

TESE DE DOUTORADO

**Estimação Adaptativa para Sistemas Não-Lineares
em Malha Fechada e Teoria de Planicidade Diferencial**

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

Brasília, Agosto de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

TESE DE DOUTORADO

**Estimação Adaptativa para Sistemas Não-Lineares
em Malha Fechada e Teoria de Planicidade Diferencial**

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica
da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como requisito parcial
para obtenção do grau de Doutor em Sistemas Mecatrônicos.*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Eugênio L. F. Fortaleza, ENM/UnB
Orientador

Prof. Dr. José Alfredo Ruiz Vargas, ENE/UnB
Examinador interno

Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara, ENE/UnB
Examinador externo

Dr. Mário César M. M. de Campos,
CENPES/Petrobras
Examinador externo

FICHA CATALOGRÁFICA

LIMAVERDE FILHO, JOSÉ ONIRAM DE AQUINO

Estimação Adaptativa para Sistemas Não-Lineares em Malha Fechada e Teoria de Planicidade Diferencial

[Brasília, Distrito Federal] 2019.

ix, 108p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Doutor, Sistemas Mecatrônicos, 2019).

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|-------------------------------------|------------------------|
| 1. Filtro de Kalman Adaptativo | 2. Controle Não-Linear |
| 3. Sistemas Diferencialmente Planos | 4. Entradas Planas |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LIMAVERDE FILHO, J. O. A. (2019). Estimação Adaptativa para Sistemas Não-Lineares em Malha Fechada e Teoria de Planicidade Diferencial, Tese de Doutorado em Sistemas Mecatrônicos, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 108p.

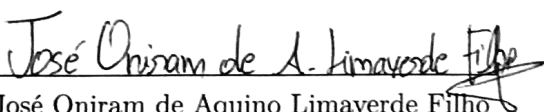
CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: José Oniram de Aquino Limaverde Filho

TÍTULO: Estimação Adaptativa para Sistemas Não-Lineares em Malha Fechada e Teoria de Planicidade Diferencial.

GRAU: Doutor ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.


José Oniram de Aquino Limaverde Filho

CCSW 04 Lote 04 Bloco A Apto 413

Setor Sudoeste - Brasília - DF - Brasil

CEP 70680-471 - joseoniram@ieee.org

Dedicatória

Aos meus amados pais e a minha querida Yasmin.

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

Agradecimentos

Se o desafio era enorme, as motivações eram grandiosas. Certamente não foi fácil, mas valeu a pena cada esforço ao longo dessa árdua jornada para obter o grau de Doutor. Agora que alcancei esse tão sonhado objetivo, não poderia deixar de reconhecer aquelas pessoas que foram fundamentais nesse processo. Portanto, sendo as últimas palavras postas neste manuscrito, não há dúvida que esse espaço é o que mais guardarei com carinho.

Em primeiro lugar, agradeço aos meus amados pais, José Oniram Limaverde e Natércia Linard, pelo amor incondicional e por serem as melhores referências que eu podia seguir nessa vida. Apesar da distância continuar sendo uma barreira física, jamais será um obstáculo à nossa convivência diária. Essa vitória é nossa! Agradeço também a toda família que sempre me incentivou, em especial, Vó Nair, Vó Noêmia, Vó Sinhá, Lúcia Silva, Wanks Limaverde, Lorena Limaverde, Tio João, Tia Lucinha e ao meu primo-irmão Diogenes Linard. Uma lembrança especial a “família Buscapé” de Brasília que sempre torceu pelo meu sucesso.

Em segundo lugar, à minha querida Yasmin Faro, a quem também dedico este trabalho. Certamente quem mais vivenciou ao meu lado todos desafios e conquistas como Pós-Graduando nesses mais de 7 anos de amor e companheirismo. As suas sábias palavras sempre me guiaram a buscar ser uma pessoa melhor a cada dia e, conseqüentemente, um melhor profissional.

Ao meu orientador e amigo, Prof. Eugênio Fortaleza, agradeço por mais uma orientação ao longo da minha carreira acadêmica. Receber o título de Doutor por seu intermédio sempre estará marcado na minha memória. Não tenho dúvidas que a sua confiança no meu trabalho foi uma das minhas maiores motivações para chegar até aqui.

Também agradeço àqueles que tornaram única a minha experiência como Professor substituto no Instituto Federal de Brasília Campus Taguatinga. Foram meses de aprendizados da vida docência que fundamentaram a minha escolha profissional. Em especial a todos meus alunos (EMI, Técnico e Superior) que me impactaram dentro e fora da sala de aula. Agradeço também ao Leonardo Leódido, Rodrigo Maia, Rinaldo Rezende, Gabriel Negrão, Sérgio Cruz, Dhiego Loiola, João Marcelo, Lucas Paes, Bruno Macedo, Érico Santana, Tiago Trindade, Marlon Soudré, Diana Brandão, Marcus Sá, Eryc Leão, Pablo Josué, Reinaldo de Jesus, Cleide Simões, Elton Mourão e Flávia Dias por toda cordialidade durante esse período.

Não poderia deixar de agradecer a todos com quem me relacionei graças ao IEEE. Sem dúvidas, a minha vida como Pós-graduando está altamente relacionada com o voluntariado do IEEE, cujo impacto na minha carreira profissional foi e será constante. Em especial ao Prof. Ricardo Jacobi e ao Akira Toyama, cujas parcerias foram fundamentais para o crescimento da IEEE Seção Centro-Norte Brasil.

Agradecer também ao apoio dos meus irmãos de Fé, seja assistindo aos jogos do São Paulo, seja na convivência diária.

Ao meu querido grupo de amigos caçadores de monstros virtuais, cuja amizade e respeito ultrapassaram as barreiras do jogo no último ano, o suporte de vocês certamente contribuiu para trazer mais alegria nessa reta final do Doutorado.

Aos amigos de Fortaleza e de Brasília, que mesmo eu estando mais ausente nos últimos anos, nunca deixaram de acreditar no meu sucesso profissional. A vocês, o meu muito obrigado.

Por fim, a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho, os meus sinceros agradecimentos.

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES EM MALHA FECHADA E TEORIA DE PLANICIDADE DIFERENCIAL

Autor: José Oniram de Aquino Limaverde Filho

Orientador: Prof. Dr. Eugênio Libório Feitosa Fortaleza

O projeto de sistemas de controle representa um dos campos mais ativos de pesquisa devido às diversas aplicações, em especial, nas engenharias. Uma típica abordagem da teoria de controle em sistemas modernos consiste na análise da evolução temporal dos estados do sistema, os quais, na prática, nem sempre são possíveis de medir através de mecanismos físicos. Com isto, é cada vez mais notória a utilização do filtro de Kalman e suas extensões, tornando-se o mais famoso dos algoritmos para estimação de estados. Entretanto, o caráter ótimo do filtro de Kalman está altamente relacionado a determinadas hipóteses, dentre elas a linearidade do sistema e o conhecimento prévio das matrizes de covariância dos ruídos que agem sob a planta.

Dentro desse contexto, esta tese de doutorado propõe metodologias de estimação adaptativa para sistemas não-lineares em malha fechada baseadas no filtro de Kalman e na teoria de planicidade diferencial com o objetivo de lidar tanto com o completo desconhecimento da matriz de covariância do ruído de processo quanto considerar a influência do vetor de estimativas de estado no sinal de controle.

A partir de simulações numéricas, ilustrou-se o desempenho em malha fechada das metodologias propostas nesta tese para um conjunto diversificado de sistemas dinâmicos. Graças à estimação e atualização em tempo real da matriz de covariância do ruído de processo, vislumbrou-se uma contribuição favorável dessas metodologias no que se diz respeito ao rastreamento das referências especificadas e à redução dos níveis de esforços nos atuadores.

Palavras Chaves: Filtro de Kalman Adaptativo, Controle Não-Linear, Sistemas Não-lineares Diferencialmente Planos, Entradas Planas, Estimação de Estados, Média Móvel Exponencial

ADAPTIVE ESTIMATION FOR NONLINEAR CLOSED LOOP SYSTEMS AND DIFFERENTIAL FLATNESS THEORY

Author: José Oniram de Aquino Limaverde Filho

Supervisor: Prof. Dr. Eugênio Libório Feitosa Fortaleza

Control system design represents one of the most active fields of research due to its diverse applications, especially in engineering. A typical control theory approach in modern systems corresponds to the analysis of the temporal evolution of system states, which in practice are not always possible to be measured through physical mechanisms. In line with this, the use of the Kalman filter and its extensions is becoming more noticeable, making it the most famous state estimation algorithm. However, its optimality is highly related to certain hypotheses, among them the system linearity and the *a priori* knowledge of the noise statistics.

Within this context, this doctoral thesis proposes adaptive estimation methods for nonlinear closed-loop systems based on Kalman filtering and differential flatness theory to deal with the cases where the process noise covariance is unknown. The main goal is to implement an adaptive estimation of the process noise covariance that considers the influence of the state vector estimates on the control signal.

From numerical simulations, the closed-loop performance of the methodologies proposed in this manuscript was illustrated for a diverse set of dynamic systems. Due to the real-time estimation and updating of the process noise covariance matrix, a favorable contribution of these methodologies was observed regarding the tracking of the specified references and the reduction of the effort levels in the actuators.

Keywords: Adaptive Kalman Filter, Nonlinear Control, Differentially Flat Nonlinear Systems, Flat Inputs, State Estimation, Exponential Moving Average

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO.....	1
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
1.3	PROPOSTA DO TRABALHO	7
1.4	OBJETIVO GERAL	8
1.5	DESCRIÇÃO DO MANUSCRITO	8
2	Estimação Adaptativa e Sistemas Lineares	10
2.1	INTRODUÇÃO.....	10
2.2	FILTRO DE KALMAN DISCRETO	11
2.3	FILTRO DE KALMAN ADAPTATIVO.....	12
2.3.1	ANÁLISE CONJUNTA EM MALHA FECHADA DE COVARIÂNCIAS DO SISTEMA E DO FILTRO	13
2.3.2	ESTIMAÇÃO DA COVARIÂNCIA DO VETOR DE MEDIÇÕES	17
2.3.3	ESTRUTURA DO FILTRO DE KALMAN ADAPTATIVO	19
2.4	ESTUDO DE CASO	19
2.5	CONCLUSÕES	24
3	Estimação Adaptativa e Teoria de Planicidade Diferencial	26
3.1	INTRODUÇÃO.....	26
3.2	SAÍDAS PLANAS	27
3.2.1	SISTEMAS LINEARES	28
3.2.2	SISTEMAS NÃO-LINEARES.....	31
3.2.3	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA.....	32
3.2.4	ACOMPANHAMENTO DE TRAJETÓRIA	33
3.3	FILTRO DE KALMAN SEM DERIVADAS ADAPTATIVO	35
3.4	ESTUDO DE CASO	36
3.4.1	SISTEMA BOLA E BARRA	36
3.5	CONCLUSÕES	43
4	Estimação Adaptativa e Entradas Planas	44
4.1	INTRODUÇÃO.....	44
4.2	SISTEMAS LIOUVILIANOS	45

4.3	ENTRADAS PLANAS	46
4.4	ESTRUTURA DO CONTROLADOR	49
4.5	FILTRO DE KALMAN SEM DERIVADAS ADAPTATIVO POR ENTRADAS PLANAS .	51
4.6	ESTUDO DE CASOS.....	52
4.6.1	SISTEMA DE LORENZ	52
4.6.2	PROCESSO DE QUATRO TANQUES.....	59
4.6.3	NAVIO DE SUPERFÍCIE.....	68
4.7	CONCLUSÕES	78
5	Conclusões.....	79
5.1	AVALIAÇÃO DA METODOLOGIA DESENVOLVIDA.....	80
5.1.1	ASPECTOS POSITIVOS	80
5.1.2	ASPECTOS A APRIMORAR	80
5.2	CONTRIBUIÇÕES	81
5.3	PARTICIPAÇÃO EM PROJETO DE PESQUISA.....	81
5.4	PUBLICAÇÕES	81
5.5	RECOMENDAÇÕES E TRABALHOS FUTUROS	83
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84

LISTA DE FIGURAS

1.1	Problema de estimação representado através do diagrama de blocos.....	2
2.1	Estrutura cíclica do filtro de Kalman.....	10
2.2	Estrutura cíclica do filtro de Kalman adaptativo proposto.	19
2.3	Evolução temporal dos sinais de saída.	21
2.4	Evolução temporal dos sinais de controle.....	21
2.5	Erro de estimativa para os estados não-medidos.....	22
3.1	Diagrama de blocos para o filtro de Kalman sem derivadas adaptativo (ADKF).....	36
3.2	Esquemático do sistema bola e barra.....	37
3.3	Evolução temporal dos sinais de saída e de controle.....	41
3.4	Erro de estimação para as derivadas temporais da saída plana (Estados não-medidos).	41
4.1	Estrutura do controlador a partir de uma abordagem com entradas planas	50
4.2	Estrutura do estimador proposto a partir de uma abordagem por entradas planas. ..	51
4.3	Evolução temporal dos sinais de saída e de controle.....	57
4.4	Evolução temporal dos estados remanescentes do sistema de Lorenz.	57
4.5	Erro de estimação para as derivadas temporais da saída plana (Estados não-medidos).	58
4.6	Evolução temporal dos sinais de saída e de entrada.	58
4.7	Diagrama esquemático do sistema de quatro tanques.....	59
4.8	Evolução temporal dos sinais de saída.	66
4.9	Evolução temporal dos estados remanescentes do processo de quatro tanques.	66
4.10	Evolução temporal dos sinais de controle.....	66
4.11	Erro de estimação para as derivadas temporais das saída planas (Estados não-medidos).	67
4.12	Sistemas de coordenadas de referência	68
4.13	Sistemas de coordenadas de referência	70
4.14	Evolução temporal da posição do centro geométrico do navio no plano $X_{Terra}Y_{Terra}$	75
4.15	Evolução temporal dos sinais de saída.	76
4.16	Evolução temporal dos sinais das saída planas.....	76
4.17	Evolução temporal dos estados remanescentes do navio de superfície.....	76
4.18	Evolução temporal dos sinais de controle.....	76
4.19	Erro de estimação para as derivadas temporais das saída planas (Estados não-medidos).	77

LISTA DE TABELAS

2.1	Índices de desempenho de controle (Primeira metade)	23
2.2	Índices de desempenho de controle (Segunda metade)	23
2.3	Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos (Primeira Metade).	24
2.4	Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos (Segunda Metade).	24
3.1	Parâmetros do sistema Bola e Barra.....	40
3.2	Índices de desempenho de controle.....	42
3.3	Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos.....	42
4.1	Índices de desempenho de controle.....	58
4.2	Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos.....	58
4.3	Configuração do processo de quatro tanques.	62
4.4	Parâmetros do processo de quatro tanques.	65
4.5	Índices de desempenho de controle.....	67
4.6	Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos.....	67
4.7	Índices de desempenho de controle.....	77
4.8	Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos.....	77

LISTA DE SÍMBOLOS

Notação

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	Espaço euclidiano n -dimensional
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais com dimensões $n \times m$
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
κ^C	Índices de controlabilidade de Kronecker
κ^O	Índices de observabilidade
α	Coefficiente de ponderação da média móvel exponencial
$ad_f g$	Parêntese de Lie ou adjunta de g
$L_f h$	Derivada de Lie
$E[\bullet]$	Operador de esperança matemática
$cov[\bullet]$	Operador de covariância
$var[\bullet]$	Operador de variância
$diag\{\bullet\}$	Matriz diagonal
$posto(\bullet)$	Posto de uma matriz
$det(\bullet)$	Determinante de uma matriz
$exp[\bullet]$	Exponencial
A^T	Matriz transposta da matriz A
A^{-1}	Matriz inversa da matriz A
Δt	Intervalo de amostragem
t_s	Tempo de simulação
n	Dimensão do vetor de estados
m	Dimensão do vetor de controle
p	Dimensão do vetor de saídas e do vetor de ruído de medição
n_w	Dimensão do vetor de ruídos de processo

Subscritos

<i>LVM</i>	Referente aos sistemas lineares variantes no tempo MIMO
<i>LVS</i>	Referente aos sistemas lineares variantes no tempo SISO
<i>NLS</i>	Referente aos sistemas não-lineares SISO
<i>FIM</i>	Referente às entradas planas para sistemas não-lineares MIMO
<i>FIS</i>	Referente às entradas planas para sistemas não-lineares SISO
<i>b</i>	Referente ao sistema linear na forma canônica de Brunovsky
<i>E</i>	Referente às entradas planas
<i>L</i>	Referente ao sistema não-linear de Lorenz
<i>N</i>	Referente ao sistema não-linear de um navio de superfície subatuado

Sobrescritos

\cdot	Variação temporal
(3)	Terceira derivada temporal
(4)	Quarta derivada temporal
*	Referente ao valor nominal da variável
<i>Brunovsky</i>	Referente ao sistema linear na forma canônica de Brunovsky
<i>NL</i>	Referente ao sistema não-linear em estudo

Matrizes e Vetores

<i>x</i>	Vetor de estados
<i>u</i>	Vetor de controle
<i>y</i>	Vetor de saída
<i>y_z</i>	Vetor de saídas planas
<i>Z</i>	Vetor de estados na forma canônica de Brunovsky
<i>v</i>	Vetor de controle na forma canônica de Brunovsky
<i>C_K</i>	Matriz de controlabilidade de Kalman
<i>E_O</i>	Matriz de observabilidade
γ_S	Campo vetorial de entrada para sistemas não-lineares SISO
γ_M	Campo vetorial de entrada para sistemas não-lineares MIMO
<i>w</i>	Vetor de ruído de processo
<i>v</i>	Vetor de ruído de medição
<i>Q</i>	Matriz de covariância do ruído de processo
\hat{Q}	Valor estimado para a matriz de covariância do ruído de processo
<i>R</i>	Matriz de covariância do ruído de medição
<i>P</i>	Matriz de covariância dos estados
$\mathbf{0}_{n \times n}$	Matriz de zeros com dimensão $n \times n$
$\mathbf{I}_{n \times n}$	Matriz identidade com dimensão $n \times n$

Siglas

ADKF	Filtro de Kalman sem Derivadas Adaptativo
AKF	Filtro de Kalman Adaptativo
DKF	Filtro de Kalman sem Derivadas
EKF	Filtro de Kalman Estendido
EMA	Média Móvel Exponencial
IAE	Integral do Erro Absoluto
IIR	Filtro de resposta ao Impulso de duração Infinita
ISE	Integral do Erro Quadrático
ITAE	Integral do Erro Absoluto ponderada pelo Tempo
KF	Filtro de Kalman
LIT	Linear Invariante no Tempo
MAE	Erro Absoluto Médio
MIMO	Multi-Input Multi-Output
ML	Estimador de Máxima Verossimilhança
MT	Algoritmo de Myers e Tapley
PID	Proporcional Integrador Derivativo
RMSE	Raiz do Erro Quadrático Médio
SISO	Single-Input Single-Output
TVC	Variação Total da Ação do Controle
UKF	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

O controle de sistemas dinâmicos é, atualmente, um dos campos mais ativos de pesquisa devido às diversas aplicações na vida real. Embora o início do estudo acerca desses sistemas remonte a Euler e Lagrange em 1700, observa-se o surgimento de sistemas de controle voltados para regulação de motores a vapor somente a partir de 1850. Durante o século passado, uma série de outras aplicações científicas, industriais e militares motivou a análise rigorosa e projeto de controle desses sistemas [1].

Para tais aplicações, estratégias de controle são normalmente usadas em sistemas que apresentam estruturas lineares ou em aproximações de sistemas não-lineares em torno de pontos de operação. No entanto, a natureza teórica desafiadora de análise do comportamento de sistemas dinâmicos não-lineares, além de restrições de atuação, de medição e de faixa de operação, atraíram muitos matemáticos a proporem alternativas aos projetos clássicos de controladores para tais sistemas. Como resultado, os esforços de engenheiros e cientistas em conjunto levaram ao desenvolvimento do Controle Ótimo, do Controle Robusto, do Controle Adaptativo e de outras teorias de controle não-lineares [1].

Uma típica abordagem da teoria de controle em sistemas modernos consiste na análise da evolução temporal dos estados do sistema, os quais representam toda a informação necessária para representar a sua dinâmica em um ponto desejado de operação. Além disso, o correto conhecimento acerca dos estados nos permite realizar as seguintes tarefas [2]:

- **Projeto de sistemas de controle por realimentação de estados.** Uma variedade de técnicas de controle de sistemas dinâmicos assume a hipótese de conhecimento completo dos estados do modelo. Dentre elas, pode-se citar o regulador Linear-Quadrático-Gaussiano (LQG) que representa um dos problemas mais fundamentais na teoria de controle ótimo.
- **Monitoramento de Processos.** Por exemplo, o engenheiro naval necessita das informações acerca da posição e velocidade de um veículo marítimo a fim de garantir que o mesmo siga uma trajetória desejada. Para um robô autônomo, é fundamental que se conheça a

sua posição em relação a um referencial inercial de tal forma a mantê-lo em direção a seu destino. Na indústria química, é fundamental o acompanhamento da evolução temporal da temperatura em reatores de processo químicos para fins de segurança.

- **Detecção de falhas e prognósticos.** Como consequência direta do monitoramento de sistemas dinâmicos, vislumbra-se a possibilidade de analisar a evolução temporal dos estados com o objetivo de buscar padrões que indicariam a presença de falhas em uma planta e fazer previsões sobre quando um atuador vai parar de funcionar, esse tipo de análise se torna fundamental a fim de garantir segurança ao sistema e de prevenir possíveis acidentes, como já vem sendo utilizada através do uso de gêmeos digitais na indústria (do inglês *digital twin*).

Por outro lado, em aplicações reais, nem sempre é possível medir todos os estados de um sistema. Primeiramente, exige-se o uso de sensores específicos dependendo da planta, o que pode, às vezes, tornar um projeto de engenharia economicamente inviável. Além do mais, alguns estados podem ser impossíveis de serem medidos fisicamente por serem somente uma representação matemática mais viável ao problema, tais como a parametrização da atitude para veículos aéreos ou subaquáticos [2]. Por esses motivos, métodos de estimação de estados desempenham um papel importante em diversos campos da Ciência e Engenharia [3].

Dentro desse contexto, a base da teoria de estimação consiste em, a partir dos dados de um sinal observado/medido da planta, ser possível estimar os valores de um outro sinal que não pode ser diretamente acessado ou que está corrompido por ruídos e/ou perturbações. Mais precisamente, deseja-se projetar um estimador que seja capaz de fornecer as estimativas \hat{x} do vetor de estados x a partir do sinal y medido da planta, ambos estimulados por um sinal de entrada u , conforme ilustrado resumidamente na Figura 1.1.

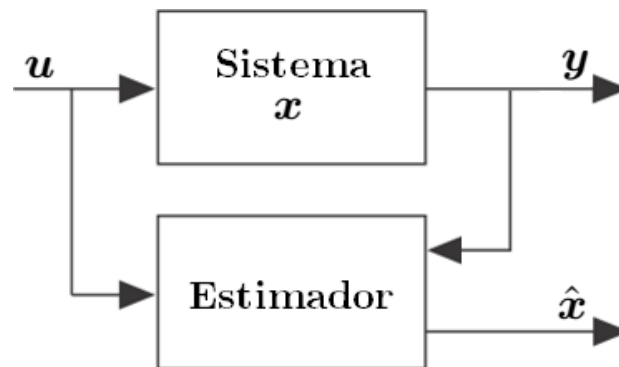


Figura 1.1: Problema de estimação representado através do diagrama de blocos.

Além disso, ressalta-se que problemas relacionados a estimação geralmente são caracterizados por uma forte dependência do conhecimento tanto da estrutura de um modelo, que deve ser coerente com o processo físico, como do correto valor de seus parâmetros [4]. Sendo este último a ser considerado de forma mais aprofundada ao longo do presente estudo.

1.2 Revisão Bibliográfica

Esta seção tem como objetivo descrever diferentes trabalhos encontrados na literatura. A revisão bibliográfica realizada durante o desenvolvimento do trabalho abrangeu a estimação de estados para sistemas dinâmicos. Uma breve visão histórica recente e artigos relacionados a este assunto podem ser visto a seguir.

O início da utilização de computadores digitais influenciou diretamente na evolução da teoria de estimação no final dos anos 50 e início dos 60 [5]. De fato, os trabalhos anteriores se estruturavam a partir da hipótese de assumir que os processos eram estacionários [6, 7], a qual se mostrou inadequada em aplicações em que os sinais e os ruídos são não-estacionários.

Dado essas circunstâncias, Kalman [8] apresenta sua importante contribuição para a teoria de filtragem ao propor uma solução recursiva para o problema de filtragem e de predição. Para isso, utilizou-se da capacidade de processamento e de armazenamento dos computadores digitais em contrapartida aos que necessitavam de processamento analógico por meio de elementos ativos e passivos [9]. Além disso, a abordagem de Kalman estendeu a teoria de estimação no sentido de permitir o tratamento de processos não-estacionários, sendo essa nova teoria ficando conhecida como o filtro de Kalman (KF).

Assim, evidenciou-se, cada vez mais, a utilização do KF e suas extensões, tornando-se o mais famoso dos algoritmos para estimação de estados [10]. Após inicialmente alcançar grande relevância em aplicações da indústria aeroespacial [11], a formulação genérica do filtro permitiu que o mesmo fosse implementado em diferentes campos de pesquisa, tais como processamento de imagens [12], controle [13], telecomunicações [14], navegação [15], economia [16], meteorologia [17], eletrônica de potência [18] e medicina [19, 20].

Embora seu grande sucesso, o caráter ótimo do KF está fortemente relacionado as hipóteses que o sistema dinâmico seja linear, cujo modelo deve ser conhecido precisamente *a priori*, e que os ruídos de processo e de medida sejam variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas com média nula e matrizes de covariância conhecidas. Na prática, essas hipóteses são dificilmente asseguradas, resultando na deterioração do desempenho do filtro [21, 22].

Nesse contexto, na literatura, diferentes métodos foram propostos a fim de estimar as matrizes de covariância dos ruídos em sistemas descritos por meio de uma representação de espaço de estados [23–36]. Tradicionalmente, como descrito em Mehra [37], esses métodos podem ser divididos em quatro categorias:

- *Métodos Bayesianos* [23–26]: Tanto o estado atual como as matrizes de covariância são estimados a partir da função de densidade de probabilidade condicional às observações. Por ser uma técnica computacionalmente custosa, aplicações em tempo real são descartadas.
- *Métodos de Correspondência de Covariância* [27–29]: Utiliza-se a esperança residual das medidas para estimar as matrizes de covariância, porém tal abordagem é conhecida por fornecer estimações enviesadas em relação as verdadeiras covariâncias.

- *Métodos de Correlação* [30–33]: Baseia-se principalmente na análise de correlação do resíduo das medidas como estratégia para recuperar a informação dos ruídos da planta. Normalmente, esta abordagem exige um janela de informações grande, o que pode se tornar impraticável par aplicações em tempo real.
- *Métodos Máxima Verossimilhança* [34–36]: Busca-se maximizar uma função de verossimilhança que depende tanto do modelo em espaço de estados linear como das matrizes de covariância, sendo essas últimas consideradas como únicas incógnitas. No entanto, a convergência não é garantida por utilizar um algoritmo iterativo para resolver a otimização, além de ser fortemente dependente da condição inicial do problema.

Diversos trabalhos fornecem mais detalhes desses métodos segundo suas propriedades, vantagens, limitações e suposições relacionadas à descrição do sistema (para mais detalhes, veja em [37–39] e em suas respectivas referências).

Recentemente, segundo o trabalho de Duník *et al.* em [40], os métodos mencionados anteriormente e recentes avanços foram resumidos em uma perspectiva unificadora através de duas categorias fundamentais. A primeira agrupa métodos onde as matrizes de covariância dos ruídos são estimados simultaneamente com as variáveis de estado desconhecidas, sendo assim algoritmos inerentemente adaptativos. Enquanto isso, a segunda categoria abrange os métodos em que uma análise estatística da sequência de inovação é usada para estimar as matrizes de covariância dos ruídos e, portanto, podendo servir como um componente de aprendizagem para sistemas adaptativos.

Em paralelo, alcançou-se progresso no que se diz respeito a lidar com casos em que a suposição do KF em relação à linearidade do sistema é violada. Uma maneira intuitiva de estendê-lo para sistemas não-lineares se baseou em aproximar as não-linearidades das equações do sistema dinâmico pelas respectivas expansões em série de Taylor de primeira ordem, a qual foi denominada de filtro de Kalman estendido [41] (EKF, do inglês *Extended Kalman Filter*). Esse procedimento é conhecido por ser eficiente em diferentes aplicações de controle para sistemas não-lineares, como observado em [42–45]. No entanto, o algoritmo é caracterizado por erros acumulativos devido a hipótese de linearização local para o cálculo da média e da covariância de uma variável aleatória, podendo afetar a acurácia da estimação do vetor de estado ou até mesmo oferecer riscos a estabilidade do observador em malha fechada.

Como alternativa viável ao EKF, Julier e Uhlmann [46] introduziram o filtro de Kalman *unscented* (UKF, do inglês *Unscented Kalman Filter*). Além de não necessitar da linearização Jacobiana das equações do sistema, destaca-se por usar o modelo não-linear para propagar um conjunto de pontos de amostragem escolhidos deterministicamente. Tais pontos de amostragem progressivamente convergem para os valores reais de média e covariância, os quais são usados para aproximar a distribuição de estado no UKF.

Entre outras vantagens em relação ao EKF, pode-se citar a presença de um erro de estimação menor e de ser possível aplicar em funções não-diferenciáveis [47], além de apresentar um custo computacional da mesma ordem do EKF [48]. Apesar da sua recente popularidade, o algoritmo

convencional do UKF não tem capacidade de se adaptar contra incertezas no sistema tais como variações paramétricas no processo ou perturbações externas [49]. Ressalta-se também que uma interpretação conhecida do UKF é que o algoritmo implementa uma linearização estatística, o que também pode acarretar em resultados inesperados [50].

Como resultado desses estudos, abordagens adaptativas do KF e suas respectivas variantes não-lineares que permitissem estimar as matrizes de covariância de ruído de processo e de medida foram propostas nas mais diversas aplicações.

Em [51], utilizou-se um EKF adaptativo, que empregava uma abordagem de correspondência de variância para estimar os perfis estatísticos dos ruídos, para incrementar a acurácia e a robustez da estimação em sistemas de baterias para veículos elétricos. De forma similar, Partovibakhsh e Liu [52] apresentaram um UKF adaptativo para estimar tanto os parâmetros estruturais quanto as variáveis de estado para uma bateria de íon-lítio. Para isso, utilizaram uma técnica de correspondência de covariância baseada na sequência residual da tensão de saída a fim de atualizar as matrizes de covariância dos ruídos. Já em Peng *et al.* [53], derivou-se um UKF adaptativo que conta com um estimador das estatísticas dos ruídos baseado em uma versão modificada do método de Sage-Husa, visando assim aperfeiçoar o processo de estimação em sistemas de armazenamento de energia de bateria em larga escala.

Outra metodologia adaptativa do UKF para lidar com o desconhecimento *a priori* dos perfis estatísticos dos ruídos do sistema baseia-se em combinar conceitos de janelamento e ponderação aleatória, como descrito em [54]. Nos casos em que somente se assume o desconhecimento da matriz de covariância do ruído de processo, Wang *et al.* [55] derivaram um processo de estimação ao analisar as propriedades estatísticas da sequência de medições do KF convencional seguindo elementos teóricos relacionados a lei dos grandes números. Em [56], propõe-se um UKF adaptativo baseado em um novo método de classificação de estradas que utiliza sinais medidos do veículo sob várias condições da estrada para adquirir com precisão a covariância do ruído do processo.

Mais recente, Huang *et al.* [57] desenvolveram um algoritmo de localização cooperativa para veículos subaquáticos autônomos baseado em um EKF adaptativo, cuja matriz de covariância do erro de predição e de medidas são estimadas segundo uma abordagem de maximização da esperança. Em Silva *et al.* [58], uma versão adaptativa do EKF é derivada calculando a covariância do termo de inovação através de uma média móvel exponencial a fim de estimar e atualizar a matriz de covariância do ruído de processo. Já em [59], os autores introduziram um KF adaptativo para estimação de estados de um sistema de foguete de lançamento múltiplo. O novo algoritmo combina a técnica da sequência de inovação, o método de correspondência de covariância e a técnica do fator esquecimento para ajustar adaptativamente as matrizes de covariâncias do ruído.

Buscando agora abordagens mais eficientes do KF para sistemas não-lineares, Rigatos propôs o filtro de Kalman sem derivadas (DKF, do inglês *Derivative-Free Kalman Filter*) [60] para uma classe especial de sistemas não-lineares denominados de sistemas diferencialmente planos (do inglês *differentially flat systems*) [61]. Mais precisamente, Rigatos aproveitou-se do fato que tais sistemas apresentam a propriedade de terem suas variáveis completamente parametrizadas por um conjunto de variáveis endógenas ao sistema, denominadas de saídas planas (do inglês *flat outputs*). Tal

propriedade garante que o sistema original é equivalente a um sistema linear na forma canônica de Brunovsky com as variáveis de estado sendo as próprias saídas planas do sistema original. Assim, Rigatos aplica o KF tradicional diretamente ao sistema linear equivalente a fim de estimar as saídas planas e suas respectivas derivadas temporais, as quais, conseqüentemente, permitem a reconstrução das variáveis de estados da planta não-linear.

Essa abordagem demonstrou resultados com um desempenho superior em relação aos métodos convencionais de estimação não-linear citados anteriormente (EKF e o UKF) em diferentes tipos de aplicações [62, 63]. Diferentemente do EKF, o DKF realiza a estimação não-linear de estados sem a necessidade de computar derivadas ou matrizes Jacobianas. Tal característica resulta no aumento da acurácia da estimação e em variações mais suaves dos sinais de controle em aplicações de rastreamento de trajetória. Em termos computacionais, notou-se também que o DKF apresenta vantagens quando comparado ao UKF, já que o DKF se aproveita da recursão rápida do KF tradicional [60], além de não precisar a cada iteração atualizar os pontos *sigma*, propagar a estimação não-linear através deles e calcular as matrizes de covariâncias cruzadas.

Por outro lado, mesmo que uma variedade de sistemas lineares ou não-lineares conhecidos na literatura apresente a propriedade de serem diferencialmente planos (e.g., carros com trailers [64], motores de indução [65], reatores químicos [66] e aeronaves convencionais [67]), alguns sistemas não-lineares clássicos, como o pêndulo duplo invertido [68] e o processo de quatro tanques [69], são conhecidos por não serem diferencialmente planos, restringindo a aplicação do DKF. Uma metodologia descrita em [70, 71] propõe então a introdução de entradas fictícias ao sistema não-linear de tal forma que o sistema expandido apresente a propriedade plana, demonstrando sua viabilidade no projeto de controladores para rastreamento de trajetória.

Mais tarde, Waldherr e Zeitz [72, 73] introduziram o conceito de entradas planas (do inglês *flat inputs*) para sistemas não-lineares como uma perspectiva dual em relação a questão de alocação dos sensores na planta que buscava uma medição direta das saídas planas. Mais precisamente, determinava-se um novo conjunto de atuadores que forçasse o sistema a apresentar a propriedade plana descrita anteriormente, permitindo assim utilizar as técnicas tradicionais de projeto de controladores relacionadas as saídas planas do sistema modificado.

Tal abordagem permitiu aplicações voltadas ao controle de sistemas caóticos [74], à identificação de parâmetros de equações diferenciais ordinárias com atraso [75] e, até mesmo, ao desenvolvimento de sistemas de comunicação seguros [76]. Ressalta-se também que outros avanços em metodologias para encontrar as entradas planas foram reportados em [77, 78], inclusive para sistemas não-observáveis. Entretanto, não se verificam trabalhos na literatura que abordem o conceito de entradas planas juntamente com estratégias de estimação de estados.

Por fim, nota-se que, em casos práticos, essa abordagem propõe a redefinição dos atuadores do sistema, o que pode ser inviável do ponto de vista de projeto. Para contornar esse problema, Stumper *et al.* [79] apresentam um método que relaciona o sinal de controle de um sistema não-linear SISO (do inglês *Single Input, Single Output*) e do sistema associado as entradas planas a partir de um compensador dinâmico derivado da equivalência entre os comportamentos entrada-saída dos sistemas. Isto posto, a propriedade plana do sistema associado as entradas planas pode

ser aproveitada indiretamente para projetar a lei de controle para a planta não-linear. Apesar de não ser abordado em [79], vislumbra-se uma possível expansão desse método para sistemas MIMO (do inglês *Multiple Input, Multiple Output*) a partir do uso dos índices de observabilidade do sistema original como referência para relacionar os comportamentos entrada-saída de ambos os sistemas.

Dentro do contexto apresentado, vislumbram-se duas áreas a serem exploradas a fim de aprimorar os resultados obtidos pelo DKF em [60]. Em um primeiro momento, buscar ferramentas teóricas que permitam o DKF lidar com situações em que os perfis estatísticos dos ruídos associados a planta são desconhecidos. Em seguida, desenvolver mecanismos que permitam ampliar a classe de sistemas não-lineares em que se possa aplicar o DKF para estimação de estados. Propostas que abordam esses dois pontos serão discutidas na próxima seção.

1.3 Proposta do Trabalho

Conforme descrito anteriormente, o crescimento do número de técnicas de filtragem adaptativa só reforça a característica dinâmica das mais diversas aplicações de controle, limitando assim o uso de abordagens usuais do filtro de Kalman. Por exemplo, no caso do DKF introduzido em [60], tem-se que o perfil estatístico dos ruídos associados ao sistema linear equivalente na forma canônica de Brunovsky não necessariamente será idêntico ao da planta não-linear devido a transformação de coordenadas imposta pela teoria de planicidade diferencial. Ademais, carece na literatura estratégias adaptativas que avaliam o seu desempenho em malha fechada, principalmente quando os controladores são projetados a partir da teoria de realimentação de estados.

Portanto, o presente trabalho propõe inicialmente uma variação adaptativa do filtro de Kalman para sistemas lineares em malha fechada, cuja matriz de covariância do ruído de processo é desconhecida, e, em seguida, expandi-la para sistemas não-lineares diferencialmente planos.

A ideia principal é formular uma relação matemática entre a matriz de covariância do ruído de processo e a matriz de covariância do vetor de medições de tal forma que se considere a influência do vetor de estimativas de estado no sinal de controle. Como resultado, espera-se que o comando se torne menos reativo à medida que o sistema alcance o regime estacionário, minimizando possíveis desgastes na estrutura do atuador e, conseqüentemente, estendendo a sua vida útil. Por fim, aplica-se essa metodologia de estimação adaptativa no sistema linear equivalente na forma canônica de Brunovsky, obtendo assim uma variação adaptativa do DKF.

Em paralelo, o presente trabalho também propõe combinar o uso de compensadores dinâmicos associados ao conceito de entradas planas com essa variação adaptativa proposta do DKF a fim de expandi-la para uma classe maior de sistemas não-lineares, incluindo certos sistemas não-diferencialmente planos. Mais precisamente, a propriedade plana do sistema associado as entradas planas permite aplicar a variação adaptativa do DKF para aperfeiçoar a estimação de estados. Além disso, as estimativas obtidas podem ser utilizadas para montar as expressões finais dos controladores da planta não-linear a partir da presença dos compensadores dinâmicos, conforme apresentado em [79].

1.4 Objetivo Geral

O objetivo principal desta tese centra-se em desenvolver metodologias de estimação adaptativa para sistemas não-lineares em malha fechada baseadas no filtro de Kalman e em conceitos provenientes da teoria de planicidade diferencial.

Para atingir o objetivo geral desta tese, propõem-se alcançar os seguintes objetivos específicos:

1. Descrever a variação adaptativa do filtro de Kalman para sistemas lineares em malha fechada, assumindo tanto o desconhecimento *a priori* da matriz de covariância de processo como a influência das estimativas do vetor de estado no sinal de controle;
2. Estender essa metodologia de estimação adaptativa para sistemas não-lineares diferencialmente planos ao combiná-la com a abordagem do filtro de Kalman sem derivadas introduzida em [60];
3. Explorar o conceito de entradas planas como potencial solução para estimação adaptativa em malha fechada de sistemas não-diferencialmente planos;
4. Validar o desempenho em malha fechada das metodologias de estimação adaptativa propostas nesta tese a partir de simulações numéricas para sistemas lineares, não-lineares diferencialmente planos e não-lineares não-diferencialmente planos.

1.5 Descrição do Manuscrito

O Capítulo 2 introduz a variação adaptativa proposta do filtro de Kalman para sistemas lineares em malha fechada. Essa nova abordagem busca estimar a matriz de covariância do ruído de processo levando em consideração tanto a influência do vetor de estimativas de estado no sinal de controle como o conhecimento *a priori* da matriz de covariância do ruído de medição. A validação dessa estratégia adaptativa é baseada no estudo de caso de um sistema linear discreto multivariável, inclusive comparando seu desempenho com outras abordagens adaptativas difundidas na literatura.

O Capítulo 3 apresenta os principais conceitos teóricos acerca de sistemas diferencialmente planos com o objetivo de propor uma variação adaptativa do filtro de Kalman sem derivadas introduzido em [60] ao combiná-lo com os resultados obtidos no capítulo anterior. A validação dessa estratégia adaptativa é baseada no estudo de caso de um sistema não-linear diferencialmente plano.

O Capítulo 4 apresenta conceitos relacionados aos sistemas liouvillianos, às entradas planas e ao uso de compensadores dinâmicos visando formalizar um conjunto de ferramentas teóricas que permitisse realizar o planejamento e o rastreamento de trajetórias a um classe maior de sistemas não-lineares, inclusive para certos sistemas não-diferencialmente planos. Em seguida, detalha-se como a variação adaptativa proposta do filtro de Kalman sem derivadas discutida no capítulo anterior poderia ser aplicada juntamente com a abordagem de controle por entradas

planas apresentada em [79]. Três estudos de casos são então discutidos com o objetivo de validar a estratégia adaptativa em questão.

As conclusões deste trabalho quanto aos objetivos alcançados são apresentadas no Capítulo 5, bem como a avaliação das metodologias de estimação adaptativa desenvolvidas nesta tese, as atuais contribuições científicas e, por fim, sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Estimação Adaptativa e Sistemas Lineares

2.1 Introdução

Em 1960, Rudolf E. Kalman publicou seu famoso trabalho descrevendo uma solução recursiva para o problema de filtragem discreta linear [8]. Desde essa época, devido principalmente ao avanço em computação digital, o filtro de Kalman e suas extensões estão entre as mais importantes contribuições para a ciência dos sistemas de controle no século XX e tem sido o objeto de extensivas pesquisas [80].

Formalmente, o filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que constitui um processo recursivo computacional eficiente para estimar o estados de um sistema dinâmico linear. De uma maneira geral, tais equações podem ser agrupadas em dois grupos distintos: **equações de predição** e **equações de correção**. Como observado na Figura 2.1, esses dois grupos de equações funcionam conjuntamente segundo um sistema com retroalimentação.

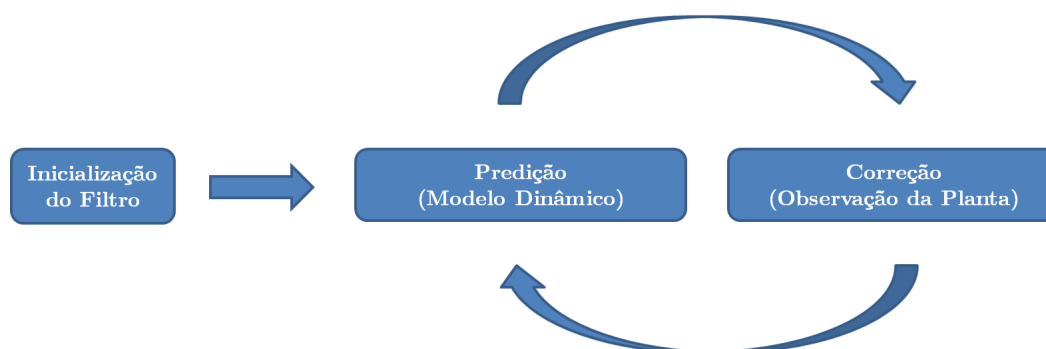


Figura 2.1: Estrutura cíclica do filtro de Kalman.

Após a estimativa inicial, as equações de predição são responsáveis pela estimação das variáveis de estado e da matriz de covariância a partir unicamente do conhecimento acerca do modelo da planta sem levar em consideração as informações proveniente da mesma, obtendo assim a

estimativa *a priori*. Em seguida, as equações de correção incorporam uma nova medição do sistema em estudo para atualizar a estimação obtida na etapa de predição, obtendo assim a estimativa *a posteriori* que reiniciará o estimador recursivo.

Neste capítulo, a Seção 2.2 apresenta então as equações matemáticas que compõem o filtro de Kalman tradicional em sua versão discreta, conforme a notação abordada em [47]. Em seguida, na Seção 2.3, deriva-se a estratégia adaptativa para sistemas lineares invariantes no tempo proposta neste manuscrito a partir da versão preditiva de único estágio do filtro de Kalman discreto. Por fim, a Seção 2.4 ilustra a efetividade da abordagem adaptativa proposta através de um estudo de caso.

2.2 Filtro de Kalman Discreto

Considere um sistema discreto linear invariante no tempo (LIT) descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k + \Upsilon \mathbf{w}_k, & k \geq 0 \\ \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde k é o índice de tempo, $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de transição de estado, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entradas, $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ é a matriz de entrada de ruído de processo, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a sequência de ruído de processo, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de medições e $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^p$ é a sequência de ruído de medição. Ressalta-se também que \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k são processos gaussianos estatisticamente descorrelacionados de média nula com matrizes de covariância $\mathbf{Q}_k \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ e $\mathbf{R}_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$, respectivamente, e que satisfazem as seguintes relações:

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k^T & \mathbf{v}_k^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_k \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

sendo \mathbf{Q}_k e \mathbf{R}_k caracterizadas por serem matrizes diagonais não-negativas [81]. Note que $E[\bullet]$ denota o valor esperado.

Dessa forma, o problema a ser estudado aqui consiste em encontrar uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n$ baseado no nosso conhecimento acerca da dinâmica do sistema, nas condições iniciais do vetor de estados, \mathbf{x}_0 , e da sua matriz de covariância, \mathbf{P}_0 , bem como as sequências das entradas \mathbf{u}_k e as medições \mathbf{y}_k .

O ponto de partida para entender a ideia proposta por Kalman é perceber que se trata da estimação de estados de um sistema dinâmico para o qual há uma lei de movimento conhecida, a qual é descrita pelo modelo (2.1). A partir da predição do comportamento do estado usando o conhecimento do modelo dinâmico, Kalman faz então uso da informação proveniente da planta para corrigir a estimativa *a priori* e assim obter a estimativa *a posteriori*. Portanto, matematicamente, têm-se que as equações que compõem o filtro de Kalman são definidas da seguinte maneira:

Etapa de Predição:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \Gamma \mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_{k+1}^- &= \Phi \mathbf{P}_k^+ \Phi^T + \Upsilon \mathbf{Q}_k \Upsilon^T \end{cases} \quad (2.3)$$

Etapa de Correção:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}^T [\mathbf{C} \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-] \\ \mathbf{P}_{k+1}^+ &= \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C} \mathbf{P}_{k+1}^- \end{cases} \quad (2.4)$$

sendo o sinal '-' para indicar que a grandeza refere-se ao instante antes de ter sido incluída informação proveniente da planta àquele mesmo instante (estimativa *a priori*) e, analogamente, o sinal '+' para indicar que a grandeza refere-se ao instante após ter sido incluída a informação proveniente da planta neste mesmo instante (estimativa *a posteriori*). Ressalta-se também que a expressão do ganho de Kalman \mathbf{K}_{k+1} foi determinada de tal forma que se minimizasse o traço da matriz \mathbf{P}_{k+1}^+ , o que é equivalente a minimizar o somatório dos quadrados dos erros de estimação [47].

Por fim, observe que é possível reescrever a estrutura preditiva-corretora do filtro de Kalman, aqui representada pelo conjunto de equações formado por (2.3) e (2.4), em um único estágio:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k \mathbf{C}^T [\mathbf{C} \mathbf{P}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma \mathbf{u}_k + \Phi \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k] \\ \mathbf{P}_{k+1} &= \Phi \mathbf{P}_k \Phi^T - \Phi \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k \Phi^T + \Upsilon \mathbf{Q}_k \Upsilon^T \end{cases} \quad (2.5)$$

em que o algoritmo (2.5) é conhecido, na verdade, como preditor de Kalman de único estágio, uma vez que a parcela de correção é feita com a medida da iteração anterior, sendo esta última representada pelo termo \mathbf{y}_k . Essa estrutura será utilizada para derivar a nova metodologia adaptativa proposta neste manuscrito para sistemas discretos LIT em malha fechada, como será observado na próxima seção.

2.3 Filtro de Kalman Adaptativo

Como discutido no Capítulo 1, o caráter ótimo do filtro de Kalman está altamente relacionado a hipóteses bem específicas. No entanto, tem-se que, na prática, é muito difícil ter algum tipo de conhecimento inicial acerca das matrizes de covariância dos ruídos, resultando na deterioração do desempenho do filtro de Kalman.

Uma possível estratégia para determinar a matriz de covariância do ruído de medições consiste em obter uma série de medições de tal forma a manter a saída do sistema constante. Isso implica que somente restará o ruído após remover a sua média dos dados, o que permite uma análise estatística a fim de se obter uma ordem de grandeza da variância do ruído de medição através dos dados restantes. Por outro lado, propor abordagens dessa natureza para determinar a matriz de covariância do ruído de processo é uma tarefa muito mais árdua, inclusive em malha fechada.

Em paralelo, observa-se também que, no preditor de Kalman de único estágio, o ganho de Kalman \mathbf{K}_k depende somente de \mathbf{P}_k e \mathbf{R}_k . Assim, caso \mathbf{R}_k fosse conhecida *a priori*, seria possível calcular \mathbf{P}_{k+1} a partir das estimativas de \mathbf{Q}_k a cada instante k .

Por essas razões, assumindo o conhecimento da matriz de covariância do ruído de medição, propõe-se então implementar uma estimação adaptativa da matriz de covariância do ruído de processo a cada instante de tempo de forma a considerar o impacto do vetor de estimativas de estado no sinal de controle. Para este fim, a partir da análise conjunta em malha fechada do modelo dinâmico do sistema e do preditor de Kalman de único estágio, relaciona-se matematicamente a covariância do ruído de processo com a covariância do vetor de medições, sendo esta última obtida através da técnica de média móvel exponencial. Os detalhes dessa estratégia de estimação da matriz de covariância do ruído de processo serão apresentados no decorrer das próximas subseções.

2.3.1 Análise conjunta em malha fechada de covariâncias do sistema e do filtro

Assumindo uma lei de controle da forma $\mathbf{u}_k = -\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}^s \mathbf{y}_k^*$ para estimação de estados em malha fechada, note que há uma dependência direta do sinal de controle em relação ao vetor de estimativa de estado. Visando levar essa dependência em consideração, procede-se com a seguinte análise conjunta do sistema (2.1) e da segunda equação do preditor de Kalman de único estágio:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma [-\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}^s \mathbf{y}_k^*] + \Upsilon \mathbf{w}_k \quad (2.6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma [-\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}^s \mathbf{y}_k^*] + \Phi \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k] \quad (2.7)$$

onde \mathbf{y}_k^* é a referência desejada para \mathbf{y}_k , \mathbf{G} é a matriz de ganhos de realimentação e \mathbf{G}^s é o inverso do ganho estático do sistema.

Pode-se, então, propor o sistema aumentado a seguir:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \Lambda_k \mathbf{X}_k + \mathbf{W} \mathbf{w}_k + \mathbf{V}_k \mathbf{v}_k + \Xi \mathbf{y}_k^*, \quad (2.8)$$

com

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix}, \quad \Lambda_k = \begin{bmatrix} \Phi & -\Gamma \mathbf{G} \\ \Phi \mathbf{K}_k \mathbf{C} & (\Phi - \Gamma \mathbf{G} - \Phi \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \Upsilon \\ \mathbf{0}_{n \times n_w} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times p} \\ \Phi \mathbf{K}_k \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} \Gamma \mathbf{G}^s \\ \Gamma \mathbf{G}^s \end{bmatrix}$$

onde se utilizou o fato de que $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$.

Por uma questão de simplicidade, assumindo em seguida que $\text{cov}[\mathbf{y}_k^*] = 0$, a covariância de (2.8) pode ser escrita como se segue

$$\text{cov}[\mathbf{X}_{k+1}] = \mathbf{\Lambda}_k \text{cov}[\mathbf{X}_k] \mathbf{\Lambda}_k^T + \mathbf{W} \text{cov}[\mathbf{w}_k] \mathbf{W}^T + \mathbf{V}_k \text{cov}[\mathbf{v}_k] \mathbf{V}_k^T, \quad (2.10)$$

já que \mathbf{X}_k , \mathbf{w}_k and \mathbf{v}_k são decorrelacionadas no instante k e, por definição, $\text{cov}[\mathbf{Ax}] = \mathbf{A} \text{cov}[\mathbf{x}] \mathbf{A}^T$.

Agora se investiga (2.10) sob a seguinte hipótese técnica:

Hipótese 1. *O sistema aumentado em malha fechada é assintoticamente estável a partir da escolha dos ganhos do controlador, assume-se então que $\text{cov}[\mathbf{X}_k]$ varie de forma muito mais lenta que a taxa de amostragem. Assim, matematicamente, implica-se que $\text{cov}[\mathbf{X}_{k+1}] \approx \text{cov}[\mathbf{X}_k]$.*

Observação 1. Em aplicações práticas, escolhendo uma taxa de amostragem muito mais rápida que a constante de tempo do sistema, é possível garantir esta condição quase-estacionária.

A partir da Hipótese 1, tem-se que (2.10) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\text{cov}[\mathbf{X}_k] = \mathbf{\Lambda}_k \text{cov}[\mathbf{X}_k] \mathbf{\Lambda}_k^T + \mathbf{W} \hat{\mathbf{Q}}_k \mathbf{W}^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T. \quad (2.11)$$

onde se substitui $\text{cov}[\mathbf{w}_k]$ pela covariância estimada do ruído de processo $\hat{\mathbf{Q}}_k$ e $\text{cov}[\mathbf{v}_k]$ pela verdadeira covariância do ruído de medições \mathbf{R}_k , já que esta última, por hipótese, é completamente conhecida *a priori*.

Observe que (2.11) pode ser vista como uma equação discreta de Lyapunov, cuja solução numérica é bem estabelecida na literatura e pode ser expressa como a seguinte soma infinita [82, 83]:

$$\text{cov}[\mathbf{X}_k] = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{\Lambda}_k)^j \left(\mathbf{W} \hat{\mathbf{Q}}_k \mathbf{W}^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T \right) (\mathbf{\Lambda}_k^T)^j \quad (2.12)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{\Lambda}_k)^j \mathbf{W} \hat{\mathbf{Q}}_k \mathbf{W}^T (\mathbf{\Lambda}_k^T)^j + \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{\Lambda}_k)^j \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T (\mathbf{\Lambda}_k^T)^j. \quad (2.13)$$

Note que $\hat{\mathbf{Q}}_k = \text{diag} \{q_{11,k}, q_{22,k}, q_{33,k}, \dots, q_{n_w n_w, k}\}$ pode ser decomposta em uma soma de n_w matrizes diagonais:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_k &= q_{11,k} \text{diag} \{1, 0, 0, \dots, 0\} + q_{22,k} \text{diag} \{0, 1, 0, \dots, 0\} \\ &+ q_{33,k} \text{diag} \{0, 0, 1, \dots, 0\} + \dots + q_{n_w n_w, k} \text{diag} \{0, 0, 0, \dots, 1\} \\ &= q_{11,k} \mathbf{Q}^{d_1} + q_{22,k} \mathbf{Q}^{d_2} + q_{33,k} \mathbf{Q}^{d_3} + \dots + q_{n_w n_w, k} \mathbf{Q}^{d_{n_w}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dado isso, pode-se manipular ambas somas infinitas em (2.13) como se segue:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{\Lambda}_k)^j \mathbf{W} \hat{\mathbf{Q}}_k \mathbf{W}^T (\mathbf{\Lambda}_k^T)^j &= q_{11,k} \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{\Lambda}_k)^j \mathbf{W} \mathbf{Q}^{d_1} \mathbf{W}^T (\mathbf{\Lambda}_k^T)^j + q_{22,k} \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{\Lambda}_k)^j \mathbf{W} \mathbf{Q}^{d_2} \mathbf{W}^T (\mathbf{\Lambda}_k^T)^j \\ &+ q_{33,k} \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{\Lambda}_k)^j \mathbf{W} \mathbf{Q}^{d_3} \mathbf{W}^T (\mathbf{\Lambda}_k^T)^j + \dots + q_{n_w n_w, k} \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{\Lambda}_k)^j \mathbf{W} \mathbf{Q}^{d_{n_w}} \mathbf{W}^T (\mathbf{\Lambda}_k^T)^j = \sum_{i=1}^{n_w} q_{ii,k} \mathbf{T}_{i,k} \end{aligned} \quad (2.15)$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\Lambda_k)^j \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T (\Lambda_k^T)^j = \mathbf{N}_k. \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{T}_{i,k} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\mathbf{N}_k \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ são obtidas executando rotinas numéricas para resolver equações discretas de Lyapunov a cada instante k . Mais precisamente, tais rotinas permitem obter uma aproximação numérica das somas infinitas presentes em (2.15) e (2.16).

É então claro que (2.12) pode ser expressa como:

$$\text{cov}[\mathbf{X}_k] = \sum_{i=1}^{n_w} q_{ii,k} \mathbf{T}_{i,k} + \mathbf{N}_k. \quad (2.17)$$

O próximo objetivo é obter uma relação entre a covariância do vetor de medições e a covariância do vetor de estados do sistema aumentado (2.8). Para isso, reescreve-se a segunda equação de (2.1) da seguinte maneira:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}^X \mathbf{X}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2.18)$$

com

$$\mathbf{C}^X = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{p \times n} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

A relação entre a matriz de covariância do vetor de medições e a matriz de covariância de estado de (2.8) pode ser então formulada como:

$$\text{cov}[\mathbf{y}_k] = \mathbf{C}^X \text{cov}[\mathbf{X}_k] (\mathbf{C}^X)^T + \mathbf{R}_k, \quad (2.20)$$

já que \mathbf{X}_k e \mathbf{v}_k são descorrelacionadas no instante k .

Substituindo a equação (2.17) em (2.20), obtém-se que:

$$\text{cov}[\mathbf{y}_k] = \mathbf{C}^X \left[\sum_{i=1}^{n_w} q_{ii,k} \mathbf{T}_{i,k} \right] (\mathbf{C}^X)^T + \mathbf{C}^X \mathbf{N}_k (\mathbf{C}^X)^T + \mathbf{R}_k, \quad (2.21)$$

o que implica na seguinte igualdade:

$$\sum_{i=1}^{n_w} q_{ii,k} \mathbf{T}_{i,k}^X = \mathbf{Y}_k, \quad (2.22)$$

com

$$\mathbf{T}_{i,k}^X = \mathbf{C}^X \mathbf{T}_{i,k} (\mathbf{C}^X)^T \quad (2.23)$$

$$\mathbf{Y}_k = \text{cov}[\mathbf{y}_k] - \mathbf{C}^X \mathbf{N}_k (\mathbf{C}^X)^T - \mathbf{R}_k. \quad (2.24)$$

Para os casos onde $n_w = p$, é suficientes relacionar os elementos da diagonal das matrizes de ambos os lados da equação (2.21), resultando na seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} T_{1,11,k}^X & T_{2,11,k}^X & \cdots & T_{n_w,11,k}^X \\ T_{1,22,k}^X & T_{2,22,k}^X & \cdots & T_{n_w,22,k}^X \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T_{1,pp,k}^X & T_{2,pp,k}^X & \cdots & T_{n_w,pp,k}^X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11,k} \\ q_{22,k} \\ \vdots \\ q_{n_w n_w,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11,k} \\ Y_{22,k} \\ \vdots \\ Y_{pp,k} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

onde $Y_{ij,k}$ e $T_{l,ij,k}^X$ são os elementos na i -ésima linha e na j -th coluna de \mathbf{Y}_k e \mathbf{T}_l^X , respectivamente. Então, segue que:

$$\begin{bmatrix} q_{11,k} \\ q_{22,k} \\ \vdots \\ q_{n_w n_w,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,11,k}^X & T_{2,11,k}^X & \cdots & T_{n_w,11,k}^X \\ T_{1,22,k}^X & T_{2,22,k}^X & \cdots & T_{n_w,22,k}^X \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T_{1,pp,k}^X & T_{2,pp,k}^X & \cdots & T_{n_w,pp,k}^X \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{11,k} \\ Y_{22,k} \\ \vdots \\ Y_{pp,k} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

É importante ressaltar que, para alguns casos onde $n_w > p$, pode-ser utilizar os elementos não-diagonais das matrizes de tal forma a montar uma equação matricial no formato de (2.25). Portanto, a matriz de covariância do ruído de processo pode ser reconstruída no instante k da seguinte maneira:

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \text{diag} \{q_{11,k}, q_{22,k}, \cdots, q_{n_w n_w,k}\}, \quad (2.27)$$

a qual pode ser utilizada para calcular \mathbf{P}_{k+1} na terceira equação em (2.5).

Por fim, notou-se que (2.27) pode fornecer uma matriz negativa definida em determinadas aplicações numéricas. Para evitar essa situação, identificaram-se na literatura diferentes metodologias [27, 84, 85] que podem ser incorporadas nesse ponto do algoritmo proposto. Neste estudo, mantém-se a última estimativa positiva semi-definida da matriz de covariância do ruído de processo, como sugerido no Groutage *et al.* [85], já que esta solução forneceu o melhor desempenho quando comparadas as outras metodologias.

Como resultado, ao assumir que \mathbf{R}_k é completamente conhecida, o conjunto de equações do preditor de Kalman de único estágio pode ser combinado com o método proposto de estimação da matriz de covariância do ruído de processo derivado nesta subseção. No entanto, na reconstrução de $\hat{\mathbf{Q}}_k$, ainda resta estimar a matriz de covariância do vetor de medições a cada instante k , o que será discutido na próxima subseção.

2.3.2 Estimação da Covariância do Vetor de Medições

Para calcular (2.24) e, conseqüentemente, $\hat{\mathbf{Q}}_k$, está claro que é preciso estimar a covariância do vetor de medições. Por esse motivo, observe inicialmente que se pode escrever:

$$\text{cov}[\mathbf{y}_k] = E[(\mathbf{y}_k - E[\mathbf{y}_k]) (\mathbf{y}_k - E[\mathbf{y}_k])^T]. \quad (2.28)$$

Segue-se agora da Hipótese 1 que as saídas do sistema convergem para os valores desejados em regime estacionário. Por isso, é razoável aproximar a equação (2.28) considerando o valor esperado do vetor de medições como seu ponto de operação nominal no mesmo instante (i.e., $E[\mathbf{y}_k] = \mathbf{y}_k^*$):

$$\text{cov}[\mathbf{y}_k] \approx E[(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^*) (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^*)^T], \quad (2.29)$$

desde que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[\mathbf{y}_k] = \mathbf{y}_k^*. \quad (2.30)$$

De acordo com (2.29), o problema de estimar $\text{cov}[\mathbf{y}_k]$ é então reduzido a encontrar o valor esperado de $(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^*) (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^*)^T$. Para isso, propõe-se aplicar uma abordagem baseada no algoritmo conhecido como média móvel para estimá-lo. Apesar de sua simplicidade, na prática tal abordagem fornecerá uma boa estimativa do valor esperado da série temporal se ela for constante ou lentamente mudando em relação ao tempo de amostragem, que é exatamente a suposição nesse estudo. Além de reduzir o ruído aleatório sem distorcer o formato do sinal, já vem sendo compreendido por muitas décadas e amplamente utilizado em análises estatísticas [86].

Dentre as variações da média móvel encontradas na literatura, escolhe-se por sua versão exponencial (EMA), pois se apresenta como uma ferramenta computacionalmente simples de ser implementada na prática e, para o mesmo nível de atenuação do ruído branco, é mais responsivo às novas informações quando comparado à média móvel simples. Tal comportamento acaba se mostrando ideal para abordagens adaptativas.

Definindo \mathbf{S}_k and \mathbf{O}_k como o real valor observado e o valor esperado correspondente, respectivamente, tem-se que, matematicamente, a média móvel exponencial pode ser calculada recursivamente como:

$$\begin{cases} \mathbf{O}_0 &= \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{O}_k &= (1 - \alpha)\mathbf{O}_{k-1} + \alpha\mathbf{S}_k, \quad k > 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

onde $0 < \alpha < 1$ é um coeficiente de ponderação, cujo valor determinar a intensidade da suavização do sinal \mathbf{S}_k . Portanto, se $\mathbf{S}_k = (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^*) (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^*)^T$, é possível estimar o seu valor esperado e, conseqüentemente, a covariância do vetor de medições (i.e., $\mathbf{O}_k = E[(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^*) (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^*)^T]$).

Para determinar o parâmetro α , observa-se o fato de que a EMA pode ser representada por um filtro com resposta ao impulso de duração infinita (IIR, do inglês *Infinite Impulse Response*) de primeira ordem. Matematicamente, pode-se representá-lo da seguinte forma:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}} = \frac{\alpha}{1 - \beta z^{-1}}, \quad (2.32)$$

onde $\beta = 1 - \alpha$ é o pólo de $H(z)$.

Uma característica dos filtros IIR é que podem ser obtidos a partir da aproximação de um filtro de primeira ordem em tempo contínuo, o qual é representado analiticamente pela seguinte expressão:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1}, \quad (2.33)$$

onde K_p é o ganho estático e τ corresponde a constante de tempo.

Como o filtro $H(z)$ apresenta ganho estático unitário, logo também é imposto essa hipótese para $H(s)$. Assim, reescreve-se a equação (2.33):

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} = \frac{p_s}{s + p_s}, \quad (2.34)$$

onde p_s representa o pólo de $H(s)$.

Conforme exposto em [87], relaciona-se o pólo de $H(s)$ com o de $H(z)$ através da seguinte relação de equivalência:

$$\beta = \exp[-\Delta t p_s], \quad (2.35)$$

onde Δt é a taxa de amostragem. Agora, resta estabelecer uma métrica para determinar p_s .

A partir da Hipótese 1, deseja-se estimar $\text{cov}[\mathbf{y}]$ mais rápido que a dinâmica do sistema em malha fechada, permitindo assim que o sinal de controle seja capaz de guiar o sistema a referência desejada. Para isso, opta-se então que o filtro apresente um tempo de resposta intermediário entre Δt e a resposta dinâmica do sistema em malha fechada. Matematicamente, representa-se esse comportamento através da seguinte média geométrica:

$$p_s = \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta t} p_l}, \quad (2.36)$$

onde p_l representa o pólo mais rápido do sistema em malha fechada. Ressalta-se que se escolheu a média geométrica a fim de maximizar a razão tanto entre a frequência de amostragem e p_s como entre p_s e p_l .

Por fim, a expressão final para o coeficiente de ponderação α da EMA é dada por:

$$\alpha = 1 - \exp\left[-\Delta t \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta t} p_l}\right]. \quad (2.37)$$

2.3.3 Estrutura do Filtro de Kalman Adaptativo

Como vimos na Seção 2.2, as equações do filtro de Kalman representam duas etapas distintas: equações de predição e equações de correção. Na abordagem adaptativa proposta neste manuscrito, adiciona-se então uma terceira etapa de atualização da matriz de covariância do ruído de processo através da metodologia apresentada nas subseções 2.3.1 e 2.3.2. A Figura 2.2 ilustra a estrutura do filtro de Kalman adaptativo proposto.

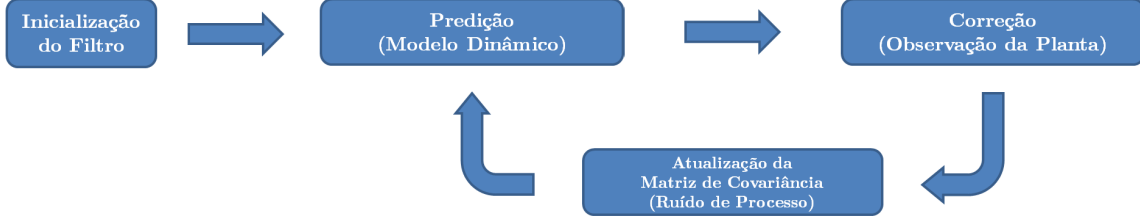


Figura 2.2: Estrutura cíclica do filtro de Kalman adaptativo proposto.

Na próxima seção, a metodologia de estimação adaptativa proposta será avaliada através do estudo de caso de um sistema linear discreto multivariável.

2.4 Estudo de Caso

Considere o seguinte sistema discreto LIT, que representa um modelo linearizado em torno de um ponto de operação do conhecido problema de *benchmark* de quatro tanques na configuração de fase mínima [88]:

$$\begin{bmatrix} h_{k+1}^1 \\ h_{k+1}^2 \\ h_{k+1}^3 \\ h_{k+1}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9975 & 0 & 0,0072 & 0 \\ 0 & 0,9982 & 0 & -0,0051 \\ 0 & 0 & 0,9928 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9949 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_k^1 \\ h_k^2 \\ h_k^3 \\ h_k^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0083 & 0 \\ 0 & 0,0063 \\ 0 & 0,0048 \\ 0,0031 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} V_k^1 \\ V_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_k^1 \\ \omega_k^2 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.38)$$

$$\begin{bmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_k^1 \\ h_k^2 \\ h_k^3 \\ h_k^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \end{bmatrix},$$

onde h_k^i corresponde ao nível de água no tanque i . As tensões aplicadas às bombas são as entradas de controle, as quais estão aqui representadas por V_k^1 e V_k^2 , sendo sujeitas à mesma restrição: $0 < V_k^1, V_k^2 < 10 V$. As saídas do processo y_k^1 e y_k^2 são os níveis de água nos tanques 1 e 2, respectivamente.

Nos testes de simulação, definindo um tempo de simulação $t_s = 500 s$ e uma taxa de amostragem $\Delta t = 100 ms$, os valores de referência para as saídas do processo são definidos para serem $5,0 cm$. Os estados iniciais dos níveis de água dos tanques foram todos assumidos como sendo $4,0 cm, 6,0 cm, 0,0 cm, 0,0 cm$, respectivamente.

O sistema (2.38) é então estabelecido com a suposição que as matrizes de covariância de ruído de processo e de medição são descritas como se segue:

$$\mathbf{Q}_k = \begin{cases} \text{diag}\{1, 10\}, & 0 \leq k < \frac{t_s}{2\Delta t} \\ \text{diag}\{0,01, 0,1\}, & \frac{t_s}{2\Delta t} \leq k \leq \frac{t_s}{\Delta t} \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{R}_k = 10^{-4} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad (2.40)$$

onde somente \mathbf{R}_k é conhecida *a priori*.

Em relação aos parâmetros do AKF, definiu-se que o vetor de estimativa dos estado inicial é idêntica ao vetor de condições iniciais do sistema e que $\mathbf{P}_0 = 0,1 \mathbf{I}_{4 \times 4}$. Além disso, ajustaram-se os parâmetros de controle da seguinte forma:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0,6909 & -0,3014 & 0,7951 & 0,5539 \\ 0,6090 & 1,2906 & 0,5911 & -1,8626 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

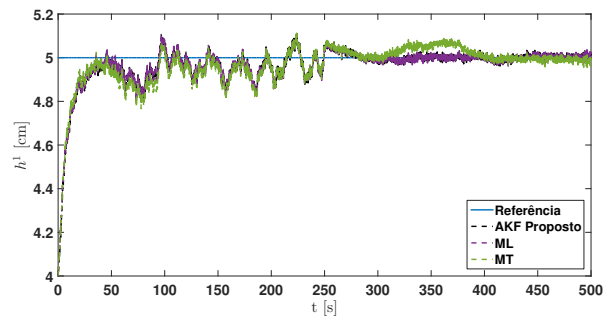
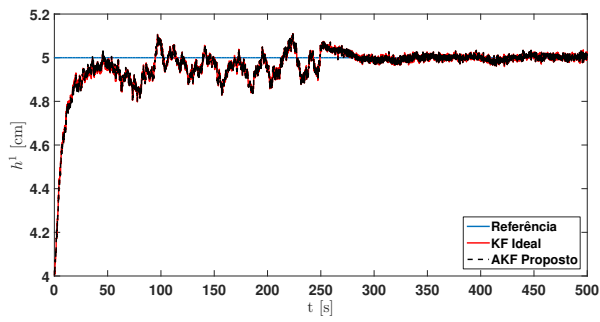
$$\mathbf{G}^s = \begin{bmatrix} 1,0666 & -0,3539 \\ 0,5032 & 1,7378 \end{bmatrix},$$

em que forneceu um coeficiente de ponderação α igual a 0,2217 para a estimação de elementos diagonais da matriz de covariância do vetor de medições.

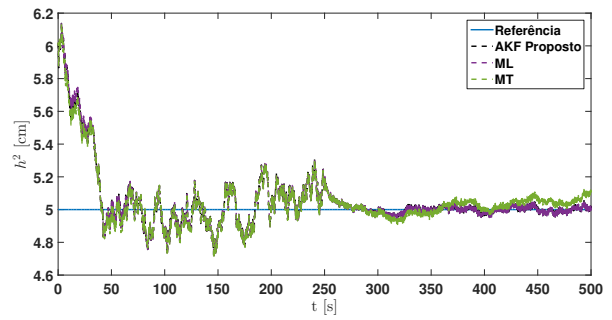
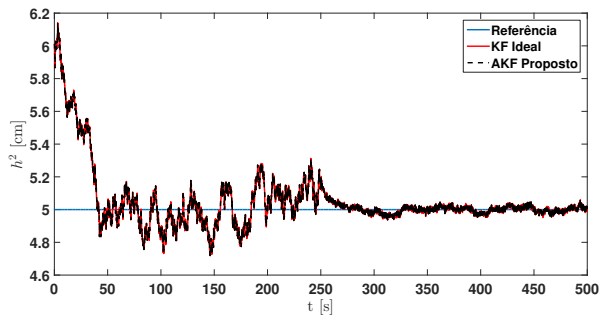
A comparação dos resultados obtidos usando o filtro adaptativo proposto de Kalman (AKF) com outros métodos adaptativos clássicos encontrados na literatura é discutida. Mais precisamente, o algoritmo de Myers e Tapley [27] (MT) e o estimador de Máxima Verossimilhança (ML) descrito em Blanchet *et al.* [84] são considerados neste estudo para fins de comparação. Além disso, como referência de desempenho, apresentam-se também os resultados obtidos do filtro de Kalman convencional com a matriz exata de covariância do ruído de processo (KF ideal). Portanto, realizações idênticas do ruído de processo e de medição foram utilizadas em todos os métodos de estimação. Simulações numéricas foram então conduzidas com $\mathbf{Q}_0 = \text{diag}\{10^{-5}, 10^{-6}\}$. Os resultados da simulação são ilustrados nas Figuras 2.3 a 2.5.

Como observado nas Figuras 2.3 e 2.4, tanto os resultados do AKF proposto como do ML demonstraram desempenhos em malha fechada similares quando comparados com o KF ideal, além de ambos terem sido superiores aos obtidos pelo MT.

A partir da Figura 2.5, pode-se observar, em primeiro lugar, que os erros de estimação para estados não-medidos do método adaptativo proposto convergem para aqueles obtidos pelo KF ideal quando se atinge o estado estacionário, o que é consistente com a teoria apresentada neste estudo. Em segundo lugar, nosso algoritmo apresenta erros de estimativa menores que em ML e MT, especialmente durante a resposta transitória. E em último lugar, mesmo depois de mudar os valores de \mathbf{Q}_k em $t = 250$ s, o AKF proposto manteve um nível de desempenho próximo ao do KF ideal, indicando uma rápida adaptação ao novo valor.

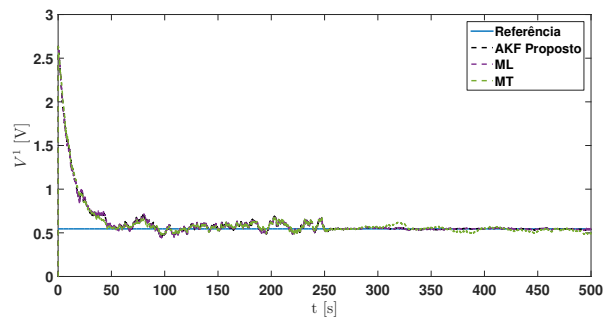
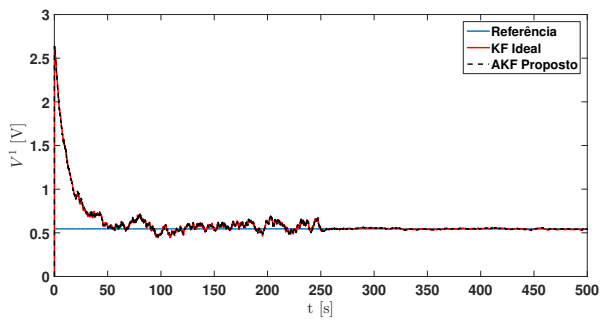


(A) Sinal de saída - h^1

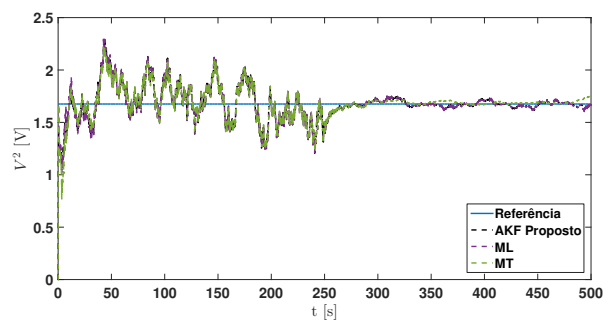
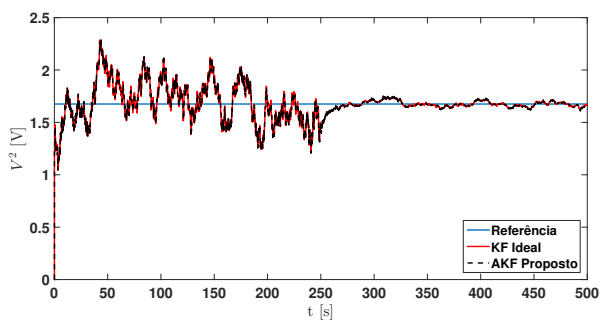


(B) Sinal de saída - h^2

Figura 2.3: Evolução temporal dos sinais de saída.

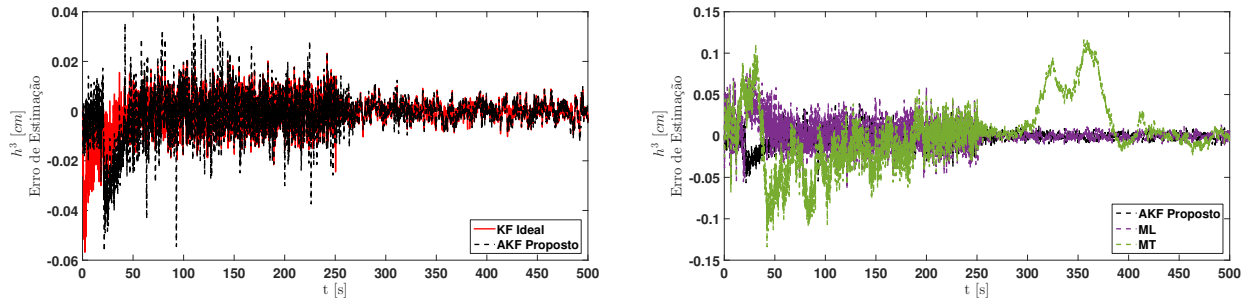


(A) Sinal de controle - V^1

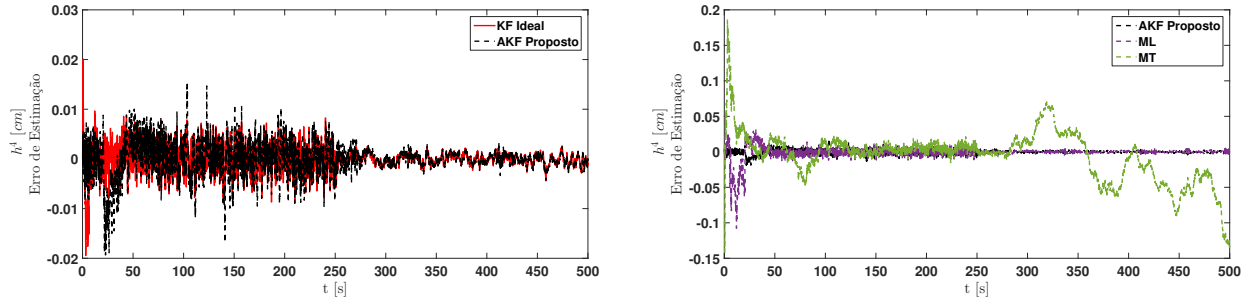


(B) Sinal de controle - V^2

Figura 2.4: Evolução temporal dos sinais de controle.



(A) Erro de estimação para h^3



(B) Erro de estimação para h^4

Figura 2.5: Erro de estimativa para os estados não-medidos.

Em seguida, a fim de avaliar quantitativamente os resultados, índices de desempenho de controle tradicionais e métricas de acurácia da estimação [89–91] foram calculados na primeira e na segunda metade da simulação para cada método, inclusive para o KF ideal com o objetivo de fornecer uma comparação mais abrangente.

Para avaliar o desempenho do controle de cada saída, os seguintes índices foram utilizados:

Integral do Erro Quadrático (ISE)

$$\mathbf{ISE} = \sum_{k=1}^n [y(k) - y^*(k)]^2 \Delta t \quad (2.42)$$

Integral do Erro Absoluto (IAE)

$$\mathbf{IAE} = \sum_{k=1}^n |y(k) - y^*(k)| \Delta t \quad (2.43)$$

Integral do Erro Absoluto ponderada pelo Tempo (ITAE)

$$\mathbf{ITAE} = \sum_{k=1}^n |y(k) - y^*(k)| (\Delta t)^2 \quad (2.44)$$

Já para avaliar a magnitude dos esforços sobre atuadores, utilizou-se a *Varição Total da Ação do Controle (TVC)*, a qual é definida como:

$$\mathbf{TVC} = \sum_{k=1}^n |u_k - u_{k-1}| \Delta t \quad (2.45)$$

Por último, opta-se por avaliar a acurácia das estimativas dos estados não-medidos através das seguintes métricas:

Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE)

$$\mathbf{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x}_k)^2} \quad (2.46)$$

Erro Absoluto Médio (MAE)

$$\mathbf{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \hat{x}_k| \quad (2.47)$$

Os valores obtidos com as expressões acima podem ser visualizados da Tabela 2.1 a Tabela 2.4.

Tabela 2.1: Índices de desempenho de controle (Primeira metade)

		KF Ideal	AKF	ML	MT
ISE	h^1	$2,31 \times 10^{-1}$	$2,34 \times 10^{-1}$	$2,31 \times 10^{-1}$	$2,35 \times 10^0$
	h^2	$1,10 \times 10^0$	$1,11 \times 10^0$	$1,10 \times 10^0$	$1,04 \times 10^0$
IAE	h^1	$3,24 \times 10^0$	$3,27 \times 10^0$	$3,24 \times 10^0$	$3,28 \times 10^0$
	h^2	$6,97 \times 10^0$	$7,03 \times 10^0$	$6,97 \times 10^0$	$6,75 \times 10^0$
ITAE	h^1	$7,08 \times 10^2$	$7,13 \times 10^2$	$7,08 \times 10^2$	$7,12 \times 10^2$
	h^2	$1,52 \times 10^3$	$1,53 \times 10^3$	$1,52 \times 10^3$	$1,47 \times 10^3$
TVC	V^1	$5,14 \times 10^{-1}$	$4,50 \times 10^{-1}$	$5,36 \times 10^{-1}$	$4,74 \times 10^{-1}$
	V^2	$1,65 \times 10^0$	$1,43 \times 10^0$	$1,67 \times 10^0$	$1,64 \times 10^0$

Tabela 2.2: Índices de desempenho de controle (Segunda metade)

		KF Ideal	AKF	ML	MT
ISE	h^1	$8,57 \times 10^{-3}$	$8,74 \times 10^{-3}$	$8,51 \times 10^{-3}$	$1,26 \times 10^{-2}$
	h^2	$2,09 \times 10^{-2}$	$2,17 \times 10^{-2}$	$2,10 \times 10^{-2}$	$2,47 \times 10^{-1}$
IAE	h^1	$5,90 \times 10^{-1}$	$5,96 \times 10^{-1}$	$5,87 \times 10^{-1}$	$7,11 \times 10^{-1}$
	h^2	$9,28 \times 10^{-1}$	$9,48 \times 10^{-1}$	$9,31 \times 10^{-1}$	$3,65 \times 10^0$
ITAE	h^1	$2,76 \times 10^2$	$2,79 \times 10^2$	$2,75 \times 10^2$	$3,36 \times 10^2$
	h^2	$4,33 \times 10^2$	$4,43 \times 10^2$	$4,35 \times 10^2$	$1,72 \times 10^3$
TVC	V^1	$4,99 \times 10^{-2}$	$5,00 \times 10^{-2}$	$1,12 \times 10^{-1}$	$1,54 \times 10^{-1}$
	V^2	$1,66 \times 10^{-1}$	$1,56 \times 10^{-1}$	$2,71 \times 10^{-1}$	$5,46 \times 10^{-2}$

Tabela 2.3: Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos (Primeira Metade).

		KF Ideal	AKF	ML	MT
RMSE	h^3	$6,81 \times 10^{-3}$	$8,34 \times 10^{-3}$	$1,67 \times 10^{-2}$	$1,75 \times 10^{-2}$
	h^4	$2,83 \times 10^{-3}$	$3,46 \times 10^{-3}$	$4,19 \times 10^{-3}$	$7,77 \times 10^{-3}$
MAE	h^3	$5,53 \times 10^{-3}$	$6,49 \times 10^{-3}$	$1,34 \times 10^{-2}$	$1,38 \times 10^{-2}$
	h^4	$2,24 \times 10^{-3}$	$2,77 \times 10^{-3}$	$3,36 \times 10^{-3}$	$6,48 \times 10^{-3}$

Tabela 2.4: Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos (Segunda Metade).

		KF Ideal	AKF	ML	MT
RMSE	h^3	$3,03 \times 10^{-3}$	$3,64 \times 10^{-3}$	$4,19 \times 10^{-3}$	$7,56 \times 10^{-3}$
	h^4	$1,18 \times 10^{-3}$	$1,20 \times 10^{-3}$	$1,55 \times 10^{-3}$	$6,77 \times 10^{-2}$
MAE	h^3	$2,41 \times 10^{-3}$	$2,79 \times 10^{-3}$	$3,27 \times 10^{-3}$	$1,54 \times 10^{-3}$
	h^4	$9,41 \times 10^{-4}$	$9,62 \times 10^{-4}$	$1,17 \times 10^{-3}$	$6,16 \times 10^{-2}$

Em geral, os resultados estão de acordo com as conclusões apresentadas pela análise das figuras acima. As Tabelas 2.1 e 2.2 indicam que os resultados obtidos pelo MT são os que apresentam maior divergência do desempenho de controle quando comparados ao KF ideal, enquanto os resultados obtidos pelo ML demonstram desempenho similar aos nossos resultados.

Nas Tabelas 2.3 e 2.4, os valores do RMSE e do MAE referente aos estados não-medidos obtidos pelo AKF proposto são próximos aos do KF ideal e menores que os demais métodos. Ademais, o nível de acurácia fornecido pelo nosso algoritmo permanece coerente, mesmo com a mudança nos valores \mathbf{Q}_k durante a simulação.

Por fim, para analisar o desempenho de convergência do método adaptativo proposto, obteve-se a média temporal dos valores estimados de \mathbf{Q}_k no último quarto de cada metade da simulação. Foi observado então que $\hat{\mathbf{Q}}_k = \text{diag}\{0,8763, 9,0412\}$ e $\hat{\mathbf{Q}}_k = \text{diag}\{0,0118, 0,1105\}$ na primeira e na segunda metade da simulação, respectivamente. Note que esses valores estimados indicam uma convergência consistente em relação aos valores reais de \mathbf{Q}_k (ver (2.39)).

2.5 Conclusões

Neste capítulo, apresentou-se inicialmente o algoritmo recursivo do filtro de Kalman em sua versão discreta para sistemas lineares, junto com a sua versão preditiva de único estágio. Em seguida, introduziu-se uma nova variação adaptativa do filtro de Kalman que estima e atualiza a matriz de covariância do ruído de processo a cada instante de tempo levando em consideração a influência do vetor de estimativas de estado no sinal de controle.

Por fim, validaram-se os resultados obtidos com o filtro de Kalman adaptativo proposto para um sistema linear discreto multivariável. Além de apresentar um desempenho semelhante ou

superior quando comparado com outras abordagens adaptativas já estabelecidas na literatura, vislumbra-se que a integração direta do método proposto à natureza recursiva do filtro de Kalman reduz os custos computacionais de sua implementação, o que o torna particularmente atrativo para sistemas de controle de processos industriais em tempo real.

No próximo capítulo, uma extensão desse filtro de Kalman adaptativo será detalhada para sistemas não-lineares diferencialmente planos.

Capítulo 3

Estimação Adaptativa e Teoria de Planicidade Diferencial

3.1 Introdução

A noção de planicidade diferencial, relativamente recente no campo da Automação, foi inicialmente introduzida no contexto da álgebra diferencial por Fliess *et al.* em [61]. Desde então, seus princípios vem sendo extensamente estudados na literatura no que se refere a obter soluções para problemas de planejamento e acompanhamento de trajetória em sistemas não-lineares [62, 92, 93].

Formalmente, segundo Lévine [93], um sistema não-linear expresso através da representação em espaço de estados da forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3.1)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sendo o vetor de estados e de entradas, respectivamente, e \mathbf{f} sendo um campo vectorial suave, é considerado diferencialmente plano se é possível encontrar um vetor $\mathbf{y}_z \in \mathbb{R}^m$ e um inteiro finito r como se segue:

$$\mathbf{y}_z = \boldsymbol{\lambda}_z(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(r-1)}), \quad (3.2)$$

de modo que \mathbf{x} e \mathbf{u} sejam parametrizados da seguinte maneira:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}_x(\mathbf{y}_z, \dot{\mathbf{y}}_z, \dots, \mathbf{y}_z^{(r-1)}) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda}_u(\mathbf{y}_z, \dot{\mathbf{y}}_z, \dots, \mathbf{y}_z^{(r-1)}, \mathbf{y}_z^{(r)}), \quad (3.4)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}_z: \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m)^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\lambda}_x: (\mathbb{R}^m)^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{\lambda}_u: (\mathbb{R}^m)^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções vectoriais suaves.

Em outras palavras, os sistemas diferencialmente planos são aqueles em que é possível determinar um conjunto finito de variáveis endógenas ao sistema, as quais são denominadas saídas planas e representadas pelo vetor \mathbf{y}_z , de dimensão igual ao do vetor de entrada do sistema tal que suas

variáveis (estado e entrada) possam ser parametrizados em função dessas saídas planas e de um número finito de suas derivadas sem a necessidade de usar a operação de integração.

Como discutido em Martin [67], se o sistema é diferencialmente plano, pode-se construir uma realimentação linearizante endógena e um difeomorfismo que transforma o sistema (3.1) em um sistema linear controlável representado por cadeias de integradores puros denominado de forma canônica de Brunovsky, cujo vetor de estado é então composto pelas saídas planas e suas derivadas temporais.

Dessa forma, a vantagem de ser diferencialmente plano não consiste somente em realizar a linearização exata do sistema, mas também em poder representar a dinâmica global do sistema a partir das saídas planas do sistema. Isso implica que problemas de estabilização ou acompanhamento de trajetória definidos para o sistema inicial podem ser definidos em relação ao sistema equivalente na forma canônica de Brunovsky, reduzindo, assim, os esforços no desenvolvimento de controladores. Essa equivalência de sistemas é denominada isomorfismo de Lie-Backlund e um estudo mais detalhado pode ser encontrado em [93, 94].

Adicionalmente, como descrito em [92], a planicidade diferencial facilita a realização dessas tarefas independente da natureza da dinâmica interna associada com as variáveis de saída (e.g. saída de fase não-mínima). No entanto, essa independência fica limitada as condições iniciais e finais das trajetórias especificadas para as variáveis do sistema em estudo, além de possíveis restrições físicas do sistemas como, por exemplo, saturação dos atuadores. Ressalta-se também que no caso das saídas planas apresentarem um significado físico ou serem a própria saída do sistema, essas restrições são mais facilmente contornadas.

Dessa forma, neste capítulo, a Seção 3.2 discute conceitos da teoria de planicidade diferencial literatura relacionados com as saídas planas de sistemas lineares e não-lineares. Em seguida, na Seção 3.3, deriva-se o filtro de Kalman sem derivadas adaptativo para sistemas não-lineares diferencialmente planos. Por fim, a Seção 3.4 ilustra a efetividade dessa extensão através de um estudo de caso.

3.2 Saídas Planas

Para sistemas lineares, a equivalência entre planicidade diferencial e controlabilidade permitiu a formulação de métodos diretos para determinação das saídas planas a partir da matriz de controlabilidade do sistema na sua representação em espaço de estados. Enquanto isso, no caso dos sistemas não-lineares, a controlabilidade não é uma condição suficiente para o sistema ser diferencialmente plano, logo não há um método geral que permita determinar as saídas planas. No entanto, para uma classe de sistemas não-lineares diferencialmente plano, uma estratégia similar ao sistemas lineares pode ser aplicada [92].

Nessa seção, métodos para determinar as saídas planas de sistemas lineares e não-lineares são apresentados nas subseções 3.2.1 e 3.2.2, respectivamente. Além disso, caracterizações matemáticas sobre controlabilidade de sistemas dinâmicos também são introduzidas para facilitar a

compreensão do leitor. Em 3.2.3 e 3.2.4, discute-se posteriormente como a planicidade diferencial é utilizada para solucionar problemas relacionados ao planejamento e ao acompanhamento de trajetórias, respectivamente.

3.2.1 Sistemas Lineares

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - SISO

Seja um sistema linear SISO invariante no tempo em sua representação de espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (3.5)$$

sendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

O sistema (3.5) é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade \mathbf{C}_K dada por:

$$\mathbf{C}_K = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (3.6)$$

tem posto igual a n .

Segundo Sira-Ramírez e Agrawal [92], para sistemas lineares invariantes no tempo, a relação entre controlabilidade e planicidade diferencial se resume ao sistema ser controlável. Assumindo que o sistema (3.5) é controlável, a saída plana é expressa pela combinação linear dos estados obtidos da última linha da inversa da matriz de controlabilidade \mathbf{C}_K :

$$y_z = a_{LIS}[0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]\mathbf{C}_K^{-1}\mathbf{x}, \quad (3.7)$$

sendo a_{LIS} uma função não-nula do vetor de estados \mathbf{x} , cuja finalidade consiste em simplificar a expressão da saída plana y_z .

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - MIMO

Seja um sistema linear MIMO invariante no tempo em sua representação de espaço de estados dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (3.8)$$

sendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ com $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$.

O sistema (3.8) é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade \mathbf{C}_K dada por:

$$\mathbf{C}_K = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.9)$$

tem posto igual a n .

Controlabilidade implica então que é possível extrair de $\mathbf{C}_K \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ uma matriz \mathbf{C}_F de posto igual a n com o seguinte formato [92]:

$$\mathbf{C}_z = [\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{(\kappa_1^C-1)}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{A}\mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{(\kappa_m^C-1)}\mathbf{b}_m] \quad (3.10)$$

com $\kappa_i^C, i = 1, \dots, m$ sendo os índices de controlabilidade de Kronecker do sistema, os quais devem satisfazer a seguinte condição: $\sum_i \kappa_i^C = n$.

A partir da matriz \mathbf{C}_z , as saídas planas do sistema (3.8) são dadas por [92]:

$$\mathbf{y}_z = \begin{bmatrix} y_{z_1} \\ \vdots \\ y_{z_m} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{LIM}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} \mathbf{C}_z^{-1} \mathbf{x} \quad (3.11)$$

com ϕ_j sendo vetores linhas n -dimensionais da seguinte forma:

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0], \quad j = 1, \dots, m \quad (3.12)$$

onde a posição do 1 será dada por $\sum_{i=1}^j \kappa_i^C$. Ressalta-se também que a matriz $\mathbf{A}_{LIM}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é não-singular composta de funções escalares arbitrárias do vetor de estado \mathbf{x} , cuja finalidade também consiste em simplificar as expressões das saídas planas.

Sistemas Lineares Variantes no Tempo - SISO

Seja um sistema linear SISO variante no tempo em sua representação de espaço de estados dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)u, \quad (3.13)$$

sendo $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ contínuos no tempo, além de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}$.

Segundo Sira-Ramírez e Agrawal [92], para sistemas lineares variantes no tempo, a relação entre controlabilidade e planicidade diferencial está associada ao sistema ser uniformemente controlável. Assumindo que a matriz $\mathbf{A}(t)$ é $n - 2$ vezes diferenciável e $\mathbf{b}(t)$ é $n - 1$ vezes diferenciável, o sistema (3.13) é dito uniformemente controlável se o critério de controlabilidade é válido para qualquer $t \in [t_0, t_f]$, ou seja, a matriz de controlabilidade $\mathbf{C}_K(t)$ dada por:

$$\mathbf{C}_K(t) = [\mathbf{b}(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})\mathbf{b}(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})^{(n-1)}\mathbf{b}(t)] \quad (3.14)$$

tem posto igual a n dentro do intervalo $[t_0, t_f]$. A matriz $\mathbf{C}_K(t)$ corresponde a extensão da matriz de controlabilidade de Kalman para sistemas lineares variantes no tempo e foi proposta por Silverman e Meadows [95].

Para o caso de sistemas não-uniformemente controláveis, utilizam-se os resultado de Malrait *et al.* [96] no qual propõem uma realimentação exógena que torna o sistema uniformemente controlável e, conseqüentemente, diferencialmente plano.

Assumindo que o sistema (3.13) é uniformemente controlável, a saída plana é dada por uma combinação linear dos estados obtidos a partir da última linha de $\mathbf{C}_K^{-1}(t)$ [92]:

$$y_z(t) = a_{LVS}(t)[0 \ 0 \ \dots \ 1]C_K^{-1}(t)\mathbf{x} \quad (3.15)$$

com $a_{LVS}(t)$ sendo uma função real não-nula do vetor de estados \mathbf{x} , cuja finalidade consiste em simplificar a expressão da saída plana $y_z(t)$.

Sistemas Lineares Variantes no Tempo - MIMO

Seja um sistema linear MIMO variante no tempo em sua representação de espaço de estados dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad (3.16)$$

sendo $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B}(t) = [\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_m(t)] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ com $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ contínuos no tempo, além de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$.

A matriz de controlabilidade $C_K(t)$ do sistema (3.16) é dada pela equação (3.14), porém se substituímos $\mathbf{b}(t)$ por $\mathbf{B}(t)$. Portanto, de forma análoga aos sistemas lineares invariantes no tempo, a controlabilidade do sistema (3.16) garante a existência de uma matriz $C_z(t)$ de posto igual a n com o seguinte formato:

$$C_z(t) = [\mathbf{b}_1(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})^{(\kappa_1^C - 1)}\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_m(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})^{(\kappa_m^C - 1)}\mathbf{b}_m(t)] \quad (3.17)$$

com $\kappa_i^C, i = 1, \dots, m$, sendo os índices de controlabilidade de Kronecker do sistema, os quais devem satisfazer a seguinte condição: $\sum_i \kappa_i^C = n$.

Ao determinar $C_z(t)$, as saídas planas do sistema (3.16) são dadas por [92]:

$$\mathbf{y}_z(t) = \begin{bmatrix} y_{z_1}(t) \\ \vdots \\ y_{z_m}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{LVM} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} C_z^{-1}(t)\mathbf{x}, \quad (3.18)$$

onde ϕ_j sendo vetores linhas n -dimensionais da seguinte forma:

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0], \quad j = 1, \dots, m \quad (3.19)$$

sendo a posição do 1 dada por $\sum_{i=1}^j \kappa_i^C$. Além disso, $\mathbf{A}_{LVM} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular composta de funções escalares arbitrárias do vetor de estado \mathbf{x} , cuja finalidade também consiste em simplificar as expressões das saídas planas.

Por fim, note que há diversas maneiras de escolher os índices κ_i^C , o que acarreta em diferentes conjuntos de saídas planas e, conseqüentemente, em diferentes parametrizações possíveis para o sistema. Essa mesma característica pode ser observada no caso invariante no tempo. Normalmente, a escolha deve ser guiada a partir de considerações físicas do sistema em estudo ou das intuições dos próprios engenheiros. Por exemplo, busca-se evitar associar um índice muito maior a uma única saída plana a fim de evitar presença de derivadas temporais de ordem elevada.

3.2.2 Sistemas Não-Lineares

A noção de controlabilidade para sistemas não-lineares é baseada em uma ferramenta matemática denominada parênteses de Lie, conforme descrito em [97]. Segundo Slotine [98], se $\mathbf{f}(x)$ e $\mathbf{g}(x)$ são campos vetoriais em \mathbb{R}^n , o parêntese de Lie de \mathbf{f} e \mathbf{g} é definido pela expressão:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}(x)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(x) - \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(x) \quad (3.20)$$

onde $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ é um campo vectorial de dimensão n (vector coluna).

Outra possível notação para o parênteses de Lie é dado por:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = ad_f \mathbf{g} \quad (3.21)$$

onde $ad_f \mathbf{g}$ significa adjunta de \mathbf{g} . A vantagem dessa notação é sua extensão para um formato recursivo em que o parênteses de Lie de ordem i é definido por:

$$ad_f^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}, \quad ad_f^i \mathbf{g} = [\mathbf{f}, ad_f^{i-1} \mathbf{g}] \quad (3.22)$$

Segundo Sira-Ramírez e Agrawal [92], os sistemas não-lineares SISO pertencem a última classe de sistemas em que o conceito de planicidade diferencial ainda está claramente relacionado com a noção de controlabilidade. Mais precisamente, para o seguinte sistema não-linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (3.23)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}$, a seguinte matriz \mathbf{C}_K :

$$\mathbf{C}_K = [\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_f^{m-1} \mathbf{g}] \quad (3.24)$$

pode ser visualizada como a matriz de controlabilidade do sistema.

Segue-se então que o sistema (3.23) é localmente plano se e somente se \mathbf{C}_K apresenta posto completo (i.e, a matriz é inversível) e a distribuição $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_f^{m-2} \mathbf{g}\}$ é involutiva. Caso essas condições sejam satisfeitas, então o gradiente da saída plana de (3.23) é determinado a partir da última linha do inverso de \mathbf{C}_K [92]:

$$\frac{\partial y_z(\mathbf{x})}{(\partial \mathbf{x})} = a_{NLS}(\mathbf{x}) [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \mathbf{C}_K^{-1} \quad (3.25)$$

para uma função escalar não-nula $a_{NLS}(\mathbf{x})$. Diferentemente dos sistemas lineares, observe que se requer a solução de um sistema de equações diferenciais parciais para encontrar $y_z(\mathbf{x})$, .

Para sistemas não-lineares multivariáveis, não há uma metodologia totalmente estabelecida para determinar as saídas planas, porém algumas estratégias podem ser utilizadas em determinadas situações. Para mais informações, sugere-se ao leitor a buscar [92].

3.2.3 Planejamento de Trajetória

Seja um sistema não-linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ com as seguintes condições iniciais dadas no instante de tempo t_i :

$$\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{u}(t_i) = \mathbf{u}_i \quad (3.26)$$

e com as condições finais no instante t_f dadas por:

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad \mathbf{u}(t_f) = \mathbf{u}_f. \quad (3.27)$$

Planejamento de trajetória é a etapa responsável por obter antecipadamente os comandos necessários aos atuadores de tal forma que permita o sistema a realizar uma trajetória específica. Isso consiste em encontrar uma trajetória $t \mapsto (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ para $t \in [t_i, t_f]$ que satisfaça $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, as equações (3.26) e (3.27), e, possivelmente, restrições de projeto. As trajetórias desejadas $\mathbf{x}^*(t)$ e $\mathbf{u}^*(t)$ são denominadas trajetórias nominais e controles nominais, respectivamente.

Dentro desse contexto, uma primeira abordagem busca obter os sinais de controle através de métodos numéricos onde se assume valores para \mathbf{u}_i e vai se ajustando \mathbf{u} à medida que o sistema se aproxima das condições finais para \mathbf{x} , os quais são obtidos através da integração numérica das equações diferenciais do modelo. Outra abordagem se baseia em uma visão relacionada a teoria de controle ótimo que se resume a encontrar um controle que minimize o desvio médio ao quadrado em relação a uma trajetória desejada.

De acordo com Lévine [93], a planicidade diferencial (ou propriedade plana) do sistema implica que se as condições iniciais e finais de \mathbf{x} e \mathbf{u} são conhecidas, é possível determinar as respectivas condições para as saídas planas \mathbf{y}_z e suas derivadas temporais a partir da equação (3.2). Então, é suficiente encontrar uma trajetória $t \mapsto \mathbf{y}_z(t)$ ao menos r vezes diferenciável que satisfaça as condições iniciais e finais de \mathbf{y}_z e de suas derivadas temporais.

Adicionalmente, ressalta-se que a trajetória $t \mapsto \mathbf{y}_z(t)$ não precisa satisfazer quaisquer equações diferenciais, permitindo o uso de interpolações polinomiais a fim de facilitar a sua construção. Assim, as equações (3.3) e (3.4) implicam que as trajetórias $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ e $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ são obtidas diretamente de $t \mapsto \mathbf{y}_z(t)$, além de satisfazerem as equações diferenciais do sistema [93].

Por fim, no caso de trajetórias saindo de um ponto de equilíbrio para outro, observa-se que todas as condições iniciais e finais das derivadas das componentes de \mathbf{y}_z são necessariamente iguais a 0. Isso permite adicionar um número arbitrário de condições iniciais e finais nulas de ordem maior ou igual a r sem alterar a estrutura da trajetória. Esse processo garante que a trajetória apresentará um início e um final ainda mais suave, o que pode ser útil a fim de evitar oscilações ou possíveis instabilidades nessas regiões e de reduzir os desgastes dos atuadores [93]. Para mais detalhes sobre o planejamento de trajetória com e sem restrições, convida-se o leitor a buscar [93].

3.2.4 Acompanhamento de Trajetória

Como solução para o problema de planejamento de trajetória, requere-se somente um conhecimento do modelo dinâmico e do tempo, já que a trajetória nominal pode ser computada de um determinado instante até um tempo futuro de acordo com o que se sabe sobre a evolução do comportamento dinâmico do sistema.

Supondo que o sistema é precisamente conhecido e que as perturbações desconhecidas não produzem desvios significativos em relação as trajetórias previstas, então o controle nominal $\mathbf{u}^*(t)$, conhecido também por comando em malha aberta, é suficiente para realizar tal planejamento.

Em contrapartida, quando a presença de perturbações é suficiente para desviar o sistema em relação as trajetórias previstas ou quando as condições iniciais não estão sob a referência, faz-se necessário o desenvolvimento de uma lei de controle, conhecida também como comando em malha fechada, capaz de dirigir o sistema, a partir de uma configuração inicial qualquer, até a trajetória nominal. Essa etapa do projeto de controle é conhecida então como acompanhamento de trajetória.

Para esse propósito, o controlador precisa levar em conta as informações sobre a evolução do sistema ao longo do tempo com o objetivo de deduzir, a cada instante, o grau de desvio em relação a trajetória nominal. Se há sensores o suficiente para realizar medições de todas as variáveis de estado do sistema, o acompanhamento de trajetória pode ser construído a partir de uma realimentação de estados. Caso contrário, faz-se necessário a utilização de técnicas de estimação de estados tais como observadores de estado, filtro de partículas ou filtro de Kalman.

Considere então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.28)$$

No caso dos sistemas diferencialmente planos, o sistema (3.28) é equivalente a um sistema linear na forma canônica de Brunovsky dado por [99]:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{r_1-1} = z_{r_1} \\ \dot{z}_{r_1} = f_1(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m g_{1,i}(\mathbf{x})u_i \\ \dot{z}_{r_1+1} = z_{r_1+2} \\ \dot{z}_{r_1+2} = z_{r_1+3} \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = f_n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m g_{n,i}(\mathbf{x})u_i \end{cases} \quad \begin{cases} y_{z_1} = z_1 \\ y_{z_2} = z_{r_1+1} \\ \vdots \\ y_{z_m} = z_{n-r_p+1} \end{cases} \quad (3.29)$$

onde $\mathbf{Z} = [z_1 \cdots z_n]^T$ é o vetor de estados na forma canônica de Brunovsky e $\mathbf{y}_z = [y_{z_1} \cdots y_{z_m}]^T$ representa as saídas planas de (3.28). Ressalta-se também que $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$.

A partir disso, as representações entrada-saída do sistema na forma canônica de Brunovsky podem ser extraídas de (3.29), sendo expressas por:

$$y_{z_j}^{(r_j)} = f_i + \sum_{l=1}^m g_{i,l}(\mathbf{x})u_l, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.30)$$

Assim, pode-se reescrever (3.30) da seguinte maneira:

$$y_{z_j}^{(r_j)} = v_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.31)$$

onde a nova variável de controle é dada por $v_j = f_i + \sum_{l=1}^m g_{i,l}(\mathbf{x})u_l$.

A partir disso, inicialmente se define uma estrutura de controle em malha fechada para o sistema equivalente. Assumindo que $e_j = y_{z_j} - y_{z_j}^*$, $j = 1, \dots, m$, são os componentes do erro de acompanhamento de trajetória para as saídas planas do sistema, têm-se que:

$$e_j^{(r_j)} = y_{z_j}^{(r_j)} - y_{z_j}^{*(r_j)} = v_j - v_j^* \quad (3.32)$$

ao derivar e_j por r_j vezes.

É suficiente então definir a dinâmica do erro de tal forma que:

$$e_j^{(r_j)} + k_{j,(r_j-1)}e_j^{(r_j-1)} + \cdots + k_{j,1}e_j^{(1)} + k_{j,0}e_j^{(0)} = 0, \quad (3.33)$$

onde os ganhos $k_{j,l}$, $l = 0, \dots, (r_j - 1)$, são escolhidos de modo que os m polinômios da forma $s^{(r_j)} + \sum_{l=0}^{r_j-1} k_{j,l}s^{(l)}$ sejam polinômios de Hurwitz, ou seja, possuem suas raízes com parte real estritamente negativa.

Assim, pode-se reescrever (3.33) da seguinte maneira:

$$v_j = y_{z_j}^{*(r_j)} - \sum_{l=0}^{r_j-1} k_{j,l}e_j^{(l)}, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.34)$$

onde, ao substituir os termos $y_{z_j}^{(r_j)}$ por v_j em cada uma das parametrizações diferenciais dos sinais de controle em função das saídas planas e de suas derivadas temporais, obtêm-se as expressões finais das leis de controle para o sistema dinâmico em estudo.

Portanto, como se garante que as componentes do erro e_j convergem para 0, então as saídas planas e suas derivadas temporais de ordem até r_j também convergem para as respectivas trajetórias nominais. Consequentemente, isso implica que, devido a parametrização diferencial, \mathbf{x} e \mathbf{u} convergem exponencialmente localmente para $\mathbf{x}^*(t)$ e $\mathbf{u}^*(t)$, respectivamente [93].

3.3 Filtro de Kalman sem Derivadas Adaptativo

Uma vez que o filtro de Kalman (KF) é um estimador ótimo de sistemas lineares, buscase por soluções que possam aplicá-lo em sistemas não-lineares, já que estes são a maioria dos sistemas presentes na natureza. Como comentado na Introdução, Rigatos [60] formalizou o filtro de Kalman sem derivadas (DKF) de modo a se obter uma abordagem mais eficiente do KF para sistemas não-lineares diferencialmente planos. Mais precisamente, utiliza-se a propriedade de um sistema diferencialmente plano ser equivalente a um sistema linear controlável na forma canônica de Brunovsky com o objetivo de desfrutar das características ótimas do KF tradicional para sistemas lineares.

Para isso, observa-se que o sistema na forma canônica de Brunovsky (3.30) pode ser expresso na representação por espaço de estados como se segue:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}_b \mathbf{Z} + \mathbf{B}_b \mathbf{v} \\ \mathbf{y}_z = \mathbf{C}_b \mathbf{Z} \end{cases} \quad (3.35)$$

com as matrizes $\mathbf{A}_b = \text{diag}\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$, $\mathbf{B}_b = \text{diag}\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m\}$ e $\mathbf{C}_b = \text{diag}\{\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_m\}$, cujos elementos internos são definidos como:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{r_i \times r_i}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{1 \times r_i}, \quad \mathbf{C}_i^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{1 \times r_i} \quad (3.36)$$

Por conseguinte, para o sistema (3.35), ao efetuar a discretização das matrizes \mathbf{A}_b , \mathbf{B}_b e \mathbf{C}_b através de métodos tradicionais de discretização, pode-se realizar a estimação de estados usando o algoritmo recursivo do filtro de Kalman discreto. A partir das estimativas $\hat{\mathbf{Z}}$, pode-se portanto propor uma lei de controle para \mathbf{v} seguindo a estratégia descrita na subseção 3.2.4. Assim, a expressão final do vetor de entradas \mathbf{u} é dada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) [\mathbf{v} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})], \quad (3.37)$$

já que $\hat{\mathbf{x}}$ pode ser determinado a partir de $\hat{\mathbf{Z}}$.

Por outro lado, não se evidenciou por parte de Rigatos [60] ou de trabalhos recentes da literatura uma análise de como ambas as matrizes de covariância dos ruídos associados ao sistema não-linear estão relacionadas àquelas dos ruídos associados ao sistema linear forma canônica de Brunovsky. Essa discussão é fundamental para que os parâmetros do filtro de Kalman garantam o grau de otimalidade ideal para as estimativas do vetor de estados do sistema linear equivalente.

No que concerne ao ruído de medição, nota-se que diferentes sistemas não-lineares diferencialmente planos são conhecidos por terem as saídas planas representadas pelas próprias saídas

do sistema [62, 92]. Portanto, tem-se que a covariância do ruído de medição do sistema linear equivalente permanece idêntica ao do sistema em estudo. Outra possibilidade também comum é que as saídas planas representem uma combinação linear de elementos do vetor de estado do sistema, permitindo assim ainda obter a covariância de ruído de medição desconhecida a partir das propriedades estatísticas conhecidas da covariância.

Agora, no que se refere ao ruído de processo, não é uma operação simples obter uma relação entre as matrizes de covariância e pode variar para cada sistema. Por exemplo, mesmo com a hipótese de uma matriz de covariância de ruído de processo constante para o sistema não-linear, a mesma pode não ser válida para o sistema linear equivalente (e.g., a matriz é variante no tempo). Esse aspecto corrobora ainda mais a necessidade do uso de metodologias adaptativas.

Dentro desse contexto, propõe-se aperfeiçoar o filtro de Kalman sem derivadas ao combiná-lo com o filtro de Kalman adaptativo proposto no Capítulo 2 de tal forma a se obter uma versão equivalente para sistemas não-lineares diferencialmente planos, a qual é denominada de filtro de Kalman sem derivadas adaptativo (ADKF). Logo, assumindo o conhecimento da matriz de covariância do ruído de medição, pretende-se estimar e atualizar em tempo real a matriz de covariância do ruído de processo do sistema linear na forma canônica de Brunovsky. Como resultado, espera-se que as estimativas obtidas sejam mais precisas a fim de serem utilizadas no projeto tanto do controlador do sistema na forma canônica de Brunovsky (ver (3.34)) como no da planta não-linear (ver (3.37)). Tal proposta é evidenciada no diagrama de blocos ilustrado na Figura 3.1.

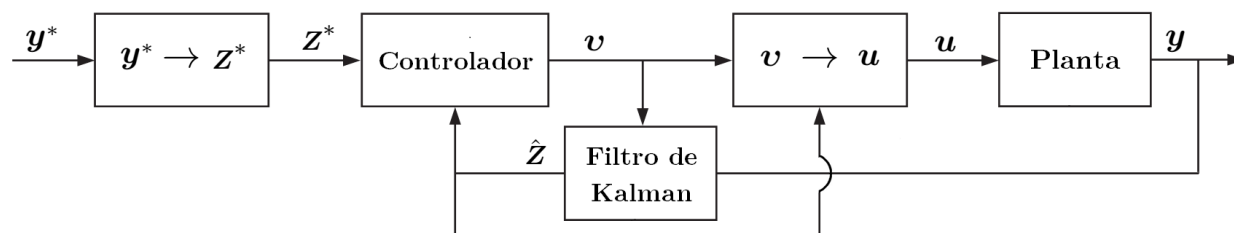


Figura 3.1: Diagrama de blocos para o filtro de Kalman sem derivadas adaptativo (ADKF).

Na próxima seção, essa metodologia de estimação adaptativa proposta para sistemas não-lineares diferencialmente planos será portanto avaliada através do estudo de caso de um sistema Bola e Barra.

3.4 Estudo de Caso

3.4.1 Sistema Bola e Barra

3.4.1.1 Modelagem Matemática

Considerada uma das mais populares e importantes plataformas de validação de estratégias de controle, o sistema Bola e Barra (do inglês *Ball and Beam*), ilustrado na Figura 3.2, destaca-se tanto pela simplicidade do equacionamento do movimento como pela presença de termos altamente não-lineares.

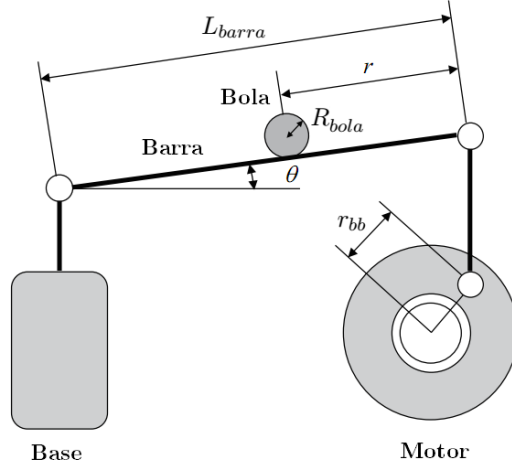


Figura 3.2: Esquemático do sistema bola e barra.

O modelo não-linear para o sistema Bola e Barra considerado neste manuscrito pode ser encontrado em [100], cuja dinâmica é descrita pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \ddot{r} &= K_{bb}\text{sen}(\theta) \\ \ddot{\theta} &= \beta_1\dot{\theta} + \beta_2V_m \end{cases} \quad (3.38)$$

com

$$\beta_1 = -\frac{1}{\tau_{motor}}, \quad \beta_2 = \frac{K_{motor}}{\tau_{motor}}, \quad K_{bb} = \frac{m_{bola}r_{bb}g_{Terra}R_{bola}^2}{L_{barra}(m_{bola}R_{bola}^2 + J_{bola})}. \quad (3.39)$$

onde r é a posição da bola e representa a saída do sistema. Além disso, θ é a posição angular da barra, L_{barra} é o comprimento da barra, m_{bola} é massa da bola, J_{bola} é o momento de inércia da bola, R_{bola} é o raio da bola, g_{Terra} é a aceleração da gravidade, r_{bb} é a distância entre o suporte móvel e o centro da engrenagem do motor, e K_{motor} e τ_{motor} representam o ganho estático e a constante de tempo do motor, respectivamente. A entrada do sistema é dado pela tensão V_m aplicada ao motor.

Seja $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})^T$, então o sistema (3.38) pode ser reescrito pela seguinte representação em espaços de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= K_{bb}\text{sen}(x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \beta_1x_4 + \beta_2V_m \end{cases} \quad (3.40)$$

Como apresentado em [101], o sistema (3.40) é conhecido por ser diferencialmente plano com a saída plana representada pela posição da bola (i.e., $y_z = x_1$). A parametrização diferencial associada a saída plana e suas derivadas temporais pode ser visualizada a seguir:

$$x_2 = \dot{y}_z \quad (3.41)$$

$$x_3 = \arcsen(\dot{y}_z/K_{bb}) \quad (3.42)$$

$$x_4 = \frac{y_z^{(3)}}{K_{bb} \left[1 - \frac{\dot{y}_z^2}{K_{bb}^2} \right]^{1/2}} \quad (3.43)$$

$$V_m = \frac{\frac{[K_{bb}^2 - \dot{y}_z^2] y_z^{(4)} + \dot{y}_z (y_z^{(3)})^2}{K_{bb}^3 \left[1 - \frac{\dot{y}_z^2}{K_{bb}^2} \right]^{3/2}} - \frac{\beta_1 y_z^{(3)}}{K_{bb} \left[1 - \frac{\dot{y}_z^2}{K_{bb}^2} \right]^{1/2}}}{\beta_2}. \quad (3.44)$$

Isso significa que, caso $x_1^*(t)$ e suas derivadas temporais sejam conhecidas, pode-se então obter diretamente as trajetórias nominais $x_2^*(t)$, $x_3^*(t)$, $x_4^*(t)$ e $V_m^*(t)$. Ressalta-se também que (3.42) é somente válida quando \dot{y}_z/K_{bb} pertence ao domínio da função arcsin, e tanto (3.43) como (3.44) apresentam singularidades quando $\dot{y}_z^2 = K_{bb}^2$.

Em seguida, como consequência imediata da parametrização diferencial, a representação entrada-saída do sistema (3.40) pode ser visualizado a seguir:

$$y_z^{(4)} = f(y_z, \dot{y}_z, \ddot{y}_z, y_z^{(3)}) + g(y_z, \dot{y}_z, \ddot{y}_z, y_z^{(3)})V_m \quad (3.45)$$

com

$$f(y_z, \dot{y}_z, \ddot{y}_z, y_z^{(3)}) = \frac{\beta_1 y_z^{(3)} K_{bb}^2 \left[1 - \frac{\dot{y}_z^2}{K_{bb}^2} \right] - \ddot{y}_z [y_z^{(3)}]^2}{[K_{bb}^2 - \dot{y}_z^2]} \quad (3.46)$$

$$g(y_z, \dot{y}_z, \ddot{y}_z, y_z^{(3)}) = \frac{\beta_2 K_{bb}^3 \left[1 - \frac{\dot{y}_z^2}{K_{bb}^2} \right]^{3/2}}{[K_{bb}^2 - \dot{y}_z^2]}. \quad (3.47)$$

Isso significa que o sistema (3.40) é equivalente a uma cadeia de integradores de quarta ordem, cujo vetor de estados \mathbf{Z} é composto pela saída plana x_1 e suas derivadas temporais. A partir disso, definido $v = f(y_z, \dot{y}_z, \ddot{y}_z, y_z^{(3)}) + g(y_z, \dot{y}_z, \ddot{y}_z, y_z^{(3)})V_m$, tem-se que o sistema (3.45) pode ser escrito na seguinte representação em espaço de estados na forma canônica de Brunovsky:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}} &= \mathbf{A}_b \mathbf{Z} + \mathbf{B}_b v \\ y_z &= \mathbf{C}_b \mathbf{Z} \end{cases} \quad (3.48)$$

com

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} y_z \\ \dot{y}_z \\ \ddot{y}_z \\ y_z^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_b^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Para o modelo acima mencionado, ao efetuar a discretização das matrizes \mathbf{A}_b , \mathbf{B}_b e \mathbf{C}_b através de métodos tradicionais de discretização, pode-se obter as estimativas do vetor de estados, $\hat{\mathbf{Z}}$, usando a metodologia adaptativa proposta na Seção 2.3, formando assim o ADKF descrito na Seção 3.3. Isso se faz necessário porque, na prática, nem todas as componentes do vetor de estado \mathbf{Z} vão estar disponíveis para medição. No caso, supõe-se normalmente que somente as medições da posição da bola estejam disponíveis, logo as derivadas temporais da saída plana serão estimadas pelo filtro. Ressalta-se também que, a partir de (3.45), a versão discreta da matriz de entrada de ruído de processo é idêntica versão discreta de \mathbf{B}_b .

Dessa forma, a partir de $\hat{\mathbf{Z}}$, pode-se propor a seguinte lei de controle para o sistema (3.48), conforme descrito na subseção 3.2.4:

$$v = y_z^{(4)*}(t) - k_3 [\hat{y}_z^{(3)}(t) - y_z^{(3)*}(t)] - k_2 [\hat{y}_z(t) - \dot{y}_z^*(t)] - k_1 [\hat{y}_z(t) - \dot{y}_z^*(t)] - k_0 [\hat{y}_z(t) - y_z^*(t)], \quad (3.50)$$

onde os ganhos k_i são escolhidos de tal forma que $p(s) = s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0$ seja um polinômio de Hurwitz, garantindo a convergência das saídas planas e de suas derivadas temporais para as respectivas trajetórias nominais. Por conseguinte, a parametrização diferencial de (3.40) implica que x_2 , x_3 , x_4 e V_m convergem localmente para as suas referências.

A expressão final para V_m é portanto dada por:

$$V_m = g^{-1}(\hat{\mathbf{Z}}) [v - f(\hat{\mathbf{Z}})]. \quad (3.51)$$

3.4.1.2 Simulações Numéricas

Buscando validar o desempenho do sistema de controle de trajetória juntamente com a estimação adaptativa proposta neste capítulo para o modelo não-linear do sistema Bola e Barra, simulações numéricas foram então conduzidas para analisar de forma abrangente o desempenho do filtro de Kalman sem derivadas adaptativo (ADKF) proposto nesse capítulo.

Definindo um tempo de simulação $t_s = 10$ s e uma taxa de amostragem $\Delta t = 10$ ms, o sistema não-linear (3.40) é estabelecido com a hipótese que as matrizes de covariância do ruído de processo e de medição foram definidas como $\mathbf{Q}_k^{NL} = 10^{-6}$ e $\mathbf{R}_k^{NL} = 10^{-6}$, respectivamente. Ademais, por uma questão de simplicidade, considera-se que apenas a variável de controle não-linear está sujeita a um ruído de processo aditivo desconhecido.

O valor de referência para a posição da bola e, conseqüentemente, para a saída plana, é definido como 0,1 m. Assim, usando os parâmetros do sistema extraídos de [101] (ver Tabela 3.1),

obtêm-se as trajetórias nominais para as variáveis restantes usando a propriedade plana do sistema não-linear. Além disso, assume-se que as condições iniciais de (3.40) são nulas.

Tabela 3.1: Parâmetros do sistema Bola e Barra.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
L_{barra}	0,4255 m	g_{Terra}	9,81 m/s ²
r_{bb}	0,0254 m	J_{bola}	$4,129 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
R_{bola}	0,0127 m	K_{motor}	1,5286 rad/sV
m_{bola}	0,064 kg	τ_{motor}	0,0248 s

Em relação aos parâmetros do ADKF, após transformar o sistema (3.48) em forma de tempo discreto, estabelece-se que a estimativa inicial de cada estado corresponde a sua respectiva condição inicial e que $\mathbf{P}_0 = 0,1\mathbf{I}_{4 \times 4}$. Ressalta-se também que os parâmetros de controle foram ajustados como sendo os coeficientes do polinômio de Hurwitz da forma $p(s) = (s + 5,5)^4$, os quais fornecem um coeficiente de ponderação α igual a 0,4445 para a estimação de elementos diagonais da matriz de covariância do vetor de medições no ADKF.

Como o vetor de saída de (3.48) é idêntico ao de (3.40), tem-se que as respectivas matrizes de covariância do ruído de medição são idênticas, ou seja, $\mathbf{R}_k^{Brunovsky} = \mathbf{R}_k^{NL}$. No entanto, note que tal equivalência não é observada no que se refere a matriz de covariância de ruído de processo. Sendo assim, faz-se necessário obter uma relação matemática entre as matrizes de ambos sistemas que nos permita validar os resultados, já que a matriz de covariância de ruído de processo a ser estimada pelo ADKF proposto corresponde àquela de (3.48) em vez daquela associada a (3.40).

Sendo somente a variável de controle não-linear sujeita a um ruído de processo aditivo, pode-se escrever a seguinte relação a partir da representação de entrada-saída do sistema (ver (3.40)):

$$\omega^{Brunovsky} = g(y_z, \dot{y}_z, \ddot{y}_z, y_z^{(3)})\omega^{NL}. \quad (3.52)$$

Agora, ao definir $y_z^*(t)$ como um valor estático, obtêm-se que:

$$g(y_z^*(t), 0, 0, 0) = K_{bb}\beta_2. \quad (3.53)$$

Portanto, a equivalência entre as matrizes de ruído de processo pode ser formulada em regime estacionário ao substituir (3.53) em (3.52):

$$\omega^{Brunovsky} = (K_{bb}\beta_2)\omega^{NL} \implies \mathbf{Q}^{Brunovsky} = (K_{bb}\beta_2)^2 \mathbf{Q}^{NL}. \quad (3.54)$$

Para obter uma versão discreta de (3.54), utiliza-se o método de Van Loan (ver [102] para mais detalhes) para discretizar ambas as matrizes de covariância de ruído processo, o que leva a:

$$\mathbf{Q}_k^{Brunovsky} = (K_{bb}\beta_2)^2 \mathbf{Q}_k^{NL}. \quad (3.55)$$

A partir de (3.55), obtém-se então que o valor a ser estimado pelo filtro adaptativo proposto é $Q_k^{Brunovsky} = 6,66 \times 10^{-4}$, o qual será utilizado para a análise de convergência do ADKF.

Dentro desse contexto, propõe-se também comparar os resultados obtidos usando o ADKF com aqueles obtidos usando o DKF. A intenção é verificar o ganho que se agrega ao sistema por adaptar a matriz de covariância do ruído de processo ao longo da simulação, já que o DKF assume um valor constante.

Para tanto, realizações idênticas do ruído de processo e de medição foram utilizadas nos dois métodos de estimação. Simulações numéricas foram então conduzidas com $Q_0^{Brunovsky} = 100$ e $R_k^{Brunovsky}$ sendo conhecida *a priori*, cujos resultados são ilustrados nas Figuras 3.3 e 3.4.

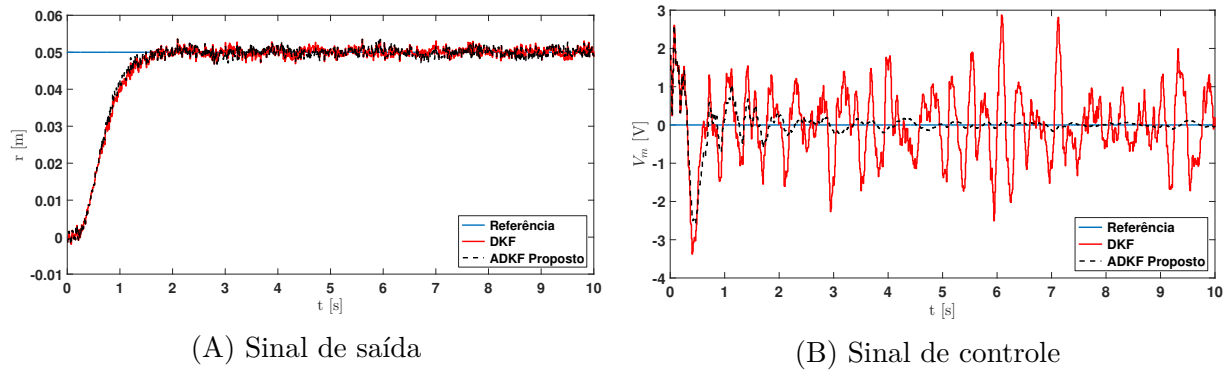


Figura 3.3: Evolução temporal dos sinais de saída e de controle.

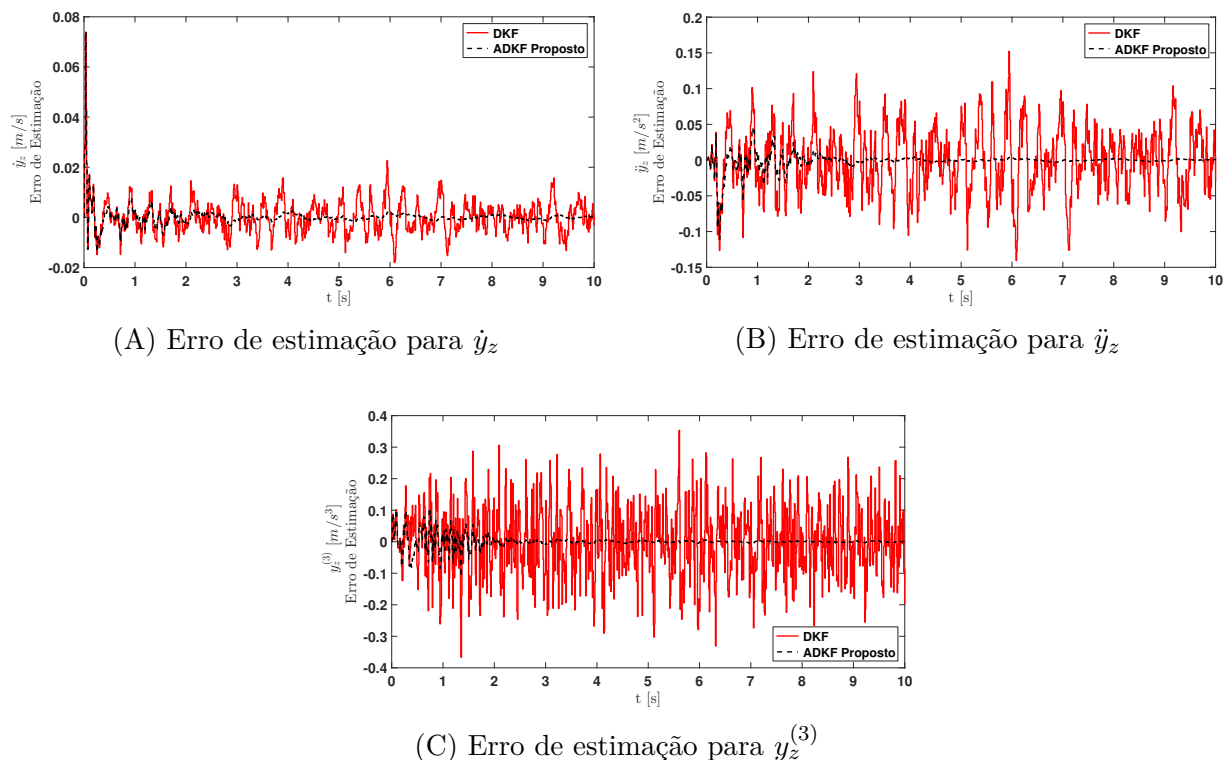


Figura 3.4: Erro de estimação para as derivadas temporais da saída plana (Estados não-medidos).

Como pode ser observado na Figura 3.3, a evolução temporal dos sinais de controle e de saída indicam que o ADKF proposto tem um melhor desempenho dinâmico em malha fechada quando comparado ao DKF. Além disso, fica claro na Figura 3.4 que os erros de estimação dos estados não-medidos obtidos pela filtragem adaptativa é substancialmente menor que o da DKF.

De forma similar ao caso linear, índices de desempenho de controle tradicionais e métricas de acurácia da estimação foram calculados para o DKF e ADKF, como visto nas Tabelas 3.2 e 3.3. Esses valores também foram calculados para o DKF com a matriz de covariância de ruído de processo exata (DKF ideal) com o objetivo de fornecer uma comparação mais abrangente entre eles.

Tabela 3.2: Índices de desempenho de controle.

	DKF	ADKF	DKF Ideal
ISE (y)	$1,37 \times 10^{-3}$	$1,35 \times 10^{-3}$	$1,34 \times 10^{-3}$
IAE (y)	$4,43 \times 10^{-2}$	$4,30 \times 10^{-2}$	$4,29 \times 10^{-2}$
ITAE (y)	$5,97 \times 10^{-2}$	$5,82 \times 10^{-2}$	$5,79 \times 10^{-2}$
TVC (V_m)	$2,08 \times 10^0$	$3,74 \times 10^{-1}$	$2,60 \times 10^{-1}$

Tabela 3.3: Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos.

	DKF	ADKF	DKF Ideal
RMSE (\dot{y}_z)	$6,77 \times 10^{-3}$	$3,74 \times 10^{-3}$	$3,56 \times 10^{-3}$
RMSE (\ddot{y}_z)	$4,51 \times 10^{-2}$	$1,11 \times 10^{-2}$	$9,20 \times 10^{-3}$
RMSE ($y_z^{(3)}$)	$1,14 \times 10^{-1}$	$1,84 \times 10^{-2}$	$1,38 \times 10^{-2}$
MAE (\dot{y}_z)	$4,98 \times 10^{-3}$	$1,41 \times 10^{-3}$	$1,10 \times 10^{-3}$
MAE (\ddot{y}_z)	$3,60 \times 10^{-2}$	$4,31 \times 10^{-3}$	$2,70 \times 10^{-3}$
MAE ($y_z^{(3)}$)	$9,16 \times 10^{-2}$	$8,02 \times 10^{-3}$	$4,97 \times 10^{-3}$

A Tabela 3.2 revela que os índices de desempenho de controle para o DKF apresentam uma deterioração no sinal de controle quando comparado ao nosso algoritmo e ao caso ideal. Uma conclusão semelhante pode ser alcançada a partir da Tabela 3.3, mas em termos de qualidade de estimativa dos estados não-medidos. Pode-se observar que os índices RMSE e MAE do ADKF são significativamente menores do que aqueles obtidos pelo DKF, o que indica maior nível de acurácia para o método proposto. Nota-se também que os erros de estimativa para o ADKF proposto se aproxima, predominantemente, dos erros obtidos pelo DKF ideal, como esperado. Isso se deve principalmente à estimativa em tempo real da matriz de covariância do ruído de processo durante o processo de filtragem usando o ADKF proposto.

Por fim, para analisar o desempenho de convergência do ADKF proposto, obteve-se a média temporal dos valores estimados de $Q_k^{Brunovsky}$ no último quarto da simulação. Foi observado então que $\bar{Q}_k^{Brunovsky} = 6,18 \times 10^{-4}$ para o intervalo em questão, indicando assim uma convergência consistente em relação aos valores reais de $Q_k^{Brunovsky}$.

Em vista das análises efetuadas, percebe-se que a adição do comportamento adaptativo em relação a matriz de covariância do ruído de processo é viável para o filtro de Kalman sem derivadas, o que garantiu um alto nível de acurácia da estimativa da saída plana e de suas derivadas temporais.

3.5 Conclusões

Neste capítulo, apresentaram-se inicialmente conceitos relacionados a teoria de planicidade diferencial envolvendo as etapas de planejamento e acompanhamento de trajetória para sistemas lineares e não-lineares. Em seguida, visando lidar com os casos da matriz de covariância do ruído de processo ser desconhecida para sistemas não-lineares diferencialmente planos, detalhou-se como a abordagem adaptativa proposta para sistemas lineares descrita no capítulo anterior pode ser combinada com o filtro de Kalman sem derivadas introduzido em [60]. Por fim, ilustrou-se o desempenho do filtro de Kalman sem derivadas adaptativo através de um modelo não-linear para o sistema Bola e Barra.

No próximo capítulo, a partir de elementos teóricos recentemente introduzidos à teoria de planicidade diferencial, será derivada uma outra metodologia que permitirá aplicar o filtro de Kalman sem derivadas adaptativo para um classe maior de sistemas não-lineares, incluindo certos sistemas não-diferencialmente planos.

Capítulo 4

Estimação Adaptativa e Entradas Planas

4.1 Introdução

Como observado no capítulo anterior, o conceito de planicidade diferencial permitiu o desenvolvimento de um poderoso conjunto de metodologias para o planejamento de trajetória e a síntese de controladores em malha fechada tanto em sistemas lineares como não-lineares. Ao se utilizar essa abordagem, engenheiros tipicamente buscam alocar os sensores na planta visando obter medições direta das saídas planas com o objetivo de realimentar o controlador em malha fechada, além de facilitar o planejamento de trajetória.

Por outro lado, essas questões ainda se apresentam como problemas em aberto na literatura para sistemas não-diferencialmente planos. De forma similar, observa-se que, para um sistema diferencialmente plano com a saída plana diferente da saída do sistema, a abordagem de controle a partir da teoria de planicidade diferencial se torna mais complexa ou, até mesmo, inviável devido a instabilidades numéricas do modelo [103].

Para ambos os casos, tipicamente, desenvolve-se um controlador baseado em um modelo aproximado, cuja o vetor de saída é composto pelas saídas planas do sistema. Os erros de aproximação podem então ser tratados como perturbações do modelo e, conseqüentemente, compensados por alguma lei de controle complementar. No entanto, para casos em que se deseja realizar um rastreamento mais preciso durante o comportamento transiente do sistema, tais aproximações não são satisfatórias [79].

Dentro desse contexto, Waldherr e Zeitz [72, 73] incorporaram à teoria de planicidade diferencial o conceito de entradas planas, cujo foco era promover uma alocação dos atuadores de tal forma que o sistema se torne diferencialmente plano. Como consequência direta, permite-se usufruir dos elementos teóricos já consolidados da teoria de planicidade diferencial para o projeto de controladores. Agora, deseja-se usufruir também para fins de estimação de estados, como será visto no decorrer deste capítulo.

Neste capítulo, explana-se inicialmente sobre um classe de sistemas não-diferencialmente planos denominados sistemas liouvillianos, os quais apresentam uma característica estrutural que facilita a etapa de planejamento de trajetória. Na Seção 4.3, apresenta-se formalmente o conceito de entradas planas, enquanto que, na Seção 4.4, detalha-se o seu potencial uso no controle de trajetória de sistemas não-lineares. Em seguida, na Seção 4.5, propõe-se uma nova metodologia de estimação adaptativa em malha fechada baseada nessa abordagem por entradas planas. Por último, na Seção 4.6, ilustra-se a efetividade dessa abordagem adaptativa a partir do estudo de caso de três sistemas não-lineares.

4.2 Sistemas Liouvillianos

Como descrito na Seção 1.3, alguns sistemas não-lineares clássicos presentes na literatura são conhecidos por não serem diferencialmente planos. Apesar de não poderem ser linearizados através de uma realimentação de estados (seja uma realimentação linearizante estática ou dinâmica), esses sistemas ainda podem ser controláveis, mesmo que nem todas as suas variáveis possam ser parametrizadas em função de um conjunto finito de variáveis endógenas ao sistema. O número de variáveis que não podem ser parametrizadas é denominado como o “defeito” do sistema [68].

Nesse contexto, encontram-se os sistemas liouvillianos, ou sistemas integráveis por quadratura. Introduzida inicialmente por Chelouah [104], essa classe de sistemas é caracterizada por ser possível identificar um subsistema diferencialmente plano em que os defeitos do sistema original podem ser diferencialmente parametrizados a partir de integrações elementares das saídas planas do subsistema. É interessante notar que os defeitos necessariamente não vão fazer parte desse subsistema diferencialmente plano. Para ilustrar o conceito de integrabilidade por quadraturas associado a sistemas liouvillianos, considere o sistema do Exemplo 4.2.1.

Exemplo 4.2.1. Considere o sistema não-linear dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{cases} \quad (4.1)$$

O sistema (4.1) não é linearizável através de uma realimentação de estados estática ou dinâmica. Observe que o defeito do sistema é igual a 1, já que é possível identificar um subsistema diferencialmente plano com a saída plana sendo x_2 e com x_1 sendo a única variável que não o pertence. No entanto, x_1 pode ser obtido a partir da integração $x_1 = \int (x_2 + \dot{x}_2^2)$.

O caráter liouviliano apresenta grande interesse por permitir antecipadamente o cálculo das trajetórias nominais em malha aberta, como nos casos dos sistemas diferencialmente planos, mesmo que necessite calcular algumas operações de integração. Nesse caso, o controle em malha fechada é normalmente realizado através de técnicas tradicionais presentes na literatura [92]. Uma possível abordagem de controle será detalhado nas próximas seções.

4.3 Entradas Planas

Nessa seção, apresentam-se expressões algébricas para determinar os campos vetoriais associados as entradas planas tanto para sistemas SISO como para sistemas MIMO. A análise será limitada para sistemas não-lineares que são afins em relação a entrada.

Caso SISO

Seja o seguinte sistema não-linear SISO da forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{4.2}$$

com o sistema observável definido como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{4.3}$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são campos vetoriais suaves e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Além disso, assume-se $\mathbf{f}(0) = 0$ e $h(0) = 0$.

Segundo Waldherr e Zeitz [72], a condição necessária e suficiente de existência de uma entrada plana u_E é que o sistema (4.2) seja observável ao menos localmente ao domínio de interesse. Inicialmente introduzida em [97], a noção de observabilidade para sistemas não-lineares pode ser expressa a partir de uma ferramenta matemática denominada derivada de Lie.

Dados uma função escalar $h(\mathbf{x})$ e um campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, a derivada de Lie de $h(\mathbf{x})$ em relação a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é dada por [98]:

$$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla h(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}).\tag{4.4}$$

Desde que a derivada de Lie de uma função escalar (vetor linha) é também uma função escalar, as derivadas de Lie de maior ordem são obtidas através de recorrência. Logo, tem-se que a derivada de Lie de ordem i de uma função escalar $h(\mathbf{x})$ é dada por:

$$L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}[L_{\mathbf{f}}^{i-1}h(\mathbf{x})] = \nabla[L_{\mathbf{f}}^{i-1}h(\mathbf{x})] \mathbf{f}(\mathbf{x}),\tag{4.5}$$

em que, por definição, $L_{\mathbf{f}}^0 h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$.

Dentro desse contexto, o sistema (4.2) é observável se e somente se a matriz de observabilidade \mathbf{E}_O de (4.3):

$$\mathbf{E}_O = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T\tag{4.6}$$

apresenta posto completo, ou seja:

$$\text{posto}(\mathbf{E}_O) = n. \quad (4.7)$$

Sendo (4.7) uma condição verificada, então existe uma entrada plana u_E associada a um campo vetorial de entrada $\gamma_S \in \mathbb{R}^n$ que combinado com (4.3) resulta no seguinte sistema diferencialmente plano:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_E &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_E) + \gamma_S(\mathbf{x}_E)u_E \\ y &= h(\mathbf{x}_E) \end{aligned}, \quad (4.8)$$

cuja saída plana é dada por y . Além disso, note que o vetor de estados de (4.8) é denotado agora como \mathbf{x}_E , já que este pode diferir do vetor de estados de (4.2) mesmo que as respectivas saídas sejam idênticas.

O campo vetorial de entrada γ_S associado a entrada plana u_E é então dado por [72]:

$$\gamma_S = a_{FIS} \mathbf{E}_O^{-1} [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]^T \quad (4.9)$$

com a_{FIS} sendo uma função real não-nula do vetor de estados \mathbf{x}_E . Tipicamente, escolhe-se $a_{FIS} = \det(\mathbf{E}_O)$ para simplificar as expressões de γ_S .

Caso MIMO

Em Waldherr e Zeitz [73], demonstrou-se que o critério de observabilidade não é necessário para a existência das entradas planas no caso MIMO. Essa questão também foi reforçada em [78], quando os autores apresentaram um método para sistemas não-observáveis que permite computar os campos vetoriais associados as entradas planas.

Neste manuscrito, para fins de simplificação, restringe-se o estudo aos sistemas não-lineares MIMO observáveis, abordando assim os resultados obtidos em [73]. Dessa forma, tem-se que os campos vetoriais associados as entradas planas podem ser determinados de forma similar ao apresentado anteriormente, como será descrito a seguir.

Seja o seguinte sistema não-linear MIMO da forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{x})u_i \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.10)$$

com o sistema observável definido como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.11)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e cada $y_i \in \mathbb{R}$.

Como no caso SISO, as entradas planas $\mathbf{u}_E = [u_{1E}, \dots, u_{mE}]^T$ são associadas aos campos vetoriais de entrada $\boldsymbol{\gamma}_M = [\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m]$, complementando o sistema (4.11) para obter o seguinte sistema diferencialmente plano:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_E &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_E) + \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{x}_E) u_{iE} \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}_E), \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}\tag{4.12}$$

onde \mathbf{x}_E e y_i representam o vetor de estados e cada uma das saídas do sistema, respectivamente, com $\boldsymbol{\gamma}_i \in \mathbb{R}^n$. Além disso, ressalta-se também que y_i correspondem as saídas planas de (4.12).

Conforme descrito em [73], os autores utilizam tanto a noção de codistribuição de observabilidade como os índices de observabilidade para determinar os campos vetoriais $\boldsymbol{\gamma}_i$ associados a cada entrada plana u_{iE} :

1. Segundo Krener e Respondek [105], o sistema (4.11) é dito ter índices de observabilidade $\boldsymbol{\kappa}^O = (\kappa_1^O, \dots, \kappa_m^O)$ em $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se $\sum_{i=1}^m \kappa_i^O = n$, $\kappa_i^O \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, e há uma vizinhança χ de \mathbf{x}_0 tal que a codistribuição de observabilidade:

$$dO_\kappa = \text{span} \left\{ dL_f^j h_i, 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq \kappa_i^O - 1 \right\}\tag{4.13}$$

é de dimensão constante igual a n em χ .

2. Se o sistema (4.11) assume índices de observabilidade $\boldsymbol{\kappa}^O = (\kappa_1^O, \dots, \kappa_m^O)$, então é possível determinar a sua respectiva matriz de observabilidade \mathbf{E}_O como se segue:

$$\mathbf{E}_O = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ L_f h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{\kappa_1^O - 1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_m(\mathbf{x}) \\ L_f h_m(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{\kappa_m^O - 1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}\tag{4.14}$$

Dessa forma, os campos vetoriais $\boldsymbol{\gamma}_i$ que compõem $\boldsymbol{\gamma}_M$ são dados por:

$$\boldsymbol{\gamma}_M = [\boldsymbol{\gamma}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\gamma}_m] = \mathbf{E}_O^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_m \end{bmatrix}^T \mathbf{A}_{FIM}\tag{4.15}$$

com $\mathbf{A}_{FIM} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sendo uma matriz não-singular composta de funções escalares arbitrárias do vetor de estado \mathbf{x}_E , enquanto que $\boldsymbol{\phi}_j$ são vetores linhas n -dimensionais da seguinte forma:

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0], \quad j = 1, \dots, m \quad (4.16)$$

onde a posição do 1 será dada por $\sum_{i=1}^j \kappa_i^O$. É interessante notar que, segundo (4.13), os índices de observabilidade de (4.10) não são únicos, acarretando em diferentes possibilidades de $\gamma_M(\mathbf{x})$.

4.4 Estrutura do Controlador

Como citado anteriormente, a abordagem proposta pelas entradas planas requer a implementação física de atuadores que correspondam aos campos vetoriais associados com as entradas planas. Isso resultaria em um sistema diferencialmente plano, cujas variáveis de saída corresponderiam as saídas planas. Entretanto, em casos práticos, essa abordagem pode ser inviável devido a restrições estruturais, técnicas ou econômicas, mesmo que, em princípio, seja possível a existência das entrada planas.

Waldherr e Zeitz [73] até propõem uma condição de realizabilidade da entrada plana para sistemas mecânicos representados pela seguinte equação:

$$\ddot{\mathbf{q}} + D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{u} \quad (4.17)$$

onde \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$ denota as posições e as velocidades generalizadas do sistema. Em outras palavras, para se obter um campo vetorial associado a entrada plana fisicamente realizável, é necessário que o mesmo só atue sob $\dot{\mathbf{q}}$. De toda maneira, essa abordagem pode ser ineficiente ou fisicamente impossível, já que nem todo estado pode ser diretamente atuado.

Para contornar esse problema, encontram-se na literatura estratégias de controle que buscam relacionar analiticamente as variáveis de entrada do sistema em estudo com as do sistema associado as entradas planas. A motivação por trás disso é a possibilidade de projetar controladores inteiramente para o sistema associado as entradas planas, que é diferencialmente plano, seguindo as estratégias apresentadas nas etapas de planejamento de trajetória e de rastreamento de trajetória descritas nas subseções 3.2.4 e 3.2.3, respectivamente. Assim, pode-se obter os controladores equivalentes ao sistema em estudo de tal forma a se preservar os atuadores originais.

Em sistemas SISO, Stumper *et al.* [79] propuseram uma estrutura de controle contendo um compensador dinâmico ($u_E \rightarrow u$) que transforma u_E no sinal de controle u . Tal procedimento pode ser aplicado em sistemas observáveis e suficientemente suaves com dinâmica interna não-observável estável. Mais precisamente, observável significa que sua forma canônica observável existe (i.e., o critério (4.7) é satisfeito), e suave significa que o sistema pertence a classe de diferenciabilidade C^m . Além disso, o sistema precisa ser controlável, mas não necessariamente diferencialmente plano.

O compensador dinâmico deve ser sintetizado de tal forma que o comportamento entrada-saída do bloco formado pelo compensador e pela planta seja idêntico ao do sistema associado com a entrada plana, como pode ser observado na Figura 4.1.

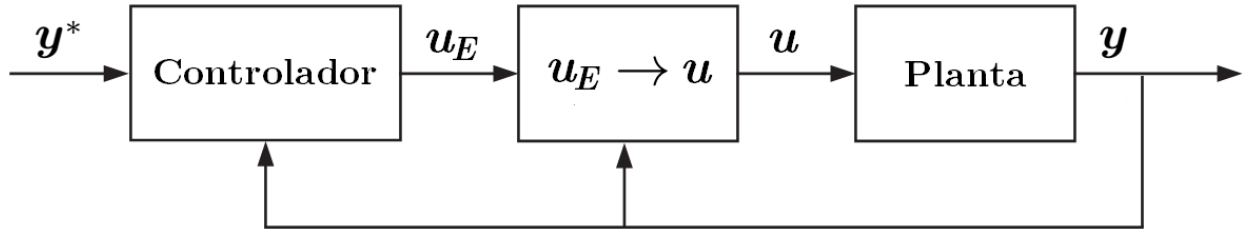


Figura 4.1: Estrutura do controlador a partir de uma abordagem com entradas planas. Adaptado de [79].

Sendo observável e suficientemente suave, o comportamento entrada-saída da planta pode ser representado por uma única equação diferencial de ordem superior [106]:

$$y^{(n)} = q(y, \dots, y^{(n-1)}) + p(y, \dots, y^{(n-1)}, u, \dots, u^{(m)}) \quad (4.18)$$

onde n é a ordem do sistema e $m = n - r$ é a ordem da dinâmica interna não-observável. O sistema associado a entrada plana tem grau relativo completo, portanto o seu comportamento entrada-saída toma a seguinte forma:

$$y^{(n)} = q(y, \dots, y^{(n-1)}) + p_E(y, \dots, y^{(n-1)})u_E \quad (4.19)$$

onde $p_E(\bullet) \neq 0$ se o sistema é controlável [79].

Ao impor comportamentos entrada-saída idênticos para ambos os sistemas, deve-se igualar então as equações (4.18) e (4.19). Portanto, o compensador dinâmico precisa satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$p(y, \dots, y^{(n-1)}, u, \dots, u^{(m)}) = p_E(y, \dots, y^{(n-1)})u_E \quad (4.20)$$

Desde que o compensador reconheça u_E como entrada e u como saída, tem-se um sistema causal que pode ser implementado como um compensador de ordem m .

Outro ponto ressaltado por Stumper *et al.* [79] é que as expressões dos compensadores dinâmicos podem apresentar certas singularidades quando implementados em sistemas reais, além da possibilidade da existência de singularidades no grau relativo do modelo da planta. Para contornar isso, sugere-se utilizar as seguintes aproximações em tempo discreto durante a implementação, conforme apresentada por Brayton *et al.* [107]:

$$\begin{cases} u & \approx u[k] \\ \dot{u} & \approx (u[k] - u[k-1])/\Delta t \\ u^2 & \approx u[k]u[k-1] \end{cases} \quad (4.21)$$

onde Δt corresponde ao intervalo de amostragem.

Para sistemas lineares, tem-se que a aplicação desse compensador dinâmico corresponde ao cancelamento de polos e zeros através de um filtro passa-baixa na entrada. É bem conhecido que

esse procedimento resulta em uma estabilidade global se o sistema é de fase mínima, o que equivale a dizer que a localização dos zeros do sistema estão sobre o semiplano complexo esquerdo [98]. Uma possível extensão dessa condição para sistemas não-lineares é que a dinâmica interna não-observável do sistema precisa ser assintoticamente estável, apesar dessa equivalência ainda ser considerada como uma questão em aberto na literatura [79]. De toda forma, para aplicações estáveis, a estabilidade da dinâmica interna não-observável do sistema não-linear é suficiente para utilizar o compensador dinâmico.

Por último, faz-se necessário discutir uma possível extensão do uso dessa estrutura de controle contendo um compensador dinâmico para sistemas MIMO. Mais precisamente, propõe-se que os índices de observabilidade do sistema sejam utilizados para obter os comportamentos entrada-saída tanto para a planta original como para o sistema associado as entradas planas. Logo, respeitando o limite imposto pelo índice de observabilidade associado a cada saída, pode-se impor que ambos os sistema apresentem os mesmos comportamentos entrada-saída. Isso resulta então em um conjunto de equações diferenciais, cujas soluções fornecem as expressões dos compensadores dinâmicos.

4.5 Filtro de Kalman sem Derivadas Adaptativo por Entradas Planas

A partir da introdução do compensador dinâmico na Seção 4.4, vislumbra-se uma oportunidade de estender o filtro de Kalman sem derivadas adaptativo (ADKF) proposto no capítulo anterior para mais sistemas não-lineares, inclusive para certos sistemas não-diferencialmente planos. A estrutura proposta do ADKF a partir de uma abordagem por entradas planas pode ser visualizada na Figura 4.2.

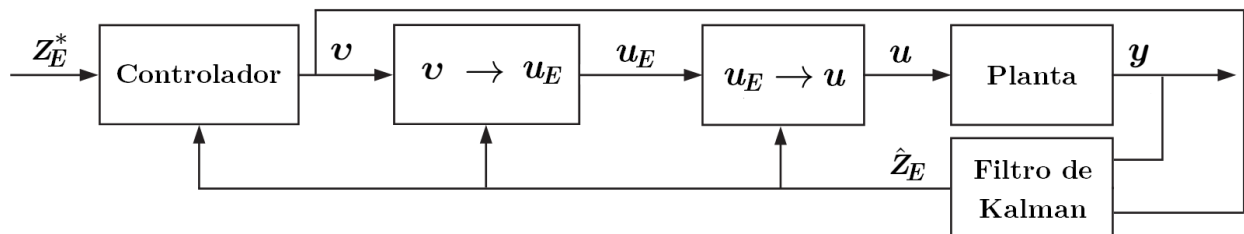


Figura 4.2: Estrutura do estimador proposto a partir de uma abordagem por entradas planas.

Como o vetor de saídas da planta não-linear em estudo é idêntico ao das saídas planas do sistema não-linear associado as entradas planas, propõe-se então, a partir das medições do primeiro, performar o ADKF na forma canônica de Brunovsky do sistema associado as entradas planas. Assim, utilizam-se as estimativas das saídas planas e de suas respectivas derivadas temporais para obter o comando v , o qual, no próximo instante de tempo, também realimentará o ADKF, os compensadores dinâmicos e, conseqüentemente, os sinais de controle que serão aplicados na planta original.

É importante também ressaltar que é possível encontrar uma correspondência entre os estados

\mathbf{x}_E do sistema associado as entradas planas e os estados \mathbf{x} da planta através da comparação entre as respectivas formas canônicas observáveis. Isso implica que, a partir das estimativas do filtro de Kalman, é possível reconstruir \mathbf{x}_E devido a parametrização e, conseqüentemente, obter \mathbf{x} .

Outro ponto interessante a ser salientado é que, apesar do seu potencial para ser aplicado em sistemas não-diferencialmente planos, essa metodologia adaptativa por entradas planas surge como alternativa à estratégia introduzida no capítulo anterior para estimação em sistemas diferencialmente planos, cuja saída plana é diferente do vetor de saídas.

Isso ocorrer porque seria necessário adicionar algum mecanismo para medir a saída plana a fim de utilizar essa informação no DKF, o que, na prática, pode inviabilizar o projeto. Na abordagem por entradas planas, como o vetor de saídas da planta não-linear em estudo corresponde a saída do sistema associado as entradas planas, então esse impasse é contornado. Em contrapartida, reforça-se novamente a exigência da estabilidade da dinâmica interna não-observável associada ao vetor de saída da planta, além de potencialmente ser necessário resolver um complexo sistema de equações para obter a expressão dos compensadores.

Por fim, faz-se necessário tecer alguns comentários acerca de como as matrizes de covariância de ruído da planta em estudo estão relacionadas àsquelas do sistema linear equivalente na forma canônica de Brunovsky referente ao sistema associado as entradas planas.

No que concerne ao ruído de medição, tem-se que o objetivo da alocação dos atuadores proposta através do conceito de entradas planas é exatamente garantir que as medições da planta sejam as saídas planas do sistema associado as entradas planas. Como consequência direta, a covariância do ruído de medição do sistema linear equivalente referente ao sistema associado as entradas planas permanece idêntica ao da planta em estudo.

Por outro lado, no que se refere ao ruído de processo, obter tal relação entre as matrizes de covariância é ainda mais complicada do que analisado no capítulo anterior devido a presença do compensador dinâmico. Por essas razões que a análise do desempenho do filtro adaptativo proposto será realizada indiretamente através do uso de métricas de acurácia da estimação, quando comparado ao caso sem adaptação.

Portanto, na próxima seção, essa metodologia adaptativa proposta para sistemas não-lineares será avaliada através do estudo de caso de três sistemas dinâmicos conhecidos na literatura: *Sistema de Lorenz*, *Processo de Quatro Tanques* e *Navio de Superfície*.

4.6 Estudo de Casos

4.6.1 Sistema de Lorenz

Nos últimos anos, a análise e o controle de sistemas caóticos atraíram considerável atenção da comunidade científica, sendo caracterizados por serem fortemente sensível a pequenas mudanças nas condições iniciais. Tal comportamento pode ser visto tanto benéfico como prejudicial dependendo do sistema e do objetivo sob investigação.

Dentre a variedade de sistemas caóticos na literatura, destaca-se o já conhecido sistema de Lorenz [108] que descreve o movimento de convecção de uma camada fluida acionada termicamente entre placas paralelas, buscando assim explicar algumas características da dinâmica atmosférica. Matematicamente, o sistema de Lorenz pode ser representado como uma expansão de Fourier truncada das equações de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \sigma_L(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \rho_L x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta_L x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (4.22)$$

onde σ_L , ρ_L e β_L são parâmetros reais que representam o número de Prandtl, o número de Rayleigh e um fator geométrico, respectivamente. As variáveis de estado x_1 , x_2 e x_3 representam as medidas das velocidades dos fluidos e a distribuição espacial da temperatura na camada fluida sob gravidade, sendo x_1 considerada também como a saída do sistema.

Apesar de muitos estudos na literatura fazerem uso de um controle externo [109], considera-se aqui o número de Rayleigh como a variável de controle ($u \equiv \rho_L$), conforme sugerido em [110]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \sigma_L(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_1 u - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta_L x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (4.23)$$

sendo essa escolha proveniente do fato de que o número de Rayleigh é o único parâmetro que pode ser ajustado fisicamente (e.g., alterando a transferência de calor para o fluido a partir de baixo). Ademais, a análise de estabilidade dessa configuração pode ser encontrada em [111].

4.6.1.1 Planejamento de Trajetória

Sendo $y = x_1$ a saída de (4.23), deseja-se que o planejamento de trajetória seja baseado no conhecimento de $x_1^*(t)$ e de suas respectivas derivadas temporais.

Dentro desse contexto, observe que a trajetória nominal para x_2 pode ser obtida como segue:

$$x_2^*(t) = \frac{\dot{x}_1^*(t)}{\sigma_L} + x_1^*(t) \quad (4.24)$$

Já em relação à trajetória nominal para x_3 , uma possibilidade viável é resolver a seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}_3^*(t) = -\beta_L x_3^*(t) + x_1^*(t)x_2^*(t) \quad (4.25)$$

assumindo que $\dot{\boldsymbol{x}} = 0$.

O controle nominal é diretamente obtido através da seguinte expressão:

$$u^*(t) = \frac{\ddot{x}_1^*(t) + \sigma_L [\dot{x}_1^*(t) + x_2^*(t) + x_1^*(t)x_3^*(t)]}{\sigma_L x_1^*(t)} \quad (4.26)$$

Por fim, mostra-se que (4.23) é diferencialmente plano em [110], cuja saída plana pode ser determinada segundo a abordagem descrita na subseção 3.2.2, facilitando assim a etapa de planejamento de trajetória. Entretanto, observa-se que a expressão da saída plana corresponde a uma combinação linear de variáveis de estado em vez da própria saída do sistema, rendendo assim uma parametrização diferencial não-trivial. Propõe-se então desenvolver uma abordagem de controle por entradas planas, conforme descrito nas seções anteriores.

4.6.1.2 Estimação e Controle de Trajetória por Entradas Planas

Inicialmente, observa-se que o sistema (4.23) apresenta uma dinâmica interna não-observável assintoticamente estável para valores positivos de β_L por se ter definido que $y = x_1$. Assim, daqui em diante, assume-se tal hipótese em relação a β_L válida a fim de satisfazer a condição de utilização dos compensadores dinâmicos e, conseqüentemente, tornar viável a estratégia de controle proposta.

Seja então o sistema observável de (4.22) representado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \sigma_L (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta_L x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (4.27)$$

sendo a saída do sistema dada por $y = x_1$.

A partir de (4.6), a matriz de observabilidade \mathbf{E}_O é dada por:

$$\mathbf{E}_O = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} y \\ L_f y \\ L_f^2 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sigma_L & \sigma_L & 0 \\ \sigma_L^2 - x_3 \sigma_L & -\sigma_L^2 - \sigma_L & -x_1 \sigma_L \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde o $\text{posto}(\mathbf{E}_O) = 3$ se $x_1 \neq 0$.

Assumindo $x_1 \neq 0$, tem-se que o campo vetorial de entrada γ_S associado a entrada plana u_E é então obtido a partir de (4.9):

$$\gamma_S = a_{FIS} \mathbf{E}_O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

onde se utilizou $a_{FIS} = -x_1 \sigma$ para fins de simplificação.

Desse modo, o sistema associado as entradas planas é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1E} &= \sigma_L (x_{2E} - x_{1E}) \\ \dot{x}_{2E} &= -x_{2E} - x_{1E}x_{3E} \\ \dot{x}_{3E} &= u_E - \beta_L x_{3E} + x_{1E}x_{2E} \end{cases} \quad (4.30)$$

sendo o vetor de estados denotado por $\mathbf{x}_E = [x_{1E} \ x_{2E} \ x_{3E}]^T$, o qual não é necessariamente equivalente ao vetor de estados de (4.23), e a saída plana $y_z = x_{1E}$.

A parametrização diferencial das variáveis de estado associada a saída plana y_z e suas derivadas temporais pode ser visualizada a seguir:

$$\begin{aligned} x_{1E} &= y_z, & x_{2E} &= \frac{\dot{y}_z + y_z \sigma_L}{\sigma_L}, & x_{3E} &= -\frac{\ddot{y}_z + \dot{y}_z + y_z \sigma_L + \dot{y}_z \sigma_L}{y_z \sigma_L}, \\ u_E &= \frac{-\left[y_z^{(3)} - \sigma_L^2 (y_z - x_{2E}) (x_{3E} - \sigma_L) - \sigma_L (x_{2E} + y_z x_{3E}) (\sigma_L + 1) + y_z \sigma_L (y_z x_{2E} - x_{3E} \beta_L) \right]}{y_z \sigma_L} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Em relação ao planejamento de trajetória para (4.30), infere-se que se $y_z^*(t)$ e suas respectivas derivadas temporais são conhecidas, então as trajetórias nominais \mathbf{x}_E^* e o controle nominal $u_E^*(t)$ são obtidos diretamente a partir de (4.31).

Em seguida, sendo diferencialmente plano, tem-se que (4.30) é, portanto, equivalente ao seguinte sistema linear SISO na forma canônica de Brunovsky:

$$y_z^{(3)} = f_z(\mathbf{Z}_E) + g_z(\mathbf{Z}_E)u_E = v \quad (4.32)$$

onde $\mathbf{Z}_E = [y_z \ \dot{y}_z \ \ddot{y}_z]^T$ e v representa a nova variável de controle. Destaca-se também que as expressões de $f_z(\mathbf{Z}_E)$ e $g_z(\mathbf{Z}_E)$ foram omitidas para facilitar a compreensão do leitor.

Isso implica que (4.32) pode ser reescrito na seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}_E &= \mathbf{A}_b \mathbf{Z}_E + \mathbf{B}_b v \\ \mathbf{y}_z &= \mathbf{C}_b \mathbf{Z}_E \end{cases} \quad (4.33)$$

com

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Para o modelo acima mencionado, ao efetuar a discretização das matrizes \mathbf{A}_b , \mathbf{B}_b e \mathbf{C}_b através de métodos tradicionais de discretização, propõe-se obter as estimativas do vetor de estados, $\hat{\mathbf{Z}}_E$, usando a metodologia adaptativa proposta na Seção 2.3, formando assim o ADKF descrito na Seção 4.5. Ressalta-se também que, a partir de (4.32), a versão discreta da matriz de entrada do ruído de processo é idêntica a versão discreta de \mathbf{B}_b .

Dessa forma, a partir das estimativas $\hat{\mathbf{Z}}_E$, então se pode propor a seguinte lei de controle para o sistema (4.33), conforme descrito na subseção 3.2.4:

$$v = y_z^{(3)*}(t) - k_{21} [\hat{y}_z - \dot{y}_z^*(t)] - k_{11} [\hat{y}_z - y_z^*(t)] - k_{01} [\hat{y}_z - y_z^*(t)] \quad (4.35)$$

com (k_{21}, k_{11}, k_{01}) sendo escolhidos de tal forma que $p(s) = s^3 + k_{21}s^2 + k_{11}s + k_{01}$ seja um polinômio de Hurwitz.

Portanto, isolando u_E em (4.32), obtém-se que:

$$u_E = g_z^{-1}(\hat{\mathbf{Z}}_E) [v - f_z(\hat{\mathbf{Z}}_E)] \quad (4.36)$$

Agora, a partir do conhecimento de u_E , a última etapa consiste em construir o compensador dinâmico que irá permitir obter a expressão final do sinal de controle u . Devido ao fato de que o vetor de saída é o mesmo tanto para (4.23) quanto para (4.30), isso nos permite determinar os comportamentos entrada-saída de ambos para $y = x_1$ e, conseqüentemente, igualá-los de modo a obter a expressão do compensador dinâmico com o seguinte formato:

$$\dot{u} = \lambda_E(\hat{\mathbf{Z}}_E, u_E, u) \quad (4.37)$$

onde λ_E é uma função suave.

Por fim, integrando a equação (4.37), obtém-se, portanto, o sinal de controle u que será aplicado na planta não-linear dada por (4.23).

4.6.1.3 Simulações Numéricas

Buscando validar o desempenho do sistema de controle de trajetória juntamente com a estimação adaptativa proposta neste capítulo para o modelo não-linear (4.23), conduziram-se simulações numéricas para analisar de forma mais abrangente o filtro de Kalman sem derivadas adaptativo (ADKF) proposto neste capítulo.

Definindo um tempo de simulação $t_s = 20$ s e uma taxa de amostragem $\Delta t = 10$ ms, o sistema não-linear (4.23) é estabelecido com a hipótese que suas matrizes de covariância do ruído de processo e de medição foram definidas como $\mathbf{Q}_k^{NL} = 10^{-1}$ e $\mathbf{R}_k^{NL} = 10^{-4}$, respectivamente. Ademais, por uma questão de simplicidade, considera-se que apenas a variável de controle não-linear está sujeita a um ruído de processo aditivo.

O valor de referência para a saída do sistema é definido como 15. Assim, usando $\sigma_L = 10$ e $\beta_L = 8/3$, os quais foram extraídos de [110], obtêm-se as trajetórias nominais para as variáveis restantes a partir das equações (4.24 - 4.26). Ademais, assume-se as condições iniciais de (4.23) como sendo $\mathbf{x}_0 = [10 \ 5 \ 5]^T$.

Em relação aos parâmetros do ADKF, após transformar o sistema (4.33) em forma de tempo discreto, estabelece-se que a estimativa inicial do vetor de estados é nula e que $\mathbf{P}_0 = 0,01\mathbf{I}_{3 \times 3}$. Ressalta-se também que os parâmetros de controle foram ajustados como sendo os coeficientes do

polinômio de Hurwitz da forma $p(s) = (s + 3,75)(s + 5)^2$, os quais fornecem um coeficiente de ponderação α igual a 0,4291 para a estimação de elementos diagonais da matriz de covariância do vetor de medições no ADKF.

Como a saída de (4.23) representa a saída plana de (4.30), a matriz de covariância do ruído de medição associada com (4.33) será idêntica àquela associada com (4.23), ou seja, $\mathbf{R}_k^{Brunovsky} = \mathbf{R}_k^{NL} = 10^{-4}$.

Agora, devido a dificuldade de relacionar matematicamente as matrizes de covariância do ruído de processo de (4.23) e de (4.33), propõe-se então comparar os resultados obtidos do ADKF em relação com os do DKF. Mais precisamente, ao definir uma matriz $\mathbf{Q}_k^{Brunovsky}$ constante durante toda a simulação ao DKF, a ideia consiste em avaliar o grau de efetividade que é agregado ao sistema devido a estimação adaptativa de $\mathbf{Q}_k^{Brunovsky}$ pelo ADKF.

Para tanto, utilizaram-se realizações idênticas do ruído de processo e de medição em ambos métodos de estimação. Simulações numéricas foram então conduzidas com $\mathbf{Q}_0^{Brunovsky} = 10^{-2}$ e $\mathbf{R}_k^{Brunovsky}$ sendo conhecida *a priori*, cujos resultados são ilustrados nas Figuras 4.3 a 4.5.

Como pode ser observado na Figura 4.3 e Figura 4.4, a evolução temporal dos sinais correspondentes às variáveis de estado e de controle indicam que o ADKF proposto tem um melhor desempenho dinâmico em malha fechada quando comparado ao DKF. Ressalta-se também que, na Figura 4.5, os erros de estimação das derivadas temporais da saída plana, cujas medições não estão disponíveis, obtidos pela filtragem adaptativa é substancialmente menor que o da DKF.

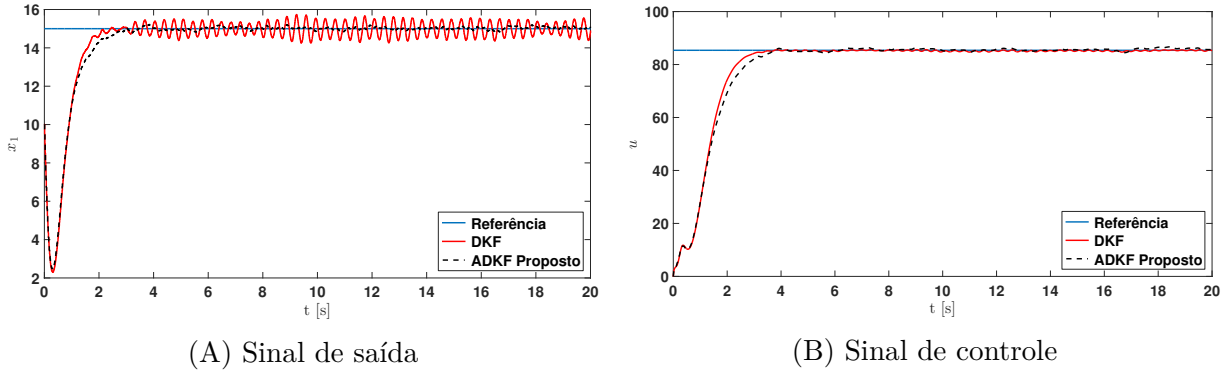


Figura 4.3: Evolução temporal dos sinais de saída e de controle.

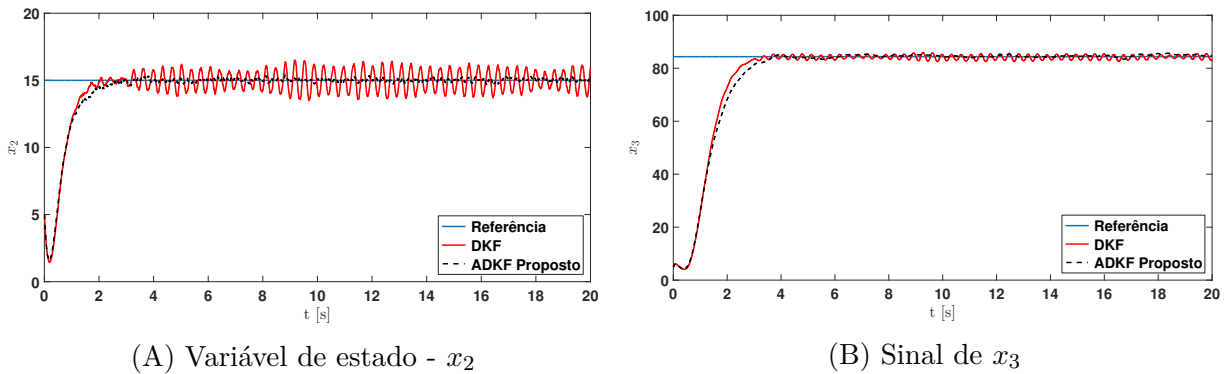
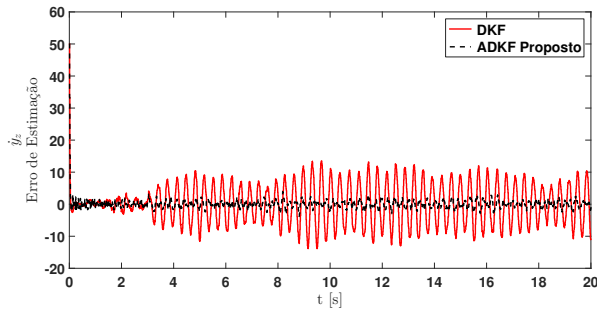
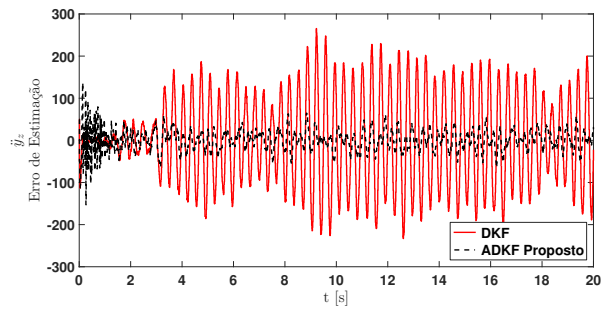


Figura 4.4: Evolução temporal dos estados remanescentes do sistema de Lorenz.



(A) Erro de estimação para \dot{y}_z



(B) Erro de estimação para \ddot{y}_z

Figura 4.5: Erro de estimação para as derivadas temporais da saída plana (Estados não-medidos).

De forma similar aos capítulos anteriores, índices de desempenho de controle tradicionais e métricas de acurácia da estimação foram calculados para o DKF e ADKF, como pode ser visto nas Tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1: Índices de desempenho de controle.

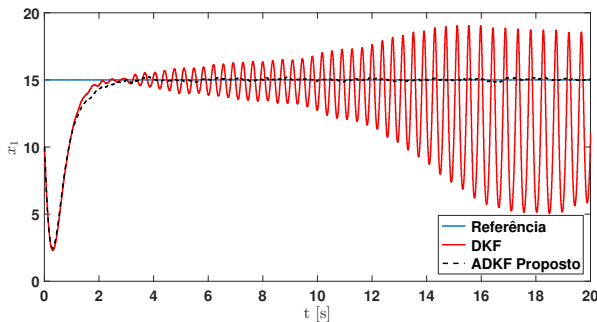
	DKF	ADKF
ISE (Y)	$9,46 \times 10^1$	$9,12 \times 10^1$
IAE (Y)	$1,60 \times 10^1$	$1,22 \times 10^1$
ITAE (Y)	$6,97 \times 10^1$	$1,94 \times 10^1$
TVC (U)	$1,31 \times 10^0$	$1,17 \times 10^0$

Tabela 4.2: Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos.

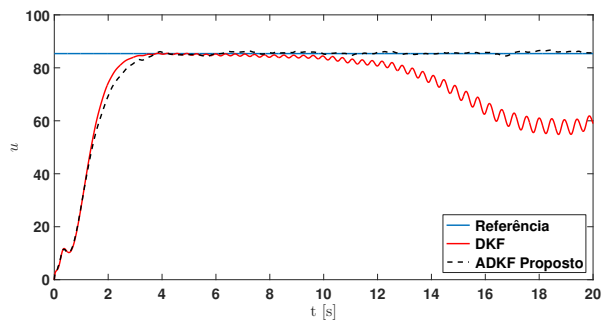
	DKF	ADKF
RMSE (\dot{y}_z)	$6,37 \times 10^0$	$1,77 \times 10^0$
RMSE (\ddot{y}_z)	$1,09 \times 10^2$	$2,52 \times 10^1$
MAE (\dot{y}_z)	$5,22 \times 10^0$	$9,23 \times 10^{-1}$
MAE (\ddot{y}_z)	$9,06 \times 10^1$	$1,95 \times 10^1$

Como esperado, a Tabela 4.1 revela que os índices de desempenho de controle calculados para o ADKF são menores quando comparados ao DKF, indicando assim, um desempenho superior do ADKF tanto em relação ao sinal de saída quanto ao de controle. Uma conclusão semelhante pode ser inferida da Tabela 4.2, mas em termos de qualidade de estimativa dos estados não-medidos.

Por último, analisou-se a sensibilidade de ambos os estimadores para a variação da condição inicial da matriz de covariância do ruído de processo. Mais precisamente, mantendo a configuração anterior e definindo $Q_0^{Brunovsky} = 10^{-3}$, conduziram-se novas simulações tanto para o DKF quanto para o ADKF, como pode ser visto na Figura 4.6.



(A) Sinal de Saída



(B) Sinal de Entrada

Figura 4.6: Evolução temporal dos sinais de saída e de entrada.

As evoluções temporais dos sinais de saída e de entrada indicam novamente que o ADKF se mostrou como opção viável à estimação de estados quando a matriz de covariância do ruído de processo é desconhecida *a priori*.

No estudo de caso a ser analisado a seguir, a metodologia de estimação adaptativa será avaliada para um processo de quatro tanques que é caracterizado por ser naturalmente não-diferencialmente plano.

4.6.2 Processo de Quatro Tanques

O processo de quatro tanques foi introduzido em [88] com o objetivo didático de demonstrar de forma ilustrativa conceitos e propriedades de sistemas MIMO. Além disso, trata-se o sistema como um protótipo para aplicações de controle de processo presentes em plantas industriais, principalmente, nos ramos químicos, petroquímicos e de alimentos.

O diagrama esquemático do sistema de quatro tanques apresentado em [88] pode ser visualizado na Figura 4.7.

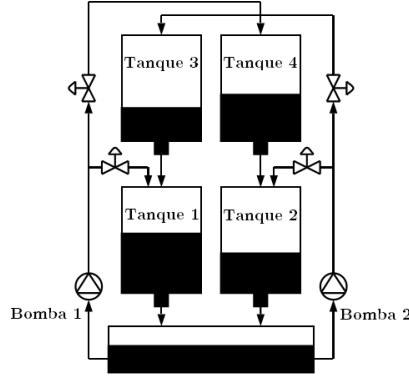


Figura 4.7: Diagrama esquemático do sistema de quatro tanques. Adaptado de [112].

Como pode ser observado na Figura 4.7, o sistema de quatro tanques consiste em quatro tanques de água, um reservatório inferior e duas bombas responsáveis pelo controle do nível de água nos tanques. A presença de válvulas permite separar o fluxo de água proveniente das bombas proporcionalmente a uma constante antes de atingir os tanques.

Baseado nos princípios de conservação de massa e na lei de Bernoulli para líquidos incompressíveis, tem-se o seguinte sistema de equações não-lineares que descrevem o processo:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{A_1}(o_3\sqrt{2g_{Terra}h_3} + \eta_1k_{f_1}V_1 - o_1\sqrt{2g_{Terra}h_1}) \\ \dot{h}_2 = \frac{1}{A_2}(o_4\sqrt{2g_{Terra}h_4} + \eta_2k_{f_2}V_2 - o_2\sqrt{2g_{Terra}h_2}) \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{A_3}((1 - \eta_2)k_2V_2 - o_3\sqrt{2g_{Terra}h_3}) \\ \dot{h}_4 = \frac{1}{A_4}((1 - \eta_1)k_1V_1 - o_4\sqrt{2g_{Terra}h_4}) \end{cases} \quad (4.38)$$

onde g_{Terra} é a aceleração da gravidade, enquanto que h_i , A_i e o_i correspondem ao nível de água, a área da secção transversal do tanque e a área da secção transversal do orifício de saída do tanque i , $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente. Os coeficientes de proporcionalidade η_j , $j = 1, 2$, representam a razão entre os fluxos para os tanques 1 e 4 e para os tanques 2 e 3, respectivamente. A constante de fluxo e o sinal de controle aplicado na bomba p são, respectivamente, dados por k_{f_p} e V_p , $p = 1, 2$. Considera-se também que as saídas do processo são representadas pelos níveis de águas nos tanque 1 e 2.

4.6.2.1 Planejamento de Trajetória

Como apresentado em [69], o sistema (4.38) é conhecido por ser não-diferencialmente plano, porém pertencente a classe dos sistemas liouvillianos. Mais precisamente, o sistema possui um subsistema diferencialmente plano caracterizado por h_3 e h_4 como as saídas planas.

Se as trajetórias nominais $h_3^*(t)$ e $h_4^*(t)$ são conhecidas, os controles nominais $V_1^*(t)$ e $V_2^*(t)$ são diretamente obtidos por:

$$V_1^*(t) = \frac{A_4 \dot{h}_4^*(t) + o_4 \sqrt{2g_{Terra} h_4^*(t)}}{(1 - \eta_1) k_{f_1}} \quad (4.39)$$

$$V_2^*(t) = \frac{A_3 \dot{h}_3^*(t) + o_3 \sqrt{2g_{Terra} h_3^*(t)}}{(1 - \eta_2) k_{f_2}} \quad (4.40)$$

As trajetórias nominais das variáveis remanescentes $h_1^*(t)$ e $h_2^*(t)$ são obtidas resolvendo as seguintes equações diferenciais em função das saídas planas do subsistema e suas derivadas temporais:

$$\dot{h}_1^*(t) = \frac{-o_1 \sqrt{2g_{Terra} h_1^*(t)} + o_3 \sqrt{2g_{Terra} h_3^*(t)} + \eta_1 k_{f_1} V_1^*(t)}{A_1} \quad (4.41)$$

$$\dot{h}_2^*(t) = \frac{-o_2 \sqrt{2g_{Terra} h_2^*(t)} + o_4 \sqrt{2g_{Terra} h_4^*(t)} + \eta_2 k_{f_2} V_2^*(t)}{A_2} \quad (4.42)$$

onde as condições iniciais $h_1^*(0)$ e $h_2^*(0)$ são expressas por:

$$h_1^*(0) = \frac{\left[o_3 \sqrt{2g_{Terra} h_3^*(0)} - \eta_1 o_4 \sqrt{2g_{Terra} h_4^*(0)} / (\eta_1 - 1) \right]^2}{2o_1^2 g_{Terra}} \quad (4.43)$$

$$h_2^*(0) = \frac{\left[o_4 \sqrt{2g_{Terra} h_4^*(0)} - \eta_2 o_3 \sqrt{2g_{Terra} h_3^*(0)} / (\eta_2 - 1) \right]^2}{2o_2^2 g_{Terra}} \quad (4.44)$$

dado $h_3^*(0)$ e $h_4^*(0)$ e assumindo $\dot{h}_i(0)$, $i = 1, 2, 3, 4$ igual a zero.

É interessante ressaltar que, apesar de h_1 e h_2 representarem as saídas de (4.38), o planejamento de trajetória acima é baseado nas variáveis h_3 e h_4 . Uma das possibilidade para contornar

esse impasse é observar as equações (4.41) e (4.42) como o sistema de equações de operadores diferenciais não-lineares apresentado a seguir:

$$h_3^*(t) = \frac{\left[A_3 \dot{h}_3^*(t) + \epsilon_1 \epsilon_2 [A_1 \dot{h}_1^*(t) + o_1 \sqrt{2g_{Terra} h_1^*(t)}] - \epsilon_2 [A_2 \dot{h}_2^*(t) + A_4 \dot{h}_4^*(t) + o_2 \sqrt{2g_{Terra} h_2^*(t)}] \right]^2}{2g_{Terra} [o_3 (\epsilon_1 \epsilon_2 - 1)]^2} \quad (4.45)$$

$$h_4^*(t) = \frac{\left[A_4 \dot{h}_4^*(t) + \epsilon_1 \epsilon_2 [A_2 \dot{h}_2^*(t) + o_2 \sqrt{2g_{Terra} h_2^*(t)}] - \epsilon_1 [A_1 \dot{h}_1^*(t) + A_3 \dot{h}_3^*(t) + o_1 \sqrt{2g_{Terra} h_1^*(t)}] \right]^2}{2g_{Terra} [o_4 (\epsilon_1 \epsilon_2 - 1)]^2} \quad (4.46)$$

onde $\epsilon_1 = (1 - \eta_1)/\eta_1$ e $\epsilon_2 = (1 - \eta_2)/\eta_2$.

O seguinte processo iterativo será utilizado para aproximadamente resolver o sistema de equações de operadores acima [92]:

$$h_{3_{k+1}}^* = \frac{\left[A_3 \dot{h}_{3_k}^* + \epsilon_1 \epsilon_2 [A_1 \dot{h}_1^* + o_1 \sqrt{2g_{Terra} h_1^*}] - \epsilon_2 [A_2 \dot{h}_2^* + A_4 \dot{h}_{4_k}^* + o_2 \sqrt{2g_{Terra} h_2^*}] \right]^2}{2g_{Terra} [o_3 (\epsilon_1 \epsilon_2 - 1)]^2} \quad (4.47)$$

$$h_{4_{k+1}}^* = \frac{\left[A_4 \dot{h}_{4_k}^* + \epsilon_1 \epsilon_2 [A_2 \dot{h}_2^* + o_2 \sqrt{2g_{Terra} h_2^*}] - \epsilon_1 [A_1 \dot{h}_1^* + A_3 \dot{h}_{3_k}^* + o_1 \sqrt{2g_{Terra} h_1^*}] \right]^2}{2g_{Terra} [o_4 (\epsilon_1 \epsilon_2 - 1)]^2} \quad (4.48)$$

sendo (t) omitido para facilitar a leitura das equações.

Assumindo $h_{3_0}^*$ e $h_{4_0}^*$ como constantes e a partir o conhecimento de $h_1^*(t)$ e $h_2^*(t)$, têm-se que as sequências (4.47) e (4.48) representam aproximadamente as expressões de $h_3^*(t)$ e $h_4^*(t)$ quando $k \rightarrow \infty$. Consequentemente, permitindo também obter $V_1^*(t)$ e $V_2^*(t)$ através das equações (4.39) e (4.40), respectivamente.

4.6.2.2 Estimação e Controle de Trajetória por Entradas Planas

Ao concluir a etapa de planejamento de trajetória, propõe-se seguir a abordagem de controle por entradas planas descrita nas seções anteriores na etapa de controle de trajetória. Ressalta-se então a necessidade de verificar a questão da estabilidade da dinâmica interna não-observável do sistema.

Sendo os níveis de água h_1 e h_2 as saídas do processo, o sistema (4.38) apresenta uma dinâmica interna não-observável que varia a depender da disposição das válvulas que determinam a razão entre os fluxos. Mais precisamente, a abertura das válvulas determina se o sistema é de fase mínima ou de fase não-mínima, como pode ser observado na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Configuração do processo de quatro tanques.

Configuração	Condição
Fase Mínima	$1 < \eta_1 + \eta_2 < 2$
Fase Não-Mínima	$0 < \eta_1 + \eta_2 < 1$

Portanto, assume-se, daqui em diante, uma configuração de fase mínima ao processo de quatro tanques a fim de garantir uma dinâmica interna não-observável estável e, por consequência, satisfazer a condição de utilização dos compensadores dinâmicos e, conseqüentemente, tornar viável a estratégia de controle proposta.

Seja então o sistema observável da planta (4.38) representado por:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{A_1} (o_3\sqrt{2g_{Terra}h_3} - o_1\sqrt{2g_{Terra}h_1}) \\ \dot{h}_2 = \frac{1}{A_2} (o_4\sqrt{2g_{Terra}h_4} - o_2\sqrt{2g_{Terra}h_2}) \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{A_3} (-o_3\sqrt{2g_{Terra}h_3}) \\ \dot{h}_4 = \frac{1}{A_4} (-o_4\sqrt{2g_{Terra}h_4}) \end{cases} \quad (4.49)$$

onde as saídas do sistema (y_1, y_2) correspondem aos níveis de água (h_1, h_2) .

Assumindo os índices de observabilidade como $(\kappa_1^O, \kappa_2^O) = (2, 2)$, tem-se que, a partir da equação (4.14), a matriz de observabilidade \mathbf{E}_O é dada por:

$$\mathbf{E}_O = \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \begin{bmatrix} y_1 \\ L_f y_1 \\ y_2 \\ L_f y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{o_1 g_{Terra}}{A_1 \sqrt{2g_{Terra}h_1}} & 0 & \frac{o_3 g_{Terra}}{A_1 \sqrt{2g_{Terra}h_3}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{o_2 g_{Terra}}{A_2 \sqrt{2g_{Terra}h_2}} & 0 & \frac{o_4 g_{Terra}}{A_2 \sqrt{2g_{Terra}h_4}} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

onde o $posto(\mathbf{E}_O) = 4$ e $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4]^T$.

A partir da equação (4.15), determinam-se os campos vetoriais de entrada (γ_1, γ_2) associados as entradas planas (V_{1E}, V_{2E}) :

$$\gamma_M = [\gamma_1 \ \gamma_2] = \mathbf{E}_O^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{A}_{FIM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.51)$$

onde, para fins de simplificação de γ_M , assumiu-se que:

$$\mathbf{A}_{FIM} = -\det(\mathbf{E}_{O_N}) \begin{bmatrix} \frac{A_2 \sqrt{2g_{Terra}h_4}}{o_4 g_{Terra}} & 0 \\ 0 & \frac{A_1 \sqrt{2g_{Terra}h_3}}{o_3 g_{Terra}} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Desse modo, o sistema associado as entradas planas é dado por:

$$\begin{cases} \dot{h}_{1E} &= \frac{1}{A_1} (o_3 \sqrt{2g_{Terra} h_{3E}} - o_1 \sqrt{2g_{Terra} h_{1E}}) \\ \dot{h}_{2E} &= \frac{1}{A_2} (o_4 \sqrt{2g_{Terra} h_{4E}} - o_2 \sqrt{2g_{Terra} h_{2E}}) \\ \dot{h}_{3E} &= V_{1E} - \frac{1}{A_3} (o_3 \sqrt{2g_{Terra} h_{3E}}) \\ \dot{h}_{4E} &= V_{2E} - \frac{1}{A_4} (o_4 \sqrt{2g_{Terra} h_{4E}}) \end{cases} \quad (4.53)$$

sendo o vetor de estados denotado por $\mathbf{h}_E = [h_{1E} \ h_{2E} \ h_{3E} \ h_{4E}]^T$, o qual não é necessariamente equivalente ao vetor de estados de (4.53), e as saídas planas $\mathbf{y}_z = [y_{z1} \ y_{z2}]^T = [h_{1E} \ h_{2E}]^T$.

A parametrização diferencial associada as saídas planas \mathbf{y}_z e suas derivadas temporais pode ser visualizada a seguir:

$$h_{3E} = \frac{[A_1 \dot{y}_{z1} + o_1 \sqrt{2g_{Terra} y_{z1}}]^2}{2o_3^2 g_{Terra}} \quad (4.54)$$

$$h_{4E} = \frac{[A_2 \dot{y}_{z2} + o_2 \sqrt{2g_{Terra} y_{z2}}]^2}{2o_4^2 g_{Terra}} \quad (4.55)$$

$$V_{1E} = \frac{\sqrt{2h_{3E}} \left[(A_1^2 A_3 \ddot{y}_{z1} + o_3^2 A_1 g_{Terra} - o_1^2 A_3 g_{Terra}) \sqrt{y_{z1}} + A_3 o_1 o_3 g_{Terra} \sqrt{h_{3E}} \right]}{A_1 A_3 o_3 \sqrt{g_{Terra} y_{z1}}} \quad (4.56)$$

$$V_{2E} = \frac{\sqrt{2h_{4E}} \left[(A_2^2 A_4 \ddot{y}_{z2} + o_4^2 A_2 g_{Terra} - o_2^2 A_4 g_{Terra}) \sqrt{y_{z2}} + A_4 o_2 o_4 g_{Terra} \sqrt{h_{4E}} \right]}{A_2 A_4 o_4 \sqrt{g_{Terra} y_{z2}}} \quad (4.57)$$

Em relação ao planejamento de trajetória para (4.53), infere-se que, se o par $(y_{z1}^*(t), y_{z2}^*(t))$ e suas respectivas derivadas temporais são conhecidas, então as trajetórias nominais $(h_{3E}^*(t), h_{4E}^*(t))$ e os sinais de controle nominais $(V_{1E}^*(t), V_{2E}^*(t))$ são obtidos diretamente a partir das equações (4.54 - 4.57).

Agora, manipulando algebricamente as equações (4.56) e (4.57), tem-se que, a partir da propriedade plana do sistema (4.53), o mesmo é, portanto, equivalente ao seguinte sistema linear MIMO na forma canônica de Brunovsky:

$$\begin{cases} \dot{y}_{z1} &= f_{z1}(\mathbf{Z}_E) + g_{z1}(\mathbf{Z}_E) V_{1E} = v_1 \\ \dot{y}_{z2} &= f_{z2}(\mathbf{Z}_E) + g_{z2}(\mathbf{Z}_E) V_{2E} = v_2 \end{cases} \quad (4.58)$$

onde $\mathbf{Z}_E = [y_{z1} \ \dot{y}_{z1} \ y_{z2} \ \dot{y}_{z2}]^T$ e o par (v_1, v_2) representam as novas variáveis de controle. Destaca-se também que as expressões de $f_{z1}(\mathbf{Z}_E)$, $f_{z2}(\mathbf{Z}_E)$, $g_{z1}(\mathbf{Z}_E)$ e $g_{z2}(\mathbf{Z}_E)$ foram omitidas para facilitar a compreensão do leitor.

Isso implica que (4.58) pode ser escrito na seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}_E &= \mathbf{A}_b \mathbf{Z}_E + \mathbf{B}_b \mathbf{v} \\ \mathbf{y}_z &= \mathbf{C}_b \mathbf{Z}_E \end{cases} \quad (4.59)$$

com

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

De maneira similar ao Sistema de Lorenz, ao efetuar a discretização das matrizes \mathbf{A}_b , \mathbf{B}_b e \mathbf{C}_b através de métodos tradicionais de discretização para o modelo acima mencionado, propõe-se obter as estimativas do vetor de estados, $\hat{\mathbf{Z}}_E$, usando a metodologia adaptativa proposta na Seção 2.3, formando assim o ADKF descrito na Seção 4.5. Ressalta-se também que, a partir de (4.58), a versão discreta da matriz de entrada do ruído de processo é idêntica a versão discreta de \mathbf{B}_b .

Dessa forma, a partir das estimativas $\hat{\mathbf{Z}}_E$, então se pode propor as seguintes leis de controle para o sistema (4.59), conforme descrito na subseção 3.2.4:

$$v_1 = \ddot{y}_{z_1}^*(t) - k_{11} [\hat{y}_{z_1} - \dot{y}_{z_1}^*(t)] - k_{01} [\hat{y}_{z_1} - y_{z_1}^*(t)] \quad (4.61)$$

$$v_2 = \ddot{y}_{z_2}^*(t) - k_{12} [\hat{y}_{z_2} - \dot{y}_{z_2}^*(t)] - k_{02} [\hat{y}_{z_2} - y_{z_2}^*(t)] \quad (4.62)$$

com (k_{11}, k_{01}) e (k_{12}, k_{02}) sendo escolhidos de tal forma que $p_1(s) = s^2 + k_{11}s + k_{01}$ e $p_2(s) = s^2 + k_{12}s + k_{02}$ sejam polinômios de Hurwitz.

Como $\ddot{y}_{z_1} = v_1$ e $\ddot{y}_{z_2} = v_2$, isola-se V_{1E} e V_{2E} em (4.58) para obter as expressões abaixo:

$$V_{1E} = g_{z_1}^{-1}(\hat{\mathbf{Z}}_E) [v_1 - f_{z_1}(\hat{\mathbf{Z}}_E)] \quad (4.63)$$

$$V_{2E} = g_{z_2}^{-1}(\hat{\mathbf{Z}}_E) [v_2 - f_{z_2}(\hat{\mathbf{Z}}_E)] \quad (4.64)$$

Portanto, com base no conhecimento de V_{1E} e V_{2E} , a última etapa consiste em construir os compensadores dinâmicos que permitirão obter as expressões finais dos sinais de controle V_1 e V_2 .

Primeiramente, determinam-se os comportamentos entrada-saída de ambos em relação a cada saída, os quais estão associado ao respectivo índice de observabilidade. Em seguida, sendo o vetor de saída de (4.38) idêntico ao de (4.53), iguala-se então os comportamentos entrada-saída para cada saída do processo. Assim, é possível montar um sistema de equações diferenciais, cujas soluções correspondem exatamente as expressões dos compensadores dinâmicos. No caso, tais expressões apresentam o seguinte formato:

$$\dot{V}_1 = \lambda_{1E}(\hat{\mathbf{Z}}_E, V_{1E}, V_{2E}, V_1, V_2) \quad (4.65)$$

$$\dot{V}_2 = \lambda_{2E}(\hat{\mathbf{Z}}_E, V_{1E}, V_{2E}, V_1, V_2) \quad (4.66)$$

onde λ_{1E} e λ_{2E} são funções suaves.

Por fim, integrando as equações (4.65) e (4.66), obtêm-se, portanto, os sinais de controle V_1 e V_2 que serão aplicados na planta não-linear dada por (4.38).

4.6.2.3 Simulações Numéricas

Buscando validar o desempenho do sistema de controle de trajetória juntamente com a estimação adaptativa proposta neste capítulo para o modelo não-linear (4.38), conduziram-se simulações numéricas para analisar de forma mais abrangente o filtro de Kalman sem derivadas adaptativo (ADKF) proposto neste capítulo.

Definindo um tempo de simulação $t_s = 400$ s e uma taxa de amostragem $\Delta t = 100$ ms, o sistema não-linear (4.38) é estabelecido com a hipótese que suas matrizes de covariância do ruído de processo e de medição foram descritas como sendo $\mathbf{Q}_k^{NL} = 10^{-2}\mathbf{I}_{2 \times 2}$ e $\mathbf{R}_k^{NL} = 10^{-4}\mathbf{I}_{2 \times 2}$, respectivamente. Ademais, por uma questão de simplicidade, considera-se que apenas as variáveis de controle não-linear estão sujeitas a um ruído de processo aditivo.

A referência para as saídas do processo são definidas para serem 5,0 cm. Logo, usando os parâmetros do sistema extraídos de [88] (ver Tabela 4.4), obtêm-se as trajetórias nominais para as variáveis restantes seguindo o procedimento descrito na etapa de planejamento de trajetória. Ademais, assume-se que a condição inicial dos níveis de água de cada tanque como sendo 7,0 cm, 3,0 cm, 1,0 cm, 1,0 cm, respectivamente.

Tabela 4.4: Parâmetros do processo de quatro tanques.

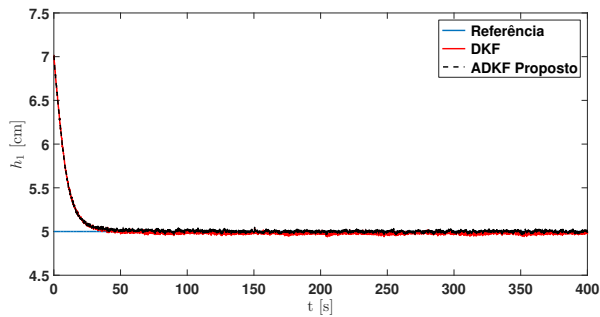
Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
A_1, A_3	28 cm ²	g_{Terra}	981 cm/s ²
A_2, A_4	32 cm ²	k_{f_1}, k_{f_2}	3,33, 3,35 cm ³ /Vs
o_1, o_3	0,071 cm ²	η_1, η_2	0,70, 0,60
o_2, o_4	0,057 cm ²	V_1, V_2	$0 < V_1, V_2 < 10V$

Em relação aos parâmetros do ADKF, após transformar o sistema (4.59) em forma de tempo discreto, estabelece-se que a estimativa inicial do vetor de estados é nula e que $\mathbf{P}_0 = 0,1\mathbf{I}_{4 \times 4}$. Ressalta-se também que os parâmetros de controle foram ajustados como sendo os coeficientes dos polinômios de Hurwitz da forma $p_1(s) = p_2(s) = (s + 0,25)^2$, os quais fornecem um coeficiente de ponderação α igual a 0,3272 para a estimação de elementos diagonais da matriz de covariância do vetor de medições no ADKF.

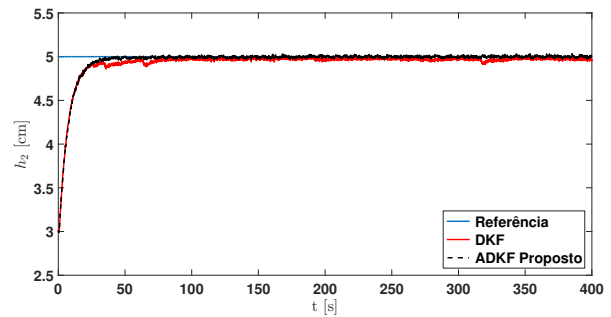
Como o vetor de saída de (4.38) representa as saída planas de (4.53), a matriz de covariância do ruído de medição associada com (4.59) será idêntica àquela associada com (4.38), ou seja, $\mathbf{R}_k^{Brunovsky} = \mathbf{R}_k^{NL} = 10^{-4}\mathbf{I}_{2 \times 2}$.

Agora, devido a dificuldade de relacionar matematicamente as matrizes de covariância do ruído de processo de (4.38) e de (4.59), propõe-se então comparar os resultados obtidos usando o ADKF proposto em relação com os do DKF. Mais precisamente, ao definir uma matriz $\mathbf{Q}_k^{Brunovsky}$ constante durante toda a simulação ao DKF, a ideia consiste em avaliar o grau de efetividade que é agregado ao sistema devido a estimação adaptativa de $\mathbf{Q}_k^{Brunovsky}$ pelo ADKF.

Para tanto, utilizaram-se realizações idênticas do ruído de processo e de medição em ambos métodos de estimação. Simulações numéricas foram então conduzidas com $Q_0^{Brunovsky} = 10^{-1} \mathbf{I}_{2 \times 2}$ e $R_k^{Brunovsky}$ sendo conhecida *a priori*, cujos resultados são ilustrados nas Figuras 4.8 a 4.11.

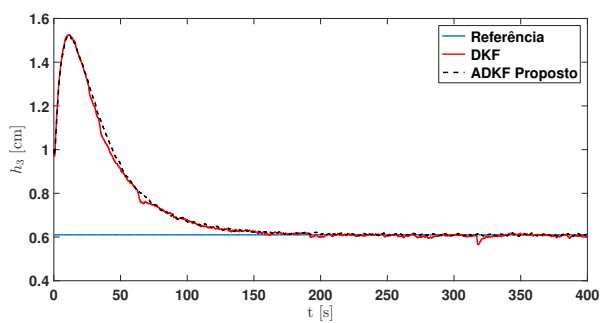


(A) Sinal de saída - h_1

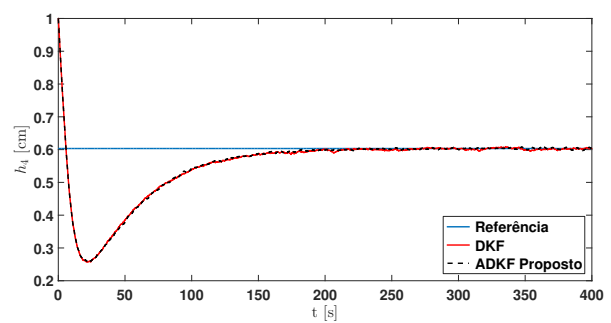


(B) Sinal de saída - h_2

Figura 4.8: Evolução temporal dos sinais de saída.

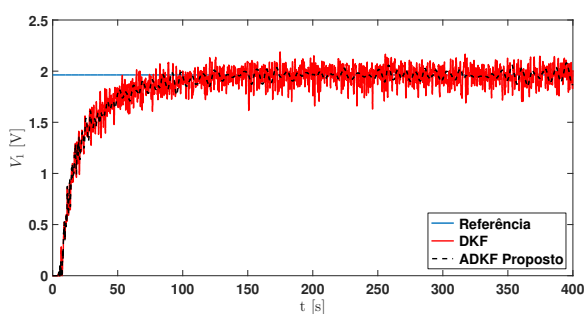


(A) Variável de estado - h_3

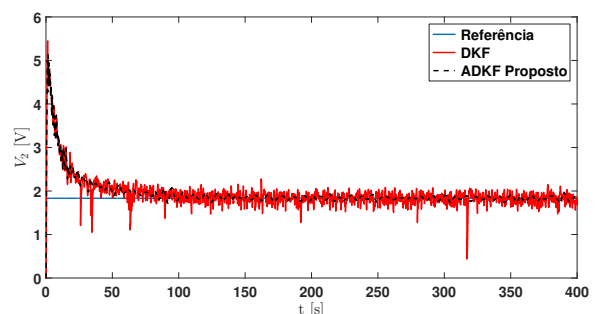


(B) Variável de estado - h_4

Figura 4.9: Evolução temporal dos estados remanescentes do processo de quatro tanques.

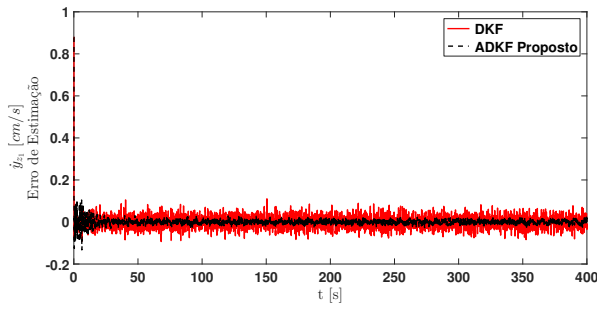


(A) Sinal de controle - V_1

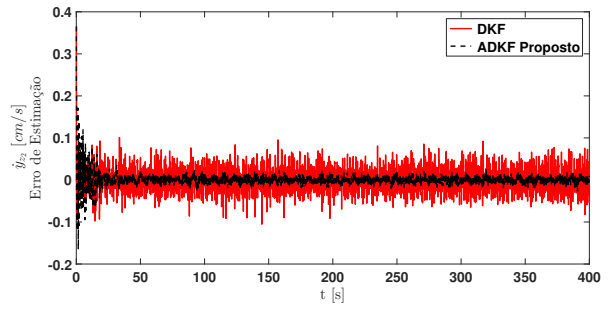


(B) Sinal de controle - V_2

Figura 4.10: Evolução temporal dos sinais de controle.



(A) Erro de estimação para \dot{y}_{z1}



(B) Erro de estimação para \dot{y}_{z2}

Figura 4.11: Erro de estimação para as derivadas temporais das saída planas (Estados não-medidos).

Como pode ser observado na Figura 4.8 e Figura 4.9, a evolução temporal dos sinais correspondentes às variáveis de estado indicam que o ADKF proposto tem um melhor desempenho dinâmico em malha fechada quando comparado ao DKF. Tal comportamento pode ser verificado em relação a evolução temporal dos sinais de controle, como pode ser visto na Figura 4.10. Salienta-se também que, na Figura 4.11, os erros de estimação das derivadas temporais da saída plana, cujas medições não estão disponíveis, obtidos pelo DKF são bem superiores aos da filtragem adaptativa.

Por fim, seguindo o procedimento de análise realizado no caso anterior, índices de desempenho de controle tradicionais e métricas de acurácia da estimação foram calculados para o DKF e ADKF, como pode ser visto nas Tabelas 4.5 e 4.6.

Tabela 4.5: Índices de desempenho de controle.

		DKF	ADKF
ISE	h_1	$1,81 \times 10^1$	$1,80 \times 10^1$
	h_2	$1,75 \times 10^1$	$1,73 \times 10^1$
IAE	h_1	$2,31 \times 10^1$	$2,04 \times 10^1$
	h_2	$2,79 \times 10^1$	$1,95 \times 10^1$
ITAE	h_1	$1,61 \times 10^3$	$8,87 \times 10^2$
	h_2	$2,39 \times 10^3$	$8,31 \times 10^2$
TVC	V_1	$1,46 \times 10^1$	$1,74 \times 10^0$
	V_2	$2,06 \times 10^1$	$3,43 \times 10^0$

Tabela 4.6: Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos.

		DKF	ADKF
RMSE	y_{z1}	$3,22 \times 10^{-2}$	$1,90 \times 10^{-2}$
	y_{z2}	$2,88 \times 10^{-2}$	$1,42 \times 10^{-2}$
MAE	y_{z1}	$2,36 \times 10^{-2}$	$8,74 \times 10^{-3}$
	y_{z2}	$2,25 \times 10^{-2}$	$7,29 \times 10^{-3}$

Como esperado, a Tabela 4.5 revela que os índices de desempenho de controle calculados para o ADKF são menores quando comparados ao DKF, principalmente no que se diz respeito aos esforços dos atuadores, indicando assim, um desempenho superior do ADKF tanto em relação ao sinal de saída quanto ao de controle. Em termos de qualidade de estimativa dos estados não-medidos, pode-se inferir que o ADKF proposto apresentou um maior nível de acurácia das estimativas quando comparado ao DKF, conforme observado na Tabela 4.6.

A seguir, no último estudo de caso a ser analisado, avalia-se a metodologia de estimativa adaptativa para um modelo não-linear não-diferencialmente plano de um navio de superfície subatuado. Diferentemente do processo de quatro tanques, o vetor de saídas naturalmente escolhido para o

navio de superfície torna o sistema de fase não-mínima, sendo necessário redefinir virtualmente as saídas de tal forma a aplicar a abordagem de controle por entradas planas proposta neste capítulo.

4.6.3 Navio de Superfície

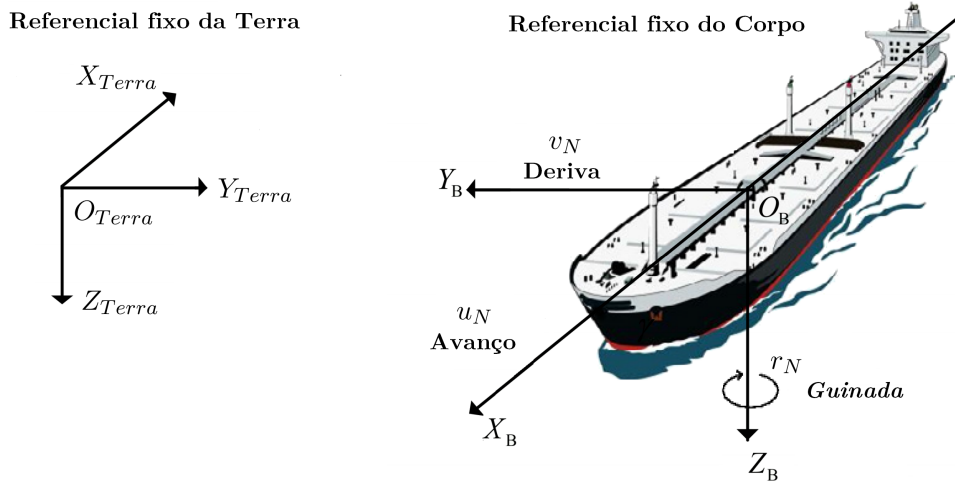


Figura 4.12: Sistemas de coordenadas de referência. Adaptado de [113].

O controle de veículos marítimos ganhou relevância nos últimos anos por sua importância nas áreas de petróleo e militar tais como transporte de passageiros e mercadorias, inspeção de cabos submersos, instalação de plataformas *offshore*, posicionamento dinâmico e outros. Para isso, promoveram-se vários trabalhos de pesquisa relacionados com aplicação da teoria de controle não-linear a esses sistemas, tais como navios de superfície e veículos subaquáticos autônomos [114,115].

Dentre os modelos propostos para descrever o comportamento dinâmico de um navio de superfície, considera-se o seguinte sistema não-linear com três graus de liberdade (ver Figura 4.12) [116]:

$$\begin{cases} \dot{x}_N &= \cos(\psi_N)u_N - \text{sen}(\psi_N)v_N \\ \dot{y}_N &= \text{sen}(\psi_N)u_N + \cos(\psi_N)v_N \\ \dot{\psi}_N &= u_N \\ \dot{v}_N &= -\eta_N u_N r_N - \beta_N v_N \end{cases} \quad (4.67)$$

onde o par (x_N, y_N) denota a posição do centro geométrico do Navio no referencial fixo da Terra, além de representarem a saída do sistema. A orientação no referencial fixo da Terra é dada por ψ_N , enquanto que v_N corresponde a velocidade em Deriva no referencial fixo do Corpo. As constantes η_N e β_N são estritamente positivas que dependem das características estruturais do sistema (ver [115] para mais detalhes). Os sinais de controle u_N e r_N correspondem as velocidades em Avanço e em Guinada, respectivamente, no referencial fixo da Corpo. Note também que a escolha dos sinais de controle implica que o sistema não apresenta um atuador independente na direção de Deriva, ou seja, tem-se um sistema subatuado.

4.6.3.1 Planejamento de Trajetória

Seguindo o trabalho realizado em Sira-Ramírez [117], o sistema (4.67) é conhecido por ser não-diferencialmente plano, porém pertencente a classe dos sistemas liouvillianos. Tal característica pode ser verificada ao se observar que é possível extrair um subsistema não-linear diferencialmente plano, cujas saídas planas são representadas pelo par (ψ_N, v_N) .

Dessa maneira, assumindo que as trajetórias nominais para $\psi_N^*(t)$ e $v_N^*(t)$ são conhecidas, então os controles nominais $u_{1N}^*(t)$ e $u_{2N}^*(t)$ são dados por:

$$u_N^*(t) = -\frac{\dot{v}_N^*(t) + \beta_N v_N^*(t)}{\eta_N \dot{\psi}_N^*(t)} \quad (4.68)$$

$$r_N^*(t) = \dot{\psi}_N^*(t) \quad (4.69)$$

A posição do navio de superfície pode ser agora expressa como quadraturas de funções diferenciais das saídas planas do subsistema, como pode ser observado nas equações (4.70) e (4.71).

$$x_N^*(t) = \int \left\{ -\frac{\dot{v}_N^*(t) + \beta_N v_N^*(t)}{\eta_N \dot{\psi}_N^*(t)} \cos(\psi_N^*(t)) - v_N^*(t) \text{sen}(\psi_N^*(t)) \right\} \quad (4.70)$$

$$y_N^*(t) = \int \left\{ -\frac{\dot{v}_N^*(t) + \beta_N v_N^*(t)}{\eta_N \dot{\psi}_N^*(t)} \text{sen}(\psi_N^*(t)) + v_N^*(t) \cos(\psi_N^*(t)) \right\} \quad (4.71)$$

No entanto, em casos práticos, é muito mais simples e intuitivo definir as trajetórias nominais para o par $(x_N^*(t), y_N^*(t))$ do que para $(v_N^*(t), \psi_N^*(t))$. Dessa forma, após algumas manipulações algébricas, obtém-se o seguinte conjunto explícito de equações algébricas diferenciais que permitem gerar as trajetórias nominais de $\psi_N^*(t)$ e $v_N^*(t)$ a partir do conhecimento de $x_N^*(t)$, $y_N^*(t)$ e de suas respectivas derivadas temporais:

$$\dot{\psi}_N^*(t) = \left[\frac{\ddot{x}_N^*(t) + \beta_N \dot{x}_N^*(t) \text{sen}(\psi_N^*(t)) - (\ddot{y}_N^*(t) + \beta_N \dot{y}_N^*(t)) \cos(\psi_N^*(t))}{(\eta_N - 1)(\dot{x}_N^*(t) \cos(\psi_N^*(t)) + \dot{y}_N^*(t) \text{sen}(\psi_N^*(t)))} \right] \quad (4.72)$$

$$v_N^*(t) = -\dot{x}_N^*(t) \text{sen}(\psi_N^*(t)) + \dot{y}_N^*(t) \cos(\psi_N^*(t)) \quad (4.73)$$

que podem ser utilizadas para fornecer os controles nominais através das equações (4.68) e (4.69).

4.6.3.2 Estimação e Controle de Trajetória por Entradas Planas

Ao concluir a etapa de planejamento de trajetória, propõe-se seguir a abordagem de controle por entradas planas descrita nas seções anteriores na etapa de controle de trajetória, conforme realizado para os dois casos anteriores.

Observa-se que, no entanto, quando a saída do sistema (4.67) é representada pela posição do centro geométrico no referencial fixo da Terra, o sistema é de fase não-mínima, ou seja, a sua dinâmica interna não-observável é instável (ver a discussão em [118–120]). Mesmo obtendo

um sistema associado as entradas planas a partir desse vetor de saída, impossibilitaria o uso da abordagem de controle através do compensador dinâmico.

Por essa razão, seguindo a ideia de redefinição da saída sugerida em [121], define-se um novo vetor de saída Ω como se segue:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_N + \rho_N \cos(\psi_N) \\ y_N + \rho_N \text{sen}(\psi_N) \end{bmatrix}, \quad \rho_N > 0 \quad (4.74)$$

que representa a posição do ponto Ω no referencial fixo da Terra, localizado no eixo de simetria longitudinal do navio a uma distância positiva ρ_N a partir da posição do centro geométrico do navio (ver Figura 4.13).

Segundo [121], ao optar pelo rastreamento de uma trajetória que passe pelo ponto Ω , resulta-se em uma dinâmica interna não-observável estável ao sistema (4.67). A grosso modo, os autores mostram que, se ρ_N é suficientemente grande, a dinâmica interna não-observável pode ser arbitrariamente pequena, desde que as variações das derivadas da trajetória especificada até a terceira ordem sejam suficientemente pequenas. Dessa forma, considera-se, daqui em diante, que essas condições são satisfeitas de tal forma a viabilizar a estratégia de controle proposta.

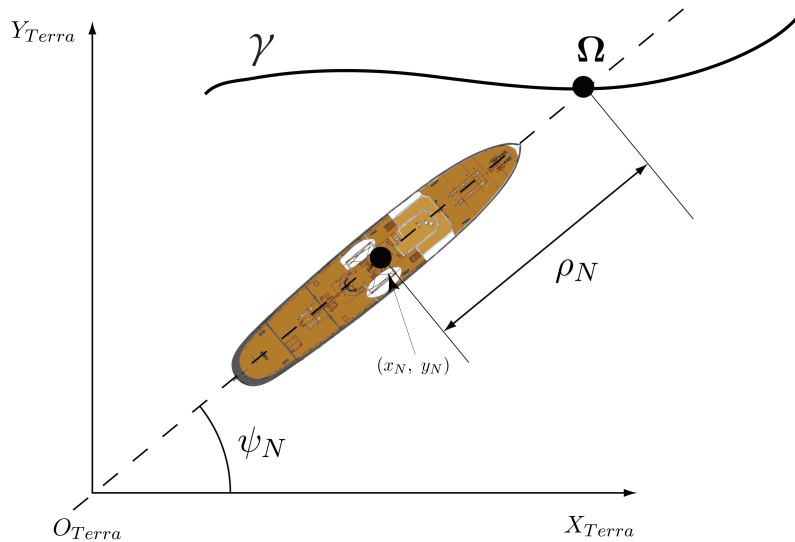


Figura 4.13: O navio de superfície com a saída redefinida ao ponto Ω . Adaptado de [121].

Seja então o sistema observável da planta (4.67) representado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_N &= -\text{sen}(\psi_N)v_N \\ \dot{y}_N &= \cos(\psi_N)v_N \\ \dot{\psi}_N &= 0 \\ \dot{v}_N &= -\beta_N v_N \end{cases} \quad (4.75)$$

onde as saídas do sistema correspondem a $\Omega_1 = x_N + \rho_N \cos(\psi_N)$ e $\Omega_2 = y_N + \rho_N \text{sen}(\psi_N)$.

Assumindo os índices de observabilidade como $(\kappa_1^O, \kappa_2^O) = (2, 2)$, tem-se que, a partir da equação (4.14), a matriz de observabilidade \mathbf{E}_O é dada por:

$$\mathbf{E}_O = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ L_f \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ L_f \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\rho_N \text{sen}(\psi_N) & 0 \\ 0 & 0 & -v_N \cos(\psi_N) & -\text{sen}(\psi_N) \\ 0 & 1 & \rho_N \cos(\psi_N) & 0 \\ 0 & 0 & -v_N \text{sen}(\psi_N) & \cos(\psi_N) \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

onde o $\text{posto}(\mathbf{E}_O) = 4$ e $\mathbf{x} = [x_N \ y_N \ \psi_N \ v_N]^T$.

A partir da equação (4.15), determinam-se os campos vetoriais de entrada (γ_1, γ_2) associados as entradas planas (u_{N_E}, r_{N_E}) :

$$\gamma_M = [\gamma_1 \ \gamma_2] = \mathbf{E}_O^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{A}_{FIM} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_N \text{sen}(2\psi_N)}{2v_N} & \frac{(\rho_N \text{sen}(\psi_N))^2}{v_N} \\ -\frac{(\rho_N \cos(\psi_N))^2}{v_N} & -\frac{\rho_N \text{sen}(2\psi_N)}{2v_N} \\ \frac{\cos(\psi_N)}{v_N} & \frac{\text{sen}(\psi_N)}{v_N} \\ \text{sen}(\psi_N) & -\cos(\psi_N) \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

onde se escolheu $\mathbf{A}_{FIM} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$.

Desse modo, o sistema associado as entradas planas é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_{N_E} = \frac{u_{N_E} \rho_N \text{sen}(2\psi_{N_E})}{2v_{N_E}} + \frac{r_{N_E} (\rho_N \text{sen}(\psi_{N_E}))^2}{v_{N_E}} - \text{sen}(\psi_{N_E}) v_{N_E} \\ \dot{y}_{N_E} = \cos(\psi_{N_E}) v_{N_E} - \frac{u_{N_E} (\rho_N \cos(\psi_{N_E}))^2}{v_{N_E}} - \frac{r_{N_E} \rho_N \text{sen}(2\psi_{N_E})}{2v_{N_E}} \\ \dot{\psi}_{N_E} = \frac{u_{N_E} \cos(\psi_{N_E})}{v_{N_E}} + \frac{r_{N_E} \text{sen}(\psi_{N_E})}{v_{N_E}} \\ \dot{v}_{N_E} = u_{N_E} \text{sen}(\psi_N) - r_{N_E} \cos(\psi_N) - \beta_N v_{N_E} \end{cases} \quad (4.78)$$

sendo o vetor de estados denotado por $\mathbf{x}_E = [x_{N_E} \ y_{N_E} \ \psi_{N_E} \ v_{N_E}]^T$, o qual não é necessariamente equivalente ao vetor de estados de (4.78), e as saídas planas $\mathbf{y}_z = [y_{z_1} \ y_{z_2}]^T = [\Omega_{1_E} \ \Omega_{2_E}]^T = [x_{N_E} + \rho_N \cos(\psi_{N_E}) \ y_{N_E} + \rho_N \text{sen}(\psi_{N_E})]^T$.

A parametrização diferencial de \mathbf{x}_E associada as saídas planas \mathbf{y}_z e suas derivadas temporais pode ser visualizada a seguir:

$$\psi_{N_E} = 2 \arctan \left(\frac{\dot{y}_{z_2} - \sqrt{\dot{y}_{z_1}^2 + \dot{y}_{z_2}^2}}{\dot{y}_{z_1}} \right) \quad (4.79)$$

$$x_{N_E} = y_{z_1} - \rho_N \cos(\psi_{N_E}) \quad (4.80)$$

$$y_{N_E} = y_{z_2} - \rho_N \text{sen}(\psi_{N_E}) \quad (4.81)$$

$$v_{N_E} = \sqrt{\dot{y}_{z_1}^2 + \dot{y}_{z_2}^2} \quad (4.82)$$

enquanto que a das entradas planas é dada por:

$$u_{N_E} = -\ddot{y}_{z_1} + \beta_N v_{N_E} \sin(\psi_{N_E}) \quad (4.83)$$

$$r_{N_E} = -\ddot{y}_{z_2} - \beta_N v_{N_E} \cos(\psi_{N_E}) \quad (4.84)$$

Em relação ao planejamento de trajetória para (4.78), infere-se que, se o par $(y_{z_1}^*(t), y_{z_2}^*(t))$ e suas respectivas derivadas temporais são conhecidas, então as trajetórias nominais de \mathbf{x}_E e os controles nominais $(u_{N_E}^*(t), r_{N_E}^*(t))$ são obtidos diretamente a partir das equações (4.79 - 4.84).

Agora, manipulando algebricamente as equações (4.83) e (4.84), tem-se que, a partir da propriedade plana do sistema (4.78), o mesmo é, portanto, equivalente ao seguinte sistema linear MIMO na forma canônica de Brunovsky:

$$\begin{cases} \ddot{y}_{z_1} = f_{z_1}(\mathbf{Z}_E) + g_{z_1}(\mathbf{Z}_E)u_{N_E} = v_1 \\ \ddot{y}_{z_2} = f_{z_2}(\mathbf{Z}_E) + g_{z_2}(\mathbf{Z}_E)r_{N_E} = v_2 \end{cases} \quad (4.85)$$

onde $\mathbf{Z}_E = [y_{z_1} \ \dot{y}_{z_1} \ y_{z_2} \ \dot{y}_{z_2}]^T$ e o par (v_1, v_2) representam as novas variáveis de controle. Destaca-se também que as expressões de $f_{z_1}(\mathbf{Z}_E)$, $f_{z_2}(\mathbf{Z}_E)$, $g_{z_1}(\mathbf{Z}_E)$ e $g_{z_2}(\mathbf{Z}_E)$ foram omitidas para facilitar a compreensão do leitor.

A partir disso, tem-se que o sistema (4.85) pode ser escrito na seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}_E = \mathbf{A}_b \mathbf{Z}_E + \mathbf{B}_b \mathbf{v} \\ \mathbf{y}_z = \mathbf{C}_b \mathbf{Z}_E \end{cases} \quad (4.86)$$

com

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

De maneira similar aos casos discutidos anteriormente, ao efetuar a discretização das matrizes \mathbf{A}_b , \mathbf{B}_b e \mathbf{C}_b através de métodos tradicionais de discretização para o modelo acima mencionado,, propõe-se obter as estimativas do vetor de estados, $\hat{\mathbf{Z}}_E$, usando a metodologia adaptativa proposta na Seção 2.3, formando assim o ADKF descrito na Seção 4.5. Ressalta-se também que, a partir de (4.85), a versão discreta da matriz de entrada do ruído de processo é idêntica a versão discreta de \mathbf{B}_b .

Dessa forma, a partir das estimativas $\hat{\mathbf{Z}}_E$, então se pode propor as seguintes leis de controle para o sistema (4.86), conforme descrito na subseção 3.2.4:

$$v_1 = \ddot{y}_{z_1}^*(t) - k_{11} [\hat{y}_{z_1} - \dot{y}_{z_1}^*(t)] - k_{01} [\hat{y}_{z_1} - y_{z_1}^*(t)] \quad (4.88)$$

$$v_2 = \ddot{y}_{z_2}^*(t) - k_{12} [\hat{y}_{z_2} - \dot{y}_{z_2}^*(t)] - k_{02} [\hat{y}_{z_2} - y_{z_2}^*(t)] \quad (4.89)$$

com (k_{11}, k_{01}) e (k_{12}, k_{02}) sendo escolhidos de tal forma que $p_1(s) = s^2 + k_{11}s + k_{01}$ e $p_2(s) = s^2 + k_{12}s + k_{02}$ sejam polinômios de Hurwitz.

Portanto, como $\ddot{y}_{z_1} = v_1$ e $\ddot{y}_{z_2} = v_2$, isola-se u_{N_E} e r_{N_E} em (4.85) para obter as expressões abaixo:

$$u_{N_E} = g_{z_1}^{-1}(\hat{\mathbf{Z}}_E) [v_1 - f_{z_1}(\hat{\mathbf{Z}}_E)] \quad (4.90)$$

$$r_{N_E} = g_{z_2}^{-1}(\hat{\mathbf{Z}}_E) [v_2 - f_{z_2}(\hat{\mathbf{Z}}_E)] \quad (4.91)$$

Com base no conhecimento de u_{N_E} e r_{N_E} , resta-se então construir os compensadores dinâmicos que permitirão obter as expressões finais dos sinais de controle V_1 e V_2 .

Primeiramente, determinam-se os comportamentos entrada-saída de ambos em relação a cada saída, os quais estão associado ao respectivo índice de observabilidade. Em seguida, sendo o vetor de saída de (4.67) idêntico ao de (4.78), iguala-se então os comportamentos entrada-saída para cada saída. Assim, é possível montar um sistema de equações diferenciais, cujas soluções correspondem exatamente as expressões dos compensadores dinâmicos. No caso, tais expressões apresentam o seguinte formato:

$$\dot{u}_N = \lambda_{1_E}(\hat{\mathbf{Z}}_E, u_{N_E}, r_{N_E}, u_N, r_N) \quad (4.92)$$

$$\dot{r}_N = \lambda_{2_E}(\hat{\mathbf{Z}}_E, u_{N_E}, r_{N_E}, u_N, r_N) \quad (4.93)$$

onde λ_{1_E} e λ_{2_E} são funções suaves.

Por fim, integrando as equações (4.92) e (4.93), obtêm-se, portanto, os sinais de controle u_N e r_N que serão aplicados na planta não-linear descrita por (4.67).

4.6.3.3 Simulações Numéricas

Buscando validar o desempenho do sistema de controle de trajetória juntamente com a estimação adaptativa proposta neste capítulo para o modelo não-linear (4.67), conduziram-se simulações numéricas para analisar de forma mais abrangente o filtro de Kalman sem derivadas adaptativo (ADKF) proposto neste capítulo.

Definindo um tempo de simulação $t_s = 300$ s e uma taxa de amostragem $\Delta t = 100$ ms, o sistema não-linear (4.67) é estabelecido com a hipótese que suas matrizes de covariância do ruído de processo e de medição foram descritas como sendo $\mathbf{Q}_k^{NL} = \text{diag}\{10^{-2}, 10^{-4}\}$ e $\mathbf{R}_k^{NL} = 10^{-4}\mathbf{I}_{2 \times 2}$, respectivamente. Ademais, considera-se os seguintes pontos:

- Por uma questão de simplicidade, apenas as variáveis de controle não-linear estão sujeitas a um ruído de processo aditivo.
- Devido a necessidade de redefinir a saída do sistema, disponibiliza-se um sensor independente para a orientação no referencial fixo da Terra, ou seja, ψ_N . Assume-se também que ψ_N está sujeito a um ruído de medição, cuja variância é igual a 10^{-8} .

As trajetórias nominais para as saídas do sistema são escolhidas de tal forma a percorrer uma trajetória circular de raio igual a 100 m no plano $X_E Y_E$, sendo expressas como se segue:

$$x_N^*(t) = 100\text{sen}(0,05t) \quad (4.94)$$

$$y_N^*(t) = 100 \cos(0,05t) \quad (4.95)$$

Logo, usando $\eta_N = 0.6745$ e $\beta_N = 0.6577$, os quais foram extraídos de [114], obtêm-se as trajetórias nominais para as variáveis restantes seguindo o procedimento descrito na etapa de planejamento de trajetória. Ademais, assume-se as condições iniciais de (4.67) como sendo $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ \pi/2 \ 0]^T$.

Baseado no conhecimento das trajetórias nominais de (4.67), note também que se faz necessário calcular as trajetórias nominais para o vetor de saída redefinido, já que são essas que compõem as leis de controle (4.88) e (4.89). Tais trajetórias podem ser obtidas como se segue:

$$\Omega_1^*(t) = x_N^*(t) + \rho_N \text{sen}(\psi_N^*(t)) \quad (4.96)$$

$$\Omega_2^*(t) = y_N^*(t) + \rho_N \cos(\psi_N^*(t)) \quad (4.97)$$

juntamente com as suas respectivas derivadas temporais. O parâmetro ρ_N é definido de tal forma que o as coordenadas do ponto $\mathbf{\Omega}$ represente a proa do navio. Como especificado em [114], tem-se que o comprimento do navio é de 32 m, logo se define $\rho_N = 16$ m.

Em relação aos parâmetros do ADKF, após transformar o sistema (4.86) em forma de tempo discreto, estabelece-se que a estimativa inicial do vetor de estados é nula e que $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_{3 \times 3}$. Ressalta-se também que os parâmetros de controle foram ajustados como sendo os coeficientes dos polinômios de Hurwitz da forma $p_1(s) = p_2(s) = (s + 0,10)^2$, os quais fornecem um coeficiente de ponderação α igual a 0,2217 para a estimação de elementos diagonais da matriz de covariância do vetor de medições no ADKF.

Como o vetor de saída (4.67) não representa as saídas planas de (4.78), a matriz de covariância do ruído de medição associada com (4.59) não será idêntica àquela associada com (4.67). Para resolver essa questão, baseado no conhecimento que se tem a respeito das variâncias de x_N , y_N e ψ_N , propõe-se aproximar a variância dos ruídos de medição de y_{z_1} e de y_{z_2} como se segue:

$$\text{var}[y_{z_1}] = \text{var}[x_N] + (\rho_N)^2 \text{var}[\text{sen}(\psi_N)] \quad (4.98)$$

$$\text{var}[y_{z_2}] = \text{var}[y_N] + (\rho_N)^2 \text{var}[\text{cos}(\psi_N)] \quad (4.99)$$

onde $\text{var}[\text{sen}(\psi_N)]$ e $\text{var}[\text{cos}(\psi_N)]$ podem ser expressas aproximadamente como:

$$\text{var}[\text{sen}(\psi_N)] = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\text{var}[\psi_N]}\right)^2 \quad (4.100)$$

$$\text{var}[\text{cos}(\psi_N)] = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2\text{var}[\psi_N]}\right) \quad (4.101)$$

que resulta em $\mathbf{R}_k^{Brunovsky} \approx \text{diag}\{10^{-4}, 1,03 \times 10^{-4}\}$.

Agora, devido a dificuldade de relacionar matematicamente as matrizes de covariância do ruído de processo de (4.67) e de (4.86), propõe-se então comparar os resultados obtidos usando o ADKF proposto em relação com os do DKF. Mais precisamente, ao definir uma matriz $\mathbf{Q}_k^{Brunovsky}$ constante durante toda a simulação ao DKF, a ideia consiste em avaliar o grau de efetividade que é agregado ao sistema devido a estimação adaptativa de $\mathbf{Q}_k^{Brunovsky}$ pelo ADKF.

Para tanto, utilizaram-se realizações idênticas do ruído de processo e de medição em ambos métodos de estimação. Simulações numéricas foram então conduzidas com $\mathbf{Q}_0^{Brunovsky} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$ e $\mathbf{R}_k^{Brunovsky}$ sendo conhecida *a priori*, cujos resultados são ilustrados nas Figuras 4.14 a 4.19.

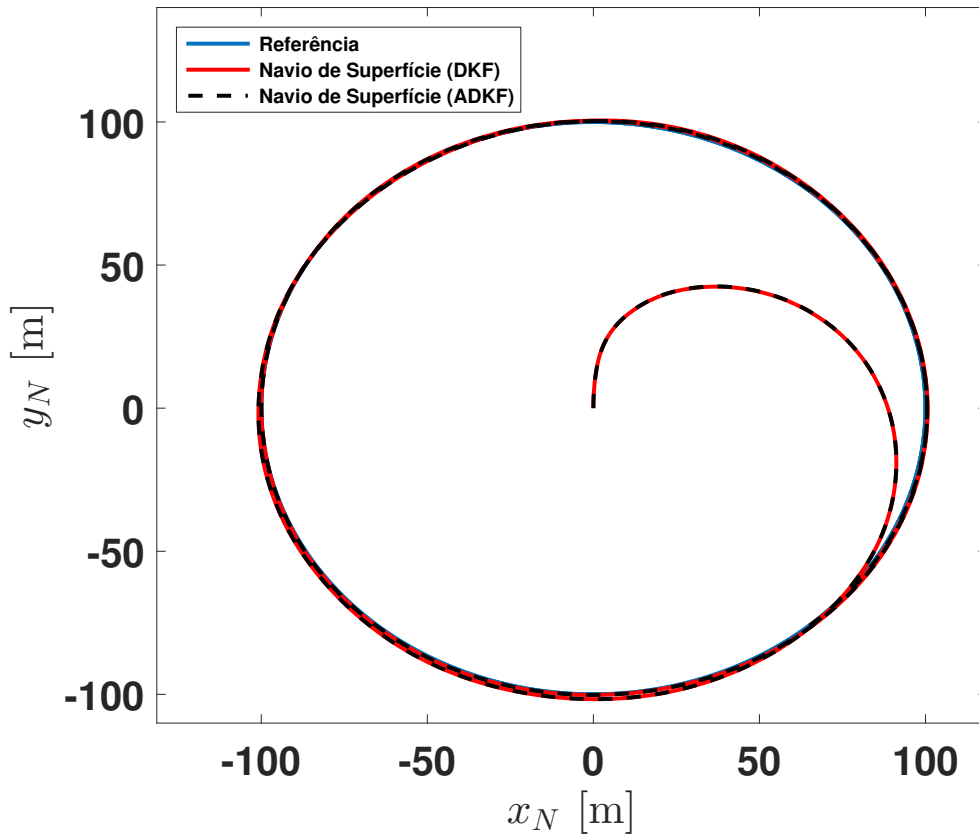
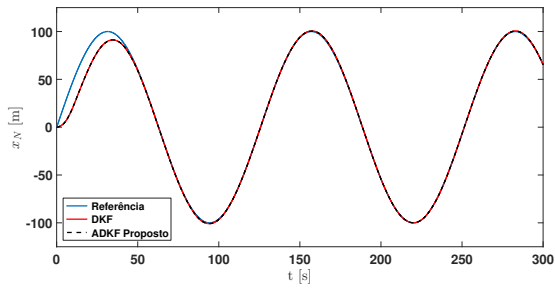
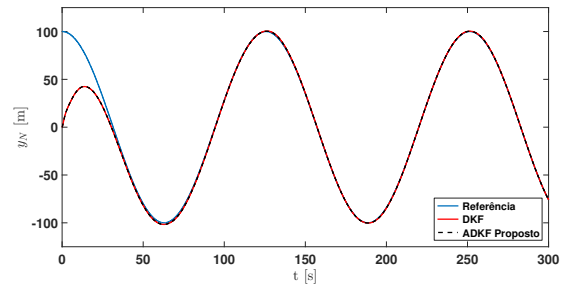


Figura 4.14: Evolução temporal da posição do centro geométrico do navio no plano $X_{Terra}Y_{Terra}$.

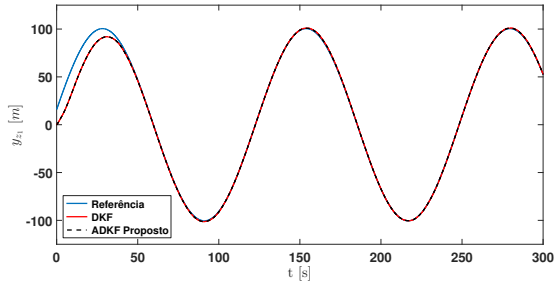


(A) Sinal de saída - x_N

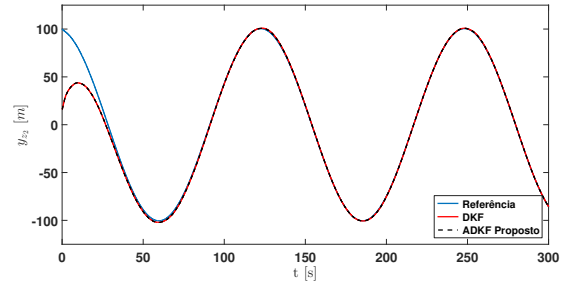


(B) Sinal de saída - y_N

Figura 4.15: Evolução temporal dos sinais de saída.

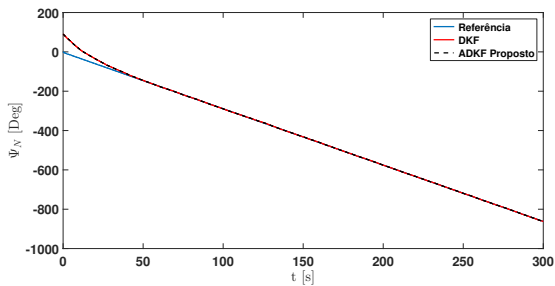


(A) Saída plana - y_{z1}

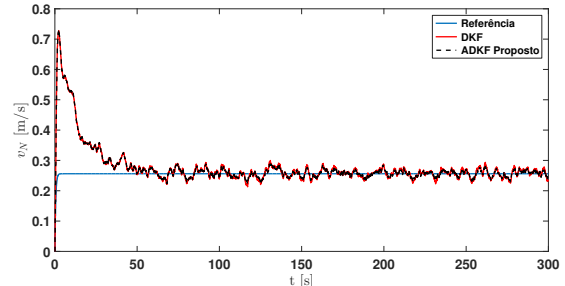


(B) Saída plana - y_{z2}

Figura 4.16: Evolução temporal dos sinais das saída planas.

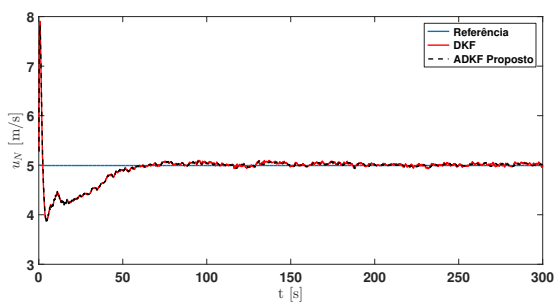


(A) Variável de estado - ψ_N

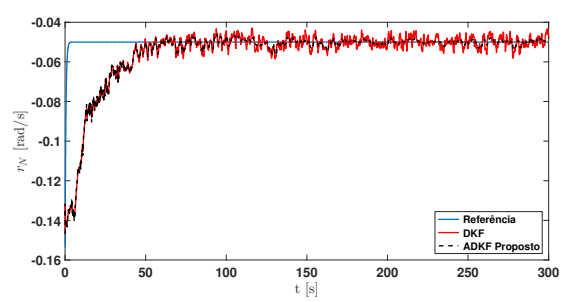


(B) Variável de estado - v_N

Figura 4.17: Evolução temporal dos estados remanescentes do navio de superfície.

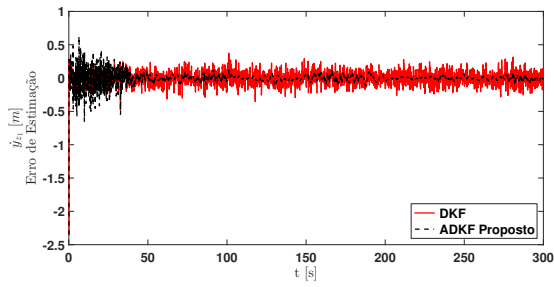


(A) Sinal de controle - u_N

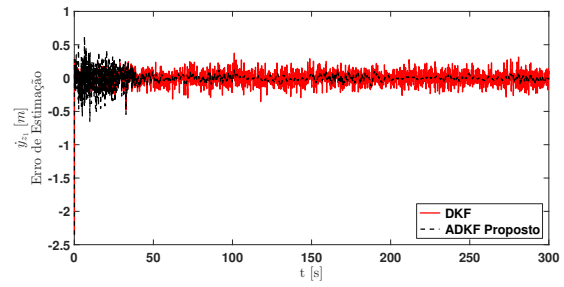


(B) Sinal de controle - r_N

Figura 4.18: Evolução temporal dos sinais de controle.



(A) Erro de estimação para \dot{y}_{z_1}



(B) Erro de estimação para \dot{y}_{z_2}

Figura 4.19: Erro de estimação para as derivadas temporais das saída planas (Estados não-medidos).

Na Figura 4.14, nota-se que ambos os casos convergiram para a trajetória circular definida no plano $X_{Terra}Y_{Terra}$. Isso também é destacado na evolução temporal tanto dos sinais de saída quanto nos da saída planas, como visto nas Figura 4.15 e Figura 4.16, respectivamente. Na Figura 4.17, ao analisar a evolução temporal dos sinais correspondentes às variáveis de estado remanescentes, já se observam os primeiros indícios que o ADK proposto apresenta um melhor desempenho dinâmico em malha fechada quando comparado ao DKF. Tal constatação é então evidenciada com mais clareza na Figura 4.18, principalmente, na evolução temporal da velocidade em Guinada. Salienta-se também que, na Figura 4.11, os erros de estimação das derivadas temporais da saída plana, cujas medições não estão disponíveis, obtidos pelo DKF são bem superiores aos da filtragem adaptativa.

Por fim, seguindo o procedimento de análise realizado nos casos anteriores, índices de desempenho de controle tradicionais e métricas de acurácia da estimação foram calculados para o DKF e ADKF, como pode ser visto nas Tabelas 4.7 e 4.8.

Tabela 4.7: Índices de desempenho de controle.

		DKF	ADKF
ISE	x_N	$1,38 \times 10^4$	$1,37 \times 10^4$
	y_N	$6,62 \times 10^4$	$6,60 \times 10^4$
IAE	x_N	$7,83 \times 10^2$	$7,70 \times 10^2$
	y_N	$1,34 \times 10^3$	$1,31 \times 10^3$
ITAE	x_N	$2,72 \times 10^4$	$2,45 \times 10^4$
	y_N	$3,08 \times 10^4$	$2,72 \times 10^4$
TVC	u_N	$2,31 \times 10^0$	$1,59 \times 10^0$
	r_N	$2,28 \times 10^{-1}$	$1,04 \times 10^{-1}$

Tabela 4.8: Comparação da acurácia das estimativas dos estados não-medidos.

		DKF	ADKF
RMSE	y_{z_1}	$1,07 \times 10^{-1}$	$8,70 \times 10^{-2}$
	y_{z_2}	$1,22 \times 10^{-1}$	$1,09 \times 10^{-1}$
MAE	y_{z_1}	$7,85 \times 10^{-2}$	$4,37 \times 10^{-2}$
	y_{z_2}	$8,20 \times 10^{-2}$	$4,91 \times 10^{-2}$

Assim como nos estudos de caso anteriores, a Tabela 4.7 revela que os índices de desempenho de controle calculados para o ADKF são menores quando comparados ao DKF, principalmente no que se diz respeito aos esforços dos atuadores, indicando assim, um desempenho superior do ADKF tanto em relação ao sinal de saída quanto ao de controle. Em termos de qualidade de estimativa dos estados não-medidos, o maior nível de acurácia das estimativas obtido pelo ADKF proposto em relação ao DKF é evidenciado na Tabela 4.8.

4.7 Conclusões

Neste capítulo, apresentaram-se conceitos relacionados aos sistemas liouvillianos, às entradas planas e ao uso de compensadores dinâmicos visando formalizar um conjunto de ferramentas teóricas que permitisse realizar o planejamento e o rastreamento de trajetórias a um classe maior de sistemas não-lineares, inclusive para certos sistemas não-diferencialmente planos. Em seguida, visando lidar com situações em que a matriz de covariância do ruído de processo é desconhecida, detalhou-se como o filtro de Kalman sem derivadas adaptativo poderia ser aplicado juntamente com a abordagem de controle por entradas planas.

Ilustrou-se então o desempenho dessa outra proposta de filtro de Kalman sem derivadas adaptativo através do estudo de caso de três sistemas dinâmicos:

- **Sistema de Lorenz:** Mesmo sendo diferencialmente plano, utilizou-se o conceito de entradas planas para que a saída do sistema pudesse ser vista como a saída plana para fins de projeto do controlador.
- **Processo de Quatro Tanques:** Sendo não-diferencialmente plano, utilizou-se o conceito de entradas planas para que as saída do sistema pudessem ser vistas como as saídas planas para fins de projeto dos controladores.
- **Navio de Superfície:** Sendo não-diferencialmente plano e de fase não-mínima, redefiniram-se virtualmente as saídas do sistema de tal forma a permitir utilizar o conceito de entradas planas para fins de projeto dos controladores.

De forma geral, graças à estimativa em tempo real da matriz de covariância do ruído de processo durante o processo de filtragem usando o filtro de Kalman sem derivadas adaptativo, evidenciou-se um alto nível de acurácia da estimativa dos estados para os casos analisados. Como consequência, tais estimativas colaboram para a eficácia da estratégia de controle por entrada planas.

Capítulo 5

Conclusões

Neste manuscrito, apresentou-se uma iniciativa de pesquisa centrada no desenvolvimento de metodologias de estimação adaptativa para sistemas não-lineares em malha fechada. Para tanto, exigiu-se que objetivos específicos fossem alcançados, conforme descrito a seguir:

- Introduziu-se, primeiramente, uma variação adaptativa do filtro de Kalman para sistemas lineares em malha fechada a fim de lidar tanto com o completo desconhecimento da matriz de covariância do ruído de processo quanto considerar a influência do vetor de estimativas de estado no sinal de controle. Para tal fim, procedeu-se com análise conjunta em malha fechada do sistema e da forma preditiva do filtro de Kalman, além do uso de resultados teóricos relacionados a solução da equação discreta de Lyapunov.
- Duas expansões para sistemas não-lineares da variação adaptativa do filtro de Kalman proposta para sistemas lineares foram discutidas no âmbito da teoria de planicidade diferencial e do uso de compensadores dinâmicos associados ao conceito de entradas planas. Em ambos os casos, aproveitou-se do sistema linear equivalente na forma canônica de Brunovsky para aplicar a variação adaptativa do filtro de Kalman e, conseqüentemente, utilizar as estimativas para compor os sinais de comandos para a planta em estudo.
- A partir de simulações numéricas implementadas no ambiente de simulação *Simulink* do software *MATLAB*[®], validou-se o desempenho em malha fechada das metodologias de estimação adaptativa propostas nesta tese para um conjunto diversificado de sistemas dinâmicos lineares e não-lineares. Para uma análise quantitativa, optou-se por utilizar índices de desempenho de controle tradicionais e métricas de acurácia da estimação. Isso permitiu observar que os resultados obtidos foram semelhantes ou superiores quando comparado com outras abordagens adaptativas já estabelecidas na literatura. Ademais, por serem computacionalmente menos custosas, vislumbra-se a possibilidade de implementar tais metodologias em sistemas de controle de processos industriais em tempo real.

Considera-se, portanto, que o objetivo geral e os objetivos específicos desta tese de doutorado foram atingidos conforme estabelecido na Seção 1.4.

5.1 Avaliação da Metodologia Desenvolvida

A avaliação da metodologia desenvolvida nesta tese de doutorado envolve considerar aspectos positivos e aspectos a aprimorar.

5.1.1 Aspectos Positivos

Em vista das análises efetuadas tanto no caso linear como nos não-lineares, verificou-se que as metodologias propostas conseguem simultaneamente garantir um bom desempenho dos controladores em relação ao rastreamento da referência definida para o vetor de saída e atualizar a matriz de covariância do ruído de processo com o objetivo de não exigir desnecessariamente dos atuadores, principalmente, à medida que o regime estacionário é alcançado no decorrer das simulações.

Em especial, observou-se uma melhora significativa em relação ao desempenho do filtro de Kalman sem derivadas (DKF) introduzido por Rigatos [60]. Como não necessariamente se tem um conhecimento *a priori* da matriz de covariância do ruído de processo associada ao sistema na forma canônica de Brunovsky, a variação adaptativa proposta do filtro de Kalman sem derivadas (ADKF) se apresentou mais vantajosa quando comparada ao DKF em relação ao nível de acurácia das estimativas dos estados.

Por fim, ressalta-se que a abordagem por entradas planas permitiu aplicar a metodologia proposta para uma maior classe de sistemas não-lineares, inclusive para certos sistemas não-diferencialmente planos. Mesmo evidenciando a possibilidade de combinar o DKF junto com essa abordagem, o desconhecimento prévio da matriz de covariância do ruído de processo do sistema linear equivalente na forma canônica de Brunovsky pode prejudicar o comportamento do filtro, o que não foi evidenciado para o ADKF.

5.1.2 Aspectos a aprimorar

A metodologia proposta ainda carece de aprimoramentos, principalmente quando o sistema está sujeito a incertezas paramétricas, dinâmicas não-modeladas ou distúrbios externos. Isso fica evidente ao notar que as expressões que relacionam os sinais de controle da planta com as variáveis de controle do sistema linear equivalente na forma canônica de Brunovsky são fortemente dependentes do modelo dinâmico utilizado. Para contornar essa questão, uma possibilidade seria visualizar a estrutura do filtro de Kalman como um estimador tanto estados quanto de perturbações de média não-nula, conforme descrito em [62].

Um outro ponto a ser discutido é a hipótese acerca do conhecimento *a priori* da matriz de covariância do ruído de medição. Apesar de ser uma informação menos complexa de se obter na prática, acredita-se que, em determinadas situações, essa questão pode ser mais crítica, como, por exemplo, quando as saídas planas não representam o vetor de saída do sistema ou quando se faz necessário redefinir o vetor de saídas. Em vista disso, faz-se necessário ainda adicionar um mecanismo de tal forma que a metodologia proposta possa estimar a matriz de covariância de ambos os ruídos.

5.2 Contribuições

Em particular, este trabalho de tese de doutorado destaca as seguintes contribuições:

1. Projeto de um filtro de Kalman adaptativo para sistemas lineares em malha fechada que estima em tempo real a matriz de covariância do ruído de processo levando em consideração a influência do vetor de estimativas de estado no sinal de controle (ver Capítulo 2).
2. Primeira expansão para sistemas não-lineares do filtro de Kalman adaptativo proposto a partir de elementos convencionais da teoria de planicidade diferencial (ver Capítulo 3), aperfeiçoando-se assim a estratégia introduzida em [60].
3. Segunda expansão para sistemas não-lineares do filtro de Kalman adaptativo proposto a partir do uso de compensadores dinâmicos associados ao conceito de entradas planas, permitindo aplicá-la também em sistemas não-diferencialmente planos (ver Capítulo 4).
4. Extensão da estrutura de controle por entradas planas descritas em [79] para sistemas dinâmicos MIMO (ver Capítulo 4).
5. Redefinição do vetor de saídas como alternativa para expansão da estrutura de controle por entradas planas e da metodologia adaptativa proposta para sistemas não-lineares de fase não-mínima (ver Capítulo 4).

5.3 Participação em Projeto de Pesquisa

Em paralelo aos resultados obtidos durante o doutorado, ressalto a importância em participar como *Pesquisador Júnior* na Universidade de Brasília, executando atividades de pesquisa no âmbito da Engenharia de Controle e Automação no projeto “*Chevron Projeto N° 29 Controle de injeção de água em reservatórios de petróleo*”.

Durante esse período, foi possível adquirir um conhecimento teórico complementar ao das atividades relacionadas ao doutorado (*e.g.*, habilidades computacionais), sendo fundamental para alcançar as contribuições descritas anteriormente. Além disso, a interação com outros pesquisadores permitiu amadurecer a visão acerca do problema abordado neste manuscrito.

5.4 Publicações

O trabalho desenvolvido neste manuscrito permitiu o desenvolvimento, de forma direta ou indireta, dos seguintes artigos aceitos tanto para apresentação em conferências e para publicação em periódicos científicos:

- MONTEIRO, F. R.; LIMAVERDE FILHO, J. O. A.; FORTALEZA, E. L. F. *Modal reduction based tracking control for installation of subsea equipments*. IFAC-PapersOnLine, Elsevier, v. 48, n. 6, p. 15-20, 2015.

- ALMEIDA, R. Q.; **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; SUEHARA, B. B.; FORTALEZA, E. L. F. *Modelagem e Análise de Estabilidade para Curva de Potência em Turbinas Eólicas*. In: Proc. XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2015). Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. 2015.
- SUEHARA, B. B.; **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; ALMEIDA, R. Q.; FORTALEZA, E. L. F. *Control of the Angular Speed of a Wind Turbine: a Flatness Based Approach*. In: Proc. XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2015). Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. 2015.
- **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**, CÓRDOBA, L. M. I., FORTALEZA, E. L. F. *Identification and Nonlinear Control Strategy for Two-dimensional Gas Coning Problem*. IFAC-PapersOnLine. 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS), Monterey, USA. 2016.
- **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; LOURENÇO, T. S.; FORTALEZA, E. L. F.; MURILO, A.; LOPES, R. V. *Trajectory tracking for a quadrotor system: A flatness-based nonlinear predictive control approach*. In: 2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA), Buenos Aires, Argentina. 2016.
- **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; WIIRA, M. C. F.; FORTALEZA, E. L. F.; TONETTI, E. S. *Planicidade Diferencial aplicada ao Controle de Nível do Processo de Quatro Tanques*. In: Proc. XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2016). Vitória, Espírito Santo, Brasil. 2016.
- LINHARES, T. M.; **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; CUELLAR, W. H.; FORTALEZA, E. L. F. *Active Heave Compensator using Kalman filter-based Disturbance Estimator*. In: Proc. XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2016). Vitória, Espírito Santo, Brasil. 2016.
- CUELLAR, W. H.; LINHARES, T. M.; **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; VARGAS, J. A. R.; FORTALEZA, E. L. F. *Robust Control for Heave Compensator With the Use of Kalman Filter-Based Disturbances Estimator*. In: ASME 2017 36th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE). Trondheim, Norway. 2017. Volume 8: Polar and Arctic Sciences and Technology; Petroleum Technology.
- PAIVA, E. B. R. F.; FORTALEZA, E. L. F.; **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; *Control of Multiple Input and Multiple Output infinite dimensional Systems Based on Modal Reduction and Flatness Theory*. In: XXII Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2018), João Pessoa, Paraíba, Brasil. 2018.

- SIMÕES, R. D. P.; **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; BARROSO NETO, E. P.; FORTALEZA, E. L. F. *Analytical solution to motion planning and modal-based tracking control for dynamic positioning of subsea equipment*. Ocean Engineering, v. 164, p. 712-721, 2018.
- SILVA, J. G.; **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; FORTALEZA, E. L. F. *Adaptive Extended Kalman Filter using Exponential Moving Average*. IFAC-PapersOnLine, v. 51, p. 208-211, 2018.
- FORTALEZA, E. L. F.; **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; GONTIJO, G. S. V.; ALBUQUERQUE, E. L.; SIMÕES, R. D. P.; SOARES, M. M.; MIRANDA, M. E. R.; ABADE, G. C. *Analytical, numerical and experimental study of gas coning on horizontal wells*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 41, p. 141, 2019.
- GONZALEZ, A. F.; CUELLAR, W. H.; **LIMAVERDE FILHO, J. O. A.**; FORTALEZA, E. L. F. *Flatness Based Control of a Hybrid Heave Compensator*. In: 25th ABCM International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2019), Uberlândia, Minas Gerais, Brasil. 2019.

5.5 Recomendações e Trabalhos Futuros

Em termos de trabalhos futuros, recomenda-se ainda a seguinte agenda de tarefas:

1. Validação experimental da metodologia de estimação adaptativa proposta neste manuscrito. Para esse fim, sugere-se que sejam utilizadas inicialmente as plataformas didáticas disponíveis na universidade como, por exemplo, a planta não-linear que simula o processo de quatro tanques.
2. Introduzir ao filtro de Kalman adaptativo um método de estimação e de rejeição de perturbações de média não-nula e com diferentes espectros frequenciais, as quais englobam possíveis incertezas associadas aos parâmetros ou a presença de elementos externos desconhecidos.
3. Adicionar um segundo mecanismo que seja possível simultaneamente estimar ambas as matrizes de covariância dos ruídos que agem sob a planta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] OLFATI-SABER, R. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 2001. Disponível em <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/8979>.
- [2] SOUTO, R.; ISHIHARA, J.; BORGES, G. Kalman filtering for discrete time uncertain systems. In: JORDÁN, M. A. (Ed.). *Discrete Time Systems*. Rijeka: IntechOpen, 2011. cap. 6. Disponível em <https://doi.org/10.5772/15411>.
- [3] BAR-SHALOM, Y.; LI, X. R.; KIRUBARAJAN, T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software*. New York, USA: John Wiley & Sons, 2001.
- [4] MARTIN, P.; MURRAY, R. M.; ROUCHON, P. Flatness based design. *Control Systems, Robotics and Automation*, EOLSS Publications, v. 13, January 2002.
- [5] ÅSTRÖM, K. J. *Introduction to stochastic control theory*. New York, USA: Courier Corporation, 2012. (Dover Books on Electrical Engineering).
- [6] KOLGOMOROV, A. N. Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, v. 208, p. 2043–2045, 1939.
- [7] WIENER, N. *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: with engineering applications*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1950.
- [8] KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.
- [9] ANDERSON, B. D.; MOORE, J. B. *Optimal filtering*. New York, USA: Dover Publications, 2012. (Dover Books on Electrical Engineering).
- [10] SIMON, D. *Optimal state estimation: Kalman, H_∞ , and nonlinear approaches*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2006.
- [11] GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. Applications of Kalman filtering in aerospace 1960 to the present [historical perspectives]. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 30, n. 3, p. 69–78, June 2010.
- [12] ZHOU, J. et al. Robust and efficient road tracking in aerial images. *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences (CMRT05)*, v. 36, p. 35–40, August 2005.

- [13] LIMAVERDE FILHO, J. O. d. A. et al. Trajectory tracking for a quadrotor system: A flatness-based nonlinear predictive control approach. In: *2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. Buenos Aires, Argentina: IEEE, 2016. p. 1380–1385.
- [14] SUBRAMANIAN, A.; SAYED, A. H. Joint rate and power control algorithms for wireless networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 53, n. 11, p. 4204–4214, October 2005.
- [15] FOSSEN, T. I.; SAGATUN, S. I.; SØRENSEN, A. J. Identification of dynamically positioned ships. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 4, n. 3, p. 369–376, March 1996.
- [16] BAHMANI-OSKOOEE, M.; BROWN, F. Kalman filter approach to estimate the demand for international reserves. *Applied Economics*, Routledge, Taylor & Francis, v. 36, n. 15, p. 1655–1668, 2004.
- [17] HOTEIT, I.; PHAM, D.-T. An adaptively reduced-order extended Kalman filter for data assimilation in the tropical Pacific. *Journal of Marine Systems*, Elsevier, v. 45, n. 3, p. 173 – 188, 2004.
- [18] RIGATOS, G. G. et al. Control of three-phase voltage source converters with the derivative-free nonlinear Kalman filter. *Intelligent Industrial Systems*, Springer, v. 2, n. 1, p. 21–33, 2016.
- [19] RIGATOS, G. G.; MELKIKH, A. Flatness-based control approach to drug infusion for cardiac function regulation. *IET Systems Biology*, Institution of Engineering and Technology, v. 11, p. 8–18(10), February 2017.
- [20] RIGATOS, G. G.; WIRA, P.; MELKIKH, A. Nonlinear optimal control for the synchronization of biological neurons under time-delays. *Cognitive Neurodynamics*, v. 13, n. 1, p. 89–103, February 2019.
- [21] FITZGERALD, R. J. Divergence of the Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 16, n. 6, p. 736–747, 1971.
- [22] SANGSUK-IAM, S.; BULLOCK, T. E. Analysis of discrete-time Kalman filtering under incorrect noise covariances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 35, n. 12, p. 1304–1309, December 1990.
- [23] LAINIOTIS, D. Optimal adaptive estimation: Structure and parameter adaptation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 16, n. 2, p. 160–170, April 1971.
- [24] ALSPACH, D. L.; SCHARF, L. L.; ABIRI, A. A bayesian solution to the problem of state estimation in an unknown noise environment. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 19, n. 2, p. 265–287, 1974.
- [25] MATISKO, P.; HAVLENA, V. Noise covariance estimation for Kalman filter tuning using bayesian approach and monte carlo. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley Online Library, v. 27, n. 11, p. 957–973, 2013.

- [26] MAGNANT, C. et al. Bayesian non-parametric methods for dynamic state-noise covariance matrix estimation: Application to target tracking. *Signal Processing*, v. 127, p. 135–150, October 2016.
- [27] MYERS, K.; TAPLEY, B. D. Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 21, n. 4, p. 520–523, August 1976.
- [28] DUROVIC, Z. M.; KOVACEVIC, B. D. Robust estimation with unknown noise statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 6, p. 1292–1296, June 1999.
- [29] WANG, X. et al. A novel approach of noise statistics estimate using H_∞ filter in target tracking. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, v. 17, n. 5, p. 449–457, May 2016.
- [30] MEHRA, R. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 15, n. 2, p. 175–184, April 1970.
- [31] BÉLANGER, P. R. Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process. *Automatica*, v. 10, n. 3, p. 267–275, May 1974.
- [32] NORIEGA, G.; PASUPATHY, S. Adaptive estimation of noise covariance matrices in real-time preprocessing of geophysical data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 35, n. 5, p. 1146–1159, September 1997.
- [33] DUNÍK, J.; ŠIMANDL, M.; STRAKA, O. On autocovariance least-squares method for noise covariance matrices estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, n. 2, p. 967–972, February 2017.
- [34] KASHYAP, R. Maximum likelihood identification of stochastic linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 15, n. 1, p. 25–34, February 1970.
- [35] MAYBECK, P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control*. New York, USA: Academic Press, 1982. (Mathematics in science and engineering).
- [36] SCHON, T. B.; WILLS, A.; NINNESS, B. System identification of nonlinear state-space models. *Automatica*, v. 47, n. 1, p. 39–49, January 2011.
- [37] MEHRA, R. Approaches to adaptive filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 17, n. 5, p. 693–698, October 1972.
- [38] LI, X. R.; BAR-SHALOM, Y. A recursive multiple model approach to noise identification. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, IEEE, v. 30, n. 3, p. 671–684, July 1994.
- [39] DUNÍK, J.; ŠIMANDL, M.; STRAKA, O. Methods for estimating state and measurement noise covariance matrices: Aspects and comparison. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 42, n. 10, p. 372–377, July 2009. 15th IFAC Symposium on System Identification.

- [40] DUNÍK, J. et al. Noise covariance matrices in state-space models: A survey and comparison of estimation methods - Part I. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley Online Library, v. 31, n. 11, p. 1505–1543, April 2017.
- [41] SCHMIDT, S. F. The Kalman filter - its recognition and development for aerospace applications. *Journal of Guidance and Control*, v. 4, n. 1, p. 4–7, May 1981.
- [42] WANG, Y.; PAPAGEORGIOU, M. Real-time freeway traffic state estimation based on extended Kalman filter: a general approach. *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier, v. 39, n. 2, p. 141–167, February 2005.
- [43] STETZEL, K. D. et al. Electrochemical state and internal variables estimation using a reduced-order physics-based model of a lithium-ion cell and an extended Kalman filter. *Journal of Power Sources*, Elsevier, v. 278, p. 490–505, March 2015.
- [44] KARIMIPOUR, H.; DINAHAHI, V. Extended Kalman filter-based parallel dynamic state estimation. *IEEE Transactions on Smart Grid*, v. 6, n. 3, p. 1539–1549, May 2015.
- [45] TODORAN, H. G.; BADER, M. Extended Kalman filter (EKF)-based local SLAM in dynamic environments: A framework. In: *Advances in Robot Design and Intelligent Control*. Bucharest: Springer, Cham, 2016. v. 371, p. 459–469.
- [46] JULIER, S.; UHLMANN, J.; DURRANT-WHYTE, H. F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 45, n. 3, p. 477–482, March 2000.
- [47] AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas*. Belo Horizonte, Brazil: Editora UFMG, 2000.
- [48] WAN, E. A.; MERWE, R. V. D. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In: *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*. Lake Louise, Alberta, Canada: IEEE, 2000. p. 153–158.
- [49] HAJIYEV, C.; SOKEN, H. E. Robust adaptive unscented Kalman filter for attitude estimation of pico satellites. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. 107–120, March 2014.
- [50] LEFEBVRE, T.; BRUYNINCKX, H.; DE SCHUTTER, J. Comment on "a new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators" [with authors' reply]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 8, p. 1406–1409, November 2002.
- [51] XIONG, R. et al. Evaluation on state of charge estimation of batteries with adaptive extended Kalman filter by experiment approach. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 62, n. 1, p. 108–117, January 2013.
- [52] PARTOVIBAKHSH, M.; LIU, G. An adaptive unscented Kalman filtering approach for online estimation of model parameters and state-of-charge of lithium-ion batteries for autonomous

- mobile robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 23, n. 1, p. 357–363, May 2015.
- [53] Peng, S. et al. State of charge estimation of battery energy storage systems based on adaptive unscented Kalman filter with a noise statistics estimator. *IEEE Access*, v. 5, p. 13202–13212, 2017.
- [54] GAO, S.; HU, G.; ZHONG, Y. Windowing and random weighting-based adaptive unscented Kalman filter. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley Online Library, v. 29, n. 2, p. 201–223, January 2015.
- [55] WANG, H. et al. An adaptive Kalman filter estimating process noise covariance. *Neurocomputing*, v. 223, p. 12–17, February 2017.
- [56] Wang, Z. et al. Vehicle system state estimation based on adaptive unscented Kalman filtering combing with road classification. *IEEE Access*, v. 5, p. 27786–27799, 2017.
- [57] HUANG, Y. et al. A new adaptive extended Kalman filter for cooperative localization. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 54, n. 1, p. 353–368, February 2018.
- [58] SILVA, J. G.; LIMAVERDE FILHO, J. O. d. A.; FORTALEZA, E. L. F. Adaptive extended Kalman filter using exponential moving average. *IFAC-PapersOnLine*, v. 51, n. 25, p. 208–211, September 2018. 9th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2018).
- [59] LI, B. et al. Design and implementation of an adaptive Kalman filtering for the launcher of multiple launch rocket system. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley Online Library, v. 32, n. 3, p. 447–463, 2018.
- [60] RIGATOS, G. G. A derivative-free Kalman filtering approach to state estimation-based control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 59, n. 10, p. 3987–3997, October 2012.
- [61] FLIESS, M. et al. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, v. 315, p. 619–624, June 1992.
- [62] RIGATOS, G. G. *Nonlinear control and filtering using differential flatness approaches: applications to electromechanical systems*. Switzerland: Springer, 2015. (Studies in Systems, Decision and Control (SSDC), v. 25).
- [63] RIGATOS, G. G. *Intelligent renewable energy systems: modelling and control*. Switzerland: Springer, 2016. (Green Energy and Technology).
- [64] ROUCHON, P. et al. Flatness, motion planning and trailer systems. In: *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, 1993*. San Antonio, Texas: IEEE, 1993. v. 3, p. 2700–2705.
- [65] CHELOUAH., A. et al. Differential flatness and control of induction motors. *Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications*, p. 80–85, July 1996.

- [66] ROTHFUSS, R.; RUDOLPH, J.; ZEITZ, M. Flatness based control of a nonlinear chemical reactor model. *Automatica*, v. 32, n. 10, p. 1433–1439, October 1996.
- [67] MARTIN, P. *Contributions à l'étude des systèmes linéaires différentiellement plats*. Tese (Doutorado) — École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992. Disponível em <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00005720/document>.
- [68] FLIESS, M.; LÉVINE, J.; ROUCHON, P. Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples. *International Journal of Control*, v. 61, p. 1327–1361, February 1995.
- [69] LIMAVERDE FILHO, J. O. d. A. et al. Planicidade diferencial aplicada ao controle de nível do processo de quatro tanques. In: *Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2016)*. Vitória, Espírito Santo: SBA, 2016.
- [70] DEUTSCHER, J.; ANTRITTER, F.; SCHMIDT, K. Feedforward control of nonlinear systems using fictitious inputs. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Seville, Spain: IEEE, 2005. p. 7264–7269.
- [71] ANTRITTER, F.; DEUTSCHER, J. Asymptotic tracking for nonlinear systems using fictitious inputs. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Seville, Spain: IEEE, 2005. p. 4022–4027.
- [72] WALDHERR, S.; ZEITZ, M. Conditions for the existence of a flat input. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 81, n. 3, p. 439–443, March 2008.
- [73] WALDHERR, S.; ZEITZ, M. Flat inputs in the MIMO case. In: *8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*. Bologna, Italy: IFAC, 2010. p. 695–700.
- [74] SIRA-RAMÍREZ, H.; LUVIANO-JUAREZ, A.; CORTÉS-ROMERO, J. Flatness-based linear output feedback control for disturbance rejection and tracking tasks on a chua's circuit. *International Journal of control*, Taylor & Francis, v. 85, n. 5, p. 594–602, May 2012.
- [75] SCHENKENDORF, R.; MANGOLD, M. Parameter identification for ordinary and delay differential equations by using flat inputs. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, Springer, v. 48, n. 5, p. 594–607, September 2014.
- [76] NICOLAU, F. et al. Secure communication with the help of flat inputs for chaotic systems. *IFAC-PapersOnLine*, v. 51, n. 33, p. 109–114, November 2018. 5th IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems (CHAOS 2018).
- [77] NICOLAU, F.; RESPONDEK, W.; BARBOT, J.-P. Constructing flat inputs for two-output systems. In: *The 23rd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*. Hong Kong: CCSD, 2018. p. 414–421. Disponível em <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01784360>.
- [78] FRITZSCHE, K.; RÖBENACK, K. On the computation of differentially flat inputs. In: *22nd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2018)*. Sinaia, Romania: IEEE, 2018. p. 12–19.

- [79] STUMPER, J.-F.; SVARICEK, F.; KENNEL, R. Trajectory tracking control with flat inputs and a dynamic compensator. In: *2009 European Control Conference (ECC)*. Budapest, Hungary: IEEE, 2009. p. 248–253.
- [80] KUCERA, V. From differential to algebraic riccati equations: The influence of Kalman [historical perspectives]. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 37, n. 2, p. 153–156, April 2017.
- [81] HAJEK, B. *Random Processes for Engineers*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2015.
- [82] DAVISON, E.; MAN, F. The numerical solution of $A'Q + QA = -C$. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 13, n. 4, p. 448–449, August 1968.
- [83] BARRAUD, A. A numerical algorithm to solve $A^T X A - X = Q$. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 5, p. 883–885, October 1977.
- [84] BLANCHET, I.; FRANKIGNOUL, C.; CANE, M. A. A comparison of adaptive Kalman filters for a tropical Pacific ocean model. *Monthly Weather Review*, v. 125, n. 1, p. 40–58, January 1997.
- [85] GROUTAGE, F. D.; JACQUOT, R. G.; KIRLIN, R. L. Techniques for adaptive state estimation through the utilization of robust smoothing. In: LEONIDES, C. (Ed.). *System Identification and Adaptive Control, Part 1 of 3*. USA: Academic Press, 1987, (Control and Dynamic Systems, v. 25). p. 273–308.
- [86] SMITH, S. *Digital signal processing: a practical guide for engineers and scientists*. USA: Newnes, 2013.
- [87] FADALI, M. S.; VISIOLI, A. *Digital control engineering: analysis and design*. USA: Academic Press, 2012.
- [88] JOHANSSON, K. H. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 8, n. 3, p. 456–465, May 2000.
- [89] SKOGESTAD, S. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control*, Elsevier, v. 13, n. 4, p. 291–309, June 2003.
- [90] SEBORG, D. E. et al. *Process Dynamics and Control*. USA: John Wiley & Sons, 2010.
- [91] SCARDUA, L. A.; CRUZ, J. J. D. Complete offline tuning of the unscented Kalman filter. *Automatica*, Elsevier, v. 80, p. 54–61, June 2017.
- [92] SIRA-RAMÍREZ, H.; AGRAWAL, S. K. *Differentially Flat Systems*. New York, USA: Marcel Dekker, 2004. (Control Engineering Series).
- [93] LÉVINE, J. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-Based Approach*. New York, USA: Springer, 2010. (Mathematical Engineering).

- [94] FLIESS, M. et al. A lie-backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 5, p. 922–937, May 1999.
- [95] SILVERMAN, L. M.; MEADOWS, H. E. Controllability and observability in time-variable linear systems. *SIAM Journal on Control*, v. 5, n. 1, p. 64–73, 1967.
- [96] MALRAIT, F.; MARTIN, P.; ROUCHON, P. Dynamic feedback transformations of controllable linear time-varying systems. In: *Nonlinear control in the year 2000*. London, U.K.: Springer, 2001. v. 2, p. 55–62.
- [97] HERMANN, R.; KRENER, A. J. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 5, p. 728–740, October 1977.
- [98] SLOTINE, J.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1991.
- [99] RIGATOS, G. G. Derivative-free nonlinear Kalman filtering for MIMO dynamical systems: application to multi-DOF robotic manipulators. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, v. 8, n. 6, p. 47–61, January 2011.
- [100] QUANSER. *Ball and Beam User Manuals*. 2008. Disponível em <https://www.quanser.com/products/ball-and-beam/>.
- [101] LIMAVERDE FILHO, J. O. d. A.; FORTALEZA, E. L. F. Control of the ball and beam using Kalman filter - a flatness based approach. In: *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2014)*. Belo Horizonte, Minas Gerais, Brazil: SBA, 2014.
- [102] LOAN, C. F. V. Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 3, p. 395–404, June 1978.
- [103] GRAICHEN, K.; HAGENMEYER, V.; ZEITZ, M. A new approach to inversion-based feed-forward control design for nonlinear systems. *Automatica*, v. 41, n. 12, p. 2033–2041, December 2005.
- [104] CHELOUAH, A. Extensions of differential flat fields and Liouvillian systems. In: *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, USA: IEEE, 1997. v. 5, p. 4268–4273.
- [105] KRENER, A. J.; RESPONDEK, W. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 23, n. 2, p. 197–216, 1985.
- [106] VAN DER SCHAFT, A. J. Representing a nonlinear state space system as a set of higher-order differential equations in the inputs and outputs. *Systems & control letters*, Elsevier, v. 12, n. 2, p. 151–160, February 1989.
- [107] BRAYTON, R. K.; GUSTAVSON, F. G.; HACHTEL, G. D. A new efficient algorithm for solving differential-algebraic systems using implicit backward differentiation formulas. *Proceedings of the IEEE*, v. 60, n. 1, p. 98–108, January 1972.

- [108] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- [109] ALVAREZ-GALLEGOS, J. Nonlinear regulation of a Lorenz system by feedback linearization techniques. *Dynamics and Control*, v. 4, n. 3, p. 277–298, July 1994.
- [110] CRESPO, L. G.; AGRAWAL, S. K. Differential flatness and cooperative tracking in the Lorenz system. In: *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver, Colorado, USA: IEEE, 2003. v. 4, p. 3525–3530.
- [111] CRESPO, L. G.; SUN, J. Q. Feedback linearization of the Lorenz system: Stabilization and tracking control. In: *ASME 2002 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. New Orleans, Louisiana, USA: American Society of Mechanical Engineers, 2002. p. 481–492.
- [112] GATZKE, E. P. et al. Model based control of a four-tank system. *Computers & Chemical Engineering*, Elsevier, v. 24, n. 2, p. 1503–1509, July 2000.
- [113] FU, M.; LI, M.; XIE, W. Finite-time trajectory tracking fault-tolerant control for surface vessel based on time-varying sliding mode. *IEEE Access*, v. 6, p. 2425–2433, December 2018.
- [114] PAN, J.; DO, K. D. *Control of Ships and Underwater Vehicles: Design for Underactuated and Nonlinear Marine Systems*. Crawley, Australia: Springer, 2009. (Advances in Industrial Control).
- [115] FOSSEN, T. I. *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*. New York, USA: John Wiley & Sons, 2011.
- [116] PETTERSEN, K. Y.; NIJMEIJER, H. Global practical stabilization and tracking for an underactuated ship - a combined averaging and backstepping approach. *Modeling, Identification and Control*, Norwegian Society of Automatic Control, v. 20, n. 4, p. 189–200, 1999.
- [117] SIRA-RAMÍREZ, H. On the control of the underactuated ship: a trajectory planning approach. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999*. Phoenix, USA: IEEE, 1999. v. 3, p. 2192–2197.
- [118] FOSSEN, T. I. et al. Nonlinear control of underactuated ships with forward speed compensation. *IFAC Proceedings Volumes*, Enschede, Netherlands, v. 31, n. 17, p. 119–124, July 1998. 4th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design 1998 (NOLCOS'98).
- [119] TOUSSAINT, G. J.; BASAR, T.; BULLO, F. Tracking for nonlinear underactuated surface vessels with generalized forces. In: *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications*. Anchorage, USA: IEEE, 2000. p. 355–360.
- [120] MOREL, Y.; LEONESSA, A. Adaptive nonlinear tracking control of an underactuated non-minimum phase model of a marine vehicle using ultimate boundedness. In: *42nd IEEE International Conference on Decision and Control*. Maui, USA: IEEE, 2003. v. 3, p. 3097–3102.

- [121] CONSOLINI, L.; TOSQUES, M. A minimum phase output in the exact tracking problem for the nonminimum phase underactuated surface ship. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 12, p. 3174–3180, December 2012.