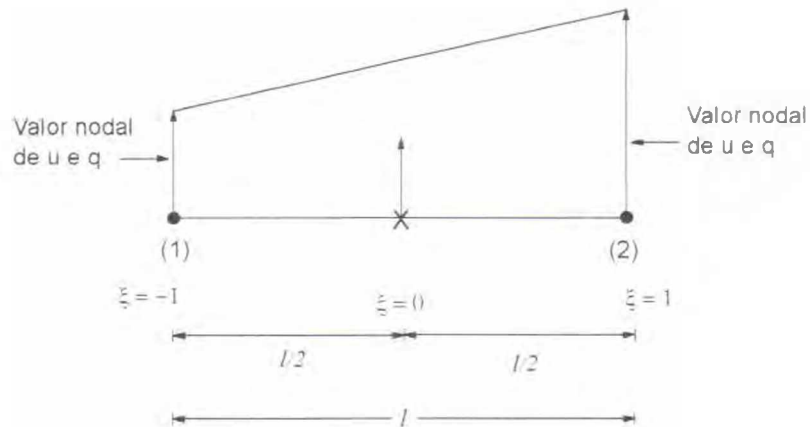


Figura 2.3 - Características do elemento linear

onde para cada elemento 'j' temos dois termos,

$$h_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma \quad (2.35)$$

e

$$h_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma \quad (2.36)$$

Similarmente as integrais no lado direito fornecem:

$$\int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \phi_2] u^* d\Gamma \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} = [g_1^{ij} g_2^{ij}] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

onde

$$g_1^{ii} = \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma \quad (2.38)$$

e

$$g_2^{ii} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma \quad (2.39)$$

Similarmente ao caso dos elementos constantes estas integrais, embora sejam mais complexas para o caso $i \neq j$, podem ser avaliadas utilizando integração de Gauss simples. Já para o caso de $i = j$, no caso da matriz \mathbf{G} os coeficientes podem ser avaliados analiticamente como segue.

Considerando que a solução fundamental está atuando no nó 1, figura 2.3, pode-se escrever o raio r em termos da coordenada homogênea ξ .

$$r = \left| \frac{1 + \xi}{2} l \right| \quad (2.40)$$

Logo substituindo a equação acima, as funções de forma e o valor da solução fundamental nas equações (2.38) e (2.39), obtêm-se:

$$g_1^{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 - \xi) \ln \left(\frac{2}{(1 + \xi)l} \right) \frac{l}{2} d\xi \quad (2.41)$$

$$g_2^{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 + \xi) \ln \left(\frac{2}{(1 + \xi)l} \right) \frac{l}{2} d\xi$$

Estas integrais são facilmente avaliáveis de forma analítica, fornecendo:

$$g_1^{ii} = \frac{l}{2} [1.5 - \ln(l)] \quad (2.42)$$

$$g_2^{ii} = \frac{l}{2} [0.5 - \ln(l)]$$

Para o caso da matriz \mathbf{H} , pode-se calcular os termos da diagonal implicitamente. Assumindo um potencial constante sobre todo o contorno, o fluxo deve ser igual a zero e portanto:

$$\mathbf{H}\mathbf{i} = 0 \quad (2.43)$$

onde \mathbf{i} é um vetor que para todos os nós tem um potencial unitário. Uma vez que a equação (2.43) tem que ser satisfeita, obtém-se:

$$H^i = -\sum_{j=1}^N H^{ij} \quad (\text{para } j \neq i) \quad (2.44)$$

o que fornece os coeficientes da diagonal em termos do resto dos termos da matriz \mathbf{H} .

2.1.8 - Elementos quadráticos

Considere o contorno curvo da figura 2.4 onde Γ é definido ao longo do contorno e o vetor de posição é função do sistema de coordenadas cartesianas. Pode-se escrever as variáveis u e q em termos das funções de interpolação sendo estas, funções da coordenada homogênea ξ , isto é:

$$u(\xi) = \phi_1 u^1 + \phi_2 u^2 + \phi_3 u^3 = [\phi_1 \phi_2 \phi_3] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q^1 + \phi_2 q^2 + \phi_3 q^3 = [\phi_1 \phi_2 \phi_3] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

onde as funções de interpolação são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \quad \phi_2 = (1 - \xi^2), \quad \phi_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (2.47)$$

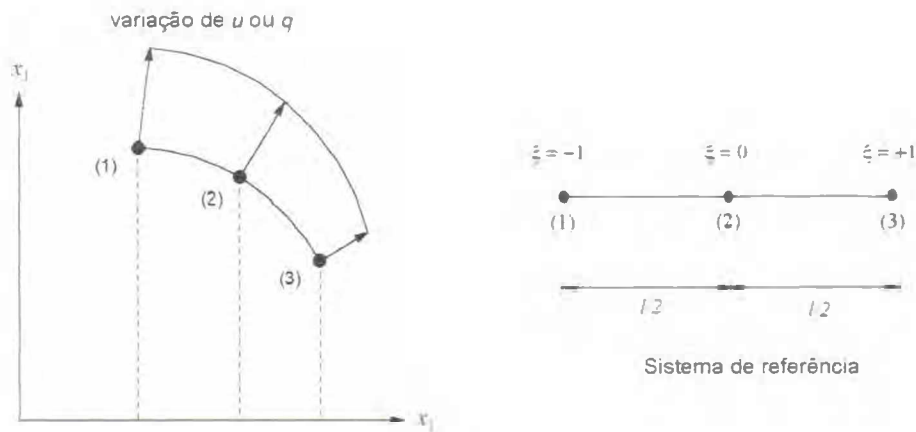


Figura 2.4 - Elemento quadrático

As integrais ao longo de um elemento quadrático são similares àquelas calculadas para o elemento linear, mas agora existem três incógnitas nodais. Considere, por exemplo, a integral para os termos da matriz \mathbf{H} :

$$\int_{\Gamma_j} u(\xi) q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \phi_2 \phi_3] q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{Bmatrix} = [h_1^{ij} h_2^{ij} h_3^{ij}] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

onde:

$$h_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma; \quad h_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma; \quad h_3^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_3 q^* d\Gamma \quad (2.49)$$

A avaliação destas integrais precisa do cálculo de um Jacobiano, uma vez que as funções ϕ_i estão expressas em termos de ξ , mas as integrais são função de Γ . Para uma curva como a da figura 2.4, a transformação é simples:

$$d\Gamma = \left\{ \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2} \right\} d\xi = |J| d\xi \quad (2.50)$$

onde $|J|$ é o Jacobiano. Nota-se que para calcular o valor do Jacobiano $|J|$ precisa-se saber a variação das coordenadas x_1 e x_2 em termos de ξ . Isto pode ser feito definindo a geometria do elemento na mesma forma que as variáveis u e q são definidas, isto é usando funções de interpolação quadrática

$$\begin{aligned}x &= \phi_1 x^1 + \phi_2 x^2 + \phi_3 x^3 \\y &= \phi_1 y^1 + \phi_2 y^2 + \phi_3 y^3\end{aligned}\tag{2.51}$$

Os números sobrescritos indicam o número do nó. Este é o conceito de elemento isoparamétrico.

Portanto, pode-se escrever:

$$h_k^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_k(\xi) q^* d\Gamma = \int_{\text{No 1}}^{\text{No 2}} \phi_k(\xi) q^* |J| d\xi\tag{2.52}$$

Equações do tipo da equação (2.52) são geralmente muito difíceis de integrar analiticamente e a integração numérica deve ser usada em todos os casos.

Para ilustrar este problema, será simulada a obtenção dos coeficientes para um dos elementos da matriz \mathbf{G} , para o problema mostrado na figura 2.5. Considerando que:

$$\int_{\Gamma_j} q(\xi) u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \phi_2 \phi_3] u^* d\Gamma \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{Bmatrix} = [g_1^{ij} \ g_2^{ij} \ g_3^{ij}] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{Bmatrix}\tag{2.53}$$

onde:

$$g_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma; \quad g_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma; \quad g_3^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_3 u^* d\Gamma\tag{2.54}$$

Calcula-se a integral g_1^{23} , figura 2.5, que relaciona a solução fundamental atuando no nó 2 e o elemento número 3, formado pelos nós 5-6-7. Incluindo o jacobiano da transformação:

$$g_1^{23} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \xi(\xi - 1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) |J| d\xi \quad (2.55)$$

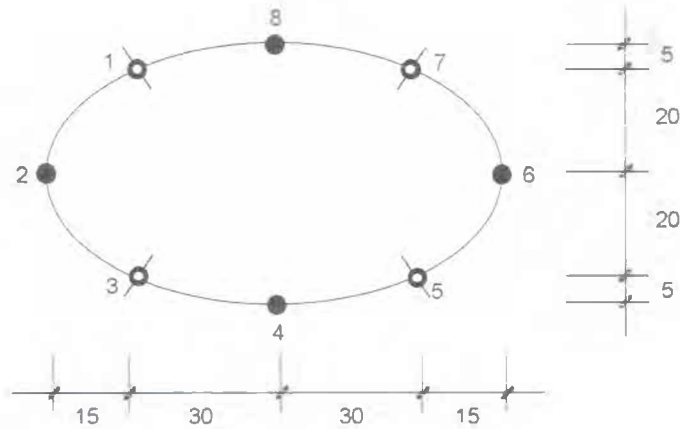


Figura 2.5 - Modelo de elementos de contorno

Considerando que:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= x^5 \phi_1 + x^6 \phi_2 + x^7 \phi_3 \\ y(\xi) &= y^5 \phi_1 + y^6 \phi_2 + y^7 \phi_3 \end{aligned} \quad (2.56)$$

e

$$r = \sqrt{[x^2 - x(\xi)]^2 + [y^2 - y(\xi)]^2} \quad (2.57)$$

substituindo os valores da geometria do problema, obtém-se:

$$r = 5\sqrt{1189\xi^4 + 80\xi^3 - 1372\xi^2 - 80\xi + 424} \quad (2.58)$$

Agora calculando o Jacobiano segundo (2.50) e substituindo os valores de $x(\xi)$ e $y(\xi)$, derivando efetuando simplificações, obtém-se:

$$J = \sqrt{[\xi(x_5 - 2x_6 + x_7) + (x_7 - x_5)]^2 + [\xi(y_5 - 2y_6 + y_7) + (y_7 - y_5)]^2} \quad (2.59)$$

Substituindo os valores da geometria, obtém-se:

$$J = \sqrt{1600 + 900\xi^2} \quad (2.60)$$

Finalmente colocando todos estes valores na equação (2.55) a seguinte expressão é obtida:

$$g_1^{23} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \xi(\xi - 1) \ln \left(\frac{1}{5\sqrt{1189\xi^4 + 80\xi^3 - 1372\xi^2 - 80\xi + 424}} \right) \sqrt{1600 + 900\xi^2} d\xi \quad (2.61)$$

Integral que não possui solução analítica. No caso do elemento incluindo o nó fonte, existe singularidade logarítmica. Técnicas para o cálculo de expressões deste tipo serão consideradas no próximo capítulo.

Similarmente ao caso de elementos lineares, o cálculo dos termos da diagonal da matriz **H**, pode ser feito implicitamente, em outras palavras, a equação (2.44) é válida também para elementos quadráticos.

2.2 - PROBLEMAS DE ELASTOSTÁTICA LINEAR BIDIMENSIONAL

2.2.1 - Introdução

Este tipo de problemas se dividem em dois: estado plano de tensões e estado plano de deformações, dependendo de como o sólido esteja restrito na direção perpendicular ao plano em estudo. Este tipo de problemas, desde o ponto de vista da discretização, apresentam as mesmas características que os problemas de potencial.

Nesta seção, somente o elemento quadrático será considerado, isto devido a duas razões: primeiro, para problemas de elastostática bidimensional as considerações feitas para a teoria de potencial mantêm validade, ou seja, somente os elementos quadráticos são os que apresentam problemas de singularidade que precisam de tratamento especial. Segundo, embora os elementos constantes e lineares sejam utilizados com sucesso para resolver alguns problemas de elasticidade, estes têm limitações, a mais importante delas é a sua dificuldade para modelar geometrias curvas, além disso, problemas que envolvem flexão precisam do uso de elementos de ordem maior devido ao fato de que as deformações deste tipo são de difícil representação usando elementos lineares e os elementos constantes fornecem resultados pouco satisfatórios, (Brebbia e Dominguez, 1989).

2.2.2 - Solução fundamental

A formulação das equações integrais de contorno para elastostática, descritas na seção 2.2.3, necessita do conhecimento de uma solução para problemas de elasticidade que considere as mesmas propriedades do material do corpo em estudo, mas aplicados num domínio infinito onde atua um carregamento unitário pontual. Esta é a chamada solução fundamental de elastostática, chamada também solução de Kelvin.

Para a obtenção desta solução precisa-se das equações básicas de elasticidade linear dadas abaixo utilizando-se notação indicial:

a) Equações de equilíbrio (3 equações)

$$\sigma_{i,j,j} + b_i = 0 \quad (2.62)$$

b) Equações constitutivas (6 equações)

$$\sigma_{i,j} = \lambda \delta_{i,j} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{i,j} \quad (2.63)$$

c) Equações de compatibilidade (6 equações)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.64)$$

Sendo

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.65)$$

onde σ representa as tensões, b as forças de corpo, ε as deformações, u os deslocamentos, E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

Substituindo as equações constitutivas (2.63) nas equações de equilíbrio (2.62) obtém-se:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + \varepsilon_{ij} \right] \quad (2.66)$$

Similarmente, substituindo as equações de compatibilidade (2.64)

$$\left(\frac{1}{1 - 2\nu} \right) u_{i,jl} + u_{l,ji} + \frac{1}{\mu} b_l = 0 \quad (2.67)$$

obtém-se as equações de Navier ou equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos. As equações de Navier representam três equações e três incógnitas, mas estas equações estão acopladas, o que significa que para se obter uma incógnita, precisa-se conhecer outra.

A solução de Kelvin é obtida da equação (2.67) quando uma carga unitária é aplicada num ponto 'i' na direção do vetor unitário e_i , isto é:

$$b_l = \Delta' e_l \quad (2.68)$$

Para desacoplar as equações de Navier utiliza-se o vetor de Galerkin, G , de tal forma que:

$$u_i = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,mm} \quad (2.69)$$

A substituição das equações (2.68) e (2.69) na equação (2.67) fornece

$$G_{i,mm} + \frac{1}{\mu} \Delta' e_i = 0 \quad (2.70)$$

ou

$$\nabla^2 (\nabla^2 G_i) + \frac{1}{\mu} \Delta' e_i = 0 \quad (2.71)$$

Esta equação pode ser escrita tanto para o estado tridimensional como para o estado bidimensional de deformações:

$$\nabla^2 (F_i) + \frac{1}{\mu} \Delta' e_i = 0 \quad (2.72)$$

onde

$$F_i = \nabla^2 G_i \quad (2.73)$$

Observe que a equação (2.72) é similar a equação (2.8) de onde a solução fundamental para problemas de potencial foi obtida. A solução da equação (2.72) fornece:

$$F_i = \frac{1}{4\pi r \mu} e_i \quad (2.74)$$

Para o caso bidimensional, obtém-se:

$$F_i = \frac{1}{2\pi \mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_i \quad (2.75)$$

Fazendo substituições sucessivas destas soluções nas equações anteriores e aplicando as propriedades do vetor de Galerkin, chega-se à forma final da solução fundamental ou de Kelvin para problemas tridimensionais

$$u^*_{lk} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (2.76)$$

e para o estado plano de deformações:

$$u^*_{lk} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (2.77)$$

Com os valores das soluções fundamentais em deslocamentos u_{lk} , tanto para o caso tridimensional como para o bidimensional, pode-se calcular os valores das deformações, e depois, através da Lei de Hooke pode-se determinar as tensões. Finalmente com estas pode-se determinar as componentes de tração. Para o caso tridimensional, tem-se

$$p^*_{lk} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\delta_{lk} + 3\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_l} \right\} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_l} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l \right) \right] \quad (2.78)$$

e para o estado plano de deformações

$$p^*_{lk} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\delta_{lk} + 2\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_l} \right\} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_l} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l \right) \right] \quad (2.79)$$

2.2.3 - Elementos quadráticos

A equação integral de contorno para elastostática linear bidimensional é baseada na identidade Somigliana :

$$u^i_{lk} + \int_{\Gamma} p^*_{lk} u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*_k p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u^*_k b_k d\Omega \quad (2.80)$$

que fornece o valor do deslocamento em qualquer ponto interno do domínio em função dos valores no contorno u_k e p_k , das forças de volume e da solução fundamental. Na última integral, Ω é o domínio e h_i são as forças de volume. Este termo não será considerado no presente trabalho.

O mais simples e mais versátil tipo de elemento de contorno curvo é o quadrático, para o qual os deslocamentos e as trações de superfície podem ser representadas como

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi u^j \quad (2.81)$$

$$p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi p^j \quad (2.82)$$

onde ϕ_i são as funções de interpolação quadrática definidas em (2.47).

A geometria do elemento pode ser considerada como quadrática e é representada pelas coordenadas dos nós e pelas mesmas funções de interpolação ϕ_i utilizadas para as componentes de deslocamento e trações de superfície, isto é:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^1 \\ y^1 \\ x^2 \\ y^2 \\ x^3 \\ y^3 \end{Bmatrix} = \Phi x^j \quad (2.83)$$

Para um ponto no contorno, tem-se

$$c_{lk}^i u_{lk}^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma \quad (2.84)$$

Após a discretização, a equação integral de contorno pode ser escrita como

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (2.85)$$

onde NE é o número de elementos.

As integrais ao longo do $d\Gamma$ precisam ser transformadas para sistema de coordenadas homogêneas, como foi feito para problemas de potencial. Assim, as integrais sobre os elementos em (2.85) ficam

$$H = \int_{-1}^1 \mathbf{p}^* \Phi |J| d\xi \quad G = \int_{-1}^1 \mathbf{u}^* \Phi |J| d\xi \quad (2.86)$$

onde $|J|$ é o Jacobiano. Os termos $\ln(1/r)$ e $(1/r)$ nos tensores u_{lk}^* e p_{lk}^* , equações (2.77) e (2.79), geram singularidade quando r é muito pequeno ou tende a ser zero. Este caso aparece no cálculo dos termos da diagonal da matriz \mathbf{G} , onde se aplica as técnicas consideradas no presente trabalho.

No caso das submatrizes da diagonal \mathbf{H}^{ii} em \mathbf{H} , estas incluem os termos em $\hat{\mathbf{H}}^{ii}$ e c^i , as dificuldades aparecem quando se tenta calcular estes termos, particularmente nos cantos devido à singularidade da solução fundamental. Pode-se calcular indiretamente estes termos assumindo um deslocamento de corpo rígido na direção de uma das coordenadas cartesianas, logo os vetores de trações de superfícies e de forças de corpo devem ser nulos, e portanto:

$$\mathbf{H} \mathbf{1}^q = \mathbf{0} \quad (2.87)$$

onde \mathbf{I}^q é um vetor que para todos os nós tem um deslocamento unitário na direção ‘ q ’ ($q = 1, 2$ ou 3) e um deslocamento igual a zero em qualquer outra direção. Uma vez que a equação (2.87) tem que ser satisfeita para qualquer deslocamento de corpo rígido, podemos escrever:

$$\mathbf{H}^i = -\sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \quad (\text{para } j \neq i) \quad (2.88)$$

o que fornece as submatrizes da diagonal em termos do resto de termos da matriz \mathbf{H} .

Similarmente, para regiões infinitas ou semi-infinitas, a equação (2.88) tem que ser modificada. As submatrizes da diagonal para este caso são:

$$\mathbf{H}^i = \mathbf{I} - \sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \quad (\text{para } j \neq i) \quad (2.89)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade 3×3 ou 2×2 (para o caso bidimensional).

No próximo capítulo são consideradas as técnicas de cálculo numérico para integrais singulares.

CAPÍTULO 3

DIFERENTES TÉCNICAS DE CÁLCULO NUMÉRICO DE INTEGRAIS SINGULARES NO MEC

3.1 - INTRODUÇÃO

Uma técnica efetiva para o tratamento de integrais singulares e quase-singulares é um fator crítico para se obter uma análise eficiente e precisa, usando elementos de contorno. Assim, muitos artigos foram publicados e várias técnicas foram sugeridas com diferentes graus de sucesso. Em seguida, será feita uma descrição dos tipos de integrais que se apresentam no MEC, assim como a descrição e discussão dos métodos e técnicas propostas para lidar com as mesmas.

3.2 - TIPOS DE INTEGRAIS NO MEC

Matematicamente falando, é conhecido que existem três tipos de integrais singulares na análise por elementos de contorno: de singularidade fraca, singularidade de valor principal de Cauchy (VPC) e integrais hipersingulares (Huang e Cruse, 1993). Devido à singularidade da função a se integrar (sem definição no ponto singular), uma pequena região - a vizinhança do ponto singular - deve ser excluída do domínio de integração, logo o limite é tomado quando o volume da pequena região tende a zero. Se este limite existe e é independente da forma da vizinhança, a integral singular é chamada de fracamente singular. Se este limite existe somente se a forma da vizinhança é uma esfera, então é chamada de singularidade de VPC. Uma singularidade maior que a VPC, é chamada de hipersingularidade. Levando-se em conta a localização do ponto singular, pode-se distinguir dois tipos de integrais: singular quando o ponto singular está dentro dos limites de integração, e quase-singular quando o integrando tende ao infinito num ponto fora dos limites de integração, mas suficientemente perto para influenciar no cálculo da integral.

Devido à natureza singular destas integrais, estas não podem ser avaliadas através de sistemas de integração convencionais (quadratura de Gauss, por exemplo), precisando de um tratamento especial como será visto em seguida.

3.3 - DESCRIÇÃO DAS TÉCNICAS DE CÁLCULO NUMÉRICO DE INTEGRAIS SINGULARES

Segundo Noronha (1998), uma técnica numérica ideal para avaliar integrais singulares ou quase-singulares é aquela que melhor satisfaz os seguintes critérios:

1. boa precisão numérica
2. baixo esforço computacional
3. aplicabilidade geral
4. facilidade de implementação

Diferentes pesquisadores tem tentado satisfazer os requisitos apresentados acima, sugerindo diversos esquemas de integração, os quais se encaixam de forma simplificada nas seguintes categorias:

- subdivisão do intervalo de integração
- regularização da integral através de soma e subtração de termos no integrando
- regularização da integral através de transformação de coordenadas
- quadraturas específicas

Destas, a primeira trata o problema de maneira indireta, avaliando as integrais através de esquemas normais de integração. As outras são formas diretas de avaliação de integrais, ou seja, consideram tanto as fontes de singularidade como o intervalo de integração como um problema unitário.

A técnica de regularização através de soma e subtração de termos no integrando, pode avaliar alguns tipos de integrais de forma eficiente. A técnica de regularização através de transformação de coordenadas tenta regularizar a função singular através das propriedades do jacobiano de transformação.

Além das técnicas apresentadas anteriormente, existem também outras formas de avaliação indireta de integrais, por exemplo, através das propriedades das matrizes do MEC (como foi mostrado no capítulo anterior para o caso da matriz **H**) e a técnica de pontos fictícios.

3.4 - DIFERENTES TÉCNICAS DE CÁLCULO NUMÉRICO DE INTEGRAIS SINGULARES NO MEC

3.4.1 - Quadratura Gaussiana Logarítmica Unidimensional. (Stroud e Secrest, 1966)

Os termos que incluem uma singularidade logarítmica num dos extremos do domínio de integração podem ser integrados utilizando a seguinte fórmula:

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i \quad (3.1)$$

onde os pontos de integração são calculados como raízes dos polinômios que satisfazem a relação recursiva seguinte:

$$P_n(x) = [x - b_n]P_{n-1}(x) - c_n P_{n-2}(x) \quad (3.2)$$

Este é um dos métodos clássicos para o cálculo de singularidades logarítmicas, utilizado no primeiro livro sobre elementos de contorno (Brebbia, 1978)

Para a implementação deste método num código de MEC, após de fazer a transformação de coordenadas x, y à coordenada normalizada ξ , tem-se que considerar três casos de acordo com a posição do ponto singular, figura 3.1:

a) Ponto singular no nó 1.

Para o cálculo da integral singular utilizando a equação (3.1) precisa-se da transformação dos limites de integração, para fazer isto realiza-se a seguinte mudança de variável:

$$\eta = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.3)$$

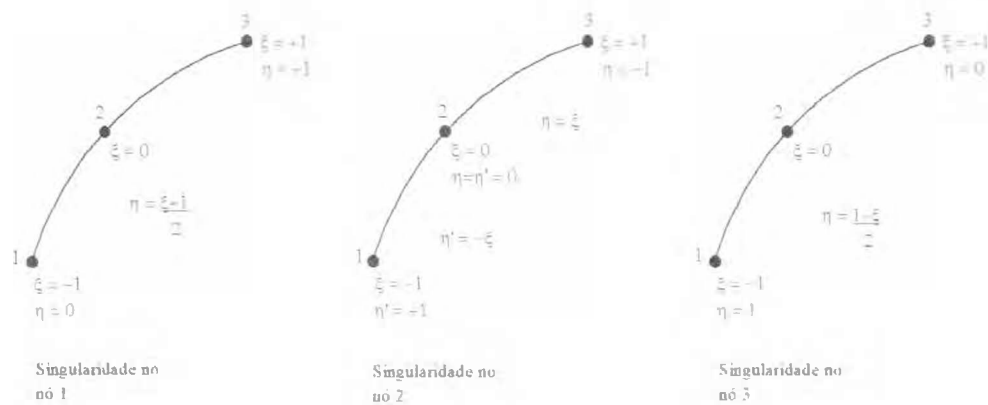


Figura 3.1 - Sistemas de coordenadas geométricas para aplicação da quadratura Gaussiana unidimensional

b) Ponto singular no nó 2.

Neste caso para calcular a integral sobre o elemento precisa-se dividi-la em duas partes da seguinte maneira:

$$\int_{(1)}^{(3)} \phi u^* |J| d\xi = \int_{(1)}^{(2)} \phi u^* |J| d\xi + \int_{(2)}^{(3)} \phi u^* |J| d\xi \quad (3.4)$$

para a primeira integral a mudança de variável é $\eta' = -\xi$, e para a segunda $\eta = \xi$.

c) Ponto singular no nó 3.

Este caso é similar ao primeiro, ficando a variável de integração logarítmica:

$$\eta = \frac{1 - \xi}{2} \quad (3.5)$$

Em todos os casos mostrados acima tem que se calcular um jacobiano adicional para cada uma das transformações descritas.

Em seguida descreve-se em detalhe o procedimento para dividir o integrando numa parte singular e outra não singular. Examinando a solução fundamental é claro que o termo singular é $\ln(1/r)$. Assim a definição formal de r é:

$$r = \sqrt{(x_c - x_f)^2 + (y_c - y_f)^2} \quad (3.6)$$

onde:

x_c, y_c = Coordenadas do ponto campo

x_f, y_f = Coordenadas do ponto fonte

a) Ponto singular no nó 1.

Neste caso pode-se escrever a equação (3.6) como segue:

$$r^2 = [x(\xi) - x^1]^2 + [y(\xi) - y^1]^2 \quad (3.7)$$

Substituindo o valor de $x(\xi)$ e $y(\xi)$ de acordo com (2.51) e (2.47) obtém-se:

$$\begin{aligned} r^2 = & \left[\frac{-\xi}{2}(1-\xi)x^1 + (1+\xi)(1-\xi)x^2 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)x^3 - x^1 \right]^2 \\ & + \left[\frac{-\xi}{2}(1-\xi)y^1 + (1+\xi)(1-\xi)y^2 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)y^3 - y^1 \right]^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Rearranjando a equação anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} r^2 = & \left[\frac{1}{2}(1+\xi) \right]^2 \left[(\xi-2)x^1 + 2(1-\xi)x^2 + \xi x^3 \right]^2 \\ & + \left[\frac{1}{2}(1+\xi) \right]^2 \left[(\xi-2)y^1 + 2(1-\xi)y^2 + \xi y^3 \right]^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

b) Ponto singular no nó 2.

Repetindo o procedimento anterior para este caso, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} r^2 = & \xi^2 \left[\frac{1}{2}(\xi-1)x^1 + \xi x^2 + \frac{1}{2}(1+\xi)x^3 \right]^2 \\ & + \xi^2 \left[\frac{1}{2}(\xi-1)y^1 + \xi y^2 + \frac{1}{2}(1+\xi)y^3 \right]^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

c) Finalmente quando o ponto singular está no nó 3:

$$r^2 = \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \right]^2 \left[-\xi x^1 + 2(1+\xi)x^2 - (\xi+2)x^3 \right]^2 + \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \right]^2 \left[-\xi y^1 + 2(1+\xi)y^2 - (\xi+2)y^3 \right]^2 \quad (3.11)$$

logo, pode-se escrever uma expressão geral para os termos logarítmicos da seguinte maneira:

$$\ln \left[\frac{1}{r} \right] = \ln \left[\frac{1}{\eta \sqrt{f_x(\xi)^2 + f_y(\xi)^2}} \right] \quad (3.12)$$

$$= \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) - \frac{1}{2} \ln \left[f_x(\xi)^2 + f_y(\xi)^2 \right]$$

onde η é a variável que transforma os limites de integração de $[-1,+1]$ a $[0,+1]$ e muda de valor de acordo com a posição do ponto singular, e o segundo termo do lado direito de (3.12) é regular.

3.4.2 - Métodos de transformação de coordenadas

Os métodos de transformação utilizam transformações não lineares de coordenadas para forçar o Jacobiano $|J|$ a se anular no ponto singular, uma vez feito isto, a quadratura Gaussiana normal é utilizada. Estes métodos podem ser utilizados somente para a avaliação de integrais impróprias e quase-singulares. Para o caso de integrais singulares, a regularização é obviamente um procedimento impossível, pois as mesmas não se comportam como as integrais regulares.

Para esclarecer este ponto, considere a seguinte integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (3.13)$$

Introduzindo a seguinte transformação $x = y^2$, $dx = 2ydy$, cujo jacobiano de transformação tende a zero no ponto singular $x = y = 0$, esta integral singular pode ser convertida numa regular. Assim

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{y} 2y dy = \int_0^1 2 dy = 2 \quad (3.14)$$

No entanto, para a integral singular

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad (3.15)$$

não existe transformação que permita remover a singularidade. Inclusive se a transformação $x = y^n$ na qual o jacobiano é ny^{n-1} , é substituída na integral original.

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{y^n} ny^{n-1} dy = \int_0^1 \frac{n}{y} dy \quad (3.16)$$

pode-se observar que a integral mantém o mesmo grau de singularidade que a integral original.

Se existe uma transformação que permita uma transformação de um intervalo finito a outro intervalo finito e cancele qualquer ordem de singularidade, estaremos em condições de obter o resultado numérico de uma integral que é divergente, o qual é contrário à lógica das matemáticas (Huang e Cruse, 1993).

3.4.2.1 - Transformação quadrática (Weeën, 1982)

A transformação quadrática foi proposta, no contexto da aplicação do método das equações integrais no contorno (*boundary integral equation method*) ao modelo de placas de Reissner, por Weeën (1982), mas ficou melhor conhecida pelo trabalho de Telles (1987) pelo que também é conhecida como transformação quadrática de Telles.

Em seguida descreveremos em detalhe esta transformação.

Considere a integral:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (3.17)$$

onde $f(\xi)$ é singular no ponto $\bar{\xi}$, $-1 \leq \bar{\xi} \leq +1$. Utilizando uma relação de segundo grau,

$$\xi(\gamma) = a\gamma^2 + b\gamma + c \quad (3.18)$$

sujeita as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\gamma} \Big|_{\bar{\xi}} &= 0 \\ \xi(1) &= 1 \\ \xi(-1) &= -1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

a derivada desta expressão em relação a γ é igual a zero no ponto onde ocorre a singularidade.

Isso produz um mapeamento onde os novos pontos de integração ξ são concentrados em torno da singularidade.

Neste caso, não é necessário isolar a parcela onde há singularidade e integrá-la separadamente, como ocorre quando se utiliza funções de peso logarítmicas. Ao contrário, essas parcelas são integradas juntamente com as demais (Karam, 1986).

Resolvendo a equação (3.18) para γ , obtém-se, para cada valor de ξ , dois valores de γ , isto é:

$$\gamma' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - \bar{\xi})}}{2a} \quad (3.20)$$

$$\gamma'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c - \bar{\xi})}}{2a}$$

Das condições (3.19), tem-se:

$$2a + \bar{\gamma} + b = 0 \quad (3.21)$$

no ponto singular $\bar{\xi}$

$$a + b + c = 1 \quad (3.22)$$

$$a - b + c = -1$$

As equações (3.22) fornecem :

$$b = 1 \quad (3.23)$$

$$a = -c$$

Utilizando γ' ou γ'' , tem-se:

$$b^2 - 4a(c - \bar{\xi}) = 0 \quad (3.24)$$

ou substituindo (3.23) em (3.24), tem-se:

$$4a^2 + 4a\bar{\xi} + 1 = 0 \quad (3.25)$$

de onde se obtém:

$$a' = \frac{-\bar{\xi} + \sqrt{\bar{\xi}^2 - 1}}{2} \quad (3.26)$$

$$a'' = \frac{-\bar{\xi} - \sqrt{\bar{\xi}^2 - 1}}{2}$$

A substituição de (3.26) na segunda das equações (3.23) conduz a

$$c' = \frac{-\bar{\xi} + \sqrt{\bar{\xi}^2 - 1}}{2} \quad (3.27)$$

$$c'' = \frac{-\bar{\xi} - \sqrt{\bar{\xi}^2 - 1}}{2}$$

Observando que $-1 \leq \bar{\xi} \leq +1$, conclui-se de (3.26) e (3.27) que somente tem-se valores reais para os coeficientes a e c se $|\bar{\xi}| = 1$, ficando:

$$a = a' = a'' = -\frac{\bar{\xi}}{2} \quad (3.28)$$

$$c = c' = c'' = \frac{\bar{\xi}}{2}$$

A substituição de (3.28) em (3.18), fornece:

$$\xi = \frac{\bar{\xi}}{2}(1 - \gamma^2) + \gamma \quad (3.29)$$

E ainda, de (3.29):

$$d\xi = (1 - \bar{\xi}\gamma) d\gamma \quad (3.30)$$

Portanto, a integral dada em (3.17), nesse caso fica:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 f\left(\frac{\bar{\xi}}{2}(1 - \gamma^2) + \gamma\right) (1 - \bar{\xi}\gamma) d\gamma \quad (3.31)$$

sendo válida para $\bar{\xi} = -1$ e $\bar{\xi} = 1$.

Quando o ponto singular $\bar{\xi}$ estiver situado entre -1 e $+1$, a integral (3.17) pode ser dividida em duas, da seguinte maneira:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \int_{-1}^{\bar{\xi}} f(\xi) d\xi + \int_{\bar{\xi}}^1 f(\xi) d\xi \quad (3.32)$$

onde as integrais à direita podem ser transformadas em integrais de -1 a $+1$, fazendo-se as seguintes mudanças de variáveis:

Na primeira integral à direita:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} [\rho' (1 + \bar{\eta}) - 1 + \bar{\xi}] \\ d\xi &= \frac{1}{2} (\bar{\xi} + 1) d\rho' \end{aligned} \quad (3.33)$$

Na segunda integral à direita:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} [\rho'' (1 - \bar{\eta}) + 1 + \bar{\xi}] \\ d\xi &= \frac{1}{2} (1 - \bar{\xi}) d\rho'' \end{aligned} \quad (3.34)$$

Substituindo (3.33) e (3.34) em (3.32), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi &= \int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{2} \left((\bar{\xi} + 1) \rho' - 1 + \bar{\xi} \right) \right] \frac{(\bar{\xi} + 1)}{2} d\rho' + \\ &\int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{2} \left((1 - \bar{\xi}) \rho'' + 1 + \bar{\xi} \right) \right] \frac{(1 - \bar{\xi})}{2} d\rho'' \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde a primeira integral à direita possui singularidade em $\rho' = 1$ e a segunda, em $\rho'' = -1$.

Pode-se agora utilizar (3.29) e (3.30) escritas para ρ' e ρ'' , considerando os pontos singulares citados acima, isto é:

$$\begin{aligned}\rho' &= \frac{1}{2}(1 - 2\gamma^2) + \gamma \\ d\rho' &= (1 - \gamma) d\gamma \\ \rho'' &= \frac{1}{2}(\gamma^2 - 1) + \gamma \\ d\rho'' &= (1 + \gamma) d\gamma\end{aligned}\tag{3.36}$$

e substituindo (3.36) em (3.35), obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi &= \int_{-1}^1 f\left[\frac{1}{2}\left((\bar{\xi} + 1)\left[(1 - \gamma^2) + \gamma\right] + \bar{\xi} - 1\right)\right]\left(\frac{\bar{\xi} + 1}{2}(1 - \gamma)\right) d\gamma + \\ &\int_{-1}^1 f\left[\frac{1}{2}\left((1 - \bar{\xi})\left[(\gamma^2 - 1) + \gamma\right] + \bar{\xi} + 1\right)\right]\left(\frac{(1 - \bar{\xi})(1 + \gamma)}{2}\right) d\gamma\end{aligned}\tag{3.37}$$

que permite resolver o problema de singularidade logarítmica para qualquer ponto do intervalo considerado (Karam, 1986).

Este foi o primeiro trabalho que apresentou este tipo de transformação. A principal desvantagem é a divisão da integral, o que gera a existência de um duplo laço nas subrotinas de integração singular.

3.4.2.2 - Transformação cúbica (Telles, 1987)

A transformação cúbica (Telles, 1987), não precisa dividir a integral em dois intervalos para o cálculo da integral com singularidade, como ocorre na transformação quadrática, valendo para qualquer localização da singularidade. É obtida empregando-se uma transformação de terceira ordem do tipo:

$$\xi(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (3.38)$$

Sendo adicionada uma nova condição às demais descritas no item anterior, em (3.19), tem-se:

$$\frac{d^2\xi}{d\gamma^2} = 0 \quad \text{em} \quad \bar{\gamma} \quad (3.39)$$

Isto implica que o Jacobiano tem um ponto mínimo para $\bar{\xi}$, sendo as constantes obtidas para a equação (3.38)

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{Q} \\ b &= -\frac{3\bar{\gamma}}{Q} \\ c &= \frac{3\bar{\gamma}^2}{Q} \\ d &= -b \\ Q &= 1 + 3\bar{\gamma}^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $\bar{\gamma}$ é simplesmente o valor de γ quando o mesmo satisfaz $\xi(\bar{\gamma}) = \bar{\xi}$; este parâmetro pode ser calculado utilizando

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{\xi\xi^* + |\xi^*|} + \sqrt[3]{\xi\xi^* - |\xi^*|} + \bar{\xi} \quad (3.41)$$

sendo:

$$\xi^* = \bar{\xi}^2 - 1 \quad (3.42)$$

Ficando a expressão final na forma (Telles, 1987):

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 f \left\{ \left[\frac{(\xi - \bar{\xi})^3 + \bar{\xi}(\bar{\xi}^2 + 3)}{(1 + 3\bar{\xi}^2)} \right] \left[\frac{3(\xi - \bar{\xi})^2}{(1 + 3\bar{\xi}^2)} \right] \right\} d\xi \quad (3.43)$$

Feita a transformação das coordenadas, pode-se usar na integração os pontos de Gauss e fatores de peso comuns.

A expressão (3.43) pode ser aplicada para calcular I usando quadratura de Gauss em dois casos diferentes:

- a) $|\bar{\xi}| \leq 1$, na presente forma a transformação de terceiro grau foi desenvolvida para lidar com integrandos singulares que não envolvem integrais divergentes (por exemplo, singularidade logarítmica). Por isso, se for aplicada a singularidades VPC correspondentes a integrais divergentes, obviamente um resultado muito grande que tende ao infinito será obtido.
- b) $|\bar{\xi}| > 1$, neste caso somente integrandos quase-singulares e relativamente bem comportados são incluídos. Esta é a mais geral e útil aplicação da transformação.

Um aspecto importante desta transformação é a concentração dos pontos de Gauss perto de $\bar{\xi}$, produzindo uma concentração variável que depende da posição de $\bar{\xi}$. Além disso, adaptabilidade automática pode ser observada, com menor efeito de concentração, à medida que o ponto singular fica longe do domínio de integração, até que esta degenera de forma natural até a expressão original (3.17), (Telles e Oliveira, 1994).

3.4.2.3 - Tratamento de integrais quase-singulares

Integrais de elementos de contorno sobre superfícies gerais nem sempre podem ser expressas como em (3.17), isto é, a singularidade do integrando pode ficar fora do eixo ξ . Neste caso, somente uma projeção do ponto singular sobre o eixo pode ser obtida, produzindo uma transformação definida pela expressão (3.43), totalmente independente da distância real existente entre o ponto singular e a curva do contorno. A principal vantagem deste procedimento é que $\bar{\xi}$ pode assumir qualquer valor dentro ou fora dos limites de integração.

Nesta situação, no entanto, pode-se utilizar uma transformação alternativa para levar em conta esta distância exterior, (Telles, 1987).

Considere uma integral de contorno bidimensional sobre um elemento quadrático curvo que será mapeado dentro da coordenada ξ para integração. O primeiro aspecto do problema são as duas alternativas para calcular a distância R_{MIN} desde o ponto singular ξ ao contorno curvo Γ , mostrado na figura 3.2. Telles e Oliveira (1993) acharam que se a projeção do ponto singular situa-se fora dos limites do elemento, deve-se preferir a alternativa da figura 3.1a, já que evita a extrapolação sobre o elemento, fato este que pode ser incômodo especialmente em aplicações tridimensionais.

Uma vez que R_{MIN} e $\bar{\Gamma}$ (o ponto sobre o elemento localizado à distância mínima de ξ) estejam definidos, pode-se proceder com a otimização para permitir integração numérica, minimizando o erro utilizando mínimos quadrados. Para fazer isto, considere as seguintes integrais normalizadas, as quais apresentam o comportamento quase-singular usual em integrais de elementos de contorno :

$$J^{(\alpha)} = \begin{cases} \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi, & \alpha = 0 \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{r^\alpha} d\xi, & \alpha = 1,2,3 \end{cases} \quad (3.44)$$

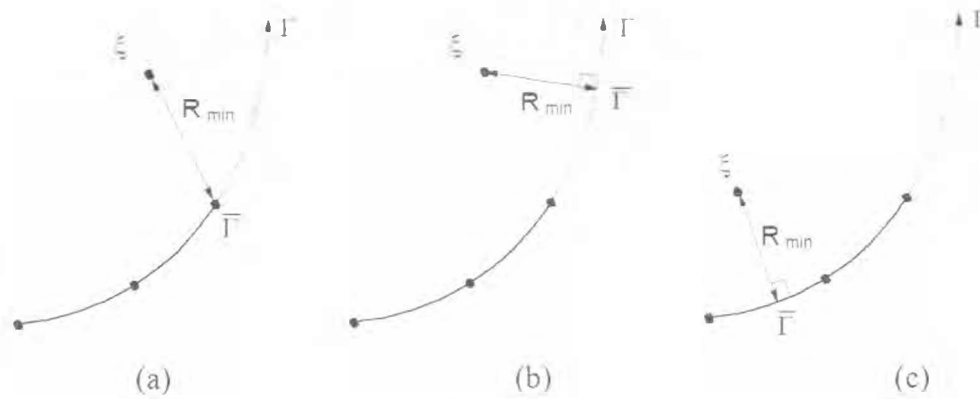


Figura 3.2 - Cálculo da distância mínima desde o ponto singular até o contorno do elemento.

onde a distância normalizada entre o ponto campo e o ponto fonte é simplesmente (figura 3.3):

$$r = \sqrt{D^2 \cos^2 \theta + (\xi - \bar{\xi} - D \sin \theta)^2} \quad (3.45)$$

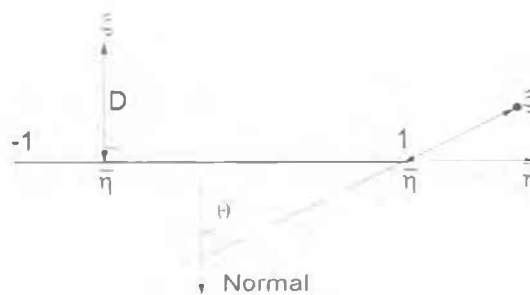


Figura 3.3 - Definição dos parâmetros para o cálculo de r nas integrais normalizadas; mostrando situações típicas $\theta = 0$ e $\theta \neq 0$.

Aqui D e $\bar{\xi}$ são as contrapartidas normalizadas R_{MIN} e $\bar{\Gamma}$, respectivamente.

A otimização pode ser feita com a introdução da distância D na transformação através do valor real de J no ponto mais perto $\bar{\xi}$ (isto é, a terceira condição é modificada):

$$J(\bar{\gamma}) = \bar{r} \quad (3.46)$$

onde a dependência de \bar{r} com respeito a D pode ser obtida de tal forma de se obter um erro de quadratura mínimo.

A transformação fica dependente de \bar{r} :

$$\begin{aligned}
 \eta &= a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \\
 J &= 3a\gamma^2 + 2b\gamma + c \\
 a &= (1 - \bar{r}) / Q \\
 b &= -3(1 - \bar{r})\bar{\gamma} / Q \\
 c &= (\bar{r} + 3\bar{\gamma}^2) / Q \\
 d &= -b \\
 Q &= 1 + 3\bar{\gamma}^2
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{[-q + \sqrt{(q^2 + p^3)}]} + \sqrt[3]{[-q - \sqrt{(q^2 + p^3)}]} + \frac{\bar{\eta}}{1 + 2\bar{r}}$$

$$q = \frac{1}{2(1 + 2\bar{r})} \left[\left(\bar{\eta}(3 - 2\bar{r}) - \frac{2\bar{\eta}^3}{1 + 2\bar{r}} \right) \frac{1}{1 + 2\bar{r}} - \bar{\eta} \right]$$

$$p = \frac{1}{3(1 + 2\bar{r})^2} \left[4\bar{r}(1 - \bar{r}) + 3(1 - \bar{\eta}^2) \right]$$

onde pode-se observar, se $\bar{r} = 1$ produz $\eta = \gamma$, $J = 1$ (a transformação desaparece) e $\bar{r} = 0$ leva às expressões (3.40)-(3.43).

A aplicação prática do método descrito acima à integrais quase-singulares depende da determinação do parâmetro \bar{r} a partir de D , que em Telles e Oliveira (1993) foi expresso em forma de uma tabela de difícil obtenção analítica, fazendo assim necessárias interpolações e cálculos adicionais, com conseqüente perda de precisão.

Normalmente é preferível usar a transformação de maneira independente da distância real entre o ponto singular e o contorno, como foi descrito acima.

3.4.3 - Integração numérica com subdivisão de elementos

Esta técnica é uma das mais eficazes, podendo ser utilizada praticamente em todos os casos de integrais singulares e quase-singulares. Através da divisão do intervalo de integração, tem-se que o efeito da singularidade ou quase singularidade fica reduzido, permitindo o uso de quadraturas numéricas para integrais regulares.

Na verdade, o procedimento em questão se trata de uma técnica indireta de avaliação das integrais com problemas de singularidade ou quase-singularidade. Através da subdivisão, ocorrem mudanças na escala do problema tornando a fonte de singularidade mais distante e, portanto, diminuindo o efeito de singularidade ou quase-singularidade para cada segmento resultante da subdivisão do intervalo de integração. (Noronha, 1998).

A aplicabilidade geral desta sistemática é sua principal vantagem. Praticamente não há restrições para a utilização da mesma.

Esta técnica é aplicada a integrais singulares e quase-singulares, e melhora a quadratura Gaussiana utilizando uma subdivisão do domínio $[-1,1]$, que pode ser igualmente espaçada ou otimizada.

Esta subdivisão é feita escrevendo ξ em termos de uma nova coordenada adimensional γ como se segue:

$$\xi_k = \xi(\gamma) = \frac{(1-\gamma)}{2} \xi_k^i + \frac{(1+\gamma)}{2} \xi_k^f \quad (3,48)$$

onde k é o número do sub-elemento, ξ^i e ξ^f representam as coordenadas adimensionais finais e iniciais, respectivamente.

Para cada sub-elemento, o esquema de integração numérica resulta:

$$I_k = \int_{\Gamma_k} f(r(\xi(\gamma))) |J|_k \omega_k d\Gamma_k \quad (3,49)$$

Como consequência, o valor da integral total sobre o elemento J é fornecido por:

$$I_J = \sum_{k=1}^{NSE} I_k \quad (3.50)$$

onde NSE é o número de sub-elementos, ω os pesos de integração, e J é o jacobiano da transformação definido por:

$$J = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 \left(\frac{d\xi}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2 \left(\frac{d\xi}{d\gamma}\right)^2} \quad (3.51)$$

É importante notar que é possível reduzir o valor do erro tanto quanto seja desejado, isto é, fazendo a redução do comprimento dos sub-elementos. No entanto, quando se utiliza subdivisão constante, gera-se uma grande quantidade de sub-elementos, o que torna o processo de integração computacionalmente custoso, (Mon-Ma et al., 1996).

Geralmente, procura-se fazer uma subdivisão do intervalo de integração de forma otimizada, isto é, dividindo a região mais próxima do ponto singular num número maior de segmentos. No próximo item será mostrado um destes algoritmos de subdivisão otimizada.

3.4.3.1 - Integração numérica por subdivisão progressiva de elementos (Mon-Ma et al., 1996).

Este método é uma extensão do método descrito no parágrafo anterior no qual se pode variar o comprimento dos sub-elementos; assim os sub-elementos ficam concentrados atendendo à distância relativa entre o ponto fonte e o ponto campo. A subdivisão progressiva está de acordo com o seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned} \xi_1^f &= -1 & (A.3.1) \\ \text{DO FROM } l=1 \text{ TO } NSE \\ \xi_k^0 &= \xi_k^f \\ \xi_k^f &= \xi_k^0 + 2((d / L)**sg)(m**(l-1)) \\ \text{ENDDO} \end{aligned}$$

onde L é o comprimento do elemento, d é a menor distância do ponto singular ao elemento, sg é a ordem da singularidade e m é um parâmetro geométrico progressivo

É importante ressaltar que o algoritmo (A.3.1) está escrito para quando o ponto singular fica mais perto do primeiro nó do elemento. Para o caso em que o ponto singular fica mais perto do terceiro nó basta colocar como valor inicial $\xi_1^f = 1$ e mudar o sinal dos incrementos.

Para o caso em que o ponto singular fica mais perto do segundo nó, precisa-se fazer um laço duplo, ou seja, calcular primeiro as coordenadas dos sub-elementos do tramo $[-1,0]$ e logo os do tramo $[0,1]$, da mesma forma como foi descrito para os dois casos anteriores.

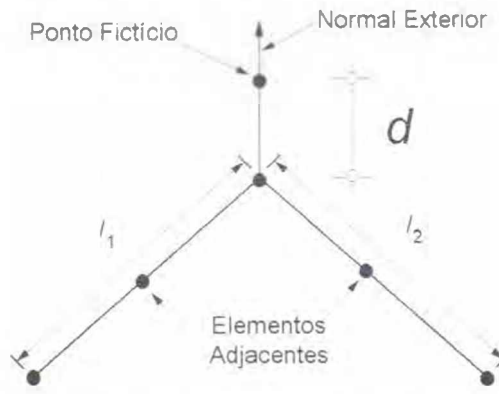
3.4.4 - Técnica de pontos fictícios (Patterson e Sheikh, 1981)

Esta técnica evita o problema de singularidade usando pontos singulares de integração fictícios, localizados fora do intervalo de integração.

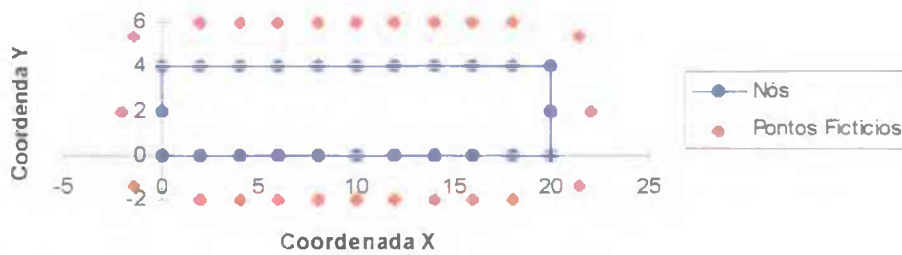
Esta técnica foi desenvolvida na década de 70, prévio ao desenvolvimento da maioria dos outros métodos, para seu uso no Método das Equações Integrais do Contorno e não se enquadra nas categorias anteriormente listadas.

O método se baseia nos seguintes fatos, visto que no procedimento de integração no MEC é extraída do domínio Ω , do corpo analisado, uma vizinhança infinitesimal Ω_0 em torno de cada nó do modelo discretizado. Ou seja, os nós do modelo situam-se infinitamente próximos do contorno, mas fora do domínio.

Assim, deslocando o ponto de integração ao longo da normal externa do nó, figuras 3.4a e 3.4b, a uma distância d , de comprimento suficiente para atenuar o efeito de singularidade, pode-se resolver o problema utilizando integração normal de Gauss.



a) Localização do ponto fictício



b) Pontos fictícios na discretização de uma viga

Figura 3.4 - Técnica de pontos fictícios

A principal vantagem desta técnica é a facilidade de implementação, envolvendo somente o cálculo das coordenadas dos pontos fictícios e a utilização de subrotinas de integração convencionais.

3.4.5 - Método de quadratura específica, (Dumont e de Souza, 1992)

O desenvolvimento desta sistemática de integração tem origem nos trabalhos desenvolvidos por Dumont e de Souza (1992), e foi aperfeiçoada através de diversos trabalhos publicados por Dumont (1994), Dumont e Noronha (1997) até chegar na sua forma final na tese de doutorado de Noronha (1998).

Esta técnica foi desenvolvida levando em conta também outras formulações de MEC, por exemplo, a formulação híbrida em tensões, (Dumont, 1987) e a formulação híbrida em deslocamentos, (De Figueiredo, 1988), que não serão analisadas no presente trabalho. Em seguida, será feita uma descrição resumida deste método de integração.

A técnica propõe uma sistemática unificada para todos os casos de singularidade, fazendo uso de procedimentos para a obtenção de abcissas e pesos de uma quadratura numérica.

A notação utilizada para representar as integrais analisadas é a seguinte: o integrando dado pela função $f(\xi)$ será considerado como sendo constituído pelo produto de duas parcelas: uma parcela singular $\omega(\xi)$, singular no ponto ξ_0 , e uma parcela regular $g(\xi)$. Desta forma, uma integral singular ou quase-singular pode ser representada como:

$$\int_0^1 f(\xi) d\xi = \int_0^1 \omega(\xi) g(\xi) d\xi \quad (3.52)$$

É necessário ressaltar que para esta regra de integração, o intervalo de integração é sempre considerado como $[0,1]$.

3.4.5.1 - Obtenção das abcissas de integração

As abcissas são dadas pelas raízes de polinômios de Legendre, as quais têm a vantagem de estarem tabeladas, não requerendo desta forma esforço computacional adicional para serem obtidas. Além disso, é vantajoso porque se tem único conjunto de abcissas para todos os tipos de integração num código de análise por MEC.

3.4.5.2 - Obtenção de pesos de integração específicos

Os pesos serão calculados através da aproximação polinomial da parcela regular $g(\xi)$ do integrando do lado direito da equação (3.52). Tais pesos serão, então, específicos para uma determinada função de singularidade $\omega(\xi)$. A aplicação da regra de quadratura com n pesos para a integral em questão pode ser expressa como

$$\int_0^1 \omega(\xi)g(\xi)d\xi = \sum_{j=1}^n g(\xi_j)h_j \quad (3.53)$$

A obtenção dos pesos específicos pode ser efetuada através da utilização de funções auxiliares, dadas por polinômios de Lagrange. Para determinar o peso h_i , correspondente à abscissa de integração ξ_i , em um esquema com n abscissas, utiliza-se o polinômio de Lagrange λ_i , dado por

$$\lambda_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(\xi_j - \xi_i)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad (3.54)$$

que corresponde a um polinômio de grau $n-1$, fornecendo valor unitário para abscissa ξ_i e zero para as outras.

Devido às suas propriedades, o polinômio de Lagrange λ_i , quando considerado como sendo a parcela regular $g(\xi)$ da integral dada pela equação (3.53), permite a obtenção direta do peso h_i específico para a função de singularidade $\omega(\xi)$, como se mostra a seguir:

$$h_i = \int_0^1 \omega \lambda_i d\xi \quad (3.55)$$

Como o polinômio de Lagrange corresponde a um polinômio de grau $n-1$, precisa-se para a avaliação dos pesos do cálculo analítico das seguintes integrais

$$\int_0^1 \omega \xi^i d\xi \text{ para } 0 \leq i \leq n-1 \quad (3.56)$$

A forma da técnica descrita, é uma forma simplificada da técnica original, já que não considera o cálculo de parcelas adicionais de correção que melhoram a precisão do esquema, mas demandam esforço computacional adicional. No Anexo B, estão descritos exemplos da obtenção de abscissas e pesos específicos utilizando este método.

Podemos esquematizar, de uma maneira geral, a implementação desta técnica num código de MEC da seguinte maneira:

1. Determinar o tipo de singularidade, identificar a parcela singular e regular da integral. No caso implementado no presente trabalho, o procedimento é similar ao mostrado para a utilização de quadratura logarítmica.
2. Obter os pesos de integração que serão dependentes do cálculo analítico das expressões (3.56), segundo o número de pontos com que se deseja trabalhar.
3. Aplicar a quadratura obtida, com abscissas de Gauss-Legendre.

Para o caso específico de singularidade real, ou seja quando o ponto singular fica dentro dos limites de integração, podemos avaliar os pesos diretamente da equação (3.55), já que o ponto singular é conhecido, e para o caso de um elemento quadrático ξ_0 terá coordenadas iguais a: 0, 0.5 e 1. Podendo-se armazenar estes pesos e aplicar a quadratura diretamente.

Em seguida, serão considerados exemplos do uso dos esquemas descritos acima.

CAPÍTULO 4

EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, os esquemas numéricos mostrados no capítulo anterior para a avaliação de integrais singulares, serão aplicados à solução de problemas de potencial bidimensional e de elastostática bidimensional, cujas soluções analíticas sejam conhecidas, com o intuito de avaliar a precisão e exatidão de cada método.

A convergência da solução será analisada considerando o nível de discretização e o número de pontos de integração utilizados.

4.2 - METODOLOGIA DAS ANÁLISES

Foram implementados dois códigos base do Método de Elementos de Contorno, um para problemas de potencial, e outro para problemas de elastostática, ambos para o caso bidimensional utilizando elementos quadráticos. Os programas obedecem o fluxograma da figura 4.1.

Todos os métodos descritos no capítulo anterior foram implementados em subrotinas de integração (segundo a natureza do método) e colocadas dentro de cada código base, obtendo-se assim programas diferentes de acordo com o método implementado.

Todas as implementações referem-se ao cálculo dos elementos da matriz \mathbf{G} , tanto os que correspondem à diagonal principal (integração singular), como o resto dos elementos da matriz (integração regular ou quase-singular).

A inclusão dos métodos de transformação de coordenadas no cálculo de integrais singulares se justifica porque quando foram originalmente propostos, um dos objetivos era

precisamente o cálculo de integrais singulares como se pode observar nos textos dos artigos originais.

No caso dos elementos da matriz **H**, foram utilizados deslocamentos de corpo rígido para o cálculo dos elementos da diagonal principal, e integração de Gauss normal com 10 pontos de integração para o resto. Foi utilizada dupla precisão em todos os casos.

Utilizou-se o compilador Fortran Power Station versão 1.0 da Microsoft num computador Pentium 133 Mhz com 16 Megabytes de memória RAM.

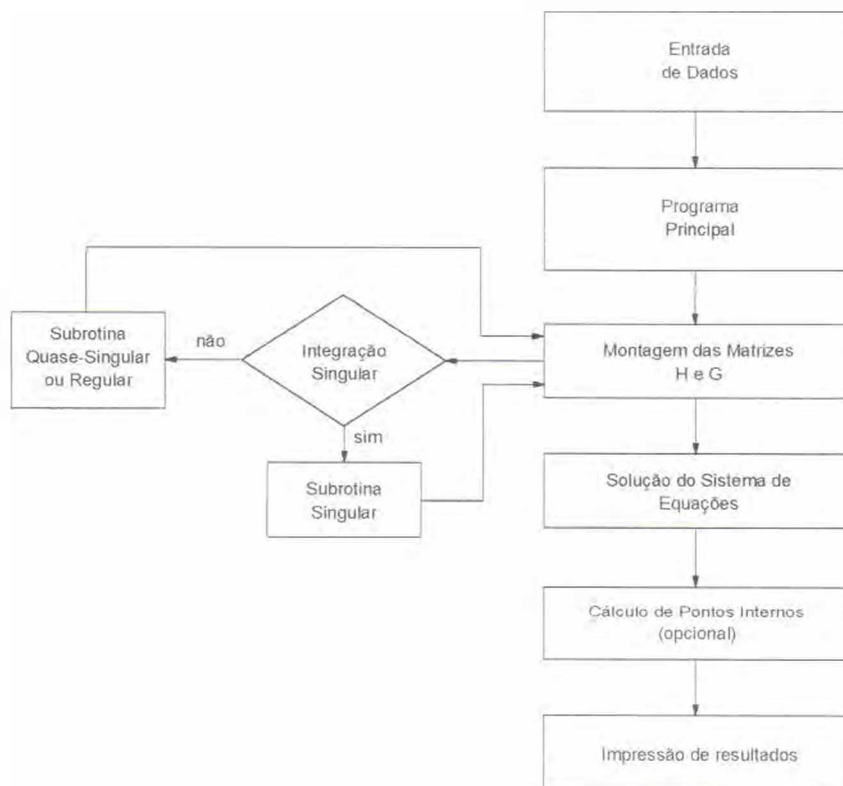


Figura 4.1 - Fluxograma dos programas utilizados nas análises.

4.3 - EXEMPLOS NUMÉRICOS DE POTENCIAL BIDIMENSIONAL

4.3.1 - Seção circular sob potencial Laplaciano

Considera-se uma seção circular cujo contorno está sujeito à seguinte condição de contorno $\bar{u} = x + y$, onde x e y são as coordenadas do ponto no contorno e \bar{u} é o valor conhecido do potencial.

Impondo a condição de contorno descrita podemos obter a seguinte solução analítica para o fluxo:

$$q = \text{Cos}(n, x) + \text{Cos}(n, y) \quad (4.1)$$

Onde $\text{Cos}(n, x)$ e $\text{Cos}(n, y)$ são os cossenos diretores da normal no ponto analisado. Na figura 4.2 podemos observar a geometria do problema discretizada utilizando 16 elementos quadráticos, e na figura 4.3 a representação gráfica da solução analítica para o fluxo.

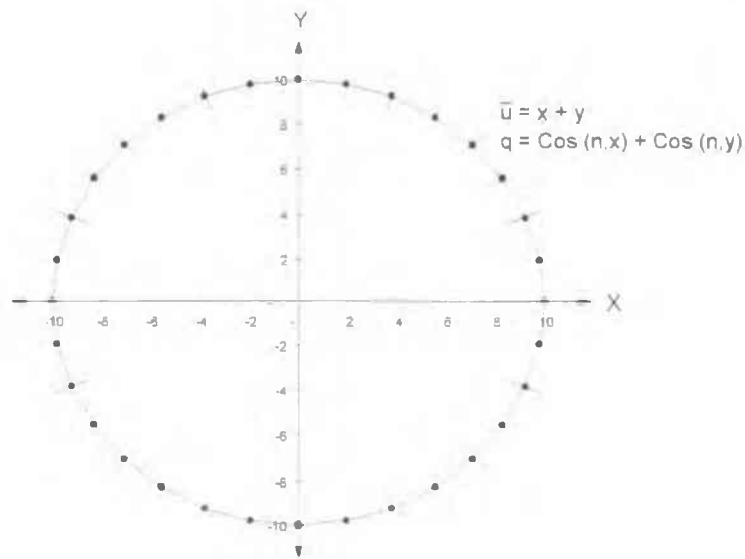


Figura 4.2 - Seção circular discretizada com 16 elementos de contorno quadráticos.

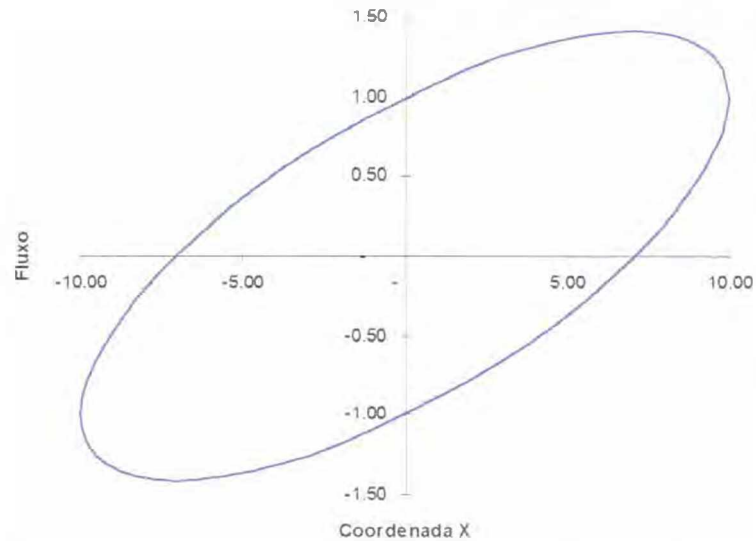


Figura 4.3 - Solução analítica para o fluxo numa seção circular sob a condição de contorno: $\bar{u} = x + y$

4.3.2 - Seção elíptica sob potencial Laplaciano

Este exemplo consiste numa seção elíptica sujeita à mesma condição de contorno do problema anterior, mas poderá verificar-se na próxima seção, a variação do desempenho dos esquemas devido à mudança da geometria do problema.

A figura 4.4 representa a geometria do problema e a discretização inicial empregada, e na figura 4.5 está representada a solução analítica do fluxo ao longo do eixo x.

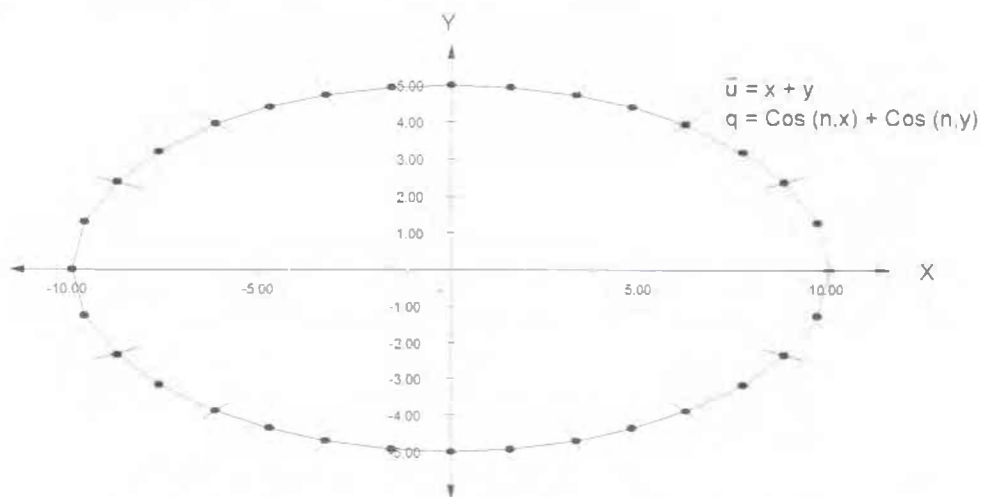


Figura 4.4 - Seção elíptica discretizada com 16 elementos de contorno quadráticos.

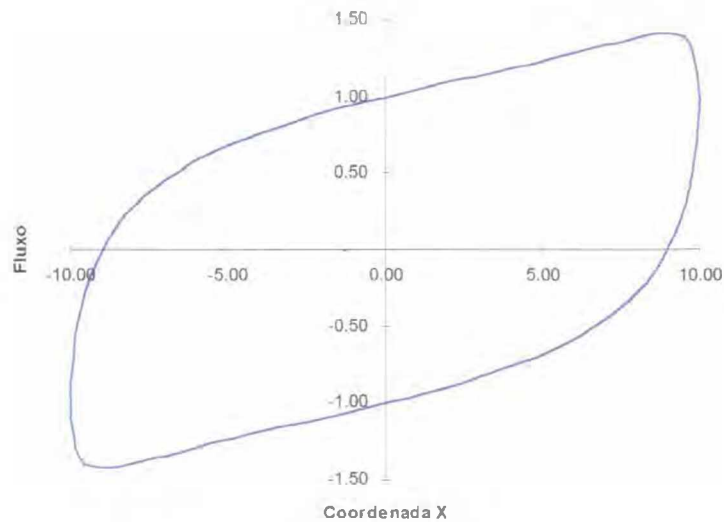


Figura 4.5 - Solução analítica para o fluxo numa seção elíptica sob a condição de contorno:

$$\bar{u} = x + y$$

4.3.3 - Resultados dos exemplos 4.3.1 e 4.3.2

Para cada um destes exemplos foram utilizadas quatro discretizações, começando a primeira com 16 elementos e a última com 128. Para cada discretização utilizou-se diferente número de pontos de integração, com a intenção de avaliar a convergência e observar o comportamento de cada método.

Nestes exemplos foi testado o desempenho das técnicas somente para a integração singular, ou seja para os elementos da diagonal principal da matriz **G**, calculando o resto dos elementos da matriz com quadratura de Gauss simples com 10 pontos de integração.

Foi utilizada essa quantidade de pontos de integração para garantir uma adequada precisão e permitir uma análise melhor da influencia da exatidão da integração singular na precisão global do método.

Tabela 4.1 - Resultados para problema de potencial atuando em domínio circular

4 Pontos de Integração

MÉTODO	Erro médio (%) segundo número de Elementos			
	16	32	64	128
Q. Logarítmica	3.04E-03	1.87E-04	3.73E-06	7.53E-10
T. Quadrática	8.68E-01	1.76E-02	2.23E-01	2.81E-01
T. Cúbica	1.08E+01	9.70E+00	9.21E+00	8.92E+00
Subdivisão	9.65E-01	2.46E-01	6.20E-02	1.78E-02
P. Fictícios	1.66E-01	2.97E-01	3.49E-01	3.70E-01
Dumont	2.61E-03	1.74E-04	2.97E-06	9.50E-10

6 Pontos de Integração

MÉTODO	Erro médio (%) segundo número de Elementos			
	16	32	64	128
Q. Logarítmica	3.04E-03	1.87E-04	3.73E-06	7.53E-10
T. Quadrática	1.10E+00	2.41E-01	1.03E-02	4.80E-02
T. Cúbica	4.28E+00	3.25E+00	2.95E+00	2.86E+00
Subdivisão	9.57E-01	2.45E-01	6.18E-02	1.57E-02
P. Fictícios	5.24E-03	7.79E-03	9.54E-03	1.07E-02
Dumont	3.04E-03	1.87E-04	3.73E-06	9.50E-10

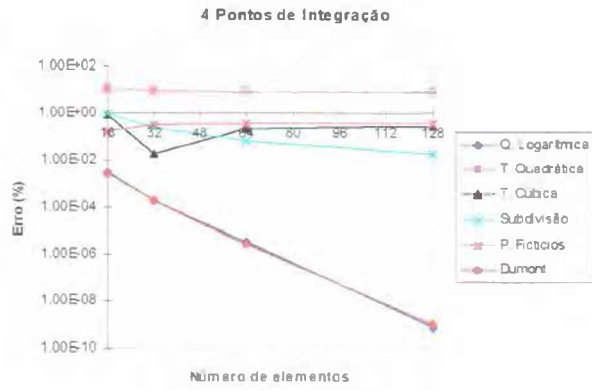
8 Pontos de Integração

MÉTODO	Erro médio (%) segundo número de Elementos			
	16	32	64	128
Q. Logarítmica	3.04E-03	1.87E-04	3.73E-06	7.53E-10
T. Quadrática	1.15E+00	2.86E-01	5.45E-02	3.36E-03
T. Cúbica	2.79E+00	1.70E+00	1.37E+00	1.28E+00
Subdivisão	9.55E-01	2.45E-01	6.14E-02	1.54E-02
P. Fictícios	8.57E-03	1.25E-03	1.19E-03	1.34E-03
Dumont	3.04E-03	1.87E-04	3.73E-06	9.50E-10

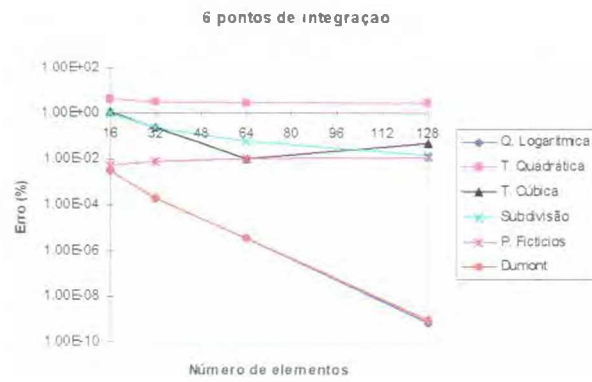
10 Pontos de Integração

MÉTODO	Erro médio (%) segundo número de Elementos			
	16	32	64	128
Q. Logarítmica	3.04E-03	1.87E-04	3.73E-06	7.53E-10
T. Quadrática	1.16E+00	2.98E-01	6.81E-02	9.83E-03
T. Cúbica	2.23E+00	1.12E+00	7.85E-01	6.92E-01
Subdivisão	9.54E-01	2.43E-01	6.13E-02	1.51E-02
P. Fictícios	8.57E-03	1.25E-03	1.17E-03	1.30E-03
Dumont	3.04E-03	1.87E-04	3.73E-06	9.50E-10

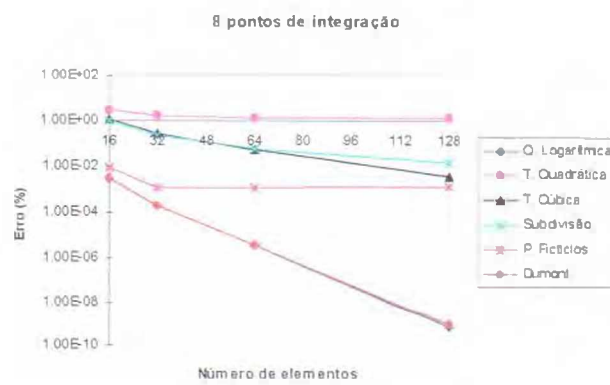
a)



b)



c)



d)

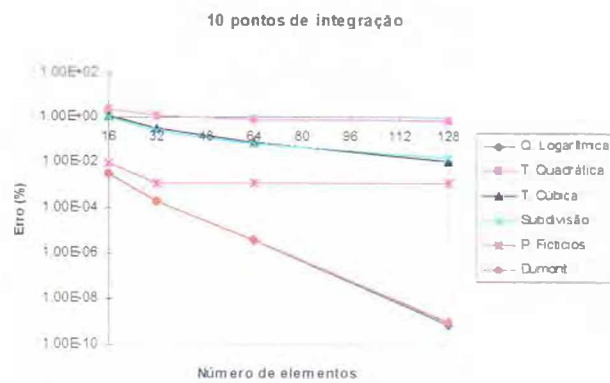


Figura 4.6 - Representação gráfica da variação do erro para o problema 4.3.1

A tabela 4.1 mostra os resultados para o exemplo 4.3.1, mostrando a média do erro obtido ao longo do contorno.

Mostra-se na figura 4.6 a representação gráfica dos resultados obtidos.

Pode-se observar que os únicos métodos que têm uma convergência adequada são a quadratura logarítmica e o método de Dumont, fornecendo para o caso da maior discretização um erro relativo aproximado entre 7.0×10^{-10} a 9.5×10^{-10} . Os dois esquemas têm desempenhos semelhantes por serem quadraturas que baseiam-se nas características e propriedades matemáticas da função singular.

Dentro dos esquemas de transformação de coordenadas, como era esperado, a transformação cúbica teve o melhor desempenho, mas estes esquemas mostram-se pouco satisfatórios para este tipo de problema.

O método de pontos fictícios e subdivisão também não mostram convergência comparável aos esquemas de quadratura numérica.

Os resultados obtidos para o problema 4.3.2 e sua representação gráfica encontram-se na tabela 4.2 e na figura 4.7 respectivamente.

Podemos observar que a convergência dos métodos, excluindo os de quadratura numérica, é muito baixa, mostrando, como no exemplo anterior, que não são adequados para este tipo de problemas.

Novamente os métodos de quadratura são os que apresentam melhores resultados, mas como foi anotado previamente, a precisão diminuiu de maneira apreciável em relação ao exemplo anterior.

Tabela 4.2 - Resultados para problema de potencial atuando em domínio elíptico

4 Pontos de Integração

MÉTODOS	Erro médio (%) segundo número de Elementos			
	16	32	64	128
Q. Logarítmica	7.55E-01	4.44E-01	1.95E-01	9.17E-02
T. Quadrática	2.24E+00	1.65E+00	1.40E+00	1.19E+00
T. Cúbica	8.79E+00	7.25E+00	7.66E+00	8.70E+00
Subdivisão	1.13E+00	1.39E+00	1.29E+00	6.79E-01
P. Fictícios	4.08E+00	2.92E+00	1.42E+00	7.45E-01
Dumont	7.55E-01	4.45E-01	1.95E-01	9.17E-02

6 Pontos de Integração

MÉTODOS	Erro médio (%) segundo número de Elementos			
	16	32	64	128
Q. Logarítmica	7.55E-01	4.44E-01	1.95E-01	9.17E-02
T. Quadrática	2.29E+00	1.69E+00	1.32E+00	1.03E+00
T. Cúbica	3.05E+00	2.68E+00	2.53E+00	2.86E+00
Subdivisão	1.13E+00	1.38E+00	1.29E+00	6.71E-01
P. Fictícios	4.06E+00	2.90E+00	1.42E+00	7.37E-01
Dumont	7.55E-01	4.44E-01	1.95E-01	9.17E-02

8 Pontos de Integração

MÉTODOS	Erro médio (%) segundo número de Elementos			
	16	32	64	128
Q. Logarítmica	7.55E-01	4.44E-01	1.95E-01	9.17E-02
T. Quadrática	2.30E+00	1.71E+00	1.32E+00	1.01E+00
T. Cúbica	1.78E+00	1.79E+00	1.48E+00	1.45E+00
Subdivisão	1.12E+00	1.38E+00	1.29E+00	6.68E-01
P. Fictícios	4.06E+00	2.89E+00	1.41E+00	7.34E-01
Dumont	7.55E-01	4.44E-01	1.95E-01	9.17E-02

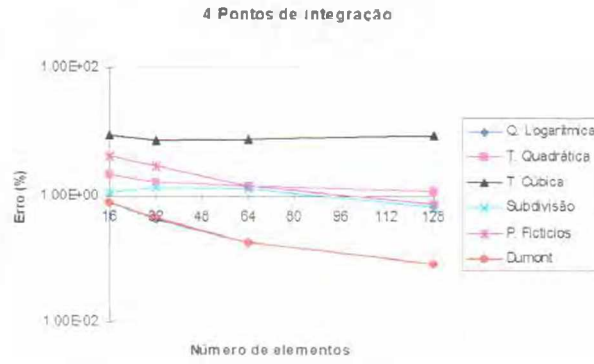
10 Pontos de Integração

MÉTODOS	Erro médio (%) segundo número de Elementos			
	16	32	64	128
Q. Logarítmica	7.55E-01	4.44E-01	1.95E-01	9.17E-02
T. Quadrática	2.31E+00	1.71E+00	1.32E+00	1.01E+00
T. Cúbica	1.43E+00	1.55E+00	1.26E+00	9.83E-01
Subdivisão	1.13E+00	1.38E+00	1.28E+00	6.66E-01
P. Fictícios	4.06E+00	2.89E+00	1.41E+00	7.32E-01
Dumont	7.55E-01	4.44E-01	1.95E-01	9.17E-02

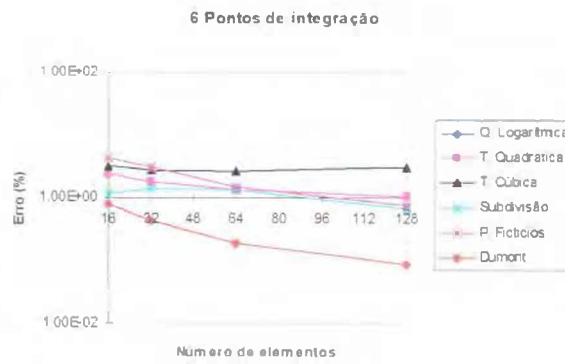
É importante ressaltar que a variação da precisão em relação ao número de pontos de integração, para uma determinada discretização, é quase nula para os métodos de quadratura numérica, concluindo-se que num código de MEC poderiam utilizar-se um número baixo de pontos de integração.

Finalmente nota-se que, embora os dois problemas sejam do mesmo tipo, o desempenho geral dos métodos varia muito devido somente a uma mudança de geometria.

a)



b)



c)



d)

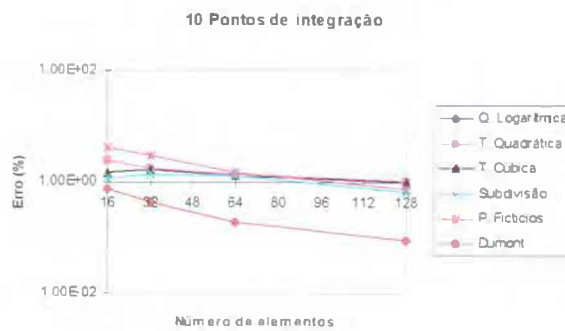


Figura 4.7 - Representação gráfica da variação do erro para o problema 4.3.2

Para efeitos de comparação, na figura 4.8, tem-se os resultados da solução dos problemas anteriores utilizando quadratura de Gauss simples, onde nota-se a lenta convergência dos resultados embora uma grande quantidade de pontos de integração sejam usados, não se chegando alcançar nem o pior resultado das técnicas especiais.

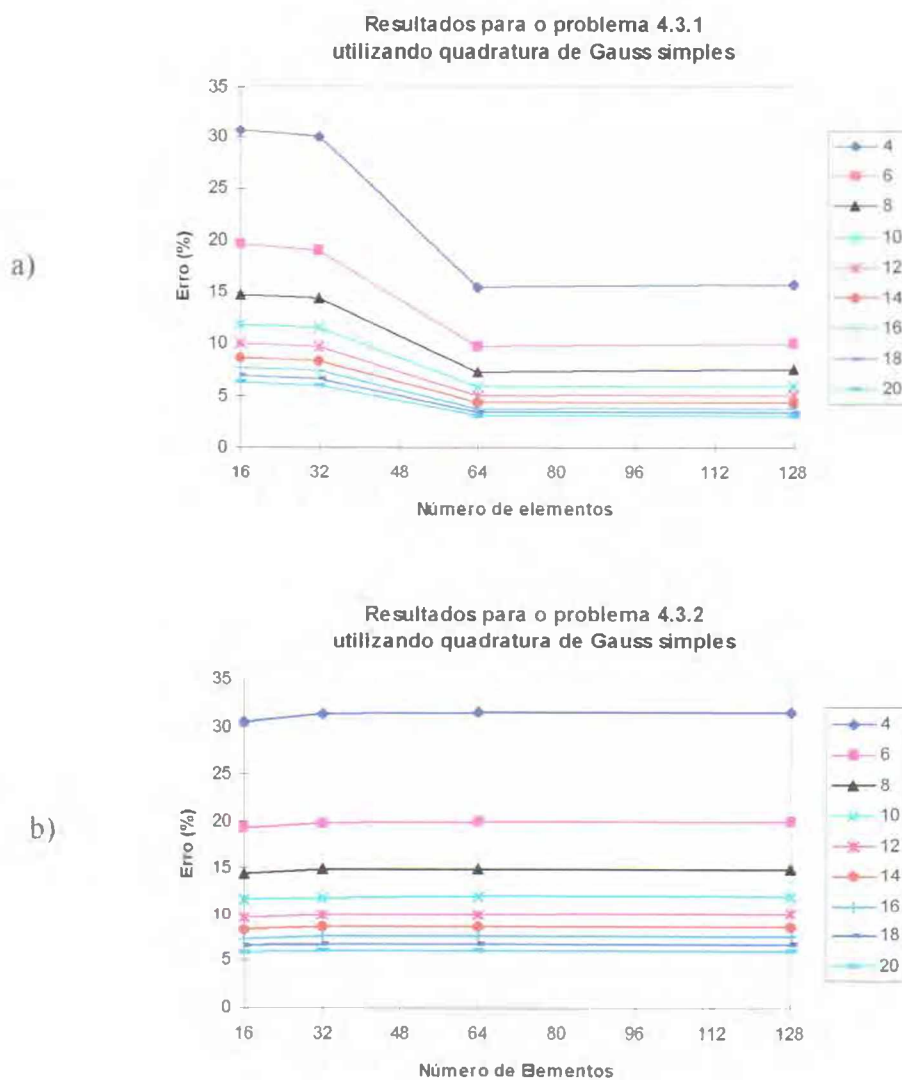


Figura 4.8 - Resultados dos problemas 4.3.1 e 4.3.2 utilizando quadratura de Gauss simples.

4.3.4 - Barra elíptica sob torção

O problema de uma barra de seção elíptica é analisado (ver figura 4.9a). Considera-se que o problema como sendo do tipo torção de Saint-Venant, os deslocamentos são dados por:

$$\begin{aligned}u_x &= -\theta z y \\u_y &= \theta x_3 x_1 \\u_z &= \theta \phi\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde θ é o ângulo da deformação por unidade de comprimento e $\phi(x,y)$ é a função de deformação dada por, (Brebbia e Dominguez, 1989):

$$\nabla^2 \phi = 0\tag{4.3}$$

Podemos definir as condições de contorno como segue, trações normais ao contorno igual zero, portanto para o caso de uma elipse obtém-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} x y\tag{4.4}$$

As dimensões utilizadas no cálculo são as seguintes: $a = 10$ e $b = 5$, para efeitos de comparação utilizou-se o valor de ϕ analítico no ponto $x = 6.174$, $y = 3.933$, que fornece, utilizando a teoria de potencial descrita, $u = 14.576$.

Se consideramos a simetria do problema, temos que $\phi \equiv 0$ ao longo dos eixos de coordenadas. Assim somente precisamos de discretizar um quarto da seção da barra.

Foram utilizadas duas discretizações uma de cinco e outra de dez elementos quadráticos, utilizando, em ambos casos, diferente número de pontos de integração.

As duas discretizações são mostradas nas figuras 4.9b e 4.9c.

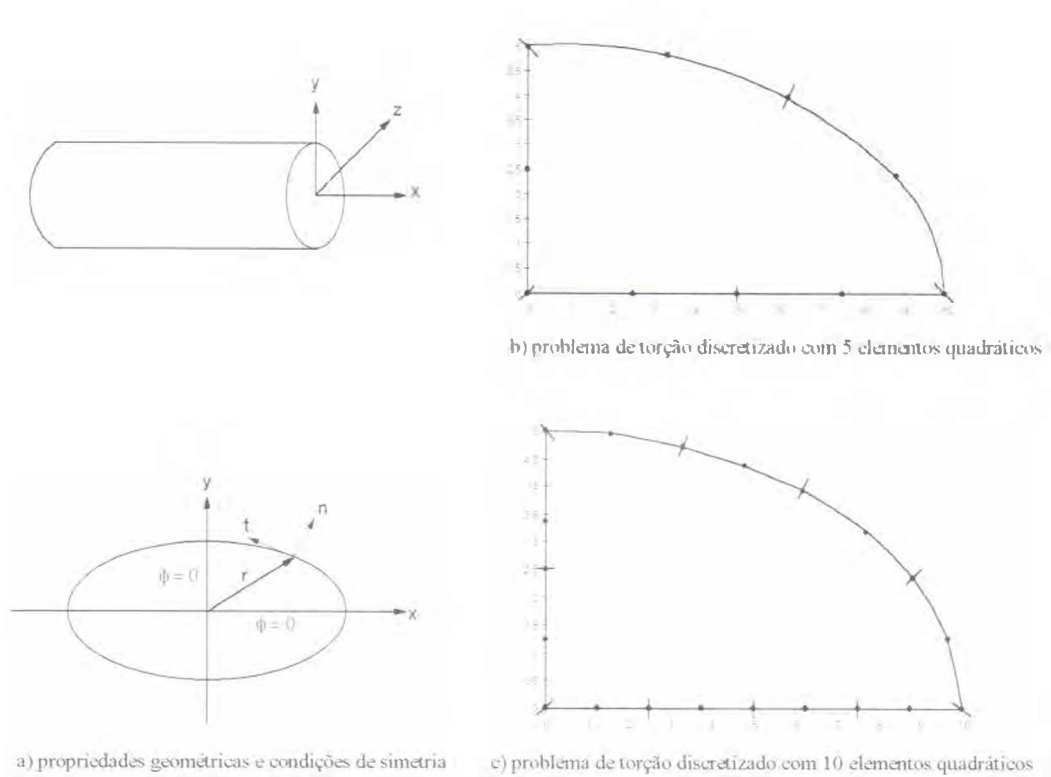


Figura 4.9 - Definição e discretização do problema 4.3.4

4.3.5 - Resultados do exemplo 4.3.4

A tabela 4.3 mostra os erros obtidos utilizando os diferentes métodos de integração e a figura 4.10 mostra a sua representação gráfica.

Tabela 4.3 - Resultados para problema de torção de barra de seção elíptica

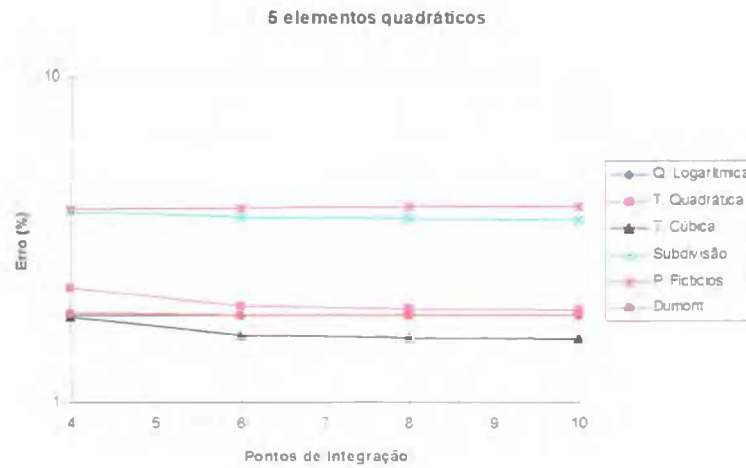
5 Elementos

MÉTODO	Erro (%) segundo número de pontos de integração			
	4	6	8	10
Q. Logarítmica	1.8466	1.8471	1.8471	1.8471
T. Quadrática	2.2718	1.9973	1.9423	1.9286
T. Cúbica	1.8394	1.6198	1.5786	1.5649
Subdivisão	3.8710	3.7337	3.6857	3.6651
P. Fictícios	3.9121	3.9739	3.9808	3.9808
Dumont	1.8903	1.8469	1.8471	1.8471

10 Elementos

MÉTODO	Erro (%) segundo número de pontos de integração			
	4	6	8	10
Q. Logarítmica	0.0386	0.0386	0.0386	0.0386
T. Quadrática	0.4049	0.2608	0.2334	0.2265
T. Cúbica	0.1510	0.0824	0.0686	0.0618
Subdivisão	1.2491	0.9883	0.8854	0.8373
P. Fictícios	0.3157	0.3020	0.3020	0.3020
Dumont	0.0380	0.0386	0.0386	0.0386

a)



b)

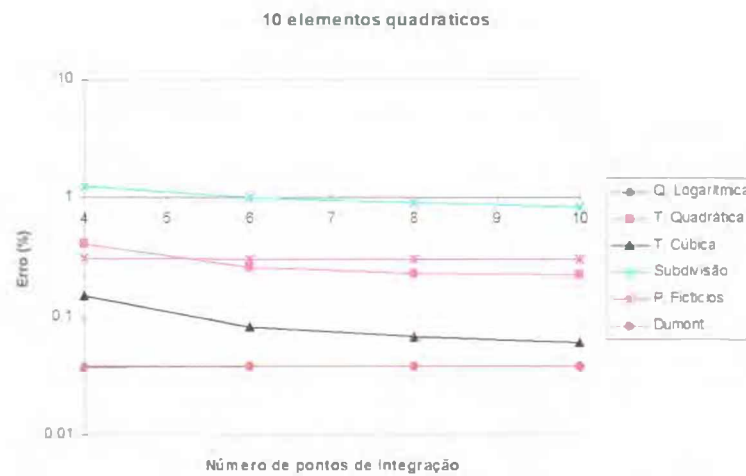


Figura 4.10 - Variação do erro para o problema 4.3.4

Nota-se que, embora o método de transformação cúbica forneça melhores resultados que os métodos de quadratura numérica na primeira discretização, estes últimos continuam apresentando o melhor desempenho, como é mostrado na figura 4.9b.

Confirma-se que o incremento de pontos de integração nas técnicas de quadratura numérica não melhoram de maneira apreciável a precisão.

Na tabela 4.4 e figura 4.11 temos os resultados para quadratura de Gauss simples, que mostram a necessidade da utilização de técnicas especiais de integração, já que não são obtidos resultados satisfatórios.

Tabela 4.4 - Resultados para problema de torção de barra de seção elíptica utilizando quadratura de Gauss simples

Número de Elementos	Erro (%) segundo número de pontos de integração								
	4	6	8	10	12	14	16	18	20
5	3.55525	0.89911	0.14413	0.66575	0.97461	1.16678	1.29719	1.38641	1.45504
10	2.67673	1.32464	0.79616	0.52848	0.37749	0.28826	0.21963	0.17845	0.14413



Figura 4.11 - Resultados do problema 4.3.4 utilizando quadratura de Gauss simples

4.4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS DE ELASTOSTÁTICA BIDIMENSIONAL

4.4.1 - Viga em balanço com momento fletor no extremo

Considera-se uma viga horizontal de seção retangular com largura b , altura d e comprimento L , engastada num dos extremos e submetida a um momento fletor M , que é constante ao longo do comprimento como é mostrado na figura 4.12 (a). A solução analítica obtida para o deslocamento na direção y no extremo da barra, utilizando a teoria da elasticidade para o estado plano de tensões é, (Fenner, 1986):

$$v = -\frac{ML^2}{2EI} \quad (4.2)$$

Onde v é o deslocamento no extremo na direção y , M é a magnitude do momento fletor aplicado, L é o comprimento da viga, E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia.

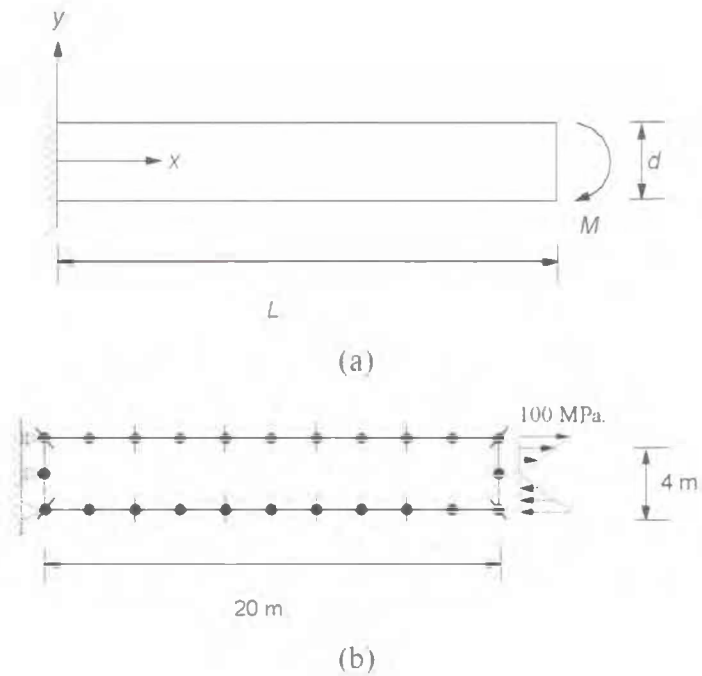


Figura 4.12 - (a) Viga em balanço com momento fletor no extremo
 (b) modelo discretizado com 12 elementos de contorno quadráticos

Para o problema analisado as seguintes propriedades físicas e geométricas foram utilizadas

$$\begin{aligned}
 L &= 20 \text{ m.} \\
 d &= 4 \text{ m.} \\
 G &= 800.000 \text{ Mpa.} \\
 \nu &= 0,25
 \end{aligned}$$

as quais fornecem como resultado para o deslocamento na direção vertical, $v = 5 \text{ cm}$.

4.4.2 - Flexão de viga em balanço devido a uma força atuando no extremo

Estudaremos agora a mesma viga do exemplo anterior, ou seja com as mesmas propriedades geométricas e elásticas, mas agora submetida a uma força cisalhante no extremo livre, como é mostrado na figura 4.13a.

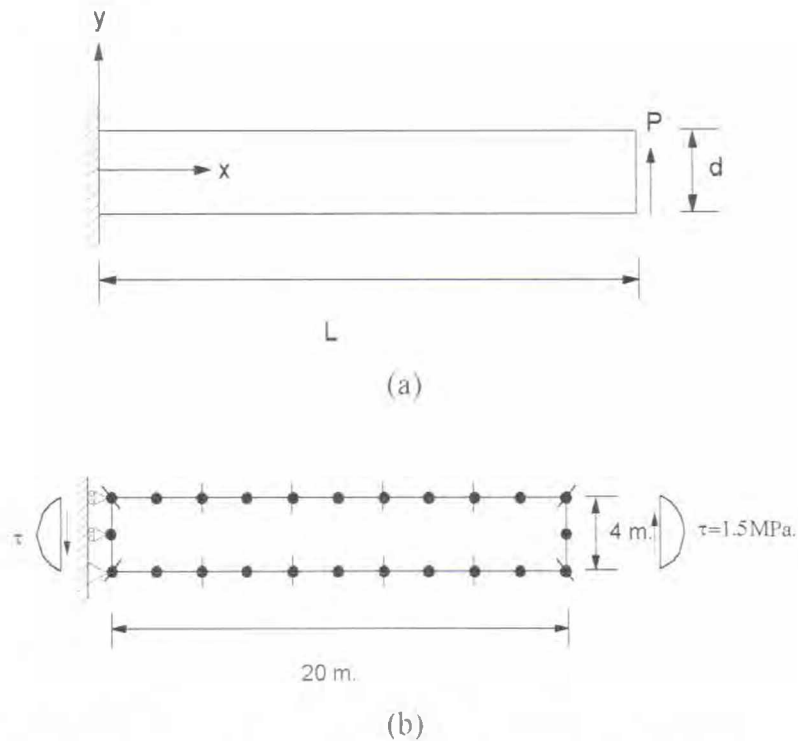


Figura 4.13 - (a) Viga em balanço com força cisalhante no extremo
 (b) modelo discretizado com 12 elementos de contorno quadráticos

A teoria de elasticidade fornece para o deslocamento no extremo da viga na direção y , considerando o efeito de distorção das tensões cisalhantes no extremo (Fenner, 1986):

$$v = -\frac{PL^3}{3EI} - \frac{P(4 + 5\nu)Ld^2}{24EI} \quad (4.3)$$

Onde P é o valor da força cisalhante atuando no extremo da viga.

Considerando que no ponto médio do extremo livre da barra, a tensão de cisalhamento é:

$$\tau = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2) \quad (4.4)$$

Substituindo os valores da geometria do problema, ou seja $c = 2$ e $y = 0$, a equação (4.4) fornece:

$$\frac{P}{l} = \frac{\tau}{2} \quad (4.5)$$

dado que nos permite a aplicação direta da equação (4.3), para o cálculo analítico do deslocamento, resultando neste caso $v = 10.267$ cm.

4.4.3 - Resultados dos exemplos 4.4.1 e 4.4.2

Nestes exemplos foram utilizadas cinco discretizações, começando a primeira com 12 elementos e a última com 192. Similarmente aos problemas de potencial, cada exemplo foi rodado várias vezes variando o número de pontos de integração para cada discretização, com o intuito de testar a convergência e o comportamento de cada método.

Foi testado o desempenho das técnicas somente para a integração singular, ou seja para os elementos da diagonal principal da matriz \mathbf{G} , calculando o resto dos elementos da matriz, como foi justificado anteriormente, com quadratura de Gauss simples com 10 pontos de integração.

A tabela 4.5 mostra os resultados e os valores dos erros obtidos para o cálculo do deslocamento do extremo da viga em balanço do problema 4.4.1.

Podemos fazer uma análise melhor destes resultados observando os gráficos da variação do erro de acordo com a discretização e número de pontos de integração na figura 4.14.

Nestes gráficos tanto os erros percentuais para quadratura logaritmica como para o método Dumont foram tirados, já que são aproximadamente zero em todos os casos.

Percebe-se a sensibilidade ao número de pontos de integração da técnica de pontos fictícios, que precisa de pelo menos oito pontos de integração para fornecer resultados satisfatórios.

Os resultados obtidos para o problema 4.4.2 mostram-se na tabela 4.6 e a respectiva representação gráfica na figura 4.15.

Devido à maior complexidade do problema nenhuma das técnicas consegue fornecer o resultado analítico, como aconteceu no problema anterior.

Tabela 4.5 - Resultados para problema de viga em balanço com momento fletor no extremo

Quadratura Gaussiana Logarítmica Unidimensional

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Transformação quadrática

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	-4.99730	-5.02796	-5.02162	-5.01299	-5.00704	0.05400	0.55914	0.43244	0.25770	0.14072
6	-4.99974	-5.00887	-5.00680	-5.00405	-5.00221	0.00512	0.17744	0.13590	0.08096	0.04426
8	-4.99995	-5.00391	-5.00298	-5.00177	-5.00097	0.00096	0.07810	0.05962	0.03548	0.01938
10	-4.99999	-5.00205	-5.00157	-5.00093	-5.00051	0.00026	0.04108	0.03132	0.01862	0.01018

Transformação cúbica

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	-5.01507	-5.00602	-5.00269	-5.00127	-5.00062	0.30134	0.12042	0.05384	0.02546	0.01234
6	-5.00338	-5.00134	-5.00060	-5.00028	-5.00014	0.06768	0.02684	0.01196	0.00566	0.00274
8	-5.00115	-5.00045	-5.00020	-5.00010	-5.00005	0.02296	0.00908	0.00404	0.00192	0.00092
10	-5.00049	-5.00019	-5.00009	-5.00004	-5.00002	0.00982	0.00388	0.00172	0.00082	0.00040

Método Subdivisão Progressiva

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	-4.97646	-4.98932	-4.99480	-4.99742	-4.99871	0.47082	0.21368	0.10394	0.05170	0.02586
6	-4.98881	-4.99491	-4.99752	-4.99877	-4.99938	0.22382	0.10176	0.04954	0.02464	0.01232
8	-4.99348	-4.99703	-4.99856	-4.99928	-4.99964	0.13050	0.05938	0.02890	0.01438	0.00720
10	-4.99573	-4.99806	-4.99905	-4.99953	-4.99976	0.08540	0.03886	0.01892	0.00942	0.00472

Método Pontos Fictícios

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	-5.05270	-4.80593	-4.96653	-4.97560	-5.06135	1.05404	3.88146	0.66932	0.48802	1.22694
6	-5.00466	-4.99133	-4.99971	-4.99922	-4.99935	0.09318	0.17346	0.00584	0.01556	0.01300
8	-5.00017	-4.99965	-4.99999	-4.99996	-4.99997	0.00390	0.00692	0.00024	0.00072	0.00056
10	-5.00001	-4.99999	-5.00000	-5.00000	-5.00000	0.00014	0.00025	0.00000	0.00002	0.00002

Método Dumont

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	-5.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

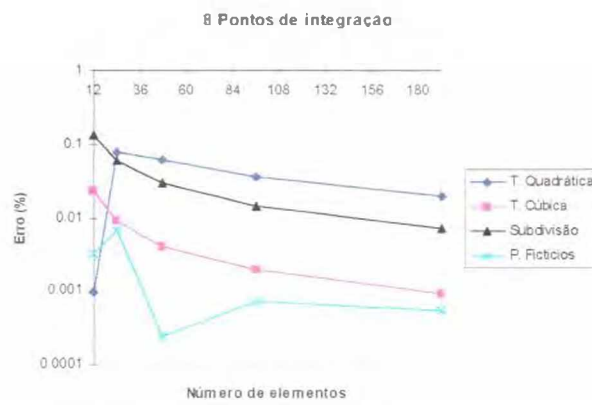
a)



b)



c)



d)

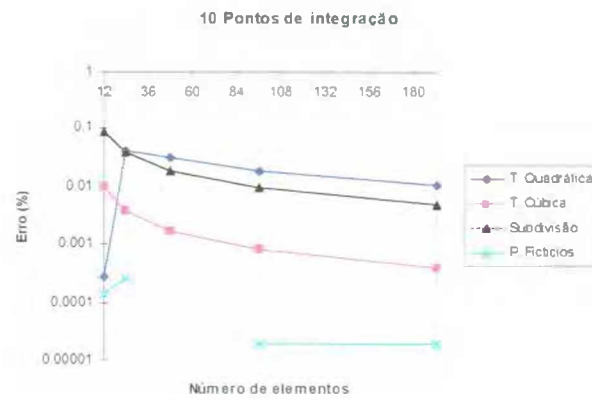


Figura 4.14 - Representação gráfica da variação do erro para o problema 4.4.1

Tabela 4.6 - Resultados para problema de viga em balanço com força cortante no extremo

Quadratura Gaussiana Logarítmica Unidimensional

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	10.16917	10.24989	10.26391	10.26637	10.26680	0.95286	0.16665	0.03010	0.00614	0.00195
6	10.16917	10.24989	10.26391	10.26637	10.26680	0.95286	0.16665	0.03010	0.00614	0.00195
8	10.16917	10.24989	10.26391	10.26637	10.26680	0.95286	0.16665	0.03010	0.00614	0.00195
10	10.16917	10.24989	10.26391	10.26637	10.26680	0.95286	0.16665	0.03010	0.00614	0.00195

Transformação quadrática

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	9.82038	10.09911	10.20854	10.24360	10.25641	4.35010	1.63524	0.56940	0.22791	0.10315
6	9.81901	10.09797	10.20777	10.24314	10.25615	4.36344	1.64634	0.57690	0.23240	0.10568
8	9.81883	10.09779	10.20764	10.24306	10.25610	4.36517	1.64810	0.57816	0.23317	0.10617
10	9.81878	10.09774	10.20760	10.24303	10.25608	4.36565	1.64858	0.57855	0.23347	0.10636

Transformação cúbica

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	10.19352	10.29188	10.28758	10.27808	10.27248	0.71569	0.24233	0.20045	0.10792	0.05337
6	10.18937	10.26410	10.27138	10.27006	10.26861	0.75611	0.02825	0.04266	0.02980	0.01568
8	10.17788	10.25511	10.26719	10.26799	10.26759	0.86802	0.10607	0.00185	0.00964	0.00575
10	10.17373	10.25316	10.26563	10.26722	10.26722	0.90844	0.13480	0.01334	0.00214	0.00214

Método Subdivisão Progressiva

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	10.16399	10.24568	10.26126	10.26488	10.26600	1.00331	0.20766	0.05591	0.02065	0.00974
6	10.16688	10.24788	10.26264	10.26566	10.26642	0.97711	0.18623	0.04247	0.01305	0.00565
8	10.16771	10.24872	10.26317	10.26596	10.26658	0.96708	0.17805	0.03730	0.01013	0.00409
10	10.16822	10.24912	10.26343	10.26610	10.26665	0.96211	0.17415	0.03477	0.00877	0.00341

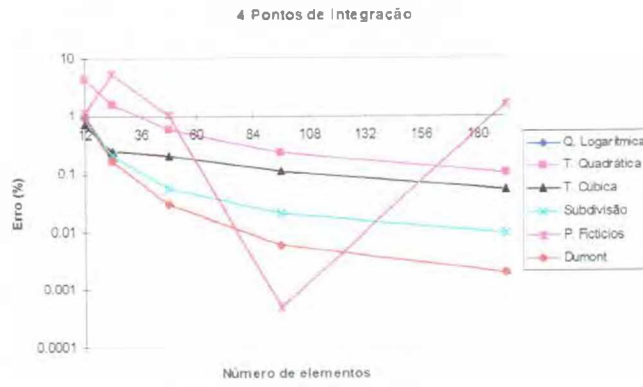
Método Pontos Fictícios

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	10.15205	9.72695	10.16047	10.26695	10.08845	1.11961	5.26011	1.03760	0.00049	1.64167
6	10.15205	10.23199	10.26119	10.26695	10.26667	1.11961	0.34100	0.05659	0.00049	0.00321
8	10.26453	10.25447	10.26418	10.26695	10.26681	0.02406	0.12204	0.02747	0.00049	0.00185
10	10.26589	10.25535	10.26430	10.26695	10.26683	0.01081	0.11347	0.02630	0.00049	0.00166

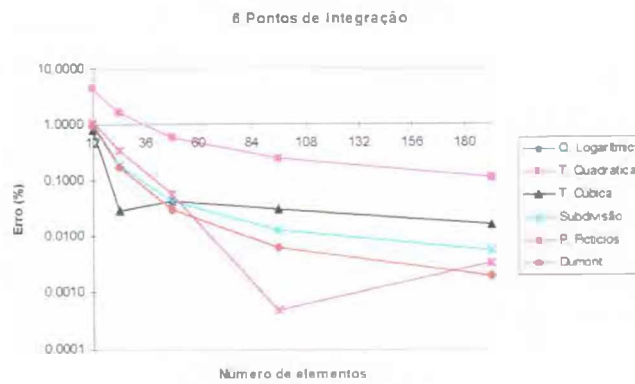
Método Dumont

Pontos de Integração	Resposta segundo número de Elementos					Erro (%) segundo número de Elementos				
	12	24	48	96	192	12	24	48	96	192
4	10.16917	10.24989	10.26391	10.26637	10.26680	0.95286	0.16665	0.03010	0.00614	0.00195
6	10.16917	10.24989	10.26391	10.26637	10.26680	0.95286	0.16665	0.03010	0.00614	0.00195
8	10.16917	10.24989	10.26391	10.26637	10.26680	0.95286	0.16665	0.03010	0.00614	0.00195
10	10.16917	10.24989	10.26391	10.26637	10.26680	0.95286	0.16665	0.03010	0.00614	0.00195

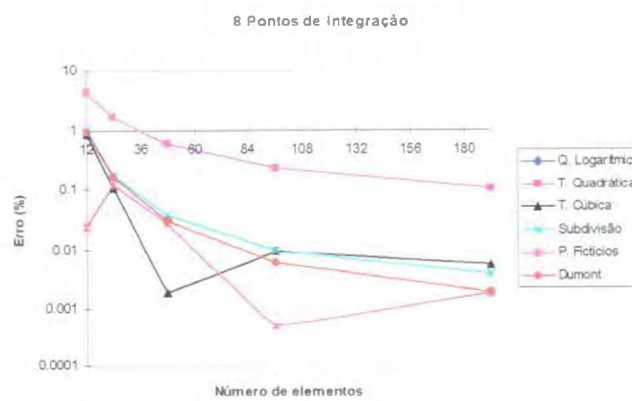
a)



b)



c)



d)

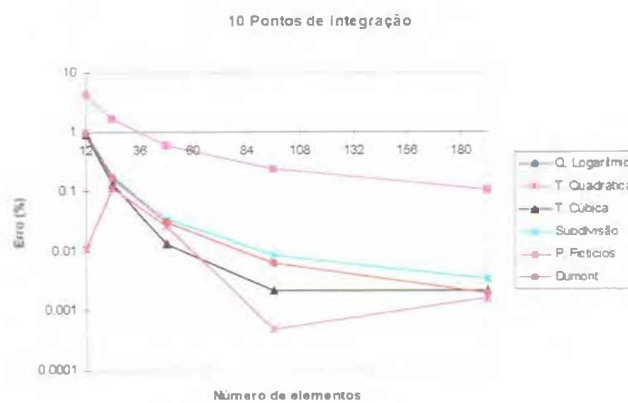


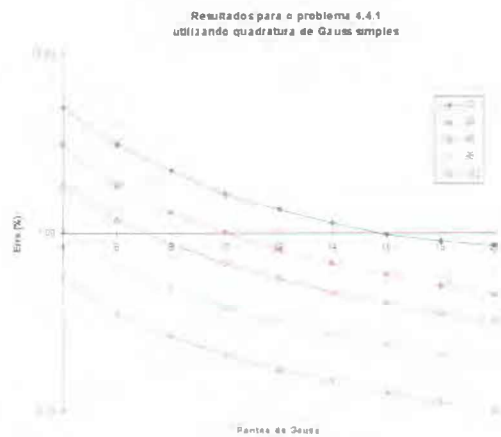
Figura 4.15 - Representação gráfica da variação do erro para o problema 4.4.2

As técnicas de quadratura específica ainda mostram os melhores resultados mas, a diferença com as outras técnicas já não é tão marcante.

Confirma-se a dependência da técnica de pontos fictícios, de um número mínimo de pontos de integração para obter resultados razoáveis.

Para efeitos de comparação, na figura 4.16 temos os resultados da solução dos problemas anteriores utilizando quadratura de Gauss simples. Nota-se uma melhora na precisão, em comparação a os resultados obtidos nos problemas 4.3.1 e 4.3.2 (problemas de potencial), mas ainda esta não é satisfatória.

a)



b)

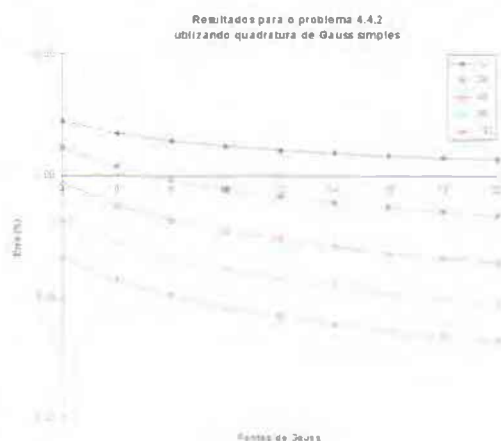


Figura 4.16 - Resultados dos problemas 4.4.1 e 4.4.2 utilizando quadratura de Gauss simples

4.4.4 - Placa com furo submetida a tensão uniaxial constante

Consideremos agora o caso de uma placa retangular de dimensões $L \times 2L$, que contém um furo circular de raio a , submetida a uma tensão uniaxial σ_0 . A placa é suficientemente delgada para que as condições de estado plano de tensões sejam válidas. Os valores numéricos para este problema são $L = 1.0 \text{ m}$, $a = 0.1 \text{ m}$ e $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$, com as propriedades elásticas seguintes $G = 80\,000 \text{ MPa}$ e $\nu = 0.2$.

A solução analítica para a tensão axial ao redor de um furo para uma placa infinita é dada por (Timoshenko e Goodier, 1970):

$$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0} = 0.5 \left[2 + \left(\frac{a}{x} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{x} \right)^4 \right] \quad (4.6)$$

onde x é a distância desde o centro do furo.

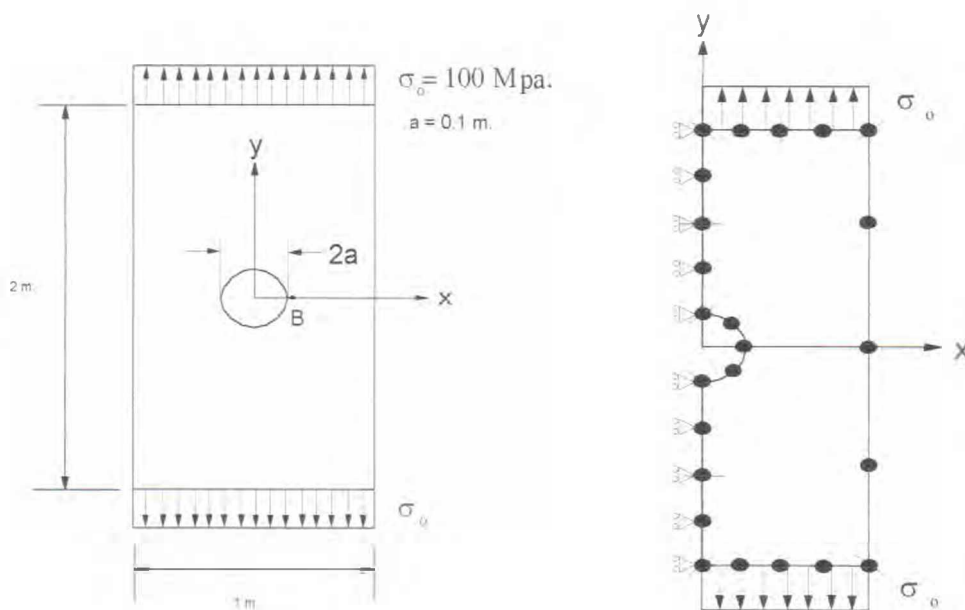


Figura 4.17 - Propriedades geométricas e primeira discretização com elementos de contorno do problema 4.4.3

Levando-se em conta a simetria do problema, somente a metade da placa foi discretizada. Para a análise foram utilizadas 5 discretizações (12, 24, 48, 96 e 192 elementos) e, similarmente aos problemas anteriores, diferente número de pontos de integração de Gauss.

O objetivo deste problema é testar as técnicas no caso de integração quase-singular, para fazer isto vamos calcular o valor da tensão axial para o ponto B ($x = 0.11$), que se encontra próximo ao contorno.

As técnicas que foram testadas são: transformação cúbica, subdivisão progressiva e para comparação integração de Gauss simples. No caso de integração singular foi utilizada quadratura gaussiana logarítmica unidimensional em todos os casos.

A equação (4.6) fornece para $x = 0.11$, a tensão $\sigma_{yy} = 243.774$ MPa.

4.4.5 - Resultados do problema 4.4.4

A tabela 4.7 mostra os resultados obtidos para o problema 4.4.4 e a figura 4.18 a respectiva representação gráfica.

Tabela 4.7 - Resultados obtidos para o problema de placa com furo sob tensão uniaxial

4 Pontos de integração

MÉTODO	Erro (%) segundo o número de elementos				
	12	24	48	96	192
Gauss simples	51.58155	21.58479	6.49841	1.88608	0.48370
T. Cúbica	49.33533	16.30404	2.73603	1.60737	0.03217
Subdivisão	10.69434	10.32691	4.94965	1.13751	0.05853

6 Pontos de integração

MÉTODO	Erro (%) segundo o número de elementos				
	12	24	48	96	192
Gauss simples	27.31328	12.64550	4.27357	1.19749	0.27637
T. Cúbica	22.24634	0.62916	3.95233	0.89138	0.02577
Subdivisão	8.93682	7.52371	3.30641	1.00329	0.01492

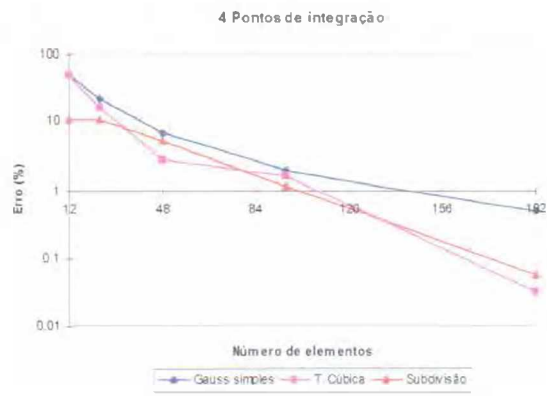
8 Pontos de integração

MÉTODO	Erro (%) segundo o número de elementos				
	12	24	48	96	192
Gauss simples	11.98842	8.14600	4.31995	1.07338	0.02561
T. Cúbica	3.76642	6.47167	2.57878	0.95989	0.01045
Subdivisão	6.47946	5.90680	2.60450	0.95751	0.01412

10 Pontos de integração

MÉTODO	Erro (%) segundo o número de elementos				
	12	24	48	96	192
Gauss simples	5.40597	6.72502	3.68646	0.92350	0.02561
T. Cúbica	4.50505	5.60361	3.08477	0.92453	0.01810
Subdivisão	4.48828	5.58741	3.06499	0.92031	0.01385

a)



b)



c)



d)

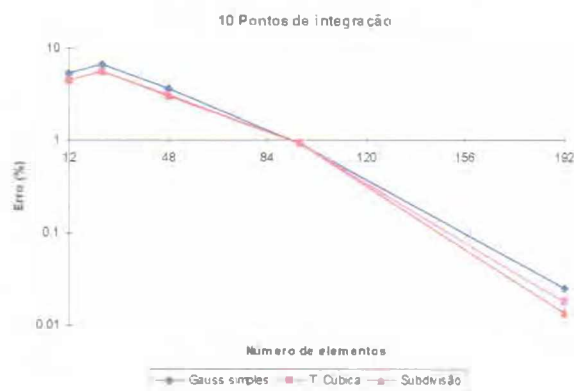


Figura 4.18 - Representação gráfica dos resultados do problema 4.4.3

Pode-se observar que efetivamente estes métodos melhoram a precisão deste tipo de cálculo, sobretudo quando são utilizados poucos pontos de integração.

Os resultados obtidos por subdivisão e transformação cúbica são comparáveis, com uma ligeira vantagem do método de subdivisão.

Nota-se que o desempenho da integração simples de Gauss melhora a medida que são incrementados os pontos de integração e a discretização, o que sugeriria que o problema de quase-singularidade poderia ser controlado com a otimização destes parâmetros.

É importante notar que apesar de o método de Dumont para o cálculo de integrais quase-singulares não foi implementado, é de se esperar que seja de uma precisão superior, visto que, este gera uma quadratura específica para cada localização do ponto singular, mas como foi comentado por Mon-Ma et al. (1996), a incorporação deste tipo de esquema em códigos do MEC precisa de um grande esforço, já que não somente o processo de integração está envolvido, mas também a forma da escrita dos integrandos.

No capítulo seguinte serão apresentadas as conclusões e sugestões.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 - CONCLUSÕES

Considerando os resultados obtidos ao longo deste trabalho, algumas conclusões podem ser observadas:

1. A utilização de técnicas especiais para o cálculo de integrais singulares é absolutamente necessária nas formulações do MEC, visto que a integração de Gauss simples precisaria de uma quantidade excessivamente alta de pontos de integração para fornecer resultados satisfatórios, o que envolveria também um alto custo computacional.
2. As técnicas de quadraturas específicas (quadratura Gaussiana logarítmica e o método de Dumont), embora precisem de algum esforço adicional para a sua implementação, são as opções mais recomendáveis para os tipos de problemas analisados, já que apresentam boa convergência inclusive com um número baixo de pontos de integração.
3. A precisão alcançada pelo método de Dumont é muito boa, mas envolve complexidades que dificultam a difusão do seu uso. O maior mérito do método é a sua generalidade, podendo-se aplicar a mesma metodologia para qualquer tipo de singularidade sempre que o cálculo das integrais analíticas, que este precisa, estejam disponíveis.
4. Confirma-se que os métodos de transformação não linear de coordenadas não são adequados para o cálculo de integrais singulares.
5. A técnica de subdivisão embora tenha como melhor vantagem a sua generalidade e facilidade de implementação, não é adequada para o cálculo de integrais singulares, pois precisaria de um número grande de subdivisões para atingir resultados aceitáveis, o que aumentaria excessivamente o esforço computacional.

6. A técnica de pontos fictícios apesar da sua grande facilidade de implementação, não é recomendável, visto que a convergência deste método varia muito de um problema para outro, e ao que parece esta variação depende da geometria do problema e discretização empregada.
7. Para o caso de integrais quase-singulares, embora os resultados sejam poucos, os métodos de subdivisão e transformação cúbica fornecem resultados precisos e como foi apresentado nos capítulos anteriores, a implementação destes métodos é relativamente simples.
8. A necessidade da utilização de métodos especiais para o cálculo de integrais quase-singulares não é tão evidente como no caso das integrais singulares. Aparentemente se poderia controlar o efeito de quase-singularidade otimizando a quantidade de pontos de integração de Gauss e o tamanho dos elementos.

5.2 - SUGESTÕES

A seguir de maneira sucinta, se faz as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Analisar as técnicas de integração singular para problemas tridimensionais.
- Fazer uma análise mais detalhada e exaustiva das técnicas de integração quase-singular, de forma a esclarecer a sua necessidade.
- Fazer a análise comparativa utilizando outras formulações do MEC como teoria de placas e mecânica da fratura.
- Comparar a precisão e desempenho da formulação clássica do MEC com as formulações híbridas do MEC.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BREBBIA, C. A. (1978), *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London.
- BREBBIA, C. A. and DOMINGUEZ, J. (1977), *Boundary Element Methods for Potential Problems*, Applied Mathematical Modelling, Vol. 1, pp. 372-378.
- BREBBIA, C. A. and DOMINGUEZ, J. (1989), *Boundary Elements an Introductory Course*, Computational Mechanics Publications, Southampton and Mc Graw Hill Book Company, New York.
- BREBBIA, C. A. and FERRANTE, A. J. (1978), *Computational Methods for the Solution of Engineering Problems*, Pentech Press, London.
- BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. and WROBEL, L. C. (1984), *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer -Verlag, Berlin.
- BECKER, A. A. (1992), *The boundary Element Method in Engineering*, Mc Graw Hill Book International Limited, London.
- BANERJEE, P. K. (1994), *The Boundary Element Methods in Engineerig*, Mc Graw Hill Book International Limited, London.
- BANERJEE, P. K. and BUTTERFIELD, R. (1977), *Boundary Element Methods in Geomechanics*, Ed. G. Gudehus, John Willey and Sons, London.
- BORESI, A. P. and CHONG, K. P. (1987), *Elasticity in Engineering Mechanics*, Elsevier Science Publishing Co., New York.
- BUZAR, M. A. R., (1996), *Análise de Placas com o Método dos Elementos Finitos e de Contorno na Modelagem de um Edifício*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, UnB, Brasília DF.
- DE FIGUEREIDO, T. and BREBBIA C. A.(1988), *A Hybrid Boundary Element Formulation*, Boundary Elements X, C. A. Brebbia editor, Computational Mechanics Publications, Springer Verlag, Berlin, vol. 1, pp. 33-42.
- DOMINGUEZ, J. (1977), *Cálculo de Tensiones Cercanas a Placas de Anclaje: Uma Aplicación del Método de los Elementos de Contorno*, Tesis de Doctorado, Universidad de Sevilla, Espanha.
- DOMINGUEZ, J. (1993), *Boundary Elements in Dynamics*, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, London.
- DUMONT, N. A. (1987), *The Hybrid Boundary Element Method*, Boundary Elements IX, Vol. 1: Mathematical and Computational Aspects, Brebbia C. A., Wendland W. L., Kuhn, G., editors, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, pp. 619-632.

DUMONT, N. A. (1994), *On the efficient numerical evaluation of integrals with complex singularity poles*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 13, pp. 155-168.

DUMONT, N. A. e DE SOUZA, R. M. (1992), *A Simple, Unified Technique for the Evaluation of Quasi-singular, Singular and Strongly Singular Integrals*, Boundary Elements XIV, Vol. 1: Field Problems and Applications, Brebbia C. A., Dominguez, J., Paris, F., editors, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, pp. 619-632.

DUMONT, N. A. e NORONHA, M. A. (1997), *On an Accurate Scheme for the Evaluation of Boundary Equation Integrals with Multiple Poles of Singularity*, XVIII Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Vol. 1, pp. 365-372.

FENNER R. T. (1986), *Engineering Elasticity*, Ellis Horwood Limited, Chichester.

FREDHOLM, I. (1905), *Solution d' un Problème Fondamental de a Theorie de L'elasticite*, Archives of Mathematics and Astronomy, Fysik, Vol. 2.

HUANG, Q. and CRUSE, T. A. (1993), *Some Notes on Singular Integral Techniques in Boundary Element Analysis*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 36, pp. 2643-2659.

JAWSON, M. A. (1963), *Integral Equation Methods in Potential Theory I*, Proceedings of Royal Society, London, vol. 275(A), pp. 23-32.

JAWSON, M. A. and PONTER, A. R. (1963), *An Integral equation for the Torsion Problem*, Proceedings of Royal Society, London, vol. 275(A), pp. 237-246.

KARAM, V. J. (1986), *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas*, Dissertação de Mestrado, COPPE Universidade Federal de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

KELLOG O. D. (1953), *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications Inc., New York.

LACHAT, J. C. (1975), *A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics*, Ph. D. Thesis, Univeristy of Southampton.

LACHAT, J. C. and WATSON, J. O. (1976), *Efective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 10, pp. 991-1005.

MON-MA, M. L.; VENTURINI, W. S. and CODA, H.B. (1996), *A simple technique to evaluate quasi-singular integrals*, 1st. Brazilian Seminar on the Boundary Element Method in Engineering, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

NORONHA, M. A. (1994), *Uma Sistemática para a Avaliação de Integrais Impróprias, Singulares e Quase Singulares dos Métodos de Elementos de Contorno*, Dissertação de Mestrado, Pontificia Universidade Católica de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

NORONHA, M. A. (1998), *Técnicas Avanzadas de Integração Numérica e Programação Orientada a Objetos Aplicadas a Métodos de Elementos de Contorno*, Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

PATTERSON, C. and SHEIKH, M. A. (1981), *Regular BIE for Stress Analysis in Boundary Element Method*, C. A. Brebbia Ed., Springer Verlag, New York.

RIZZO, F. J. (1967), *An integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*, Quaterly of Applied Mathematics, Vol. 25, pp. 83-95.

STROUD, A. H. and SECREST, D. (1966), *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, New York.

SYMM, G. T. (1963), *Integral Equation in Potential Theory I*, Proceedings of Royal Society, London, vol. 275(A), pp.33-46.

SZILARD, R. (1974), *Theory and Analises of Plates - Classical and Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

TELLES, J. C. F. (1987), *A Self-Adaptive Coordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pp. 959-973.

TELLES, J. C. F. and OLIVEIRA R. F. (1994), *Third Degree Polynomial Transformation for Boundary Element Integrals: Further Improvements*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 13, pp. 135-141.

TIMOSHENKO, S. and GOODIER J. N. (1970), *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York.

WEEËN, F. V. (1982), *Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18, pp. 1-10.

ANEXO A

PONTOS DE INTEGRAÇÃO DE QUADRATURAS GAUSSIANAS

A.1 - QUADRATURA DE GAUSS NORMAL

As integrais neste caso podem ser escritas da seguinte forma:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (\text{A.1})$$

A equação (A.1) está baseada na representação de $f(\xi)$ em termos dos polinômios de Legendre $P_n(\xi)$. O valor de ξ_i é a coordenada no ponto i onde P_n é zero e os pesos estão dados por

$$w_i = 2 / (1 - \xi_i^2) \left[\frac{dP_n(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i}^{-2} \quad (\text{A.2})$$

Os valores de ξ_i e w_i utilizados na presente dissertação são listados na tabela A.1

A.2 - QUADRATURA GAUSSIANA LOGARÍTMICA UNIDIMENSIONAL

As abscissas e pesos utilizados para a aplicação da técnica descrita na seção 3.4.1 são mostrados na tabela A.2

Tabela A.1 - Abcissas e pesos para integração de Gauss unidimensional normal

n	$\pm \xi_i$	w_i
4	0.861136311594052 0.339981043584856	0.347854845137453 0.652145154862546
6	0.932469514203152 0.661209386466264 0.238619186083196	0.171324492379170 0.360761573048138 0.467913934572691
8	0.960289856497536 0.796666477413626 0.525532409916328 0.183434642495649	0.101228536290376 0.222381034453374 0.313706645877887 0.362683783378361
10	0.973906528517171 0.865063366688984 0.679409568299024 0.433395394129247 0.148874338981631	0.066671344308688 0.149451349150580 0.219086362515982 0.269266719309996 0.295524224714752
12	0.981560634246719 0.904117256370474 0.769902674194304 0.587317954286617 0.367831498998180 0.125233408511468	0.047175336386512 0.106939325995318 0.160078328543346 0.203167426723065 0.233492536538354 0.249147045813402
14	0.986283808696812 0.928434883663573 0.827201315069764 0.687292904811685 0.515248636358154 0.319112368927889 0.108054948707343	0.035119460331752 0.080158087159760 0.121518570687903 0.157203167158193 0.185538397477937 0.205198463721295 0.215263853463157
16	0.989400934991649 0.944575023073232 0.865631202387831 0.755404408355003 0.617876244402643 0.458016777657227 0.281603550779258 0.095012509837637	0.027152459411754 0.062253523938648 0.095158511682493 0.124628971255533 0.149595988816576 0.169156519395002 0.182603415044923 0.189450610455068
18	0.991565168420930 0.955823949571397 0.892602466497555 0.803704958972523 0.691687043060353 0.559770831073947 0.411751161462842 0.251886225691505 0.084775013041735	0.021616013526483 0.049714548894970 0.076425730254889 0.100942044106287 0.122555206711478 0.140642914670650 0.154684675126265 0.164276483745832 0.169142382963143
20	0.993128599185094 0.963971927277913 0.912234428251325 0.839116971822218 0.746331906460150 0.636053680726515 0.510867001950827 0.373706088715419 0.227785851141645 0.076526521133497	0.017614007139152 0.040601429800387 0.062672048334109 0.083276741576705 0.101930119817240 0.118194531961518 0.131688638449176 0.142096109318382 0.149172986472603 0.152753387130725

Tabela A.2 - Abcissas e pesos para quadratura Gaussiana logaritmica unidimensional

n	x_i	w_i
4	0.041448480199383	0.383464068145135
	0.245274914320602	0.386875317774762
	0.556165453560275	0.190435126950142
	0.848982394532985	0.039225487129960
6	0.021634005844117	0.238763662578547
	0.129583391154950	0.308286573273946
	0.314020449914765	0.245317426563210
	0.538657217351802	0.142008756566476
	0.756915337377402	0.055454622324886
	0.922668851372120	0.010168958692932
8	0.013320244160892	0.164416604728002
	0.079750429013895	0.237525610023306
	0.197871029326188	0.226841984431919
	0.354153994351909	0.175754079006070
	0.529458575234917	0.112924030246759
	0.701814529939099	0.057872210717782
	0.849379320441106	0.020979073742133
	0.953326450056359	0.003686407104028
10	0.009042630962199	0.120955131954570
	0.053971266222500	0.186363542564071
	0.135311824639250	0.195660873277759
	0.247052416287159	0.173577142182906
	0.380212539609332	0.135695672995484
	0.523792317971843	0.093646758538110
	0.665775205516424	0.055787727351415
	0.794190416011966	0.027159810899233
	0.898161091219003	0.009515182602848
	0.968847988718633	0.001638157633598

ANEXO B

EXEMPLOS DE OBTENÇÃO DE PESOS PARA A IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE DUMONT

B.1 - INTRODUÇÃO

Neste anexo serão mostrados exemplos da obtenção dos pesos para o método de quadratura específica de Dumont, seguindo a metodologia descrita na seção 3.4.5

B.2 - EXEMPLO 1

Considere a integral

$$\int_0^1 \ln(2.004 - 2\xi) 4\sqrt{\xi^2 - 3\xi + 2.5} d\xi \quad (\text{B.1})$$

cuja parcela singular pode-se identificar como sendo (Noronha, 1998):

$$\omega(\xi) = \ln(2.004 - 2\xi) \quad (\text{B.2})$$

a parcela regular será o resto da expressão e o ponto de singularidade será $\xi = 1.002$,

Calcula-se os pesos para 5 pontos de integração. As abscissas de Gauss-Legendre podem ser tiradas de Stroud e Secrest (1966), por exemplo, mas estas não podem ser aplicadas diretamente pois precisamos fazer uma conversão do intervalo de integração de $[-1,1]$ a $[0,1]$ tal como é mostrado na tabela B.1

Tabela B.1 - Abcissas para quadratura especifica

Abcissas de Gauss	Abcissas transformadas
-0.906179845938663	0.046910077030668
-0.538469310105683	0.230765344947158
0.000000000000000	0.500000000000000
0.538469310105683	0.769234655052841
0.906179845938663	0.953089922969331

Para o cálculo dos pesos para cinco abcissas precisamos de um polinômio de Lagrange de quarta ordem, assim

$$\lambda_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 \frac{(\xi_j - \xi_i)}{(\xi_j - \xi_i)} \quad (\text{B.3})$$

Expandindo a equação (3.55), para a obtenção, por exemplo, do terceiro peso, precisaremos do calculo da seguinte integral:

$$h_3 = \int_0^1 \frac{(\xi_2 - \xi)(\xi_1 - \xi)(\xi_4 - \xi)(\xi_5 - \xi)}{(\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_4 - \xi_3)(\xi_5 - \xi_3)} \ln(2.004 - 2x) dx \quad (\text{B.4})$$

A qual pode ser decomposta em expressões como a equação (4.57). Em nosso caso os pesos foram obtidos utilizando o programa *Mathematica* versão 2.1 e são mostrados na tabela B.2.

Tabela B.2 - Pesos de quadratura especifica com 5 abcissas

Pesos de integração
0.074630634059679
0.110808196785936
-0.012673661667921
-0.161258766263510
-0.303928007489315

B.3 EXEMPLO 2

Considere agora o caso da integral

$$\int_0^1 \ln(\xi - \xi_0) f(x) dx \quad (\text{B.5})$$

que é o caso que normalmente se apresenta em problemas elastostáticos e de potencial no caso bidimensional, sendo ξ_0 o ponto de singularidade.

Seguindo a metodologia mostrada para o cálculo dos pesos as integrais a serem calculadas serão da forma:

$$h_i = \int_0^1 \ln(\xi - \xi_0) \lambda_i dx \quad (\text{B.6})$$

Considerando que $\xi_0 = 0$, caso que se apresenta quando dentro de um elemento quadrático o ponto singular se encontra no primeiro nó, calculou-se os pesos para 4, 6, 8 e 10 abscissas.

Os resultados são mostrados na tabela B.3

B.4 - CASO DE PONTO SINGULAR COMPLEXO

Para o caso de integrais quase singulares de funções logarítmicas com ponto singular complexo ou seja $\xi_0 = a + bi$, pode-se mostrar que a função de singularidade será:

$$\rho(\xi) = \xi^2 - 2a\xi + a^2 + b^2 \quad (\text{B.7})$$

e para o cálculo de pesos precisaremos do cálculo de integrais do tipo

$$\int_0^1 \ln(\rho) \xi^i d\xi \quad (\text{B.8})$$

Tabela B.3 - Abcissas e pesos para quadratura especifica do exemplo 2

n	ξ_i	w_i
4	0.069431844202974	0.518260508589215
	0.330009478207571	-0.325294607302540
	0.669990521792428	-0.149347866887035
	0.930568155797026	-0.007097017221209
6	0.033765242898424	-0.317012079596193
	0.169395306766867	-0.300154493979267
	0.380690406958401	-0.239852670405832
	0.619309593041598	-0.103388067580628
	0.830604693233132	-0.037922395442491
	0.966234757101576	-0.001670292995588
8	0.019855071751232	-0.214184630033774
	0.101666761293186	-0.241777885070934
	0.237233795041835	-0.235037851504963
	0.408282678752175	-0.155545765599807
	0.591717321247824	-0.099959144339999
	0.762766204958164	-0.039462364457686
	0.898333238706813	-0.013455896913643
	0.980144928248768	-0.000576462079194
10	0.013046735741414	-0.155065191357337
	0.067468316655508	-0.193125698288579
	0.160295215850487	-0.207099402900075
	0.283302302935376	-0.164654491290486
	0.425562830509184	-0.130217874618281
	0.574437169490815	-0.078951918899059
	0.716697697064623	-0.046917937823965
	0.839704784149512	-0.017837013033166
	0.932531683344492	-0.005881799696144
	0.986953264258585	-0.000248672092906

cuja solução pode ser expressa como (Noronha, 1994):

$$\int_0^1 \ln(\rho) \xi^j d\xi = \ln(\rho) \frac{\xi^{j+1} - A_{j-1}}{j+1} + \frac{2}{j+1} \left[\frac{(a^2 + b^2)A_0 - aA_{j-1}}{b} \arctan \frac{\xi - a}{b} - \sum_{k=0}^j A_k \frac{\xi^{k+1}}{k+1} \right] \quad (\text{B.9})$$

válida para $j \geq 0$, onde

$$\begin{aligned} A_j &= 1 \\ A_{j-1} &= a \\ A_{k-2} &= 2aA_{k-1} - (a^2 + b^2)A_k, \quad k = j, \dots, 1 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

As constantes A_k , $k = 0, \dots, j$, são os coeficientes do polinômio obtido como o quociente entre o polinômio $\xi^{j+1}(\xi - a)$ e $\rho(\xi)$.