



**O MÉTODO RÁPIDO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
COM EXPANSÃO EM MULTIPOLOS
PARA PROBLEMAS ELÁSTICO-ANISOTRÓPICOS
EM DUAS DIMENSÕES**

AFONSO BARROS DIAS JÚNIOR

**TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**O MÉTODO RÁPIDO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
COM EXPANSÃO EM MULTIPOLOS
PARA PROBLEMAS ELÁSTICO-ANISOTRÓPICOS
EM DUAS DIMENSÕES**

AFONSO BARROS DIAS JÚNIOR

**ORIENTADOR: PROF. DR. ÉDER LIMA DE ALBUQUERQUE, ENM/UNB
COORIENTADOR: PROF. PHD PAULO SOLLERO, ENM/UNICAMP**

TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**PUBLICAÇÃO PCMEC.TD -
BRASÍLIA-DF, 13 DE 08 DE 2019.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**O MÉTODO RÁPIDO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
COM EXPANSÃO EM MULTIPÓLOS
PARA PROBLEMAS ELÁSTICO-ANISOTRÓPICOS
EM DUAS DIMENSÕES**

AFONSO BARROS DIAS JÚNIOR

TESE DE DOUTORADO ACADÊMICO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA.

APROVADA POR:

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, ENM/UNB
Orientador

Prof. PhD Paulo Sollero, ENM/Unicamp
Examinador externo

Prof. PhD Artur Portela, ENC/UNB
Examinador interno

Prof. Dr. Taygoara Felamingo de Oliveira, ENM/UNB
Examinador externo

BRASÍLIA, 13 DE 08 DE 2019.

FICHA CATALOGRÁFICA

AFONSO BARROS DIAS JÚNIOR

O método rápido dos elementos de contorno com expansão em multipolos para problemas elástico-anisotrópicos em duas dimensões

2019xv, 100p., 201x297 mm

(ENM/FT/UnB, Doutor, Engenharia Mecânica, 2019)

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

AFONSO BARROS DIAS JÚNIOR (2019) O método rápido dos elementos de contorno com expansão em multipolos para problemas elástico-anisotrópicos em duas dimensões. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Publicação, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 100p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: AFONSO BARROS DIAS JÚNIOR

TÍTULO: O método rápido dos elementos de contorno com expansão em multipolos para problemas elástico-anisotrópicos em duas dimensões.

GRAU: Doutor ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de Doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de Doutorado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

AFONSO BARROS DIAS JÚNIOR

Correio Eletrônico: afonso.enm@gmail.com

Agradecimento

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para sucesso dessa tese:

- *Ao professor Éder Lima de Albuquerque pela supervisão e ensinamentos transmitidos ao longo da minha vida acadêmica;*
- *Aos meus pais Afonso Barros Dias e Maria de Deus Gomes Santana Dias, juntamente com meus familiares Ana Paula Gomes Dias e Wanderson José Cunha, pelo apoio durante todos esses anos; e a Juliana Rangel pelo suporte no final dessa jornada;*
- *Aos amigos que eu fiz durante essa meus anos de graduação e pós-graduação;*
- *Ao Departamento de Engenharia Mecânica da UNB pela infra-estrutura fornecida;*
- *A CAPES pelo apoio financeiro;*

ABSTRACT

This work presents a formulation of the Fast Multipole Boundary Element Method (FMBEM) applied to the analysis of anisotropic elastic problems in two dimensions. Integral equations are obtained using the Somigliana identity. Displacement and traction fundamental solutions obtained by the Lekhnitskii formalism are used in order to transform domain integral equations into boundary integral equations. The boundary is discretized into small boundary pieces, called boundary elements, considering that displacements and tractions are constants along each boundary element. Integrals are divided into near and far field. Near field, when source points and integration elements are near, are treated as in standard boundary element method, i.e., integrating along the boundary and considering the interaction between source points (nodes) and elements. On the other hand, in far field, the fast multipole method is applied. In this case, the fundamental solution is expanded into Laurent series and the node to node interaction is substituted by a cell to cell interaction. Cells are generated by an hierarchical decomposition of the domain using the quad-tree algorithm. Different multipole operations are used in order to take advantage of the hierarchical decomposition of the domain and the expansions of fundamental solutions. Influence matrices are never explicitly obtained and the matrix-vector product can be carried out with linear complexity. The linear system is solved by an iterative method, in this problem the generalized minimum residue method (GMRES) was chosen based on previous work. A preconditioner matrix is used in order to reduce the number of iterations to obtain the specified accuracy. The effectiveness and efficiencies in solving large-scale problems are discussed. The formulation presented in this thesis is based on a complex-variable representation of the kernels, similar to the formulation developed earlier for potential (scalar) problems. Validation is carried out through comparison of results obtained by both formulations: the standard boundary element method and the fast multipole boundary element method. It is analyzed the influence of the number of terms in the series expansion on the computation of fundamental solution and influence matrices. The computational cost of both formulations are compared. Numerical examples are presented to further demonstrate the efficiency, accuracy and potentials of the fast multipole BEM for solving large-scale anisotropic elastic problems.

Keywords: Boundary element method, fast multipole, anisotropic elasticity, composite materials, hierarchical matrices.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma formulação do método dos elementos de contorno com expansão em multipolos rápidos (FMBEM) aplicado à análise de problemas elásticos anisotrópicos em duas dimensões. Equações integrais são obtidas usando a identidade de Somigliana. Soluções fundamentais de deslocamento e tração obtidas pelo formalismo de Lekhnitskii são usadas para transformar equações integrais de domínio em equações integrais de contorno. O contorno é discretizado em pequenos pedaços do contorno, chamados de elementos de contorno, considerando que deslocamentos e trações são constantes ao longo de cada elemento de contorno. As Integrais são divididas em campo próximo e campo distante. Campo próximo, quando os pontos fontes e os elementos de integração estão próximos, são tratados como no método do elemento de contorno padrão, ou seja, integrando ao longo do elemento e considerando a interação entre pontos fontes (nós) e os elementos. Por outro lado, no campo distante, quando os pontos fontes e os elementos de integração estão longes, o método dos multipolos rápidos é aplicado. Nesse caso, a solução fundamental é expandida em série de Laurent e a interação nó a nó é substituída por uma interação célula a célula. As células são geradas por uma decomposição hierárquica do domínio usando o algoritmo quad-tree. Diferentes operações de multipolos rápidos são usadas para tirar vantagem da decomposição hierárquica do domínio e das expansões das soluções fundamentais. As matrizes de influência nunca são explicitamente obtidas e o produto matriz-vetor pode ser realizado com complexidade linear. O sistema linear é resolvido por um método iterativo. Nesta tese o método dos resíduos mínimos generalizados (GMRES) foi escolhido com base em trabalhos anteriores. Uma matriz de condicionamento é usada para reduzir o número de iterações para obter um resultado com a precisão especificada. A eficácia e eficiência na solução de problemas de larga escala são discutidas. A formulação apresentada nesta tese é baseada em uma representação de variáveis complexas dos integrandos, similar à formulação desenvolvida anteriormente para problemas potenciais (escalares). A validação é realizada através da comparação dos resultados obtidos pelas duas formulações: o método dos elementos de contorno padrão e o método dos elementos de contorno com expansão em multipolos rápidos. Analisa-se a influência do número de termos da expansão em séries no cálculo das soluções fundamentais e das matrizes de influência. O custo computacional de ambas as formulações é comparado. Exemplos numéricos são apresentados para demonstrar a eficiência, a precisão e os potencial do método dos elementos de contorno com expansão em multipolos rápidos para resolver problemas elásticos anisotrópicos de larga escala, ou seja, com dezenas de milhares de graus de liberdades.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno, expansão em multipolos rápidos, elasticidade anisotrópica, materiais compósitos, matrizes hierárquicas.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	IDEIAS BÁSICAS	1
1.2	MÉTODO RÁPIDO COM EXPANSÃO EM MULTIPOLOS	3
1.3	OBJETIVO	7
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	7
2	FUNDAMENTOS DA ELASTICIDADE PARA PROBLEMAS ANISOTRÓPICOS	9
2.1	INTRODUÇÃO	9
2.1.1	DESLOCAMENTOS, DEFORMAÇÕES E GRADIENTE DAS DEFORMAÇÕES .	10
2.1.2	TENSOR DE DEFORMAÇÕES DE GREEN-LAGRANGE	13
2.2	EQUAÇÃO DA COMPATIBILIDADE	15
2.3	EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO	17
2.4	EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS	20
2.5	FORMULAÇÃO DE LEKHNITSKII	23
2.6	MATERIAIS COMPÓSITOS	28
2.6.1	TIPOS E CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS COMPÓSITOS	29
2.7	COMPORTAMENTO ELÁSTICO DA LÂMINA DO COMPÓSITO	33
2.8	LAMINADOS SIMÉTRICOS	35
3	MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA MATERIAIS ANISOTRÓPICOS	38
3.1	INTRODUÇÃO	38
3.2	IDEIAS BÁSICAS DO MEC	38
3.3	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS	39
3.4	TEOREMA DE RECIPROCIDADE DE BETTI	43
3.5	EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	46
3.6	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO CONTORNO	48
3.7	TENSÃO E DESLOCAMENTO EM PONTOS INTERNOS	51
4	MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO RÁPIDO COM EXPANSÃO EM MULTIPOLOS (MECMP)	53
4.1	PRINCÍPIOS BÁSICOS DO MECMP	53
4.2	EXPANSÃO RÁPIDA EM MULTÍPOLOS PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA	55

4.2.1	DESCRIÇÃO DO ALGORITMO	55
4.2.2	OPERAÇÕES DO MÉTODO RÁPIDO COM EXPANSÃO EM MULTIPÓLOS ..	62
4.2.3	EXPANSÃO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS	63
4.2.4	EXPANSÃO MULTIPOLAR DO NÚCLEO U	65
4.2.5	TRANSLAÇÃO MOMENTO PARA MOMENTO (M2M)	67
4.2.6	EXPANSÃO LOCAL E TRANSLAÇÃO MOMENTO PARA LOCAL (M2L)....	68
4.2.7	TRANSLAÇÃO LOCAL PARA LOCAL (L2L).....	70
4.3	SOLUCIONADOR ITERATIVO - GMRES	71
4.4	LINGUAGEM <i>Julia</i>	79
5	RESULTADOS.....	80
5.1	EXPANSÃO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTA	81
5.2	OPERAÇÃO DO MÉTODO RÁPIDO COM EXPANSÃO MULTIPOLAR.....	89
5.3	CAVIDADE CIRCULAR SOB PRESSÃO INTERNA	94
5.4	PLACA COM FUROS	104
6	CONCLUSÕES	110
6.1	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS	111
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	113
A	OPERAÇÕES DO MECMP PARA NÚCLEO T	121
A.1	EXPANSÃO MULTIPOLAR DO NÚCLEO T	121
A.2	TRANSLAÇÃO MOMENTO PARA MOMENTO (M2M)	122
A.3	EXPANSÃO LOCAL E TRANSLAÇÃO MOMENTO PARA LOCAL (M2L)	122
A.4	TRANSLAÇÃO LOCAL PARA LOCAL(L2L)	123

Lista de Figuras

2.1	Posição de um ponto material de um corpo	11
2.2	Posição de um ponto material em um corpo deformado	11
2.3	Deslocamento de pontos materiais para um corpo em uma situação deforma e não deformada	12
2.4	Corpo submetido a força de campo e a força de superfície	17
2.5	Lâmina ortotrópica - referência Costa (2011)	30
2.6	Sistemas de coordenadas da lâmina (x_1, x_2) e do laminado (\bar{x}, \bar{y}) . referência: Albuquerque (2001)	32
2.7	Lâmina ortotrópica - referência: Albuquerque (2001).....	33
2.8	Laminado simétrico - referência: Albuquerque (2001)	35
3.1	Classificação dos métodos numéricos - referência: Becker (1992) modificado .	39
3.2	Comportamento das singularidades fortes e fracas.....	44
3.3	Contorno discretizado por vários elementos - (a) Elementos constantes; (b) Elementos lineares; (c) Elementos Quadráticos. referência:Katsikadelis (2016)	49
4.1	Contorno circunscrito pelo quadrado do nível zero	55
4.2	Divisão recursivas das células	56
4.3	Processo de hierarquização do contorno	56
4.4	Relação de adjacência de duas células pertencentes e não pertencentes ao mesmo nível	57
4.5	Relação de células bem separadas.....	57
4.6	Operação expansão multipolar e M2M presentes na operação <i>upward</i> - Fonte: Liu (2009) modificada	59
4.7	Visão esquemática das operações presentes no método <i>upward</i> - Fonte: Wa- genhoffer, Moored e Jaworski (2019) modificada	60
4.8	Translação M2L para todas as células do nível 2 - Fonte: Liu (2009) modificada	61
4.9	Translação M2L e translação L2L - Fonte: Liu (2009) modificada	61
4.10	Expansão Multipolar entorno dos pontos campos	66
4.11	Translação dos pontos campos para novas posições	67
4.12	Expansão em torno do pontos fontes	69
4.13	Translação dos pontos fontes para novas posições	70
4.14	Esquema do funcionamento do processo iterativo.....	73
4.15	Matriz coluna formada por vetores ortonormais	76

4.16	Matriz Hessenberg	76
5.1	Erros para solução fundamental U_{11}	82
5.2	Erros para solução fundamental U_{22}	83
5.3	Erros para solução fundamental $U_{12} = U_{21}$	83
5.4	Erros para solução fundamental T_{11}	84
5.5	Erros para solução fundamental T_{22}	84
5.6	Erros para solução fundamental $T_{21} = T_{12}$	85
5.7	Solução Fundamental U_{11}	85
5.8	Solução Fundamental $U_{12} = U_{21}$	86
5.9	Solução Fundamental U_{22}	86
5.10	Solução Fundamental T_{11}	87
5.11	Solução Fundamental $T_{12} = T_{21}$	87
5.12	Solução Fundamental T_{22}	88
5.13	Domínio	90
5.14	Estrutura do MECMP	91
5.15	Pontos internos dentro da cavidade no meio infinito.....	94
5.16	Estrutura do MECMP	97
5.17	Direção positiva e sentido do vetor normal para um domínio fechado (a); Re- representação da direção positiva e sentido do vetor normal para um domínio no meio infinito (b).....	98
5.18	Comparação entre solução analítica e MECMP para diferentes valores de δ com 24 elementos na discretização do problema	98
5.19	Erro entre os valores numéricos e analíticos com 24 elementos	99
5.20	Comparação entre a solução analítica e o MECMP para diferentes número de elementos na discretização	101
5.21	Comparação entre a solução analítica e o MECMP para diferentes número de elementos na discretização	101
5.22	Gráfico de erros entre solução analítica e numérica para os deslocamentos dos pontos internos.....	102
5.23	Gráfico de erros entre solução analítica e numérica para os deslocamentos dos pontos internos.....	102
5.24	Gráfico de erros entre solução analítica e numérica para os deslocamentos dos pontos internos.....	103
5.25	Placa com 100 furos	104
5.26	Tempo consumido pelo MECMP e MEC convencional	107
5.27	Memória consumida pelo MECMP e MEC convencional.....	108
5.28	Comparação entre simulação com diferentes números de elementos na folha ..	109
5.29	Erro entre a simulação com 10 elementos por folha e 1 elemento por folha	109

Lista de Tabela

2.1	Relação entre tipo de material e o número de constantes independentes	21
2.2	Constantes materiais	22
2.3	Classificação do material compósito segundo o tipo de matriz ea forma do reforço.....	29
3.1	Características e vantagens do MEF e MEC.....	40
4.1	Método iterativos não-estacionários para subespaço de Krylov.....	73
5.1	Propriedades do material Boro-epóxi.....	81
5.2	Valores das raízes do polinômio característico para o Boro-epóxi.....	81
5.3	Valores das constantes complexas para o Boro-epóxi.	81
5.4	Valores para constante complexas para o material compósito.	90
5.5	Propriedades do material compósito	90
5.6	Valores das raízes do polinômio característico para o material compósito.	90
5.7	Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 5	92
5.8	Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 6	92
5.9	Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 11	92
5.10	Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 12.....	92
5.11	Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 15.....	92
5.12	Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 16.....	93
5.13	Valores dos parâmetros usados.....	95
5.14	Valores para constante complexas para o material compósito.	95
5.15	Valores das raízes do polinômio característico para o material compósito.	95
5.16	Comparação dos deslocamentos em (mm) entre a solução analítica, MEC e MECMP para 24 elementos constantes com para diferentes valores de δ	96
5.17	Deslocamentos dos pontos internos em (mm) para 700 elementos constantes ..	100
5.18	Constantes de Engenharia para compósito de Vidro-Époxi	104
5.19	Raízes da equação característica para o Vidro-Époxi.	105
5.20	Constantes complexas para o Vidro-Époxi	105

Lista de termos e siglas

Abreviação

Siglas	Descrição
BCG	Bi-conjugate gradient
BEM	Boundary Element Method
BFM	The boundary face method
Bi-CGSTab	Gradientes BiConjugados Estabilizado
BIE	Boundary Integral Equation
CNT	Carbon nanotube
CG	Conjugate Gradient
CGS	Gradientes Conjugados Quadrado
DOFs	Degrees of freedom
DVM	Discret Vortex Method
E2L	Exponential to local expansion
E2L	Exponential to exponential expansion
XFEM	Extended Finite Element Method
FMM	Fast multipole method
GC	Métodos gradientes conjugados
GMRES	Generalized Minimum Residual Method
L2L	Local to local translation
LLMV	Low Level Virtual Machine
M2E	Multipole to exponential expansion

M2L	Moment to local translation
M2L	Moment to local
M2M	Moment to moment translation
MATLAB	MATrix LABoratory
MDF	Método das diferenças finitas
MDF	Finite difference method
MEF	Método dos elementos finitos
FEM	Finite element method
MECMP	Método de elemento de contorno com expansão multipolar
MIT	Massachusetts Institute of Technology
MEC	Método de Elemento de Contorno
NURBS	Non Uniform Rational Basis Spline
MINRES	Resíduos Mínimos
QMR	Resíduos Quase-Mínimos
SOR	Sucessive overrelaxation
UVLM	Unsteady Vortex Lattice Method

Símbolos Gregos

Símbolos	Descrição	Unidade
ρ	Força de corpo atuando em um elemento de volume	-
$\sigma'_{ij}T$	Matriz transformação	-
χ^i	Termo de aproximação da formulação isotrópica	
δ_{ij}	Delta de Dirac	
Φ_{ik}	Função de Airy para um carregamento concentrado	
δ_{ij}	Delta de Kronecker	
ϵ_{ij}	Tensor das pequenas deformações	-
$\eta_{i,jk}$	Coefficiente Mútuo de primeira espécie	-

$\eta_{ij,k}$	Coeficiente Mútuo de segunda espécie	-
Γ	Contorno de um corpo	
μ_k	Raízes da equação algébrica	-
μ'_k	Raízes da equação característica no referencial (x'_1, x'_2)	
ν_{ij}	Coeficiente de Poisson	-
$\phi(x_1 + \mu x_2)$	Função de Airy	-
ω_{ij}^*	Tensor de rotação	
$d\Gamma$	Contorno infinitesimal	
$d\Omega$	Domínio infinitesimal	
ϕ	Função de tensão de Beltrami	-
$\Psi_i(z_i)$	Derivada da função de Airy	-
Q	Matriz rigidez	-
σ_{ij}	Tensor de tensão de Cauchy	-
$\overline{\sigma}_{ij}$	Tensor de tensão média no laminado	-
ϵ'_{ij}	Tensor de deformação atuando em uma lâmina individual	-
σ'_{ij}	Tensor de tensão atuando em uma lâmina individual	-
θ	Ângulo entre os eixos do laminado e o eixo da lâmina	-
ω	Rotação translacional de corpo rígido	-
ξ	Coordenada ao longo do elemento	
$\zeta_{ij,kl}$	Coeficiente de Chetsov	-

Símbolos Romanos

Símbolos	Descrição	Unidade
b	Força de corpo atuando em um elemento de massa	-
(\bar{x}, \bar{y})	Eixo do laminado	-
T	Matriz transformação	-

(x, y)	Eixo da lâmina	-
F_{ijkl}	Tensor de rigidez	-
C	Tensor de Cauchy-Green	-
$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$	Tensor gradiente de deformação	-
D_k	Operador diferencial	-
ds	Comprimento do segmento de reta que liga pontos materiais P e Q para situação não deformada	-
dS	Comprimento do segmento de reta que liga pontos materiais P e Q para situação deformada	-
c_{ij}	Termo de coeficiente livre	
E	Tensor Green-Lagrange	-
e	Espessura do laminado	-
E_k	Módulo de Young	-
G_{ij}	Módulo de Cisalhamento	-
h	Distância do plano médio dos laminados simétricos	-
i	Unidade imaginária	
n_k	Vetor normal ao contorno	
$N_c^n(\xi)$	Função de forma	
p	Momento linear	-
P	Partícula ou ponto material	-
x'_i	Vetor posição da partícula P para situação deformada no instante t	-
Q	Partícula ou ponto material na vizinhança do ponto P	-
t	Vetor força de superfície	-
r	Distância entre o ponto fonte e o ponto campo	
S_{ijkl}	Tensor de flexibilidade	-
S'_{ij}	Matriz de constantes elásticas do laminado escrita no referencial (x'_1, x'_2)	

T_{ij}	Solução fundamental de tração	
t_0	Instante de tempo para a situação não deformada	-
t'	Instante de tempo para a situação deformada	-
\mathbf{u}	Deslocamento	-
u_{0i}	Deslocamento translacional de corpo rígido	-
U_{ij}	Solução fundamental de deslocamento	
\tilde{u}_i^n	Deslocamentos nodais	
\tilde{t}_i^n	Forças de superfícies nodais	
\dot{v}	Aceleração	-
(x_1, x_2)	Coordenadas do ponto campo	
\mathbf{x}	Vetor posição da partícula P para situação não deformada no instante t_0	-
(x_{o1}, x_{o2})	Coordenadas do ponto fonte	
(x_{c_i}, y_{c_i})	Coordenadas do ponto intermediário	
\tilde{t}_i	Condição de contorno para força de superfície	
\tilde{u}_i	Condição de contorno para deslocamento	
z_c	Ponto intermediário	
z	Ponto campo	
z_0	Ponto fonte	
z'_{c1}, z'_{c2}	Mudança de posição dos pontos intermediários	
z_k	Variável complexa	-
z_{L1}, z_{L2}	Pontos intermediários perto dos pontos fontes	

Capítulo 1

Introdução

1.1 Ideias básicas

Muitos processos físicos são descritos por sistemas de equações que podem ser do tipo diferencial ou integral, sendo essas lineares ou não lineares. Para todos esses casos, as soluções analíticas sempre foram desejadas, pois elas representam respostas exatas. Contudo, elas existem apenas para poucos casos, devido à dificuldade em encontrá-las. Por isso, ao longo dos anos, métodos numéricos foram desenvolvidos com o objetivo de encontrar soluções aproximadas. Um desses métodos é o Método dos Elementos de Contorno (MEC), do inglês *Boundary Element Method* (BEM).

O MEC é um método para a solução de equações integrais de contorno, do inglês *Boundary Integral Equation* (BIE). Alguns dos precursores para o desenvolvimento do MEC são Green (1828), Betti (1873), Somigliana (1885) e Fredholm (1903). Segundo Katsikadelis (2016), no trabalho de Green (1828) encontra-se a representação integral da equação de Laplace para problemas envolvendo condições de Dirichlet e Neumann. Para realizar tal feito, as funções de Green foram desenvolvidas. Dentre as várias contribuições de Betti (1873), temos o desenvolvimento de uma representação similar à de Green (1828) para problemas de elasticidade. Ela ficou conhecida como teorema de reciprocidade de Betti (1873). Ele tem sido usado para resolver diferentes problemas de mecânica estrutural, segundo Pandita (2013). O teorema de Betti (1873) foi utilizado para desenvolver da identidade de Somigliana (1885), sendo esta fundamental para formular a equação integral de contorno.

Dentre as contribuições citadas acima, ainda temos o trabalho de Fredholm (1903). Ele foi o primeiro a usar equações integrais singulares, para problemas potenciais, com o propósito de achar quantidades desconhecidas no contorno (KATSIKADELIS, 2016). Através dos trabalhos de Fredholm (1903), Jaswon (1963) e Symm (1963), eles apresentaram um método numérico no qual dividiram o contorno de problemas potenciais em pequenos segmentos. Devido à importância dos resultados obtidos, esses artigos são considerados os responsáveis por formalizar o MEC. O método criado por eles, juntamente com a identidade

de Somigliana, foram utilizados por Rizzo (1967) e Cruse (1969) para criar as equações integrais de contorno para problemas de elasticidade em duas e três dimensões. Uma completa revisão histórica sobre o MEC foi feita por Alexander e Cheng (2005), onde são citados mais autores e contribuições matemáticas que ajudaram no seu desenvolvimento.

O termo *Boundary Element Method* (BEM) apareceu em 1977, com a popularidade das publicações de Banerjee e Butterfield (1975), Brebbia e Dominguez (1977) e Dominguez (1977). Nos anos 1980, com o advento dos computadores, o MEC popularizou-se como técnica computacional e, com o passar dos anos, tornou-se uma das técnicas numérica mais utilizadas.

Como todo e qualquer método numérico, o MEC possui vantagens e desvantagens. Uma das vantagens claramente conhecida é a redução da dimensão dos problemas analisados. Situações bidimensionais são resolvidas como se fossem problemas de uma dimensão, pois este método só trabalha com o contorno do problema. Seguindo o mesmo raciocínio, problemas tridimensionais são analisadas usando apenas informações de suas superfícies. Logo, a redução da dimensionalidade traz uma diminuição do esforço computacional envolvido, pois tal característica diminui o tamanho do sistema-linear ($\mathbf{A} \gamma = \mathbf{b}$) obtido, sendo que a matriz \mathbf{A} tem como característica ser cheia e não simétrica.

Vale ressaltar que essa última característica torna-se uma grande desvantagem quando o MEC é utilizado para resolver problemas de larga escala, que são reconhecidos por terem muitos graus de liberdade, do inglês *degrees of freedom* (DOFs). Como consequência, o número de termos diferentes de zero, da matriz \mathbf{A} , que precisam ser armazenados na memória do computador torna-se extremamente grande, já que ela é uma matriz quadrada de dimensão $(N \times N)$, sendo N o número de DOFs. Por conseguinte, a quantidade de operações necessárias para sua construção é muito elevada. De acordo com Liu (2009), são necessárias $\mathcal{O}(N^2)$ operações para calcular os coeficientes da matriz \mathbf{A} . Além do mais, a quantidade de memória utilizada para armazená-los também é $\mathcal{O}(N^2)$. Um outro obstáculo que atrapalha o desempenho do MEC é o método numérico escolhido para resolver o sistema linear.

Se a solução for alcançada com a ajuda de solucionadores diretos, como a eliminação gaussiana, $\mathcal{O}(N^3)$ operações são executadas. Não obstante, essa quantidade pode ser reduzida para $\mathcal{O}(N^2)$ com solucionadores iterativos. Portanto, a redução da dimensionalidade do problema proposto ainda pode ser falha em viabilizar o MEC como ferramenta computacional para resolver problemas com alguns milhares de graus de liberdade.

Uma das formas para resolver esse obstáculo está na implementação de formulações rápidas no MEC. Esse procedimento tem melhorado o seu desempenho, uma vez que a complexidade para resolver o problema vai para próximo da situação ideal, que é $\mathcal{O}(N)$. Assim, o tempo de processamento e da memória utilizada, com o objetivo de encontrar a solução do problema de larga escala, são drasticamente reduzidos. Entre as formulações rápidas existentes, tem-se o método multipolar rápido ou *Fast Multipole Method* (FMM). A união entre MEC e FMM é conhecida como Método de Elementos de Contorno Multipolar Rápido

(MECMP).

1.2 Método rápido com expansão em multipolos

O FMM foi desenvolvido a partir das publicações de Rokhlin (1985), Greengard e Rokhlin (1987), Greengard (1987). Rokhlin (1985) desenvolveu um algoritmo capaz de acelerar a solução do sistema linear originado pela discretização de equações integrais de contorno. Tal método reduziu para $\mathcal{O}(N)$ a solução desses problemas. Para realizar tal feito, ele apresentou e provou que uma função potencial poderia ser expandida em série de Taylor para uma determinada região do espaço. Com esse resultado, demonstrou-se que o número de operações realizadas para calcular a interação entre grupos de partículas poderia ser drasticamente reduzido.

As expansões desenvolvidas por Rokhlin (1985) foram fundamentais para criação da expansão multipolar feita por Greengard e Rokhlin (1987). Através dela, juntamente com a ideia de agrupamento de partículas, foi possível calcular, de maneira rápida, a interação de um conjunto de N partículas para qualquer precisão desejada. O agrupamento delas foi realizado com a ajuda da estrutura da árvore, conhecida como *tree structure*, de Barnes e Hut (1986).

Ao longo dos anos, vários trabalhos associado com FMM, para diversas áreas do conhecimento, foram publicados. Como exemplo, temos o trabalho de Fenley et al. (1996), que utilizaram o FMM para calcular interações eletrostáticas para DNA polieletrólítico. Takahashi e Wakao (2006) descreveram um campo magnético de larga escala por meio da união do MEF com o MECMP. Takahashi et al. (2012) apresentaram alguns algoritmos para executar o FMM em placa de processamento gráfica NVIDIA CUDA. Gumerov et al. (2019) fizeram a simulação de dinâmica de bolhas em fluxos tridimensionais, através da implementação do MECMP em uma arquitetura de CPU/GPU. Verde e Ghassemi (2015) usaram o método de descontinuidade por deslocamento, do inglês Displacement Discontinuity Method (DDM), juntamente com o FMM, para modelar o comportamento de fraturas em rochas elásticas lineares. Ricciardi, Wolf e Bimbato (2017) utilizaram o FMM com o método do vórtice discreto, do inglês Discret Vortex Method (DVM), para simular problemas de domínio livre e periódicos, com o intuito de melhorar a performance dessa simulações, afim diminuir a dissipação numérica para evitar soluções falsas em fluxos invíscidos instáveis. Kebbie-Anthony et al. (2018) utilizaram o FMM para acelerar a simulação de um modelo aerodinâmico UVLM (Unsteady Vortex Lattice Method) para uma superfície de levantamento retangular plana. Devido ao seu desempenho, o FMM foi considerado um dos dez principais algoritmos do século XX, segundo Liu (2009). Assim como nos exemplos expostos, a formulação do FMM também pode ser utilizada para melhorar o desempenho do MEC.

Essa melhora só é obtida porque o núcleo da solução fundamental pode ser expandido da mesma maneira que as funções potencias dos trabalhos apresentados por Rokhlin (1985)

e Greengard (1987). O resultado dessa expansão é a separação da relação entre ponto fonte e o ponto campo do MEC, através de um ponto intermediário que ficará entre eles. Como resultado, diminuímos o número de operações, pois faremos um agrupamento entre os pontos. Assim as integrais do MEC podem ser escritas como a soma de duas integrais, sendo que uma integral está relacionada com elementos próximos ao ponto fonte e a outra integral está relacionada com elementos distantes desse ponto. Para as primeiras integrais, aplica-se o MEC e para as outras o MECMP. Para qualificar quais elementos estão distantes ou próximos do ponto campo, utiliza-se a estrutura da árvore.

Outra importante implementação que melhora a eficiência do MEC é uso de métodos iterativos para resolver o sistema linear. Mullen e Rencis (1987), Kane, Keyes e Prasad (1991), Mansur, Araujo e Malaghini (1992), Barra et al. (1992), Prasad et al. (1994) são alguns artigos em que retratam a eficiência dos métodos iterativos para solução de sistemas lineares cheios e não simétricos do MEC. Prasad et al. (1994) trabalharam com problemas de elasticidade e de transferência de calor em duas e três dimensões. Eles foram resolvidos com diferentes métodos iterativos, pois o objetivo era estudar o desempenho dos métodos de Krylov pré-condicionados. Pelos diversos tipos de problemas analisado, Prasad et al. (1994) concluíram que as técnicas de Krylov pré-condicionadas são mais competitivas ou superiores aos métodos diretos. Kane, Keyes e Prasad (1991) utilizaram as técnicas do gradiente conjugado, do inglês *Conjugate Gradient* (CG), juntamente com o método iterativo residual mínimo generalizado, do inglês *Generalized Minimum Residual Method* (GMRES), para analisar a resposta estrutural de problemas de elasticidade em duas dimensões. Para tais situações, os modelos desenvolvidos pelo MEC tinham zonas simples e múltiplas, sendo que, para certos casos, tinha-se zona de condensação e, em outros casos, não. O objetivo era estudar o desempenho do CG e do GMRES. Vale ressaltar que, nesse estudo, abordagens de pré-condicionamento diagonal, diagonal de blocos e de bandas foram utilizadas para acelerar o convergência dos métodos. Como resultado, identificou-se que, de forma geral, o GMRES é mais eficiente que o método CG.

Além disso, os vários tipos de pré-condicionamento implicam em performances diferentes. Barra et al. (1992) fizeram uma comparação entre o GMRES com o método iterativo do gradiente biconjugado, do inglês *Bi-Conjugate Gradient* (BCG), e com o método de eliminação de Gauss. Eles foram usados para resolver problemas de elasticidade em duas dimensões para materiais isotrópicos. A conclusão obtida foi que o GMRES pré-condicionado é mais rápido que o método BCG pré-condicionado e o método de eliminação de Gauss, sendo que, esse último, é o mais lento dos três. Nessa tese, assim como nos artigos envolvendo MECMP, o método GMRES é escolhido para encontrar a solução do sistema linear obtido.

Assim como FMM, o MECMP vem sendo aplicado para várias situações, comprovando, assim, sua eficiência para resolver problemas de grande escala. Dentre os vários trabalhos existentes, pode-se destacar alguns relacionados com materiais anisotrópicos, pois eles possuem certa similaridade com o que será proposto.

Para problemas em duas dimensões, temos o trabalho de Haitao e Zhenhan (2004). Neste

artigo eles desenvolveram uma versão mais eficiente do MECMP para resolver problemas de elasticidade isotrópica. Tal versão substitui uma das operações do MECMP, conhecida como Momento para Local ou *Moment to Local* (M2L), por três novos passos. Isso foi possível porque a expansão das soluções fundamentais foi efetuada de maneira exponencial e, como consequência, a operação M2L foi substituída pelas operações Expansão Multipolar Exponencial ou *Multipole to Exponential Expansion* (M2E), Expansão Exponencial para Exponencial ou *Exponential to Exponential Expansion* (E2E) e Exponencial para Expansão Local ou *Exponential to Local Expansion* (E2L). Haitao e Zhenhan (2004) também introduziram a técnica de sub-regiões de Yao, Kong e Zheng (2007) para calcular a relação do módulo de volume efetivo de uma placa contendo 1600 inclusões. Como a placa e as inserções possuem propriedades elásticas diferentes, tal modelo foi considerado como material anisotrópico, já que temos a união de dois materiais com propriedades diferentes.

Zhu et al. (2010) aplicaram o MECMP para determinar o comportamento viscoelástico de materiais compósitos, sendo que as interfaces entre os materiais foram consideradas imperfeitas. A equação integral implementada usou um modelo viscoelástico para materiais isotrópicos. Vale ressaltar que a equação integral de viscoelasticidade foi expressa no domínio do tempo e um modelo viscoelástico tipo Kelvin foi empregado. Eles compararam os resultados da simulação viscoelástica proposta com testes laboratoriais de fluência do concreto asfáltico. A finalidade desse artigo foi estudar o comportamento do concreto asfáltico ao longo do tempo. Além disso, Zhu et al. (2010) estudaram as propriedades viscoelásticas de materiais compósitos submetidos a um estado plano de deformação. Para essa simulação, a matriz do material compósito seguiu o modelo de Burgers, no qual suas propriedades viscoelásticas eram lineares. Ademais, 100 inclusões elásticas circulares distribuídas aleatoriamente foram incorporadas. Utilizou-se o modelo micromecânico de Mori-Tanaka para determinar propriedades efetivas de materiais compósitos para a situação em que a interface entre a matriz e as inclusões eram imperfeitas. Com esses parâmetros estabelecidos, comparou-se o deslocamento médio das inclusões com dados analíticos e numéricos propostos, concluindo que o modelo simulado tinha boa concordância com o comportamento previsto.

Liu, Li e Huang (2014) utilizaram o MECMP para calcular campo de deslocamento e tensão para problemas de termoelasticidade em duas dimensões. Exemplos numéricos foram utilizados para validar a proposta desenvolvida, mostrando a precisão e a eficácia do método. Os resultados obtidos foram comparados com as soluções analíticas e com os dados gerados pelo MEF. A partir dos problemas propostos, conclui-se que a proposta poderia ser estendida para problemas que possuem multi-domínio, a fim de calcular tensões térmicas em trincas de interfaces em filmes finos e revestimento de multicamadas.

Para problemas em três dimensões, tem-se o trabalho de Liu, Nishimura e Otani (2005). Eles publicaram um novo modelo de interface coesiva para caracterizar compósitos de nanotubos de carbono, ou *carbon nanotube* (CNT), usando o MECMP. Devido à sua eficiência, um modelo de volume representativo contendo 16.000 CNT e 28.896.000 DOFs foi simu-

lado. Comparou-se o módulo de elasticidade longitudinal do material compósito com os valores obtidos pelo modelo representativo de CNT. De acordo com Liu, Nishimura e Otani (2005), tal estudo foi realizado dado que interface entre a matriz e o CNT é um dos principais fatores para a transferência de carga entre esses constituintes, afetando, portanto, às propriedades efetivas do compósito formado por CNT. Outrossim a interface contribui para o alinhamento e dispersão do CNT na matriz do material compósito.

Haitao e ZhenHan (2005) apresentaram uma nova versão do MECMP para analisar as propriedades mecânicas de compósitos reforçados com fibras. As análises feitas foram para modelos de três dimensões. Essa nova versão incorporou expansão multilopar exponencial para os casos analisados, tornando-a mais eficiente que o MECMP padrão. Foram feitas simulações numéricas para calcular as distribuições de tensões nos problemas analisados, a fim de determinar suas propriedades elásticas efetivas. Para desenvolver esse modelo, Haitao e ZhenHan (2005) usaram a abordagem de sub-domínio de Yao, Kong e Zheng (2007). Dentre os vários casos analisados, tem-se uma situação em que 100 fibras elásticas longas, distribuídas aleatoriamente, foram utilizadas para calcular a relação entre módulo de Young efetivo com a orientação de fibra espalhada para diferentes razões de aspecto de fibra. Tal modelo alcançou mais de 2.500.000 DOFs e foi simulado com computador 1 GB de memória. Os resultados apresentados por Haitao e ZhenHan (2005) mostraram que o MECMP proposto é capaz de prever como parâmetros microestruturais podem interferir nas propriedades elásticas efetivas do compósito, já que as características mecânicas desses materiais dependem fortemente daqueles parâmetros.

Wang et al. (2019) aplicaram a formulação do MECMP para estudar o comportamento mecânico de materiais compósito em três dimensões. Para tal, utilizou-se o método de sub-regiões com um formulação híbrida do método do nó do contorno, conhecido como *Hybrid Boundary Node Method* (hybrid BNM). Diferentemente do MEC para três dimensões, no método do nó, de MUKHERJEE e MUKHERJEE (1997), não precisa elaborar uma malha, pois ele apenas trabalha com os nós construídos no contorno de um domínio. Por isso, ele está classificado como um método sem malha, assim como o método livre de Galerkin, ou *Free Galerkin Method* de Belytschko, Lu e Gu (1994), a abordagem local sem malha de Petrov Galerkin, ou *Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach* de Atluri e Zhu (1998), o método do contorno da face, ou *Boundary Face Method* (BFM) de Zhang et al. (2009). Os resultados obtidos pelas análises de Wang et al. (2019) demonstraram que a proposta é eficiente porque o algoritmo alcançou uma complexidade $\mathcal{O}(N)$ para resolver problemas de larga escala. Ele também foi preciso, dado que os resultados numéricos obtidos para simular um cilindro bimatricial de parede espessa e uma esfera bimatricial estavam de acordo com as soluções analíticas. Para o primeiro caso, comparou-se os resultados de tensão circunferencial na parede do cilindro. O maior erro entre os dados analíticos e numéricos foi igual a $2.8 \cdot 10^{-3}\%$. Para o exemplo da esfera formada por dois materiais, utilizou-se deslocamento radial, tensão radial e tensão tangencial como critério de comparação entre as soluções. O maior erro para o deslocamento radial foi de $0,06\%$, para tensão radial igual a $0,03\%$ e o erro para tensão

tangencial foi menor que 0,045%. Por fim, tem-se o trabalho de Wang e Yao (2013), que aplicaram o MECMP para a análise térmica de compósitos reforçados com fibra, utilizando o modelo de inclusão de linha. Nesta abordagem, as fibras são tratadas como inclusões. A temperatura é constante na seção transversal circular e varia ao longo do seu comprimento. Para a proposta desenvolvida, o maior modelo apresentou 20.000 fibras, que gerou num problema com mais de 200.000 graus de liberdade. Os resultados mostraram que o método de inclusão de linha proposto, com a finalidade de calcular a distribuição de temperatura nas fibras, está em boa concordância com o modelo convencional utilizado para realizar os mesmos cálculos. Comparando o custo computacional dos modelos, constatou-se que memória requerida pelo MECMP foi mais de 100 vezes menor que o modelo convencional.

1.3 Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver a formulação do MECMP para problemas de elasticidade anisotrópica em duas dimensões, a partir da solução fundamental obtida com a formulação de Lekhnitskii (1981), Lekhnitskii (1968). Tal fato constitui-se o fator inovador dessa tese, pois nenhum trabalho envolvendo MECMP utilizou a solução fundamental proposta, conforme apresentado. Como resultado final, a formulação deve apresentar um código mais eficiente que o MEC convencional. Ambos os métodos serão comparados, para mostrar que a formulação proposta possui complexidade $\mathcal{O}(N)$ para resolver problemas de larga escala. Por isso, a memória e o tempo de processamento para resolver um problema com vários graus de liberdade deve ser analisado.

1.4 Organização do trabalho

Como nessa tese desenvolveremos a formulação do MECMP para problemas de elasticidade anisotrópica em duas dimensões, através da formulação de Lekhnitskii, no capítulo 2 faremos uma revisão sobre elasticidade anisotrópica, apresentando alguns conceitos clássicos da elasticidade plana, como deslocamento, deformação e tensão. A partir desses termos básicos, desenvolveremos a formulação de Lekhnitskii, exibindo as suas principais características, vantagens e desvantagens. Como os materiais aqui simulados não são feitos da união de 2 ou mais materiais isotrópicos, apresentaremos, também, alguns conceitos relacionados a materiais compósitos. Portanto, primeiramente os classificaremos, para identificar os tipos de materiais compósitos existentes. Depois, analisaremos o comportamento elástico de um laminado simétrico, exibindo as principais equações para calcular tensão e deslocamento.

No capítulo 3 desenvolveremos a formulação de elementos de contorno para materiais anisotrópicos, com o objetivo de apresentar a formulação integral para esse tipo de problema. Inicialmente apresentaremos a solução fundamental para elasticidade anisotrópica. Em seguida, alguns teoremas serão desenvolvidos, a fim de dar base para o desenvolvimento

da equação integral. Por fim, mostraremos como se discretiza a equação integral de contorno, com o intuito de criar o sistema linear do MEC.

O método do MECMP aplicado a problemas anisotrópicos será desenvolvida no capítulo 4. Primeiramente, as suas características serão discutidas, apresentado alguma de suas vantagens e desvantagens. Em seguida explicaremos o seu funcionamento, acompanhada do desenvolvimento de suas equações. Na parte final mostraremos o método numérico usado para resolver o sistema linear do MECMP. Assim, as principais características e funcionamento do GMRES serão apresentadas.

O capítulo 5 corresponde aos resultados da proposta feita. Para tanto, cada uma das etapas que compõem o MECMP serão analisadas, a fim de mostrar sua convergência para o MEC padrão. Desta forma, começaremos pela análise da expansão das soluções fundamentais. As operações desse método serão testadas em seguida. Um problema prático também será analisado, com a finalidade de estudar acurácia dos resultados produzidos. Por fim, um problema de larga escala será simulado, com a finalidade de estudar a eficiência do método.

Por fim, no capítulo 6 faremos as conclusões finais sobre os resultados obtidos, com a finalidade de avaliar a proposta realizada. Além disso, algumas considerações sobre trabalhos futuros serão elaboradas, a fim de que o estudo do MECMP para materiais anisotrópicos seja aprimorado.

Capítulo 2

Fundamentos da elasticidade para problemas anisotrópicos

2.1 Introdução

Neste capítulo, as bases teóricas utilizadas para calcular tensões e deformações em problemas anisotrópicos em duas dimensões são apresentadas. Sendo assim, algumas hipóteses são assumidas, com o intuito de se desenvolver as equações dos problemas que serão analisados. A primeira delas está relacionada com a teoria dos pequenos deslocamentos. Por isso, durante o desenvolvimento das equações desse capítulo, as derivadas de ordem superior são desconsideradas, pois seus valores são desprezíveis. Além disso, admitimos que as deformações dos corpos sólidos são muito pequenas quando comparadas com as suas dimensões. Como consequência, tem-se a não alteração das propriedades constitutivas do material pela deformação do corpo. Outra consequência dessa simplificação está presente na aproximação entre o tensor Green-Lagrange e o tensor das pequenas deformações. Ela ocorre porque os termos não lineares são desprezados. Também ignoramos a teoria da mecânica dos sólidos rígidos, porque ela estuda o movimento e equilíbrio de corpos sólidos ignorando suas deformações.

Outra importante hipótese é a teoria elástica linear. Ela é usada para apresentar a relação constitutiva dos materiais. Essa relação é importante visto que ela caracteriza as propriedades associadas à rigidez e à resistência dos materiais, além de relacionar tensões com deformações. A hipótese elástica está associada com o comportamento elástico do corpo, isto é, as deformações são reversíveis. Dessa forma, as deformações de um corpo se processam de forma imediata quando o mesmo estiver sob ação de uma força externa. Depois de retirada a força externa, o corpo volta à sua configuração inicial. O aspecto linear dessa hipótese está associada com a proporcionalidade entre tensões e deformações. Esse modelo é adotado porque muitos materiais exibem esse comportamento sob pequenas deformações.

Assim, com as simplificações adotadas acima, calcularemos as tensões e deslocamen-

tos de materiais anisotrópicos utilizando a formulação de Lekhnitskii. De acordo com Ting (1996), essa proposta foi feita a partir da formulação de Muskhelishvili (1977) para materiais elásticos isotrópicos em duas dimensões. A base desse método está na utilização de uma função potencial para definir componentes de tensão e de deslocamento. A utilização de funções potenciais para descrever alguns fenômenos físicos é bastante comum. Como exemplo, temos o uso de funções potenciais para descrever a força gravitacional. Outro caso é a descrição do fluxo de temperatura como função potencial da temperatura. Assim, em ambos os casos, tem-se uma situação onde o problema original, que é vetorial, é reduzido para um problema envolvendo funções potenciais e as suas derivadas, segundo Barber (2003). As funções potenciais usadas nessa tese são as de Airy, dado que os problemas são planos. Em contrapartida, se estivéssemos trabalhando com torções, as funções potenciais deveriam ser de Prandtl e, para problemas de três dimensões, as funções utilizadas são as de Beltrami, de acordo com Martin (2014).

Desta maneira, inicia-se este capítulo apresentando os conceitos de deslocamento, deformação e o gradiente da deformação. Em seguida apresenta-se o tensor de deformação de Green-Lagrange e o tensor das pequenas deformações. Estes tensores são escritos em função dos três conceitos apresentados na parte inicial. O terceiro tópico está relacionado com o desenvolvimento da equação da compatibilidade. Ela representa a restrição envolvendo os deslocamentos e as deformações. Através dela, garantimos que a solução buscada é compatível com as condições de contorno do problema. Além do mais, ela é utilizada para assegurar a integralidade do campo de deformações. Feita essa restrição, apresentaremos a equação de equilíbrio. A relação constitutiva para os materiais anisotrópicos e a formulação de Lekhnitskii serão apresentadas em seguida. A parte final deste capítulo destina-se ao estudo dos materiais compósitos. Uma breve e sucinta análise do comportamento mecânico de materiais compósitos formados por lâminas será exibida. Essa parte são calculadas as tensões e deformações nesses materiais.

2.1.1 Deslocamentos, deformações e gradiente das deformações

O primeiro conceito desenvolvido é o deslocamento. Através dele, defini-se a deformação e o gradiente da deformação. Sendo assim, considere a partícula ou ponto material P da Figura 2.1. O vetor posição desse ponto, para um momento inicial t_0 , de acordo com o sistema referência adotado, é definido da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = x_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (i = 1, 2). \quad (2.1)$$

Vale ressaltar que o momento inicial t_0 está associado com a situação não deformada do corpo. Agora considere um outro instante t' , onde o corpo se encontra em uma situação deformada, conforme mostra a Figura 2.2. Nessa nova circunstância, considerando o referencial dado, é possível escrever vetor posição \mathbf{x}' em função da posição anteriormente

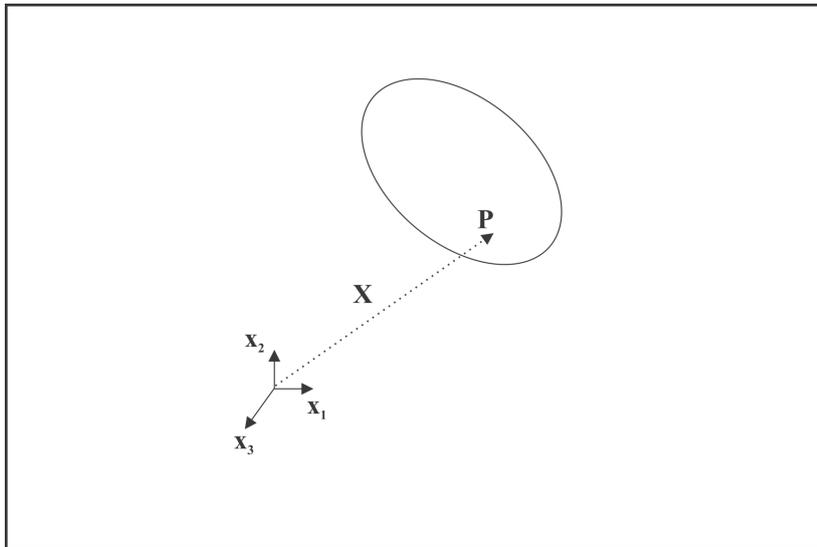


Figura 2.1: Posição de um ponto material de um corpo

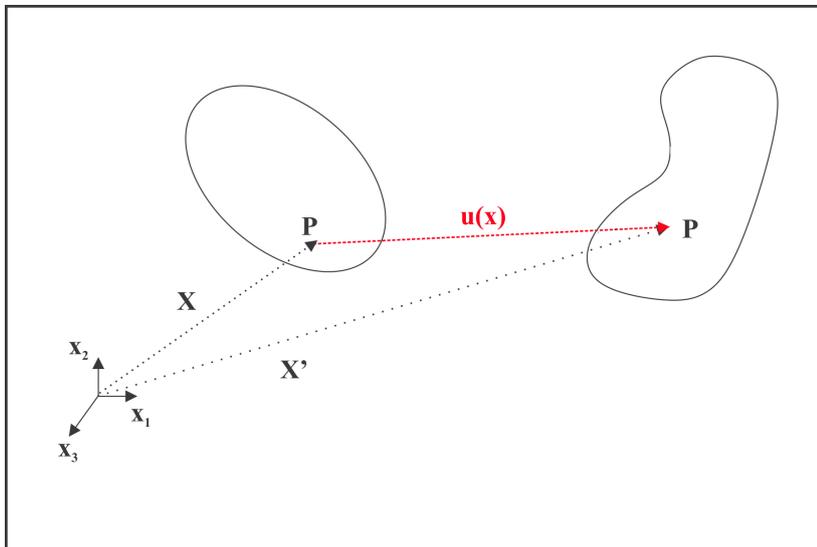


Figura 2.2: Posição de um ponto material em um corpo deformado

ocupada, \mathbf{x} . Para fazer isso, segundo (ABEYARATNE, 2012), existe um mapeamento f , chamado de configuração do corpo, que irá relacionar esses dois estados. Assim, tem-se:

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) . \quad (2.2)$$

Através da mudança de posição do ponto P , pode-se definir o campo deslocamento $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ de acordo com a seguinte representação de Lagrange:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' - \mathbf{x} . \quad (2.3)$$

O lado esquerdo da equação (2.3) mostra que o vetor posição de uma partícula \mathbf{x}' pode ser conhecida através do seu vetor posição inicial \mathbf{x} e do campo deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Este campo pode ser descrito pela representação de Lagrange ou pela representação de Euler.

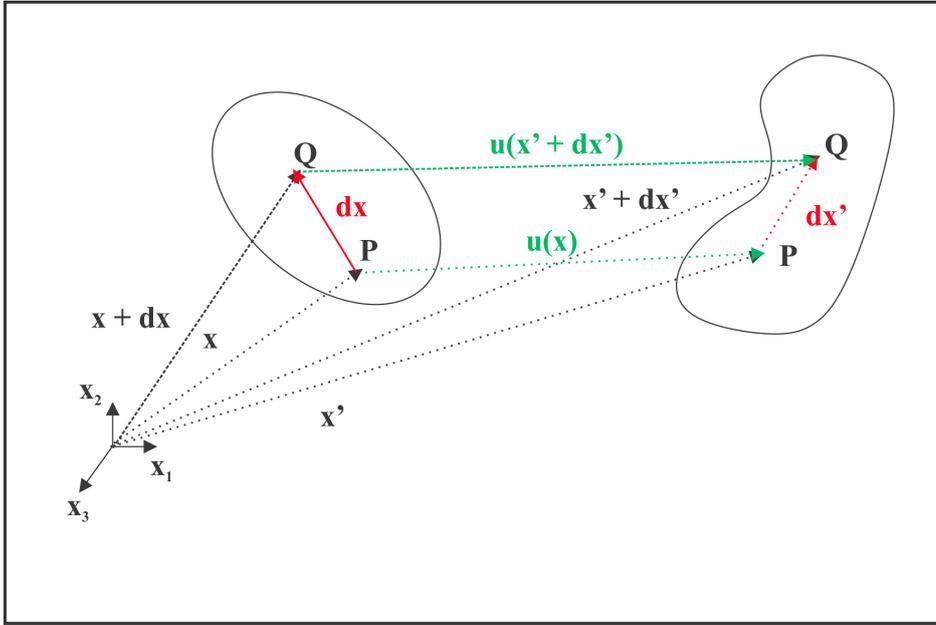


Figura 2.3: Deslocamento de pontos materiais para um corpo em uma situação de deformação e não deformada

Na representação de Lagrange utiliza-se a posição inicial para descrever o deslocamento, já que ela é mais conveniente para representar a teoria elástica das pequenas deformações, conforme apresenta por Lautrup (2011). Na representação de Euler, o campo de deslocamento é feito a partir da configuração atual $\mathbf{u}(\mathbf{x}')$. A vantagem dessa representação é que o campo de deslocamento para um dado ponto representa o seu estado nessa posição.

Agora, considere outro ponto, Q , definido como vizinho de P , separados por uma distância infinitesimal $d\mathbf{x}$, como apresentado na Figura 2.3. O vetor posição do ponto Q , para os instantes t_0 e t' , é escrito, respectivamente, como:

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = (x_i + dx_i)\hat{\mathbf{e}}_i \quad (i = 1, 2), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{x}' + d\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = x'_i + dx'_i \quad (i = 1, 2). \quad (2.5)$$

Para calcular o tensor gradiente de deformação, considere que $d\mathbf{x}$ seja dada pela soma vetorial da Figura 2.3:

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

A equação (2.6) pode ser reescrita através da série de Taylor, pois iremos desenvolver o termo $\mathbf{f}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ em torno de \mathbf{x} . Assim:

$$f(y) = f(a) + f'(a)(y - a) + \frac{f''(a)}{2!}(y - a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(y - a)^n, \quad (2.7)$$

considerando que $(y = x + dx)$ e $(a = x)$:

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}(x + dx - x) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial^2 x} (x + dx - x)^n. \quad (2.8)$$

Desprezando os termos de derivadas mais alta ordem, por efeito da teoria dos pequenos deslocamentos, tem-se:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + d\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

Permutando o termo $\mathbf{f}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ da equação (2.9) na equação (2.6):

$$d\mathbf{x}' = [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + d\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})] - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.10)$$

A equação (2.10) mostra uma relação entre a configuração deformada $d\mathbf{x}'$ e a não deformada $d\mathbf{x}$, através do termo $\left(\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}}\right)$. Denominaremos-o como tensor gradiente de deformação. Sua função é de mapeamento entre a situação deformada e a não deformada, isto é, ele contém informações acerca da maneira como se procedeu a modificação entre as duas situações. O gradiente de deformação é importante em razão de auxiliar na demonstração do tensor de deformações de Green-Lagrange.

2.1.2 Tensor de deformações de Green-Lagrange

Para definir o tensor de deformações de Green-Lagrange e o tensor das pequenas deformações, deve-se calcular o comprimento de reta que liga os pontos P e Q para a configuração não deformada $d\mathbf{x}$ e deformada $d\mathbf{x}'$, conforme a Figura 2.3. Estabelece-se o escalar ds como o comprimento do segmento de reta que liga os pontos P e Q para a circunstância não deformada. Em contrapartida, dS é o comprimento do segmento de reta para a conjuntura deformada. Eles são calculados como:

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.11)$$

$$dS^2 = d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}'. \quad (2.12)$$

Valendo-se do tensor gradiente de deformações dado pela equação (2.10), pode-se escrever $d\mathbf{x}'$ de duas maneiras:

$$d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \boxed{d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{x}'} \text{ ou } \boxed{d\mathbf{x}' = \nabla(\mathbf{x}')^T \cdot d\mathbf{x}}. \quad (2.13)$$

A partir das duas formas apresentados para $d\mathbf{x}'$ pela equação (2.13), os substituiremos na

equação (2.12) para definir o tensor de Cauchy-Green \mathbf{C} :

$$dS^2 = d\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{x}' \cdot \nabla (\mathbf{x}')^T \cdot d\mathbf{x} \Leftrightarrow dS^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.14)$$

onde o termo:

$$\mathbf{C} = \nabla \mathbf{x}' \cdot (\nabla \mathbf{x}')^T, \quad (2.15)$$

é conhecido como tensor de deformação Cauchy-Green à direita. O tensor de Cauchy-Green à esquerda $(\nabla \mathbf{x}')^T \cdot \nabla \mathbf{x}'$ é obtido utilizando a formulação de Euler. Com esse tensor, determinaremos o tensor de Green-Lagrange \mathbf{E} . Para encontrá-lo, deve-se calcular à medida de deformação, dada pela diferença dos quadrados dos termos ds^2 e dS^2 . Logo:

$$dS^2 - ds^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \Leftrightarrow dS^2 - ds^2 = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.16)$$

A partir da equação (2.16), o tensor de deformação Green-Lagrange é definido como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \Leftrightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{x}' \cdot (\nabla \mathbf{x}')^T - \mathbf{I}). \quad (2.17)$$

Uma outra forma de apresentar equação (2.17) é escrever a deformação em função dos deslocamentos. Sendo assim, $\nabla \mathbf{x}'$ é rescrito por intermédio da derivada da equação (2.3):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \nabla \mathbf{x}' = \nabla \mathbf{x} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \nabla \mathbf{x}' = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (2.18)$$

Recolocando o resultado da equação (2.18) na equação (2.15), temos:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T. \quad (2.19)$$

Por fim, substitui-se o tensor de Cauchy-Green da equação (2.19) na equação (2.17) para escrever o tensor de Green-Lagrange em termos dos deslocamentos:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}[\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T - \mathbf{I}] = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T], \quad (2.20)$$

onde ϵ_{ij} é tensor das pequenas deformações, definido como:

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.21)$$

Para aproximar o tensor de Green-Lagrange com o tensor das pequenas deformações, analisa-se o resultado da diferença entre eles. Logo:

$$\mathbf{E} - \epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.22)$$

Considerando a teoria dos pequenos deslocamentos, concluímos que $\mathbf{E} \approx \epsilon$. Portanto, deve-se desconsiderar o termo não-linear, uma vez que o contraste entre esses tensores é concedido pelo o produto das derivadas. Assim, assume-se que:

$$\|\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T\| \ll \|\epsilon\| \Leftrightarrow \|\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T\| \ll \|\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T\|. \quad (2.23)$$

A condição da equação (2.23) mostra que o tensor de Green Lagrange se aproxima do tensor das pequenas deformações se o fator não linear for desprezível em relação ao termo linear. Essa aproximação é válida em virtude da teoria das pequenas deformações ignorar o produto dos deslocamentos, porque as derivadas do deslocamento são menores que um. Assim, nessa tese, a relação entre deformação e deslocamento é dada pela equação (2.21).

2.2 Equação da compatibilidade

Como exposto na seção anterior, é possível determinar os componentes do tensor de Green-Lagrange e o tensor das pequenas deformações mediante os deslocamentos. Contudo, tentar calcular os deslocamentos por intermédio das componentes do tensor de Green-Lagrange não é possível, dado que, para um situação em duas dimensões, temos dois deslocamentos que precisam ser obtidos a partir de três deformações.

Para resolver esse problema, serão impostas restrições matemáticas sobre as componentes do tensor de deformação, por meio da equação da compatibilidade. Ela representa uma garantia da compatibilidade entre os deslocamentos existentes e as deformações computadas. Em outras palavras, garantem que os deslocamentos possuem valores únicos a partir das deformações. Um dos processos para desenvolver estas equações está relacionado na eliminação dos deslocamentos a partir da equação (2.21), pois encontraremos uma equação que só tem deformações. Logo, considere as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij,kl} &= \frac{1}{2}(u_{i,klj} + u_{j,kl i}) = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_l \partial x_j} + \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_i} \right] \Leftrightarrow \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_l \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_i} \Leftrightarrow \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_l \partial x_j} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_i}}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{jl,ik} &= \frac{1}{2}(u_{j,ikl} + u_{l,ikj}) = \frac{\partial \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} \right] \Leftrightarrow \frac{\partial \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \Leftrightarrow \frac{\partial \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{kl,ij} &= \frac{1}{2}(u_{k,ijl} + u_{l,ijk}) = \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right] \Leftrightarrow \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Leftrightarrow \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ik,jl} &= \frac{1}{2}(u_{i,kjl} + u_{k,ijl}) = \frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \right] \Leftrightarrow \frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \Leftrightarrow \frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

substituindo os termos em destaque na equação (2.24) na equação (2.25), tem-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_l \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} \\
\frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_l \partial x_j} &= \boxed{\frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j}},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

fazendo o mesmo procedimento entre a equação (2.28) e a equação (2.26):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \epsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_l \partial x_j} \\
\frac{\partial^2 \epsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} &= -\boxed{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_l \partial x_j} \right]}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Por fim, recolocando os termos em destaque da equação (2.29) na equação (2.27):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \epsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} &= -\frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \epsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \\
+ \frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} &= 0 \Leftrightarrow \epsilon_{kl,ij} + \epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{jl,ik} + \epsilon_{ik,jl} = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

A equação (2.30) é conhecida como equação de compatibilidade de Saint Venant. Ela representa a condição para que o tensor de deformações corresponde a um único campo de deslocamento. Os índices (i, j, k, l) variam de 1 a 3, logo a equação (2.30) corresponde a 81

equações diferenciais parciais. Para um caso bidimensional, essas 81 equações transfiguram-se na seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial^2 x_1} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (2.31)$$

2.3 Equação de equilíbrio

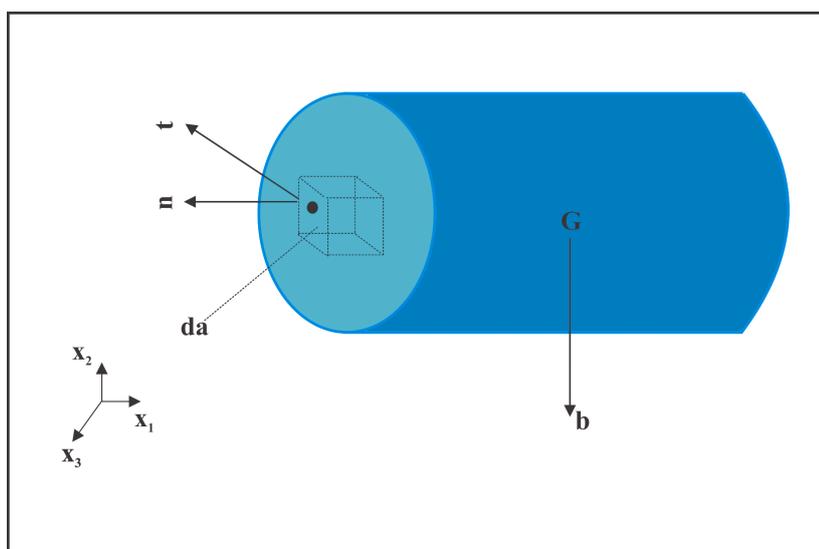


Figura 2.4: Corpo submetido a força de campo e a força de superfície

A tensão pode ser interpretada como uma medida de intensidade de uma força. Na mecânica dos meios contínuos, dois tipos de forças são particularizadas: força de corpo e força de superfície. A força de corpo pode atuar em um elemento de volume ou elemento de massa. Para o primeiro caso, a representamos pelo símbolo ρ e para a outra situação com o símbolo \mathbf{b} . O segundo tipo de força age sobre um elemento de superfície de um corpo. Ele é representado por \mathbf{t} . Assim, considerando que um corpo esteja sujeito a uma força de superfície \mathbf{t} e a uma força de corpo por \mathbf{b} , conforme a Figura 2.4, calcula-se a resultante de forças sobre ele com o primeiro axioma de Euler:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Leftrightarrow \int_V \rho \mathbf{b}_i dV + \int_S t_i dS = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV. \quad (2.32)$$

Esse axioma reflete o balanço do momento linear para um corpo e, por isso, é chamada de lei do balanço linear do momento. Ela mostra que taxa de variação do momento linear para um volume contínuo é igual à força resultante. Na equação (2.32), \mathbf{p} representa o momento linear. O segundo axioma está relacionado ao balanço do momento angular de um corpo. Vale frisar que os axiomas de Euler são utilizados para retratar o movimento de um corpo com massa continuamente distribuída, isto é, composto por um conjunto de partículas discretas. Para cada partícula aplicam-se as leis do movimento de Newton e, através delas, as

equações de Euler são derivadas. As equações de Euler podem, no entanto, ser usadas como axiomas para descrever as leis de movimento para corpos estendidos, independentemente da distribuição das partículas. O vetor \mathbf{t} da equação (2.32) é relacionado com o tensor de tensão de Cauchy (σ_{ji}), por meio da seguinte equação:

$$t_i = \sigma_{ji}n_j \quad (i = 1, 2), \quad (2.33)$$

sendo assim:

$$\int_V \rho b_i dV + \boxed{\int_S (\sigma_{ji}n_j) dS} = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV. \quad (2.34)$$

Valendo-se do teorema da divergência, a integral destacada na equação (2.34) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_S (\sigma_{ji}n_j) dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV = \int_V \sigma_{ji,j} dV \Leftrightarrow \int_S (\sigma_{ji}n_j) dS = \int_V \sigma_{ji,j} dV, \quad (2.35)$$

onde relacionamos a integral de volume com a integral de superfície. Com o solução dada pela equação (2.35), reformula-se a equação (2.34) como:

$$\int_V \rho b_i dV + \int_V \sigma_{ji,j} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV \Leftrightarrow \int_V \left[b_i + \sigma_{ji,j} - \rho \frac{dv_i}{dt} \right] dV = 0. \quad (2.36)$$

Através da equação (2.36), logra-se a seguinte equação:

$$b_i + \sigma_{ji,j} - \rho \frac{dv_i}{dt} = 0 \Leftrightarrow b_i + \sigma_{ji,j} = \rho \dot{v}_i. \quad (2.37)$$

Para reduzir a equação de equilíbrio por meio da equação (2.37), presume-se, primeiramente, que o somatório de forças é igual à zero. Logo, a aceleração \dot{v}_i é zero. Além disso, vamos considerar que não existe a presença da força de corpo b_i . Assim:

$$\sigma_{ji,j} = 0. \quad (2.38)$$

De acordo com Martin (2014), a equação (2.38) pode ser reescrita com função de tensão de Beltrami ϕ , que é um tensor simétrico de segunda ordem. A relação é dada por:

$$\sigma_{ji} = \epsilon_{jmp} \epsilon_{ikl} \phi_{mk,pl} \quad \text{ou} \quad \boxed{\sigma_{ji} = \delta_{ji} \phi_{kk,ll} - \delta_{ji} \phi_{kl,kl} - \phi_{ji,kk} + \phi_{lj,li} + \phi_{lj,li} - \phi_{kk,jj}}, \quad (2.39)$$

sendo que o lado direito da equação (2.39) pode ser decomposto nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \phi_{33,22} + \phi_{22,33} - 2\phi_{23,23}, \\
\sigma_{22} &= \phi_{11,33} + \phi_{33,11} - 2\phi_{31,31}, \\
\sigma_{33} &= \phi_{22,11} + \phi_{11,22} - 2\phi_{12,12}, \\
\sigma_{12} &= -\phi_{12,33} - \phi_{33,12} + \phi_{23,13} + \phi_{31,23}, \\
\sigma_{23} &= -\phi_{23,11} - \phi_{11,23} + \phi_{31,21} + \phi_{12,31}, \\
\sigma_{31} &= -\phi_{31,22} - \phi_{22,31} + \phi_{12,32} + \phi_{23,12}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

De acordo com o problema analisado, as funções de Beltrami podem ser simplificadas. Como comentado na seção inicial, as funções de Airy serão usadas para escrever tensão e deformação. Tais funções são um caso específico das funções potenciais de Maxwell. Por sua vez, as funções potenciais de Maxwell representam um caso específico das funções potenciais de Beltrami. As funções de tensão de Maxwell são dadas por:

$$\phi_{ij} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.41}$$

sendo que a equação (2.41) pode ser reescrita para o caso da equação (2.40) como:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \phi_{33,22} + \phi_{22,33}, \\
\sigma_{22} &= \phi_{11,33} + \phi_{33,11}, \\
\sigma_{33} &= \phi_{22,11} + \phi_{11,22}, \\
\sigma_{12} &= -\phi_{33,12}, \\
\sigma_{23} &= -\phi_{11,23}, \\
\sigma_{31} &= -\phi_{22,31}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

As funções de tensão de Airy são uma simplificação das funções de Maxwell. Considerando que ϕ_{11} e ϕ_{22} são nulas, a componente ϕ_{33} é dada por $\phi_{33} = \phi(x_1, x_2)$. Portanto, as componentes de tensões em função de $\phi(x_1, x_2)$ são:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}, \\
\sigma_{12} &= \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}, \\
\sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}, \\
\sigma_{23} &= 0, \\
\sigma_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

2.4 Equações constitutivas

Uma equação constitutiva é uma relação entre duas grandezas físicas específicas, como cinemática e cinética, de um material. Elas aproximam a resposta desse material a estímulos externos, geralmente como campos ou forças aplicadas. Como exemplo, temos a relação entre tensão com deformação. As equações constitutivas são importantes, já que elas completam, juntamente com a equação de equilíbrio e com a equação que relaciona deslocamento com deformação, um sistema de equações onde é possível obter todos os deslocamentos, tensões e deformações desconhecidos. Para um caso de três dimensões, temos 15 variáveis, sendo 3 deslocamentos, 6 deformações e 6 tensões. Para as situações dessa tese, a configuração dada é: 2 deslocamentos, 3 deformações e 3 tensões. Com as equações apresentadas até agora, temos 5 equações, sendo 3 equações que relacionam deslocamentos com deformações e 2 equações de equilíbrio de força. Para fechar esse conjunto de equações, apresentaremos as equações constitutivas.

Nessa tese, o modelo adotado para equação constitutiva é o elástico linear entre a relação tensão-deformação. Ele é considerado elástico porque recupera a sua configuração inicial assim que o carregamento é removido. Além disso, a tensão é função unicamente da deformação. Embora essa abordagem seja considerada bastante simples, através dela consegue-se obter uma boa aproximação com os resultados experimentais. A relação entre tensão-deformação, na sua forma mais abrangente, é dada por:

$$\sigma = \mathbf{F} : \epsilon \Leftrightarrow \sigma_{ij} = F_{ijkl}\epsilon_{kl}; \epsilon = \mathbf{S} : \sigma \Leftrightarrow \epsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \text{ com } (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (2.44)$$

O tensor F_{ijkl} é intitulado como tensor de rigidez e S_{ijkl} é o tensor flexibilidade, sendo que $\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}$. Ambos esses tensores são de quarta ordem e, por isso, têm 81 componentes. Contudo, nem todas essas componentes são independentes. Logo, o número de componentes necessárias para descrever esse tensor pode ser significativamente condensado. A primeira redução está relacionada com a simetria do tensor de tensão e do tensor de deformação. Através dessas relações, o número de constante independentes cai para 36, pois:

$$F_{ijkl} = F_{jikl}; S_{ijkl} = S_{jikl}. \quad (2.45)$$

Além disso, o tensor de rigidez F_{ijkl} e o tensor flexibilidade S_{ijkl} também são simétricos, devido a existência da função energia de deformação. Logo, o número de componentes independentes cai para 21. A relação do número de constantes independentes pode cair devido as propriedades de simetria existente na estrutura interna dos materiais. A Tabela 2.1 mostra a relação do número de constantes independentes com o tipo de simetria em cada material.

A relação entre tensão e deformação também pode ser representada através da notação

Tabela 2.1: Relação entre tipo de material e o número de constantes independentes

Tipo de material	Número de constante independentes
Ortogonal	9
Transversalmente isotrópico	5
Isotrópico	2

de Voigt. Ela é uma forma de apresentar uma equação através da contração dos índices da notação indicial, (VANNUCCI, 2017). Assim, conseguimos representar um tensor simétrico reduzindo sua ordem. Logo, os tensores simétricos de segunda ordem transformam-se em vetores coluna e, equivalentemente, o tensor de elasticidade de quarta ordem é transformado numa matriz quadrada simétrica de tamanho 6×6 . Portanto, temos que:

$$\sigma_i = F_{ij}\epsilon_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad (2.46)$$

$$\epsilon_i = S_{ij}\sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad (2.47)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 & \epsilon_{11} &= \epsilon_1, \\ \sigma_{22} &= \sigma_2 & \epsilon_{22} &= \epsilon_2, \\ \sigma_{33} &= \sigma_3 & \epsilon_{33} &= \epsilon_3, \\ \sigma_{23} &= \sigma_4 & 2\epsilon_{23} &= \epsilon_4, \\ \sigma_{13} &= \sigma_5 & 2\epsilon_{13} &= \epsilon_5, \\ \sigma_{12} &= \sigma_6 & 2\epsilon_{12} &= \epsilon_6. \end{aligned} \quad (2.48)$$

De acordo com Vannucci (2017), a introdução de 2 nos termos ϵ_4, ϵ_5 e ϵ_6 foi necessária para preservar a simetria de σ e ϵ devido a lei de Hooke. Escrevendo na forma matricial:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{F}]\{\epsilon\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 2\epsilon_4 \\ 2\epsilon_5 \\ 2\epsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{S}]\{\sigma\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.50)$$

Por fim, relaciona-se o tensor flexibilidade F_{ij} com as seguintes constantes da Tabela 2.2:

Tabela 2.2: Constantes materiais

Módulo de Young	E_k
Módulo de Cisalhamento	G_{ij}
Coefficiente de Poisson	ν_{ij}
Coefficiente Mútuo de primeira espécie	$\eta_{i,jk}$
Coefficiente Mútuo de segunda espécie	$\eta_{ij,k}$
Coefficiente de Chetsov	$\zeta_{ij,kl}$

$$\begin{aligned}
F_{11} &= 1/E_1, & F_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2, \\
F_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3, & F_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23}, \\
F_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23}, & F_{16} &= \eta_{12,1}/E_1, \\
F_{22} &= 1/E_2, & F_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3, \\
F_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23}, & F_{25} &= \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13}, \\
F_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12}, & F_{33} &= 1/E_3, \\
F_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23}, & F_{35} &= \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13}, \\
F_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12}, & F_{44} &= 1/G_{23}, \\
F_{45} &= \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13}, & F_{46} &= \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12}, \\
F_{55} &= 1/G_{13}, & F_{56} &= \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12}, \\
F_{66} &= 1/G_{12}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Onde o módulo de Young E_k está relacionado com eixo x_k , G_{ij} são os módulos de elasticidade transversais para os planos $x_i x_j$. O coeficiente de influência mútua de primeira espécie $\eta_{i,jk}$ representa a razão entre extensão da deformação com a deformação de cisalhamento, quando um dado elemento está submetido a tensão de cisalhamento. Ela é dada por:

$$\eta_{i,jk} = \frac{\epsilon_{ii}}{\gamma_{jk}} \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \text{ com } j \neq k \tag{2.52}$$

O primeiro índice representa o plano onde ocorre a extensão da deformação, seja um alongamento ou encurtamento. Os outros índices representam o plano onde está atuando a tensão de cisalhamento. O coeficiente mútuo de segundo tipo $\eta_{ij,k}$ representa a razão entre deformação de cisalhamento com a extensão da deformação. Isso ocorre quando um elemento está submetido a um tensão normal:

$$\zeta_{ij,k} = \frac{\gamma_{ij}}{\epsilon_{kk}} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ com } i \neq j. \tag{2.53}$$

Os primeiros índices representam o plano onde está ocorrendo o deslizamento e o segundo índice representa a direção onde está atuando a tensão normal. Por fim, o coeficiente de Chentsov $\zeta_{ij,kl}$ representa deformação cisalhante no plano $x_j x_i$ devido à tensão cisalhante

no plano $x_k x_l$.

Considerando que os problemas analisados nessa tese são problemas em duas dimensões, as equações (2.49) e (2.50) podem ser reescritas para situação plano de tensão e plano de deformação. O estado plano de tensão ocorre quando a tensão normal à uma superfície particular é zero ($\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$). Para esse caso, a equação (2.49) é dada por:

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{S}]\{\sigma\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}. \quad (2.54)$$

Em contra partida, o estado plano de deformação caracteriza-se por apresentar as seguintes relações para tensão:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= -\frac{1}{S_{33}(S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 + S_{36}\sigma_6)}, \\ \sigma_4 &= 0, \\ \sigma_5 &= 0, \\ \epsilon_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.55)$$

logo, a equação (2.49) torna-se:

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{S}]\{\sigma\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.56)$$

sendo que:

$$\beta_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}} \text{ com } (i, j = 1, 2, 6). \quad (2.57)$$

2.5 Formulação de Lekhnitskii

Para encontrar a solução do estado de tensão e deformação de um meio elástico anisotrópico, submetido a uma força externa, a deformação, o deslocamento e tensão devem satisfazer as seguintes equações: a equação de equilíbrio (2.38), a relação das pequenas deformações entre deslocamento-deformação, dada pela equação (2.21) e a relação linear entre tensão-deformação, dada pela equação (2.44). Para um caso em três dimensões, as equações acima totalizam um conjunto de 15 variáveis (6 tensões, 6 deformações e 3 deslocamentos) para serem calculadas através de 15 equações diferenciais, conforme comentado. Para problemas em duas dimensões, o número de variáveis e de equações utilizadas será apenas 8 (3 tensões, 3 deformações e 2 deslocamento).

Para solucionar as equações diferenciais dos problemas anisotrópicos, utiliza-se a formulação de Lekhnitskii ou formulação de flexibilidade. Desenvolvida por Lekhnitskii (1968), Lekhnitskii (1981), esse método é considerado um dos formalismo mais antigos para resolver problemas elásticos em duas dimensões para meios anisotrópicos. Tal formalismo

ainda tem sido bastante utilizado, Vignoli e Savi (2018) o usaram para obter a solução elástica das distribuições de tensão e deformação para cilindros laminados de parede espessa com pressão interna. Mimouna e Prioul (2017) calcularam tensões em torno de furos sujeitos a pressão interna e tensão *in situ* em meios elásticos triclínicos. Para isso, introduziu-se parâmetros anisotrópicos de Green no formalismo de Lekhnitskii. Bouhala, Makradi e Belouettar (2015) usaram o método dos elementos finitos estendidos, do inglês Extended Finite Element Method (XFEM), para modelar a propagação de trinca em materiais elásticos anisotrópicos. Nesse estudo, calculou-se a singularidade na ponta da trinca com funções especiais de enriquecimento. Elas foram derivadas a partir da análise assintótica do formalismo de Lekhnitskii. Outros formalismos existente é o de Stroh, que pode ser encontrado nos trabalhos de Eshelby, Read e Shockley (1953), Stroh (1958), Ting (1996), Ting (2000). Ele é conhecido como formalismo rigidez.

A principal diferença entre a formulação de Lekhnitskii e de Stroh está na maneira adotada para resolver as equações diferenciais. No formalismo de Lekhnitskii, a equação de equilíbrio é reescrita em termos da função de Airy e, em seguida, o resultado final é substituído na equação de compatibilidade. Na formulação de Stroh o processo é inverso, reescreve-se, primeiro, a equação de compatibilidade em termos da função de Airy para, depois, substituir esse resultado na equação de equilíbrio. Como mencionado, no formalismo de Lekhnitskii as tensões são consideradas dependentes apenas de duas coordenadas, x_1 e x_2 . Na formulação de Stroh, considera-se que os deslocamentos são funções das duas coordenadas citadas. Além disso, na formulação de Lekhnitskii, usa-se a equação constitutiva em termos do tensor flexibilidade \mathbf{S} e na formulação de Stroh usa-se a equação constitutiva em termos do tensor rigidez \mathbf{F} .

Para o formalismo de Lekhnitskii, considere que o corpo a ser analisado está limitado por uma superfície cilíndrica a qual está em equilíbrio elástico sob a ação de forças de superfícies. As equações desenvolvidas não levam em consideração o tamanho do corpo. Logo, ele pode ter tamanho finito ou infinito. O que garante que as tensões só dependem de duas coordenadas é o fato de considerar que as forças atuam em planos normais ao plano gerador da superfície cilíndrica, conforme apresentado por Hwu (2010).

Outra ponderação é que as forças atuantes não variam no plano da superfície geradora. A anisotropia é do tipo retilínea, onde todas as direções paralelas possuem propriedades elásticas equivalentes. Como será exposto, no formalismo de Lekhnitskii, as tensões serão escritas em termos de uma função potencial de tensão dependente, apenas, de duas coordenadas (x_1, x_2) . Para iniciar o formalismo de Lekhnitskii, considere o lado direito da equação (2.54). Para situação em duas dimensões, temos a seguinte simplificação:

$$\epsilon_i = S_{ij}\sigma_j \rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{16}\sigma_6, \\ \epsilon_2 = S_{12}\sigma_1 + S_{22}\sigma_2 + S_{26}\sigma_6, \\ \epsilon_6 = S_{16}\sigma_1 + S_{26}\sigma_2 + S_{66}\sigma_6. \end{cases} \quad (2.58)$$

As tensões da equação (2.58) são escritas usando funções de Airy, dada por: $\phi(x_1 + \mu x_2)$. Essas funções são empregadas com o objetivo de encontrar uma representação para o campo de tensão que seja capaz de satisfazer a equação de equilíbrio e a equação da compatibilidade. A representação manipulada será em termos de variáveis complexas. Sendo assim, considere que:

$$\sigma_1 = \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_2 = \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_6 = \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (2.59)$$

Logo, substituindo a equação (2.59) na equação (2.58), temos:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = S_{11} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} \right) + S_{12} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_1^2} \right) - S_{16} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \\ \epsilon_2 = S_{12} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} \right) + S_{22} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_1^2} \right) - S_{26} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \\ \epsilon_6 = S_{16} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} \right) + S_{26} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_1^2} \right) - S_{66} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right). \end{cases} \quad (2.60)$$

Agora, sobrepondo as deformações dadas pela equação (2.60) na equação (2.31), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial^2 x_1} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[S_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) + S_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \right) - S_{16} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[S_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) + S_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \right) - S_{26} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[S_{16} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) + S_{26} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \right) - S_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Reorganizando os termos da equação (2.61):

$$\begin{aligned} S_{11} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} \right) + S_{12} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} \right) - S_{16} \left(\frac{\partial \phi^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right) + S_{12} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} \right) + S_{22} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} \right) \\ - S_{26} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} \right) = S_{16} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right) + S_{26} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2 \partial x_1^3} \right) - S_{66} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) \\ S_{11} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} \right) + 2S_{12} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} \right) - 2S_{16} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} \right) + S_{22} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} \right) \\ - 2S_{26} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} \right) + S_{66} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) = 0 \Leftrightarrow L_4 \phi = 0, \end{aligned} \quad (2.62)$$

sendo que:

$$L_4 = S_{11} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) + 2S_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} \right) - 2S_{16} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^3 \partial x_2} \right) + S_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} \right). \quad (2.63)$$

A equação (2.63) pode ser decomposta em 4 operadores lineares de primeira ordem, da seguinte maneira:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 \phi = 0, \quad (2.64)$$

onde D_k é:

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (2.65)$$

A ideia de reproduzir a equação (2.62) pela equação (2.64) consiste em facilitar o processo de integração, fazendo-a por passos. Vale considerar que o termo μ_k representa as raízes da equação algébrica:

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + \mu^2(2S_{12} + S_{66}) - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0. \quad (2.66)$$

A equação (2.66) possui 4 raízes, que podem ser complexas ou imaginárias puras. Independentemente de serem complexas ou imaginárias puras, outra característica é que elas são sempre conjugadas ou não. Vale salientar que os valores de μ_k também representam o grau de anisotropia dos problemas, de acordo com Lekhnitskii (1981). Dessa forma, pode-se observar quão distantes estamos de uma situação isotrópica. Elas são conhecidas como parâmetros complexos. Para encontrar uma expressão para ϕ , deve-se resolver as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} D_4\phi_4 &= \phi_3, \\ D_4D_3\phi_3 &= \phi_2, \\ D_4D_3D_2\phi_2 &= \phi_1, \\ D_1\phi_1 &\equiv \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

A solução da equação (2.67), encontrada por Lekhnitskii (1968), e expressa da seguinte forma:

$$\phi(x_1, x_2) = \phi_1(x_1 + \mu_1 x_2) + \phi_2(x_1 + \mu_2 x_2) + \phi_3(x_1 + \mu_3 x_2) + \phi_4(x_1 + \mu_4 x_2). \quad (2.68)$$

Para o caso estudado, as raízes de μ_k são conjugadas. Por isso, tem-se:

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \\ \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \\ \mu_3 = \bar{\mu}_1, \\ \mu_4 = \bar{\mu}_2. \end{cases} \quad (2.69)$$

logo:

$$\phi(x_1, x_2) = 2\Re[\phi_1(x_1 + \mu_1 x_2) + \phi_2(x_1 + \mu_2 x_2)]. \quad (2.70)$$

A equação (2.70) pode ser reescrita como função da variável complexa $z_k = x_1 + \mu_k x_2$ para $k = 1, 2$, como:

$$\phi(z_1, z_2) = 2\Re[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)]. \quad (2.71)$$

Além disso, introduziremos a seguinte notação:

$$\frac{d\phi_i(z_i)}{dz_i} = \Psi_i(z_i). \quad (2.72)$$

Substituindo as relações das equações (2.71) e (2.72) nas equações (2.59) e (2.60), temos:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} = 2\Re[\mu_1^2 \Psi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Psi_2'(z_2)], \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1^2} = 2\Re[\Psi_1'(z_1) + \Psi_2'(z_2)], \\ \sigma_{12} &= \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1 \partial x_2} = 2\Re[\mu_1 \Psi_1'(z_1) + \mu_2 \Psi_2'(z_2)], \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \epsilon_{11} &= S_{11}(2\Re[\mu_1^2 \phi_1''(z_1) + \mu_2^2 \phi_2''(z_2)]) + S_{12}(2\Re[\phi_1''(z_1) + \phi_2''(z_2)]) + \\ &S_{16}(2\Re[\mu_1 \phi_1''(z_1) + \mu_2 \phi_2''(z_2)]), \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \epsilon_{22} &= S_{12}(2\Re[\mu_1^2 \phi_1''(z_1) + \mu_2^2 \phi_2''(z_2)]) + S_{22}(2\Re[\phi_1''(z_1) + \phi_2''(z_2)]) + \\ &S_{26}(2\Re[\mu_1 \phi_1''(z_1) + \mu_2 \phi_2''(z_2)]). \end{aligned}$$

reorganizando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= 2\Re(S_{11}\mu^2 \phi_1'' + S_{12}\phi_1'' - S_{16}\mu \phi_1'') + 2\Re(S_{11}\mu^2 \phi_2'' + S_{12}\phi_2'' - S_{16}\mu \phi_2'') \\ &= 2\Re(S_{11}\mu^2 + S_{12} - S_{16}\mu)\phi_1'' + 2\Re(S_{11}\mu^2 + S_{12} - S_{16}\mu)\phi_2'', \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 2\Re(S_{12}\mu^2 \phi_1'' + S_{22}\phi_1'' - S_{26}\mu \phi_1'') + 2\Re(S_{12}\mu^2 \phi_2'' + S_{22}\phi_2'' - S_{26}\mu \phi_2'') \\ &= 2\Re(S_{12}\mu^2 + S_{22} - S_{26}\mu)\phi_1'' + 2\Re(S_{12}\mu^2 + S_{22}\phi_2 - S_{26}\mu)\phi_2''. \end{aligned}$$

Integrando a equação (2.75) temos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\Re[p_1 \Psi_1(z_1) + p_2 \Psi_2(z_2)] - \omega x_2 + u_{01}, \\ u_2 &= 2\Re[q_1 \Psi_1(z_1) + q_2 \Psi_2(z_2)] + \omega x_1 + u_{02}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Na equação (2.76) temos que ω , u_{0_1} e u_{0_2} são constantes arbitrárias que apareceram devido o resultado da integração. Elas caracterizam os deslocamentos de corpo rígido, isto é, deslocamento sem deformação. A constante ω representa a rotação e u_{0_1} e u_{0_2} o deslocamento translacional. Nessa tese desconsideraremos a situação de deslocamentos de corpos rígidos. Logo, essas constantes serão ignoradas. Além disso, os termos p_i e q_i são dados por:

$$\begin{aligned} p_i &= S_{11}\mu_i^2 - S_{16}\mu_i + S_{12}, \\ q_i &= S_{12}\mu_i - S_{26} + (S_{12}/\mu_i). \end{aligned} \quad (2.77)$$

2.6 Materiais compósitos

Os materiais compósitos podem ser definidos como a combinação, na escala macroscópica, de dois ou mais materiais que são quimicamente distintos nessa escala, segundo Jones (1999). Como consequência, tem-se um material cujas propriedades mecânicas são melhores que a de seus constituintes, sendo elas influenciadas por inúmeros fatores. Entre eles, temos a seleção dos materiais utilizados na sua formação, a sua distribuição e a interação entre eles. Devido a esses fatores, consideramos que as propriedades do material compósito são ponderadas pela soma das frações volumétricas de seus constituintes, sendo que, segundo Agarwal e Broutman (1990), a razão de volume entre essas fases deve ser maior que 10%. Por isso, iremos estruturá-los por fases: uma contínua e outra descontínua. A fase descontínua é denominada de reforço e a fase contínua como matriz. A matriz tem como função manter a fase descontínua junta, proteger as fibras do meio envolvente, proteger as fibras do dano durante o manuseamento, distribuir o carregamento pelas fibras e redistribuir o carregamento pelas fibras em caso de ruptura.

A fase descontínua é responsável por realçar as propriedades mecânicas, eletromagnéticas ou químicas do material. Vale ressaltar que pode existir materiais de interface, ou interfases, presentes entre a matriz e o reforço. Dentre as várias características que essas fases possuem, vale ressaltar que a fase descontínua é, normalmente, mais rígida e resistente que a contínua, além dela ser capaz de promover o aumento da resistência ao calor, à corrosão e à condutividade. O reforço também é a estrutura que vai suportar a maior parte dos esforços e, por isso, deve ser mais forte e mais rígido que a matriz. Segundo Albuquerque (2001), esse constituinte deve ter uma rigidez e resistência pelo menos 5 vezes maior que a do outro componente, a fim de garantir que teremos um material com propriedades mecânicas muito superiores à de seus constituintes. Devido a esses fatores, os materiais compósitos apresentam maior rigidez específica e maior resistência mecânica específica que a maioria dos materiais comuns, como aços e alumínio. Além disso, a performance de materiais compósitos também é melhor do que a de seus constituintes em altas temperaturas. Define-se a rigidez específica como a relação entre rigidez e densidade. A resistência mecânica específica é a relação entre resistência mecânica e densidade. Outro importante fator que impacta a

propriedade final do material compósito é a geometria e a orientação do reforço com relação a um determinado sistema de referência. O fator geometria está relacionado com a distribuição, forma e tamanho do reforço. Normalmente, as unidades do reforço são modeladas como cilindros ou esferas.

O uso de materiais compósitos é bastante antigo. Segundo Albuquerque (2001), por volta de 800 a.C., os israelitas já usavam palhas de vegetais fibrosos para fabricar tijolos de argila. Na América do Sul e Central existiam algumas tribos indígenas que também usavam fibras vegetais para fazer peças cerâmicas. O grande desenvolvimento desse material surgiu a partir do século XX, especificamente durante os anos de 1940, com o surgimento dos compósitos com matriz polimérica reforçada com fibra de vidro, (DVORAK, 2013). Com o passar do tempo, o desenvolvimento e aperfeiçoamento na fabricação desses materiais, como o surgimento de fibras de carbono e boro, fez com que sua utilização crescesse. Vale ressaltar que, durante muitos anos, a indústria aeroespacial foi uma das principais áreas da ciência que promoveram o desenvolvimento desses materiais. Contudo, atualmente, devido a inovação e criação de novos materiais compósitos, a indústria automotiva, marítima, eletrônica e a construção civil têm promovido a sua expansão, juntamente com outras áreas da ciência que requerem o seu uso, (COMPOSITELAB, 2019). Devido a essa gama de utilidade, faz-se necessário criar uma classificação para os materiais compósitos, a fim de agrupá-los de acordo com a sua necessidade.

2.6.1 Tipos e Classificação dos Materiais Compósitos

Os compósitos podem ser classificados em dois níveis distintos: o primeiro com relação ao material constituinte da matriz e a segunda classificação está relacionada com o tipo de reforço usado, (DVORAK, 2013). Assim, temos os seguintes grupos apresentados na Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Classificação do material compósito segundo o tipo de matriz e a forma do reforço

Material da matriz	Forma do reforço
Polímero	Fibroso
Metal	Particulado
Cerâmico	Laminado

Os compósitos classificados pelo material de matriz são utilizados de acordo com faixa de temperatura que os mesmos suportam. Os materiais compósitos feitos de matriz polimérica, do inglês *polymer matrix composites* são os que trabalham em menores faixas de temperatura. Em contrapartida, os compósitos com matriz metálica situam-se na posição intermediária, isto é, eles suportam temperaturas maiores que os compósitos de matriz polimérica e não suportam as temperaturas de trabalho dos compósitos com matriz cerâmica.

Analisando a classificação dos compósitos a partir da segunda proposta, os compósitos fibrosos são aqueles formados por fibras pequenas ou longas. Elas podem estar orientadas

de forma aleatória ou não. O desempenho de tais compósitos, segundo Hannant (1980) e Johnston (1994), está intimamente relacionado com as seguintes características:

- Comprimento da fibra;
- Propriedades físicas da fibra e da matriz;
- Aderência entre as duas fases;
- A orientação e distribuição da fibra na matriz;

Quanto a orientação das fibras, destacamos as seguintes orientações: fibras paralelas uma as outras, fibras orientadas em ângulos retos (compósitos "*cross ply*") ou fibras orientadas em várias direções (compósito fibroso multidirecional).

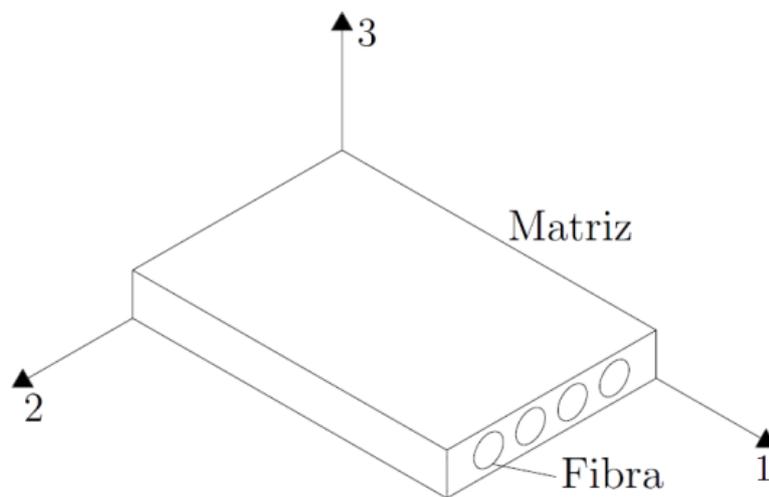


Figura 2.5: Lâmina ortotrópica - referência Costa (2011)

Os compósitos particulados são formados por partículas, de formas e tamanhos variados, aleatoriamente dispersas na matriz. Este material também pode ser denominado de quasi-homogêneo ou quasi-isotrópico, se o analisarmos em uma escala que seja muito maior que o tamanho da partícula e do seu espaçamento. A fase particulada tem como característica ser mais dura e rígida do que a matriz. Como consequência, eles tendem a restringir o movimento da matriz na vizinhança de cada partícula. Vale ressaltar que a performance do comportamento mecânico desse material está intimamente relacionada com a ligação na interface matriz-partícula. Como exemplo de compósitos particulados, temos o concreto, cuja a matriz é o cimento. A areia e o cascalho formam a parte particulada. No caso do vidro, detectamos que seu reforço é o floco de mica. Na exemplificação, também destacamos os polímeros reforçados com partículas de borracha, de chumbo, etc.

Os compósitos laminados são formados por camadas alternadas de materiais diferentes. Eles ficam impregnados em uma determinada matriz. Dentre os vários laminados existentes, os considerados simétricos são bastante utilizados para formarem estruturas, porque eles

apresentam uma equação constitutiva que permitem serem mais facilmente analisados. Uma lâmina é definida como uma camada plana ou curva de fibras unidirecionalmente dispostas ou na forma de tecidos. Os compósitos laminados que contêm lâminas de dois ou mais tipos de material são conhecidas como compósitos híbridos. Por isso, os laminados de material compósitos são designados indicando o número, tipo, orientação e sequência de empilhamento das várias lâminas. A lâmina é considerada com característica ortotrópica, sendo que os eixos principais estão dispostos nas seguintes direções:

- Na direção das fibras (longitudinal);
- Na direção normal as fibras, no plano da lâmina (transversal);
- Na direção normal ao plano da lâmina;

Esses eixos podem ser chamados de $(1, 2, 3)$, conforme a Figura 2.5 ou da forma (x, y) , como na Figura 2.6. Além do eixo das lâminas, também temos o eixo dos laminados, definido como (\bar{x}, \bar{y}) na Figura 2.6. Em algumas situações, tais eixos não são coincidentes. Logo, a relação constitutiva de cada lâmina deverá ser modificada para o eixo do laminado (\bar{x}, \bar{y}) . Por isso, tal eixo será considerado o eixo de referência. Conforme a Figura 2.6, a orientação de uma lâmina (x, y) é dada pelo ângulo entre o eixo de referência (\bar{x}, \bar{y}) e a direção das fibras da lâmina. Vale salientar que o sentido do ângulo é anti-horário, como apresenta a Figura 2.6.

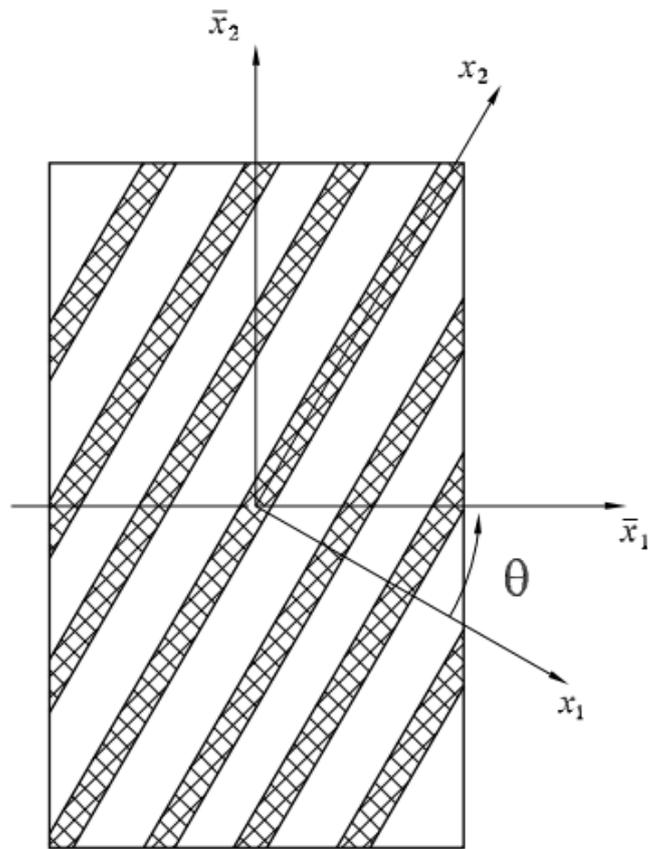


Figura 2.6: Sistemas de coordenadas da lâmina (x_1, x_2) e do laminado (\bar{x}, \bar{y}) . referência: Albuquerque (2001)

2.7 Comportamento elástico da lâmina do compósito

Nessa seção apresentaremos o cálculo da tensão e deformação para uma lâmina bidimensional, onde as fibras estão orientadas unidirecionalmente. Considerando que a lâmina seja ortotrópica, conforme a Figura 2.7, a relação de tensão e deformação, dada pela primeira identidade da equação (2.44), é:

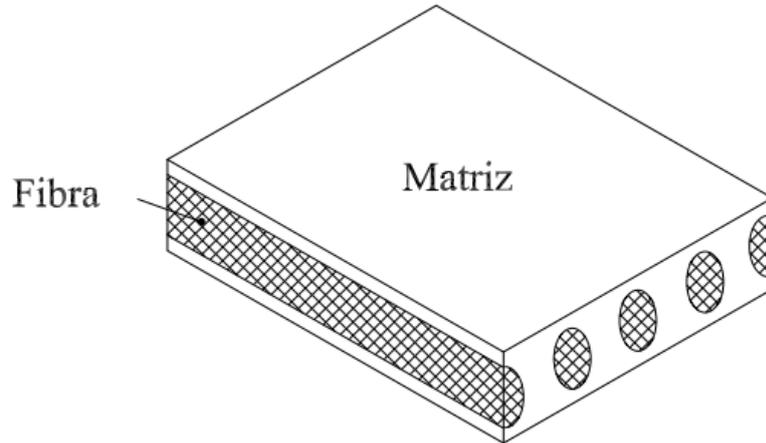


Figura 2.7: Lâmina ortotrópica - referência: Albuquerque (2001)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ 2\epsilon_6 \end{Bmatrix}. \quad (2.78)$$

Sendo que a equação (2.78) pode ser reescrita com as identidades dada pela equação (2.50):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & C_{12} & 0 \\ \nu_{12}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ 2\epsilon_6 \end{Bmatrix}. \quad (2.79)$$

Como pode-se perceber, a equação (2.79) foi completamente caracterizada com os seguintes valores de constantes elásticas: os módulos de elasticidade longitudinais E_1 e E_2 nas direções 1 e 2, o módulo de elasticidade transversal G_{12} e a razão de Poisson ν_{12} . Por isso a lâmina acima é ortotrópica.

Quando os eixos principais das lâminas (x_1, x_2) não são coincidentes com os eixos dos laminados (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , deve-se fazer uma transformação na relação constitutiva de cada lâmina, para que os eixos principais da lâmina sejam coincidentes com os eixos dos laminados. Para realizar tal feito, deve-se multiplicar os tensores de tensão e deformação do sistema de

referência da lâmina $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ com a matriz de transformação \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \text{ sendo que : } m = \cos(\theta) \text{ e } n = \sin(\theta) \quad (2.80)$$

logo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.81)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.82)$$

Feita a transformação do sistema de referência da lâmina para o sistema de referência do laminado, a relação dada pela equação (2.78) pode ser dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{T}^{-1})' \begin{Bmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ 2\epsilon'_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.83)$$

onde $(\mathbf{T}^{-1})'$ representa a matriz transposta da matriz inversa de \mathbf{T} :

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Vale ressaltar que a matriz inversa \mathbf{T}^{-1} pode ser obtida pela substituição do ângulo positivo θ pelo ângulo negativo $-\theta$. Fazendo a multiplicação dos termos $\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{T}^{-1})'$ da equação (2.83), encontramos que:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & \bar{F}_{16} \\ \bar{F}_{12} & \bar{F}_{22} & \bar{F}_{26} \\ \bar{F}_{16} & \bar{F}_{26} & \bar{F}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.85)$$

onde os termos da matriz \bar{F}_{ij} são dados por:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_{11} &= F_{11}\cos^4\theta + 2(F_{12} + 2F_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + F_{22}\sin^4\theta, \\
 \bar{F}_{22} &= F_{11}\sin^4\theta + 2(F_{12} + 2F_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + F_{22}\cos^4\theta, \\
 \bar{F}_{12} &= (F_{11} + F_{22} - 4F_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + F_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
 \bar{F}_{66} &= (F_{11} + F_{22} - 2F_{12} - 2F_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + F_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta), \\
 \bar{F}_{16} &= (F_{11} - F_{12} - 2F_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (F_{12} - F_{22} + 2F_{66})(\sin^3\theta\cos\theta), \\
 \bar{F}_{66} &= (F_{11} - F_{12} - 2F_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (F_{12} - F_{22} + 2F_{66})(\sin\theta\cos^3\theta). \quad (2.86)
 \end{aligned}$$

Conforme a equação (2.85), a matriz \bar{F} é completamente preenchida. Logo temos seis constantes elásticas governando o comportamento da lâmina, porém duas, \bar{F}_{16} e \bar{F}_{26} , são combinações lineares das outras quatro. Devido a transformação realizada pelo sistema de referência, a lâmina ortotrópica é conhecida como *geralmente* ortotrópica. Logo, a matriz \bar{F} é parecida com a matriz \mathbf{F} dos materiais totalmente anisotrópicos ($\bar{F}_{16} \neq 0$, $\bar{F}_{26} \neq 0$). Porém, quando temos a condição onde $F_{16} = F_{26} = 0$, diz-se que o material é especialmente ortotrópico.

2.8 Laminados simétricos

Laminados simétricos são aqueles onde as lâminas estão dispostas para que haja um plano médio em relação a elas, de tal modo que, para cada lâmina a uma distância h do plano médio, exista uma outra, com propriedades e orientação idêntica, sendo está localizada, também, a mesma distância h , conforme mostra a Figura 2.8.

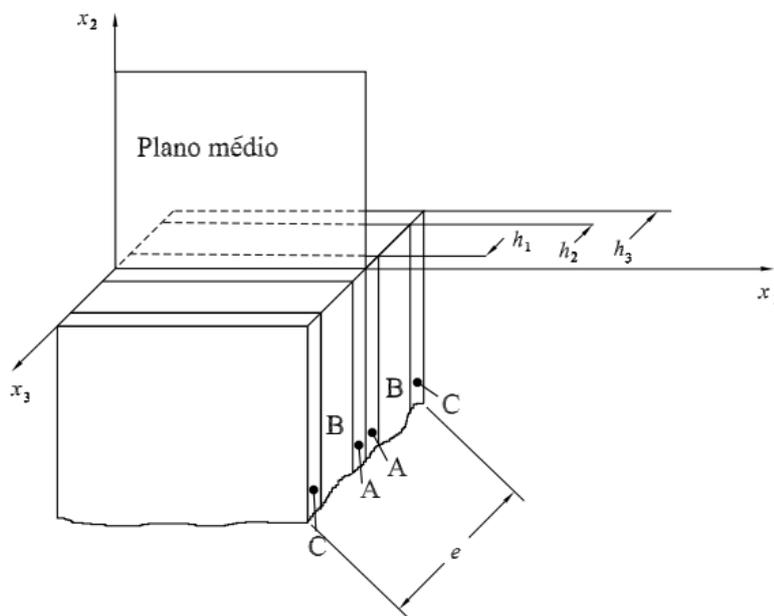


Figura 2.8: Laminado simétrico - referência: Albuquerque (2001)

De acordo com Albuquerque (2001), a não existência de um plano médio implica num laminado no qual não é possível fazer uma análise bidimensional, pois haveria uma flexão em torno do eixo x_1 . Assim, tal flexão, juntamente com as deformações no plano x_1x_2 , totalizaria três deformações em torno de um único eixo. Portanto, a análise bidimensional estaria descartada.

Para analisar o comportamento do laminado simétrico da forma que faremos, devemos assumir algumas hipóteses. Assim, inicialmente, consideramos que as deformações em qualquer reta que seja perpendicular ao plano x_1x_2 serão as mesmas em toda a espessura do laminado. Logo, pressupõem-se que as lâminas encontram-se perfeitamente coladas (não há escorregamentos entre uma lâmina e outra). Além disso, o tensor de deformações ϵ_{ij} será, por hipótese, o mesmo em todas as lâminas. A fim de obter as componentes do tensor de tensões atuantes num laminado, iremos integrar as componentes atuantes em cada lâmina, ao longo de toda a espessura e do laminado, ou seja:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \sigma'_{ij} dx_3, \quad (2.87)$$

onde σ'_{ij} é o tensor de tensão atuante em uma lâmina individual e $\bar{\sigma}_{ij}$ é o tensor de tensão média no laminado.

Considerando que o laminado possua N lâminas genericamente ortotrópicas, conforme mostrado na Figura 2.8, as forças atuantes no plano médio deste laminado podem ser obtidas pela substituição da integral contínua pela soma das integrais, representando a contribuição de cada lâmina.

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix}_l dx_3. \quad (2.88)$$

Substituindo a equação (2.85) na equação (2.88), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}'_{11} \\ \bar{\sigma}'_{22} \\ \bar{\sigma}'_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{h_{l-1}}^{h_l} \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & \bar{F}_{16} \\ \bar{F}_{12} & \bar{F}_{22} & \bar{F}_{26} \\ \bar{F}_{16} & \bar{F}_{26} & \bar{F}_{66} \end{bmatrix}_l \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}'_{11} \\ \bar{\epsilon}'_{22} \\ \bar{\epsilon}'_{12} \end{Bmatrix} dx_3 \right\}. \quad (2.89)$$

A equação (2.89) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}'_{11} \\ \bar{\sigma}'_{22} \\ \bar{\sigma}'_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \left[\sum_{l=1}^N \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & \bar{F}_{16} \\ \bar{F}_{12} & \bar{F}_{22} & \bar{F}_{26} \\ \bar{F}_{16} & \bar{F}_{26} & \bar{F}_{66} \end{bmatrix}_l (h_l - h_{l-1}) \right] \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}'_{11} \\ \bar{\epsilon}'_{22} \\ \bar{\epsilon}'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.90)$$

pois a matriz de rigidez \bar{F}_l e o vetor deformação ϵ_{ij} são constantes ao longo da espessura da

lâmina ($h_l - h_{l-1}$). A matriz de rigidez média dada por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}'_{11} \\ \bar{\sigma}'_{22} \\ \bar{\sigma}'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix}_L \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}'_{11} \\ \bar{\epsilon}'_{22} \\ \bar{\epsilon}'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.91)$$

onde:

$$\mathbf{F}_L = \left[\frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \bar{\mathbf{F}}_l (h_l - h_{l-1}) \right]. \quad (2.92)$$

Vale ressaltar que a equação (2.92) é equivalente a matriz de rigidez do laminado. Além disso, o tensor de flexibilidade para o laminado é dada pelo inverso do tensor de rigidez, ou seja:

$$[S_{ij}]_L = \mathbf{F}_L^{-1}. \quad (2.93)$$

Por fim, de acordo com Albuquerque (2001), muitas vezes tem-se ainda a necessidade de se escrever o tensor de rigidez F_{ij} e de flexibilidade S_{ij} do laminado em relação a um outro referencial. Neste caso, por um procedimento similar ao realizado para encontrar as equações, tem-se que:

$$\begin{aligned} S'_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (S_{16} \cos^2 \theta + S_{26} \sin^2 \theta) \sin 2\theta, \\ S'_{22} &= S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{11} \sin^4 \theta - (S_{16} \cos^2 \theta + S_{26} \sin^2 \theta) \sin 2\theta, \\ S'_{12} &= S_{12} + (S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} (S_{26} - S_{16}) \sin 2\theta \cos 2\theta \\ S'_{66} &= S_{66} + 4(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2(S_{26} - S_{16}) \sin 2\theta \cos 2\theta, \\ S'_{16} &= [S_{22} \sin^2 \theta - S_{11} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} (2S_{12} + S_{66}) \cos 2\theta] \sin 2\theta + S_{16} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) \\ &\quad + S_{26} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ S'_{26} &= [S_{22} \cos^2 \theta - S_{11} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (2S_{12} + S_{66}) \cos 2\theta] \sin 2\theta + S_{16} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ &\quad + S_{26} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta), \end{aligned} \quad (2.94)$$

onde S'_{ij} representa a matriz de constantes elásticas do laminado escrita no sistema (x'_1, x'_2) enquanto que S_{ij} representa esta mesma matriz escrita no sistema (x_1, x_2) . Por fim, as raízes da equação característica podem ser escritas num novo sistema de coordenadas, conforme mostrado por Lekhnitskii (1968) como:

$$\mu'_k = \frac{\mu_k \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}, \quad (2.95)$$

onde μ'_k representa as raízes da equação característica no referencial (x'_1, x'_2) e μ_k as raízes da mesma equação no referencial (x_1, x_2) .

Capítulo 3

Método de Elementos de Contorno para materiais anisotrópicos

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos a formulação do MEC para problemas de elasticidade anisotrópica. Começaremos-o com uma breve apresentação das ideias básicas do MEC, como suas vantagens, desvantagens e características. Em seguida, desenvolveremos as soluções fundamentais para formulação proposta. Vale ressaltar que elas são essenciais ao método, pois, sem elas, as equações integrais de contorno não são obtidas. O teorema recíproco de Betti e a identidade de Somigliana também serão descritos. Esses dois tópicos colaborarão, juntamente com as soluções fundamentais, para o desenvolvimento da equação integral de contorno, que será obtida na quarta parte deste capítulo. Posteriormente, iremos discretizá-la, para obter o sistema linear do MEC. Para realizar tal feito, apresentaremos os tipos de elementos disponíveis para efetuar a discretização. Além disso, mostraremos como a solução desses problemas são encontradas. Por fim, as equações para calcular tensão e o deslocamento no interior do domínio são descritas.

3.2 Ideias básicas do MEC

Como apresentado na introdução, o MEC corresponde a uma classe de métodos numéricos disponíveis para encontrar a solução de problemas existentes em diversas áreas da ciência. Tal método, juntamente com o Método dos Elementos Finitos (MEF), do inglês *Finite Element Method* (FEM) e com o Método das Diferenças Finitas (MDF), do inglês *Finite Difference Methods* (FDM) formam o grupo dos métodos computacionais mais utilizados, sendo que o MEF é o de maior destaque entre eles, pois é o mais difundido e o mais utilizado, segundo os dados de Alexander e Cheng (2005). O MEF e o MDF fazem parte dos métodos numéricos que tem o domínio do problema como base para seu desenvolvimento.

Por isso, eles trabalham com equações diferenciais, sejam elas ordinárias ou parciais. Em contrapartida, o MEC é um método que trabalha com o contorno do problema analisado. Por isso, faz-se necessário trabalhar com a formulação integral das equações diferenciais. Esse fato configura-se como uma de suas principais características. A Figura 3.1 reflete o que foi apresentado.

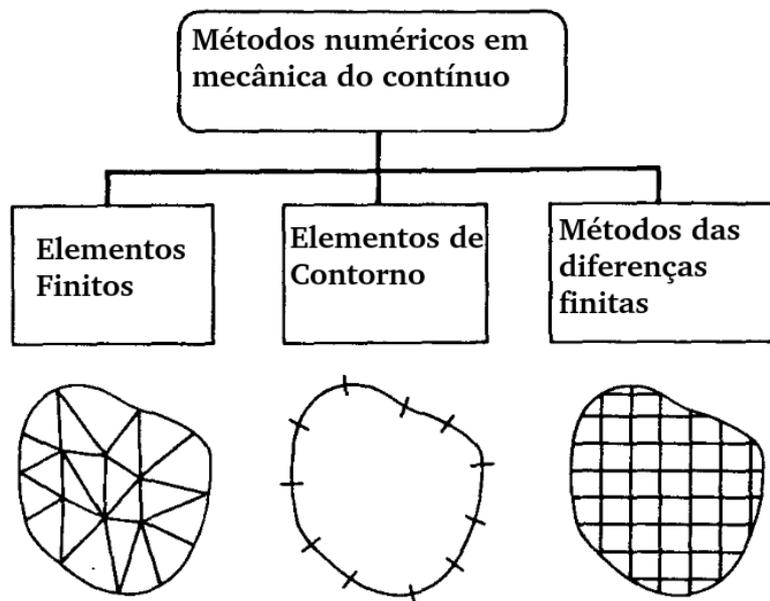


Figura 3.1: Classificação dos métodos numéricos - referência: Becker (1992) modificado

Todos esses métodos possuem desvantagens e vantagens, por isso, para determinadas situações, um deles levará vantagem sobre os outros dois. Como exemplo, o MEC possui melhor desempenho que o MEF para problemas de meio infinito e semi-infinito. Em contrapartida, para o MEC ser aplicado, o problema estudado precisa ter uma solução fundamental. Se isso não acontecer, não será possível usar o MEC, pois a equação integral não pode ser obtida. A título de exemplo, a Tabela 3.1 apresenta algumas vantagens e desvantagens entre o MEC e o MEF.

Mais informações sobre características do MEC podem ser encontrada nas seguintes literaturas: Aliabadi (2002), Beer, Smith e Duenser (2008), Brebbia e Dominguez (1992), Liu (2009), Gaul, Kogl e Wagner. (2002), Katsikadelis (2016)

3.3 Soluções fundamentais

As soluções fundamentais podem ser definidas como as soluções de uma equação diferencial quando a condição de carga concentrada é utilizada, segundo Aliabadi (2002) e Beer, Smith e Duenser (2008). Na literatura, essas soluções também podem ser referidas como funções de Green ou *kernels*. Nesta tese apresentaremos as soluções fundamentais relacionadas com a formulação de Lekhnistskii (1981), Lekhnistskii (1968). A utilização dessas soluções está presente em muitos artigos que lidam com a elasticidade anisotrópica. Seu uso

Tabela 3.1: Características e vantagens do MEF e MEC

MEF	MEC
Características	
Abordagem feita com derivadas Malha do domínio: 2D ou 3D; Matriz simétrica e esparsa; Muitos pacotes comerciais disponíveis;	Abordagem feita com integrais; Malha do contorno: 1D ou 2D; Matriz não simétrica e densa; Poucos pacotes comerciais disponíveis;
Vantagens	
Solução rápida; Adequada para análises estruturais; Problemas não-lineares; Materiais compósitos (análise em macro-escala);	Geração da malha é rápida; Adequada para problemas com concentração de tensão; Problemas de domínio infinito; Materiais compósitos (análise em micro-escala);

remonta aos anos 90, desde os primeiros trabalhos de Sollero (1994), seguidos por muitos outros trabalhos, como os de Albuquerque, Sollero e Aliabadi (2004), Albuquerque, Sollero e Fedelinski (2003a), Albuquerque, Sollero e Fedelinski (2003b), Albuquerque, Sollero e Aliabadi (2002), Garcia-Sanchez, Saez e Dominguez (2006), Garcia-Sanchez, Zhang e Saez (2008). Vale ressaltar que tal solução fundamental nunca foi usada para simular problemas de larga escala para materiais anisotrópicos. Trabalharemos com as solução fundamental de deslocamento U_{ij} e a solução fundamental de força de superfície T_{ij} . Elas representam o deslocamento e a força de superfície no ponto campo \mathbf{z} , na direção j , quando a força concentrada está atuando na direção i no ponto fonte \mathbf{z}_0 . Portanto, o ponto fonte é o ponto em que a força concentrada é aplicada. No ponto campo encontramos a resposta que desejamos obter. Como as soluções fundamentais serão mapeadas em um plano complexo, escreveremos o ponto fonte \mathbf{z}_0 e o ponto campo \mathbf{z} como:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{Bmatrix} z_{o1} \\ z_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{o1} + \mu_1 x_{o2} \\ x_{o1} + \mu_2 x_{o2} \end{Bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

Os termos μ_1 e μ_2 das equações (3.2) e (3.1) são raízes da equação característica (2.66). As coordenadas do ponto fonte são (x_{o1}, x_{o2}) e as coordenadas do ponto campo são (x_1, x_2) . Para encontrar as soluções fundamentais, é necessário descobrir as funções de tensão de Airy correspondentes às equações de forças de superfície fundamentais. Portanto, considere um contorno fechado Γ ao redor do ponto fonte \mathbf{z}_0 . Pode-se escrever as equações de forças de

superfície fundamentais como:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} t_1 d\Gamma &= \oint_{\Gamma} \sigma_{11} n_1 d\Gamma + \oint_{\Gamma} \sigma_{12} n_2 d\Gamma \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} t_1 d\Gamma = 2\Re[\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2], \\ \oint_{\Gamma} t_2 d\Gamma &= \oint_{\Gamma} \sigma_{12} n_1 d\Gamma + \oint_{\Gamma} \sigma_{22} n_2 d\Gamma \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} t_2 d\Gamma = 2\Re[\Psi_1 + \Psi_2].\end{aligned}\quad (3.3)$$

Os colchetes duplos foram necessários porque representam o salto da função devido a um contorno fechado em torno do ponto fonte, segundo Cruse e Swedlow (1971). A equação (3.3) terá resultado diferente de zero se o contorno Γ incluir o ponto de aplicação de carga. Para encontrar a função de Airy desejada, deve-se considerar que a integrais da equação (3.3) sejam escritas considerando carregamentos concentrados. Eles são representados pelo delta de Dirac: δ_{i1} e δ_{i2} . A função de Airy relacionada ao carregamento concentrado na direção i é representado por Ψ_{ik} . Logo, a equação (3.3) é reescrita como:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} t_1 d\Gamma &= -\delta_{i1} \therefore -\delta_{i1} = 2\Re[\mu_1 \Psi_{i1} + \mu_2 \Psi_{i2}], \\ \oint_{\Gamma} t_2 d\Gamma &= \delta_{i2} \therefore \delta_{i2} = 2\Re[\Psi_{i1} + \Psi_{i2}].\end{aligned}\quad (3.4)$$

Para que a equação (3.4) satisfaça qualquer contorno fechado Γ em torno de \mathbf{z}_o , deve-se considerar que:

$$\Psi_{ik} = A_{ik} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o), \quad (3.5)$$

onde A_{ik} representa o valor de quatro constantes complexas. Para obtê-las, primeiramente, considere o seguinte resultado:

$$\ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o) = 2\pi i, \quad (3.6)$$

sendo que a equação (3.6) foi obtida devido as propriedades da função complexa. Ela representa o resultado associado com a condição de um contorno fechado qualquer em torno de \mathbf{z}_o . Mesclando os resultados da equação (3.5) e (3.6) para reescrever a equação (3.4), tem-se:

$$\begin{aligned}-\delta_{i1} &= 2\Re[\mu_1 \Psi_{i1} + \mu_2 \Psi_{i2}] \Leftrightarrow -\delta_{i1} = 2\Re[\mu_1 A_{i1} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o) + \mu_2 A_{i2} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o)] \\ -\delta_{i1} &= 2\Re[\mu_1 A_{i1} 2\pi i + \mu_2 A_{i2} 2\pi i], \\ \delta_{i2} &= 2\Re[\Psi_{i1} + \Psi_{i2}] \Leftrightarrow \delta_{i2} = 2\Re[A_{i1} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o) + A_{i2} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o)] \\ -\delta_{i2} &= 2\Re[A_{i1} 2\pi i + A_{i2} 2\pi i],\end{aligned}\quad (3.7)$$

reorganizando:

$$\begin{aligned}\left(\frac{-\delta_{i1}}{2\pi i}\right) &= \mu_1 A_{i1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{i1} + \mu_2 A_{i2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{i2}, \\ \left(\frac{-\delta_{i2}}{2\pi i}\right) &= A_{i1} - \bar{A}_{i1} + A_{i2} - \bar{A}_{i2},\end{aligned}\quad (3.8)$$

sendo que a barra sobre os termos da equação (3.8) representam o complexo conjugado. Para encontrar as outras duas equações, considere que os deslocamentos possam ser reescritos como:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\Re[p_{11}\Psi_{i1}(z_1) + p_{12}\Psi_{i2}(z_2)] \Leftrightarrow u_1 = 2\Re[p_{11}A_{i1} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o) + p_{12}A_{i2} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o)], \\ u_2 &= 2\Re[p_{21}\Psi_{i1}(z_1) + p_{22}\Psi_{i2}(z_2)] \Leftrightarrow u_2 = 2\Re[p_{21}A_{i1} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o) + p_{22}A_{i2} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Devido a exigência dos deslocamentos serem únicos, temos que:

$$\llbracket u_i \rrbracket = 0. \quad (3.10)$$

Logo, os resultados para equação (3.10) são:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\Re[p_{11}A_{i1} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o) + p_{12}A_{i2} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o)], \\ 0 &= 2\Re[p_{21}A_{i1} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o) + p_{22}A_{i2} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o)], \end{aligned} \quad (3.11)$$

reorganizando:

$$\begin{aligned} 0 &= p_{11}A_{i1} - \bar{p}_{11}\bar{A}_{i1} + p_{12}A_{i2} - \bar{p}_{12}\bar{A}_{i2}, \\ 0 &= p_{21}A_{i1} - \bar{p}_{21}\bar{A}_{i1} + p_{22}A_{i2} - \bar{p}_{22}\bar{A}_{i2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Assim, montamos o seguinte sistema de equação linear utilizando a equação (3.12) e (3.8).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ p_{11} & -\bar{p}_{11} & p_{12} & -\bar{p}_{12} \\ p_{21} & -\bar{p}_{21} & p_{22} & -\bar{p}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i1} \\ \bar{A}_{i1} \\ A_{i2} \\ \bar{A}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{i2}/(2\pi i) \\ -\delta_{i1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

A solução da equação (3.13) torna-se singular quando μ_1 é igual a μ_2 , (SOLLERO, 1994) e (ALBUQUERQUE, 2001). Essa singularidade surge quando tentamos equiparar a solução fundamental anisotrópica com a solução fundamental isotrópica. Quando isso acontece, a equação característica torna-se biquadrada, sendo que duas raízes serão iguais à i e as outras duas iguais à $-i$. Devido à singularidade mencionada acima, não é possível, dessa formar, aproximar o comportamento da solução fundamental de materiais anisotrópicos com a solução fundamental isotrópica de Kelvin. Para fazer a comparação proposta, deve-se utilizar uma formulação quase-isotrópica:

$$E_1 = E_2 + \chi \simeq E. \quad (3.14)$$

O módulo de cisalhamento é dado por:

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}. \quad (3.15)$$

Assim, após obtermos a função de Airy correspondente ao carregamento apropriado, dada pela equação (3.5), deve-se substituí-la nas equações (2.76) para escrever a solução fundamental de deslocamento U_{ij} :

$$U_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) = 2\Re[p_{i1}\Psi_{i1} + p_{i2}\Psi_{i2}] = 2\Re[p_{i1}A_{i1}\ln(z_1 - z_{o1}) + p_{i2}A_{i2}\ln(z_2 - z_{o2})]. \quad (3.16)$$

A solução fundamental para força de superfície T_{ij} é obtida a partir da derivada da equação (3.6) com respeito a z_i . Em seguida, substitui esse resultado na equação (2.73), para obter a seguinte equação:

$$T_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) = 2\Re[q_{j1}\Psi'_{i1} + q_{j2}\Psi'_{i2}] = 2\Re \left[\frac{q_{j1}(\mu_1 n_1 - n_2)A_{i1}}{(z_1 - z_{o1})} + \frac{q_{j2}(\mu_2 n_1 - n_1)A_{i2}}{(z_2 - z_{o2})} \right]. \quad (3.17)$$

onde:

$$q_{ji} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Na equação (3.17) os termos n_1 e n_2 representam os componentes do vetor externo normal n_k . As soluções fundamentais dada pelas equações (3.16) e (3.17) possuem singularidades quando o ponto fonte e o ponto campo se aproximam. A singularidade para equação (3.16) é considerada fraca, pois é do tipo $\ln(r)$. A singularidade para equação (3.17) é do tipo forte, pois é do tipo $(1/r)$. Essa denominação existe porque a singularidade do tipo forte cresce mais rápido em direção ao valor infinito, enquanto a outra singularidade cresce de uma maneira mais branda, conforme a Figura 3.2. Assim, definidas as soluções fundamentais, deve-se, agora, desenvolver as equações integrais de contorno. Para tal, utilizaremos o teorema de reciprocidade de Betti e a identidade de Somigliana. Durante o desenvolvimento de tais tópicos, ficará claro porque a solução fundamental é um fator importante para o desenvolvimento do MEC.

3.4 Teorema de reciprocidade de Betti

O primeiro passo para apresentar a formulação do MEC está relacionada com a transformação de uma equação diferencial em uma equação integral, Gaul, Kogl e Wagner. (2002). Para problemas de elasticidade, seja em meio isotrópico ou anisotrópico, a equação integral é formulada com base no teorema do trabalho recíproco de Betti (1873).

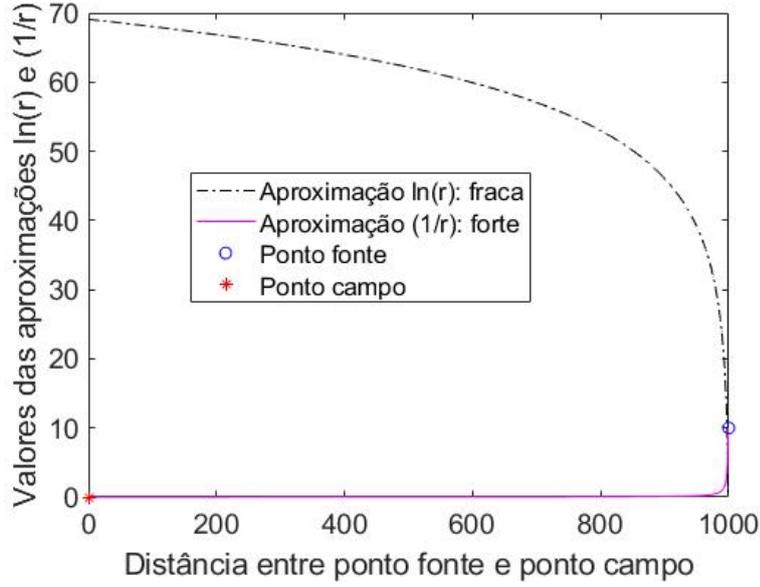


Figura 3.2: Comportamento das singularidades fortes e fracas

O teorema recíproco de Betti, também conhecido como teorema de Maxwell-Betti, foi utilizado para integrar as equações de elasticidade e derivar sua solução na forma integral. Esse teorema é considerado uma proposta mais geral que o princípio de reciprocidade proposto por Maxwell.

Através do teorema de Betti correlacionamos o trabalho de dois estados elásticos diferentes. Assim, considerando os estados elásticos I e II , pode-se igualar o trabalho resultante da carga do estado I e o deslocamento do estado II com um outro trabalho resultante da aplicação de uma carga no estado II e o deslocamento do estado I . Esse teorema é importante porque uns dos estados utilizados para desenvolver a equação integral está relacionado com a solução fundamental. Sendo assim, considere os estados (u_i, t_i, b_i) e (u_i^*, t_j^*, b_i^*) . A equação de equilíbrio é reescrita como:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \boxed{\sigma_{ij,j} u_i^*} d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0, \quad (3.19)$$

onde o termo em destaque na equação (3.19) foi originado a partir da seguinte equação:

$$(\sigma_{ij} u_i^*)_j = \sigma_{ij,j} u_i^* + \sigma_{ji} u_{i,j}^*. \quad (3.20)$$

O deslocamento $u_{i,j}^*$ pode ser escrito como a soma do tensor simétrico e anti-simétrico:

$$u_{i,j}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) + \frac{1}{2}(u_{i,j}^* - u_{j,i}^*) = \epsilon_{ij}^* + \omega_{ij}^*, \quad (3.21)$$

onde ϵ_{ij}^* é o tensor deformação e ω_{ij}^* o tensor rotação. O primeiro é simétrico e o segundo é

anti-simétrico. Então, a equação (3.20) é reescrita como:

$$(\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} = \sigma_{ij,j}u_i^* + \sigma_{ji}\epsilon_{ij}^* + \sigma_{ij}\omega_{ij}^*. \quad (3.22)$$

Como σ_{ij} é um tensor simétrico, o produto entre um tensor simétrico e um tensor anti-simétrico ω_{ij}^* é nulo. A equação (3.22) será:

$$(\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} = \sigma_{ij,j}u_i^* + \sigma_{ji}\epsilon_{ij}^* \Leftrightarrow (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} - \sigma_{ji}\epsilon_{ij}^* = \sigma_{ij,j}u_i^*, \quad (3.23)$$

substituindo o termo $\sigma_{ij,j}u_i^*$ da equação (3.23) na equação (3.19):

$$\text{int}_{\Omega}(\sigma_{ij}u_i^*)_{,j}d\Omega - \int_{\Omega}\sigma_{ji}\epsilon_{ij}^*d\Omega + \int_{\Omega}b_iu_i^*d\Omega = 0. \quad (3.24)$$

Usando o teorema da divergência na primeira integral da equação (3.24):

$$\int_{\Omega}(\sigma_{ij}u_i^*)_{,j}d\Omega = \int_{\Gamma}(\sigma_{ij}u_i^*)n_jd\Gamma \Leftrightarrow \int_{\Gamma}(\sigma_{ij}n_j)u_i^*d\Gamma = \int_{\Gamma}t_iu_i^*d\Gamma, \quad (3.25)$$

onde:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j. \quad (3.26)$$

Finalmente, a equação (3.24) é reescrita como:

$$\int_{\Gamma}t_iu_i^*d\Gamma - \int_{\Omega}\sigma_{ji}\epsilon_{ij}^*d\Omega + \int_{\Omega}b_iu_i^*d\Omega = 0. \quad (3.27)$$

O mesmo resultado apresentado na (3.27) pode ser obtido considerando o estado auto-equilibrado como (u_i^*, t_i^*, b_i^*) . Então, a equação (3.27) será:

$$\int_{\Omega}(\sigma_{ij,j}^* + b_i^*)u_i^*d\Omega = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega}\sigma_{ij,j}^*u_i^*d\Omega + \int_{\Omega}b_i^*u_i^*d\Omega = 0. \quad (3.28)$$

Seguindo o mesmo procedimento desenvolvido acima, vamos encontrar:

$$\int_{\Gamma}t_i^*u_i^*d\Gamma - \int_{\Omega}\sigma_{ji}^*\epsilon_{ij}^*d\Omega + \int_{\Omega}b_i^*u_i^*d\Omega = 0. \quad (3.29)$$

Segundo Albuquerque (2001), é possível conectar dois estados do mesmo material pela igualdade:

$$\sigma_{ji}^*\epsilon_{ij}^* = \sigma_{ji}\epsilon_{ij}^*. \quad (3.30)$$

Logo, através da equação (3.30) é possível produzir o seguinte resultado:

$$\int_{\Gamma}t_i^*u_i^*d\Gamma + \int_{\Omega}b_i^*u_i^*d\Omega = \int_{\Gamma}t_iu_i^*d\Gamma + \int_{\Omega}b_iu_i^*d\Omega. \quad (3.31)$$

A equação (3.31) fornece uma relação, na forma integral, entre dois estados elastostáticos diferentes. Através dela, desenvolveremos a equação integral de contorno. Para tanto, deve-se eliminar as integrais associadas ao domínio do nosso problema.

3.5 Equação integral de contorno

Para demonstrarmos a equação integral do contorno, considere, primeiramente, que a força de corpo pode ser representada por uma função do delta de Dirac:

$$b_i = \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o)e_i, \quad (3.32)$$

onde as seguintes propriedades podem ser definidas:

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o) = \infty & \text{se } \mathbf{z} = \mathbf{z}_o, \\ \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o) = 0 & \text{se } \mathbf{z} \neq \mathbf{z}_o, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o)d\Omega = 1. \end{cases} \quad (3.33)$$

De acordo com Albuquerque (2001), a razão para escolher a força do corpo como função delta de Dirac é a possibilidade de reduzir o número de integrais de domínio em nosso problema. Isso é possível em razão da seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o)d\Omega(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_o). \quad (3.34)$$

Para obter a equação integral de contorno a partir da equação (3.31), considere que o estado (u_i^*, t_i^*, b_i^*) é chamado como estado fundamental e o estado (u_i, t_i, b_i) está relacionado com a solução desejada. Utilizando as soluções fundamentais de deslocamento $U_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z})$ e forças de superfície $T_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z})$, dada pela equações (3.16) e (3.17) respectivamente, pode-se reescrever o estado fundamental:

$$u_i^* = u_j^* \delta_{ij} = U_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) \delta_{ij} e_i, \quad (3.35)$$

$$t_i^* = t_j^* \delta_{ij} = T_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) \delta_{ij} e_i,$$

onde δ_{ij}^* é o delta de Kronecker. Com a equação (3.35), pode-se reescrever a equação (3.31) como:

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o) \delta_{ij}^* e_i u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o) \delta_{ij}^* e_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o) \delta_{ij}^* e_i d\Omega, \quad (3.36)$$

ou:

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o) u_j(\mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}_o) + u_i(\mathbf{z}_o) = \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o) d\Gamma(\mathbf{z}) + \int_{\Omega} b_j(\mathbf{z}) U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o) d\Omega(\mathbf{z}), \quad (3.37)$$

reorganizando a equação (3.37), temos:

$$u_i(\mathbf{z}_o) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o) u_j(\mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o) d\Gamma(\mathbf{z}) + \int_{\Omega} b_j(\mathbf{z}) U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o) d\Omega(\mathbf{z}). \quad (3.38)$$

A equação (3.38) é conhecida como identidade de Somigliana para pontos no interior de um corpo. Através do teorema recíproco de Betti, Somigliana (1885) obteve a representação integral da solução de problemas de elasticidade plana, sendo ela equivalente a segunda identidade de Green. Se o problema não tiver força de corpo, a equação (3.38) é escrita como:

$$u_i(\mathbf{z}_o) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o) u_j(\mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) U_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}). \quad (3.39)$$

De acordo com Sollero (1994), esta equação não é considerada um problema de valor limite bem posicionado. Como as forças de superfícies e os deslocamentos de contorno não são conhecidos para todos os pontos do contorno, é necessário criar uma relação entre as força de superfície no contorno juntamente com os deslocamentos. Isso é realizado movendo o ponto fonte até o contorno. Este processo não é trivial e requer alguns cuidados, como apresentado por Gaul, Kogl e Wagner. (2002). Sendo assim, primeiramente deve-se observar o comportamento não singular, quando $(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o \neq 0)$, para as integrais da equação (3.39). Como r representa a distância entre o ponto fonte e o ponto campo, é necessário analisar o limite de transição do ponto campo para o contorno $(\mathbf{z} - \mathbf{z}_o = 0)$. Para fazermos isso, o limite é modificado pela introdução de uma região semicircular Γ_{ε}^* com raio ε , sendo que ε está centrado no ponto de campo. A equação (3.39) será reescrita como:

$$u_i(\mathbf{z}_o) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \Gamma_{\varepsilon}^*} T_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) u_j(\mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \Gamma_{\varepsilon}^*} U_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) t_j(\mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}). \quad (3.40)$$

A equação (3.40) tem duas integrais singulares. A integral do lado direito é conhecida como fracamente singular porque a solução fundamental para o deslocamento tem a ordem $(\log r)$. De acordo com Gaul, Kogl e Wagner. (2002), a integral sobre um integrante fracamente singular existe e é contínua no ponto de singularidade. A integral do lado esquerdo é conhecida como fortemente singular, porque a ordem da solução fundamental de tração é $(1/r)$. A integral é singular quando $r = 0$. Para regularizar a integral fortemente singular, é necessário introduzir o primeiro termo da expansão de Taylor. Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \Gamma_{\varepsilon}^*} T_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) u_j(\mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \Gamma_{\varepsilon}^*} T_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) [u_j(\mathbf{z}_o) - u_j(\mathbf{z})] d\Gamma(\mathbf{z}) + \\ u_j(\mathbf{z}_o) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \Gamma_{\varepsilon}^*} T_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}) &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \Gamma_{\varepsilon}^*} T_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) u_j(\mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

O primeiro termo da equação (3.41) pode ser integrável e desaparecerá quando o limite for considerado. Isso acontece quando considera-se que o campo deslocamento apresenta continuidade Hölder. Essa condição é dada no momento em que existam constantes reais não-negativas C, α tais que, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha. \quad (3.42)$$

Aplicando a condição dada pela equação (3.42) para o campo deslocamento, tem-se:

$$|u_j(z_o) - u_j(z)| \leq C|z_o - z|^\alpha \Leftrightarrow |u_j(z_o) - u_j(z)| \leq C|r|^\alpha. \quad (3.43)$$

A segunda integral da equação (3.41) levará a um salto no deslocamento. Isso é dado pelos termos $A_{ij}(z)u_j$. Os termos $A_{ij}(z)$ são constantes que dependem da geometria local e das constantes elásticas, (SOLLERO, 1994). O último termo resultará em uma integral imprópria. Por isso, ela será avaliada no sentido do valor principal de Cauchy. Finalmente, a equação integral limite pode ser escrita como:

$$c_{ij}(\mathbf{z}_o)u_i(\mathbf{z}_o) + \oint_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z})u_j(\mathbf{z})d\Gamma(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z})t_j(\mathbf{z})d\Gamma(\mathbf{z}), \quad (3.44)$$

onde $c_{ij}(\mathbf{z}_o)$ é um conhecido como termo de coeficiente livre, dado por:

$$c_{ij}(\mathbf{z}_o) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2\pi} & \text{para } \mathbf{z}_o \in \Gamma, \\ 1 & \text{para } \mathbf{z}_o \in \Omega, \\ 0 & \text{para } \mathbf{z}_o \notin \Gamma, \mathbf{z}_o \notin \Omega. \end{cases} \quad (3.45)$$

Esta equação é considerada como o ponto de partida para iniciar a solução numérica do MEC. Sendo assim, o próximo passo consiste em discretizar o contorno em pequenos segmentos, para que a equação (3.44) seja aplicada a cada segmento. Por conseguinte, montaremos um sistema linear a partir de cada parte do contorno discretizado.

3.6 Discretização da equação do contorno

A discretização da equação de contorno é obtida a partir da subdivisão do contorno do problema. Por isso, o subdividiremos em pequenos elementos, conforme apresenta a Figura 3.3. Dentre os vários elementos existentes, para realizar essa tarefa, tem-se os elementos constantes, lineares e quadráticos. Nessa tese utilizaremos os elementos constantes. Consequentemente a geometria será aproximada por segmentos de retas com um nó no ponto médio de cada elemento. Para esse tipo de elemento, o número de nós é igual ao número de elementos. Ademais, o valor da condição de contorno é assumida como constante ao longo desse elemento. Ela é aplicada no único ponto nodal do elemento, isto é, no meio dele.

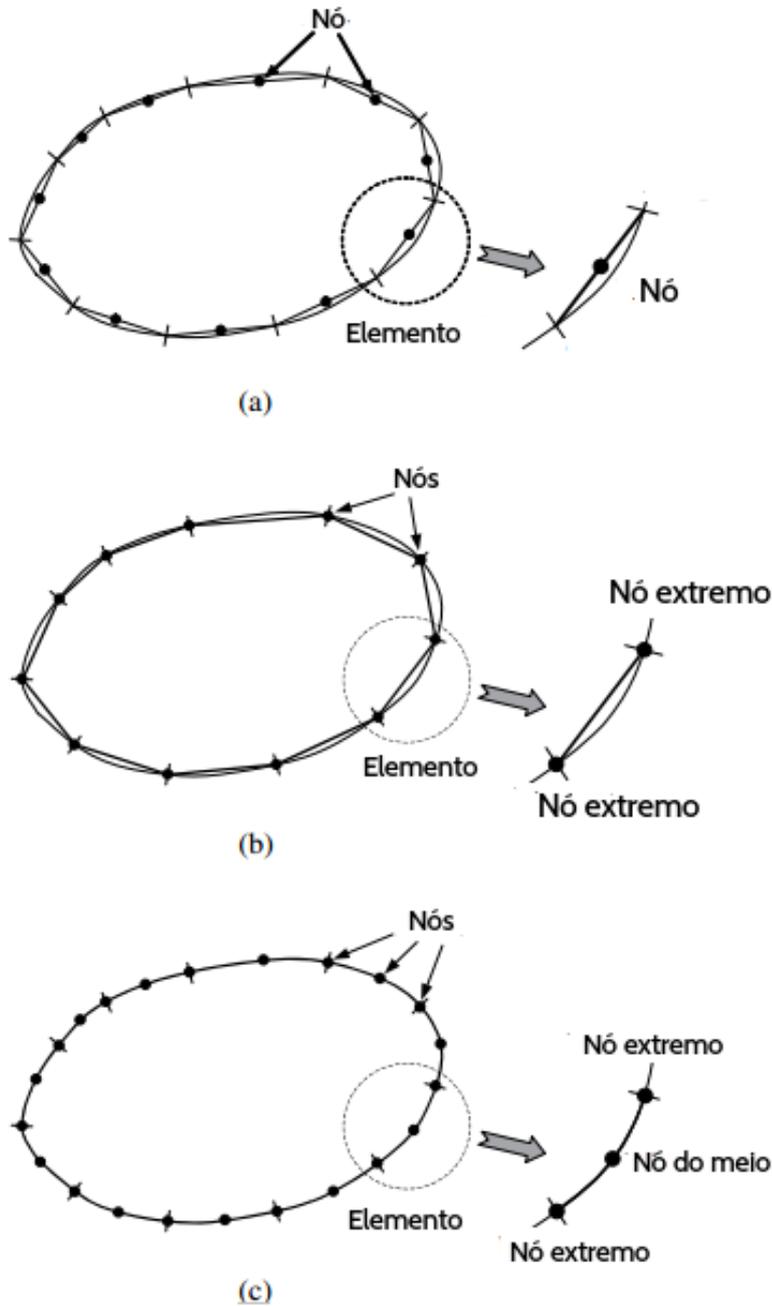


Figura 3.3: Contorno discretizado por vários elementos - (a) Elementos constantes; (b) Elementos lineares; (c) Elementos Quadráticos. referência:Katsikadelis (2016)

O deslocamentos e as forças de superfície para um elemento é dado por:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) &= N_c^n(\xi)\check{u}_i^n, \\ t_i(\xi) &= N_c^n(\xi)\check{t}_i^n, \end{aligned} \tag{3.46}$$

sendo que \check{u}_i^n e \check{t}_i^n são os deslocamentos nodais e as forças de superfície no nó n . Para elementos constantes, o valor de $n = 1$. A função de forma para $N_c^n(\xi)$ para os elementos constantes também é igual a 1. O termo ξ é a coordenada ao longo do elemento. Portanto, a

equação (3.46) é escrita como:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) &= \check{u}_i, \\ t_i(\xi) &= \check{t}_i. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Vale ressaltar que a avaliação das integrais de contorno, ao longo do elemento, requer o uso de um Jacobiano. O uso da matriz jacobiana é de grande importância quando fazemos uma mudança de variáveis. Como a função de forma é expressa em termos da coordenada homogênea ξ e as integrais são avaliadas ao longo do contorno, será necessário introduzir o seguinte jacobiano:

$$J(\xi) = \left| \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \right| = \left| \frac{d\Gamma_e}{d\xi} \right| \Leftrightarrow d\Gamma_e = J(\xi)d\xi. \quad (3.48)$$

Com os resultados dado pelas equações (3.46) e (3.47), podemos reescrever a equação integral (3.44) como:

$$c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \sum_{e=1}^N \left[\oint_{\Gamma_k} T_{ij}(\xi, z(\xi))u_j^n J(\xi)d\xi \right] = \sum_{e=1}^N \left[\int_{\Gamma_k} U_{ij}(\xi, z(\xi))t_j^n J(\xi)d\xi \right]. \quad (3.49)$$

Vale considerar que, para os elementos constantes, o valor de α é igual π . Portanto $c_{ij}(\xi) = \frac{1}{2}$. Além disso, a equação (3.49) deve ser aplicada, sequencialmente, para cada nó do contorno. Esse processo é conhecido como colocação nodal. Em cada direção, de cada nó, existe um componente de deslocamento e uma componente de força de superfície, sendo elas conhecidas como condições de contorno para deslocamentos \check{u}_i e forças de superfície \check{t}_i .

O próximo passo será transformar as várias equações integrais obtidas em equações algébricas. Isso é feito através da colocação nodal e do resultado de integração sobre os elementos de contorno. A colocação nodal tem como característica passar por todos os pontos nodais. Logo, o sistema linear do MEC é cheio e não simétrico. As forças de superfícies e os deslocamentos desconhecidos serão obtidos resolvendo este sistema de equações. Por conseguinte, temos o seguinte sistema linear:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2N} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Os elementos da matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} foram calculados pelos termos do lado esquerdo e direito da equação (3.49), respectivamente. Os vetores \mathbf{t} e \mathbf{u} correspondem as forças de superfície e deslocamentos conhecidos e desconhecidos. As integrais da equação (3.49) são conhecidas como coeficientes de influência, pois eles estão multiplicando os valores nodais \check{u}_i e \check{t}_i que serão somados com os valores nodais $\frac{u_i(\xi)}{2}$. Logo, essas integrais contribuem para

formarem os respectivos termos a elas associadas. A equação (3.49) pode ser rescrita se os termos desconhecidos e conhecidos forem reagrupados:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{Bmatrix}. \quad (3.51)$$

A matriz \mathbf{A} é escrita pelos termos das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} que estão relacionados com os valores desconhecidos dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{t} . A matriz \mathbf{b} é formada pelos termos das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} relacionados com termos conhecidos dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{t} . Uma das formas de resolver a equação acima é através de métodos diretos. Eles são uteis quando a equação (3.51) não possui muitos termos desconhecidos, pois eles necessitam executar $\mathcal{O}(N^2)$ operações, sendo N o número de variáveis desconhecidas no sistema linear. Portanto, uma das formas de diminuir a quantidade de operações necessárias para encontrar a solução desse sistema linear é através de solucionadores iterativos.

No próximo capítulo apresentaremos o funcionamento de um desses métodos iterativos para solucionar sistemas de grande porte. Vale considerar que, apenas o emprego do método iterativo não diminui, de maneira eficaz, a complexidade do MEC. Apesar de haver um ganho de performance, faz-se necessário alterar a forma que o ponto fonte e o ponto campo se relacionam, pois é isso que torna a matriz do MEC cheia e não simétrica. Uma das técnicas utilizadas para modificar a forma como esses pontos interagem é o Método multipolar rápido ou *Fast Multipole Method* (FMM).

3.7 Tensão e deslocamento em pontos internos

Esta seção mostrará como calcular deslocamentos e tensões em pontos internos. Para realizar tal feito, deve-se derivar a equação (3.38) com relação ao ponto fonte \mathbf{z}_o . Assim o resultado obtido é considerado uma identidade de Somigliana no domínio, pois ela é válida para os pontos internos. O resultado da diferenciação da equação (3.44), com relação ao ponto \mathbf{z}_o , é dada por Cruse e Swedlow (1971):

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{z}_o)}{\partial x_l} = \int_{\Gamma} \frac{\partial T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o)}{\partial x_l} u_j(\mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}) - \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}_o) \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_o)}{\partial x_l} d\Gamma(\mathbf{z}), \quad (3.52)$$

onde as derivadas das soluções fundamentais $T_{ij,l}$ e $U_{ij,l}$ são:

$$T_{ij,l}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) = -2\Re \left[\frac{R_{l1} q_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1}}{(z_1 - z_{o1})^2} + \frac{R_{l2} q_{j2} (\mu_2 n_1 - n_1) A_{i2}}{(z_2 - z_{o2})^2} \right], \quad (3.53)$$

$$U_{ij,l}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) = 2\Re \left[\frac{R_{l1}p_{j1}A_{i1}}{(z_1 - z_{o1})} + \frac{R_{l2}p_{j2}A_{i2}}{(z_2 - z_{o2})} \right], \quad (3.54)$$

onde:

$$[R_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

e os termos A_{ij} , p_{ij} e q_{ij} são as constantes complexas mostradas nos capítulos anteriores. Podemos escrever a deformação $\epsilon_{il}(\mathbf{z}_o)$ da seguinte forma:

$$\epsilon_{il}(\mathbf{z}_o) = \frac{1}{2} [u_{i,l}(\mathbf{z}_o) + u_{l,i}(\mathbf{z}_o)]. \quad (3.56)$$

Usando a equação (3.52), é possível reescrever a equação (3.56) como:

$$2\epsilon_{il}(\mathbf{z}_o) = \oint_{\Gamma} [T_{ij,l}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) + T_{lj,i}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z})] u_j(\mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}) - \int_{\Gamma} [U_{ij,l}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) + U_{lj,i}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z})] u_j(\mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}). \quad (3.57)$$

Finalmente, para determinar as tensões nos pontos internos, é necessário usar a lei generalizada de Hooke:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{z}_o) = F_{ij}\epsilon_j(\mathbf{z}_o), \quad (3.58)$$

onde F_{ij} é a matriz de rigidez e σ_{ij} são as componentes de tensão. Podemos fazer a seguinte relação entre deformação $\epsilon_1 = \epsilon_{11}$, $\epsilon_2 = \epsilon_{22}$ e $\epsilon_6 = \epsilon_{12}$. Assim, a equação (3.58) na forma matricial é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{z}_o) \\ \sigma_{22}(\mathbf{z}_o) \\ \sigma_{12}(\mathbf{z}_o) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}(\mathbf{z}_o) \\ \epsilon_{22}(\mathbf{z}_o) \\ \epsilon_{12}(\mathbf{z}_o) \end{Bmatrix}. \quad (3.59)$$

Capítulo 4

Método de Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipolos (MECMP)

Nesse capítulo apresentaremos a formulação do método dos elementos de contorno rápido com expansão em múltiplos (MECMP) para problemas de elasticidade anisotrópica. Desta maneira começaremos esse capítulo expondo as suas principais características e as suas vantagens em relação ao MEC. Depois, faremos a descrição do MECMP para explicar seu funcionamento, apresentando como as suas operações funcionam e a forma como elas interagem entre si. A dedução matemática dessas operações serão feitas na terceira parte desse capítulo. O desenvolvimento delas é uma das partes principais dessa tese, haja visto que não há, na literatura, nenhum trabalho onde as formulações de Lekhnitskii foram empregadas para simular problemas de larga escala para materiais anisotrópicos. Por isso, no próximo capítulo, serão feitos estudos de convergência das operações deduzidas com os resultados do MEC. A penúltima parte deste capítulo está relacionada com apresentação do seu funcionamento e das principais características do método numérico conhecido como Mínimos Resíduos Generalizados, do inglês *Generalized minimal residual method* (GMRES). Ele será utilizado para resolver, de modo iterativo, o sistema linear do MECMP. Por fim, também faremos breves comentários sobre a linguagem de programação utilizada, conhecida como *Julia*

4.1 Princípios Básicos do MECMP

Como já apresentado, o MEC exibe limitações para solucionar problemas de larga escala devido a suas características. Uma das adversidades é a quantidade de operações necessárias para construir a matriz \mathbf{A} . Como ela é cheia e não simétrica, são requeridas $\mathcal{O}(N^2)$ operações para construí-la, segundo Liu (2009). Outro problema está na escolha do método adotado

para solucionar o sistema de equações obtido. Se a escolha for feita por um método direto, como eliminação de Gauss, serão necessárias $\mathcal{O}(N^3)$ operações para solucionar o sistema. Se a opção for um método iterativo, o número de operações cai para a ordem $\mathcal{O}(N_{iter}N^2)$, sendo N_{iter} o número de iterações requeridas. Os trabalhos de Mullen e Rencis (1987), Kane, Keyes e Prasad (1991), Barra et al. (1992), Prasad et al. (1994) são alguns exemplos do uso de métodos iterativos para resolver o sistema linear do MEC. No trabalho de Barra et al. (1992) podemos constatar a eficácia que os métodos iterativos apresentam em face do método de eliminação de Gauss. Essa análise teve como base problemas de elasticidade isotrópica em 2-D.

Atualmente, para melhorar o desempenho do MEC, técnicas como, Matrizes- H , (HACKBUSCH; NOWAK, 1989; BORM, 2009), Adaptive Cross Approximation (ACA), (BEBENDORF, 2000; BEBENDORF; RJASANOW, 2003) e FMM são utilizadas. Nesta tese foi feita a opção pelo FMM, visto que alguns trabalhos associados com ACA já foram publicados pelo grupo de estudo. Originalmente, o FMM foi proposto com a intenção de acelerar o cálculo dos potenciais elétricos e gravitacionais de um grande número de partículas interagindo entre si, juntamente com as respectivas forças associadas e esses potenciais. Como resultado, obteve-se um algoritmo que diminui a quantidade de operações necessárias para realizar tais interações. A complexidade alcançada foi de ordem $\mathcal{O}(N)$, substituindo a complexidade original $\mathcal{O}(N^2)$. Ademais, a precisão dos resultados obtidos podem ser previamente determinada, a fim de que não haja grandes erros numéricos associadas a interação entre as partículas. Devido as suas qualidades, o FMM é considerando uma das principais técnicas numéricas do século XX, conforme apresentado por Dongarra e Sullivan (2000). Outra importante característica desse método está associada a sua aplicabilidade, uma vez que o mesmo pode ser usado para problemas envolvendo dinâmica de fluidos, dinâmica molecular e mecânica celestial. Ele ainda pode ser aplicado para acelerar a multiplicação matriz-vetor dos problemas analisados pelo MEC, surgindo o MECMP.

A apresentação do funcionamento do MECMP será feita por partes. A primeira é composta pelo método FMM, que pode ser subdividido em três grandes partes: expansão das soluções fundamentais, inclusão das operações expansão multipolar ou *Multipole Expansion*, translação momento para momento ou *Moment to Moment Translation* (M2M), expansão local ou *local expansion*, translação momento para local ou *Moment To Local Translation* (M2L) e translação local para local ou *Local to Local Translation* (L2L). A segunda parte está associada com a estrutura da hierarquia das árvores. A terceira parte está relacionada com a escolha de um método numérico para solucionar o sistema linear produzido. Esta subdivisão foi feita para tornar o entendimento do MECMP mais didático.

4.2 Expansão rápida em múltiplos para problemas de elasticidade anisotrópica

4.2.1 Descrição do algoritmo

Antes de apresentarmos as operações do MECMP, faremos a sua descrição, com a finalidade de apresentar as suas características. A primeira etapa consiste em discretizar o contorno do problema. Em seguida, utiliza-se a técnica desenvolvida por Barnes e Hut (1986), conhecida como estrutura das árvores ou *tree structure*. Uma das consequências da utilização dessa estrutura está relacionada na possibilidade de qualificar quais são os pontos campos que estão perto ou distante do ponto fonte, possibilitando, assim, a criação de uma estrutura de dados. Este método foi capaz de diminuir a complexidade de problemas envolvendo interação gravitacional de $N - \text{corpos}$. Originalmente, necessita-se de $\mathcal{O}(N^2)$ operações para computar tais interações. O método de Barnes e Hut (1986) foi capaz de reduzir para a ordem de $N \log N$. Vale ressaltar que a proposta de Barnes e Hut (1986) é um aperfeiçoamento da proposta de Appel (1985), a qual usou a estrutura das árvores para armazenar as partículas de um sistema de $N - \text{corpos}$ em uma região conhecida como *folhas*. A partir dele, uma aproximação foi proposta para computar as forças de interação entre partículas bastante distantes entre si, agrupando-as, segundo Greengard e Rokhlin (1987).

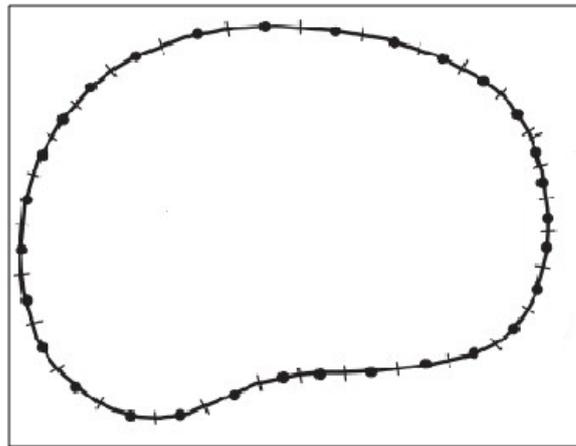


Figura 4.1: Contorno circunscrito pelo quadrado do nível zero

Para construirmos a estrutura hierarquizada da árvore, deve-se, como primeiro passo, circunscrever o contorno do problema por um quadrado, conforme dado pela Figura 4.1. Denominaremos essa etapa como *nível zero*. Em seguida dividiremos esse quadrado em 4 partes iguais, criando 4 novas estruturas. Elas são conhecidas como *células* e pertencem ao nível 1. Devido à subdivisão, gera-se uma interdependência entre o nível 1 e o nível 0. O quadrado do nível 0 é considerado a *célula pai* daquelas 4 células do nível 1. O próximo passo consistirá em dividir cada uma das 4 células em 4 novas células, para construir o nível 2. No total este nível será composto por 16 células, conforme dado pela Figura 4.2.

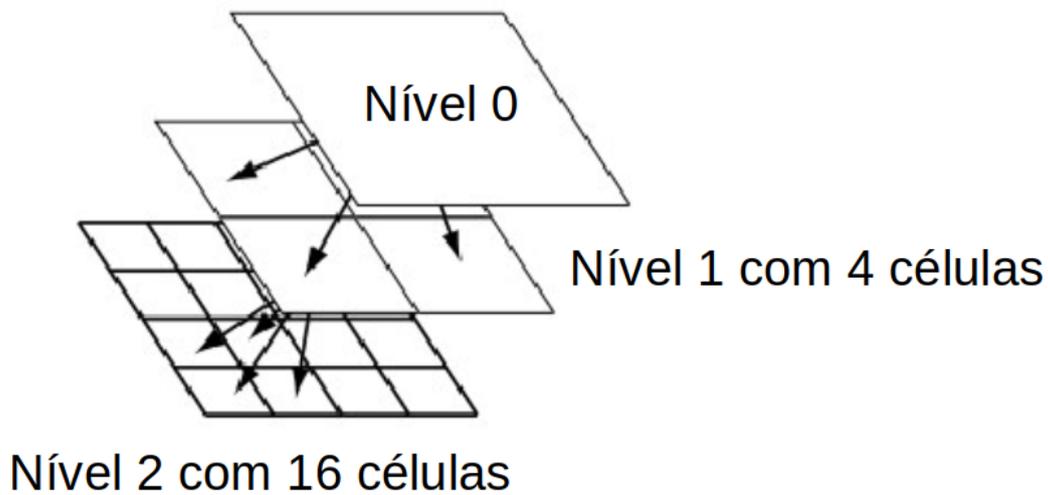


Figura 4.2: Divisão recursivas das células

Essa divisão continuará, de maneira recursiva, até alcançarmos um determinado limite. Tal limite está associado com o número de nós dentro de uma célula. Assim, este número não pode exceder um valor previamente determinado. Quando ele é alcançado, a célula não pode sofrer mais divisão. Portanto, ela é conhecida como *célula folha*. Vale ressaltar que cada célula criada possui um centroide. Essa posição é importante porque será utilizada para realizar as operações do MECMP. Para algumas situações, pode-se estabelecer determinado limite de um único nó por célula. Para outras situações, pode-se usar mais nós por células. Por isso, neste trabalho, investigaremos como o número de nós dentro da célula pode influenciar a eficiência do MECMP. A Figura 4.3 ilustra todos os passos do processo descrito.

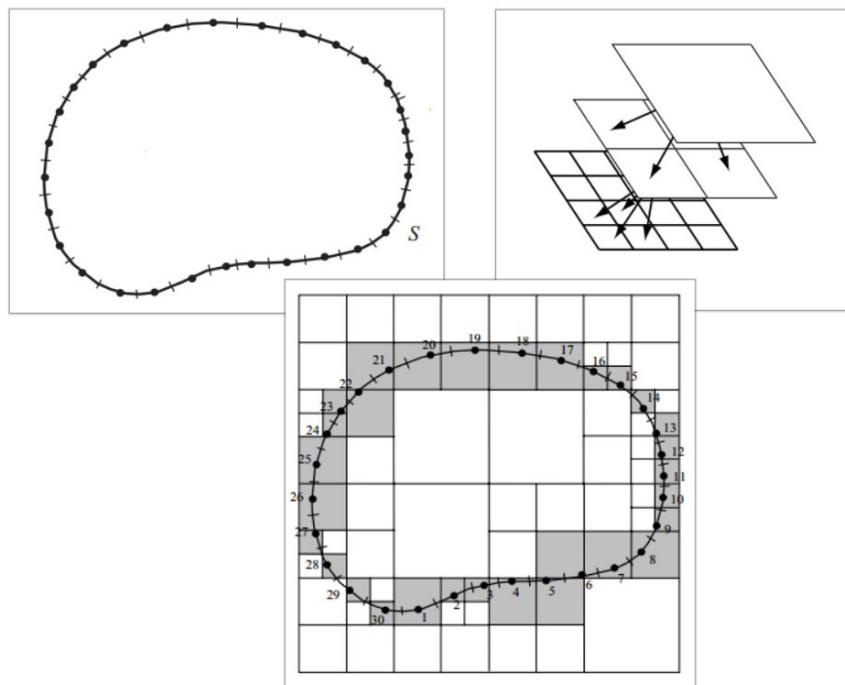


Figura 4.3: Processo de hierarquização do contorno

Uma das consequências da hierarquia da árvore é poder classificar as células em três grandes grupos: *adjacentes*, *bem separadas* e *distantes*. Para classificar duas ou mais células como adjacentes, deve-se observar se elas possuem, no nível em que estão, um vértice em comum. Essa mesma classificação também pode ser aplicada às células que não estão no mesmo nível. Contudo, essa condição só pode ser utilizada para aquelas células conhecidas como folhas. Portanto, se célula pai, de uma célula folha, possui um vértice em comum com uma determinada célula folha, ambas no nível l , então a célula folha no nível $(l + 1)$ é considerada adjacente da célula folha do nível l , conforme a Figura 4.4.

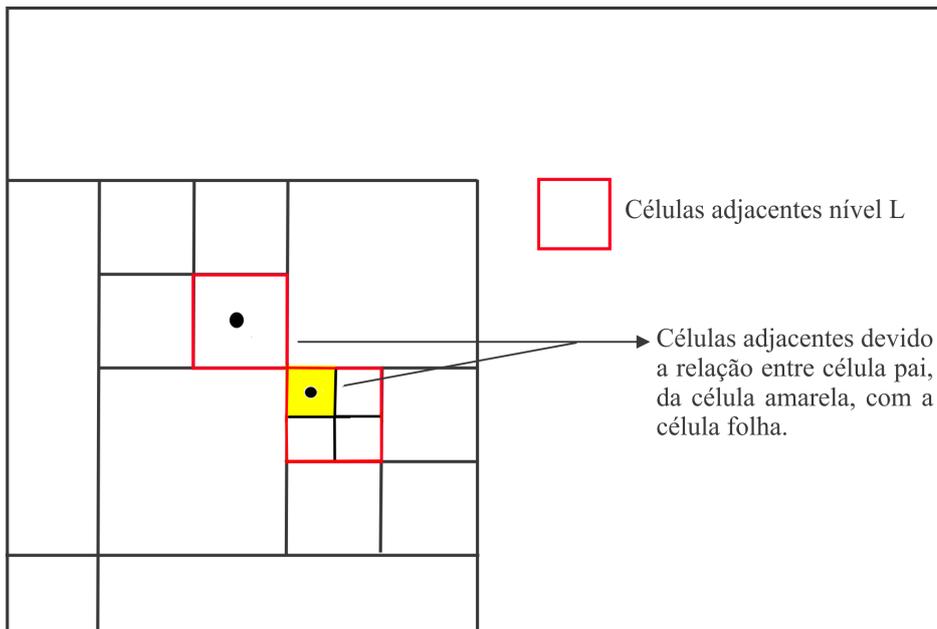


Figura 4.4: Relação de adjacência de duas células pertencentes e não pertencentes ao mesmo nível

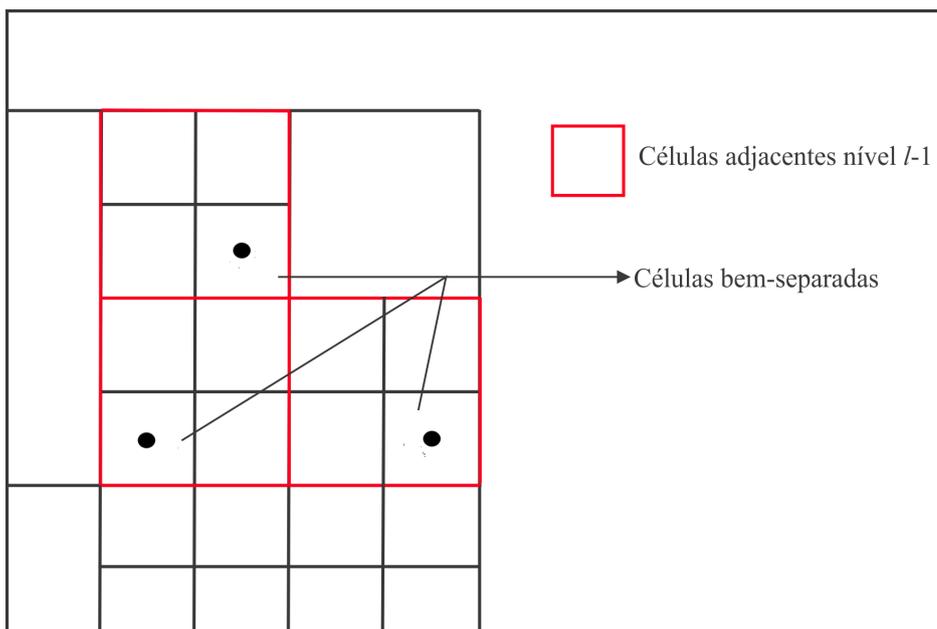


Figura 4.5: Relação de células bem separadas

Duas ou mais células são classificadas como *bem separadas* se elas não forem adjacentes no nível l , mas suas respectivas células pais forem adjacentes no nível $l - 1$, conforme a Figura 4.5. Assim, todas as células consideradas bem separadas irão formar o que denominamos de *lista de interação*. Por fim, duas ou mais células são consideradas *distantes* se as células pais não forem adjacentes.

Após essa subdivisão, realizar-se-á às operações do MECMP, a fim de computar a interação entre ponto fonte e o ponto campo. Como será apresentado, temos um conjunto de 2 operações, divididas em 2 expansões e 3 translações. As expansões são conhecidas como *expansão multipolar* e *expansão local*. A primeira está associada com a expansão em torno do ponto campo e a segunda tem relação com a expansão em torno do ponto fonte. Associada a cada expansão, temos suas respectivas translações. Para a primeira expansão, temos associada a *translação momento para momento* (M2M). Para segunda expansão, temos a *translação momento para local* (M2L) e a *translação local para local* (L2L). Esse conjunto de expansões e translações é usado em diferentes situações durante o funcionamento do MECMP. A expansão multipolar e a translação (M2M) são utilizadas para formar a etapa conhecida como *upward*. A expansão local juntamente com as translações (M2L) e local para local (L2L) formam o processo chamado de *downward*.

O processo *upward* tem como função agrupar os pontos campos através das operações que o compõem. Como o próprio nome sugere, nessa etapa estamos subindo na estrutura das árvores, saindo dos níveis mais altos para alcançar os níveis mais baixos.

Após esse procedimento, deve-se realizar a interação entre os pontos campos agrupados e o ponto fonte. Tal interação é feita por partes, utilizando-se das operações presentes na etapa *downward*. Fazendo uma analogia com o que foi apresentado para a etapa *upward*, o processo *downward* desce na estrutura das árvores, indo dos níveis mais baixos até os mais altos, a fim de alcançar o ponto fonte e, assim, calcular a interação dos pontos campos com o ponto fonte.

Para construirmos a etapa *upward*, primeiramente transferimos o nó de um determinado elemento para o centroide da célula folha, através da expansão multipolar, conforme a Figura 4.6. Ela é feita com a introdução de um ponto intermediário perto do ponto campo. Vale ressaltar que esse é o único momento em que utiliza-se a operação expansão multipolar, isto é, ela só é usada para transferir a posição do nó para o centroide da célula folha. Depois, transferimos a posição do centroide da célula folha para o centroide da sua célula pai. Isso é feito através da operação translação momento para momento, conforme as Figuras 4.6 e 4.7. Esse processo será feito recursivamente até alcançarmos o nível 2, fazendo a transferência de posição através da operação (M2M).

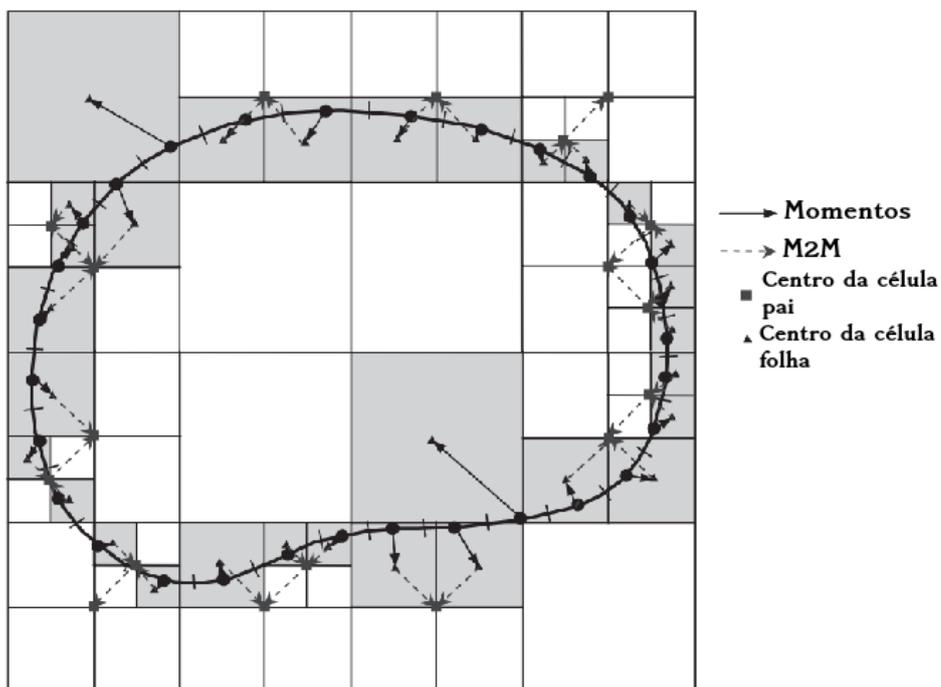


Figura 4.6: Operação expansão multipolar e M2M presentes na operação *upward* - Fonte: Liu (2009) modificada

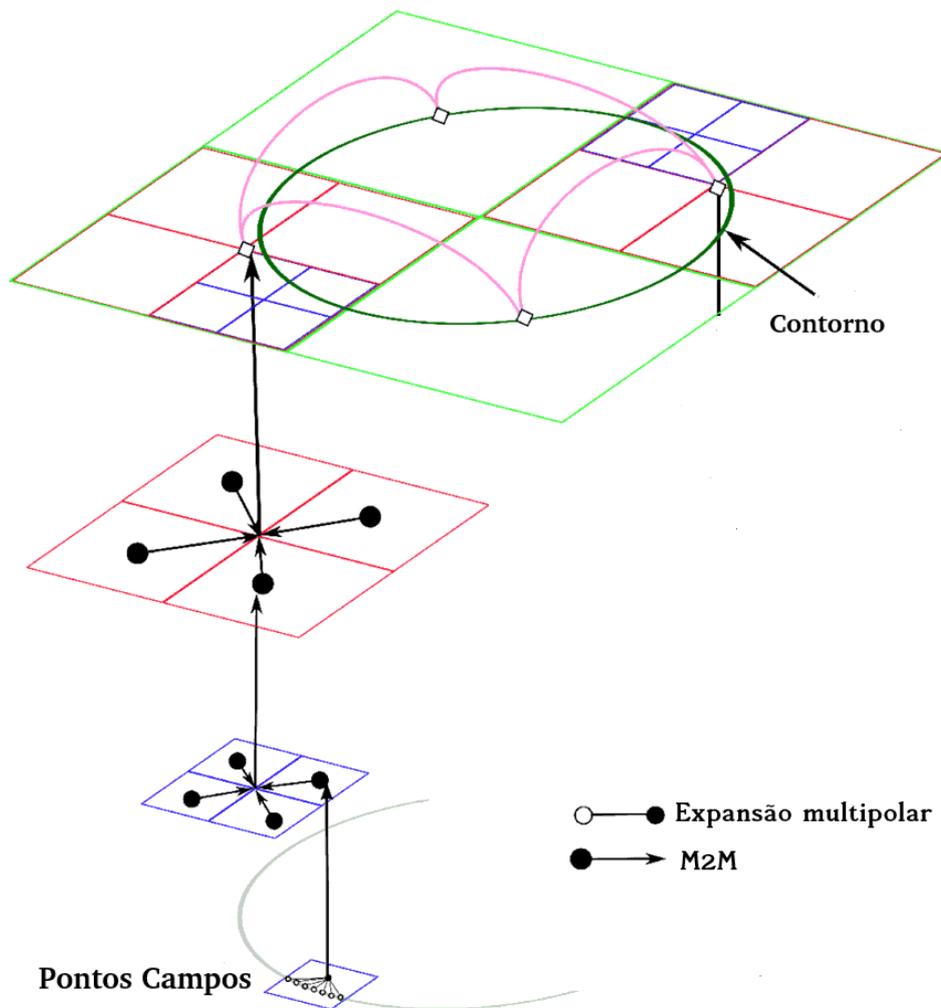


Figura 4.7: Visão esquemática das operações presentes no método *upward* - Fonte: Wagnhoffer, Moored e Jaworski (2019) modificada

A partir do nível 2, iniciaremos a etapa *downward*. Como foi apresentado, a ideia é descer na hierarquia das árvores para realizar a interação dos pontos campos, que foram agrupados, com o ponto fonte, pois, a partir dessa interação, faremos o produto matriz-vetor. Portanto, para realizar tal feito, usa-se a operação (M2L) para células que estão na lista de interação e a translação (L2L) para aquelas consideradas distantes. Contudo, vale ressaltar que, para todas as células do nível 2, usamos, sem restrição, a operação (M2L), conforme apresentada na Figura 4.8. A partir do nível 3, usamos as operações (M2L) e a operação (L2L), ver Figura 4.9.

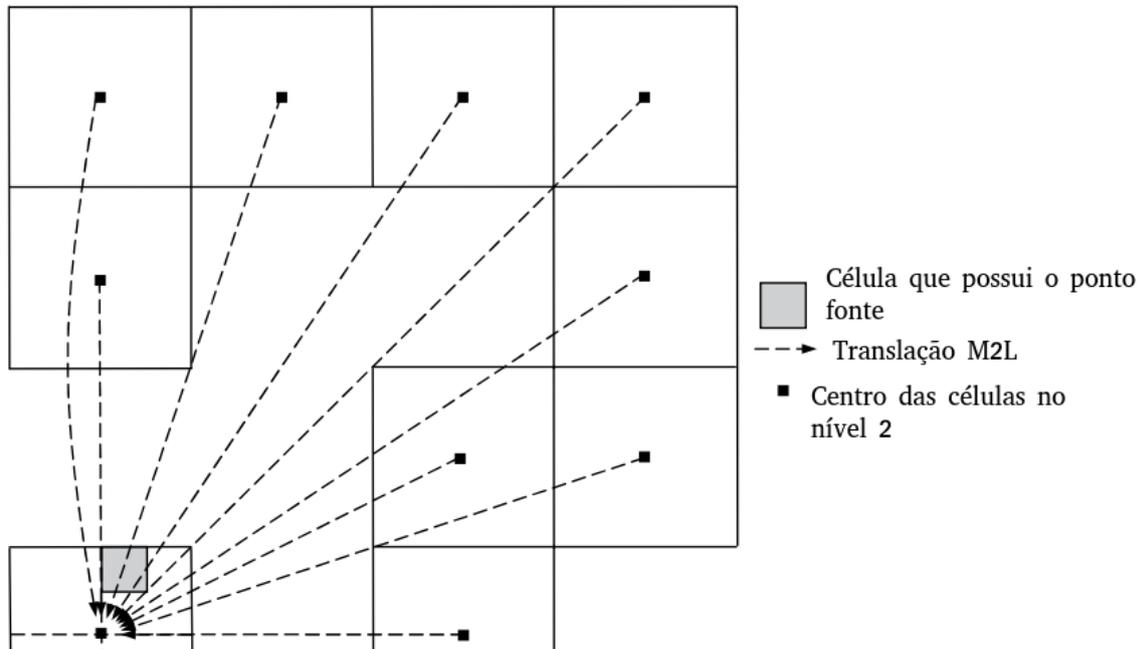


Figura 4.8: Translação M2L para todas as células do nível 2 - Fonte: Liu (2009) modificada

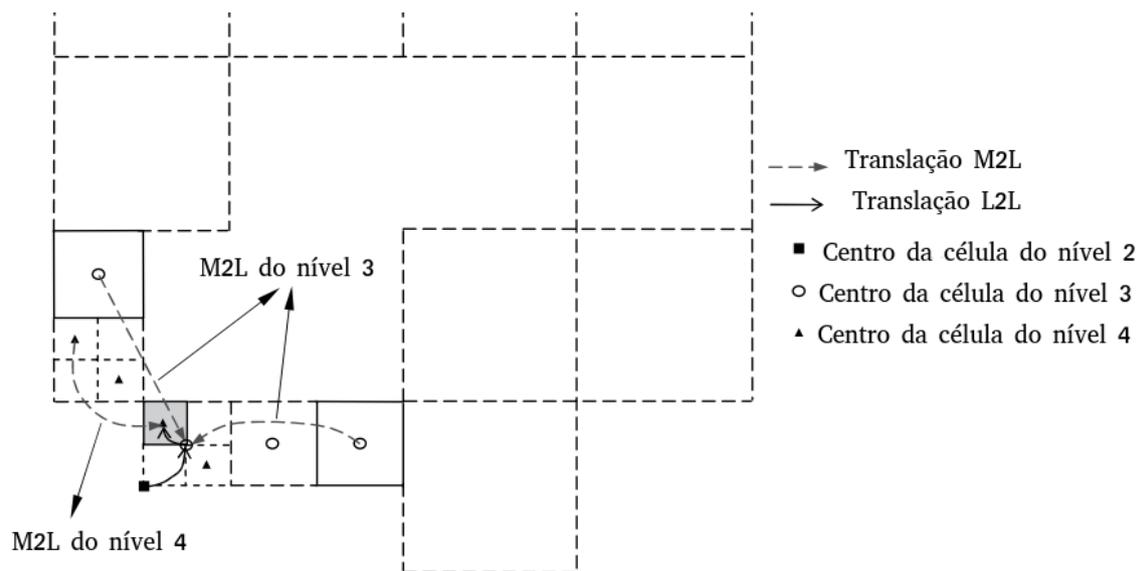


Figura 4.9: Translação M2L e translação L2L - Fonte: Liu (2009) modificada

Após computar essa contribuição, introduzimos um ponto intermediário perto do ponto fonte. Assim, realizamos a *expansão local*. As células que forem consideradas adjacentes, não irão realizar nenhuma operação do MECMP. Elas interagem utilizando o MEC. Por fim, realizaremos os cálculos finais, calculando as integrais de contorno. Por isso, separamos o domínio dessas integrais em duas partes: uma relacionada com os elementos que são considerados adjacentes e, por isso, usamos o MEC, e uma segunda parte está relacionada com a contribuição dos elementos considerados distantes e bem separados. Essa divisão é feita conforme a equação (4.1):

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} t_j U_{ij}(z_o, z) d\Gamma &= 2\Re \int_{\Gamma} t_j q_{i1} G(z_{o1}, z_1) d\Gamma + 2\Re \int_{\Gamma} t_j q_{i2} G(z_{o2}, z_2) d\Gamma \\
\int_{\Gamma} t_j U_{ij}(z_o, z) d\Gamma &= 2\Re \int_{\Gamma_{Perto}} t_j q_{i1} G(z_{o1}, z_1) d\Gamma + 2\Re \int_{\Gamma_{Longe}} t_j q_{i1} G(z_{o1}, z_1) d\Gamma + \\
2\Re \int_{\Gamma_{Perto}} t_j q_{i2} G(z_{o2}, z_2) d\Gamma &+ 2\Re \int_{\Gamma_{Longe}} t_j q_{i2} G(z_{o2}, z_2) d\Gamma, \\
\int_{\Gamma} t_j U_{ij}(z_o, z) d\Gamma &= \underbrace{2\Re \int_{\Gamma_{Perto}} t_j q_{i1} G(z_{o1}, z_1) d\Gamma + 2\Re \int_{\Gamma_{Perto}} t_j q_{i2} G(z_{o2}, z_2) d\Gamma}_{MEC} \\
2\Re \int_{\Gamma_{Longe}} t_j q_{i1} G(z_{o1}, z_1) d\Gamma &+ 2\Re \int_{\Gamma_{Longe}} t_j q_{i2} G(z_{o2}, z_2) d\Gamma. \tag{4.1} \\
&\underbrace{\hspace{10em}}_{MECMP}
\end{aligned}$$

4.2.2 Operações do Método Rápido com Expansão em Multipolos

Nessa seção apresentaremos a expansão das soluções fundamentais e as operações do FMM. Começaremos pelas a expansão das soluções fundamentais, pois as operações do MECMP depende do resultado aqui exibido. Essa etapa é relevante porque separa a relação entre ponto fonte e ponto campo. Isso é possível pois os núcleos das soluções fundamentais são funções de Green e, tais funções, podem ser decomposta da seguinte maneira, (LIU, 2009):

$$K(x, y) = \sum_i K_i^x(x, y_c) K_i^y(y, y_c), \tag{4.2}$$

sendo que $K(x, y)$ é um dos núcleos da equação integral de contorno da equação (4.3):

$$c(x)\phi(x) = \int_{\Gamma} K(x, y)q(y)d\Gamma(y) - \int_{\Gamma} F(x, y)\phi(x, y)d\Gamma(y). \tag{4.3}$$

Utilizando a proposta dada pela equação (4.2), é possível reescrever a primeira integral da equação (4.3). Para isso, deve-se considerar um subconjunto específico do contorno Γ . Tal subconjunto está associado com os pontos campos distantes do ponte fonte. Para qualificar quais os pontos campos são considerados distantes ou perto do ponte, utilizar-se-á a hierarquia das árvores, conforme comentado. Desta maneira, assumindo que o contorno Γ possa ser dividido em um contorno Γ_{perto} e Γ_{longe} , a integral associada com Γ_{longe} é reescrita

como:

$$\int_{\Gamma_{longe}} K(x, y)q(y)d\Gamma(y) = \sum_i K_i^x(x, y_c) \int_{\Gamma_{longe}} K_i^y(y, y_c)q(y)d\Gamma(y). \quad (4.4)$$

A equação (4.4) mostra que a relação entre o ponto fonte e o ponto campo foi rompida, pois um ponto intermediário foi introduzido entre eles. Isso foi possível devido a utilização da expansão de Taylor na função de Green. Todavia, vale ressaltar que outros métodos podem ser utilizados para realizar essa separação, conforme apresentado por Nishimura (2002). Uma delas foi apresentada por Yarvin e Rokhlin (1998). Ele apresentou-se uma versão mais eficiente do FMM para problemas potenciais. Essa versão usou a seguinte expansão de quadratura Gaussiana:

$$K(x, y)q(y) = \sum_i u_i(x - y_o) s_i(y_o) v_i(y, y_o), \quad (4.5)$$

onde u_i , s_i e v_i são funções associadas ao respectivo problema. Com essa forma de expansão, foi possível reescrever a expansão multipolar associada com a decomposição de operadores integrais, consoante dado por Yarvin e Rokhlin (1998). Como consequência, tem-se uma nova versão que é 2 vezes mais rápida que a proposta original. Por esse motivo, a expansão das soluções fundamentais representa um importante passo para o desenvolvimento do MECMP.

4.2.3 Expansão das soluções fundamentais

Para fazer a expansão das soluções fundamentais, deve-se identificar o seu respectivo núcleo, isto é, o termo que associa o ponto campo e o ponto fonte. Sendo assim, defini-se a função $G(\mathbf{z}_o, \mathbf{z})$ como:

$$G(z_{o_i}, z_i) = \log(z_{o_i} - z_i) \quad \text{para } (i = 1, 2), \quad (4.6)$$

com sua respectiva derivada:

$$G'(z_{o_i}, z_i) = \frac{\partial G(z_{o_i}, z_i)}{\partial z} = \frac{1}{(z_{o_i} - z_i)}. \quad (4.7)$$

Por meio das equações (4.6) e (4.7), reescreveremos as soluções fundamentais como:

$$U_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) = 2\Re [q_{i1}A_{j1}G(z_{o1}, z_1) + q_{i2}A_{j2}G(z_{o2}, z_2)], \quad (4.8)$$

$$T_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) = 2\Re [G'(z_{o1}, z_1)g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2)A_{j1} + G'(z_{o2}, z_2)g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2)A_{j2}]. \quad (4.9)$$

O ponto intermediário z_{c_i} é definido como:

$$z_{c_i} = x_{c_i} + \mu_i y_{c_i} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_{c_1} \\ z_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{c_1} + \mu_1 y_{c_1} \\ x_{c_2} + \mu_2 y_{c_2} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

onde (x_{c_i}, y_{c_i}) são as respectivas coordenadas desse ponto. Introduzindo o ponto intermediário z_{c_i} na função $G(z_{o_i}, z_i)$, tem-se que:

$$G(z_{o_i}, z_i) = \log(z_{o_i} - z_{c_i} - z_i + z_{c_i}) = \log \left[(z_{o_i} - z_{c_i}) \frac{z_{o_i} - z_{c_i} - z_i + z_{c_i}}{(z_{o_i} - z_{c_i})} \right], \quad (4.11)$$

utilizando a propriedade de multiplicação do logaritmo:

$$\begin{aligned} G(z_{o_i}, z_i) &= \log(z_{o_i} - z_{c_i}) + \log \left(\frac{z_{o_i} - z_{c_i} - z_i + z_{c_i}}{z_{o_i} - z_{c_i}} \right) = \\ &= \log(z_{o_i} - z_{c_i}) + \log \left(\frac{z_{o_i} - z_{c_i}}{z_{o_i} - z_{c_i}} + \frac{z_{c_i} - z_i}{z_{o_i} - z_{c_i}} \right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

finalmente:

$$G(z_{o_i}, z_i) = \log(z_{o_i} - z_{c_i}) + \log \left(1 - \frac{z_i - z_{c_i}}{z_{o_i} - z_{c_i}} \right). \quad (4.13)$$

Considerando o termo ξ_i como:

$$\xi_i = \left(\frac{z_i - z_{c_i}}{z_{o_i} - z_{c_i}} \right), \quad (4.14)$$

reescrevemos a equação (4.13) a partir da equação (4.14) como:

$$G(z_{o_i}, z_i) = \log(z_{o_i} - z_{c_i}) + \log(1 - \xi_i). \quad (4.15)$$

A expansão do termo $\log(1 - \xi_i)$ é feita com a série de Taylor. De acordo com Braga (2012), a expansão é escrita da seguinte forma:

$$\log(1 - \xi_i) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_i^k}{k}, \quad \text{para } |\xi_i| < 1, \quad (4.16)$$

assim:

$$\begin{aligned} \log(1 - \xi_i) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z_i - z_{c_i}}{z_{o_i} - z_{c_i}} \right)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k!} \frac{(z_{c_i} - z_i)^k}{(z_{c_i} - z_{o_i})^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(z_{c_i} - z_{o_i})^k} \frac{(z_{c_i} - z_i)^k}{k!} \\ \text{para } |\xi_i| < 1 &\rightarrow \left| \frac{z_{c_i} - z_i}{z_{c_i} - z_{o_i}} \right| < 1 \rightarrow |z_i - z_{c_i}| < |z_{o_i} - z_{c_i}|. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Portanto, a equação (4.15) será reescrita com o resultado da equação (4.17):

$$G(z_{o_i}, z_i) = \log(z_{o_i} - z_{c_i}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(z_{c_i} - z_{o_i})^k} \frac{(z_{c_i} - z_i)^k}{k!}. \quad (4.18)$$

ou:

$$G(z_{o_i}, z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_{o_i} - z_{c_i}) I_k(z_i - z_{c_i}), \quad (4.19)$$

onde:

$$O_o(z) = -\log(z) \text{ e } O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k}, \text{ para } k \geq 1, \quad (4.20)$$

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}, \text{ para } k \geq 0. \quad (4.21)$$

Utilizando o mesmo procedimento realizado acima, reescrevemos a equação (4.7) como:

$$G'(z_{o_i}, z_i) = \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_{o_i} - z_{c_i}) I_{k-1}(z_i - z_{c_i}), \quad (4.22)$$

e:

$$I'_k(z) = I_{k-1}(z) = \frac{k(z^{k-1})}{k!} \text{ para } k \geq 1; \text{ e } I'_o(z) = 0. \quad (4.23)$$

Com os resultados das equações (4.19) e (4.22), pode-se verificar que os núcleos das soluções foram aproximados pelo somatório da multiplicação de funções escritas em termos de expressões fatoriais. Logo, deve-se verificar se essa aproximação é válida. Por isso, no próximo capítulo estudaremos a convergência das soluções fundamentais.

4.2.4 Expansão Multipolar do núcleo U

Após a expansão das soluções fundamentais, apresentaremos a primeira operação do MECMP. Ela é denominada expansão multipolar. Seu principal objetivo é identificar como a introdução do ponto intermediário z_{c_i} afeta as integrais de contorno. Sendo assim, considere que os pontos intermediários introduzidos (z_{c_1}, z_{c_2}) estão perto dos pontos campos (z_1, z_2) . Logo, a seguinte condição é dada: $|z_1 - z_{c_1}| \ll |z_{o_1} - z_{c_1}|$ e $|z_2 - z_{c_2}| \ll |z_{o_2} - z_{c_2}|$. Reescreveremos a equação integral da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) U_{ij}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z}) &= \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) [2\Re(q_{i1} A_{j1} G(z_{o_1}, z_1) + q_{i2} A_{j2} G(z_{o_2}, z_2))] d\Gamma(\mathbf{z}) \\ &= \boxed{2\Re \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) q_{i1} A_{j1} G(z_{o_1}, z_1) d\Gamma(\mathbf{z})} + 2\Re \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) q_{i2} A_{j2} G(z_{o_2}, z_2) d\Gamma(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

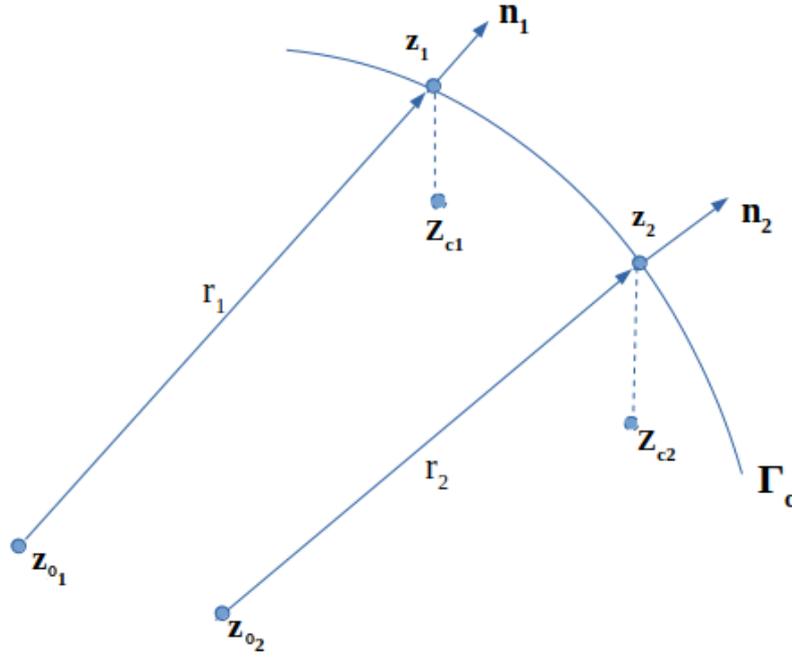


Figura 4.10: Expansão Multipolar entorno dos pontos campos

A partir da integral destacada na equação (4.24), temos:

$$\begin{aligned}
 2\Re \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) q_{i1} A_{j1} G(z_{o1}, z_1) d\Gamma(\mathbf{z}) &= 2\Re \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) q_{i1} A_{j1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_{o1} - z_{c1}) I_k(z_1 - z_{c1}) \right) d\Gamma(\mathbf{z}) \\
 &= 2\Re \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_{o1} - z_{c1}) \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) q_{i1} A_{j1} I_k(z_1 - z_{c1}) d\Gamma(\mathbf{z}) = 2\Re \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_{o1} - z_{c1}) M_k(z_{c1}).
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

onde:

$$M_k(z_{c1}) = \int_{\Gamma_c} t_j(\mathbf{z}) q_{i1} A_{j1} I_k(z_1 - z_{c1}) d\Gamma(\mathbf{z}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.26}$$

sendo $M_k(z_{c1})$ conhecido como *momentos*. A equação (4.25) é conhecida como *expansão multipolar*. De acordo com Liu e Nishimura (2006), o termo *momentos* pode ser calculado rapidamente, porque não depende da posição do ponto fonte (z_o). Por isso, ele não precisará ser mais calculado quando o ponto fonte (z_o) mudar de posição no contorno. Essa independência caracteriza-se como um dos pontos chaves do método multipolar rápido. Realizando o mesmo procedimento para a segunda integral da equação (4.24), temos:

$$2\Re \int_{\Gamma} t_j[q_{i2} A_{j2} G(z_{o2}, z_2)] d\Gamma(\mathbf{z}) = 2\Re \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_{o2} - z_{c2}) M_k(z_{c2}), \tag{4.27}$$

onde:

$$M_k(z_{c2}) = \int_{\Gamma_c} t_j(\mathbf{z}) q_{i2} A_{j2} I_k(z_2 - z_{c2}) d\Gamma(\mathbf{z}) \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{4.28}$$

As equações (4.25) e (4.27) mostram que a integral de contorno original foi substituída

pela multiplicação de dois novos termos. Um deles envolve uma integral, na qual foi denominado de *momentos*. Como apresentado, essa integral não envolve o ponto fonte, pois somente existe a relação entre o ponto intermediário com o ponto campo. Assim, quando o ponto fonte mudar de posição, esse cálculo será efetuado por meio de uma função contendo um fatorial, reduzindo assim, o esforço computacional.

4.2.5 Translação momento para momento (M2M)

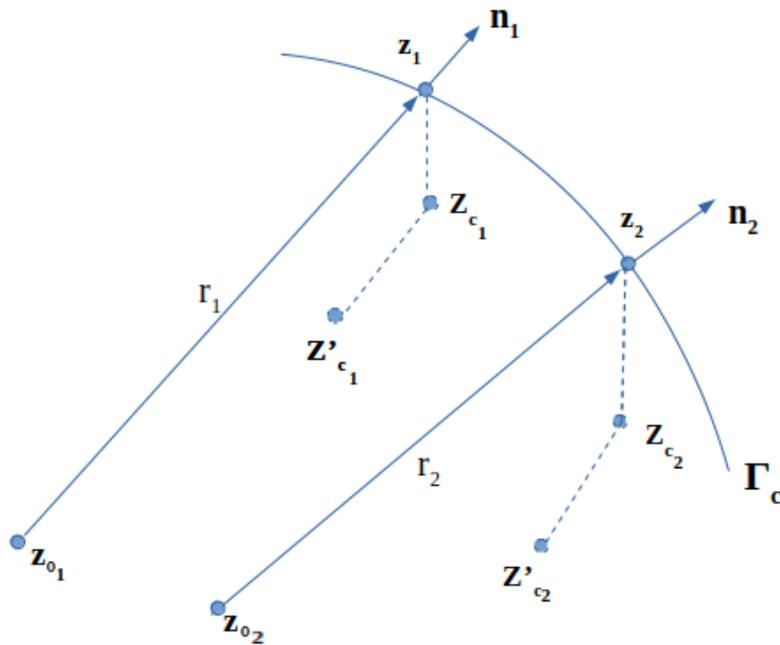


Figura 4.11: Translação dos pontos campos para novas posições

Considere, agora, que o ponto z_{c_1} e z_{c_2} são movidos para as posições z'_{c_1} e z'_{c_2} . Com esses deslocamentos, calculam-se dois novos momentos usando as seguintes propriedades:

$$I_k(z_1 + z_2) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_1)I_l(z_2) = \sum_{l=0}^k I_l(z_1)I_{k-l}(z_2). \quad (4.29)$$

Portanto, reescreveremos a expansão multipolar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M_k(z'_{c_1}) &= \int_{\Gamma_c} t_j(\mathbf{z})q_{i1}A_{j1}I_k(z_1 - z'_{c_1})d\Gamma(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma_c} t_j(\mathbf{z})q_{i1}A_{j1}I_k[(z_1 - z_{c_1}) + (z_{c_1} - z'_{c_1})]d\Gamma(\mathbf{z}) \\ &= \int_{\Gamma_c} t_j(\mathbf{z})q_{i1}A_{j1} \left[\sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_1 - z_{c_1})I_l(z_{c_1} - z'_{c_1}) \right] d\Gamma(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

reorganizando a equação (4.30):

$$M_k(z'_{c_1}) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_{c_1} - z'_{c_1}) \int_{\Gamma_c} t_j(\mathbf{z}) q_{i1} A_{j1} I_l(z_1 - z_{c_1}) d\Gamma(\mathbf{z}) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_{c_1} - z'_{c_1}) M_l(z_{c_1}),$$

para $k \geq 0$,

(4.31)

onde:

$$M_l(z_{c_1}) = \int_{\Gamma_c} t_j(\mathbf{z}) q_{i1} A_{j1} I_l(z_1 - z_{c_1}) d\Gamma(\mathbf{z}) \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.32)$$

Com esse resultado, podemos aplicá-lo a equação (4.28) para obter o seguinte termo:

$$M_k(z'_{c_2}) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_{c_2} - z'_{c_2}) M_l(z_{c_2}), \quad \text{para } k \geq 0. \quad (4.33)$$

onde:

$$M_l(z_{c_2}) = \int_{\Gamma_c} t_j(\mathbf{z}) q_{i2} A_{j2} I_l(z_2 - z_{c_2}) d\Gamma(\mathbf{z}) \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.34)$$

As equações (4.31) e (4.33) representam a operação *translação momento para momento*. Nessas equações, podemos constatar que a mudança da posição do ponto (\mathbf{z}_c) para posição (\mathbf{z}'_c) não acarreta alteração nos cálculos das integrais das equações (4.32) e (4.34). A consequência dessa mudança de posição está relacionado com o termo I_{k-l} . Assim, apenas ele será recalculado.

As duas operações apresentadas fazem parte de um procedimento denominado *upward*. Essa etapa é conhecida por agrupar os pontos campos considerados distantes do ponto fonte, para diferentes níveis da estrutura das árvores. Após agrupar esses termos, devemos, agora, computar a influência deles com o ponto fonte. Contudo, tal interação não é feita de forma direta. Ela é realizada por partes. Para tal, introduziremos um ponto intermediário perto do ponto fonte.

4.2.6 Expansão Local e translação Momento para Local (M2L)

Para realizar a expansão do ponto fonte, considere dois pontos, z_{L_1} e z_{L_2} , introduzidos perto do ponto fonte z_{o_1} e z_{o_2} . Sendo assim, rescreveremos a equação integral levando em consideração a seguinte aproximação $|z_{o_i} - z_{L_i}| \ll |z_{L_i} - z_{c_i}|$:

$$\begin{aligned} 2\Re \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) q_{i1} A_{j1} G(z_{o_1}, z_1) d\Gamma(\mathbf{z}) &= 2\Re \sum_{k=0}^{\infty} O_k[z_{o_1} + (z_{L_1} - z_{L_1}) - z_{c_1}] M_k(z_{c_1}) \\ &= 2\Re \sum_{k=0}^{\infty} O_k[(z_{L_1} - z_{c_1}) + (z_{o_1} - z_{L_1})] M_k(z_{c_1}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

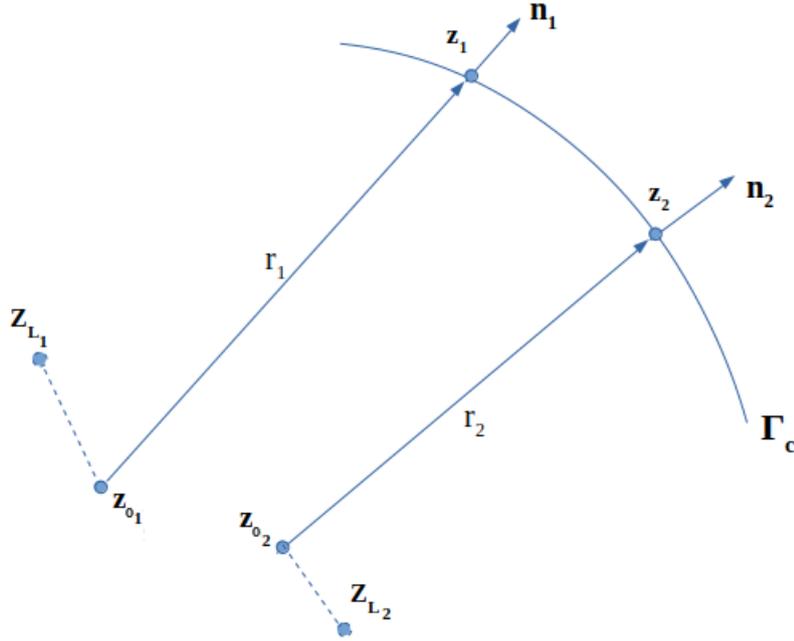


Figura 4.12: Expansão em torno do pontos fontes

Desenvolvendo a equação (4.35) com a seguinte propriedade:

$$O_k(z_1 + z_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l O_{l+k}(z_1) I_l(z_2) \text{ para } |z_2| < |z_1|, \quad (4.36)$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} 2\Re \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) q_{i1} A_{j1} G(z_{o1}, z_1) d\Gamma(\mathbf{z}) &= 2\Re \sum_{k=0}^{\infty} O_k[z_{o1} + (z_{L1} - z_{L1}) - z_{c1}] M_k(z_{c1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} O_{l+k}(z_{L1} - z_{c1}) M_k(z_{c1}) = 2\Re \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_{L1}) I_l(z_{o1} - z_{L1}), \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde:

$$L_l(z_{L1}) = (-1)^l \left[\sum_{k=0}^{\infty} O_{l+k}(z_{L1} - z_{c1}) M_k(z_{c1}) \right], \quad (4.38)$$

a equação (4.37) é conhecida como *expansão local* e a equação (4.38) como *translação-momento-para-local*. Podemos obter os mesmos resultados para equação (4.32):

$$2\Re \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) [q_{i2} A_{j2} G(z_{o2}, z_2)] d\Gamma(\mathbf{z}) = 2\Re \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_{L2}) I_l(z_{o2} - z_{L2}), \quad (4.39)$$

onde:

$$L_l(z_{L2}) = (-1)^l \sum_{k=0}^{\infty} O_{l+k}(z_{L2} - z_{c2}) M_k(z_{c2}). \quad (4.40)$$

A operação de translação *translação-momento-para-local* é conhecida por ser a que mais consome tempo e memória do método, de acordo Fong e Darve (2009), Greengard e Helsing (1997), Junichiro (1999), pois ela é a operação que é mais realizada, em conformidade com William e Jr (1996). Essa circunstância está relacionado com o fato dessa operação concatenar o processo *upward* com a etapa *downward*. A etapa *downward* é a segunda parte da estrutura hierárquica das árvores. Como foi representado, ela, juntamente com a operação translação L2L, são responsáveis por difundir a influência dos agrupamentos dos pontes campos para o ponto fonte.

4.2.7 Translação local para local (L2L)

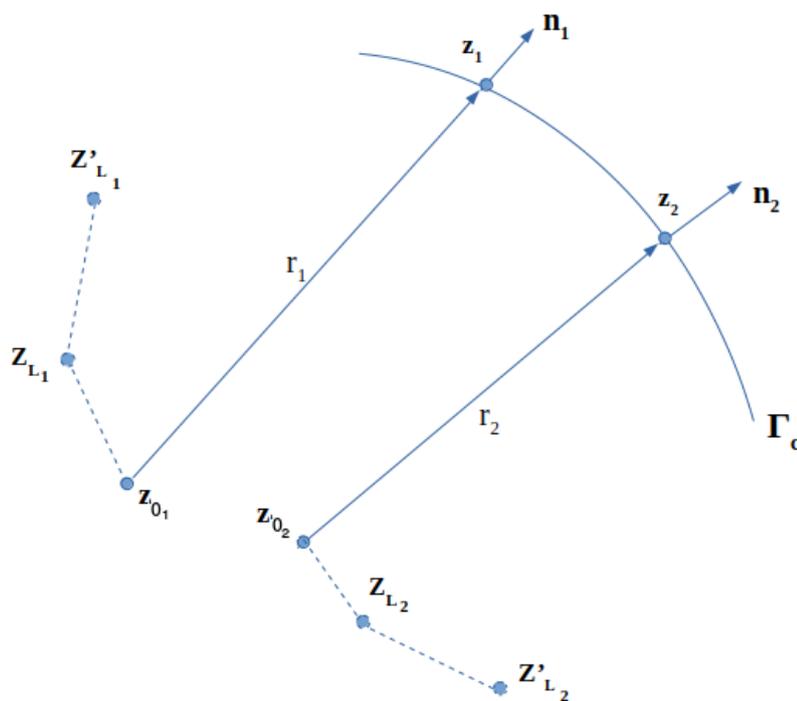


Figura 4.13: Translação dos pontos fontes para novas posições

A última operação do método rápido com expansão em multipolos é a translação dos pontos z_{L_1} e z_{L_2} para as posições z'_{L_1} e z'_{L_2} . A equação (4.37) pode ser escrita como:

$$2\Re \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z}) [q_{i1} A_{j1} G(z_{o1}, z_1)] d\Gamma(\mathbf{z}) = 2\Re \sum_{l=0}^p L_l(z_{L_1}) I_l(z_{o1} - z'_{L_1} + z'_{L_1} - z_{L_1}), \quad (4.41)$$

aplicando a propriedade da equação (4.29), temos:

$$\begin{aligned}
2\Re \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z})[q_{i1}A_{j1}G(z_{o1}, z_1)]d\Gamma(\mathbf{z}) &= 2\Re \sum_{l=0}^p L_l(z_{L_1}) \sum_{m=0}^l I_{l-m}(z_{o1} - z'_{L_1})I_l(z'_{L_1} - z_{L_1}) \\
&= 2\Re \sum_{l=0}^p L_l(z_{L_1}) \sum_{m=0}^l I_l(z'_{L_1} - z_{L_1})I_{l-m}(z_{o1} - z'_{L_1}) = 2\Re \sum_{l=0}^p L_l(z'_{L_1})I_l(z_{o1} - z'_{L_1}),
\end{aligned} \tag{4.42}$$

onde a relação $(\sum_{l=0}^p \sum_{m=0}^l = \sum_{m=0}^p \sum_{l=m}^l)$ foi usada para escrever $L_l(z'_{L_1})$ como:

$$L_l(z'_{L_1}) = \sum_{m=l}^p I_{m-l}(z'_{L_1} - z_{L_1})L_m(z_{L_1}) \Leftrightarrow L_l(z'_{L_1}) = \sum_{m=0}^{p-l} I_m(z'_{L_1} - z_{L_1})L_{l+m}(z_{L_1}), \tag{4.43}$$

A equação (4.43) é conhecido como translação *local-para-local*. O mesmo resultado pode ser obtido para equação (4.39):

$$2\Re \int_{\Gamma} t_j(\mathbf{z})[q_{i2}A_{j2}G(z_{o1}, z_2)]d\Gamma(\mathbf{z}) = 2\Re \sum_{l=0}^p L_l(z'_{L_2})I_l(z_{o2} - z'_{L_2}), \tag{4.44}$$

onde $L_l(z'_{L_2})$ é dada por:

$$L_l(z'_{L_2}) = \sum_{m=0}^{p-l} I_m(z'_{L_2} - z_{L_2})L_{l+m}(z_{L_2}). \tag{4.45}$$

No apêndice A encontramos os mesmos resultados aqui desenvolvidos, porém, para a primeira integral da equação (3.44), que está relacionada com o núcleo da solução fundamental de tração, dada pela equação (3.17).

4.3 Solucionador iterativo - GMRES

Após a montagem do sistema linear, deve-se utilizar alguma técnica numérica para resolvê-lo. Dependendo da complexidade do problema analisado, pode-se optar por técnicas diretas ou iterativas. As técnicas diretas têm como características encontrar a solução exata de um determinado problema com um número fixo de etapas, onde apenas erros de arredondamento são produzidos, (BURDEN; DOUGLAS, 2013). Isso ocorre pelo fato de trabalharmos com pontos flutuantes nos sistema computacionais, (NERIS, 2014). Contudo, tais erros não devem ser menosprezados, pois eles podem conduzir a uma resposta falsa quando se tem um problema que envolva um grande número de operações. Alguns exemplos de métodos diretos são: Eliminação de Gauss, Gauss-Jordan e Método Crout.

Em contra partida, métodos iterativos têm como meta encontrar respostas aproximadas

de um sistema linear. Eles são admissíveis quando os mesmos tornam-se satisfatórios. Por isso, todos os métodos iterativos iniciam-se a partir de um valor preliminar sugerido e, através de sucessivas iterações, ele é refinado até que o mesmo convirja para uma determinada solução, conforme apresenta o esquema dado pela Figura 4.14. A solução iterativa pode produzir resultados com boa precisão usando poucas interações. Segundo Burden e Douglas (2013), tais técnicas são adequadas para resolver problemas de grande dimensão, pois eles são mais eficientes que os métodos diretos para armazenar dados e fazer cálculos necessários para resolver o sistema linear proposto. Segundo Amarilia (2014), tal fato foi constatado por Gauss em 1823. Ele observou que um método direto era inviável para solucionar sistema linear de grande dimensão, visto que o esforço matemático para encontrar a solução era extremamente elevado. Por isso, ele propôs um método iterativo para solucionar um sistema linear, bem posto, de quatro equações. Tal proposta representa o primeiro método iterativo de que se tem conhecimento, segundo Amarilia (2014). Vale ressaltar que o método proposto por Gauss ficou conhecido como Gauss-Jacobi, pois Jacobi o utilizou para calcular perturbação de orbitas planetárias.

Em contra partida, métodos iterativos não são recomendados para solucionar problemas que possuem um sistema linear de pequena dimensão. Tal situação está relacionada quando compara-se o tempo necessário para obter a precisão desejada, dada pelo métodos iterativos, com o tempo gasto pelas técnicas diretas para resolver o sistema linear. Segundo Burden e Douglas (2013), o tempo requerido para se obter a precisão da solução torna-se muito alto quando comparado com o tempo necessário para encontrar a resposta desejada.

Os métodos iterativos ainda podem ser classificados em dois tipos: métodos estacionários e os métodos não-estacionários. Os métodos estacionários têm como característica de serem mais fáceis de entender e implementar, sendo eles mais antigos que os métodos não-estacionários, segundo Perni (2002). Tais método possuem origem no início do século XIX. Contudo, os métodos estacionários não são tão eficientes quanto os métodos não-estacionários. Tal fato está relacionado com o seu funcionamento. No método estacionário o critério de busca é fixo durante as iterações, (KLEUCIO, 2003). Como consequência, tais métodos são utilizados para sistemas esparsos que são diagonalmente dominantes. Como exemplo, temos o método de Jacobi, o método de Gauss-Seidel, o método de sobre-relaxação sucessiva, conhecido como *successive overrelaxation* (SOR), e o método de sobre-relaxação sucessiva simétrica ou *symmetric successive overrelaxation*.

Os métodos iterativos não-estacionários são mais recentes, sendo que sua compreensão é mais difícil, se levarmos em consideração a compreensão dos métodos estacionários. Tais métodos são mais eficientes, pois os parâmetros de busca são flexíveis a cada iteração. Uma outra característica é que alguns desses métodos buscam soluções em espaços específicos, como o espaço de Krylov. De acordo com Kleucio (2003), a utilização desse subespaço pelos métodos iterativos se iniciou com as publicações de Hestenes e Stiefel (1952) e de Lanczos (1950). O trabalho desenvolvido por Hestenes e Stiefel (1952) foi responsável pelo método do gradiente conjugado e a publicação de Lanczos (1950) pelo método de Lanczos. Alguns

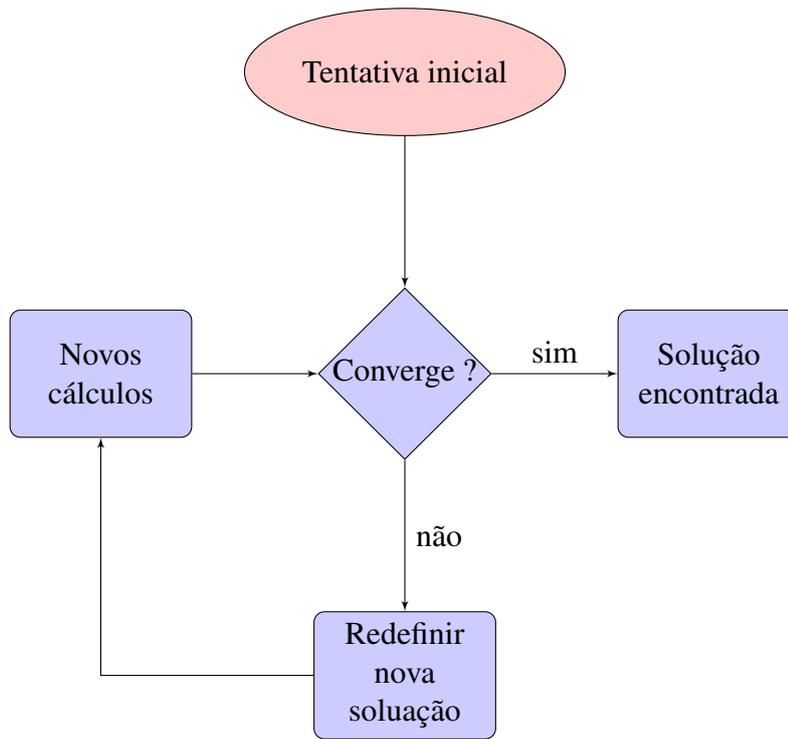


Figura 4.14: Esquema do funcionamento do processo iterativo

métodos iterativos não-estacionários são: Gradiente conjugado, do inglês *Conjugate Gradient* (CG), método do Resíduo mínimo generalizado, do inglês *Generalized Minimal Residual* (GMRES), método de Gradiente Biconjugado, do inglês *BiConjugate Gradient* (BiCG), método do Resíduo Quase-Mínimo, do inglês *Quase-Minimal Residual* (QMR), e o método do Gradiente Conjugado Quadrado, do inglês *Conjugate Gradient Squared* (CGS). A Tabela 4.1 apresenta as principais características de alguns métodos mencionados, sendo elas relacionadas com o tipo de matriz onde o método é aplicado, a forma de se construir o subespaço onde a solução é encontrada e a técnica utilizada para encontrar a solução proposta:

Tabela 4.1: Método iterativos não-estacionários para subespaço de Krylov

Método iterativo	Característica da matriz de coeficientes	Algoritmo para construção do subespaço	Busca da solução
CG	Simétrica definida positiva	Lanczos	Ritz-Galerkin
BiCG	Não-simétrica	Bi-Lanczos	Petrov-Galerkin
GMRES	Não-simétrica	Arnoldi	Norma mínima residual

Nesta tese, usaremos o método dos Mínimos Resíduos Generalizados, também conhecido como *Generalized Minimal Residual Method* (GMRES), para solucionar sistema linear produzido pelo MECMP. Desenvolvido por Saad e Schultz (1986), esse método pertence à família dos métodos de projeção associado com o subespaço de Krylov (1931). Vale considerar que, a partir desse subespaço, outros métodos iterativos também foram desenvolvidos, como o método dos Gradientes Conjugados (GC), Resíduos Mínimos (MINRES), LQ Simétrico

(SYMMLQ), Gradientes BiConjugados (BiGC), Resíduos Quase-Mínimos (QMR), Gradientes BiConjugados Estabilizado (Bi-CGSTab) e Gradientes Conjugados Quadrado (CGS). O GRMES é considerado uma generalização do método MINRES, devido a utilização do processo de Arnoldi.

Com o passar dos anos, este método vem ganhando algumas variações, com o intuito de melhorar seu desempenho. Como exemplo, Yu, Ren e Bai (2016) aplicaram o método residual mínimo generalizado com algoritmo de parâmetro de reinício (m) variável, do inglês GMRES(m) with Variable Restart Parameter (VRP-GMRES(m)), para obter um algoritmo cuja a eficiência e precisão computacional são melhores que o tradicional GMRES(m). De acordo com Yu, Ren e Bai (2016), o parâmetro de reinício é um fator importante para o funcionamento do método, pois, ao longo dos anos, constatou-se que valores pequenos de m resultam em uma convergência lenta ou em uma não convergência.

Em contra partida, um alto valor de m requer uma grande quantidade de memória, tornando a solução muito onerosa. A melhora de performance do VRP-GMRES(m) foi constatada ao analisar os resultados gerados pela solução de problemas envolvendo a equação da onda, em uma dimensão, e de um problema envolvendo a equação de Poisson para duas dimensões. Para a primeira situação, Yu, Ren e Bai (2016) mostraram que, sob a mesma precisão, o número de iterações para o algoritmo GMRES(m) é 11,7 vezes maior do que para o algoritmo VRP-GMRES(m). Além disso, o tempo de processamento foi 10,7 vezes maior. Para o problema envolvendo a equação de Poisson, o tempo de processamento do VRP-GMRES(m) chegou a ser 35 vezes menor que o tempo de processamento do GMRES(m).

Para apresentar o funcionamento do GMRES, definiremos, primeiramente, o espaço e o subespaço de Krylov. Sendo assim, dado o sistema linear:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (4.46)$$

O espaço e subespaço de *Krylov* são definidos como:

Definição 1 *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. Defini-se o espaço de Krylov:*

$$\kappa(A, b) = \text{span}(b, Ab, A^2b, \dots) \Leftrightarrow \kappa(A, b) = \text{span} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{Ab} \\ \mathbf{Ab} \\ \mathbf{Ab} \\ \mathbf{Ab} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}^2\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right] \end{array} \right\}, \quad (4.47)$$

e o seu respectivo subespaço, limitado pela ordem k , como:

$$\kappa_k(A, b) = \text{span}(b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b) \Leftrightarrow \kappa_k(A, b) = \text{span} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} \end{array} \right] \end{array} \right\}. \quad (4.48)$$

O subespaço de Krylov desempenha um papel importante no método GMRES porque ele representa a região onde deve-se encontrar a solução aproximada (\tilde{x}) do sistema linear. Como pode-se perceber, tal subespaço é formado pela combinação linear de k vetores. Devido o GMRES ser um método de projeção, o subespaço de Krylov é o *espaço da busca*. Pode-se garantir que a solução está nesse subespaço se a condição do o teorema abaixo for satisfeita:

Teorema 1 *Seja l o grau do polinômio mínimo de \mathbf{b} com relação a \mathbf{A} , e seja k o índice de \mathbf{A} . O sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possui solução no subespaço de Krylov $\kappa_l(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ se e somente se $\mathbf{b} \in \text{img}(\mathbf{A}^k)$*

Para gerar o espaço da busca, deve-se criar a sua respectiva base, que tem como característica ser ortonormal ao subespaço de Krylov. Isso será feito através do método de projeção de Arnoldi, que tem como base processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. De acordo com Saldanha (2010), a base do trabalho de Arnoldi está relacionado o artigo de Lanczos. O seu trabalho tem como finalidade encontrar solução para problemas de autovalores. Portanto, ele aplicou seu método para solucionar a equação característica de uma matriz.

A partir desse método, segundo Saad (2003), pode-se obter uma matriz Hessenberg superior a partir de uma matriz densa qualquer, conforme apresenta a Figura 4.15, onde a matriz V_m representa uma matriz coluna formada por vetores ortonormais e a matriz \tilde{H}_m representa a matriz Hessenberg, Figura 4.16. Segundo Saad (2003), demonstrou-se que os autovalores da matriz de Hessenberg seriam aproximações precisas para alguns autovalores da matriz transformada, sendo que, tal fato mostrou-se ainda mais eficiente para aproximar os autovalores de matrizes que eram grandes e esparsas.

$$V_m = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_m \end{array} \right]$$

Figura 4.15: Matriz coluna formada por vetores ortonormais

$$\tilde{H}_n = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \dots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & \dots & h_{2,n} \\ 0 & h_{3,2} & h_{3,3} & \dots & h_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & h_{n,n-1} & h_{n,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n+1,n} \end{bmatrix}$$

Figura 4.16: Matriz Hessenberg

Como apresentado na Tabela 4.1, o método do GMRES utiliza a técnica dos mínimos quadrados para encontrar a solução aproximada. Para realizar essa tarefa, considere que o método comece de um valor inicial, dado por \tilde{x}_0 . A partir desse valor, calculamos o seguinte resíduo inicial r_0 :

$$r_0 = b - A\tilde{x}_0, \quad (4.49)$$

sendo que o subespaço de Krylov é dado por:

$$\kappa_k(A, r_0) = \text{span}(r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0). \quad (4.50)$$

De posse da solução inicial e do seu respectivo resíduo, encontraremos, nas próximas interações, a seguinte solução \tilde{x}_k :

$$\tilde{x}_k = \tilde{x}_0 + z_k, \quad (4.51)$$

sendo que z_k é fator de acréscimo, dado por: $z_k = V_k y_k$, onde V_k é uma matriz cujas colunas são os vetores ortonormais v_i , $1 \leq i \leq k$ e z_k é a solução do problema de norma mínima residual, conforme apresentaremos. O resíduo associado com \tilde{x}_k é dado por:

$$r_k = b - A\tilde{x}_k = b - A(\tilde{x}_0 + z_k) = (b - A\tilde{x}_0) + Az_k \Leftrightarrow r_k = r_0 + Az_k, \quad z_k \in \kappa_k(A, r_0). \quad (4.52)$$

Como o GMRES tem como ponto central minimizar a norma do resíduo, podemos definir essa norma como:

$$\|r_k\|_2 = \|b - A\tilde{x}_k\|_2 = \|b - A(\tilde{x}_o + z_k)\|_2 = \|(b - A\tilde{x}_o) + Az_k\|_2 \Leftrightarrow \|r_k\|_2 = \|r_o + Az_k\|_2, \quad z_k \in \kappa_k(A, r_o). \quad (4.53)$$

Considerando que o processo de Arnoldi produz a seguinte identidade: $AV_k = V_{k+1}\bar{H}_k$, podemos reescrever a equação (4.53):

$$\|r_o - A(V_k z_k)\|_2 = \|r_o - (AV_k)z_k\|_2 = \|r_o - V_{k+1}\bar{H}_k z_k\|_2. \quad (4.54)$$

Segundo Carvalho et al. (2010), na construção da base ortonormal temos as seguintes relações:

$$v_1 = \frac{r_o}{\|r_o\|} \Leftrightarrow r_o = v_1 \|r_o\|_2 \text{ e } v_1 = V_{k+1}e_1. \quad (4.55)$$

Portanto, substituindo os resultado da equação (4.55) na equação (4.54):

$$\|(v_1 \|r_o\|_2) - V_{k+1}\bar{H}_k z_k\|_2 = \|(V_{k+1}e_1) \|r_o\|_2 - V_{k+1}\bar{H}_k z_k\|_2 = \|V_{k+1}(e_1 \beta - \bar{H}_k z_k)\|_2, \quad (4.56)$$

considerando que as colunas de V_{k+1} são ortonormais, podemos reescrever a equação (4.56) como:

$$\|e_1 \beta - \bar{H}_k z_k\|_2. \quad (4.57)$$

A equação (4.57) representa o problema de mínimos quadrados que o GMRES tentará solucionar. Através dela, encontraremos um respectivo valor de z_k . De posse desse resultado, obteremos um novo valor para a solução iterativa, dada por: $\tilde{x}_k = \tilde{x}_o + z_k$. A equação (4.57) é resolvida pelo método de fatoração QR.

Apesar do método GMRES ser amplamente utilizado e reconhecido, sendo usualmente selecionado para resolver sistema linear grande e esparsos onde a matriz dos coeficientes é não simétrica e não singular, (KOLEV, 2009), ele apresenta alguns problemas. Primeiramente, deve-se ficar atento com a quantidade de memória que o método pode consumir, além do tempo requerido, pois a dimensão do sistema linear está intimamente relacionada com custos computacionais (tempo e memória) do problema analisado, (PESSANHA; PAZ; PRADA, 2012). Por isso, o método GMRES deve ser reiniciado após um número pré-especificado de iterações, conforme demonstrado por Saad e Schultz (1986). Portanto, ao reiniciarmos o método, as informações acumuladas são eliminadas e os resultados mais recentes são usados como valores iniciais para as próximas iterações. Contudo, o método de reinicialização pode trazer o problema conhecido como estagnação, pois ele não possui garantia de convergência. Tal adversidade está relacionada com a possibilidade de duas soluções consecutivas serem iguais ou quase iguais. Isso acontece quando a matriz A não é definida e positiva. Uma das maneiras de contornar essa estagnação está no uso de preconditionadores no sistema inicial. Vale ressaltar que tal problema não aparece no método GMRES sem a técnica de recomeço,

pois o mesmo garante a convergência em, no máximo, n iterações, sendo que n é a dimensão do sistema linear a ser resolvido.

Liu (2009) também apresentou alguns benefícios de se utilizar o pré-condicionamento. Aplicar um bom pré-condicionador pode ser muito benéfico para o processo de convergência das soluções iterativas. Esse fato é importante porque existem situações em que a solução só converge depois de uma centenas de iterações. Contudo, para outras situações, o sistema pode convergir rapidamente, utilizando poucas iterações. Para acelerar o processo de solução iterativa - isto é, reduzir o número de iterações para uma determinada tolerância - uma matriz de pré-condicionamento pode ser introduzida para melhorar o condicionamento da matriz do sistema. Como consequência, temos um aumento na eficiência computacional.

O uso desses métodos para melhorar o condicionamento tem origem com o trabalho de Cesari (1937), segundo Ferronato (2012). Este trabalho consiste em apresentar uma visão geral dos algoritmos mais populares disponíveis hoje, enfatizando os respectivos méritos e limitações. A visão geral é restrita a pré-condicionadores algébricos, que representam uma determinada classe de pré-condicionadores. Sua principal característica é que eles podem funcionar para diversos tipos de problemas, pois a matriz dos coeficientes do sistema linear possuem as mesmas similaridades. Por isso, uma grande gama de problemas pode utilizar um mesmo tipo de pré-condicionador.

Em contrapartida, temos também os pré-condicionadores que funcionam para um determinado tipo de problema, isto é, seu funcionamento é restrito ao problema analisado. Isso ocorre pois ele é projetado de acordo com algumas características do problema analisado, como condições de contorno e propriedades físicas.

Juntamente com o trabalho de Ferronato (2012), temos também o trabalho de Benzi (2002), que fez uma pesquisa sobre pré-condicionamento para a solução iterativa de grandes sistemas lineares. Seu foco era em métodos algébricos adequados para matrizes esparsas. Apesar do trabalho de Cesari (1937) ser o precursor desses métodos, apenas com o trabalho de Evans (1968) é que o termo de pré-condicionamento foi utilizado. O método GMRES admite um tipo de pré-condicionamento onde uma matriz bloco diagonal M é utilizada, sendo que ela é dada pela seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

sendo que A_i é uma submatriz de A , onde o coeficiente formado em uma folha por direta avaliação das integrais dentro dessa folha. Usando a matriz do preconditionador M , nós mudamos o sistema original:

$$(M^{-1}A)x = M^{-1}b. \quad (4.59)$$

Segundo Liu (2009), outras formas de pré-condicionadores podem ser utilizados. Tal tópico ainda é um tema de pesquisa muito importante, pois através deles poderemos melhorar o desempenho do MECMP. Tal fato foi constatado por Amlani Faisal; Chaillat (2019), que utilizaram um pré-condicionador, obtido pela decomposição da matriz do MEC padrão através do método das Matrizes- H , para acelerar a convergência de problemas de propagação de ondas em três dimensões. Para algumas situações, a proposta apresentada chegou a ser 80% mais rápida que a solução fornecida pelo MECMP com o pré-condicionador original.

4.4 Linguagem *Julia*

Julia é uma linguagem de programação escrita em *C*, *C++* e *Scheme*, utilizando a estrutura do LLMV (*Low Level Virtual Machine*) como compilador. Ela tem como finalidade otimizar o tempo de compilação e execução desse programa. A finalidade da linguagem *Julia* é produzir um código que seja utilizado para situações onde deseja-se um alto desempenho numérico e científico. Vale ressaltar que a linguagem *C* é uma das mais populares atualmente, sendo ela a influenciadora de outras, como a linguagem *Java* e a linguagem *C++*, sendo que esta última pode ser entendida como uma extensão do *C*. *Scheme* é uma linguagem de programação que suporta mais de um paradigma de programação, como a funcional e procedural. Logo, o objetivo é fornecer um *framework* no qual o programador possa trabalhar com vários estilos.

O desenvolvimento do *Julia* começou em 2009, por Alan Edelman, Jeff Bezanson, Stefan Karpinski e Viral Shah. O objetivo deles era criar uma linguagem que pode-se ser rápida e com uma boa eficiência numérica. Em 2012 o MIT lançou a primeira versão de código aberto. Desde então, a linguagem se tornou muito popular entre vários programadores, pois proporciona a facilidade que muitas linguagens de alto nível têm, sendo, contudo, mais eficiente no quesito desempenho. Por isso, vale ressaltar que o seu desempenho pode ser o dobro da linguagem *C*, quando o *Julia* for otimizado.

Nesta tese a ideia de utilização dessa linguagem surgiu devido a necessidade de substituir a programação inicial, feita em MATLAB, por um outra. Apesar da facilidade de se utilizar a programação em MATLAB, percebeu-se que o mesmo não é adequado para programar problemas que possuem número de graus de liberdade elevado. Por isso, foi necessário encontrar uma linguagem que fosse capaz de melhorar a eficiência do código. Devido ao alto desempenho do *Julia* e algumas similaridades com o MATLAB, essa linguagem foi utilizada.

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados numéricos com o objetivo de validar a formulação desenvolvida nesta tese. Por isso, serão apresentados os resultados para cada um dos tópicos do capítulo 4.

O primeiro resultado está relacionado com a expansões das soluções fundamentais. Essa verificação tem fundamental importância para os resultados subsequentes, já que as operações do MECMP começam a partir delas. Dessa maneira, faremos a seguinte análise: iremos comparar o comportamento das soluções fundamentais expandidas com o comportamento das soluções fundamentais na sua forma tradicional, variando, contanto, o número de termos nas expansões. A importância dessa análise reside no fato de sabermos qual o número de termos da expansão que é apropriado para produzir resultados com uma boa acurácia.

Em seguida, analisaremos se as operações de expansões e translações desenvolvidas estão corretas. Para tanto, aferiremos os resultados do produto matriz vetor de alguns elementos das matrizes G e H produzidas pelo MECMP e pelo MEC. Verificaremos, também, como o número de termos na série interfere nos resultados obtidos. Concluída essa etapa, analisaremos um problema onde contrastaremos os resultados entre uma solução analítica com os resultados numéricos produzidos pelo MECMP e MEC. A ideia é verificar se os resultados finais obtidos estão corretos, pois apenas as análises das expansões fundamentais e das operações não garantem que o resultado final esteja correto, uma vez que a solução numérica pode não convergir.

Por fim, após apurarmos que todas as etapas acima foram implementadas e testadas, ainda é necessário verificar se o método proposto é mais eficiente que o MEC. À vista disso, um problema de larga escala será simulado para verificar a complexidade do MECMP proposto. Desse modo, estudaremos a relação da memória consumida e o tempo de processamento com o número de graus de liberdade de um problema. Através dessa relação, lograremos a complexidade do MECMP e do MEC.

5.1 Expansão das soluções fundamenta

Nesta seção as expansões das soluções fundamentais, dada pelas equações (4.8) e (4.9), são comparadas com as equações (3.16) e (3.17). Para as equações (3.16) e (3.17), fixamos, inicialmente, os pontos campos z_i e fontes z_{o_i} nas coordenadas $(0, 0; 0, 5)$ e $(0, 0; 1, 0)$. Em seguida, aproximamos, por pequenos incrementos, o ponto campo do ponto fonte, a fim de diminuir a distância $(z_{o_i} - z_i)$. A partir desses resultados, plotamos um gráfico que apresenta comportamento das equações (3.16) e (3.17). A mesma análise foi feita para as equações (4.7) e (4.8). Dessa vez, os fixados são os pontos intermediários e os pontos fontes, nas mesmas coordenadas da situação anterior. Assim, variamos as posições dos pontos campos, diminuindo as seguintes distâncias $(z_i - z_{c_i})$. Plotou-se um gráfico do comportamento das equações (4.8) e (4.9). Como apresentado na seção introdutória deste capítulo, esses gráficos foram feitos com diferentes números de termos na série, com a finalidade de verificar como eles interferem na acurácia dos resultados. As constantes referentes ao material do problema estão nas Tabelas 5.1 e 5.2.

Tabela 5.1: Propriedades do material Boro-epóxi

Camada	E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	G_{12} (MPa)	ν_{12}
1	55.16	170.65	4.83	0.036

Tabela 5.2: Valores das raízes do polinômio característico para o Boro-epóxi.

i	μ
1	$-0.6072 + 1.4875i$
2	$0.5124 + 0.8588i$

Tabela 5.3: Valores das constantes complexas para o Boro-epóxi.

(i, j)	A_{ij}	q_{ij}	g_{ij}
11	$0.0117 - 0.0268 i$	$-0.432 - 0.0570 i$	$-0.6072 + 0.8588 i$
12	$0.0058 + 0.0268 i$	$-0.0280 - 0.0453 i$	$1.4554 + 1.816 i$
21	$-0.0328 - 0.0459 i$	$-0.0585 - 0.1246 i$	-1.000
22	$-0.0233 - 0.0337 i$	$-0.0127 - 0.0758 i$	-1.000

As Figuras 5.7, 5.8 e 5.9 representam o comportamento da solução fundamental para deslocamento U_{ij} . As figuras 5.10, 5.11, e 5.12, representam o comportamento da solução fundamental de forças de superfície T_{ij} . A partir dos resultados obtidos, verifica-se que as soluções expandidas são uma boa aproximação das soluções fundamentais, pois o erro associado com essa diferença torna-se muito pequena quando aumentamos o número de termos na série, conforme os gráficos de erro para solução fundamental de deslocamento, Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 e as Figuras 5.4, 5.6 e 5.6 para solução fundamental de forças de superfícies. Eles representam a diferença entre os valores dados pelas soluções fundamentais com os valores dados pelas soluções expandidas, sendo estas realizadas com diferentes número de

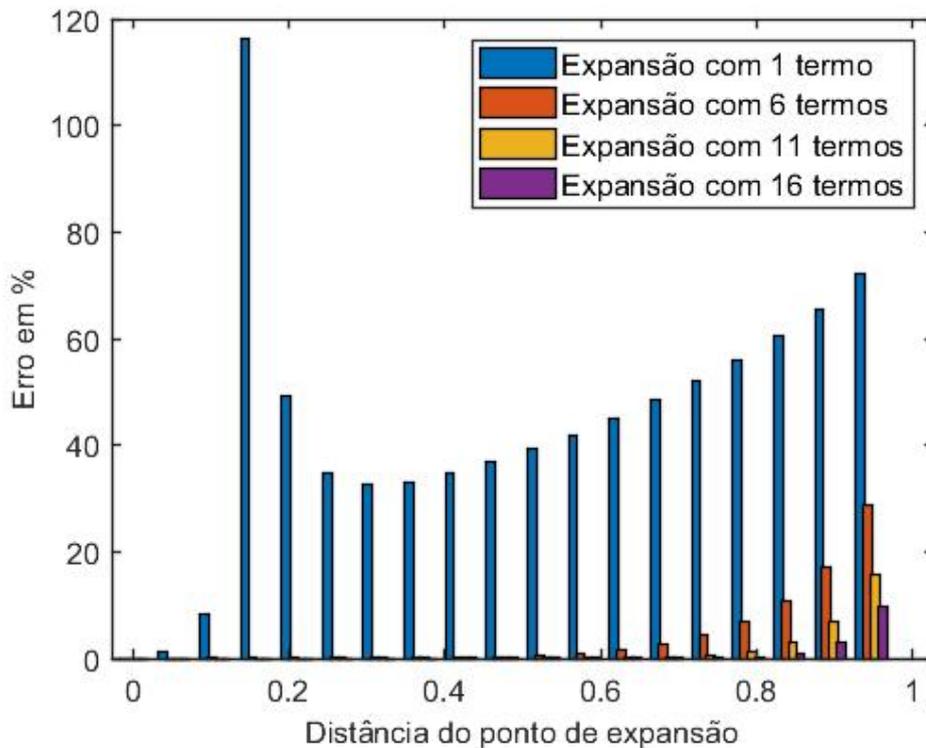


Figura 5.1: Erros para solução fundamental U_{11}

termos na série. Como pode-se notar, o erro entre esses dois valores decresce com o aumento no número de termos da série.

No entanto, à medida que as diferenças $(z_{o_i} - z_i)$ e $(z_i - z_{c_i})$ tornam-se cada vez menores, o problema de singularidade aparece na formulação original das soluções fundamentais e na formulação das soluções expandidas. Além disso, pode-se notar que, para um mesmo número de termos na expansão, a solução fundamental para deslocamento tem uma melhor acurácia que a solução fundamental de forças de superfície, pois o erro encontrado são menores. Isso acontece porque a solução fundamental de deslocamento possui singularidade fraca $\ln(r)$ e a solução fundamental para força de superfície possui singularidade forte $(1/r)$. Vale ressaltar que, apesar da Figura 5.1 apresentar dois erros relativos extremamente altos (erros 3 e 4), o erro absoluto entre a solução fundamental e a solução expandida é de 0.0017 e de 0.0031, respectivamente.

Os dados obtidos pela análise feita foi bastante parecido com os resultados encontrados por Braga (2012), onde o comportamento das soluções fundamentais para problemas potenciais (fluxo de calor e de temperatura) foram comparadas com as soluções expandidas. Nela, a solução fundamental de fluxo demora mais para alcançar a convergência que a solução fundamental de temperatura. Portanto, através desses dois resultados, concluímos que o metodologia utilizada para fazer o estudo de convergência entre a solução fundamental e a solução expandida é boa, porque apresentam resultados precisos para diferentes tipos de soluções fundamentais propostas. Além disso, mostra como o número de termos na expansão interfere na acurácia dos resultados.

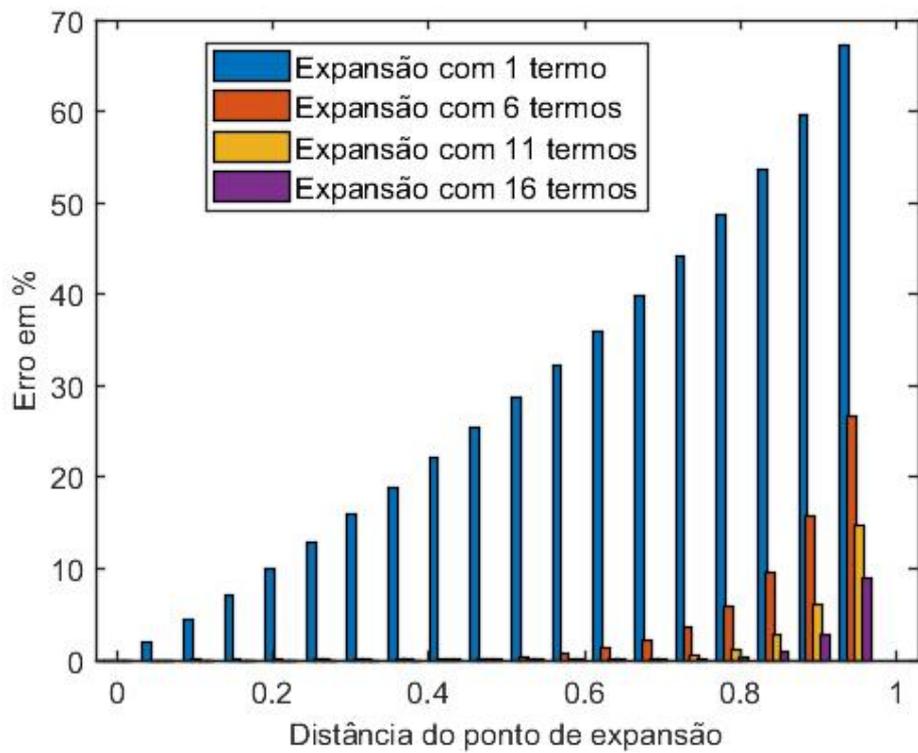


Figura 5.2: Erros para solução fundamental U_{22}

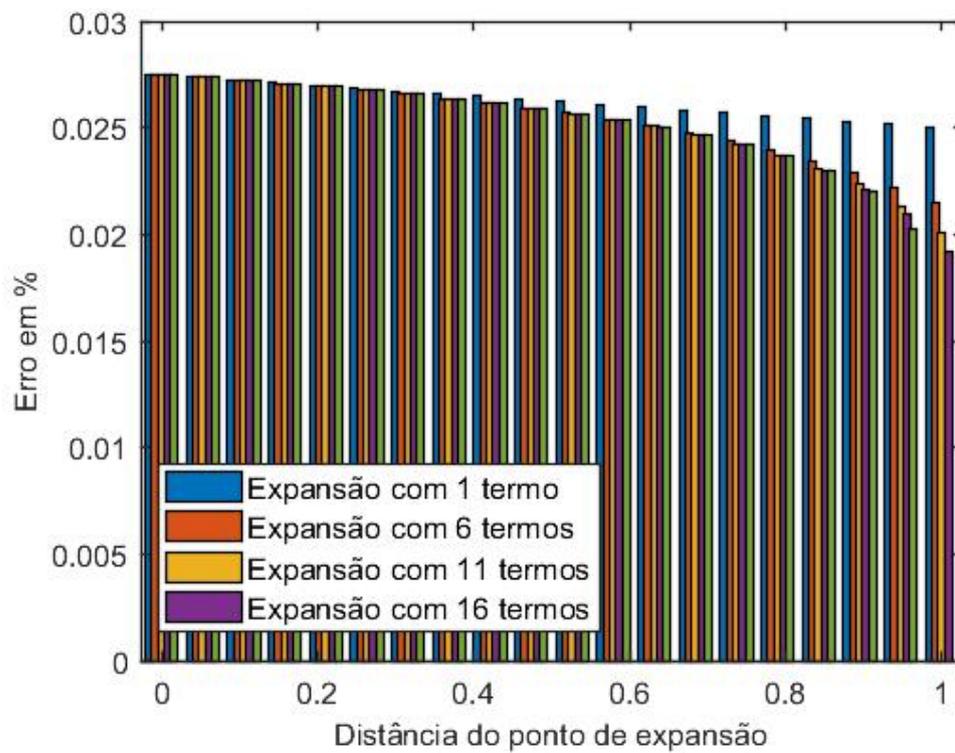


Figura 5.3: Erros para solução fundamental $U_{12} = U_{21}$

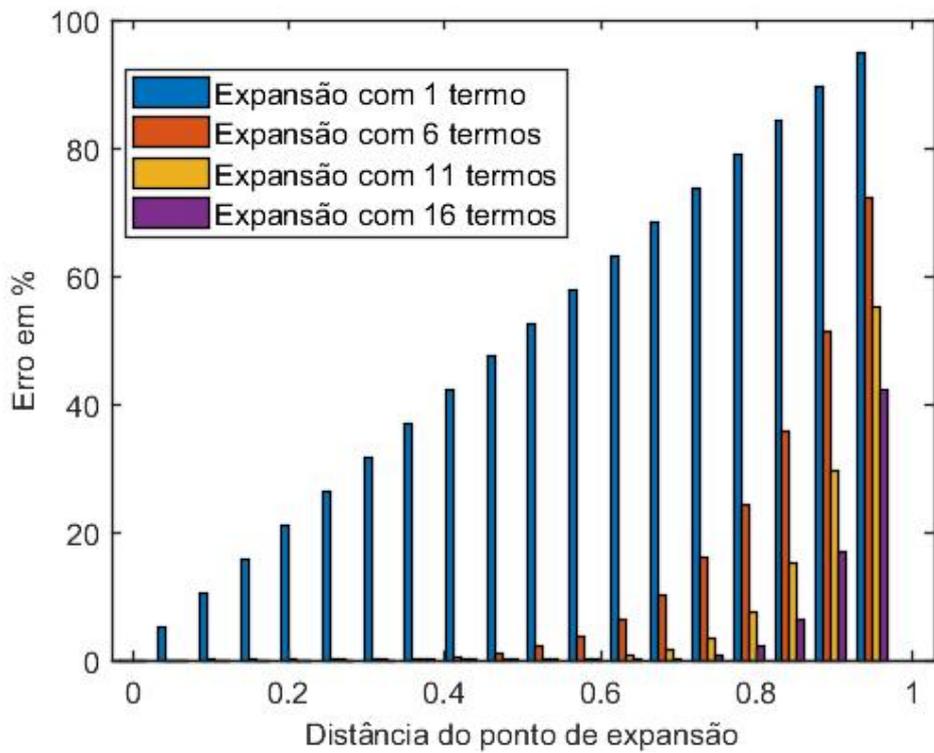


Figura 5.4: Erros para solução fundamental T_{11}

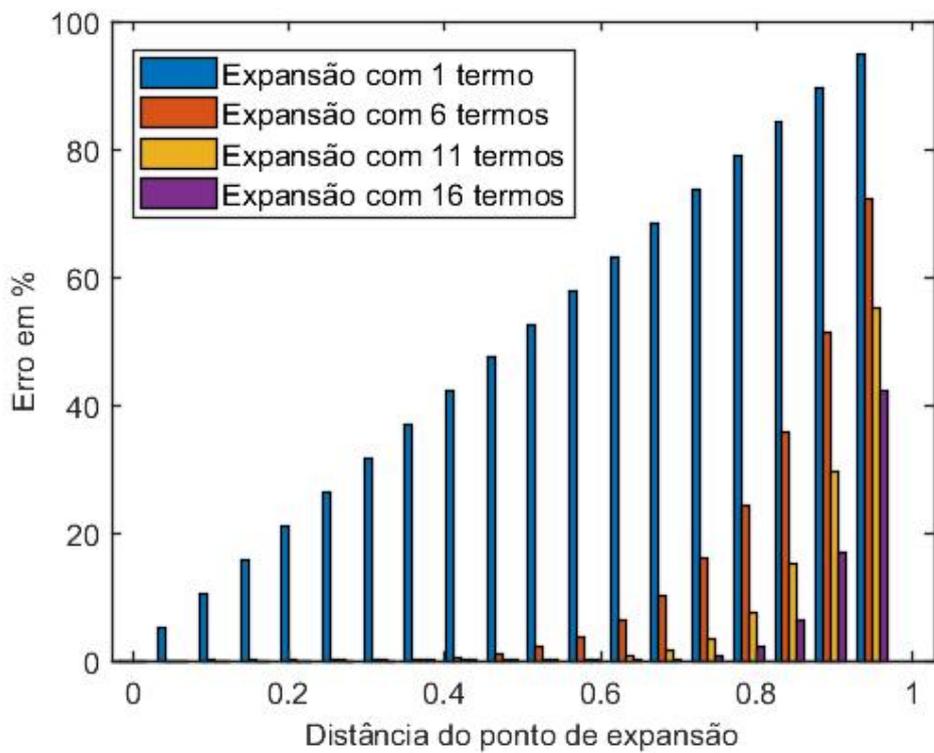


Figura 5.5: Erros para solução fundamental T_{22}

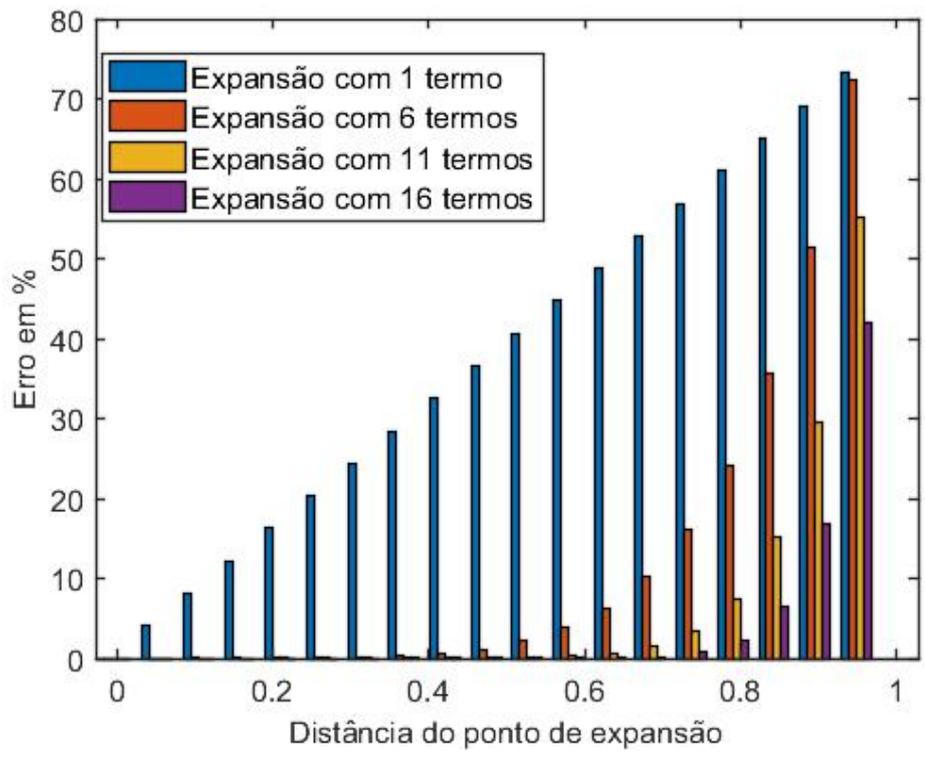


Figura 5.6: Erros para solução fundamental $T_{21} = T_{12}$

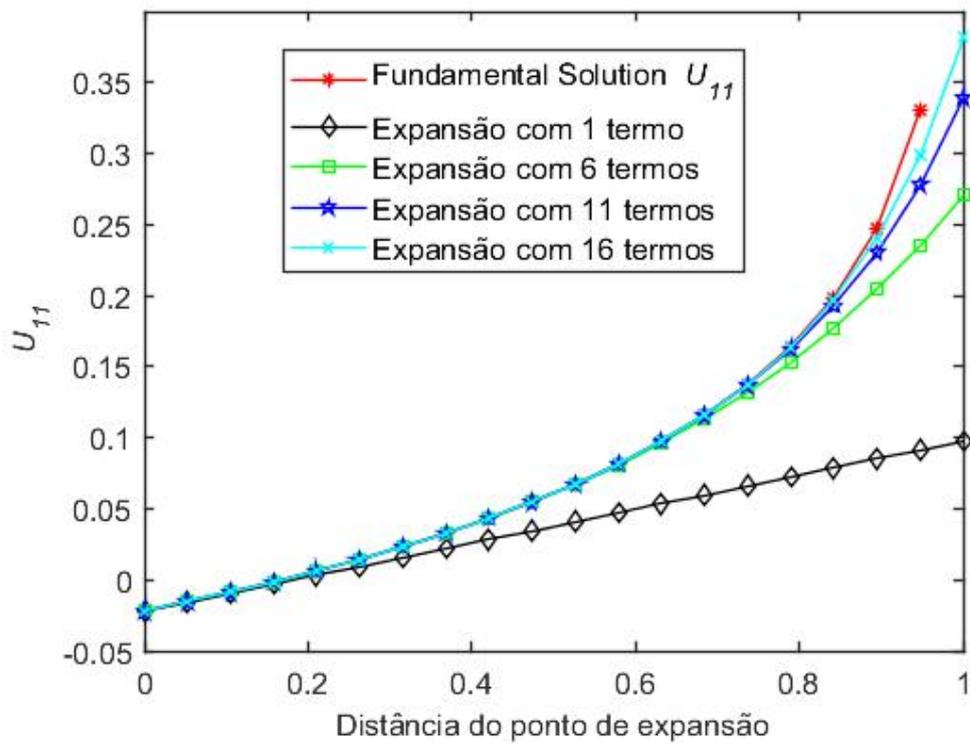


Figura 5.7: Solução Fundamental U_{11}

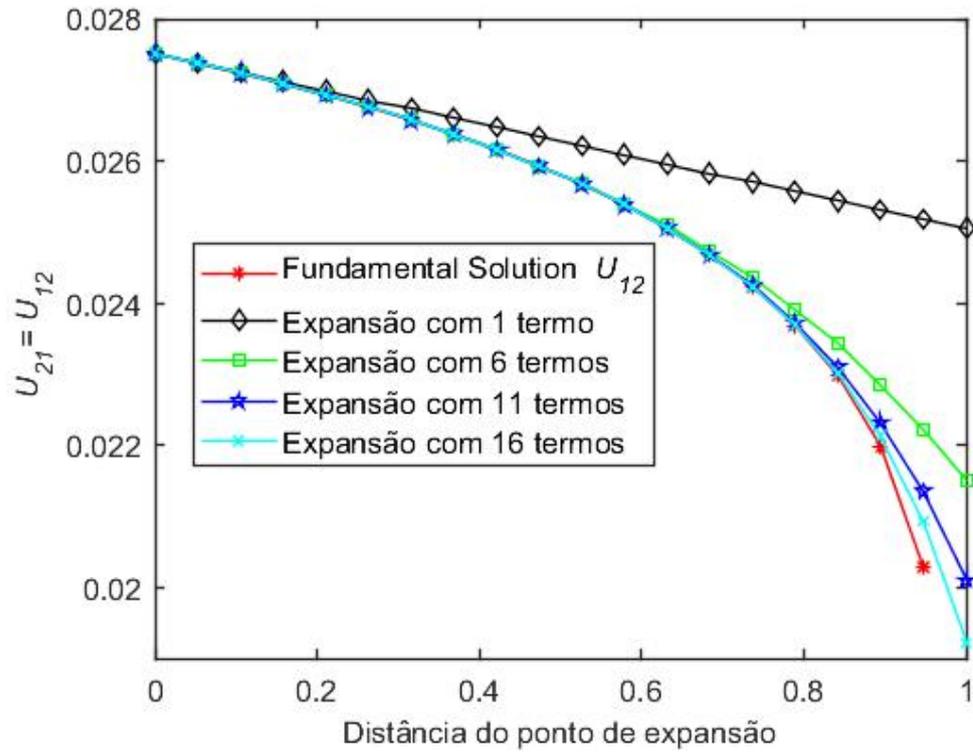


Figura 5.8: Solução Fundamental $U_{12} = U_{21}$

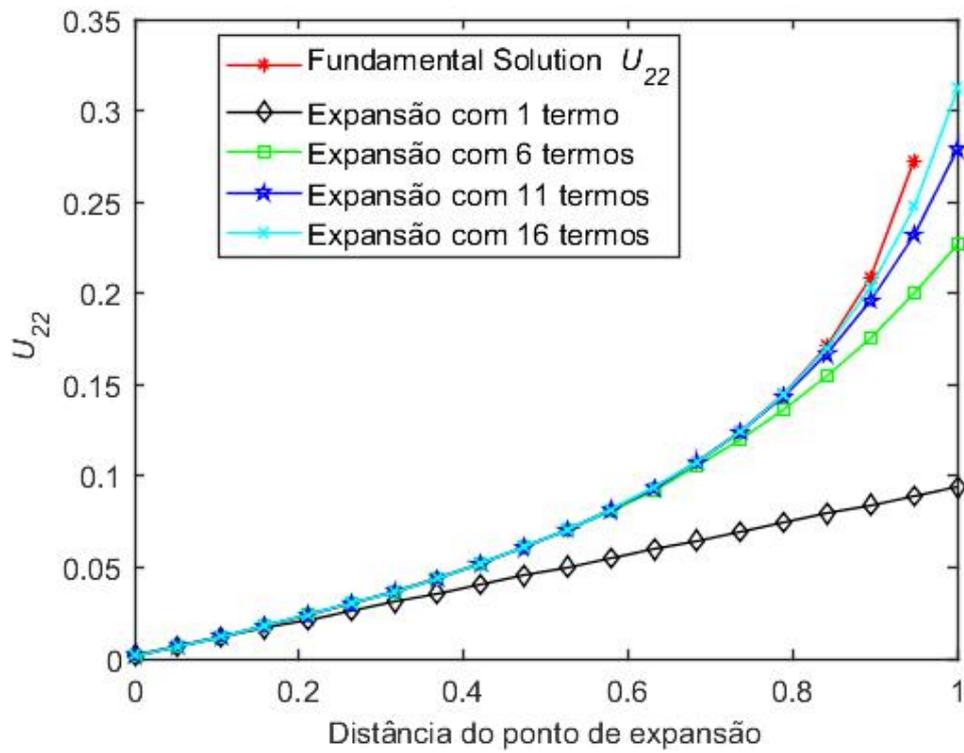


Figura 5.9: Solução Fundamental U_{22}

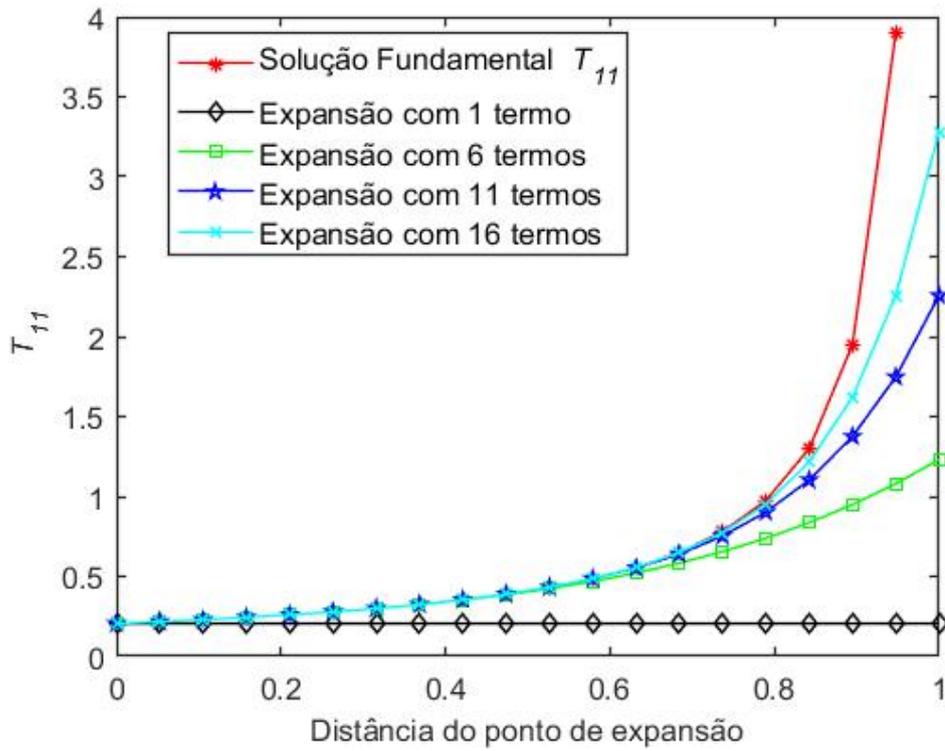


Figura 5.10: Solução Fundamental T_{11}

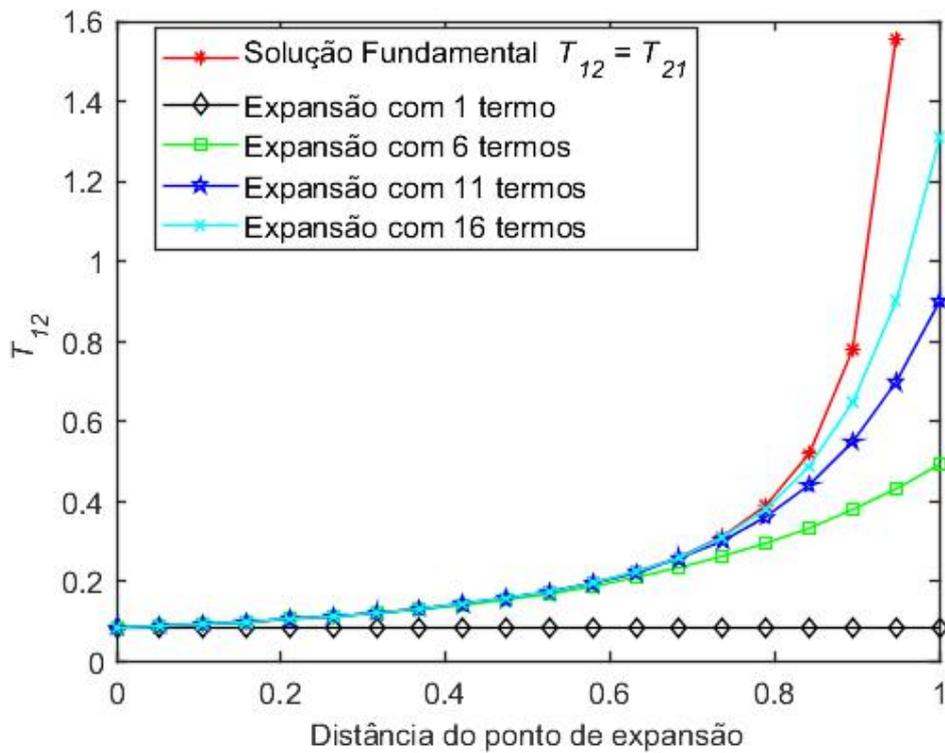


Figura 5.11: Solução Fundamental $T_{12} = T_{21}$

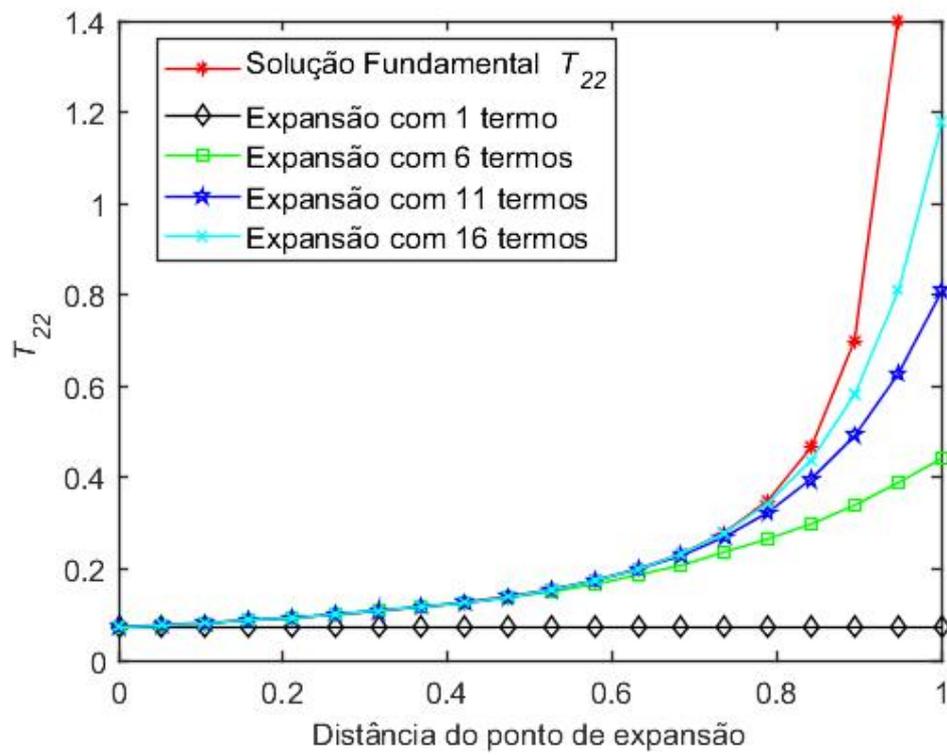


Figura 5.12: Solução Fundamental T_{22}

5.2 Operação do Método Rápido com Expansão Multipolar

Nessa seção verificaremos se todas as operações desenvolvidas para o MECMP convergem para o resultados do MEC tradicional. Calcularemos as integrais das equações (5.1) e (5.2) utilizando o MECMP e o MEC padrão. Esta análise foi feita porque os coeficientes das matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} , presentes nas equações (5.2) e (5.1), são computados através das operações apresentadas no capítulo anterior. Esses valores serão calculados com diferentes números nos termos da expansão multipolar e da expansão local, a fim de verificar a influência do número de termos na acurácia desses resultados. Para iniciar os cálculos propostos, será considerado o problema da Figura 5.13. Deve-se escolher os elementos onde os pontos fontes e os pontos campos pertenceram. Nesse problema, os pontos fontes serão os nós dos elementos 27 e 28 e os elementos de integração serão os nós dos elementos 5 e 6, 11 e 12 e 15 e 16. A integral calculada representa a resposta dos pontos campos quando uma força de carga unitária é aplicada. As constantes desse problema estão representadas nas Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6.

Para exemplificar como as operações apresentadas funcionam, analisaremos um dos exemplos propostos. Considere que os pontos fontes pertencem aos nós dos elementos 27 e 28 e pontos campos estão nos nós dos elementos 15 e 16. Assumindo que o número máximo de elementos por célula é igual a 1, foi calculado os momentos dos elementos 15 e 16 com respeito ao centro das células 54 e 55. Em seguida, através da operação M2M, faremos uma translação dessas posições para o centro da célula 37, pois ela é a célula pai das células 54 e 55. Após somá-las, foi utilizado a operação M2L, a fim de computar a translação do centro da célula 37 para o centro da célula 21, que é a célula pai das células folhas 41 e 40. A translação do centro da célula pai, 21, para as células filhas, 41 e 40, é feita com através da expansão local. A partir desse conjunto de operações, calcularemos um dos coeficientes das matrizes presentes nas equações (5.1) e (5.2). Utilizando os mesmos procedimentos mencionados para os elementos 5,6,11 e 12, os resultados encontrados se encontram nas Tabelas 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12.

$$\mathbf{I}_H = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) t_j(\mathbf{z}_0) d\Gamma(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma_c} \begin{bmatrix} U_{\epsilon x} & U_{\eta x} \\ U_{\epsilon y} & U_{\eta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\Gamma, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{I}_G = \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) u_j(\mathbf{z}_0) d\Gamma(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma_c} \begin{bmatrix} T_{\epsilon x} & T_{\eta x} \\ T_{\epsilon y} & T_{\eta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\Gamma. \quad (5.2)$$

Tabela 5.4: Valores para constante complexas para o material compósito.

(i, j)	A_{ij}	q_{ij}	g_{ij}
11	$0.073 - 0.0654 i$	$-0.4473 - 0.3397 i$	$-0.5124 + 0.8588 i$
12	$0.073 + 0.0654 i$	$-0.04473 - 0.3397 i$	$0.5124 + 0.8588 i$
21	$-0.0524 - 0.0398 i$	$-0.0625 - 0.05528 i$	-1.000
22	$-0.0524 - 0.0398 i$	$-0.0625 - 0.05528 i$	-1.000

Tabela 5.5: Propriedades do material compósito

Camada	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	θ
1	2.2	4.4	0.7692	0.4286	-15°
2	2.2	4.4	0.7692	0.4286	25°

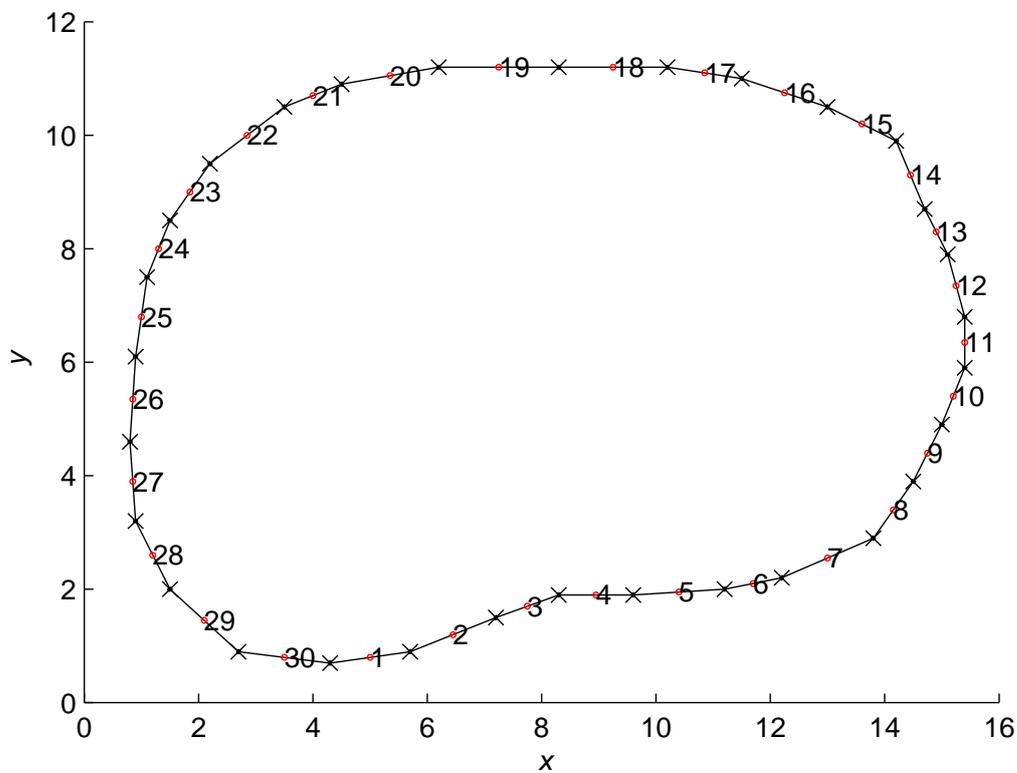


Figura 5.13: Domínio

Tabela 5.6: Valores das raízes do polinômio característico para o material compósito.

i	μ_i
1	$-0.5124 + 0.8588 i$
2	$0.5124 + 0.8588 i$

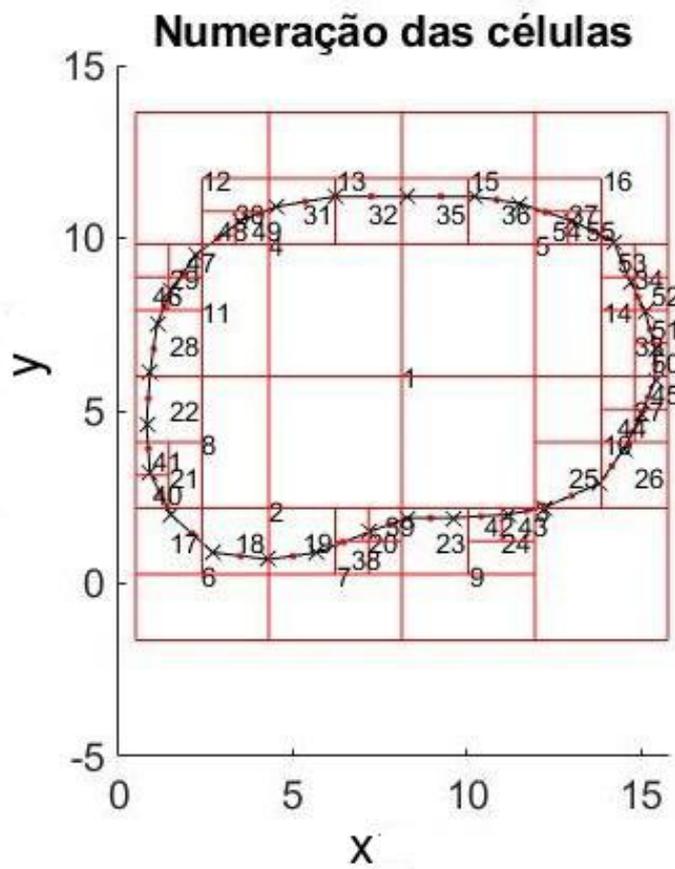
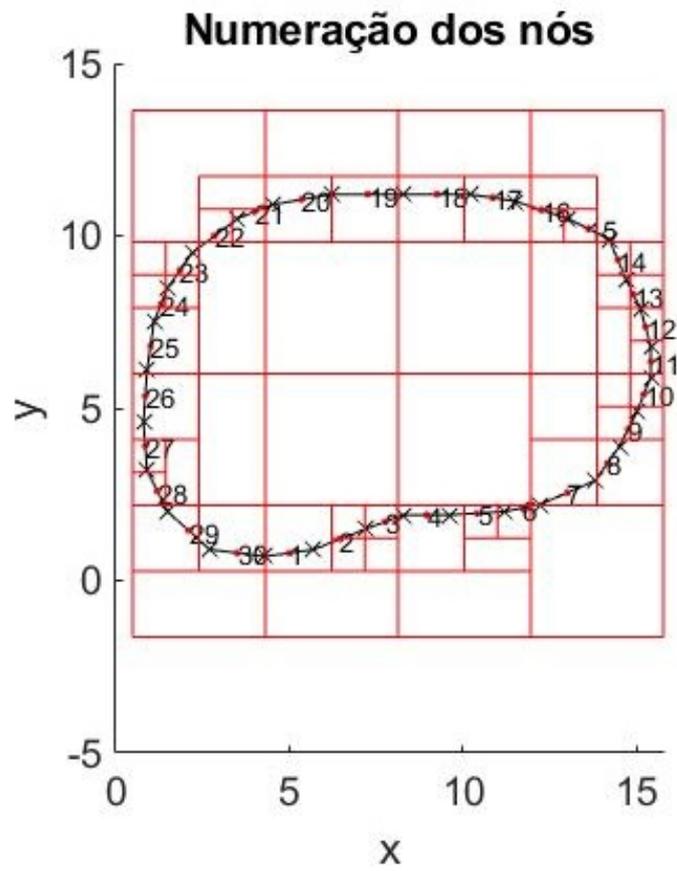


Figura 5.14: Estrutura do MECMP

Tabela 5.7: Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 5

Num of exp	MECMP I_G nó 5	MECMP I_H nó 5
2	-0.74995/ - 0.5682	0.027287/ - 0.0077593
4	-0.75024/ - 0.56916	0.023676/ - 0.0068712
6	-0.75028/ - 0.56914	0.023772/ - 0.0067535
8	-0.75028/ - 0.56914	0.023772/ - 0.0067659
BEM	-0.75028/ - 0.56914	0.02377/ - 0.0067661

Tabela 5.8: Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 6

Num of exp	MECMP I_G nó 6	MECMP I_H nó 6
2	-0.7106/ - 0.53994	0.020051/ - 0.006443
4	-0.70919/ - 0.54188	0.020051/ - 0.006443
6	-0.70935/ - 0.54183	0.020051/ - 0.006443
8	-0.70935/ - 0.54183	0.020051/ - 0.0064409
BEM	-0.70935/ - 0.54183	0.020051/ - 0.0064409

Tabela 5.9: Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 11

Num of exp	MECMP I_G nó 11	MECMP I_H nó 11
2	-0.62066/ - 0.45961	0.040665/ - 0.0082007
4	-0.62026/ - 0.45964	0.040499/ - 0.0089126
6	-0.62026/ - 0.45964	0.040468/ - 0.0088904
8	-0.62026/ - 0.45964	0.040469/ - 0.0088903
BEM	-0.62026/ - 0.45964	0.040469/ - 0.0088903

Tabela 5.10: Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 12

Num of exp	MECMP I_G nó 12	MECMP I_H nó 12
2	-0.61358/ - 0.44324	0.043138/ - 0.0011282
4	-0.61269/ - 0.443	0.042832/ - 0.011912
6	-0.6127/ - 0.443	0.042817/ - 0.1188
8	-0.6127/ - 0.443	0.042818/ - 0.1188
BEM	-0.6127/ - 0.443	0.042818/ - 0.01188

Tabela 5.11: Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 15

Num of exp	MECMP I_G nó 15	MECMP I_H nó 15
2	-0.84276/ - 0.55643	0.051138/0.029998
4	-0.84267/ - 0.5565	0.051055/0.029937
6	-0.84266/ - 0.5565	0.051068/0.029947
8	-0.84266/ - 0.5565	0.051068/0.0299948
BEM	-0.84266/ - 0.5565	0.051068/0.029948

Tabela 5.12: Comparação entre MECMP e o MEC convencional para matriz G e H do nó 16

Num of exp	MECMP I_G nó 16	MECMP I_H nó 16
2	-0.085486/ - 0.53702	0.054505/0.036072
4	-0.085499/ - 0.53684	0.054696/0.036406
6	-0.085498/ - 0.53683	0.054707/0.036422
8	-0.085498/ - 0.53683	0.054707/0.036422
BEM	-0.085498/ - 0.53683	0.054707/ - 0.036422

Os resultados mostram que as integrais calculadas usando o MECMP estão em boa concordância com os resultados apresentados pelo MEC convencional, mesmo quando poucos termos nas expansões multipolar e local são usados. Assim, pode-se concluir que todas as operações desenvolvidas convergem, ou seja, a acurácia dos resultados melhora quando aumentamos o número de termos na expansão multipolar e na expansão local. Além disso, verificou-se que os resultados para a matriz \mathbf{H} exigiram um número maior de termos na série do que a matriz \mathbf{G} . Novamente, esse comportamento pode ser explicado pela presença da singularidade forte na solução fundamental de força de superfície. Ela demanda mais de termos para garantir a mesma precisão dos resultados. Vale ressaltar que essa proposta também foi desenvolvida por Braga (2012) e Dias (2014). Os resultados por eles encontrados também foram bastante parecidos: a matriz \mathbf{H} exigiu maior número de termos que a matriz \mathbf{G} . Portanto, concluimos que as operações foram implementadas corretamente e que a metodologia utilizada para averiguar esses resultados também é confiável, visto que conclusões semelhantes foram obtidos para problemas potenciais e de elasticidade isotrópica em duas dimensões.

5.3 Cavidade circular sob pressão interna

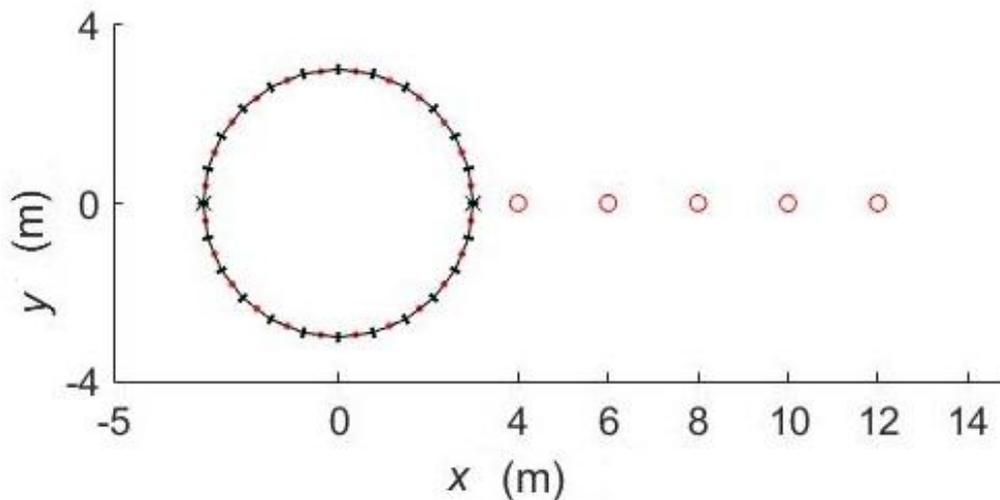


Figura 5.15: Pontos internos dentro da cavidade no meio infinito

Neste problema analisaremos uma cavidade circular sob pressão interna em um meio infinito, conforme apresentado na Figura 5.15. A finalidade desse problema é averiguar a exatidão do resultado final obtido pelo MECMP. Deve-se ressaltar que os resultados apresentados anteriormente servem para construir as matrizes **G** e **H**. Portanto, agora deve-se verificar se a solução obtida pelo GMRES do MECMP apresenta alguma irregularidade. Este problema foi analisado por Foltran (1999) usando o BEM convencional, onde o mesmo calculou deslocamentos e tensões para diferentes pontos distantes da cavidade. Logo, uma das simulações realizadas tem como objetivo comparar o deslocamento obtido pelo MECMP com seguintes resultados: os valores da solução numérico obtida por Foltran (1999) e os resultados da solução analítica, dada pela equação (5.3):

$$u = \frac{pa^2(1 + \nu)}{Er}. \quad (5.3)$$

Na equação (5.3) u é deslocamento radial desejado, em milímetros, p é a pressão interna da cavidade, em Pa, a é a distância da cavidade circular, em metros, ν o coeficiente de Poisson, E o módulo de elasticidade, em Pa e r é o raio da cavidade interna, em metros. Os valores utilizados para as constantes ν , p , E e r estão definidas na Tabela 5.13. Esses valores foram utilizados porque são os parâmetros escolhidos por Foltran (1999). Vale ressaltar que o problema original é isotrópico. Logo, a formulação de Lekhnitskii deve ser adaptada para simular materiais isotrópicos, conforme comentado no capítulo 3. Assim, as seguinte considerações foram adotadas:

$$E_1 = E, \quad (5.4)$$

$$E_2 = E_1 + \chi, \quad (5.5)$$

Tabela 5.13: Valores dos parâmetros usados

Constantes	Valores
ν	0,1
E	$2,079 \cdot 10^5 \text{Pa}$
p	100Pa
r	2 m

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \nu, \quad (5.6)$$

$$G_{12} = G = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}. \quad (5.7)$$

Tabela 5.14: Valores para constante complexas para o material compósito.

(i, j)	A_{ij}	q_{ij}	g_{ij}
11	$2,0139 - 0,0 i$	$0,0 + 1,0109377 i$	$0,0 + 0,0 i$
12	$-1,97812 + 0,0 i$	$0,0 + 0,988976 i$	$0,0 + 0,0 i$
21	$0,0328 - 0,0459 i$	$0,0 - 1,95632 i$	$-1,000 + 0,0 i$
22	$-0,0233 - 0,0337 i$	$0,0 - 2,0358988 i$	$-1,000 + 0,0 i$

Tabela 5.15: Valores das raízes do polinômio característico para o material compósito.

i	μ_i
1	$0,0 + 1,0109037 i$
2	$0,0 + 0,9888976 i$

Nas tabelas 5.15 e 5.14 temos as constantes utilizadas pela formulação MECMP para simular um problema quasi-isotrópico. Assim, o primeiro resultado simulado está relacionado com o estudo da aproximação proposta. Foi realizada uma simulação onde o parâmetro χ é variado e, o número de elementos utilizados na discretização é constante. Para cada simulação do MECMP, usamos 15 termos na expansão multipolar e expansão local. A tolerância no GMRES foi de 10^{-6} e utilizamos 1 elementos por folha na estrutura da árvore, conforme à Figura 5.16. Os pontos distantes da cavidade utilizados para calcular os deslocamentos foram: 4, 6, 10, 20, 50, 200 e 1000 metros da cavidade. Vale destacar que o sentido do vetor normal foi invertido, a fim de considerar à parte interna da cavidade como o meio externo, como representado pela Figura 5.17.

O primeiro resultado apresentado, dado pelas Figura 5.18 e 5.19 e pela Tabela 5.16, comparam a solução analítica com as respostas numéricas, utilizando-se apenas 24 elementos na discretização de contorno. Conforme foi discutido, os valores de χ foram variados. Com essas informações, percebeu-se que a variação dos valores de χ não tem grande influência na acurácia dos resultados, conforme o gráfico de erro da Figura 5.17. Percebe-se que a

Tabela 5.16: Comparação dos deslocamentos em (mm) entre a solução analítica, MEC e MECMP para 24 elementos constantes com para diferentes valores de δ

Dist. da cavidade (m)	Solução Analítica	MEC	MECMP	Erro
4	1,190476	1,165320	1,241307	3,051085
6	0,7936517	0,776870	0,827535	3,078776
10	0,476190	0,466122	0,496521	3,078776
20	0,238095	0,233061	0,248261	3,078776
50	0,093224	0,093224	0,099304	3,078776
200	0,023809	0,0233061	0,024826	3,078776
1000	0,004762	0,004762	0,004965	3,078776

diferença entre $\chi = 1,01$ e $\chi = 1,00000001$ é de apenas 0.0276, conforme pode ser calculado pelos dados da Tabela 5.16. De acordo com a simulação proposta, constate-se que a variação do valor de χ não produziu resultados com erros menores que 3%.

Por isso, será necessário simular o respectivo problema com uma outra configuração de parâmetro. O resultado dessa primeira simulação foi extremamente útil, dado que estudaremos a convergência desse problema variando o número de elementos da discretização. Para realizar tal estudo, vamos escolher o valor de 1,001 para χ . Ele será tomado como referência, pois, a partir dele, não há uma melhora nos resultados obtidos.

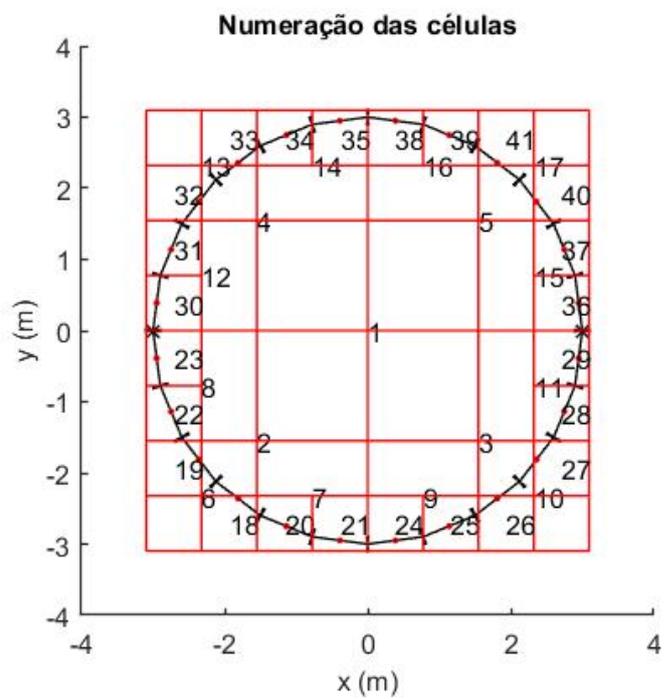
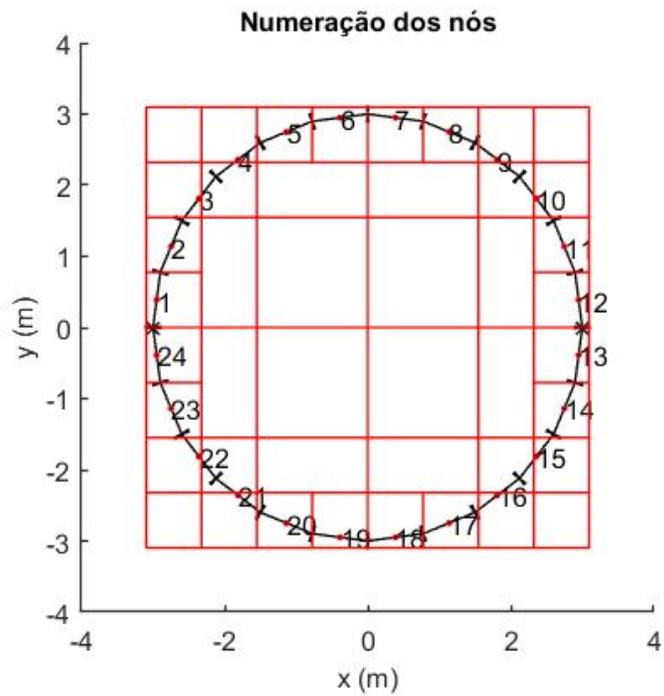


Figura 5.16: Estrutura do MECMP

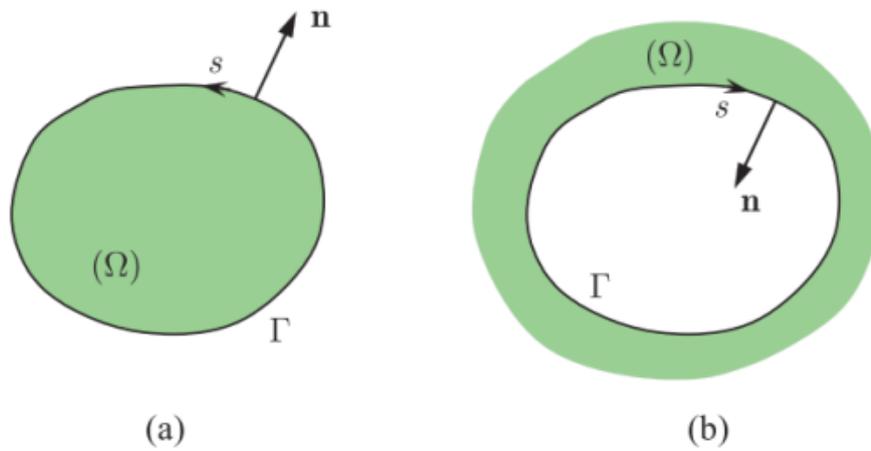


Figura 5.17: Direção positiva e sentido do vetor normal para um domínio fechado (a); Representação da direção positiva e sentido do vetor normal para um domínio no meio infinito (b)

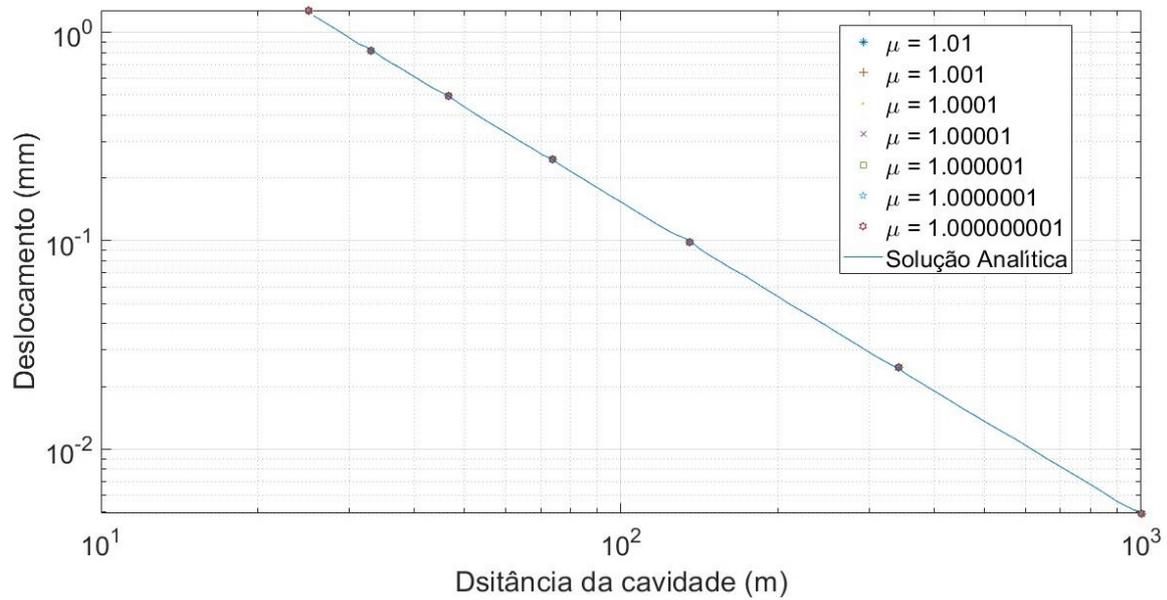


Figura 5.18: Comparação entre solução analítica e MECMP para diferentes valores de δ com 24 elementos na discretização do problema

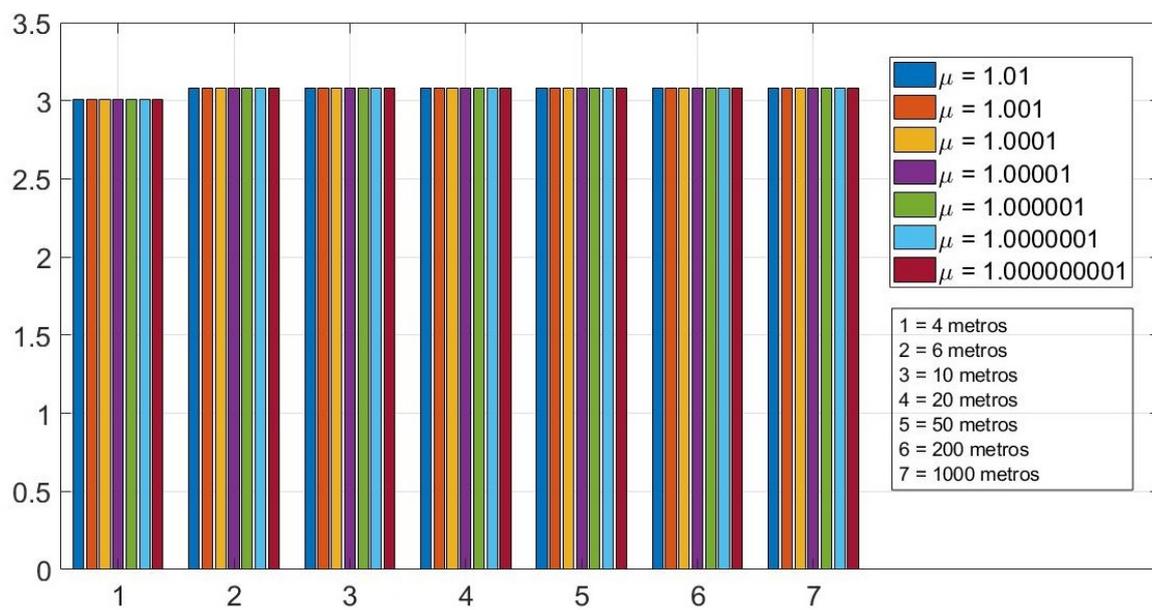


Figura 5.19: Erro entre os valores numéricos e analíticos com 24 elementos

Os resultados obtidos para segunda proposta estão mostrados na Figura 5.20 e 5.21. Nota-se que existe uma instabilidade na convergência da solução. Ela só se estabiliza depois que 48 elementos são utilizados na discretização. Logo, após esse valor, os resultados convergem, conforme observa-se na Figura 5.24, 5.24 e 5.24. Nota-se que a convergência, a partir da estabilização, se dá por cima da solução analítica. A irregularidade no padrão de convergência também foi detectada por Braga (2012). Nessas situações, constatou-se que a convergência para solução analítica se aproximava ora por acima, ora por abaixo. Vale ressaltar que Braga (2012) também utilizou elementos constantes na sua simulação. Assim, deve-se utilizar outros tipos de elementos a fim de verificar se a estabilidade gerada está relacionada com elementos constantes. Além disso, para atingir um erro menor que 1%, foram necessário 700 elementos, conforme a Tabela 5.17.

Por fim, fora as particularidades apresentadas, percebe-se que o MECMP implementado está produzindo resultados corretos, pois uma acurácia menor que 1% foram obtidas. Vale considerar que aproximação entre de um problema anisotrópico para um problema quasi-isotrópico também possui uma limitação, conforme demonstrado pelos resultados obtidos para diferentes valores de χ . Portanto, tal fator também deve ser considerado quando desejamos estudar a precisão dos resultados obtidos. Enfim, a partir dos resultados obtidos, constata-se que toda a implementação tem uma boa precisão, desde as expansões, passando pelas operações do MECMP até chegar no cálculo dos resultados finais. Para finalizarmos a análise da proposta feita, faz-se necessário estudar a eficiência do mesmo, pois tal método foi destinado a ser mais eficiente que o MEC padrão, sendo que tal eficiência deve apresentar complexidade $\mathcal{O}(N)$.

Tabela 5.17: Deslocamentos dos pontos internos em (mm) para 700 elementos constantes

Dist. da cavidade (m)	Solução Analítica	MECMP	Erro
4	1,190476	1,202236	0,987847
6	0,7936517	0,8014914	0,987913
10	0,476190	0,4808948	0,987906
20	0,238095	0,2404474	0,987900
50	0,093224	0,0961789	0,987898398
200	0,023809	0,024045	0,987898046
1000	0,004762	0,004808	0,9878980250

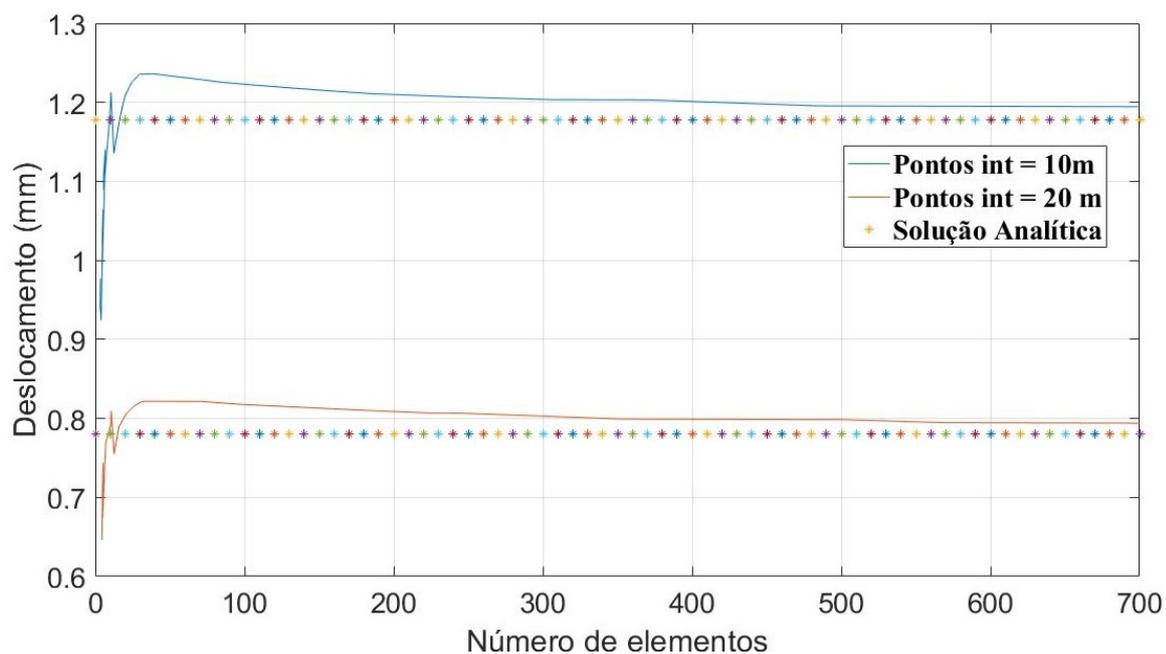


Figura 5.20: Comparação entre a solução analítica e o MECMP para diferentes número de elementos na discretização

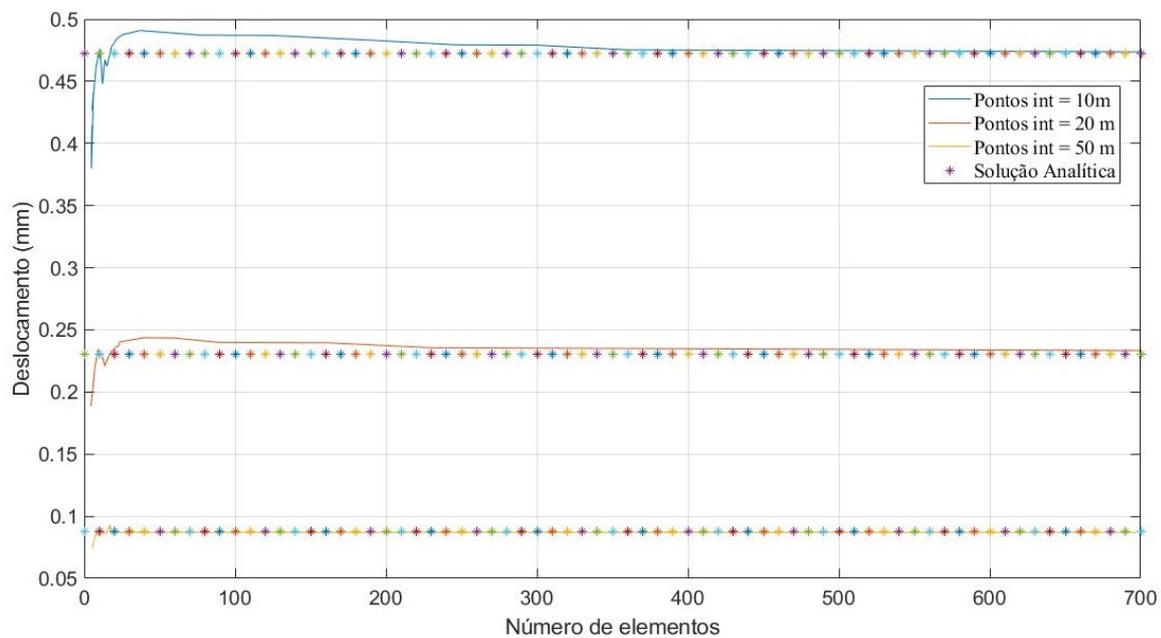


Figura 5.21: Comparação entre a solução analítica e o MECMP para diferentes número de elementos na discretização

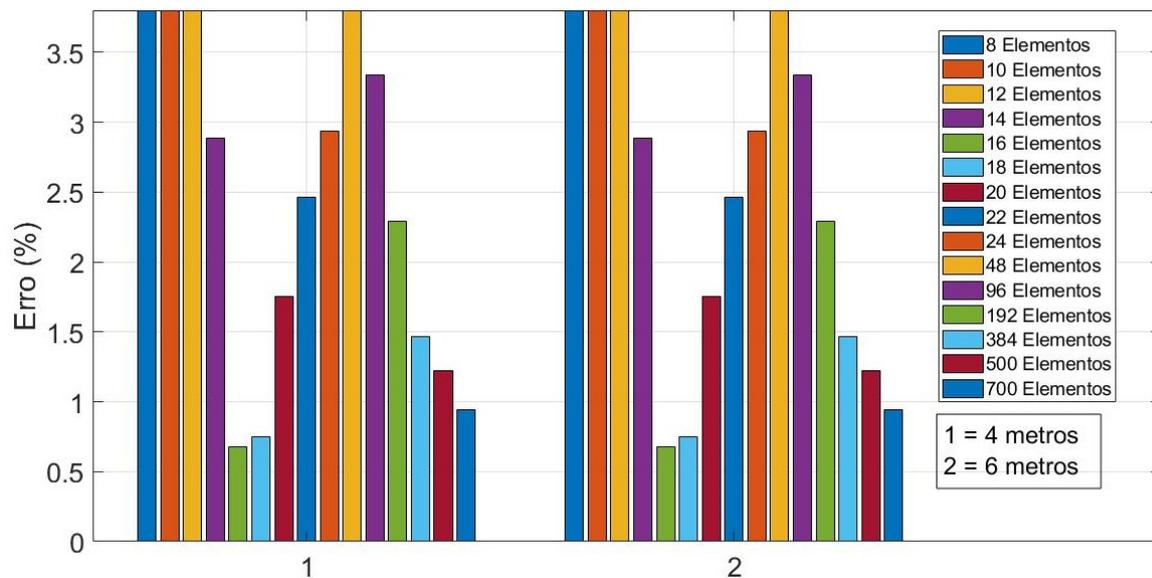


Figura 5.22: Gráfico de erros entre solução analítica e numérica para os deslocamentos dos pontos internos

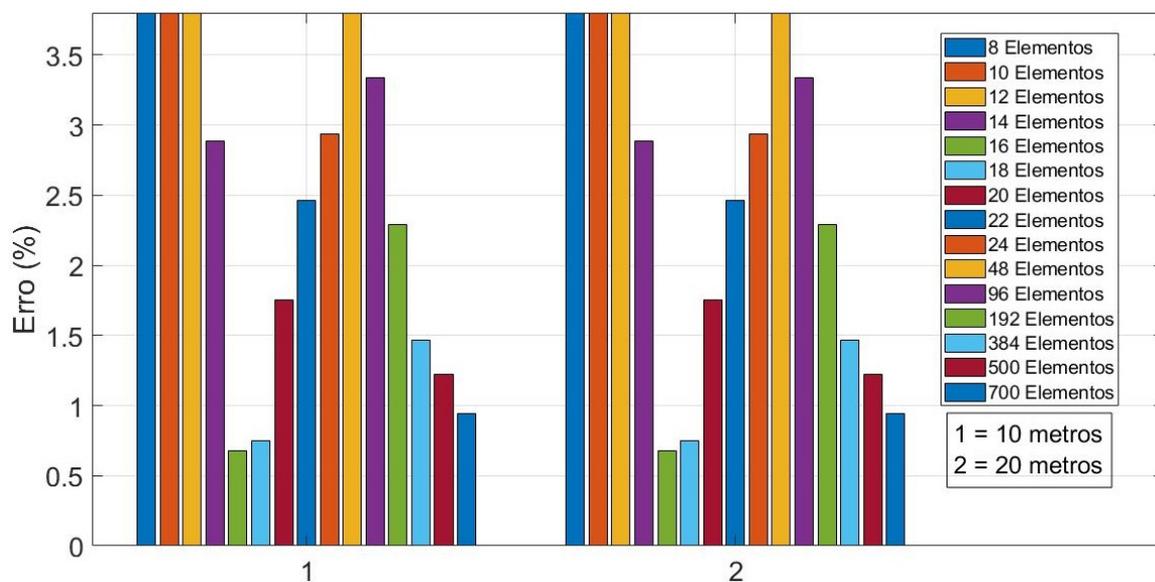


Figura 5.23: Gráfico de erros entre solução analítica e numérica para os deslocamentos dos pontos internos

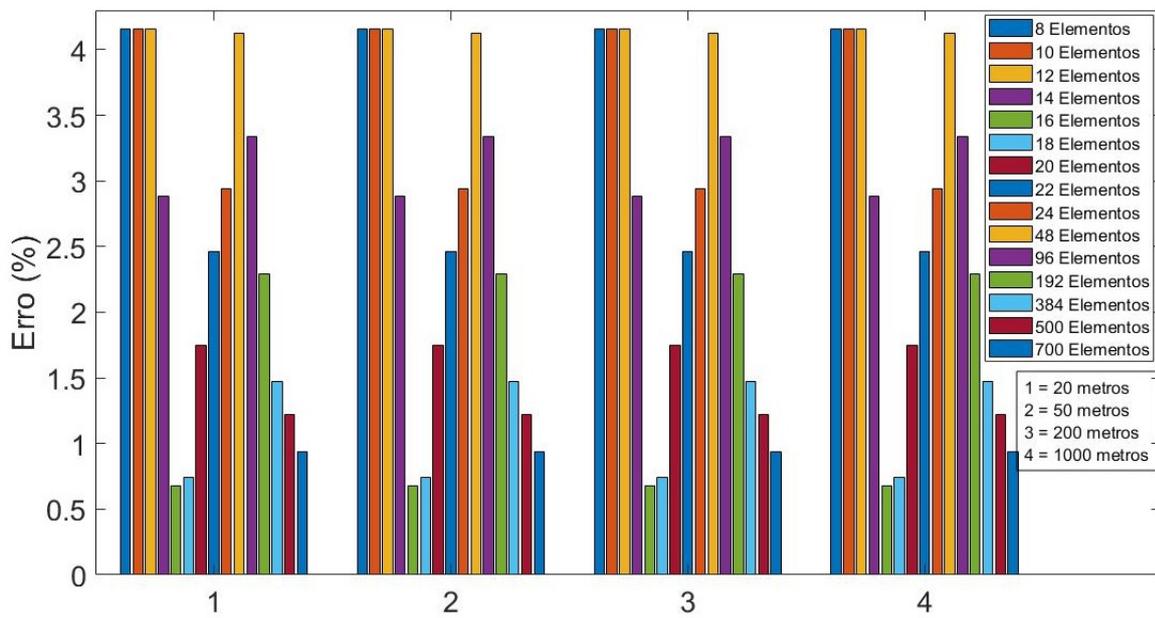


Figura 5.24: Gráfico de erros entre solução analítica e numérica para os deslocamentos dos pontos internos

5.4 Placa com furos

Neste exemplo estudamos a eficiência do MECMP para problemas anisotrópicos. Comparamos o custo computacional (tempo de processamento e a memória utilizada) entre o MEC convencional e o MECMP desenvolvido. Para realizar essa tarefa, utilizaremos a função `@timev` da linguagem *Julia*, pois ela é maneira mais comum de se medir tempo e a memória alocado durante a execução do programa. Vale ressaltar que os valores registrados aqui não contem o tempo decorrido para compilá-los. Por isso, a aferição é realizada mais de uma vez. Nesta seção simulamos uma placa com orifícios circulares, distribuídos uniformemente, submetidos à tração. Assim, uma das arestas é fixada enquanto outra é tracionada, conforme apresentado pela Figura 5.25. A placa analisada tem uma área de 1 m^2 e a área de todos os furos é de 12,47% da área da placa. Para simulá-lo com o MECMP, usamos 10 termos da série da expansão multipolar e da expansão local. As propriedades utilizadas do material compósito estão na Tabela 5.18, 5.19 e 5.20. A tolerância no GMRES é de 10^{-7} . O tempo e a memória consumidos são apresentados nas Figuras 5.26 e 5.27.

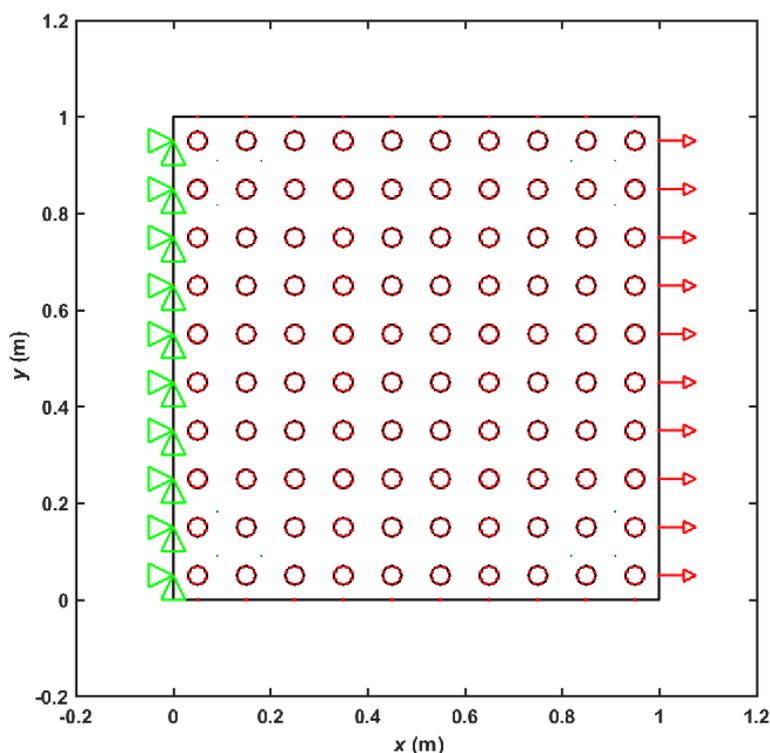


Figura 5.25: Placa com 100 furos

Tabela 5.18: Constantes de Engenharia para compósito de Vidro-Époxi

Layer	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
1	48.26	17.24	4.83	6.89

Os resultados obtidos mostram que o MECMP é mais eficiente quando o grau de liberdade aumenta, porque consome menos memória e é mais rápido que o MEC convencional,

Tabela 5.19: Raízes da equação característica para o Vidro-Époxi.

i	μ_i
1	$-0.309843 + 1.15608i$
2	$0.302941 + 1.08549i$

Tabela 5.20: Constantes complexas para o Vidro-Époxi

(i,j)	A_{ij}	q_{ij}	g_{ij}
(1,1)	$0.0285378-0.0383373i$	$-0.00123219-0.00124873i$	$-0.309843+1.15608i$
(1,2)	$0.0212743+0.0383373i$	$-0.000953288+0.00117249i$	$0.302941+1.08549i$
(2,1)	$0.0328 - 0.0459i$	$-0.00106185-0.00148037i$	-1.000
(2,2)	$-0.0233 - 0.0337i$	$0.00098394-0.00170082i$	-1.000

conforme os gráficos apresentados pelas Figuras 5.26 e 5.27. Analisando a inclinação dos gráficos em escala logarítmica, notou-se que o MECMP possui uma inclinação quase linear, isto é, $\mathcal{O}(N)$. Esse resultado era esperado, pois o MECMP deve ter essa complexidade, a fim de garantir que a proposta realizada seja mais eficiente que o MEC. Fazendo a mesma análise de inclinação para os resultados do MEC, constatamos que um valor próximo de 2 foi obtido. Logo, a complexidade é $\mathcal{O}(N^2)$. Devido essas diferenças, os dois métodos possuem desempenhos bastante distintos.

O maior modelo simulado pelo MECMP tem 159940 DOFs (46×46 furos) e levou 15240 segundos, sem uso de *swap* no disco rígido. Por outro lado, o MEC convencional não pode executar um modelo com mais de 15108 DOFs (14×14 furos), porque a memória RAM é totalmente consumida. Para 11220 DOFs, a memória consumida pelo MEC é quase 6 vezes maior que a memória consumida pelo MECMP, conforme o gráfico da Figura 5.27.

Com esses resultados e com os outros obtidos ao longo desse capítulo, podemos concluir que o método desenvolvido é preciso e é mais eficiente que o MEC a medida que o número de graus de liberdade de um problema aumenta. Tal fato deve ser evidenciado porque essa eficiência não é notada para situações em que o grau de liberdade está entre 10^3 e 10^4 , conforme nota-se nos gráficos em escala logarítmica das Figuras 5.26 e 5.27. O MECMP só é realmente eficiente quando o problema possui grau de liberdade maior que 10^4 .

Além das simulações mostrando a eficiência do FMM, também simulamos o problema para diferentes números de elementos na folha. Essa característica é importante, pois a performance do FMM é alterada pela quantidade de operações executadas. Como apresentado, a operação M2M é a que mais limita a eficiência do FMM. Portanto, ela deve ser evitada. Assim, nessa tese, diminuimos a operação M2M agrupando mais de um elemento em uma folha, pois quanto mais elementos juntos, menos níveis teremos na etapa *downward*. Sendo assim, a Figura 5.28 apresenta o tempo de processamento envolvendo simulações com diferentes número de elementos em uma folha. Constata-se que, quando aumentamos o número de DOFs, o tempo de processamento melhora (diminui) com o aumento do número de elementos em uma folha. Tal fato era esperado, pois nenhum artigo de FMM simulou problemas

envolvendo mais que 10^4 DOFs com um elemento por folha.

Contudo, também deve-se notar que a eficiência relacionada com a quantidade de elementos por folha não é direta. Isto é, nem sempre uma simulação com um número grande de elementos na folha será mais rápida que a simulação com um elemento por folha. Isso pode ser constatado pela Figura 5.28, pois a gráfico de 1 elemento por folha está abaixo do gráfico com 10 elementos por folha em uma determinada faixa de simulação. Contudo, esse ganho de performance não é tão alto, conforme apresenta a Figura 5.29. Ela representa a diferença, em minutos, do tempo entre as duas simulações propostas. Os valores negativos representam quão rápido é a simulação com 1 elemento por folha. Por outro lado, os valores positivos representam quão rápido é a simulação com 10 elementos por folha. Comparando a máxima diferença entre os resultados propostos, a simulação com 1 elemento por folha teve um ganho máximo de 5 minutos. Fazendo a mesma análise para a simulação com 10 elementos por folha, nota-se que esse ganho foi de 27 minutos, mais que 5 vezes a máxima eficiência da proposta com 1 elemento por folha. Logo, concluímos que a simulação com 1 elemento por folha representa a pior performance para proposta do MECMP.

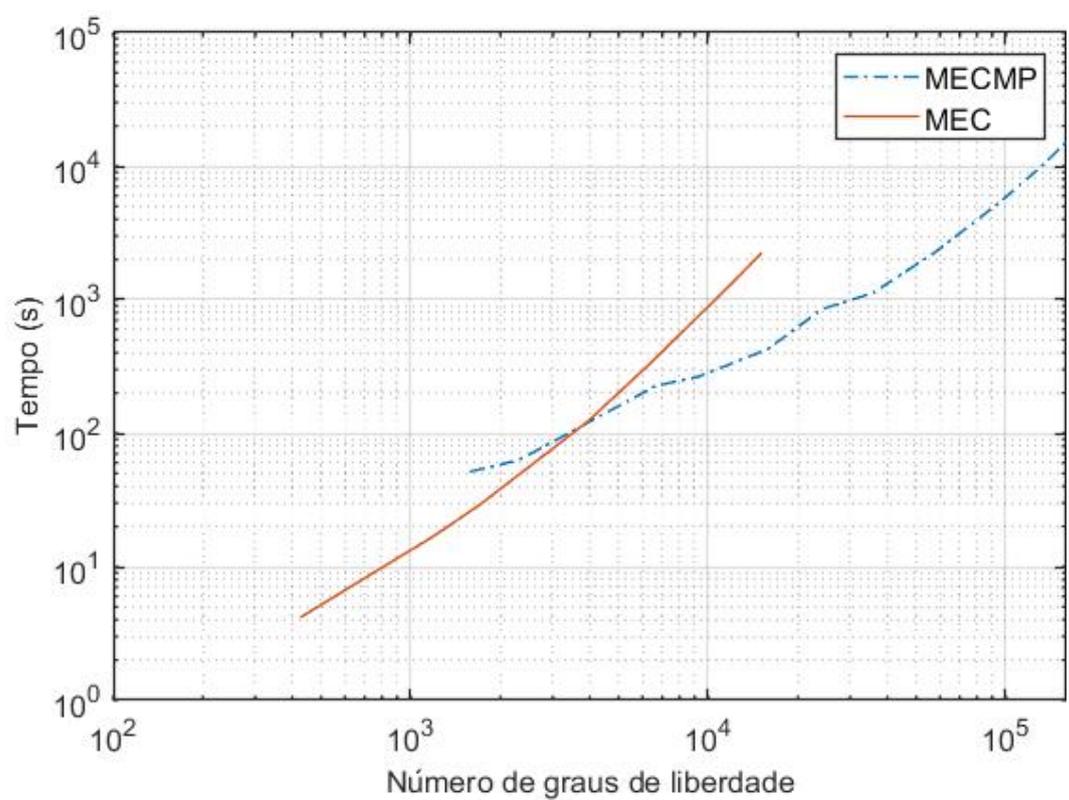
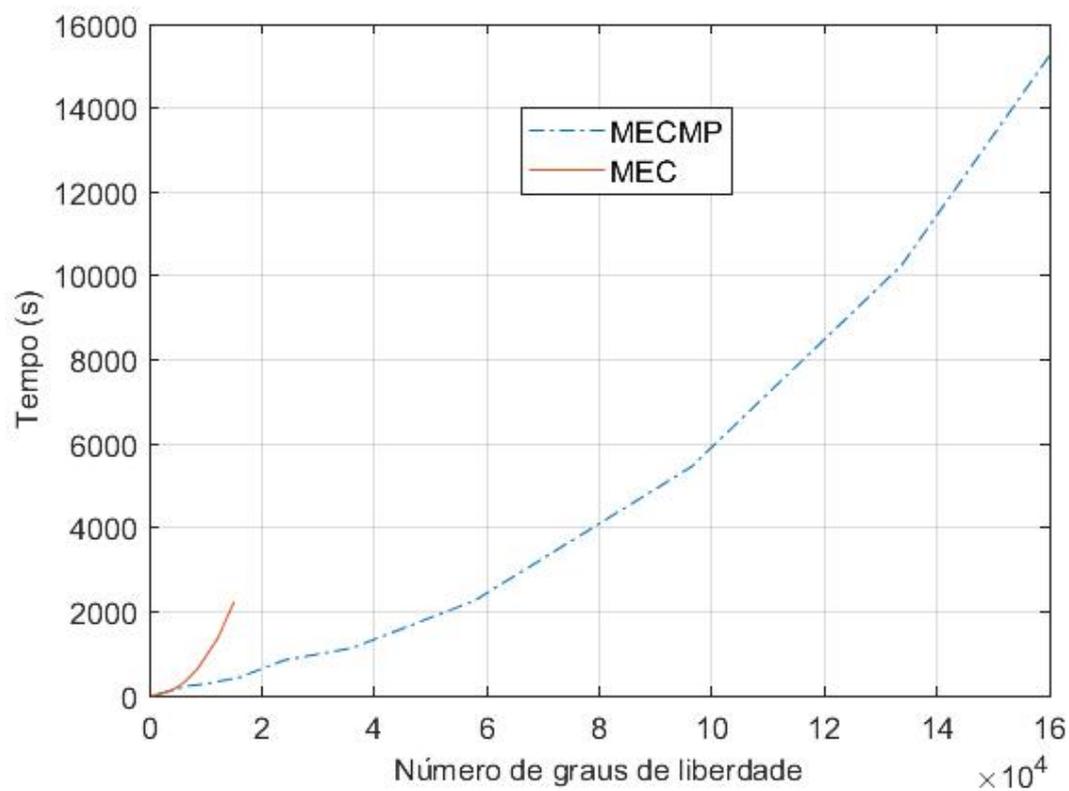


Figura 5.26: Tempo consumido pelo MECMP e MEC convencional

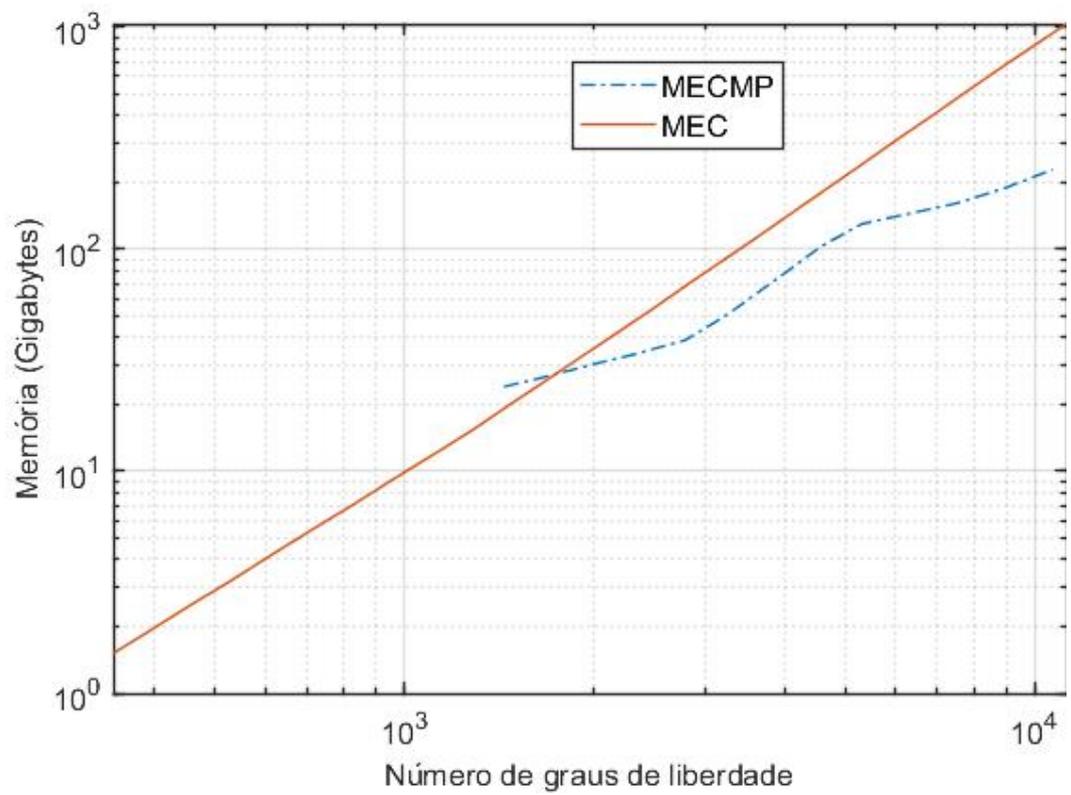
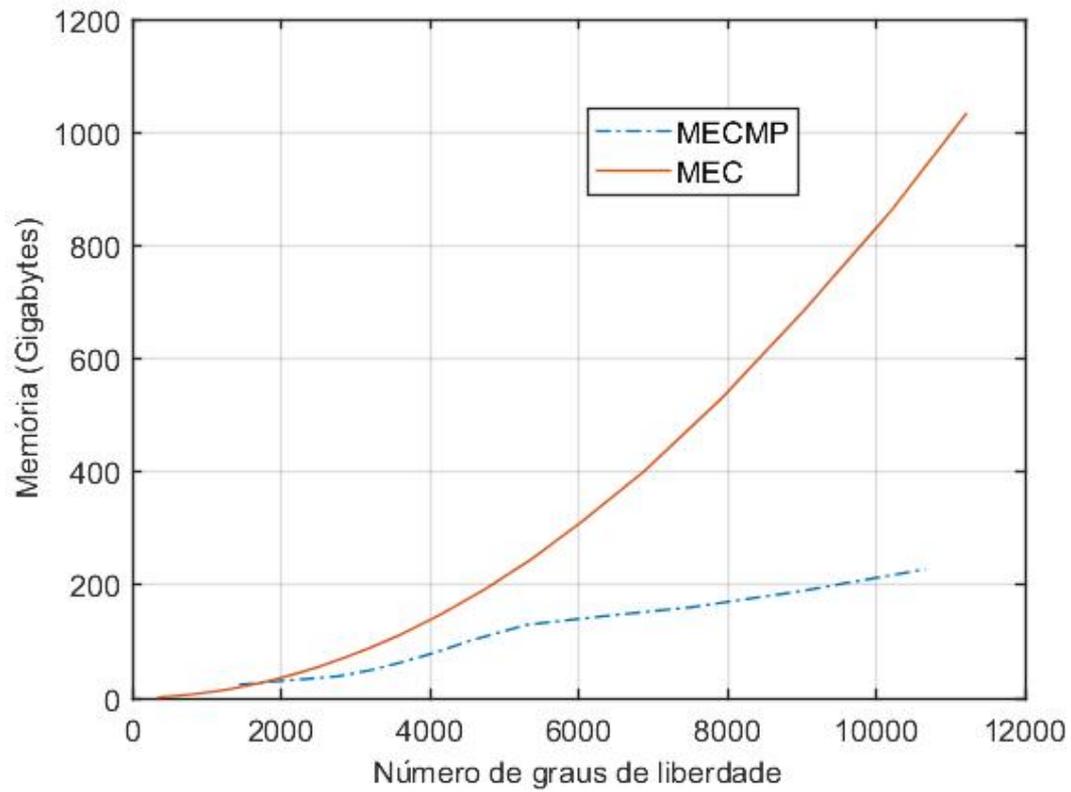


Figura 5.27: Memória consumida pelo MECMP e MEC convencional

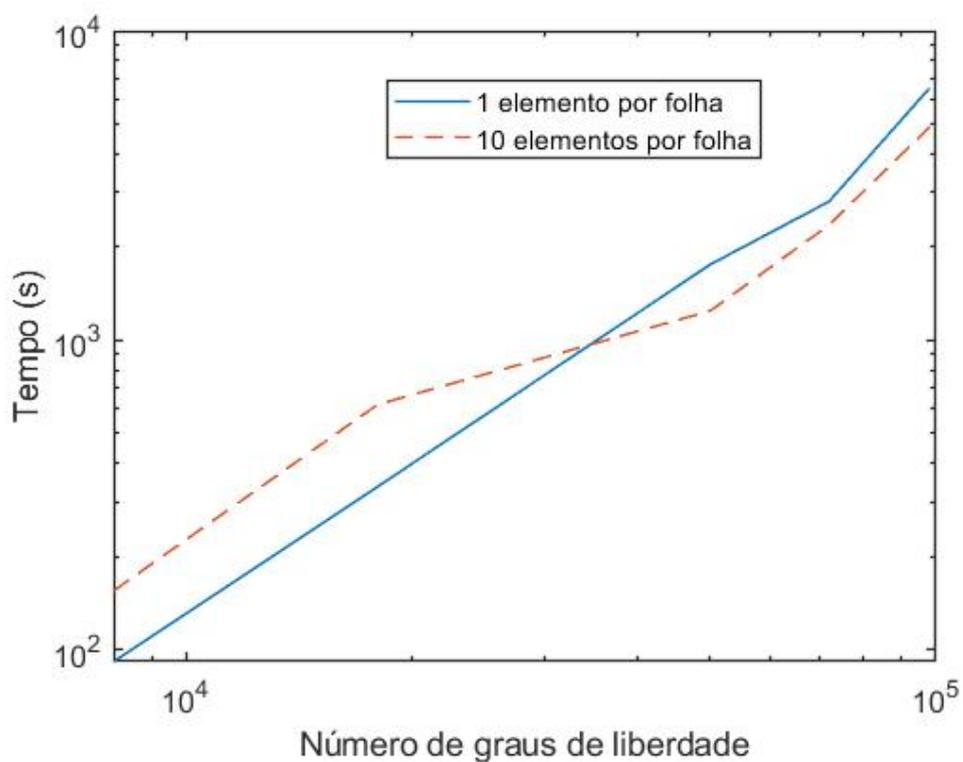


Figura 5.28: Comparação entre simulação com diferentes números de elementos na folha

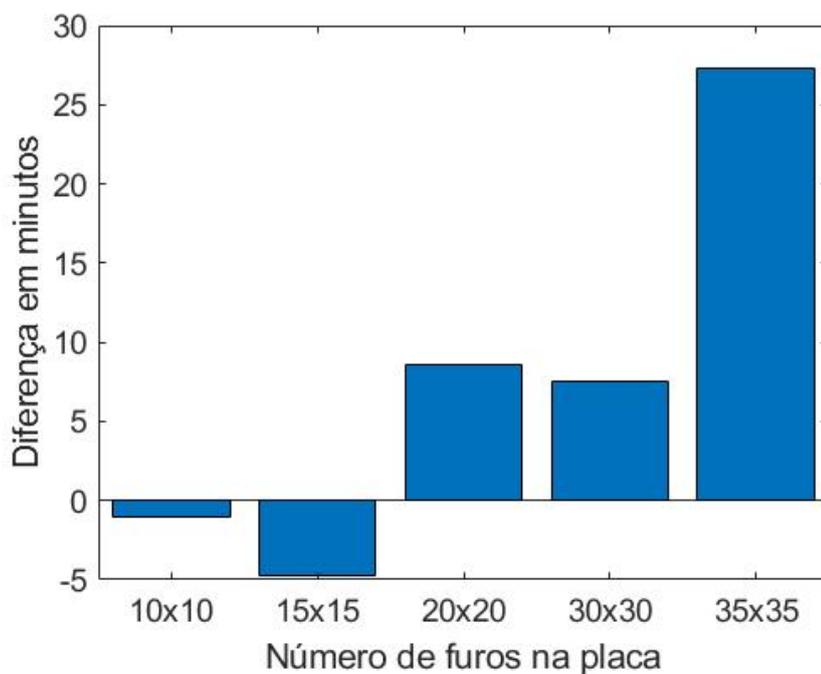


Figura 5.29: Erro entre a simulação com 10 elementos por folha e 1 elemento por folha

Capítulo 6

Conclusões

O objetivo desta tese foi desenvolver a formulação do MECMP para problemas de elasticidade anisotrópica. Na introdução desse trabalho apresentamos as suas principais características do MEC e o MECMP. Além disso, discorremos sobre alguns trabalhos de MECMP relacionados com o tema proposto. Percebeu-se que na literatura não tinha sido utilizada a formulação proposta, pois nenhum trabalho envolvendo o MECMP usou a solução fundamental de Lekhnitskii para resolver problemas de elasticidade anisotrópica. Em virtude disso, iniciamos o capítulo 2 apresentando os principais conceitos relacionados a teoria da elasticidade para materiais anisotrópicos, a fim de criar uma base para desenvolver a formulação proposta. No final desse capítulo foram apresentados os principais conceitos envolvendo a teoria dos laminados simétricos, desenvolvendo as equações utilizadas para calcular tensão e deformação nesses corpos.

O capítulo 3 foi destinado ao desenvolvimento do MEC padrão para o tipo de problema estudado nesta tese. Primeiramente, apresentamos as soluções fundamentais associadas à formulação de Lekhnitskii. Em seguida, apresentou-se alguns teoremas necessários ao desenvolvimento da formulação do MEC. Através desses tópicos, logrou-se a equação integral de contorno, que foi discretizada no final do capítulo. Com esse resultado, o sistema linear do MEC foi obtido. Vale ressaltar que nesse capítulo também apresentamos algumas características que inviabilizam o MEC para solucionar problemas de larga escala. Notamos que o método de colocação nodal é o responsável por torna a matriz cheia e não simétrica. Além disso, a forma de solucionar o sistema linear também era um inconveniente, pois, dependendo da forma adotada para tal, temos uma formulação cuja a complexidade é $\mathcal{O}(N^2)$.

Para superar as dificuldades aqui relatadas, utilizamos o capítulo 4 para apresentar a formulação do MECMP. Atualmente, ela é uma das técnicas empregadas para acelerar a solução do MEC. Logo, começamos o capítulo descrevendo as ideias básicas do MECMP para, depois, desenvolver a formulação matemática desse método. Iniciamos essa etapa apresentando a expansão das soluções fundamentais. Em seguida, as operações de translação do MECMP foram desenvolvidas. Através desse conjunto de procedimentos mudamos a forma de interação entre o ponto fonte e o ponto campo. Assim, substituímos a tradicional forma

de interação direta por uma nova, que envolve agrupamento de pontos. Contudo, tal procedimento só é válido para situações onde o ponto campo e o ponto fonte estão distantes. Quando o ponto fonte e o ponto campo estão perto, utilizamos o MEC. No capítulo 5 apresentamos os resultados numéricos da formulação proposta. Como conclusão, constatamos que o MECMP para problemas anisotrópicos gera resultados precisos, além do mesmo possuir uma complexidade linear. Assim, essa ferramenta é bastante adequada para solucionar problemas de larga escala para situações envolvendo elasticidade anisotrópica.

6.1 Sugestão para trabalhos futuros

Apesar dos resultados aqui desenvolvidos estarem de acordo com que era esperado, pode-se notar que algumas partes do MECMP podem ser aperfeiçoadas para melhorar a performance da formulação. Os tópicos aqui apresentados podem ser considerados como sugestões para trabalhos futuros.

- A primeira sugestão proposta visa alterar a forma como as expansões das soluções fundamentais foram realizadas. Como apresentada no capítulo 4, existem outras formas para alcançar esse objetivo, conforme apresentado por Yarvin e Rokhlin (1998) e Haitao e Zhenhan (2004). Com os novos resultados obtidos dessas expansões, pode-se melhorar a eficiência do MECMP.
- A segunda sugestão visa implementar o código utilizando placas gráficas, conforme apresentado por Takahashi et al. (2012). Tal procedimento iria possibilitar simular problemas mais complexos que necessitam de maior quantidade de DOFs.
- Em virtude das poucas soluções analíticas disponíveis para o cálculo do deslocamento, faz-se necessário implementar a equação integral associada com cálculo da tensão. Através dela, iremos dispor de um número maior de problemas que possuem solução analítica. Além disso, podemos estender a formulação para simular problemas envolvendo fraturas em materiais anisotrópicos.
- Atualmente, uma das pesquisas que tem se destacado é a utilização da formulação isogeométrica. Ela é uma ferramenta computacional que possibilita integrar a análise de elementos finitos ou elementos de contorno com ferramentas de projeto CAD, através da NURBS. Uma das vantagens dessa abordagem é que não há erro de aproximação geométrica, pois o domínio ou o contorno do problema são representados exatamente. Assim, os artigos de Wang et al. (2019), Wang et al. (2018), Liu et al. (2017) e Chen et al. (2018) são alguns trabalhos que utilizam a formulação isogeométrica com MECMP, para diferentes tipos de problema, a fim de mostrar que os resultados obtidos dessa união são mais precisos que os obtidos pelo MECMP, pois as NURBS fornecem representações geométricas exatas. Assim, pode-se estender essa formulação para problemas elásticos anisotrópicos;

A abordagem e o código apresentados nesta tese pode ser estendida para problemas elásticos anisotrópicos em 3D. Para tais situações, a estrutura *quad-tree* deve ser substituída pela *oct-tree*, com células na forma de cubos que cobrem todos os elementos de contorno. Embora as expansões de séries tenham sido usadas para expandir as soluções fundamentais em problemas 3D, elas se mostraram ineficientes, uma vez que requerem um grande número de termos nas expansões para obter uma boa convergência. A melhor escolha para a formulação 3D requer o uso de funções harmônicas para as expansões das soluções fundamentais.

Para problemas com contornos curvos ou estruturas delgadas em flexão, o uso de elementos constantes não é eficiente e um grande número de elementos pode ser necessário para obter resultados com convergência satisfatória. Neste sentido, elementos de mais alta ordem, como elementos quadráticos, por exemplo, seriam mais adequados, conforme apresentado por Gee e Erdelyi (2017).

Referências Bibliográficas

ABEYARATNE, R. *Volume II of lecture notes on the mechanics of elastic solids*. [S.l.]: MIT Department of Mechanical Engineering, 2012.

AGARWAL, B. D.; BROUTMAN, L. J. *Analysis of performance of fiber composites*. New York: John Wiley and Sons Inc, 1990.

ALBUQUERQUE, E.; SOLLERO, P.; ALIABADI, M. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier Science, v. 39, p. 1405–1422, 2002.

ALBUQUERQUE, E.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Dual reciprocity boundary element method in laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. *Computers Structures*, Elsevier Science, v. 81, p. 1703–1713, 2003.

ALBUQUERQUE, E.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier Science, v. 27, p. 977–985, 2003.

ALBUQUERQUE, E. L. *Análise de Problemas Dinâmicos em Materiais Anisotrópico Usando o Método dos Elementos de Contorno*. Tese (Doutorado) — Unicamp, Departamento Mecânica Computacional, Julho 2001.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. Dual boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley and Sons, v. 59, p. 1187–1205, 2004.

ALEXANDER, H.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Springer, v. 29, p. 268–302, 2005.

ALIABADI, M. H. *The boundary element method - Application in Solid Structures - Volume 2*. [S.l.]: Wiley, 2002.

AMARILIA, A. F. *Uma estrutura de solucionador iterativo linear com aplicação à solução de equações do problema de fluxo de carga*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, 2014.

AMLANI FAISAL; CHAILLAT, S. L. A. An efficient preconditioner for adaptive fast multiple accelerated boundary element methods to model time-harmonic 3d wave propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier Science, 2019.

APPEL, A. W. An efficient program for many-body simulation. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 6, 01 1985.

- ATLURI, S. N.; ZHU, T. A new meshless local petrov-galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, Springer, v. 22, p. 117–127, 1998. ISSN 0178-7675,1432-0924.
- BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. *Boundary Element Methods in Geomechanics - Chap 16 in Finite Elements in Geomechanics*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1975.
- BARBER, J. *Elasticity (Solid Mechanics and Its Applications)*. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2003.
- BARNES, J.; HUT, P. A hierarquical $O(N\log N)$ 10 force-calculation algorithm. *Nature*, v. 324, p. 446–449, 1986.
- BARRA, L. P. S. et al. Iterative solution of bem equations by gmres algorithm. *Computer and Structures*, v. 44, p. 1249–1953, 1992.
- BEBENDORF, M. Approximation of boundary element matrices. *Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, v. 86(4), p. 565–589, 2000.
- BEBENDORF, M.; RJSANOW, S. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, Springer Vienna, v. 70(1), p. 1–24, 2003.
- BECKER, A. A. *The boundary element method in engineering: a complete course*. [S.l.]: Mcgraw-Hill, 1992.
- BEER, G.; SMITH, I.; DUENSER, C. *The Boundary Element Method with programming*. [S.l.]: Springer-Verlag/Wien, 2008.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley and Sons, v. 37, p. 229–256, 1994.
- BENZI, M. Preconditioning techniques for large linear systems: A survey. *Journal of Computational Physics*, Elsevier Science, v. 182, p. 418–477, 2002.
- BETTI, E. Teoria della elasticita. *Il Nuovo Cimento (1869-1876)*, v. 10, p. 58–84, 1873.
- BORM, S. Construction of data-sparse H^2 - matrices by hierarchical compression. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 31(3), p. 1820–1839, 2009.
- BOUHALA, L.; MAKRADI, A.; BELOUETTAR, S. Thermo-anisotropic crack propagation by xfem. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier Science, v. 103, p. 235–246, 2015. ISSN 0020-7403.
- BRAGA, L. M. *O Método de Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipolos Aplicado a Problemas de Condução de Calor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica, 2012.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. Boundary element methods for potencial problems. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier Science, v. 1, p. 372–378, 1977.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements An introductory Course*. [S.l.]: Wit Press/Computational Mechanics, 1992.
- BURDEN, L. R.; DOUGLAS, F. J. *Análise numérica*. [S.l.]: Cengage Learning, 2013.

CARVALHO, L. M. et al. *Algebra Linear Numérica e Computacional - Métodos de krylov para solução de sistema lineares*. [S.l.]: Ciência Moderna, 2010.

CESARI, L. Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive. *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, v. 25, p. 422–428, 1937.

CHEN, L. et al. Implementation of isogeometric fast multipole boundary element methods for 2d half-space acoustic scattering problems with absorbing boundary condition. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, 2018.

COMPOSITELAB. *Where Are Composites Used*. 2019. Disponível em: <<http://compositeslab.com/where-are-composites-used/>>.

COSTA, D. I. G. *Análise Numérica de Falhas em Materiais Compósitos Laminados Usando um Critério Baseado em Fenômenos Físicos*. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, Departamento de Engenharia Civil., Agosto 2011.

CRUSE, T.; SWEDLOW, J. *Interactive program for analysis and design problems in advanced composites technology*. [S.l.], 1971.

CRUSE, T. A. Numerical solution in three-dimensional elastostatic. *International Journal of Solids and Structure*, p. 1259–1274, 1969.

DIAS, A. B. J. *O método dos elementos de contorno rápido com expansão em múltiplos aplicado a problemas de elasticidade plana*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Integridade dos materiais, 2014.

DOMINGUEZ, J. *Computation of Stresses Near Anchor Plates: An Application of the Boundary Element Method*. Tese (Doutorado) — University of Seville, 1977.

DONGARRA, J.; SULLIVAN, F. The top 10 algorithms of the twentieth century. *Computing in Science and Engineering*, v. 2(1), p. 22–23, 2000.

DVORAK, G. *Micromechanics of Composite Materials*. 1. ed. [S.l.]: Springer Netherlands, 2013. (Solid Mechanics and Its Applications 186).

ESHELBY, J. D.; READ, W. T.; SHOCKLEY, W. S. Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory. *Acta Metallurgica*, Elsevier Science, v. 1, p. 251–259, 1953.

EVANS, J. D. The use of preconditioning in iterative methods for solving linear equations with symmetric positive definite matrices. *Journal of Applied Mathematics*, v. 4, p. 295–314, 1968.

FENLEY, M. et al. Fast adaptive multipole method for computation of electrostatic energy in simulations of polyelectrolyte DNA. *Journal of Computational Chemistry*, John Wiley and Sons, v. 17, p. 976–991, 1996.

FERRONATO, M. Preconditioning for sparse linear systems at the dawn of the 21st century: History, current developments, and future perspectives. *ISRN Applied Mathematics*, p. 1–49, 2012.

FOLTRAN, C. E. *Análise de Problemas Planos em Regime Elastoplástico pelo Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, Departamento de Engenharia Civil., Agosto 1999.

- FONG, W.; DARVE, E. The blackbox fast multipole method. *Journal of Computational Physics*, v. 228(23), p. 8712–8725, 2009.
- FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, v. 27, n. 1, p. 365–390, 1903.
- GARCIA-SANCHEZ, F.; SAEZ, A.; DOMINGUEZ, J. Two-dimensional time-harmonic bem for cracked anisotropic solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier Science, v. 30, p. 88–99, 2006.
- GARCIA-SANCHEZ, F.; ZHANG, C.; SAEZ, A. A two-dimensional time-domain boundary element method for dynamic crack problems in anisotropic solids. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier Science, v. 75, p. 1412–1430, 2008.
- GAUL, L.; KOGL, M.; WAGNER, M. *The Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. [S.l.]: Springer, 2002.
- GEE, A.; ERDELYI, B. Implementing the fast multipole boundary element method with high-order elements. In: *Proc. of North American Particle Accelerator Conference*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 518–520.
- GREEN, G. *An essay on the application on mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*. Tese (Doutorado) — T. Wheelhouse: Nottingham, 1828.
- GREENGARD, L.; HELSING, J. A new version of the fast multipole method for the laplace equation in three dimensions. *Acta Numerica*, p. 229–269, 1997.
- GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, v. 73, p. 325–348, 1987.
- GREENGARD, L. F. *The rapid evolution of potencial fields in particle systems*. Tese (Doutorado), 1987.
- GUMEROV, N. A. et al. Gpu accelerated fast multipole boundary element method for simulation of 3d bubble dynamics in potential flow. In: . [S.l.: s.n.], 2019.
- HACKBUSCH, W.; NOWAK, Z. P. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, v. 54(4), p. 463–491, 1989.
- HAITAO, W.; ZHENHAN, Y. Application of a new fast multipole bem for simulation of 2d elastic solid with large number of inclusions. *Acta Mechanica Sinica*, The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics; Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, v. 20, p. 613–622, 2004.
- HAITAO, W.; ZHENHAN, Y. A new fast multipole boundary element method for large scale analysis of mechanical properties in 3d particle-reinforced composites. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 7, p. 85–95, 2005.
- HANNANT, D. Fibre cements and fibre concretes. *Building and Environment*, Elsevier Science, v. 15, p. 200, 1980.
- HESTENES, M. R.; STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of research of the National Bureau of Standards*, v. 49, p. 409–436, 1952.

- HWU, C. *Anisotropic Elastic Plates*. 1. ed. [S.l.]: Springer US, 2010.
- JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory. i. *Proceedings Mathematical Physical Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 275, p. 23–32, 1963.
- JOHNSTON, C. D. Fibre cements and fibre concretes. *Advances in concrete technology*, Fiber-reinforced cement and concrete, p. 603–673, 1994.
- JONES, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. 2. ed. [S.l.]: Taylor Francis, 1999. (Materials Science Engineering Series).
- JUNICHIRO, M. Yet another fast multipole method without multipoles pseudoparticle multipole method. *Journal of Computational Physics*, v. 151, p. 910–920, 1999.
- KANE, J. H.; KEYES, D. E.; PRASAD, K. G. Iterative solution techniques in boundary element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 31, p. 1511–1536, 1991.
- KATSIKADELIS, J. *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists: Theory and Applications*. 2. ed. [S.l.]: Academic Press, 2016.
- KEBBIE-ANTHONY, A. B. et al. Fast multipole method for nonlinear, unsteady aerodynamic simulations. AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference, 2018.
- KLEUCIO, C. *Resolução de sistemas de equações lineares provenientes da simulação de estruturas fônicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2003.
- KOLEV, A. B. E. J. T. A simple strategy for varying the restart parameter in GMRES(M). *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier Science, v. 230, 2009.
- KRYLOV, A. N. On the numerical solution of the equation by which in technical questions frequencies of small oscillations of material systems are determined. *News of Academy of Sciences of the URSSR*, v. 7(4), p. 491–539, 1931.
- LANCZOS, C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, v. 45, n. 4, 1950.
- LAUTRUP, B. *Physics of Continuous Matter: Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World*. 2. ed. [S.l.]: CRC Press, 2011.
- LEKHNISTSKII, S. G. *Anisotropic plates*. [S.l.]: English translation, Gordon and Breach science publishers, 1968.
- LEKHNISTSKII, S. G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. [S.l.]: English translation, Mir Publishers, 1981.
- LIU, C. et al. Shape optimization of sound barrier using an isogeometric fast multipole boundary element method in two dimensions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier Science, v. 85, p. 142–157, 2017.
- LIU, Y. *Fast Multipole boundary element method - Theory and Applications in Engineering*. [S.l.]: Cambridge, 2009.

- LIU, Y.; NISHIMURA, N.; OTANI, Y. Large-scale modeling of carbon-nanotube composites by a fast multipole boundary element method. *Computational Materials Science*, Elsevier Science, v. 34, p. 173–187, 2005.
- LIU, Y. J.; LI, Y. X.; HUANG, S. A fast multipole boundary element method for solving two-dimensional thermoelasticity problems. *Computational Mechanics*, Springer, v. 54, p. 821–831, 2014.
- LIU, Y. J.; NISHIMURA, N. The fast multipole boundary element method for potential problems: a tutorial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 30(5), p. 371–381, 2006.
- MANSUR, W. J.; ARAUJO, F. C.; MALAGHINI, J. E. B. Solution of bem systems of equations via iterative techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 33, p. 1823–1841, 1992.
- MARTIN, H. S. *Elasticity. Theory, Applications, and Numerics*. [S.l.]: Academic Press, 2014.
- MIMOUNA, A.; PRIOUL, R. Closed-form approximations to borehole stresses for weak transverse isotropic elastic media. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Elsevier Science, 2017.
- MUKHERJEE, Y. X.; MUKHERJEE, S. The boundary node method for potential problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley and Sons, v. 40, p. 797–815, 1997.
- MULLEN, R.; RENCIS, J. Iterative methods for solving boundary element equations. *Computers Structures*, v. 25, p. 713–723, 1987.
- MUSKHELISHVILI, N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity: Fundamental Equations Plane Theory of Elasticity Torsion and Bending*. 1. ed. [S.l.]: Springer Netherlands, 1977.
- NERIS, E. M. *NI-GMRES Precondicionado*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014.
- NISHIMURA, N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Reviews*, v. 54, p. 299–324, 2002.
- PANDITTA, I. Deflection of structures using modified betti's theorem. *International Journal Aerospace Sciences*, 2013.
- PERNI, P. H. R. D. *Um Estudo sobre Métodos Iterativos na Solução de Sistemas de Equações Provenientes do Método dos Elementos de Contorno*. Tese (Doutorado) — COOPE/UFRJ, 2002.
- PESSANHA, J.; PAZ, A.; PRADA, R. Aplicação do método gmres em estudos de estabilidade de sistemas de energia elétrica. *Sba: Controle e Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, v. 23, p. 321–330, 06 2012.
- PRASAD, K. G. et al. Preconditioned krylov solvers for bea. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, p. 1651–1672, 1994.

- RICCIARDI, T.; WOLF, W.; BIMBATO, A. M. Fast multipole method applied to lagrangian simulations of vortical flows. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier Science, v. 51, p. 180–197, 2017.
- RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 25, p. 83–95, 1967.
- ROKHLIN, V. Rapid solution of integral equations os classical potencial theory. *Journal of Computational Physics*, Elsevier Science, v. 60, p. 187–207, 1985.
- SAAD, Y. *Iterative Methods for sparse linear systems*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- SAAD, Y.; SCHULTZ, M. H. Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 7, p. 856–869, 1986.
- SALDANHA, V. M. *Solução de sistemas lineares de grande porte com multiplos lados diretos*. Tese (Doutorado) — COOPE/UFRJ, 2010.
- SOLLERO, P. Fracture mechanis analysis of anisotropic laminates by the boundary element method. *University od Portsmouth*, 1994.
- SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. *Il Nuovo Cimento (1877-1894)*, v. 17, n. 1, p. 272–276, 1885.
- STROH, A. N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, Taylor Francis, v. 3, n. 30, p. 625–646, 1958.
- SYMM, G. T. An integral equation methods in potential theory, ii. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 275, p. 33–46, 1963.
- TAKAHASHI, T. et al. Optimizing the multipole-to-local operator in the fast multipole method for graphical processing units. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 89, p. 105–133, 2012.
- TAKAHASHI, Y.; WAKAO, S. Large-scale magnetic field analysis by the hybrid finite element-boundary element method combined with the fast multipole method. *Ieej Transactions on Industry Applications*, v. 126, p. 309–314, 2006.
- TING, T. Recent developments in anisotropic elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier Science, v. 37, p. 401–409, 2000.
- TING, T. C. T. *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications (Oxford Engineering Science Series)*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1996.
- VANNUCCI, P. *Anisotropic Elasticity*. [S.l.]: Springer, 2017. v. 85. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, v. 85).
- VERDE, A.; GHASSEMI, A. Fast multipole displacement discontinuity method (fm-ddm) for geomechanics reservoir simulations. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, John Wiley and Sons, 2015.

VIGNOLI, L. L.; SAVI, M. A. Multiscale failure analysis of cylindrical composite pressure vessel: A parametric study. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 15, 2018.

WAGENHOFFER, N.; MOORED, K.; JAWORSKI, J. Accelerated acoustic boundary element method and the noise generation of an idealized school of fish. In: _____. [S.l.: s.n.], 2019. p. 157–178.

WANG, H.; YAO, Z. Large-scale thermal analysis of fiber composites using a line-inclusion model by the fast boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier Science, v. 37, p. 319–326, 2013. ISSN 0955-7997.

WANG, Q. et al. Nurbs-enhanced line integration boundary element method for 2d elasticity problems with body forces. *Computers Mathematics with Applications*, Elsevier Science, 2018.

WANG, Q. et al. A nurbs-enhanced improved interpolating boundary element-free method for 2d potential problems and accelerated by fast multipole method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier Science, v. 98, p. 126–136, 2019.

WILLIAM, E. D.; JR, J. A. B. Fast fourier transform accelerated fast multipole algorithm. *Journal on Scientific Computing*, v. 17, p. 398–415, 1996.

YAO, Z.; KONG, F.; ZHENG, X. Simulation of 2d elastic bodies with randomly distributed circular inclusions using the bem. *Electronic Journal of Boundary Elements*, v. 1, p. 270–282, 10 2007.

YARVIN, N.; ROKHLIN, V. Generalized gaussian quadratures and singular value decompositions of integral operators. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 20, 01 1998.

YU, C.; REN, C.; BAI, X. Vrp-gmres(m) iteration algorithm for fast multipole boundary element method. *Mathematical and Computational Applications*, v. 21, 2016.

ZHANG, J. et al. A boundary face method for potential problems in three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley and Sons, v. 80, p. 320–337, 2009.

ZHU, X. et al. Fast multipole boundary element analysis of 2D viscoelastic composites with imperfect interfaces. *Science China Technological Sciences*, SP Science China Press, v. 53, p. 2160–2171, 2010.

**

Apêndice A

Operações do MECMP para núcleo T

Neste apêndice serão apresentadas as operações do MECMP para a primeira integral da equação (3.44). Tal integral está relacionada com o núcleo da solução fundamental de tração, dada pela equação (3.17). Os procedimentos para alcançarmos esses resultados são os mesmos apresentados no capítulo 3 para a equação integral associada com deslocamento. Assim, para evitarmos a repetição exageradas dos mesmos procedimentos, apresentaremos os resultados finais obtidos.

A.1 Expansão Multipolar do núcleo T

Considerando a equação (4.9), introduziremos os pontos os ponto intermediários z_{c_1} e z_{c_2} na função $G'(z_{o_1}, z_1)$, iremos encontrar que:

$$2\Re \int_{\Gamma} u_j(z) [G'(z_{o_1}, z_1) g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1}] d\Gamma(z) = 2\Re \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_{o_1} - z_{c_1}) \tilde{M}_k(z_{c_1}), \quad (\text{A.1})$$

onde o *momento* \tilde{M}_k é definido como:

$$\tilde{M}_k(z_{c_1}) = \int_{\Gamma_c} u_j(z) g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} I_{k-l}(z_1 - z_{c_1}) d\Gamma(z) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.2})$$

O resultado para função $G'(z_{o_2}, z_2)$ é dada por:

$$2\Re \int_{\Gamma} u_j(z) [G'(z_{o_2}, z_2) g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2}] d\Gamma(z) = 2\Re \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_{o_2} - z_{c_2}) \tilde{M}_k(z_{c_2}), \quad (\text{A.3})$$

onde:

$$\tilde{M}_k(z_{c_2}) = \int_{\Gamma_c} u_j(z) g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} I_{k-l}(z_2 - z_{c_2}) d\Gamma(z) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.4})$$

A.2 Translação momento para momento (M2M)

Considerando que os pontos intermediários z_{c_i} foram movidos para uma nova posição z'_{c_i} , temos o seguinte resultado para ponto z'_{c_1} :

$$\tilde{M}_k(z'_{c_1}) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_{c_1} - z'_{c_1}) \tilde{M}_l(z_{c_1}), \text{ for } k \geq 0, \quad (\text{A.5})$$

onde:

$$\tilde{M}_l(z_{c_1}) = \int_{\Gamma_c} t_j(z) g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} I_l(z_1 - z_{c_1}) d\Gamma(z) \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.6})$$

Para o ponto z'_{c_2} , temos:

$$\tilde{M}_k(z'_{c_2}) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_{c_2} - z'_{c_2}) \tilde{M}_l(z_{c_2}), \text{ for } k \geq 0, \quad (\text{A.7})$$

onde:

$$\tilde{M}_l(z_{c_2}) = \int_{\Gamma_c} t_j(z) g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} I_l(z_2 - z_{c_2}) d\Gamma(z) \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.8})$$

A.3 Expansão Local e translação momento para local (M2L)

Para realizar a expansão do ponto fonte, considere dois pontos, z_{L_1} e z_{L_2} , introduzidos perto do ponto fonte z_{o_1} e z_{o_2} . Sendo assim, rescreveremos a equação integral levando em consideração a seguinte aproximação $|z_{o_i} - z_{L_i}| \ll |z_{L_i} - z_{c_i}|$:

$$2\Re \int_{\Gamma} t_j(z) [g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} G'(z_{o_1}, z_1)] d\Gamma(z) = 2\Re \left[\sum_{l=0}^{\infty} \tilde{L}_k(z_{L_1}) I_l(z_{o_1} - z_{c_1}) \right], \quad (\text{A.9})$$

$$2\Re \int_{\Gamma} t_j(z) [g_{i1}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} G'(z_{o_2}, z_2)] d\Gamma(z) = 2\Re \left[\sum_{l=0}^{\infty} \tilde{L}_k(z_{L_2}) I_l(z_{o_2} - z_{c_2}) \right], \quad (\text{A.10})$$

sendo que a *translação momento para local* é:

$$\tilde{L}_k(z_{L_1}) = (-1)^k \left[\sum_{k=0}^{\infty} O_{k+l}(z_{L_1} - z_{c_1}) \right] \tilde{M}_k(z_{c_1}), \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{L}_{k_2}(z_{L_2}) = (-1)^k \left[\sum_{k=0}^{\infty} O_{k+l}(z_{L_2} - z_{c_2}) \right] \tilde{M}_k(z_{c_2}), \quad (\text{A.12})$$

A.4 Translação local para local(L2L)

A última operação do método rápido com expansão em multipolos é a translação dos pontos \mathbf{z}_{L_1} e \mathbf{z}_{L_2} para as posições \mathbf{z}'_{L_1} e \mathbf{z}'_{L_2} . Portanto:

$$2\Re \int_{\Gamma} t_j(z) [q_{i1} A_{j1} G'(z_{o1}, z_1)] d\Gamma(z) = 2\Re \sum_{l=0}^p \tilde{L}_l(z'_{L_1}) \tilde{I}_l(z_{o1} - z'_{L_1}), \quad (\text{A.13})$$

sendo que a *translação local* de z_{L_1} para z'_{L_1} :

$$\tilde{L}_l(z'_{L_1}) = \sum_{m=0}^{p-l} I_m(z'_{L_1} - z_{L_1}) L_{l+m}(z_{L_1}). \quad (\text{A.14})$$

O mesmo resultado pode ser obtido de z_{L_2} para z'_{L_2} :

$$2\Re \int_{\Gamma} t_j(z) [q_{i2} A_{j2} G(z_{o1}, z_2)] d\Gamma(z) = 2\Re \sum_{l=0}^p L_l(z'_{L_2}) I_l(z_{o2} - z'_{L_2}), \quad (\text{A.15})$$

sendo que a *translação local para local* para essa configuração é dada por:

$$L_l(z'_{L_2}) = \sum_{m=0}^{p-l} I_m(z'_{L_2} - z_{L_2}) L_{l+m}(z_{L_2}). \quad (\text{A.16})$$