Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência de soluções positivas para o problema de curvatura média prescrita com termo não local via o método de sub e supersolução

por

Romulo Diaz Carlos

Brasília
2020

Romulo Diaz Carlos

Existência de soluções positivas para o problema de curvatura média prescrita com termo não local via o método de sub e supersolução

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasíia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figuereido

Brasília
2020

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência de soluções positivas para o problema de curvatura média prescrita com termo não local via o método de sub e supersolução

por

Romulo Diaz Carlos *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 27 de fevereiro de 2020.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Ma To Fu – MAT/UnB (Membro)

Sandra Imaculada Moreira Neto

Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto – UEMA (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

De Diaz Carlos, Romulo
Existência de soluções positivas para o problema de curvatura média prescrita com termo não local via o método de sub e supersolução / Romulo Diaz Carlos; orientador Giovany de Jesus Malcher Figuereido. -- Brasília, 2020.
72 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Método de sub e supersolução. 2. Problema não local. 3. Operador quasilinear. 4. Equação da curvatura média prescrita. I. de Jesus Malcher Figuereido, Giovany, orient. II. Título.

Aos meus pais,
Evaristo Diaz e Nicolaza Carlos;
Aos meus irmãos,
Nestor, Humberto, Oscar, Yonny, Katty;
À minha irmã,
Maria Angélica Diaz Carlos.

"... pois estive apoiado em ombros de gigantes". (I. Newton)

Agradecimentos

- A Deus, por mais este sonho realizado. Neste período, pude entender um infinitésimo a mais do quanto Ele está próximo.

- Aos meus pais, Evaristo Diaz e Nicolaza Carlos, por valores ensinados a mim que vão durar por toda minha vida. À minha família, pelo apoio, referência e risadas, que tornaram tudo isso possível. Aos meus irmãos, Nestor, Humberto, Oscar, Yonny, Katty e Carloncho pela força, apoio e gargalhadas de sempre.

-A minha irmã, Maria Angélica Diaz Carlos. Por sua confiança e encorajamento em todos os momentos de tristeza e alegria, agora eu sei que você me guia do céu, sempre estará em minha mente e coração.

- A todos os amigos do Departamento de Matemática da UnB. Em especial, aos amigos Santiago Miller, Manuel Argomedo, Jesus Berdugo, Leticia Santos, Mateus Fleury, Vinicius Kobayashi, Katianny Freitas, Junio Rocha, Jailson Dias, Emmanuel Chabin e Maria Edna. Agradeço por terem tornado esse período mais suave e "diferenciável".

- De uma forma especial, aos professores Emilio Castillo, Paulo Seminário, João Vitor, José Carlos de Oliveira e Stefano Buccheri que foram mais do que meus amigos neste período. Obrigado, professores, pelo apoio e força nos momentos complicados.

- Ao meu orientador, Giovany Figueiredo. Agradeço pela amizade, pela confiança, pelo cuidado, pela preocupação e pela paciência em responder minhas inúmeras dúvidas. Vou ser para sempre grato.

- À minha amada namorada, Rosaly Bazan, pelo amor incondicional, pelas palavras de ânimo e por tornar minha vida mais prazerosa. Você foi essencial para que tudo isso acontecesse. Obrigado, amor!

Resumo

Neste trabalho, estamos interessados na existência de soluções para uma classe de problemas quasilineares não locais do tipo

$$\begin{cases} -\text{div}(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = f(x, u, B(u)) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $B : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ são funções cujas hipóteses serão dadas depois. Nós usamos o método de sub e supersolução, a fim de encontrar soluções para o problema (P). Além disso, aplicar os resultados a alguns problemas de curvatura média prescritas não locais.

Palavras-chave: Método de sub e supersolução, problema não local, operador quasilinear, equação da curvatura média prescrita.

Abstract

In this work we are concerned with the existence of solution to the class of nonlocal quasilinear problems of the type

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = f(x, u, B(u)) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

where Ω is a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $B : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ are functions whose hypotheses will be defined later. We use sub and supersolution method in order to find solutions to problem (P). Further, we apply our result to some nonlocal prescribed mean curvature problems.

Keywords: Sub and supersolution method, nonlocal problem, quasilinear operator, prescribed mean curvature equation.

Sumário

Notações

No corpo deste trabalho usaremos as seguintes notações:

Ω	:Domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira regular.
$\lvert \cdot \rvert_{L^p(\Omega)}$	:Norma do espaço $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$.
$\\| \cdot \\|_{H_0^1(\Omega)}$	:Norma do espaço $H_0^1(\Omega)$.
$\\| \cdot \\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}$	:Norma do espaço $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
$\hookrightarrow$	:Imersão contínua.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	:Imersão compacta.
$\rightarrow$	:convergência forte.

Introdução

Esta dissertação é baseada no artigo [7] onde os autores estudaram a existência de soluções para uma classe de problemas elípticos quasilineares não locais de tipo

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = f(x, u, B(u)) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, as funções $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ função de classe C^1, com as seguintes propriedades: existem constantes $\gamma, \Gamma > 0$, tais que

(a_1) $0 < \gamma \leq a(s^2) \leq \Gamma$ para todo $s \geq 0$;

(a_2) $(\gamma - \frac{1}{2})a(s) \leq a'(s)s \leq \Gamma a(s)$ para todo $s \geq 0$.

A principal novidade de (P) é o termo não local $B(u)$. Um exemplo desse tipo de função é dado por

$$B(u) := \int_\Omega h(x)u^r(x)dx.$$

Entretanto, o principal resultado é válido para uma classe mais geral de funções B. começamos comentando o caso local, considerando as hipóteses dadas acima sobre a função a, temos

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Os autores em [12] provaram a validade de um método de sub e supersolução para (1). Para isso, eles usaram a validade de um método de sub e supersolução. Contudo, esta técnica não pode ser usada em (P) pois o problema não possui estrutura variacional. Por isso, foi introduzido uma definição adequada de sub e supersolução e foi usado um argumento de Ponto Fixo de Schauder para provar o resultado principal.

Definição 1 *Dizemos que* $\underline{u}, \overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ *são sub e supersolução de* (P) *respetivamente, se satisfazem:*

(i) $\underline{u} \leq \overline{u}$ *em* Ω *e* $\underline{u} \leq 0 \leq \overline{u}$ *em* $\partial\Omega$,

(ii) $-\operatorname{div}(a(|\nabla \underline{u}|^2)\nabla \underline{u}) \leq f(x, \underline{u}, B(w))$ *em* Ω*, para todo* $\underline{u} \leq w \leq \overline{u}$,

(iii) $-\operatorname{div}(a(|\nabla \overline{u}|^2)\nabla \overline{u}) \geq f(x, \overline{u}, B(w))$ *em* Ω*, para todo* $\underline{u} \leq w \leq \overline{u}$.

As desigualdades acima devem ser entendidas no sentido fraco. Ao longo do trabalho apresentamos resultados sobre o teorema principal, que enunciamos abaixo:

Teorema 2 *Suponhamos que* $(a_1) - (a_2)$ *são satisfeitas, então existe* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *solução do problema* (P) *tal que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Em seguida, aplicaremos esse resultado aos problemas de curvatura média prescrita,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = f_i(x, u, B(u)) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

para $i = 1, 2$ e as seguintes funções

$$f_1(x, u, B(u)) = (\lambda u^q + b(x)u^p) \int_\Omega h(x)u^r(x)dx,$$

e

$$f_2(x, u, B(u)) = \left(\lambda u^q + b(x)u^p + c(x)u^m \int_\Omega h(x)u^r(x)dx\right),$$

onde as funções $h, b, c \in C(\overline{\Omega})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $0 < p, q, r, m$. Suponhamos que h é não negativa e não trivial, usaremos um problema quasilinear auxiliar para uma função específica usada em [9] e [6]. De fato, são exemplos que pretendem mostrar a aplicabilidade do resultado.

No caso local, foi estudado o seguinte problema :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \lambda u^q + b(x)u^p & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $0 < p < 1 < q$.

Na literatura temos os seguintes resultados:

(1) Para $b \equiv 0$, existe $\lambda_0 > 0$ de tal forma que (3) possui pelo menos uma solução positiva para todos os $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Além disso, no caso em que $\Omega = B(0; R)$, existe $\overline{\lambda} > 0$ de modo que (3) não possua nenhuma solução positiva para $\lambda > \overline{\lambda}$ (consulte [9] e [13]).

(2) Para $b \neq 0$, existe $\lambda_0 > 0$ de tal forma que (3) possui pelo menos uma solução positiva para todos os $\lambda \in (0, \lambda_0)$ (consulte [9]).

O segundo objetivo desta dissertação é estudar algumas perturbações não locais de (3). Especificamente, analisar (2) e exibir os seguintes resultados:

(1) No caso $f = f_1$. Para $q + r < 1 < p + r$. Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que (2) possui pelo menos uma solução positiva u_λ para todos os $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

(2) No caso $f = f_2$. Para $0 < q < 1 < \min\{p, m + r\}$. Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema (2) possui pelo menos uma solução positiva u_λ para todos os $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Existem alguns artigos interessantes (consulte [6], [9], [14] e [13]) estudando o problema da curvatura média prescrita fazendo uso de métodos variacionais. Em particular o método de sub e supersolução.

Em [12] os autores mostraram resultados de multiplicidade para (3) quando o termo da reação exibe uma oscilação de comportamento próximo do infinito. E em [6] quando f é uma função contínua e ilimitada com comportamento oscilatório próximo à origem.

Nos referimos a [12] para um estudo detalhado dos métodos de sub e supersolução para (1) e suas aplicações.

Os estudos realizados em [6] e [12] em certo sentido são complementados no artigo [7], pois no artigo mencionado estuda uma classe geral de não linearidade, incluindo um termo não local.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, vamos lembrar noções de Análise Funcional e apresentar algumas propriedades do Teorema de Ponto Fixo de Schauder, espaços de Hölder, Teorema de Minty-Browder e imersões no espaço de Sobolev.

O ponto de partida para o segundo capítulo é mostrar os Lemas auxiliares e depois mostrar a existência de uma solução entre a sub e supersolução para $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

No terceiro capítulo, mostraremos duas aplicações do Teorema 22 para a curvatura média prescrita.

Finalmente, no quarto capítulo, deixaremos o apêndice na qual estão alguns teoremas usados no presente trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos uma abordagem sobre algumas definições e teoremas que ajudaram a dar um melhor entendimento desta dissertação.

1.1 Operadores compactos e espaços de Hölder

Definição 3 *Um operador linear $T : E \to F$, entre espaços normados, é dito compacto se $\overline{T(A)} \subset F$ for compacto em F, onde A é um conjunto limitado em E.*

Proposição 1 *Sejam E, F espaços normados e $T : E \to F$ operador linear, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*a*) *T é compacto.*

(*b*) *$\overline{T(A)}$ é compacto em F para todo limitado A em E.*

(*c*) *Para toda sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E, a sequência $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente em F.*

Demonstração. Ver a prova em [3].

Proposição 2 *Sejam E_0, E, F_0, F espaços normados e $S : E_0 \to F$, $T : E \to F$ e $U : F \to F_0$ operadores lineares com S e U contínuos e T compacto. Então $U \circ T \circ S : E_0 \to F_0$ é um operador compacto.*

Demonstração. Ver a prova em [3].

Definição 4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, então $C^k(\Omega)$ denota o espaço vetorial de funções cujas derivadas até ordem k(inclusive) são todas contínuas:*

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ onde } D^\gamma u \ \text{ é contínua em } \Omega \text{ para todo } |\gamma| \leq k\}.$$

Observação: Seja $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_N$. Frequentemente, será denotado o espaço das funções contínuas $C^0(\Omega)$ por $C(\Omega)$, e

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega).$$

Definição 5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Os espaços de Hölder $C^{k,\alpha}(\Omega)$ são definidos como subespaços vetoriais de $C^k(\Omega)$ consistindo de funções cujas derivadas parciais até ordem k(inclusive) são todas contínuas Hölder com expoente α em Ω:*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \left\{u \in C^k(\Omega) : D^\gamma u \in C^\alpha(\Omega) \text{ para todo } |\gamma| \leq k\right\}.$$

Como $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, funções em $C^k(\Omega)$(e suas derivadas) não precisam ser limitadas em Ω. Portanto não podemos adotar a norma *sup* para transformar $C^k(\Omega)$ em um espaço normado. Ao invés, lembrando que uma função limitada e uniformemente contínua em Ω tem uma única extensão contínua limitada para $\overline{\Omega}$, consideremos o espaço

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : D^\gamma u \text{ é limitada e uniformemente contínua em } \Omega \text{ para todo } |\gamma| \leq k\}.$$

Transformando este espaço vetorial em um espaço normado definindo a norma

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\gamma| \leq k} \|D^\gamma u\|_\infty.$$

Definição 6 *Dado $0 < \alpha \leq 1$ e uma função $u \in C^k(\overline{\Omega})$, dizemos que é Hölder contínua com expoente α, se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \ \ \forall x, y \in \Omega.$$

Também

$$[D^\gamma u]_{\alpha,\Omega} = \sup_{x,y \in \Omega} \left\{ \frac{|D^\gamma(x) - D^\gamma u(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\} < \infty.$$

Desta forma definimos o conjunto

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C^k(\overline{\Omega}) : D^\gamma u \in C^\alpha(\Omega) \text{ para todo } |\gamma| \leq k\right\}.$$

que é um espaço vetorial normado, quando é munido com a norma,

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|\leq k}[D^\gamma u]_{\alpha,\Omega}.$$

Proposição 3 *O espaço $C^k(\overline{\Omega}) = (C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})})$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, e*

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\gamma|\leq k}\sup_{x\in\Omega}|D^\gamma u(x)|$$

é espaço de Banach.

Demonstração. Ver a prova em [4].

Exemplo 7 *O espaço $C(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado, e*

$$\|u\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}}|u(x)|$$

é espaço de Banach.

De fato, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência de Cauchy. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| = \max_{x\in\overline{\Omega}}|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon.$$

Daí, $(u_n(x)) \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy, para todo $x \in \mathbb{R}$, e como $\mathbb{R}$ é completo, existe

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \in \mathbb{R},\ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Agora, usando o critério de Cauchy para sequências reais e o teorema da continuidade do limite uniforme, segue que $u_n \to u$ uniformemente em $\overline{\Omega}$. Logo, $u_n \to u \in C(\overline{\Omega})$, e portanto, $C(\overline{\Omega})$ é espaço de Banach.

Exemplo 8 *O espaço $C^1(\overline{\Omega}) = (C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1(\overline{\Omega})})$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado, e*

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} = \max_{x\in\overline{\Omega}}|u(x)| + \max_{x\in\overline{\Omega}}|u'(x)|$$

é espaço de Banach.

De fato, sabemos que $C^1(\overline{\Omega}) = (C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1})$ é espaço normado. Provemos então que toda sequência de Cauchy em $C^1(\overline{\Omega})$ é convergente. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de

Cauchy em $C^1(\overline{\Omega})$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo

$$\begin{aligned} m,n > n_0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| &= \max_{x\in\overline{\Omega}} |u_m(x) - u_n(x)| + \max_{x\in\overline{\Omega}} |u_m^{'}(x) - u_n^{'}(x| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |u_m(x) - u_n(x)| < \varepsilon \ \text{ e } \ |u_m^{'}(x) - u_n^{'}(x| < \varepsilon, \ \forall x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Portanto, como $\mathbb{R}$ é completo, existe $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$. Além disso, como u_n é contínua para todo n e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para u, então u é contínua em $\overline{\Omega}$. Da mesma forma existe g contínua em $\overline{\Omega}$ tal que

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} u_n^{'}(x).$$

Afirmação: u é derivável e $g = u^{'}$.
De fato, como u_n converge uniformemente para u temos

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left[\lim_{n\to\infty} \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{h\to 0} \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n^{'}(x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

daí, como g é contínua, segue que $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Portanto, $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1})$ é espaço de Banach.

Proposição 4 *O espaço* $(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})})$ *onde* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é aberto e limitado, é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}, \ m,n > n_0$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{C^k(\overline{\Omega})} \le \|u_n - u_m\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u_n - u_m\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|\le k} [D^\gamma (u_n - u_m)]_{\alpha,\Omega} < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Assim temos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $C^k(\overline{\Omega})$. E como $C^k(\overline{\Omega})$ é completo, existe $u \in C^k(\overline{\Omega})$ tal que $\|u_n - u\|_{C^k(\overline{\Omega})} < \varepsilon$ o que implica $\|D^\gamma u_n - D^\gamma u\|_{C^0(\overline{\Omega})} < \varepsilon$, isto é dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}, \ n > n_0$,

$$|D^\gamma u_n(z) - D^\gamma u(z)| \le ||D^\gamma u_n - D^\gamma u||_{C^0(\overline{\Omega})} < \frac{\varepsilon}{3} |x-y|^\alpha \ \ \forall z \in \Omega, \ |\gamma| < k$$

De (1.1) temos,

$$\sup_{x,y\in\Omega}\left\{\frac{|D^\gamma(u_n-u_m)(x)-D^\gamma(u_n-u_m)(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\}\leq \max_{|\gamma|\leq k}[D^\gamma(u_n-u_m)]_{\alpha,\Omega}<\frac{\varepsilon}{3}$$

temos que

$$\frac{|D^\gamma(u_n-u_m)(x)-D^\gamma(u_n-u_m)(y)|}{|x-y|^\alpha}=\frac{|D^\gamma(u_n)(x-y)-D^\gamma(u_m)(x-y)|}{|x-y|^\alpha}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Fazendo uso da desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}|D^\gamma(u_n-u_m)(x)-D^\gamma(u_n-u_m)(y)| &= |D^\gamma u_n(x)-D^\gamma u(x)-D^\gamma u_n(y)+D^\gamma u(y)|\\ &\leq |D^\gamma(u_n-D^\gamma u_m)(x)-D^\gamma(u_n-D^\gamma u_m)(y)|\\ &\quad +|D^\gamma u_n(x)-D^\gamma u(x))|\\ &\quad +|D^\gamma u_n(y)-D^\gamma u(y))|.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\frac{|D^\gamma(u_n-u_m)(x)-D^\gamma(u_n-u_m)(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \frac{|D^\gamma(u_n-D^\gamma u_m)(x)-D^\gamma(u_n-D^\gamma u_m)(y)|}{|x-y|^\alpha}\\ &\quad +\frac{|D^\gamma u_n(x)-D^\gamma u(x))|}{|x-y|^\alpha}\\ &\quad +\frac{|D^\gamma u_n(y)-D^\gamma u(y))|}{|x-y|^\alpha}\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{x\neq y}\left\{\frac{|D^\gamma(u_n-u_m)(x)-D^\gamma(u_n-u_m)(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\}<\varepsilon$$

então

$$[D^\gamma(u_n-u)]_{\alpha,\Omega}\to 0 \text{ quando } n\to\infty,\ |\gamma|\leq m.$$

Daí,

$$\|u_n-u\|_{C^k(\overline{\Omega})}\leq \|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}=\|u_n-u\|_{C^k(\overline{\Omega})}+\max_{|\gamma|\leq k}[D^\gamma(u_n-u)]_{\alpha,\Omega},$$

portanto $u_n \to u$ em $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Para finalizar observemos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} &= \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|\leq k}[D^\gamma u]_{\alpha,\Omega} \\
&= \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|\leq k}[D^\gamma u - D^\gamma u_n + D^\gamma u_n]_{\alpha,\Omega} \\
&= \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|\leq k}[D^\gamma u - D^\gamma u_n]_{C^\alpha(\Omega)} + \max_{|\gamma|\leq k}[D^\gamma u_n]_{\alpha,\Omega} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Assim temos que $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Definição 9 *Dizemos que um espaço normado E está imerso continuamente em um espaço normado F, e escrevemos $E \hookrightarrow F$ para designar essa imersão se:*

(i) E é um subespaço de F.

(ii) O operador identidade I definido de E em F por $I(x) = x$ é contínuo. Como I é operador linear, isto quer dizer que existe $M > 0$ tal que

$$\|x\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Definição 10 *Dizemos que um espaço normado E está imerso compactamente em um espaço normado F, e escrevemos $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ para designar essa imersão se:*

(i) E é um subespaço de F.

(ii) O operador identidade I definido de E em F por $I(x) = x$ é compacto. Como I é operador linear, isto quer dizer que existe $L > 0$ tal que

$$\|x\|_F \leq L\|x\|_E.$$

Lema 11 (Arzelà-Ascoli) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado e $K \subset C(\overline{\Omega})$ tal que*

(i) Existe M tal que $|u(x)| \leq M$ para todo $\overline{\Omega}$ e para todo $u \in K$, (equilimitada);

(ii) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $u \in K \subset C(\overline{\Omega})$ e $x, y \in \Omega$ e $|x - y| < \delta$, então $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$, (equicontínua)

Então, K é pré-compacto em $C(\overline{\Omega})$, isto é $\overline{K}$ é subconjunto compacto de $C(\overline{\Omega})$ com a norma do supremo, $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{C^0(\overline{\Omega})}$.

Demonstração. Ver a prova em [4].

Proposição 5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Então, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \nu < \gamma \leq 1$, valem as seguintes imersões*

(a) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$;

(b) $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$;

(c) $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.
Se Ω é limitada, então as imersões (b) e (c) são compactas e se Ω é convexo e limitado, todas as três imersões são compactas.
Se Ω é convexo, valem duas imersões adicionais,

(d) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega})$;

(e) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$;
sendo que a última é compacta se Ω for também limitado.

Iremos mostrar apenas o ítem (b) a prova dos demais ítens pode ser encontrada na referência [11].

Demonstração. Para mostrar a imersão compacta (b) mostremos inicialmente que

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Considerando então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência limitada $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, então existe $M > 0$ tal que

$$||u_n||_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja

$$||u_n||_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = ||u_n||_\infty + [u_n]_{\alpha,\Omega} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Precisamos verificar que existe uma subsequência convergente em $C(\overline{\Omega})$.
Seja $K = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(\overline{\Omega})$.

(1) Como $|u_n(x)| \leq ||u_n||_\infty + [u_n]_{\alpha,\Omega} \leq M, \ \forall x \in \Omega$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.
O que implica que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitado.

(2) Como $[u_n]_{\alpha,\Omega} \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$, segue que

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq M|x-y|^\alpha, \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$ dado, a condição (ii) do Teorema 11 se verifica para $\delta = \left(\dfrac{\epsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Segue do Teorema de Arzelà-Ascoli que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente em $C(\overline{\Omega})$. Isso estabelece (b) quando $k = 0$.

Para o caso geral, se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é uma sequência limitada, então existe uma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que ainda denotaremos por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_n \to u$ em $C(\overline{\Omega})$ para todo multi índice γ tal que $|\gamma| \leq k$,

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|\leq k}[D^\gamma u]_{\alpha,\Omega} \leq M.$$

Logo

$$\|D^\gamma u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|D^\gamma u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + [D^\gamma u]_{\alpha,\Omega} \leq M.$$

Usando a primeira parte da demonstração e passando para subsequências se necessário, temos que $D^\gamma u_n \to \phi_u$ em $C(\overline{\Omega})$. Como a convergência é uniforme devemos ter $D^\gamma u = \phi_u$. Desse modo, $u \in C^k(\overline{\Omega})$ e

$$||u_n - u||_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\gamma|\leq k} ||D^\gamma u_n - D^\gamma u||_0 \to 0,$$

o que estabelece (b). □

Definição 12 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$, definimos*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ no sentido das distribuição para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

Em $W^{m,p}(\Omega)$ fixamos a seguinte norma

$$||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx = \sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)}.$$

Notação: para $p = 2$

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Proposição 6 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$, então $W^{m,p}(\Omega)$ com a norma $||\cdot||_{W^{m,p}(\Omega)}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver a prova em [1].

Teorema 13 *Se $1 < p < \infty$ então $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço Banach reflexivo.*

Demonstração. Ver a prova em [11].

Definição 14 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$. Definiremos o espaço* $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||.||_{m,p}}$.

Notação: para $p = 2$

$$W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$$

Definição 15 *Suponhando $1 \leq p < \infty$ e $1 < q$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representaremos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Notação: para $p = 2$

$$(H_0^m(\Omega))' = H^{-m}(\Omega)$$

Lema 16 *(Frechet-Kolgomorov) Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$ e considere $\Im$ um subconjunto limitado de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ suponha que :*

(s_1) *$\forall \varepsilon > 0$, existe $w \subset\subset \Omega$ tal que $||f||_{L^p(w)} < \varepsilon$, $\forall f \in \Im$.*

(s_2) *$\forall \varepsilon > 0$ e $\forall w \subset\subset \Omega$ existe $\delta > 0$, $\delta < dist(w, \mathbb{R}^N - \Omega)$ tal que $||T_h f - f||_{L^p(\Omega - w)} < \varepsilon$ $\forall h \in \mathbb{R}^N$ com $|h| < \delta$ $\forall f \in \Im$.*

Então, $\Im$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver a prova em [4].

Proposição 7 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado, bem regular do $\mathbb{R}^N$. Então, são verdadeiras as seguintes imersões:*

(a) *Se $mp < N$,*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)\,,\ 1 \leq q < q^* \quad \text{onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$$

(b) *Se $mp = N$,*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)\,,\ 1 \leq q < +\infty$$

(c) *Se $N < mp$,*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \quad \text{onde } k < m - \frac{N}{p} \leq k + 1\ ,\ k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Ver a prova em [11].

1.2 Ponto Fixo de Schauder

Nesta sessão, vamos enunciar e mostrar o Teorema de Ponto Fixo de Schauder que será usado nesta dissertação.

Teorema 17 *Seja E um espaço de Banach e sejam $K \subset E$ um conjunto compacto e convexo e $T : K \to K$ uma aplicação contínuo. Então, T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Como K é compacto, podemos cobrir com uma quantidade finita de abertos, assim dado $\epsilon > 0$, existem $\{y_1, y_2, ..., y_p\} \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_\epsilon(y_i) \ cobertura \ aberta \ finita.$$

Seja K_ϵ a envoltura convexa de $\{y_1, y_2, ..., y_p\}$, isto é,

$$K_\epsilon = \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_i y_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{j=1}^{p} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Notemos que K_ϵ é o menor fechado e convexo contendo $\{y_1, y_2, ..., y_p\}$. Assim, $K_\epsilon \subset K$ é compacto. Consideremos agora $F_\epsilon = [y_1, y_2, ..., y_p]$ o subespaço gerado pelos pontos $y_1, y_2, ..., y_p$ e definamos a função $b_j : K \to \mathbb{R}$ por $b_j(x) = \varepsilon - \|x - b_j\|$, para todo $x \in B_\varepsilon(y_i)$ e $b_j = 0$, para todo $x \in B_\varepsilon(y_i)^c$. Notemos que $b_j \in C(K, \mathbb{R})$ e $\sum\limits_{j=1}^{p} b_j(x) > 0$. Agora definamos $g_\varepsilon : K \to K_\varepsilon$ como

$$g_\epsilon(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{p} b_j(x) y_j}{\sum\limits_{j=1}^{p} b_j(x)}.$$

Segue que g_ϵ está bem definida, $g_\epsilon \in C(K, K_\epsilon)$ e da desigualdade triangular, temos

$$\|x - g_\varepsilon(x)\| = \left\| x - \frac{\sum\limits_{s=1}^{p} b_j(x) y_j}{\sum\limits_{s=1}^{p} b_j(x)} \right\| \leq \|x - y_j\| < \epsilon. \tag{1.2}$$

Primeiramente mostraremos que $K_\epsilon \xrightarrow{T} K \xrightarrow{g_\epsilon} K_\epsilon$ tem ponto fixo. De fato, consideremos a seguinte função:

$$J_K : F_\varepsilon \to \mathbb{R}_+, \ \ J_K(x) = \inf \ \{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}.$$

Por translação, podemos supor que $0 \in K$. Assim, J_K está bem definida pela convexidade de K. Seja agora $h : K \to \overline{B_1(0)} \subset F_\epsilon$ dado por $h(x) = 0$ se $x = 0$ e $h(x) = J_K(x)\dfrac{x}{\|x\|}$ se $x \neq 0$. Notemos que h é contínua pois é composição de funções contínuas. Notemos também que h é sobrejetora pois para cada $y \in \overline{B_1(0)}$, temos que $\dfrac{y}{J_K(x)} \in K$ e $h\left(\dfrac{y}{J_K(x)}\right) = y$. Além disso, h é injetiva pois $h(x) = h(y)$ implica $J_K(x)\dfrac{x}{\|x\|} = J_K(y)\dfrac{y}{\|y\|}$. Portanto, $|J_K(x)| = |J_K(y)|$ de onde concluímos que $J_K(x) = J_K(y)$. Assim temos que $\dfrac{x}{\|x\|} = \dfrac{y}{\|y\|}$ implica $x = y$. Logo, existe h^{-1} ela é contínua. Consideremos agora a função

$$H = h \circ g_\epsilon \circ T \circ h^{-1} : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}.$$

Ou seja, $\overline{B_1(0)} \xrightarrow{h^{-1}} K_\epsilon \xrightarrow{T} K \xrightarrow{g_\epsilon} K_\epsilon \xrightarrow{h} \overline{B_1(0)}$ e do Teorema de ponto fixo de Brouwer, existe $x \in \overline{B_1(0)}$ tal que $H(x_0) = x_0$. Daí, $h \circ g_\epsilon \circ T \circ h^{-1}(x_0) = x_0$. Portanto $g_\epsilon \circ T(h^{-1}(x_0)) = h^{-1}(x_0)$. Logo $h^{-1}(x_0)$ é ponto fixo de $g_\epsilon \circ T$.

Da compacidade de K, dado $y = h^{-1}(x_0) \in K$, existe uma sequência $(y_n) \subset K$ tal que $y_n \to y$. Mostraremos que y é ponto fixo de T.
De fato, note que

$$0 \leq \|y - Ty\| \leq \|y - y_n\| + \|y_n - Ty_n\| + \|Ty_n - Ty\|.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos $\|y - y_n\| \to 0$. Desde que y é um ponto fixo de $g_\varepsilon \circ T$, então pela desigualdade (1.2), obtemos

$$\|y_n - Ty_n\| = \|(g_n \circ T) - Ty_n\| \to 0.$$

Da continuidade de T, encontramos $\|Ty_{\epsilon_j} - Ty\| \to 0$, donde concluímos $Ty = y$. $\square$

Teorema 18 *(Teorema de Ponto Fixo de Schauder) Seja E um espaço de Banach e seja $Q \subset E$ um conjunto convexo fechado e limitado. Se $T : Q \to Q$ é um operador compacto e contínuo. Então, T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro o caso em que $Q = \overline{B_R(0)}$. Considere o operador $\varphi : \overline{B_R(0)} \to E$, onde $\varphi = I - T$, ou seja φ é a perturbação da identidade por um compacto. Se existir $x_0 \in \partial B_R(0)$ tal que $\varphi(x_0) = 0$, nada por demostrar, pois neste caso x_0 seria ponto fixo de T.

Suponha que $\varphi \neq 0$, para todo $x \in \partial B_R(0)$. Agora defina a seguinte homotopia:

$$H : \overline{B_R(0)} \times [0,1] \to E \text{ tal que } H(y,t) = y - tT(y).$$

Notemos que H é contínuo. Vamos mostrar que

$$0 \notin H(\partial B_R(0) \times [0,1]),$$

isto é $H(y,t)$, $\forall y \in \partial B_R(0)$ e $\forall t \in [0,1]$.
Se, $t = 1$ temos

$$H(y,1) = y - T(y) = \varphi(y) \neq 0, \ \forall y \in \partial B_R(0),$$

mostrando que

$$0 \neq H(\partial B_R(0) \times \{1\}).$$

Agora vamos analisar o caso em que $t \in [0.1)$ e $y \in \partial B_R(0)$. Observemos que,

$$\|tT(y)\| = t\|T(y)\| \leq tR < R = |y|$$

e com isso,

$$\|tT(y)\| < |y|.$$

Consequentemente

$$tT(y) \neq y$$

de onde segue que

$$H(y,t) \neq 0 \ \forall y \in \partial B_R(0) \text{ e } \forall t \in [0,1).$$

Portanto,

$$0 \notin H(\partial B_R(0) \times [0,1]).$$

Desde que o grau é invariante por homotopia, então

$$deg(H(\cdot,t), B_R(0), 0) = \text{constante } \forall t \in [0,1]$$

e portanto,

$$deg(H(\cdot,0), B_R(0), 0) = deg(H(\cdot,1), B_R(0), 0).$$

Assim, segue que

$$deg(T(\cdot,0), B_R(0), 0) = deg(I(\cdot,1), B_R(0), 0) = 1,$$

então

$$deg(\varphi, B_R(0), 0) = 1 \neq 0.$$

Agora, como consequência das propriedades de Grau do Leray-Schauder, existe $y_0 \in B_R(0)$ tal que $\varphi(y_0) = 0$, implicando que

$$y_0 - T(y_0) = 0,$$

e com isso $y_0 = T(y_0)$. Portanto, o operador T tem um ponto fixo $y_0 \in B_R(0)$. $\square$

1.3 Teorema de Minty-Browder

Definição 19 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E'$ um operador (possivelmente não linear). Dizemos que A é estritamente monótono se:*

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle_{E' \times E} > 0 \text{ para todo } u, v \in E.$$

Definição 20 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E'$ um operador (possivelmente não linear). Dizemos que A é coercivo se:*

$$\frac{\langle A(u), u\rangle_{E' \times E}}{\|u\|_E} \to \infty \text{ quando } \|u\|_E \to \infty.$$

Teorema 21 *(Teorema de Minty-Browder) Seja E espaço Banach reflexivo e o operador $A : E \to E'$ estritamente monótono, coercivo e contínuo , então para cada $f \in E'$ existe uma única solução $u \in E$ da equação $Au = f$.*

Demonstração. Ver a prova em [4].

Capítulo 2

Sub e supersoluções

Neste capítulo mostraremos os Lemas e resultados que serão usados para mostrar o teorema principal.

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = f(x,u,B(u)) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, as funções $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função de classe C^1, com as seguintes propriedades: existem constantes $\gamma, \Gamma > 0$, tais que

(a_1) $0 < \gamma \leq a(s^2) \leq \Gamma$ para todo $s \geq 0$;

(a_2) $(\gamma - \frac{1}{2})a(s) \leq a^{'}(s)s \leq \Gamma a(s)$ para todo $s \geq 0$.

Também temos o termo não local $B(u)$, do tipo:

$$B(u) := \int_\Omega h(x)u^r(x)dx.$$

Com as hipóteses anteriores mostraremos o seguinte teorema.

Teorema 22 *Suponhamos que* $(a_1)-(a_2)$ *são satisfeitas, então existe* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *solução do problema* (P) *tal que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Para a demonstração do Teorema 22 será necessário o uso dos seguintes Lemas:

Lema 23 *Se $(a_1)-(a_2)$ são válidas, então:*

(i) *A função $s \to a(s^2)s$ é crescente.*

(ii) *Existe $\nu > 0$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$,*

$$\left\langle a\left(|x|^2\right)x - a\left(|y|^2\right)y, x-y\right\rangle \geq \nu|x-y|^2. \tag{2.1}$$

Demonstração.

(i) Fazendo uso de (a_1) e (a_2), temos

$$\begin{aligned}
(a(s^2)s)' &= (a(s^2))'s + a(s^2)s' \\
&= 2s^2a'(s^2) + a(s^2) \\
&> 2\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)a(s^2) + a(s^2) \\
&= 2\gamma + a(s^2) - a(s^2) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Desta forma concluímos que $s \to a(s^2)s$ é crescente.

(ii) Tomemos $z, \xi \in \mathbb{R}^N$ onde $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)$ e $z = (z_1, z_2, ..., z_N)$, e a delta de Kronecker :

$$\delta ij = \begin{cases} 1\,, & \text{se} \quad i = j, \\ 0\,, & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

$(ii.1)$ Analisemos a seguinte derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_i}\left(a(|z|^2)z_j\right) &= \frac{\partial}{\partial z_i}\left(a(z_1^2 + z_2^2 + ... + z_N^2)z_j\right), \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial z_i}a\left(z_1^2 + z_2^2 + ... + z_N^2\right)\right)z_j + a\left(z_1^2 + z_2^2 + ... + z_N^2\right)\frac{\partial}{\partial z_i}(z_j), \\
&= 2z_iz_ja'(|z|^2) + a\left(|z|^2\right)\delta_{ij}\ , \text{ para } i, j = 1, 2, ..., \text{N}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\left(a(|z|^2)z_j\right) = a\left(|z|^2\right)\delta_{ij} + 2z_iz_ja'(|z|^2). \tag{2.2}$$

Agora, para ξ_i , $\xi_j \in \mathbb{R}$ onde $i, j = 1, 2, ..., \text{N}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\left(a(|z|^2)z_j\right)\xi_i\xi_j = a\left(|z|^2\right)\delta_{ij}\xi_i\xi_j + 2z_iz_j\frac{\partial}{\partial z_i}\left(a(|z|^2)\right)\xi_i\xi_j. \tag{2.3}$$

(ii.2) Logo como $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_i, ..., \xi_j, ..., \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, para $i, j = 1, 2, ..., \text{N}$, multiplicamos o obtido no (ii.1) por $\xi_i, \xi_j \in \mathbb{R}$, aplicando a soma dupla, fazendo uso de (a_2) e para algum valor de $\theta \in [0, 2\pi)$.

$$\sum_{i,j=1}^{N}\xi_i\xi_jz_iz_j = \left(\sum_{j=1}^{N}\xi_jz_j\right)^2 = (\langle\xi, z\rangle)^2 = |\xi|^2|z|^2\cos^2(\theta).$$

Obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a|z|^2z_j)\xi_i\xi_j &= a(|z|^2)\sum_{i,j=1}^{N}\xi_i\xi_j\delta_{ij} + 2a^{'}(|z|^2)\sum_{i,j=1}^{N}\xi_i\xi_jz_iz_j \\
&= a(|z|^2)\sum_{j=1}^{N}\xi_j^2 + 2a^{'}(|z|^2)\sum_{i,j=1}^{N}\xi_j^2z_j^2 \\
&= a(|z|^2)|\xi|^2 + 2a^{'}(|z|^2)\left(\sum_{j=1}^{N}\xi_jz_j\right)^2 \\
&= a(|z|^2)|\xi|^2 + 2a^{'}(|z|^2)\left(\langle\xi, z\rangle\right)^2 \\
&= a(|z|^2)|\xi|^2 + 2a^{'}(|z|^2)\left(|\xi|^2|z|^2\cos^2(\theta)\right) \\
&\geq |\xi|^2\left(a(|z|^2) + (2\gamma - 1)a(|z|^2)\cos^2(\theta)\right) \\
&= |\xi|^2a(|z|^2)[1 + (2\gamma - 1)\cos^2(\theta)]. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a|z|^2z_j)\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2a(|z|^2)\left[1 + (2\gamma - 1)\cos^2(\theta))\right]. \tag{2.5}$$

Vamos analisar por casos esta desigualdade

Caso I: Para $2\gamma - 1 \geq 0$. Fazendo uso de (a_2), obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a|z|^2z_j)\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2a(|z|^2)\left[1 + (2\gamma - 1)\cos^2(\theta)\right] \geq |\xi|^2a(|z|^2) \geq \gamma^2|\xi|^2$$

Logo

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^2)z_j)\xi_i\xi_j \geq \gamma^2|\xi|^2. \tag{2.6}$$

Caso II: Para $2\gamma - 1 < 0$, e já que $0 \leq \cos^2(\theta) \leq 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, temos $(2\gamma-1)\cos^2(\theta) \geq 0$, e substituindo em (2.5) se obtém

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a|z|^2z_j)\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2 a(|z|^2)\left[1 + (2\gamma-1)\cos^2(\theta)\right] \geq 2|\xi|^2 a(|z|^2) \geq 2\gamma^2|\xi|^2$$

logo

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a|z|^2z_j)\xi_i\xi_j \geq 2\gamma^2|\xi|^2. \tag{2.7}$$

Deste modo, dos casos I e II mostramos a existência de $\nu = \min\{\gamma^2, 2\gamma^2\} > 0$, tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a|z|^2z_j)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \forall z, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Agora para $z = y + t(x-y)$, $t \in [0,1]$ e $\xi = x - y$, temos que as j-ésimas coordenadas desses vetores são da forma: $z_j = y_j + t(x_j - y_j)$, $t \in [0,1]$, e $\xi_j = x_j - y_j$. Além disso, tem-se,

$$\left\langle a\left(|x|^2\right)x - a\left(|y|^2\right)y, x - y\right\rangle = \sum_{j=1}^{N}\left(a\left(|x|^2\right)x_j - a\left(|y|^2\right)y_j\right)(x_j - y_j).$$

Pelo Teorema de Valor Médio e Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^2)z_j)\xi_i\xi_j dt &= \sum_{j=1}^{N}\int_{[0,1]}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^2)z_j)\xi_i dt\right)\xi_j \\
&= \sum_{j=1}^{N}\int_{[0,1]} d(a(|z|^2)z_j))\xi_j \\
&= \sum_{j=1}^{N}\left[a(|z(1)|^2 z_j(1)) - a(|z(0)|^2 z_j(0))\right]\xi_j \\
&= \sum_{j=1}^{N}\left[a(|x|^2)(y_j + 1(x_j - y_j)) - a(|y|^2)(y_j)\right](x_j - y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(a\left(|x|^2\right)x_j - a\left(|y|^2\right)y_j\right)(x_j - y_j).
\end{aligned}$$

Desta forma, tem-se a desigualdade procurada,

$$
\begin{aligned}
\left\langle a\left(|x|^2\right)x - a\left(|y|^2\right)y, x-y\right\rangle &= \sum_{j=1}^{N}\left(a\left(|x|^2\right)x_j - a\left(|y|^2\right)y_j\right)(x_j-y_j) \\
&= \int_{[0,1]}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^2)z_j)\xi_i\xi_j dt \\
&\geq \int_{[0,1]}\nu|\xi|^2 dt \\
&= \int_{[0,1]}\nu|x-y|^2 dt \\
&= \nu \text{ med }([0,1])|x-y|^2 \\
&= \nu|x-y|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, mostramos a existência de $\nu > 0$, satisfazendo a desigualdade (2.1) para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^N$. $\square$

Lema 24 *Seja $A(\eta)$ um campo de vetores C^1 em $\mathbb{R}^N$ e $f(x,s)$ uma função Carathéodory limitada em $\Omega \times \mathbb{R}$. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ a solução fraca de*

$$
\begin{cases} -div(A(\nabla u)) = f(x,u) & em\ \Omega, \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.8}
$$

isto é,

$$
\int_\Omega A(\nabla u)\nabla\varphi dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).
$$

Suponha ainda que existe $0 < \nu < K < \infty$ tal que

$$
\nu|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\xi_i\xi_j \ \ e \ \ \left|\frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\right| \leq K, \tag{2.9}
$$

para todo $i,j = 1,2,...,N$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$. Então $u \in W^{2,p}(\Omega)\bigcap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para todo $\alpha \in (0,1)$ e para todo $p \in (1,\infty)$. Além disso,

$$
\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq O(\nu, K, \Omega, \|f(\cdot,u)\|_\infty). \tag{2.10}
$$

Demonstração. Ver a prova em [10].

No resultado a seguir, mostramos que o operador diferencial envolvido em (P) verifica (2.9).

Lema 25 *Se $(a_1) - (a_2)$ são válidas, então para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, temos que o operador diferencial de segunda ordem $A(\nabla u) = a(|\nabla u|^2)\nabla u$ satisfaz (2.9) do Lema 24.*

Demonstração. Mostremos que as desigualdades de (2.9) do Lema 24 são satisfeitas.

Afirmação I: $\left|\dfrac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\right| \leq K$, para algum $0 < K < \infty$.
De fato, dado que $(a_1) - (a_2)$ são válidas e da equação (2.2) temos que:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_j}(a(|\eta|^2)\eta_j) = a(|\eta|^2)\delta_{ij} + 2a^{'}(|\eta|^2)\eta_i\eta_j$$

e fazendo $\eta = \nabla u$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\right| &= \left|a(|\nabla u|^2)\delta_{ij} + 2a^{'}(|\nabla u|^2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \\
&\leq |a(|\nabla u|^2)| + 2\left|a^{'}(|\nabla u|^2)\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \\
&\leq |a(|\nabla u|^2)| + 2\left|a^{'}(|\nabla u|^2)\right||\nabla u|^2 \\
&\leq \Gamma + 2\Gamma a(|\nabla u|^2) \\
&\leq \Gamma + 2\Gamma\Gamma \\
&= K
\end{aligned}$$

Para alguma constante positiva K, obtemos a desigualdade procurada,

$$\left|\frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\right| \leq K.$$

Afirmação II: A seguinte desigualdade é válida

$$\nu|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\,\xi_i\xi_j.$$

De fato, dado que a função $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é de classe C^1 e além disso $(a_1) - (a_2)$ são válidas e fazendo $\eta = \nabla u$ no Lema 24, ou seja

$$(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_i, ...\eta_N) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}) \in \mathbb{R}^N$$

e como A é um campo de vetores, temos

$$A(\nabla u) = (A_1(\nabla u), A_2(\nabla u), ..., A_i(\nabla u), ...A_N(\nabla u)) \in \mathbb{R}^N.$$

Por (2.2), temos

$$\frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_j}(a(|\eta|^2)\eta_j) = a(|\eta|^2)\delta_{ij} + 2a^{'}(|\eta|^2)\eta_i\eta_j.$$

Consequentemente, para $\eta = \nabla u$, temos

$$\frac{\partial A_i}{\partial n_j}(\nabla u) = a(|\nabla u|^2)\delta_{ij} + 2a^{'}(|\nabla u|^2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

aplicando a soma dupla, fazendo uso de $(a_1) - (a_2)$ e para algum valor de $\theta \in [0, 2\pi)$ temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\xi_i\xi_j &= a(|\nabla u|^2)\sum_{i,j=1}^{N}\delta_{ij} + 2a^{'}(|\nabla u|^2)\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\xi_i\xi_j \\
&= a(|\nabla u|^2)|\xi|^2 + 2a^{'}(|\nabla u|^2)\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\xi_i\xi_j \\
&= a(|\nabla u|^2)|\xi|^2 + 2a^{'}(|\nabla u|^2)\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2(\xi_j)^2 \\
&= a(|\nabla u|^2)|\xi|^2 + 2a^{'}(|\nabla u|^2)\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_j}\xi_j\right)^2 \\
&= a(|\nabla u|^2)|\xi|^2 + 2a^{'}(|\nabla u|^2)\left(\langle \nabla u, \xi\rangle\right)^2 \\
&= a(|\nabla u|^2)|\xi|^2 + 2a^{'}(|\nabla u|^2)\left(|\xi|^2|\nabla u|^2\cos^2(\theta)\right) \\
&\geq |\xi|^2\left(a(|\nabla u|^2) + (2\gamma - 1)a(|\nabla u|^2)\cos^2(\theta)\right) \\
&= |\xi|^2 a(|\nabla u|^2)[1 + (2\gamma - 1)\cos^2(\theta)].
\end{aligned}$$

Vamos analisar esta desigualdade por casos.

Caso I: Para $2\gamma - 1 \geq 0$, e fazendo uso de (a_2), obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2 a(|\nabla u|^2)\left[1 + (2\gamma - 1)\cos^2(\theta)\right] \geq |\xi|^2 a(|\nabla u|^2) \geq \gamma^2|\xi|^2$$

consequentemente, obtemos o procurado para o primeiro caso

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\xi_i\xi_j \geq \gamma^2|\xi|^2. \tag{2.11}$$

Caso II: Para $2\gamma - 1 < 0$, e já que $0 \leq \cos^2(\theta) \leq 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, temos $(2\gamma-1)\cos^2(\theta)\geq 0$ e substituindo em (2.5) obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial A_i}{\partial\eta_j}(\nabla u)\xi_i\xi_j\geq|\xi|^2a(|\nabla u|^2)\left[1+(2\gamma-1)\cos^2(\theta)\right]\geq 2|\xi|^2a(|\nabla u|^2)\geq 2\gamma^2|\xi|^2.$$

Deste modo, dos casos I e II mostramos a existência de $\nu=\ \min\{\gamma^2,2\gamma^2\}>0$, tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial A_i}{\partial\eta_j}(\nabla u)\xi_i\xi_j\geq\nu|\xi|^2.$$

2.1 Demonstração do Teorema 22.

Suponhamos que existem $\overline{u}$, $\underline{u}$ e o operador de truncamento $R:L^\infty(\Omega)\to L^\infty(\Omega)$ dado por:

$$R(w)(x)=\begin{cases}\overline{u}(x) & \text{se}\quad w(x)\geq\overline{u}(x),\\ \\ w(x) & \text{se}\quad \underline{u}(x)\leq w(x)\leq\overline{u}(x),\\ \\ \underline{u}(x) & \text{se}\quad w(x)\leq\underline{u}(x),\end{cases}\tag{2.12}$$

e o problema auxiliar,

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(a(|\nabla u|^2)\nabla u)=f(x,R(w),B(R(w))):=\mathrm{F}_w(x) & \text{em }\Omega,\\ u=0 & \text{sobre }\partial\Omega,\end{cases}\tag{L}$$

para qualquer $w\in L^\infty(\Omega)$. Para mostrar a existência de solução do problema (L), fazemos uso do seguinte Lema.

Lema 26 *Se* $(a_1)-(a_2)$ *são válidas, então o problema* (L) *tem solução única* $u\in H_0^1(\Omega)$. *Além disso* $u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *para todo* $\alpha\in(0,1)$ *e existe uma constante positiva* $C>0$ *(independente de* w*) tal que:*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}\leq C.\tag{2.13}$$

Demonstração. Faremos uso do Teorema de Minty-Browder.
Definamos o operador não linear,

$$A:H_0^1(\Omega)\to(H_0^1(\Omega))'=H^{-1}(\Omega),$$

como segue
$$\langle A(u),\varphi\rangle = \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u\nabla\varphi dx\ ,\ \ \forall\varphi\in H_0^1(\Omega).$$
Mostremos que o operador A satisfaz as hipóteses do Teorema de Minty-Browder, isto é:

1. A é coercivo: Fazendo uso de (a_1), temos
$$\begin{aligned}\langle A(u),u\rangle &= \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u\nabla u dx\\ &= \int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 dx\\ &\geq \gamma\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\\ &= \gamma|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \gamma\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}\tag{2.14}$$
dividindo por $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ e fazendo esse valor tender a $+\infty$, obtemos
$$\lim_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\to+\infty}\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}\geq\lim_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\to+\infty}\gamma\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=+\infty,$$
desta forma concluímos que A é um operador coercivo.

2. A é monótono: fazendo uso do item (ii) do Lema 23 temos,
$$\begin{aligned}\langle Au-A\eta,u-\eta\rangle &= \langle Au,u-\eta\rangle-\langle A\eta,u-\eta\rangle\\ &= \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u\nabla(u-\eta)dx-\int_\Omega a(|\nabla\eta|^2)\nabla\eta\nabla(u-\eta)dx\\ &= \int_\Omega\left(a(|\nabla u|^2)\nabla u-a(|\nabla\eta|^2)\nabla\eta\right)\nabla(u-\eta)dx\\ &= \int_\Omega\left(a(|\nabla u|^2)\nabla u-a(|\nabla\eta|^2)\nabla\eta\right)(\nabla u-\nabla\eta)dx\\ &\geq \nu\int_\Omega|\nabla(u-\eta)|^2dx\\ &= \nu\|u-\eta\|^2_{H_0^1(\Omega)}\\ &\geq 0.\end{aligned}\tag{2.15}$$
Assim temos que $\langle Au-A\eta,u-\eta\rangle>0,\ \forall u,\eta\in H_0^1(\Omega),\ u\neq\eta$. Portanto concluímos que o operador A é um operador estritamente monótono.

3. A é contínuo:

Seja uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset H_0^1(\Omega)$ e $u\in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Temos que $|\nabla u_n|\to|\nabla u|$ em $L^2(\Omega)$, pelo Teorema 31, existe uma subsequência ainda denotada por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{cases} (i)\ |\nabla u_n(x)| \to |\nabla u(x)| & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ (ii)\ \exists g \in L^2(\Omega) : |\nabla u_n(x)| \leq g(x) & \text{q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{2.16}$$

Agora, por definição da norma do operador, e fazendo uso do Teorema 32, temos

$$\begin{aligned} \|Au_n - Au\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\langle Au_n - Au, \varphi\rangle| \\ &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\langle Au_n, \varphi\rangle - \langle Au, \varphi\rangle| \\ &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left| \int_\Omega a(|\nabla u_n|^2)\nabla u_n \varphi dx - \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u \nabla\varphi dx \right| \\ &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left| \int_\Omega \big(a(|\nabla u_n|^2)\nabla u_n \nabla\varphi - a(|\nabla u|^2)\nabla u \nabla\varphi\big)\, dx \right|. \end{aligned}$$

Vamos fazer uso do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue no lado direito.

(a) Mostremos a convergência pontual.
Por (i) de (2.16), temos

$$|\nabla u_n(x)| \to |\nabla u(x)| \ \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

e como a função potencial é contínua, segue que

$$|\nabla u_n(x)|^2 \to |\nabla u(x)|^2 \ \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

e pela continuidade da função a, temos

$$a(|\nabla u_n(x)|^2) \to a(|\nabla u(x)|^2) \ \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

logo obtemos

$$a(|\nabla u_n(x)|^2)\nabla u_n(x)\nabla\varphi(x) \to a(|\nabla u(x)|^2)\nabla u(x)\nabla\varphi(x) \ \text{q.t.p. em } \ \Omega.$$

(b) Mostremos a limitação por uma função em $L^1(\Omega)$.

Por (ii) de (2.16), (a_2), e a Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}|a(|\nabla u_n(x)|^2)\nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)| &= |a(|\nabla u_n(x)|^2)||\nabla u_n(x)||\nabla\varphi(x)| \\ &\leq \Gamma\left(\frac{|\nabla u_n(x)|^2}{2} + \frac{|\nabla\varphi(x)|^2}{2}\right) \\ &\leq \Gamma\left(\frac{g^2(x)}{2} + \frac{|\nabla\varphi(x)|^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Seja $h(x) = \dfrac{g^2(x)}{2} + \dfrac{|\nabla\varphi(x)|^2}{2}$ desta forma temos que $h \in L^1(\Omega)$.

Os itens (a) e (b) mostram as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, assim temos

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^2)\nabla u_n\nabla\varphi dx \to \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u\nabla\varphi dx$$

Portanto

$$||Au_n - Au||_{H^{-1}(\Omega)} \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

logo A é um operador contínuo.

Desta forma mostramos que o operador não linear A é estritamente monótono, coercivo e contínuo. Então, pelo Teorema 21, temos que para cada w existe uma única u solução do problema (L). Além disso pelos Lemas 24 e 25 temos que $u \in W^{2,p}(\Omega)\bigcap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para todo $\alpha \in (0,1)$, $p > 1$, e

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq O(\nu, K, \Omega, \|F_w\|_\infty) \leq C,$$

com C independente de w. Isso completa a prova. □

Agora, definimos o operador

$$T : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega) \text{ com } T(w) = u,$$

onde u é a única solução do problema auxiliar (L). Além disso pelo Lema 26 temos $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e da imerão de $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ em $L^\infty(\Omega)$, temos que $u \in L^\infty(\Omega)$.
No próximo resultado, provaremos algumas propriedades do operador T.

Lema 27 *O operador $T : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ satisfaz:*

(i) T é contínuo e compacto.

(ii) $T(B(0,M)) \subset B(0,M)$, onde $B(0,M)$ é a bola de $L^\infty(\Omega)$.

Demonstração.

(i) **T é compacto:** Seja, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^\infty(\Omega)$ tal que $T(w_n) = u_n$, e pelo Lema 26 temos que $\|u_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C$, ou seja, temos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada no espaço $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Por outro lado, pela imersão compacta

$$C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega),$$

existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, que converge para algum ponto u^* de $L^\infty(\Omega)$ isto é $u_{n_k} \to u^*$ em $L^\infty(\Omega)$, pela definição do operador T segue que $T(w_{n_k}) = u_{n_k} \to \beta$, desta forma mostramos que o operador T é compacto.

T é contínuo: Seja $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^\infty(\Omega)$ tal que, $w_n \to w$ em $L^\infty(\Omega)$ e também $T(w_n) = u_n$, pelo Lema 26 temos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequencia limitada no espaço $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, pela imersão compacta

$$C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}),$$

temos que a menos de subsequência,

$$u_n \to u \text{ em } C^1(\overline{\Omega}).$$

Temos por definição do operador solução: $T(w_n) = u_n$, como u_n é uma solução da equação linear (L), logo $T(w_n) = u_n$ satisfaz o seguinte

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^2)\nabla u_n \nabla\varphi dx = \int_\Omega F_{w_n}\varphi dx \ , \ \ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.17}$$

Fazendo passagem ao limite em (2.17). Segue como foi feito na demonstração do Lema 26, que no lado esquerdo

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^2)\nabla u_n \nabla\varphi dx = \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u \nabla\varphi dx.$$

Para a parte direita faremos uso do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Afirmação.

$$\int_\Omega F_{w_n}\varphi dx \to \int_\Omega F_w \varphi dx.$$

(z_1) Mostremos a convergência pontual.

Como $w_n \to w$ em $L^\infty(\Omega)$ temos que

$$|w_n(x) - w(x)| \leq |w_n - w|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon$$

logo

$$w_n(x) \to w(x) \;\; \text{q.t.p. em } \Omega,$$

sendo R e B contínuos temos

$$R(w_n(x)) \to R(w(x)) \;\; \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$B(R(w_n(x))) \to B(R(w(x))) \;\; \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Logo da continuidade de f temos

$$f(x, R(w_n(x)), B(R(w_n(x)))) \to f(x, R(w(x)), B(R(w(x)))) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

o qual implica

$$F_{w_n}(x) \to F_w(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

consequentemente

$$F_{w_n}(x)\varphi(x) \to F_w(x)\varphi(x) \;\; \text{q.t.p. em } \Omega.$$

(z_2) Mostremos a limitação por uma função de $L^1(\Omega)$.
Sendo $\overline{\Omega}$ um conjunto compacto e f uma função contínua, existe $K > 0$ tal que

$$|F_{w_n}(x)\varphi(x)| \leq K|\varphi(x)| = g(x)$$

desta forma existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|F_{w_n}\varphi| \leq g \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ q.t.p. em Ω.

Então por (z_1) e (z_2) obtemos

$$\int_\Omega F_{w_n}\varphi dx \to \int_\Omega F_w \varphi dx, \;\; \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Finalmente passando o limite no lado esquerdo e direito de (2.17) obtemos

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 \nabla\varphi dx = \int_\Omega F_w \varphi dx \;, \;\; \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

(ii) A bola $B(0, M)$ em $L^\infty(\Omega)$ é definida como segue,

$$B(0, M) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) : ||u||_{L^\infty(\Omega)} < M \right\}.$$

Seja $u \in T(B(0, M))$, então existe $w \in B(0, M)$ tal que $T(w) = u$,

(k_1) Como u é solução do problema (L), então pelo Lema 26 temos $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C$.

(k_2) Da imersão compacta

$$C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\infty}(\Omega),$$

existe $\lambda > 0$, tal que $|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}$.

Logo, de (k_1) e (k_2) tem-se que $|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$, onde $M = \lambda C$ é o raio da bola, o qual implica que $u \in B(0, M)$.

Finalmente de (i) e (ii), temos ao menos um Ponto Fixo de Schauder sobre a bola $B(0, M) \in L^\infty(\Omega)$. Isso completa a demonstração. □

Pelo Lema 27 podemos aplicar o Teorema 18 e concluímos que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $T(u) = u$. Então

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x, R(u), B(R(u)))\varphi dx\,,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.18}$$

Deste modo temos o procurado para o operador de truncamento.

Agora mostremos a ordenação de sub e supersolução.

Afirmação 1: $\underline{u} \leq u$.

De fato, fazendo uso da Definição 1 de subsolução $\underline{u}$, temos

$$-\mathrm{div}(a(|\nabla \underline{u}|^2)\nabla \underline{u} \leq f(x, \underline{u}, B(w)) \ \text{em } \Omega, \ \text{para todo } \underline{u} \leq w \leq \overline{u}.$$

Em particular, tomando $w = R(u)$, onde R é o operador de truncamento definido por (2.12), obtemos

$$-\mathrm{div}(a(|\nabla \underline{u}|^2)\nabla \underline{u} \leq f(x, \underline{u}, B(R(u))) \ \text{em } \Omega$$

esta desigualdade no sentido fraco será

$$\int_\Omega a(|\nabla \underline{u}|^2)\nabla \underline{u} \nabla \varphi dx \leq \int_\Omega f(x, \underline{u}, B(w))\varphi dx\,,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \geq 0. \tag{2.19}$$

Por outro lado, do Teorema 18, temos

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x, R(u), B(R(u)))\varphi dx\,,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.20}$$

Subtraindo da desigualdade (2.19) o resultado obtido em (2.20), obtemos

$$\int_\Omega \big(a(|\nabla \underline{u}|^2)\nabla \underline{u} - a(|\nabla u|^2)\nabla u\big)\, \nabla\varphi dx \leq$$
$$\int_\Omega \left[f(x,\underline{u},B(R(u))) - f(x,R(u),B(R(u)))\right]\varphi dx, \tag{2.21}$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \geq 0$.
Como $u, \underline{u} \in H_0^1(\Omega)$, e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ onde $\varphi \geq 0$, em particular, podemos considerar

$$\varphi = (\underline{u} - u)^+ = \max\{\underline{u} - u, 0\} \in H_0^1(\Omega),$$

logo

$$\int_\Omega a(|\nabla \underline{u}|^2)\nabla \underline{u} - a(|\nabla u|^2)\nabla u)\nabla(\underline{u} - u)^+ dx \leq$$
$$\int_\Omega \left[f(x,\underline{u},B(R(u))) - f(x,R(u),B(R(u)))\right](\underline{u} - u)^+ dx,$$

e obtemos

$$\int_{\{x\in\Omega:\underline{u}(x)>u(x)\}} \big(a(|\nabla \underline{u}|^2)\nabla \underline{u} - a(|\nabla u|^2)\nabla u\big)\, \nabla(\underline{u} - u) dx \leq$$
$$\int_{\{x\in\Omega:\underline{u}(x)>u(x)\}} \left[f(x,\underline{u},B(R(u))) - f(x,R(u),B(R(u)))\right](\underline{u} - u) dx. \tag{2.22}$$

Usando o operador de truncamento R, definido por (2.12), temos

$$\int_{\{x\in\Omega:\underline{u}(x)>u(x)\}} \left[f(x,\underline{u},B(R(u))) - f(x,R(u),B(R(u)))\right](\underline{u} - u) dx = 0,$$

e por (2.22) temos que

$$\int_{\{x\in\Omega:\underline{u}(x)>u(x)\}} (a(|\nabla \underline{u}|^2)\nabla \underline{u} - a(|\nabla u|^2)\nabla u)\nabla(\underline{u} - u) dx \leq 0$$

pelo item (ii) do Lema 23 temos que existe $\nu > 0$ tal que

$$\nu \int_{\{x\in\Omega:\underline{u}(x)>u(x)\}} |\nabla(\underline{u} - u)|^2 dx \leq$$
$$\int_{\langle x\in\Omega:\underline{u}(x)>u(x)\}} (a(|\nabla \underline{u}|^2)\nabla \underline{u} - a(|\nabla u|^2)\nabla u)\nabla(\underline{u} - u) dx \leq 0,$$

consequentemente

$$0 \leq \int_{\{x \in \Omega : \underline{u}(x) > u(x)\}} |\nabla(\underline{u} - u)|^2 dx \leq 0,$$

portanto med $\{x \in \Omega : \underline{u}(x) > u(x)\} = 0$. Logo $\underline{u}(x) \leq u(x)$ q.t.p. em Ω.
Afirmação 2: $u \leq \overline{u}$.
De fato, fazendo uso da Definição 1 de supersolução $\overline{u}$, temos

$$-\text{div}(a(|\nabla \overline{u}|^2)\nabla \overline{u} \geq f(x, \overline{u}, B(w)) \text{ em } \Omega, \text{ para todo } \underline{u} \leq w \leq \overline{u}.$$

Em particular, tomando $w = R(u)$, temos

$$-\text{div}(a(|\nabla \overline{u}|^2)\nabla \overline{u} \geq f(x, \overline{u}, B(R(u))) \text{ em } \Omega$$

esta desigualdade no sentido fraco é

$$\int_\Omega a(|\nabla \overline{u}|^2)\nabla \overline{u} \nabla \varphi dx \geq \int_\Omega f(x, \overline{u}, B(R(w)))\varphi dx\,,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \geq 0. \tag{2.23}$$

Por outro lado do Teorema 18, temos

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x, R(u), B(R(u)))\varphi dx\,,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.24}$$

Subtraindo da desigualdade (2.24) o resultado obtido em (2.23), obtemos

$$\int_\Omega \left(a(|\nabla u|^2)\nabla u - a(|\nabla \overline{u}|^2)\nabla \overline{u}\right) \nabla \varphi dx \leq$$
$$\int_\Omega \left[f(x, R(u), B(R(u))) - f(x, \overline{u}, B(R(u)))\right] \varphi dx, \tag{2.25}$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \geq 0$.
Como $u, \overline{u} \in H_0^1(\Omega)$, e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ onde $\varphi \geq 0$, em particular podemos considerar

$$\varphi = (u - \overline{u})^+ = \max\{u - \overline{u}, 0\} \in H_0^1(\Omega),$$

logo

$$\int_\Omega (a(|\nabla u|^2)\nabla u - a(|\nabla \overline{u}|^2)\nabla \overline{u})\nabla(u - \overline{u})^+ dx \leq$$
$$\int_\Omega \left[f(x, R(u), B(R(u))) - f(x, \overline{u}, B(R(u)))\right] (u - \overline{u})^+ dx,$$

e obtemos

$$\int_{\{x\in\Omega:\overline{u}(x)<u(x)\}} (a(|\nabla u|^2)\nabla u - a(|\nabla \overline{u}|^2)\nabla \overline{u})\nabla(u-\overline{u})dx \leq$$
$$\int_{\{x\in\Omega:\overline{u}(x)<u(x)\}} \left[f(x,R(u),B(R(u))) - f(x,\overline{u},B(R(u)))\right](u-\overline{u})dx. \qquad (2.26)$$

Usando o operador de truncamento R, definido por (2.12), temos

$$\int_{\{x\in\Omega:\overline{u}(x)<u(x)\}} \left[f(x,R(u),B(R(u))) - f(x,\overline{u},B(R(u)))\right](u-\overline{u})dx = 0,$$

e por (2.26) temos que

$$\int_{\{x\in\Omega:\overline{u}(x)<u(x)\}} (a(|\nabla u|^2)\nabla u - a(|\nabla \overline{u}|^2)\nabla \overline{u})\nabla(u-\overline{u})dx \leq 0$$

pelo item (ii) do Lema 23 temos que existe $\nu > 0$ tal que

$$\nu \int_{\{x\in\Omega:\overline{u}(x)<u(x)\}} |\nabla(u-\overline{u})^+|^2 dx \leq$$
$$\int_{\{x\in\Omega:\overline{u}(x)<u(x)\}} (a(|\nabla u|^2)\nabla u - a(|\nabla \overline{u}|^2)\nabla \overline{u})\nabla(u-\overline{u})dx \leq 0,$$

consequentemente

$$0 \leq \int_{\{x\in\Omega:\overline{u}(x)<u(x)\}} |\nabla(u-\overline{u})|^2 dx \leq 0,$$

portanto med $\{x \in \Omega : \overline{u}(x) < u(x)\} = 0$. Logo $u(x) \leq \overline{u}(x)$ q.t.p. em Ω.
Das afirmações I e II, temos que

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}\,, \text{ implicando que } R(u) = u.$$

E assim, olhando para a equação (2.18), u é solução do problema (P).
Dessa forma demonstramos o Teorema 22. ■

Capítulo 3

Aplicações à curvatura média prescrita

Nesta sessão apresentamos duas aplicações do Teorema 22 à curvatura média prescrita não local (veja [9], [13], [14]).

3.1 Primeira aplicação

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = f(x,u,B(u)) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P1}$$

onde a função f é dada por

$$f(x,u,B(u)) = (\lambda u^q + b(x)u^p)\int_\Omega h(x)u^r(x)dx, \tag{3.1}$$

e supondo $h, b \in C(\overline{\Omega})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $0 < p, q, r$. Consideremos ainda que h é não negativa e não trivial. Dada uma função $g \in C(\overline{\Omega})$, denotemos:

$$g_m = \min_{x\in\overline{\Omega}} g(x) \quad e \quad g_M = \max_{x\in\overline{\Omega}} g(x).$$

Proposição 8 *Suponhamos que $q + r < 1 < p + r$. Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que* (P1) *possui pelo menos uma solução positiva u_λ para todos os $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Além disso, temos que,*

$$\lim_{\lambda\to 0} \|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = 0.$$

Demonstração. Será dividida em três etapas.
Inicialmente, consideremos o problema auxiliar,

$$\begin{cases} -\text{div}(a(|\nabla u|^2)|\nabla u|) = f(x,u,B(u)) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{PA1}$$

onde, a é dada da seguinte forma:

$$a(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+s}} & \text{s} \in [0,1), \\ b(s-2)^2 + c & \text{s} \in [1,2), \\ c & \text{s} \in [2,+\infty), \end{cases}$$

com

$$b = \frac{1}{8\sqrt{2}} \quad e \quad c = \frac{7}{8\sqrt{2}}.$$

Observação 28 *Notemos os seguintes fatos.*

(i) A função a satisfaz as hipóteses (a_1) - (a_2). Vamos denotar por $\tilde{a}$ a primeira regra de correspondência da função a, ou seja,

$$\tilde{a}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}}, \text{ para } s \in [0,1)$$

(m_1) A função $\tilde{a}$ satisfaz a hipótese (a_1).
De fato, observevamos que para $0 \leq s < 1$, temos

$$\begin{aligned} 1 \leq \sqrt{s^2+1} &< \sqrt{2} \\ 1 \geq \tfrac{1}{\sqrt{s^2+1}} &> \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \geq \tilde{a}(s^2) &> \tfrac{1}{\sqrt{2}} > 0. \end{aligned}$$

Assim, existem as constantes positivas γ no intervalo $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e Γ no intervalo $[1,+\infty)$, que satisfazem a desigualdade acima, logo a função $\tilde{a}$ satisfaz a hipótese (a_1) para $s \in [0,1)$.

(m_2) A função $\tilde{a}$ satisfaz a hipótese (a_2).
De fato, como $\tilde{a}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1+s}}$, $s \in (0,1)$ derivando neste conjunto convexo, temos

$$\tilde{a}'(s) = -\frac{1}{2(1+s)\sqrt{1+s}}.$$

Logo

$$\tilde{a}^{'}(s) = -\frac{1}{2(1+s)}\tilde{a}(s). \tag{3.2}$$

Consideremos a função $g(s) = -\dfrac{1}{2(s+1)}$ que é contínua no intervalo $[0,1]$, assim temos $\tilde{a}^{'}(s) = g(s)\tilde{a}(s)$, logo a função $\tilde{a}$ é de classe C^1.
Além disso, multiplicando por s a equação (3.2) em ambos os lados, segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^{'}(s)s &= -\frac{s}{2(1+s)\sqrt{1+s}} \\
&= -\frac{\tilde{a}(s)}{2}\left(\frac{s}{s+1}\right) \\
&= \frac{\tilde{a}(s)}{2}\left(2\gamma - 2\gamma - \frac{s}{s+1}\right) \\
&= \tilde{a}(s)\left(\gamma - \frac{1}{2}\left(2\gamma + \frac{s}{s+1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, como a função $h(s) = \dfrac{s}{s+1}$ é crescente onde seu valor máximo é menor do que $\frac{1}{2}$. Para $s \in [0,1)$ temos

$$2\gamma + h_{max}(s) = 2\gamma + max\left(\frac{s}{s+1}\right) < 1$$

consequentemente,

$$2\gamma + \frac{1}{2} < 1,$$

portanto, $\gamma < \frac{1}{2}$. De (m_1) e (m_2) concluímos que existem $\gamma, \Gamma > 0$ onde $\gamma \in (0, \frac{1}{4})$ e $\Gamma \in [1, +\infty)$, que satisfazem as hipóteses $(a_1) - (a_2)$ da função $\tilde{a}$.

(ii) Denotemos por φ_1 a autofunção do operador Laplaciano em Ω correspondente ao primeiro autovalor λ_1, onde $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$, então pelo Teorema 39, segue que $\varphi_1 > 0$ em Ω e satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \text{ em } \Omega, \\ \varphi_1 = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

(iii) Considere o problema linear elíptico

$$\begin{cases} -\Delta e = 1 \quad \text{em } \Omega, \\ e = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Mostraremos que este problema admite uma única solução e, esta solução é necessariamente positiva.

De fato, pelo Teorema 36, existe uma única $e \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ que é solução do problema (3.3), logo

$$\int_\Omega \nabla e \nabla v dx = \int_\Omega v dx\,, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando, $v = e^- = \max\{-e, 0\} \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^- dx &= \int_\Omega \nabla e \nabla e^- dx \\
&= \int_\Omega \nabla(e^+ - e^-)\nabla e^- dx \\
&= \int_\Omega \nabla e^+ \nabla e^- dx - \int_\Omega \nabla e^- \nabla e^- dx \\
&= -\int_\Omega |\nabla e^-|^2 dx \\
&= -|\nabla e^-|_{L^2(\Omega)} \\
&= -\|e^-\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

com isso temos,

$$0 \leq \|e^-\|_{H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega e^- dx \leq 0, \quad e^- \in H_0^1(\Omega).$$

Dessa forma, obtemos $e^- \equiv 0$. Como $e = e^+ - e^-$, onde $e^+, e^- \in H_0^1(\Omega)$, temos que $e = e^+ \geq 0$.

Suponhamos agora, que existe $x_0 \in \Omega$ tal que

$$e(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} e(x).$$

Pelo Teorema 38, $e =$ constante. Como $e = 0$ sobre a $\partial\Omega$ segue que $e \equiv 0$, que é um absurdo, pois teríamos $0 = -\Delta e = 1$. Então não existe $x \in \Omega$ tal que $e(x) = 0$, portanto $e > 0$ em Ω. □

Temos como candidatos a sub e supersolução, as seguintes funções,

$$\underline{u} = \varepsilon\varphi_1 \ \ e \ \ \overline{u} = \lambda^s e,$$

com $\varepsilon, s, \lambda > 0$ que serão escolhidos de maneira mais apropriada, para que os candidatos mencionados sejam realmente sub e supersolução da equação (PA1).

Primeira Etapa: Vamos verificar que $\overline{u}$ satisfaz o item (iii) da Definição 1.

Começamos com a função f dada em (3.1) e escolhamos s em $\left(\dfrac{1}{p-q}, \dfrac{1}{1-(q+r)}\right)$. Ao longo da nossa prova consideraremos λ suficientemente pequeno tal que satisfaz o seguinte,

$$\lambda^{2s}|\nabla e|^2 \leq 1. \tag{3.5}$$

Pela Definição 1, dada para supersolução, temos

$$\text{-div}(a(|\nabla \overline{u}|^2)\nabla \overline{u}) \geq f(x, \overline{u}, B(w)) \text{ em } \Omega, \text{ para todo } \underline{u} \leq w \leq \overline{u}.$$

Para o caso onde (3.5) é válida, temos que (PA1) é

$$\text{-div}\left(\frac{\nabla \overline{u}}{\sqrt{1+|\nabla \overline{u}|^2}}\right) \geq f(x, \overline{u}, B(w)) \text{ em } \Omega, \text{ para todo} \underline{u} \leq w \leq \overline{u}.$$

A desigualdade acima no sentido fraco será

$$\int_\Omega \frac{\nabla(\overline{u})\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla \overline{u}|^2}} dx \geq \int_\Omega \varphi \left((\lambda \overline{u}^q + b(x)\overline{u}^p) \int_\Omega h(x) w^r(x) dx \right) dx\,, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\ ,\ \varphi \geq 0,$$

onde sabemos que o candidato à supersolução é $\overline{u} := \lambda^s e$. Substituindo na desigualdade acima temos o seguinte,

$$\int_\Omega \frac{\nabla(\lambda^s e)\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla \lambda^s e|^2}} dx \geq \int_\Omega \varphi \left((\lambda(\lambda^s e)^q + b(x)(\lambda^s e)^p) \int_\Omega h(x) w^r(x) dx \right) dx,$$

ou seja,

$$\lambda^s \int_\Omega \frac{\nabla e \nabla\varphi}{\sqrt{1+\lambda^{2s}|\nabla e|^2}} dx \geq \int_\Omega \varphi \lambda^{qs+1} e^q \left((1 + b(x)\lambda^{s(p-q)-1} e^{p-q}) \int_\Omega h(x) w^r(x) dx \right) dx.$$

Portanto, $\overline{u}$ satisfaz o item *(iii)* da Definição 1, se para todo $\varphi \geq 0$ e $w \in [\underline{u}, \overline{u}]$, tivermos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\nabla e \nabla\varphi}{\sqrt{1+\lambda^{2s}|\nabla e|^2}} dx \quad &\geq \quad \lambda^{s(q-1)+1} \int_\Omega \varphi e^q \left(\int_\Omega h(x) w^r(x) dx \right) dx + \\
& \quad\ \ \lambda^{s(q-1)+1} \int_\Omega \varphi e^q \left(b(x)\lambda^{s(p-q)-1} e^{p-q} \int_\Omega h(x) w^r(x) dx \right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Pela escolha de s em $\left(\dfrac{1}{p-q}, \dfrac{1}{1-(q+r)}\right)$, temos que $s(p-q) > 1$. Observe que podemos tomar λ suficientemente pequeno tal que

$$1 + b(x)\lambda^{p-q} e(x)^{p-q} \geq 0\,, \ \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{3.7}$$

De fato, como Ω é um domínio limitado, temos que $\overline{\Omega}$ é um conjunto compacto.
Além disso, valem:

(z_1) Dado que $b \in C(\overline{\Omega})$ então b atinge mínimo e máximo que denotaremos por

$$b_m = \min_{x \in \overline{\Omega}} b(x) \leq b(x) \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} b(x) = b_M.$$

(z_2) Como e é solução positiva do problema linear (3.4), temos que e é contínua pelo Teorema 36, temos

$$0 < e_m = \min_{x \in \overline{\Omega}} e(x) \leq e(x) \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} e(x) = e_M.$$

Com isso, analisemos a desigualdade (3.7) nos seguintes casos:
Caso I. Se $b(x) \geq 0$, para λ pequeno e positivo, vale a desigualdade.
Caso II. Se $b(x) < 0$, então, para $\lambda(\overline{\Omega}, b, s, p, q) \leq \left(-\dfrac{1}{b_m e_m}\right)^{\frac{1}{s(p-q)-1}}$ temos a desigualdade.
Portanto, em geral, vale a desigualdade (3.7).
Assim, pela escolha de s em $\left(\dfrac{1}{p-q}, \dfrac{1}{1-(q+r)}\right)$ e a validez de (3.7) para $w \in [\underline{u}, \overline{u}]$, temos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varphi e^q \left((1 + b(x)\lambda^{s(p-q)-1} e(x)^{p-q}) \int_\Omega h(x) w^r(x)\right) dx \leq \\ &\lambda^{sr} \int_\Omega \varphi e^q \left((1 + b(x)\lambda^{s(p-q)-1} e(x)^{p-q}) \int_\Omega h(x) e^r(x)\right) dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Portanto, $\overline{u}$ satisfaz o iten (iii) da Definição 1, se para todo $\varphi \geq 0$ vale

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\nabla e \nabla \varphi}{\sqrt{1 + \lambda^{2s}|\nabla e|^2}} dx \quad \geq \quad & \lambda^{s(q+r-1)+1} \int_\Omega \varphi e^q \left(\int_\Omega h(x) e^r(x) dx\right) dx + \\ & \lambda^{s(q+r-1)+1} \int_\Omega \varphi e^q \left(b(x)\lambda^{s(p-q)-1} e(x)^{p-q} \int_\Omega h(x) e^r(x) dx\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Provaremos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda < \lambda_0$ a desigualdade (3.9) é verdadeira.

Suponhamos por contradição que exista $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_0 \geq 0$ e $\varphi_0 \neq 0$ tal que para a sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, onde $\lambda_n < \dfrac{1}{n}$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\nabla e \nabla \varphi}{\sqrt{1 + \lambda_n^{2s}|\nabla e|^2}} dx \quad < \quad & \lambda_n^{s(q+r-1)+1} \int_\Omega \varphi e^q \left(\int_\Omega h(x) w^r(x) dx\right) dx + \\ & \lambda_n^{s(q+r-1)+1} \int_\Omega \varphi e^q \left(b(x)\lambda_n^{s(p-q)-1} e^{p-q} \int_\Omega h(x) w^r(x) dx\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Vejamos a convergência na parte esquerda da desigualdade (3.10), quando $\lambda_n \to 0$.

$$\int_\Omega \frac{\nabla e \nabla \varphi_0}{\sqrt{1 + \lambda_n^{s}|\nabla e|^2}} dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla e \nabla \varphi_0 dx = \int_\Omega \varphi_0 dx > 0, \;\; \text{quando } n \to +\infty.$$

Por outro lado a convergência na parte direita da desigualdade (3.10), quando $\lambda_n \to 0$, será

$$\lambda_n^{s(q+r-1)+1} \int_\Omega \varphi_0 e(x)^q (1 + b(x)\lambda_n^{s(p-q)-1} e^{p-q}) \int_\Omega h(x)e^r(x)dx)dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

isso contradiz (3.10) e prova que $\overline{u} = \lambda^s e$ satisfaz o item (iii) da Definição 1 para $\lambda < \lambda_0$ para algum $\lambda_0 > 0$. Dessa forma, temos que $\overline{u} = \lambda^s e$ é uma candidata a supersolução.

Segunda Etapa: Vamos verificar que $\underline{u}$ satisfaz o item (ii) da Definição 1.

Primeiro, escolhamos um λ fixo menor que λ_0 e tomemos ε suficientemente pequeno tal que satisfaz

$$\varepsilon^2 |\nabla \varphi_1|^2 \leq 1. \tag{3.11}$$

Pela Definição 1, dada para a subsolução, temos

$$-\text{div}(a(|\nabla \underline{u}|^2)\nabla \overline{u}) \leq f(x, \underline{u}, B(w)) \text{ em } \Omega, \text{ para todo } \underline{u} \leq w \leq \overline{u}.$$

Para o caso onde (3.11) é válida, temos que (PA1) será

$$-\text{div}\left(\frac{\nabla \underline{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \underline{u}|^2}}\right) \leq f(x, \underline{u}, B(w)) \text{ em } \Omega, \text{ para todo } \underline{u} \leq w \leq \overline{u}.$$

A desigualdade no sentido fraco será

$$\int_\Omega \frac{\nabla(\underline{u})\nabla\varphi}{\sqrt{1 + |\nabla \underline{u}|^2}} dx \leq \int_\Omega \varphi \left((\lambda \underline{u}^q + b(x)\underline{u}^p) \int_\Omega h(x)w^r(x)dx \right) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi \geq 0.$$

Sabemos que o candidato a subsolução é $\underline{u} = \varepsilon \varphi_1$. Substituindo na desigualdade acima, temos o seguinte

$$\int_\Omega \frac{\nabla(\varepsilon\varphi_1)\nabla\varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2|\nabla \varphi_1|^2}} dx \quad \leq \quad \int_\Omega \varphi \left((\lambda(\varepsilon\varphi_1)^q + b(x)(\varepsilon\varphi_1)^p) \int_\Omega h(x)w^r(x)dx \right) dx,$$

ou seja,

$$\varepsilon \int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1\nabla\varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2|\nabla \varphi_1|^2}} dx \quad \leq \quad \varepsilon^q \int_\Omega \varphi\varphi_1^q \left((\lambda + b(x)(\varepsilon\varphi_1)^{p-q}) \int_\Omega h(x)w^r(x)dx \right) dx,$$

assim, $\underline{u}$ satisfaz o item (ii) da Definição 1, sempre que

$$\varepsilon^{1-q} \int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1\nabla\varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2|\nabla \varphi_1|^2}} dx \quad \leq \quad \int_\Omega \varphi\varphi_1^q \left((\lambda + b(x)(\varepsilon\varphi_1)^{p-q}) \int_\Omega h(x)w^r(x)dx \right) dx,$$

para todo $\varphi \geq 0$ e para todo $w \in [\underline{u}, \overline{u}]$.
Para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ fixado e ε suficientemente pequeno, é válida a desigualdade

$$\lambda + b(x)(\varepsilon\varphi_1)^{p-q} \geq 0\,, \quad \text{para } x \in \Omega. \tag{3.12}$$

De fato,

(r_1) Dado que $b \in C(\overline{\Omega})$ então b atinge mínimo e máximo que denotaremos por

$$b_m = \min_{x\in\overline{\Omega}} b(x) \leq b(x) \leq \max_{x\in\overline{\Omega}} b(x) = b_M.$$

(r_2) Como φ_1 é autofunção do operador Laplaciano em Ω correspondente ao primeiro autovalor λ_1, onde $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$, segue pelo Teorema 39, que $\varphi_1 > 0$ em Ω.

Com a validade de (r_1) e (r_2), analisemos a desigualdade (3.12) nos seguintes casos:
Caso I. Se $b(x) \geq 0$, para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ fixado e ε pequeno e positivo, temos o procurado.
Caso II. Se $b(x) < 0$, para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ fixado e $\varepsilon(\overline{\Omega}, \lambda, \varphi_1, p, q) > \dfrac{1}{\varphi_1}\left(-\dfrac{\lambda}{b_m}\right)^{\frac{1}{s(p-q)}}$ temos que (3.12) é satisfeita.
Logo, é válida a desigualdade (3.12).
Assim, pela escolha de s e a validade de (3.12), temos que para $w \in [\underline{u}, \overline{u}]$,

$$\varepsilon^r \int_\Omega \varphi\varphi_1^q \left((\lambda + b(x)(\varepsilon\varphi_1)^{p-q}) \int_\Omega h(x)\varphi_1^r(x)dx\right) dx \leq$$
$$\int_\Omega \varphi\varphi_1^q \left((\lambda + b(x)(\varepsilon\varphi_1)^{p-q}) \int_\Omega h(x)w^r(x)dx\right) dx.$$

Consequentemente, $\underline{u}$ satisfaz o item (ii) da Definição 1, se para todo $\varphi \geq 0$ vale

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1-(q+r)} \int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1\nabla\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla\varphi_1|^2}}dx \;\; \leq \;\; & \int_\Omega \varphi\varphi_1^q \left(\lambda \int_\Omega h(x)\varphi_1^r(x)dx\right) dx + \\ & \int_\Omega \varphi\varphi_1^q \left(b(x)(\varepsilon\varphi_1)^{p-q} \int_\Omega h(x)\varphi_1^r(x)dx\right) dx. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Como $q + r < 1 < p + r$ por hipótese, segue que $1 - (q + r) > 0$. Fixando agora λ_0 tal que $\lambda \in (0, \lambda_0)$, vamos supor por contradição que existe $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_0 \geq 0$ e $\varphi_0 \neq 0$ tal que para a sequência $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, onde $\varepsilon_n < \dfrac{1}{n}$, satisfaz a desigualdade

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^{1-(q+r)} \int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1\nabla\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon_n^2|\nabla\varphi_1|^2}}dx \;\; > \;\; & \int_\Omega \varphi\varphi_1^q \left(\lambda \int_\Omega h(x)\varphi_1^r(x)dx\right) dx + \\ & \int_\Omega \varphi\varphi_1^q \left(b(x)(\varepsilon_n\varphi_1)^{p-q} \int_\Omega h(x)\varphi_1^r(x)dx\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

A convergência na parte esquerda da desigualdade (3.14), quando $\varepsilon_n \to 0$, será

$$\varepsilon_n^{1-(q+r)} \int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1 \nabla\varphi_0}{\sqrt{1+\varepsilon_n^2|\nabla\varphi_1|^2}} dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Por outro lado, a convergência na parte direita da desigualdade (3.14), quando $\varepsilon_n \to 0$, será

$$\int_\Omega \varphi_0\varphi_1^q \left((\lambda + b(x)(\varepsilon_n\varphi_1)^{p-q}) \int_\Omega h(x)\varphi_1^r(x)dx \right) dx \longrightarrow \lambda \int_\Omega \varphi_0\varphi_1^q \left(\int_\Omega h(x)\varphi_1^r(x)dx \right) dx > 0.$$

Isso contradiz (3.14) e prova que $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ satisfaz o item (ii) da Definição 1 para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ fixado. Dessa forma, temos que $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ é uma candidata a subsolução.

Da primeira e segunda etapa acima se obtém $\underline{u} \leq \overline{u}$, um par de candidatos a sub e supersolução.
Veremos essa ordenação com mais detalhes na terceira etapa.

Terceira Etapa: Ordenação de $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Dada $\lambda \in (0, \lambda_0)$, diminuindo $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$, se necessário, de modo que $\lambda_1\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty \leq \lambda^s$, temos $-\Delta(\varepsilon\varphi_1) \leq -\Delta(\lambda^s e)$ em Ω, por (3.3), temos que $\varepsilon\varphi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$ e por (3.4), temos que $\lambda^s e = 0$ sobre $\partial\Omega$, logo

$$\begin{cases} -\Delta(\varepsilon\varphi_1) \leq -\Delta(\lambda^s e) & \text{em } \Omega, \\ \varepsilon\varphi_1 \leq \lambda^s e & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.15}$$

do Teorema 40, temos

$$\underline{u} = \varepsilon\varphi_1 \leq \lambda^s e = \overline{u} \;\; q.t.p. \text{ em } \Omega. \tag{3.16}$$

Em vista dos argumentos apresentados nas três etapas acima, temos que $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ é subsolução e $\overline{u} = \lambda^s e$ é supersolução.
Pelo Teorema 22, existe uma solução positiva u_λ para (P1) tal que,

$$0 \leq \underline{u} \leq u_\lambda \leq \overline{u} \text{ para } \lambda \in (0, \lambda_0). \tag{3.17}$$

Pelo Lema 24,

$$\|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq O(||f(x, u_\lambda, B(u_\lambda))||_\infty). \tag{3.18}$$

Da desigualdade (3.17), obtemos

$$0 \leq ||\varepsilon\varphi_1||_\infty \leq ||u_\lambda||_\infty \leq ||\lambda^s e||_\infty = \lambda^s||e||_\infty.$$

Tomando limite quando $\lambda \to 0$ segue que

$$\lim_{\lambda \to 0} ||u_\lambda||_\infty = 0.$$

Por (3.1), temos

$$f(x, u_\lambda, B(u_\lambda)) = (\lambda u_\lambda^q + b(x)u_\lambda^p) \int_\Omega h(x)u_\lambda^r(x)dx,$$

assim fazendo uso da desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |f(x, u_\lambda, B(u_\lambda))| &= \left|(\lambda u_\lambda^q + b(x)u_\lambda^p) \int_\Omega h(x)u_\lambda^r(x)dx\right| \\ &= |(\lambda u_\lambda^q + b(x)u_\lambda^p)| \left|\int_\Omega h(x)u_\lambda^r(x)dx\right| \\ &\leq (\lambda |u_\lambda^q| + |b(x)||u_\lambda^p|) \left|\int_\Omega h(x)u_\lambda^r(x)dx\right|. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Tomando supremo sobre Ω na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(x, u_\lambda, B(u_\lambda))\|_\infty &\leq \left(\lambda \|u_\lambda^q\| + \|b||_\infty ||u_\lambda^p\|_\infty\right) \int_\Omega ||h||_\infty ||u_\lambda^r||_\infty dx \\ &\leq \left(\lambda \|u_\lambda^q\| + \|b||_\infty ||u_\lambda^p\|_\infty\right) \|h||_\infty ||u_\lambda^r\|_\infty \operatorname{med}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Como o domínio Ω é limitado, temos que $\operatorname{med}(\Omega)$ é finita e tomando limite em (3.20), quando $\lambda \to 0$

$$\lim_{\lambda \to 0} \|f(x, u_\lambda, B(u_\lambda))\|_\infty = 0. \tag{3.21}$$

Logo tomando o limite em (3.18), quando $\lambda \to 0$ e fazendo uso de (3.21) obtemos

$$\lim_{\lambda \to 0} \|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \lim_{\lambda \to 0} \|f(x, u_\lambda, B(u_\lambda))\|_\infty = 0.$$

desta forma, concluímos

$$\lim_{\lambda \to 0} \|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = 0.$$

■

3.2 Segunda aplicação

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = f(x,u,B(u)) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P2}$$

onde a função f é dada da seguinte forma:

$$f(x,u,B(u)) = \left(\lambda u^q + b(x)u^p + c(x)u^m \int_\Omega h(x)u^r(x)dx\right). \tag{3.22}$$

Supondo ainda que as funções $h, b, c \in C(\overline{\Omega})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $0 < m, p, q, r$. Consideremos ainda que h é não negativa e não trivial. Dada uma função $g \in C(\overline{\Omega})$, denotemos

$$g_m = \min_{x\in\overline{\Omega}} g(x) \quad e \quad g_M = \max_{x\in\overline{\Omega}} g(x).$$

Proposição 9 *Suponhamos que $0 < q < 1 < min\{p, m+r\}$. Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema* (P2) *possui pelo menos uma solução positiva u_λ para todos os $\lambda \in (0;\lambda_0)$. Além disso, temos que*

$$\lim_{\lambda\to 0} \|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = 0.$$

Demonstração. Será dividida em três etapas.
Inicialmente consideremos o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = f(x,u,B(u)) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{PA2}$$

onde, a é dada da seguinte forma:

$$a(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+s}} & \text{s} \in [0,1), \\ b(s-2)^2 + c & \text{s} \in [1,2), \\ c & \text{s} \in [2,+\infty), \end{cases}$$

com

$$b = \frac{1}{8\sqrt{2}} \quad e \quad c = \frac{7}{8\sqrt{2}}.$$

Observação 29 *Notemos os seguintes fatos.*

(i) A função a satisfaz as hipóteses (a_1) - (a_2). Vamos denotar $\tilde{a}$ a primeira regra de correspondência da função a por,

$$\tilde{a}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}}, \text{ para } s \in [0,1)$$

A função $\tilde{a}$ satisfaz as hipóteses $(a_1) - (a_2)$, a prova está na Observação 28.

(ii) Denotemos φ_1 a autofunção do operador Laplaciano em Ω correspondente ao primeiro autovalor λ_1, onde $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$, então, pelo Teorema 39, segue que $\varphi_1 > 0$ em Ω e satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \text{ em } \Omega, \\ \varphi_1 = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.23}$$

(iii) Além disso, também denotamos por e a única solução positiva do problema linear elíptico

$$\begin{cases} -\Delta e = 1 \quad \text{em } \Omega, \\ e = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.24}$$

A prova dessa afirmação está na Observação 28.

Temos como candidatos a sub e supersolução, respectivamente, as seguintes funções,

$$\underline{u} = \varepsilon\varphi_1 \;\; e \;\; \overline{u} = \lambda^s e,$$

com $\varepsilon, s, \lambda > 0$ que serão escolhidos de maneira mais apropriada, para que os candidatos mencionados sejam realmente sub e supersolução da equação (PA2).

Primeira Etapa: Vamos verificar que $\overline{u}$ satisfaz o item (iii) da Definição 1.

Começamos com a função f dada em (3.22) e escolhamos s em $\left(\frac{1}{m+r-q}, \frac{1}{p-q}\right)$, ao longo de nossa prova consideraremos λ suficientemente pequeno tal que satisfaz a seguinte desigualdade

$$\lambda^{2s}|\nabla e|^2 \leq 1. \tag{3.25}$$

Pela Definição 1, dada para supersolução, temos

$$\text{-div}(a(|\nabla\overline{u}|^2)\nabla\overline{u}) \geq f(x, \overline{u}, B(w)) \text{ em } \Omega, \text{ para todo } \underline{u} \leq w \leq \overline{u}.$$

Para o caso onde (3.25) é valida, temos que (PA2) é

$$\text{-div}\left(\frac{\nabla\overline{u}}{\sqrt{1+|\nabla\overline{u}|^2}}\right) \geq f(x,\overline{u},B(w)) \text{ em } \Omega, \text{ para todo } \underline{u} \leq w \leq \overline{u}.$$

A desigualdade acima no sentido fraco será

$$\int_\Omega \frac{\nabla(\overline{u})\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla\overline{u}|^2}}dx \geq dx \int_\Omega \varphi\left(\lambda\overline{u}^q + b(x)\overline{u}^p + c(x)\overline{u}^m \int_\Omega h(x)w^r(x)\right)dx \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi \geq 0.$$

Onde sabemos que o candidato à supersolução é $\overline{u} = \lambda^s e$. Substituindo na desigualdade acima, temos o seguinte

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\nabla(\lambda^s e)\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla\lambda^s e|^2}}dx \quad &\geq \quad \int_\Omega \varphi\left(\lambda(\lambda^s e)^q + b(x)(\lambda^s e)^p\right)dx + \\ &\int_\Omega \varphi\left(c(x)(\lambda^s e)^m \int_\Omega h(x)w^r(x)dx\right)dx, \qquad (3.26)\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\lambda^s \int_\Omega \frac{\nabla e\nabla\varphi}{\sqrt{1+\lambda^{2s}|\nabla e|^2}}dx \quad &\geq \quad \lambda^{sq+1}\int_\Omega \varphi e^q\left(1+b(x)\lambda^{s(p-q)-1}e^{p-q}\right)dx + \\ &\lambda^{sq+1}\int_\Omega \varphi e^q\left(c(x)\lambda^{s(m-q)-1}e^{m-q}\int_\Omega h(x)w^r(x)dx\right) (3.27)\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{u}$ satisfaz o item *(iii)* da Definição 1, se para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ e $w \in [\underline{u},\overline{u}]$, tivermos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\nabla e\nabla\varphi}{\sqrt{1+\lambda^{2s}|\nabla e|^2}}dx+ \quad &\geq \quad \lambda^{s(q-1)+1}\int_\Omega \varphi e^q\left(1+b(x)\lambda^{s(p-q)-1}e^{p-q}\right)dx + \\ &\lambda^{s(q-1)+1}\int_\Omega \varphi e^q\left(c\lambda^{s(m-q)-1}e^{m-q}\int_\Omega h(x)w^r(x)dx\right) (3.28)\end{aligned}$$

Pela escolha de s em $\left(\frac{1}{m+r-q},\frac{1}{p-q}\right)$, temos que, $1 < (m+r-q)s$ e $s(p-q) < 1$. Observe que podemos tomar λ é suficientemente pequeno, tal que

$$1+b(x)\lambda^{(p-q)s-1}e^{p-q}+c(x)\lambda^{(m-q)s-1}e^{m-q}\int_\Omega h(x)w^r(x)dx \geq 0\,, \text{ para todo } x \in \Omega. \quad (3.29)$$

De fato, como Ω é um domínio limitado, temos que $\overline{\Omega}$ é um conjunto compacto.
Observe que valem:

(y_1) Dado que $b, c \in C(\overline{\Omega})$, então b, c atingem mínimo e máximo que denotaremos por

$$b_m = \min_{x\in\overline{\Omega}} b(x) \leq b(x) \leq \max_{x\in\overline{\Omega}} b(x) = b_M.$$

e

$$c_m = \min_{x\in\overline{\Omega}} c(x) \leq c(x) \leq \max_{x\in\overline{\Omega}} c(x) = c_M.$$

(y_2) Como e é solução positiva do problema linear (3.4), temos que e é contínua pelo Teorema 36, assim temos

$$0 < e_m = \min_{x\in\overline{\Omega}} e(x) \leq e(x) \leq \max_{x\in\overline{\Omega}} e(x) = e_M.$$

Com isso, analisemos a desigualdade (3.29) por casos:.
Caso I. Se $b(x), c(x) \geq 0$ ou $b(x) < 0$ e $c(x) < 0$, para λ pequeno e positivo, temos o procurado.
Caso II. Se $b(x) < 0$ e $c(x) > 0$ ou $b(x) > 0$ e $c(x) < 0$, para λ dependendo de $\overline{\Omega}, b, s, p, q$ e m obtemos a desigualdade.
Então, em geral, temos a desigualdade (3.29).
Assim, da escolha de s em $\left(\dfrac{1}{m+r-q}, \dfrac{1}{p-q}\right)$ e da vaálidade de (3.29) e $\forall w \in [\underline{u}, \overline{u}]$, temos

$$\int_\Omega \varphi e^q \left(1 + b_M \lambda^{s(p-q)-1} e^{p-q} + c_M \lambda^{s(m-q)-1} e^{m-q} \int_\Omega h(x) w^r(x)\right) dx \leq$$
$$\int_\Omega \varphi e^q \left(1 + b_M \lambda^{s(p-q)-1} e^{p-q} + c_M \lambda^{s(m+r-q)-1} e^{m-q} \int_\Omega h(x) e^r(x) dx\right) dx.$$

Portanto, $\overline{u}$ satisfaz o iten (iii) da Definição 1, se para todo $\varphi \geq 0$ vale

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\nabla e \nabla \varphi}{\sqrt{1+\lambda^{2s}|\nabla e|^2}} dx \quad &\geq \quad \lambda^{s(q-1)+1} \int_\Omega \varphi e^q \left(1 + b_M \lambda^{s(p-q)-1} e^{p-q}\right) dx + \\ &\lambda^{s(q-1)+1} \int_\Omega \varphi e^q \left(c_M \lambda^{s(m+r-q)-1} e^{m-q} \int_\Omega h(x) e^r(x) dx\right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Provaremos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda < \lambda_0$ a desigualdade (3.30) é verdadeira.

Suponhamos, por contradição, que exista $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_0 \geq 0$ e $\varphi_0 \neq 0$ tal que para a sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, onde $\lambda_n < \dfrac{1}{n}$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\nabla e \nabla \varphi_0}{\sqrt{1+\lambda^{2s}|\nabla e|^2}} dx \quad &< \quad \lambda^{s(q-1)+1} \int_\Omega \varphi_0 e^q \left(1 + b_M \lambda^{s(p-q)-1} e^{p-q}\right) dx + \\ &\lambda^{s(q-1)+1} \int_\Omega \varphi_0 e^q \left(c_M \lambda^{s(m+r-q)-1} e^{m-q} \int_\Omega h(x) e^r(x) dx\right) dx,\end{aligned}$$

assim

$$\int_\Omega \frac{\nabla e \nabla \varphi_0}{\sqrt{1+\lambda_n^{2s}|\nabla e|^2}}dx \;<\; \lambda_n^{s(q-1)+1}\int_\Omega \varphi_0 e^q\left(1+b_M\lambda_n^{s(p-q)-1}e^{p-q}\right)dx + \lambda_n^{s(q-1)+1}\int_\Omega \varphi_0 e^q\left(c_M\lambda_n^{s(m+r-q)-1}e^{m-q}\int_\Omega h(x)e^r(x)\right) \tag{3.31}$$

Vejamos a convergência na parte esquerda da desigualdade (3.31), quando $\lambda_n \to 0$,

$$\int_\Omega \frac{\nabla e \nabla \varphi_0}{\sqrt{1+\lambda_n^{2s}|\nabla e|^2}}dx \to \int_\Omega \varphi_0 dx, \;\; n \to +\infty.$$

Por outro lado, a convergência na parte direita da desigualdade (3.31), quando $\lambda_n \to 0$,

$$\lambda_n^{s(q-1)+1}\int_\Omega \varphi_0 e^q\left(1+b_M\lambda_n^{s(p-q)-1}e^{p-q}+c_M\lambda_n^{s(m+r-q)-1}e^{m-q}\int_\Omega h(x)e^r(x)dx\right) \to 0, \; n \to +\infty.$$

Isso contradiz (3.31), e prova que $\overline{u}=\lambda^s e$ satisfaz o item (iii) da Definição 1 para algum $\lambda_0>0$. Dessa forma, temos que $\overline{u}=\lambda^s e$ é uma candidata a supersolução.

Segunda Etapa: Vamos verificar que $\underline{u}$ satisfaz o item (ii) da Definição 1.

Agora, escolhendo um λ fixo, tal que$\lambda < \lambda_0$ e tomando ε suficientemente pequeno, tal que satisfaz o seguinte,

$$\varepsilon^2|\nabla\varphi_1|^2 \le 1. \tag{3.32}$$

Pela Definição 1, dada para a subsolução, temos

$$-\mathrm{div}(a(|\nabla\underline{u}|^2)\nabla\underline{u}) \le f(x,\underline{u},B(w)) \text{ em } \Omega, \text{ para todo } \underline{u} \le w \le \overline{u}.$$

Para o caso onde (3.32) é válida, temos que (PA2) será

$$-\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\underline{u}}{\sqrt{1+|\nabla\underline{u}|^2}}\right) \le f(x,\underline{u},B(w)) \text{ em } \Omega, \text{ para todo } \underline{u} \le w \le \overline{u}.$$

A desigualdade no sentido fraco será

$$\int_\Omega \frac{\nabla(\underline{u})\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla\underline{u}|^2}}dx \;\le\; \int_\Omega \varphi\left(\lambda\underline{u}^q+b(x)\underline{u}^p+c(x)\underline{u}^m\int_\Omega h(x)w^r(x)dx\right)dx, \; \forall\varphi\ge 0 \tag{3.33}$$

Sabemos que o candidato à subsolução é $\underline{u} = \varphi_1\varepsilon$. Substituindo na desigualdade acima temos o seguinte

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\nabla(\varphi_1\varepsilon)\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla\varphi_1\varepsilon|^2}}dx \quad \leq \quad & \int_\Omega \varphi\left(\lambda(\varphi_1\varepsilon)^q + b(x)(\varphi_1\varepsilon)^p\right)dx + \\ & \int_\Omega \varphi\left(c(x)(\varphi_1\varepsilon)^m \int_\Omega h(x)w^r(x)dx\right)dx, \end{aligned} \tag{3.34}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1\nabla\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla\varphi_1|^2}}dx \quad \leq \quad & \varepsilon^q\int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(\lambda + b(x)(\varepsilon\varphi_1)^{p-q}\right)dx + \\ & \varepsilon^q\int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(c(x)(\varphi_1\varepsilon)^{m-q} \int_\Omega h(x)w^r(x)dx\right)dx. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Assim, $\underline{u}$ satisfaz o item (ii) da Definição 1, sempre que

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1-q}\int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1\nabla\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla\varphi_1|^2}}dx \quad \leq \quad & \int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(\lambda + b(x)(\varepsilon\varphi_1)^{p-q}\right)dx + \\ & \int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(c(x)(\varphi_1\varepsilon)^{m-q} \int_\Omega h(x)w^r(x)dx\right)dx, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \geq 0$ e para todo $w \in [\underline{u}, \overline{u}]$.

Para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ fixado, ε suficientemente pequeno e para todo $w \in [\underline{u}, \overline{u}]$, é válida a desigualdade

$$\lambda + b(x)(\varepsilon\varphi_1)^{p-q} + c(x)(\varepsilon\varphi_1)^{m-q}\int_\Omega h(x)w^r(x)dx \geq 0, \text{ para } x \in \Omega.$$

Então, obtemos isso para todos os $w \in [\underline{u}, \overline{u}]$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(\lambda + b_m(\varepsilon\varphi_1)^{p-q} + c_m(\varepsilon\varphi_1)^{m-q}\int_\Omega h(x)w^r(x)dx\right)dx \leq \\ &\int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(\lambda + b_m(\varepsilon\varphi_1)^{p-q} + c_m(\varepsilon\varphi_1)^{m-q}\lambda^{sr}\int_\Omega h(x)e^r(x)dx\right)dx.\end{aligned}$$

Consequentemente, $\underline{u}$ satisfaz o item (ii) da Definição 1, se para todo $\varphi \geq 0$ vale

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1-q}\int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1\nabla\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla\varphi_1|^2}}dx \quad \leq \quad & \int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(\lambda + b_m(\varepsilon\varphi_1)^{p-q}\right)dx + \\ & \int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(c_m(\varepsilon\varphi_1)^{m-q}\lambda^{sr} \int_\Omega h(x)e^r(x)dx\right)dx. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Vamos analisar os seguintes casos, para que a desigualdade (3.36) seja válida.

Caso I: Para $m > q$ e tomando ε suficientemente pequeno, $\underline{u}$ satisfaz o item (ii) da Definição 1.

De fato, Suponhamos, por contradição, que exista $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_0 \geq 0$ e $\varphi_0 \neq 0$ tal que para a sequência $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, onde $\varepsilon_n < \dfrac{1}{n}$, temos

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^{1-q}\int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1\nabla\varphi_0}{\sqrt{1+\varepsilon_n^2|\nabla\varphi_1|^2}}dx \quad > \quad & \int_\Omega \varphi_0\varphi_1^q\left(\lambda + b_m(\varepsilon_n\varphi_1)^{p-q}\right)dx + \\ & \int_\Omega \varphi_0\varphi_1^q\left(c_m(\varepsilon_n\varphi_1)^{m-q}\lambda^{sr}\int_\Omega h(x)e^r(x)dx\right) \quad (3.37)\end{aligned}$$

Vejamos a convergência na parte esquerda da desigualdade (3.37), quando $\varepsilon_n \to 0$.

$$\varepsilon_n^{1-q}\int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1.\nabla\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon_n^2|\nabla\varphi_1|^2}}dx \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Por outro lado, a convergência na parte direita da desigualdade (3.37), quando $\varepsilon_n \to 0$.

$$\int_\Omega \varphi_0\varphi_1^q\left(\lambda + b_m(\varepsilon_n\varphi_1)^{p-q} + c_m(\varepsilon_n\varphi_1)^{m-q}\lambda^{sr}\int_\Omega h(x)e^r(x)\right)dx \to \lambda\int_\Omega \varphi_1^q\varphi_0 dx > 0.$$

O qual é uma contradição com a desigualdade (3.37) para o Caso I.

Dessa forma $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ é uma candidata a subsolução para o problema (PA2).

Casso II: Para $m = q$, tomamos

$$s > \frac{1}{r}.$$

Por (3.36), para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ e $\varphi \geq 0$ vale

$$\varepsilon^{1-q}\int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1\nabla\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla\varphi_1|^2}}dx \quad \leq \quad \int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(\lambda + b_m(\varepsilon\varphi_1)^{p-q} + c_m\lambda^{sr}\int_\Omega h(x)e^r(x)dx\right) \quad (3.38)$$

Então, para λ suficientemente pequeno e $s.r > 1$, temos

$$\lambda + c_m\lambda^{sr}\int_\Omega h(x)e^r(x)dx > 0, \text{ em } \Omega,$$

logo, tomando ε pequeno, ficamos com

$$\int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(\lambda + b_L(\varepsilon\varphi_1)^{p-q} + c_L\lambda^{sr}\int_\Omega h(x)e^r(x)dx\right)dx > 0.$$

Provaremos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda < \lambda_0$ a desigualdade (3.40) é verdadeira.

Suponhamos, por contradição, que exista $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_0 \geq 0$ e $\varphi_0 \neq 0$ tal que para a sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, onde $\varepsilon_n < \dfrac{1}{n}$, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{1-q}\int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1\nabla\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon_n^2|\nabla\varphi_1|^2}}dx \quad &> \quad \int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(\lambda + b_m(\varepsilon_n\varphi_1)^{p-q}\right)dx \\ & \quad\quad \int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(c_m\lambda^{sr}\int_\Omega h(x)e^r(x)dx\right)dx \end{aligned} \tag{3.39}$$

Vejamos a convergência na parte esquerda da desigualdade (3.39), quando $\varepsilon_n \to 0$.

$$\varepsilon_n^{1-q}\int_\Omega \frac{\nabla\varphi_1.\nabla\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon_n^2|\nabla\varphi_1|^2}}dx \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Por outro lado, a convergência na parte direita da desigualdade (3.39), quando $\varepsilon_n \to 0$.

$$\int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(\lambda + b_m(\varepsilon_n\varphi_1)^{p-q} + c_m\lambda^{sr}\int_\Omega h(x)e^r(x)\right) \to \int_\Omega \varphi\varphi_1^q\left(\lambda + c_L\lambda^{sr}\int_\Omega h(x)e^r(x)dx\right) > 0.$$

Isso contradiz (3.39) e se prova que $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ satisfaz o item (ii) da Definição 1 para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ fixado. Logo $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ é candidata a subsolução.
Dos casos I e II da segunda etapa, temos que $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ é uma candidata a subsolução para o problema (PA2).

Da primeira e segunda etapa acima se obtém $\underline{u} \le \overline{u}$, um par de candidatos a sub e supersolução. Veremos essa ordenação com mais detalhes na terceira etapa.

Terceira Etapa: Ordenação de $\underline{u} \le \overline{u}$.

Dada $\lambda \in (0, \lambda_0)$, diminuindo $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$, se necessário, de modo que $\lambda_1\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty \le \lambda^s$, temos $-\Delta(\varepsilon\varphi_1) \le -\Delta(\lambda^s e)$ em Ω, por (3.23), temos que $\varepsilon\varphi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$ e por (3.24), temos que $\lambda^s e = 0$ sobre $\partial\Omega$, logo

$$\begin{cases} -\Delta(\varepsilon\varphi_1) \le -\Delta(\lambda^s e) & \text{em } \Omega, \\ \varepsilon\varphi_1 \le \lambda^s e & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.40}$$

do Teorema 40, temos

$$\underline{u} = \varepsilon\varphi_1 \le \lambda^s e = \overline{u} \;\; q.t.p. \text{ em } \Omega. \tag{3.41}$$

Em vista dos argumentos apresentados nas três etapas acima, temos que $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ é subsolução e $\overline{u} = \lambda^s e$ é supersolução.
Pelo Teorema 22, existe uma solução positiva u_λ para (P2) tal que,

$$0 \le \underline{u} \le u_\lambda \le \overline{u} \text{ para } \lambda \in (0, \lambda_0). \tag{3.42}$$

Pelo Lema 24,

$$\|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq O(||f(x,u_\lambda,B(u_\lambda))||_\infty). \tag{3.43}$$

Da desigualdade (3.42) obtemos

$$0 \leq ||\varepsilon\varphi_1||_\infty \leq ||u_\lambda||_\infty \leq ||\lambda^s e||_\infty = \lambda^s||e||_\infty.$$

Tomando o limite quando $\lambda \to 0$ segue que

$$\lim_{\lambda\to 0} ||u_\lambda||_\infty = 0.$$

Pela equação (3.22), temos

$$f(x,u_\lambda,B(u_\lambda)) = \left(\lambda u_\lambda^q + b(x)u_\lambda^p + c(x)u_\lambda^m \int_\Omega h(x)u_\lambda^r(x)dx\right),$$

logo,

$$\begin{aligned} |f(x,u_\lambda,B(u_\lambda))| &= \left|\lambda u_\lambda^q + b(x)u_\lambda^p + c(x)u_\lambda^m \int_\Omega h(x)u_\lambda^r(x)dx\right| \\ &\leq \left|\lambda u_\lambda^q + b(x)u_\lambda^p\right| + \left|c(x)u_\lambda^m \int_\Omega h(x)u_\lambda^r(x)dx\right| \\ &\leq |\lambda|\left|u_\lambda^q\right| + \left|b(x)||u_\lambda^p\right| + |c(x)||u_\lambda^m| \left|\int_\Omega h(x)u_\lambda^r(x)dx\right|. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Tomando o supremo sobre Ω na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(x,u_\lambda,B(u_\lambda))\|_\infty &\leq \lambda\left\|u_\lambda^q\right\| + \left\|b||_\infty||u_\lambda^p\right\|_\infty + \|c\|_\infty \|u_\lambda^m\|_\infty \int_\Omega \|h||_\infty||u_\lambda^r\|_\infty\, dx \\ &\leq \lambda\left\|u_\lambda^q\right\| + \left\|b||_\infty||u_\lambda^p\right\|_\infty + \|c\|_\infty \|u_\lambda^m\|_\infty \|h||_\infty||u_\lambda^r\|_\infty \operatorname{med}(\Omega) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Como o domínio Ω é limitado, temos que $\operatorname{med}(\Omega)$ é finita e tomando o limite em (3.45), quando $\lambda \to 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} \|f(x,u_\lambda,B(u_\lambda))\|_\infty = 0. \tag{3.46}$$

Logo, passando o limite em (3.45), quando $\lambda \to 0$ e fazendo uso de (3.43) obtemos

$$\lim_{\lambda\to 0} \|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \lim_{\lambda\to 0} \|f(x,u_\lambda,B(u_\lambda))\|_\infty = 0,$$

desta forma, concluímos

$$\lim_{\lambda\to 0} \|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = 0.$$

$\blacksquare$

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Resultados Importantes

Teorema 30 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$*. Suponhamos que:*

(a) $f_n \to f$ *q.t.p. em* Ω*;*

(b) *Existe* $g \in L^1(\Omega)$*, tal que* $|f_n| \leq g \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ *q.t.p. em* Ω*.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n dx = \int_\Omega f dx.$$

Demonstração. Ver a prova em [15].

Teorema 31 *(Teorema de Vainberg) Sejam* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$*, tais que*

$$f_n \to f \;\; em \;\; L^p(\Omega).$$

Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* $\Omega \;\; \forall k \in \mathbb{N}$ *, onde* $g \in L^p(\Omega)$*.*

Demonstração. Ver a prova em [15].

Teorema 32 *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$fg \in L^1(\Omega) \;\; e \;\; |fg|_{L^1(\Omega)} \leq |f|_{L^p(\Omega)}|g|_{L^q(\Omega)}$$

Demonstração. Ver a prova em [15].

Teorema 33 *(Desigualdade de Young) Se p e q são números reais positivos tais que $1/p + 1/q = 1$, então, para todo par de números reais a e b não negativos vale a desigualdade:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver a prova em [1].

Lema 34 *Se $1 \leq p$ e $a, b \geq 0$, então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Demonstração. Ver a prova em [1].

Teorema 35 *(de Agmon-Douglis-Nirenberg) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $f \in L^r(\Omega)$ com $r > 0$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$é solução fraca do problema linear*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \;\; em \; \Omega, \\ u = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe $C > 0$, independente de u tal que

$$||u||_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C|f|_{L^r(\Omega)}.$$

Além disso, se $f \in W^{k,r}(\Omega)$ então $u \in W^{2+k,r}(\Omega)$.

Demonstração. Ver a prova em [2].

Teorema 36 *(Schauder) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Então existe $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ solução do problema linear*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \;\; em \; \Omega, \\ u = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e existe $C > 0$, independente de u tal que

$$||u||_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C|f|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Além disso, se $f \in C^{k,r}(\overline{\Omega})$ então $u \in C^{2+k,r}(\overline{\Omega})$.

Teorema 37 *Se $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ é uma autofunção associada a um autovalor λ do operador $(-\Delta u, H_0^1(\Omega))$, então $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Notemos que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi \text{ em } \Omega, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim $\varphi \in C^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Usando o Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg k-vezes, obtemos:

$$\varphi \in W^{2,2}(\Omega) \Rightarrow \varphi \in W^{4,2}(\Omega) \Rightarrow \varphi \in W^{6,2}(\Omega) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \varphi \in W^{n,2}(\Omega).$$

Para k suficientemente grande, temos que $W^{n,2}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Portanto, $\varphi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Usando o Teorema de Schauder k-vezes, obtemos:

$$\varphi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \Rightarrow \varphi \in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega}) \Rightarrow \varphi \in C^{5,\alpha}(\overline{\Omega}) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \varphi \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Como k é arbitrário, concluímos que $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Teorema 38 *(Princípio do Máximo Forte) Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$ e*

$$u \in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega}) \ \ com \ \ -\Delta u \geq 0 (-\Delta u \leq 0) \ \ em \ \ \Omega.$$

Suponha que exista $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x_0) = \inf_{x\in\Omega} u(x) \ \ (u(x_0) = \sup_{x\in\Omega} u(x)).$$

Então u é constante.

Demonstração. Ver a prova em [8].

Lema 39 *O número real λ_1 é o único autovalor cujas autofunções tem sinal definido. Isto é, apenas as autofunções associadas a λ_1 são estritamente positivas ou estritamente negativas.*

Demonstração. Ver a prova em [16].

Teorema 40 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e seja $u, v \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta u \leq \Delta u \ \ em \ \Omega, \\ u \leq v \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco. Então $u \leq v$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. Ver a prova em [8].

Definição 41 *Sejam X, Y espaços topológicos e considere duas funções contínuas $f, g : X \to Y$. Essas funções são ditas homotópicas se existir uma função contínua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que para cada $x \in X$ temos*

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x), \\ H(x, 1) = g(x), \end{cases}$$

quando isso acontece dizemos que H é uma homotopia entre f e g e denotaremos $H : f \simeq g$

4.2 Grau Topológico

Nesta seção faremos uma breve revisão da Teoria do Grau, pois foi usada na demostração do Teorema 36.

Sejam Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $S = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\}$, onde J_φ representa a matriz jacobiana de φ. Seja $y \in \mathbb{R}^N$ com $y \notin \varphi(\partial\Omega) \bigcup \varphi(S)$.
Se $x \in \varphi^{-1}(\{y\})$ temos que $J_\varphi(x) = det[\varphi'(x)] \neq 0$, então pelo Teorema da Função Inversa φ é um difeomorfismo de uma vizinhança U de x sobre uma vizinhança V de y, isto é, $\varphi : U \to \varphi(U) = V$ é um difeomorfismo. O conjunto $\varphi^{-1}(\{y\})$ é finito.

Definição 42 *Sejam $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $y \notin \varphi(\partial\Omega) \bigcup \varphi(S)$. Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação φ em relação a Ω no ponto y, como sendo o número inteiro*

$$deg(\varphi, \Omega, y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(\{y\})} sgn \;\; det[\varphi^{'}(x)] \;\; se \;\; \varphi^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 \quad caso \;\; contrário, \end{cases}$$

onde sgn é a função sinal que é definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 \quad , se \quad t > 0 \\ -1 \;\; , se \quad t < 0. \end{cases}$$

Exemplo 43 *Consideremos a aplicação $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, definido por $\varphi(x) = sen(x)$ com $\Omega = \left(0, \frac{5\pi}{2}\right)$ e $y = \frac{\pi}{4}$. Nosso objetivo é calcular o grau topológico de φ com relação a Ω no ponto y, ou seja $deg(\varphi, \Omega, y)$.*

Resolução, devemos primeiramente verificar se $y \notin \varphi(\partial\Omega)$ para que o $deg\left(\varphi, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right)$ esteja bem definido. Notemos que:
$\partial\Omega = \left\{0, \frac{5\pi}{2}\right\}$, $\varphi(S) = \left\{x \in \left(0, \frac{5\pi}{2}\right) \;\; cos(x) = 0\right\} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, $\varphi(\partial\Omega) = \{0, 1\}$, $\varphi(A) = \{-1, 1\}$, logo $\varphi(\partial\Omega) \bigcup \varphi(S) = \{-1, 0, 1\}$ com isso concluimos que $\frac{\pi}{4} \notin \{-1, 0, 1\}$.
Assim, $\varphi^{-1}\left\{\frac{\pi}{4}\right\} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ e por definição

$$deg\left(\varphi, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)} \operatorname{sgn} \det[\varphi^{'}(\xi_j)].$$

Logo, $deg\left(\varphi, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = sgn(\varphi^{'}(\xi_1)) + sgn(\varphi^{'}(\xi_2)) + sgn(\varphi^{'}(\xi_3)) = 1 + (-1) + 1 = 1.$
Portanto,

$$deg\left(\varphi, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Da definição do Grau Topológico, temos as seguintes propriedades:

(1) **Normalização.** Seja Id a aplicação identidade $Id : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, então,

$$deg(Id, \Omega, y) = \begin{cases} 1 \;\; , \text{se} \;\; y \in \Omega, \\ 0 \;\; , \text{se} \;\; y \neq \Omega. \end{cases}$$

(2) **Excisão.** Se $deg(\varphi, \Omega, y) \neq 0$, então existe pelo menos um $x \in \Omega$ tal que $\varphi(x) = y$.

(3) **Aditividade.** Se $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ são tais que $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset$ e $y \notin \varphi(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \bigcup \Omega_2))$, então

$$deg(\varphi, \Omega, y) = deg(\varphi, \Omega_1, y) + deg(\varphi, \Omega_2, y).$$

(4) **Continuidade.**
$deg(\varphi, \Omega, y) = deg(\phi, \Omega, y)$ sempre que $||\varphi - \phi||_{C^1}$ é suficiente pequeno.

(5) **Invariância por Homotopia.**
Se $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ é contínua e $y \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, então,

$$deg(H(\cdot, t), \Omega, y) = \text{constante}\,, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Observação A Definição 4.2 do Grau de Brouwer pode ser extendido para funções φ definidas em espaços de dimensão infinita que são da forma

$$\varphi = I - K,$$

onde K é um operador compacto, tal extensão é chamada Grau de Leray-Schauder e preserva as cinco propriedades acima.
O estudo mais detalhado sobre Grau de Leray-Schauder pode ser encontrado em [5].

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., and Fournier, J. J. F. *Sobolev spaces*, second ed., vol. 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] Agmon, S., Douglis, A., and Nirenberg, L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. i. *Communications on pure and applied mathematics 12*, 4 (1959), 623–727.

[3] Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E. *Fundamentos de análise funcional*. Textos universitários. SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[4] Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[5] Chang, K.-C. *Methods in nonlinear analysis*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[6] de Araujo, A. L. A., and Montenegro, M. The mean curvature equation with oscillating nonlinearity. *Adv. Nonlinear Stud. 15*, 1 (2015), 183–189.

[7] Figueiredo, G. M., and Suárez, A. Existence of positive solutions for prescribed mean curvature problems with nonlocal term via sub- supersolution method. *preprint.* (2020).

[8] Gilbarg, D., and Trudinger, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 224.

[9] Habets, P., and Omari, P. Positive solutions of an indefinite prescribed mean curvature problem on a general domain. *Adv. Nonlinear Stud. 4*, 1 (2004), 1–13.

[10] Lewy, H., and Stampacchia, G. On existence and smoothness of solutions of some non-coercive variational inequalities. *Arch. Rational Mech. Anal. 41* (1971), 241–253.

[11] Moreira, M e Domingos, V. *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev.* Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), 2019.

[12] Omari, P., and Zanolin, F. Infinitely many solutions of a quasilinear elliptic problem with an oscillatory potential. *Comm. Partial Differential Equations 21*, 5 (1996), 721–733.

[13] Pan, H., and Xing, R. Nonexistence of solutions for prescribed mean curvature equations on a ball. *J. Math. Anal. Appl. 406*, 2 (2013), 482–501.

[14] Pan, H., and Xing, R. Sub- and supersolution methods for prescribed mean curvature equations with Dirichlet boundary conditions. *J. Differential Equations 254*, 3 (2013), 1464–1499.

[15] Wheeden, R. L., and Zygmund, A. *Measure and integral*, second ed. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, Florida, 2015.

[16] Zeidler, E. *Applied functional analysis*, vol. 108 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1995.