Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

Além dos Pontos Notáveis: Identificação e Propriedades dos Centros do Triângulo

Bernardo Camargo da Silva

Brasília

2020

Bernardo Camargo da Silva

Além dos Pontos Notáveis: Identificação e Propriedades dos Centros do Triângulo

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM

Orientador: Profª. Drª. Tatiane da Silva Evangelista

Brasília

2020

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CC172bc
sa

Camargo da Silva, Bernardo
Além dos Pontos Notáveis: Identificação e Caracterização dos Centros do Triângulo / Bernardo Camargo da Silva; orientador Tatiane da Silva Evangelista. -- Brasília, 2020.
108 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Triângulos. 2. Pontos Notáveis. 3. Kimberling. I. da Silva Evangelista, Tatiane, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Além dos Pontos Notáveis: Identificação e Propriedades dos Centros do Triângulo

por

BERNARDO CAMARGO DA SILVA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 17 de abril de 2020.

Comissão Examinadora:

____
Profa. Tatiane da Silva Evangelista (Orientadora)

____
Prof. Ronni Geraldo Gomes de Amorim – FGA/UnB

____
Prof. Matheus Bernardini de Souza- FGA/UnB

À minha esposa Jessica, pessoa com quem amo partilhar a vida. Com você tenho me sentido mais vivo de verdade. Obrigado pelo carinho, pela paciência e por sua capacidade de me trazer paz na correria do dia a dia.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus pelo dom da vida, pela dádiva da curiosidade e por estar sempre comigo. Gostaria de agradecer aos meus pais, Deise e Luiz, por me incentivarem sempre a estudar e buscar o melhor de mim. Vocês são meus gigantes!

À minha esposa Jessica, meu amor, minha família, meu porto seguro de todas as horas, minha maior encorajadora. Agradeço o apoio, a paciência e a compreensão em todos os momentos que precisei. Obrigado por você existir na minha vida.

A todos os professores, pelos conhecimentos compartilhados, pela dedicação que contribuíram com a minha formação, especialmente aos membros da banca de defesa desta dissertação que muito contribuiram para a conclusão deste trabalho. Muito obrigado pela paciência e pelos ensinamentos.

À minha orientadora Profª Tatiane. Obrigado pela dedicação, pela orientação precisa e oportuna em todas as etapas deste trabalho.

Aos colegas do PROFMAT, pelo apoio nos exercícios, nas provas e pela camaradagem em sala de aula e fora dela. Em especial aos amigos Kellem (Pi), Dema e Lucas: obrigado pelos conselhos, pelas risadas e por não me deixar esmorecer nunca!

À UnB e especialmente ao Departamento de Matemática e à coordenação do PROFMAT-UnB, obrigado pela oportunidade do estudo e aprofundamento em um programa e com uma equipe de professores de nível tão elevado.

Ao Exército Brasileiro, em especial à Diretoria de Fiscalização de Produtos Controlados (DFPC), organização militar que sirvo, agradeço a compreensão e o apoio que foram fundamentais para a realização desse curso de mestrado.

"It is by logic we prove, but by intuition that we discover "
Henri Poincaré (1854-1912)

Resumo

Pontos notáveis são pontos que apresentam propriedades que são invariantes em relação aos triângulos. Mais de trinta e seis mil desses pontos foram catalogados por Clark Kimberling em sua obra, a Enciclopédia dos Centros do Triângulo. Os centros de triângulo escolhidos para este estudo são: Incentro, Baricentro, Circuncentro, Ortocentro, Centro da Circunferência dos Nove Pontos, Ponto Simediano, Ponto de Gergonne e Ponto de Fermat. Neste trabalho estudamos conceitos, propriedades e aplicações desses pontos notáveis do triângulo, os quatro primeiros pontos incluídos neste estudo são os mais abordados nos anos de formação básica de um aluno, enquanto os últimos quatro, apesar de não tão debatidos, possuem características interessantes e passíveis de serem abordadas em sala de aula. Nesse contexto, identificamos e caracterizamos esses pontos por meio de teoremas da geometria plana e da geometria analítica vetorial, além de verificar propriedades de otimização relativa a máximos e mínimos. Finalmente, apresentamos os resultados esperados e as conclusões deste estudo, bem como uma sugestão para o seu aprofundamento visando trabalhos futuros.

Palavras-chaves: Triângulos. Pontos Notáveis. Centros de Kimberling.

Abstract

Triangle centers are points that have properties which are invariant in relation to a triangle. Over thirty six thousand of these points were catalogued by Clark Kimberling in his Encyclopedia of Triangle Centers. The triangle centers addressed in this study are: Incenter, Barycenter, Circumcenter, Orthocenter, Nine Point Circle's Center, Symedian Point, Gergonne's Point and Fermat's Point. In this work we study the concepts, properties and applications of these triangle centers, the first four of these points described in this study are largely addressed in the student's formative years, whereas the last four points, although not as debated, they have interesting characteristics that can be discussed in classroom. In this context, we identify and characterize these centers by proving and applying theorems from plane geometry and vectorial analytic geometry as well as we verify certain maximum and minimum optimization properties of those centers. Finally we present the expected results from this study and its conclusions as well as some suggestions for further developments in this line of work.

Key-words: Triangles. Triangle Centers. Kimberling Centers.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de símbolos

α	Letra grega alfa
λ	Letra grega lambda
μ	Letra grega mu
ΔABC	Triângulo de vértices A, B e C
$\angle ABC$	Ângulo formado pelas semirretas/segmentos AB e AC
$\equiv$	Congruente
(ALA)	Caso Ângulo, Lado, Ângulo
(LLL)	Caso Lado, Lado, Lado
(LAL)	Caso Lado, Ângulo, Lado
(AAA)	Caso Ângulo, Ângulo, Ângulo
$\|$	Paralelo
$P \Rightarrow Q$	se P, então Q
$\in$	Pertence
m_{AB}	Mediatriz de AB
ΔABC	Área do triângulo cujos vértices são A, B e C
$P \Leftrightarrow Q$	P se e somente se Q
$\overrightarrow{AB}$	Vetor AB
$\cos\angle A$	Cosseno do ângulo A
$d\,(I, AC)$	Distância do ponto I à reta AC
$\sim$	Semelhante
$\text{tg}\angle A$	Tangente do ângulo A
$\text{sen}\angle A$	Seno do ângulo A
$\perp$	Perpendicular

$L\left(A, r_A\right)$	Circunferência L, de centro A e raio de comprimento r_A
E_p	Energia potencial gravitacional
W	Força peso sobre um corpo

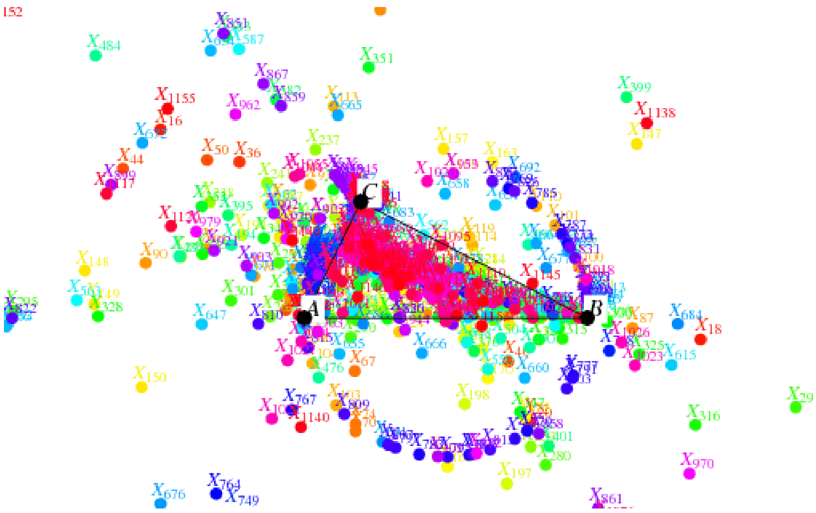
Sumário

Introdução

Em geometria um *centro de um triângulo* é um ponto notável que possui propriedades que são invariantes, ainda que o triângulo seja submetido à transformações geométricas[1].

O matemático C. Kimberling[2] elaborou um compêndio de mais de trinta e seis mil centros de triângulo, a ***Encyclopedia of Triangle Centers***[3], que, em sua homenagem, estes pontos foram denominados como **Centros de Kimberling**.

Figura 1 – Os centros de Kimberling para um triângulo ΔABC.



Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/KimberlingCenter.html>

As particularidades "mágicas"e invariantes dos chamados centros dos triângulos podem ter sido evidenciadas há muito tempo atrás, empiricamente, a medida que se desenhou um triângulo e três segmentos internos a esse triângulo, cada um passando por um dos vértices e o ponto médio do lado oposto a esse vértice, e, descobriu-se que esses segmentos se interceptavam em um único ponto (KIMBERLING, 2020).

Kimberling (2020) narra que tal experiência possa ser sido repetida, em um outro triângulo diferente, e o mesmo resultado pode ter sido obtido. Assim, identificaram mais um ponto, o baricentro. Com o passar dos anos, outros centros foram identificados e suas propriedades foram demonstradas, como o incentro, circuncentro, ortocentro, entre

[1] Aplicações bijetoras entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de modo que, a partir de uma figura geométrica original, se forma uma outra geometricamente igual ou semelhante à primeira.

[2] Clark Kimberling é um matemático, músico e compositor americano na Universidade de Evansville, Illinois, EUA

[3] <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

muitos outros. A Tabela 1 mostra os treze primeiros pontos relacionados na Enciclopédia de Kimberling.

Tabela 1 – Relação dos primeiros treze Centros de Kimberling

Nome	**Centro de Kimberling**
Incentro	X(1)
Baricentro	X(2)
Circuncentro	X(3)
Ortocentro	X(4)
Centro do Círculo de Nove Pontos	X(5)
Ponto Simediano	X(6)
Ponto de Gergonne	X(7)
Ponto de Nagel	X(8)
Mittenpunkt	X(9)
Centro de Spieker	X(10)
Ponto de Feuerbach	X(11)
Conjugado harmônico do Ponto de Feuerbach	X(12)
Ponto de Fermat	X(13)

Fonte: elaborado pelo autor

Este trabalho visa aprofundar conhecimentos acerca dos pontos notáveis, aqui divididos em dois grupos, os clássicos e não clássicos, além de identificar algumas de suas propriedades geométricas relativas à máximos e mínimos.

Dessa forma, apresentamos e caracterizamos os pontos notáveis ditos clássicos: o Incentro - X(1), o Baricentro - X(2), o Circuncentro - X(3) e o Ortocentro - X(4); e os pontos notáveis ditos não clássicos: o Centro da Circunferência dos Nove Pontos - X(5), o Ponto Simediano - X(6), o Ponto de Gergonne - X(7) e o Ponto de Fermat - X(13).

A motivação para o estudo de tais pontos notáveis se baseia no fato que os quatro pontos no grupo dos Pontos Notáveis Clássicos são os centros de triângulo mais abordados nos anos de formação básica e os outros quatro pontos no grupo dos Pontos Não Clássicos, apesar de não serem tão abordados no currículo de matemática nos ensinos fundamental e médio, possuem propriedades passíveis de contextualização e que podem ser apresentadas ao aluno.

No primeiro capítulo são abordados alguns conceitos básicos da geometria euclidiana plana, da geometria analítica vetorial e de máximos e mínimos que instruem o desenvolvimento deste trabalho.

No prosseguimento, o segundo capítulo traz a caracterização dos pontos notáveis clássicos, o Incentro - X(1), o Baricentro - X(2), o Circuncentro - X(3) e o Ortocentro - X(4), por meio dos conceitos de Geometria Euclidiana Plana e de Analítica Vetorial. Para efeitos deste trabalho e, a fim de melhor ordenar aplicações dos teoremas demonstrados aqui, o Ortocentro - X(4) será abordado antes do Circuncentro - X(3). Ainda neste capítulo, são apresentadas algumas de suas propriedades relativas ao conceito de máximos e mínimos que corroboram para a natureza notável desses pontos.

O terceiro capítulo traz os pontos notáveis não clássicos, como o centro da circunferência dos nove pontos - X(5), o ponto simediano - X(6), o ponto de Gergonne - X(7) e o ponto de Fermat - X(13) e algumas de suas características e propriedades.

Tabela 2 – Pontos Notáveis Clássicos e Não Clássicos de estudo

Pontos Notáveis Clássicos	**Pontos Notáveis Não Clássicos**
Incentro - X(1)	*Centro da Circunferência dos Nove Pontos* - X(5)
Baricentro - X(2)	*Ponto Simediano* - X(6)
Circuncentro - X(3)	*Ponto de Gergonne* - X(7)
Ortocentro - X(4)	*Ponto de Fermat* - X(13)

Fonte: elaborado pelo autor

O quarto capítulo apresenta os resultados obtidos nos capítulos de desenvolvimento. São discutidas as propriedades e as características demonstradas em decorrência dos teoremas e das definições para cada Centro de Kimberling estudado.

Por fim, no último capítulo é feita uma revisão dos pontos e tópicos abordados, bem como uma sugestão de trabalho futuro para o tema.

Metodologia

A fim de melhor compreender o assunto estudado, este trabalho se valeu de pesquisa exploratória, visando o aprofundamento dos conceitos relativos aos pontos notáveis clássicos e a familiarização dos conhecimentos referentes aos pontos notáveis não clássicos.

Nesse viés, primeiramente foi realizada a apresentação dos conceitos matemáticos julgados preliminares para a condução deste trabalho, tais como definições, teoremas e corolários.

Esses conceitos pavimentaram o aprofundamento da caracterização dos pontos notáveis clássicos, assim como permitiram elucidar, identificar e demonstrar propriedades acerca dos pontos notáveis não clássicos.

Dessa forma, este trabalho poderá oportunizar o estudo e ensejar maior difusão dos pontos notáveis não clássicos relacionados na Enciclopédia de Kimberling, devido às suas aplicações e outras propriedades geométricas.

As figuras geométricas empregadas para ilustrar definições, teoremas, lemas e demonstrações deste trabalho foram elaboradas por meio do aplicativo de matemática dinâmica (BORCHERDS, 2007) chamado GeoGebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra). O GeoGebra possibilita a interação entre construções geométricas e estruturas algébricas, como pontos, retas, segmentos de reta, polígonos e funções matemáticas. O programa dispõe de uma interface amigável, podendo ser acessado e operado via *web*, e se mostra como uma ferramenta adicional para se apresentar a Geometria de uma maneira didática e interativa em sala de aula.

1 Conceitos Preliminares

Neste Capítulo abordaremos os conceitos, teoremas e demais resultados que pavimentaram este estudo. Para tanto, foram divididos em tópicos de: Geometria Plana, Geometria Analítica Vetorial e Máximos e Mínimos.

1.1 Geometria Plana

Nesta Seção apresentados conceitos básicos da Geometria Euclidiana Plana que subsidiam o prosseguimento deste trabalho. Aqui, estão relacionadas as noções relativas à existência de paralelogramos, a base média de triângulos, a mediatriz de um segmento dado e ao teorema de Ceva.

1.1.1 Condição de existência de paralelogramo

Definição 1.1.1. *(DOLCE; POMPEO, 1993) Paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.*

Teorema 1.1.2. *(DOLCE; POMPEO, 1993) Um quadrilátero convexo é paralelogramo se, e somente se:*

1. *possui lados opostos iguais.*
2. *possui ângulos opostos iguais.*
3. *possui diagonais que se cortam ao meio.*

As três propriedades são equivalentes.

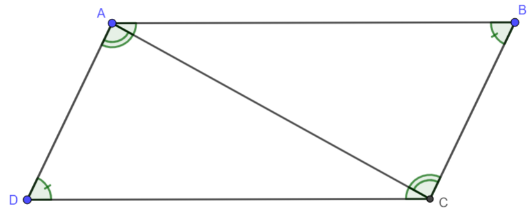
Demonstração. Para fins organização para demonstrarmos o Teorema 1.1.2, analisaremos os três itens descritos acima separadamente.

- Item 1:

  Seja $ABCD$ um paralelogramo, conforme a Figura 2. Daí, $\angle DCA = \angle BAC$, pois são ângulos alternos internos. Da mesma forma, $\angle DAC = \angle BCA$. Com isso, $\Delta DAC \equiv \Delta ABC(ALA)$. Portanto, $AD = BC$ e $AB = CD$.

  Por outro lado, se tivermos um quadrilátero convexo $ABCD$, tal que $AD = BC$ e $AB = CD$, teremos $\Delta ABC \equiv \Delta DAC(LLL)$. Portanto, $\angle ADC = \angle ABC$. De maneira análoga, $\angle DAB = \angle DCB$. Assim, podemos concluir que $ABCD$ é paralelogramo.

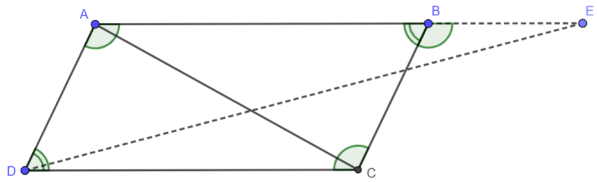
Figura 2 – Paralelogramo $ABCD$



Fonte: elaborado pelo autor

- Item 2:

Figura 3 – Paralelogramo $ADCB$ com E no prologamento de AB



Fonte: elaborado pelo autor

Seja $ADCB$ um paralelogramo, conforme a Figura 3 e, seja E um ponto no prolongamento do lado AB. $\angle DAB = \angle CBE$, pois são ângulos correspondentes de retas paralelas, e $\angle CBE = \angle DCB$ pois são ângulos alternos internos. Daí, $\angle DAB = \angle DCB$. De maneira análoga, $\angle ADC = \angle ABC$.

Por outro lado, se $ADCB$ for um quadrilátero convexo tal que $\angle DAB = \angle DCB$ e $\angle ADC = \angle ABC$. Sabemos que os ângulos internos de um quadrilátero convexo somam-se 360º, logo:

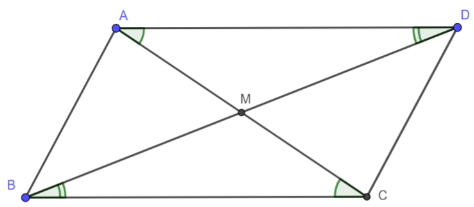
$$\angle DAB + \angle DCB + \angle ADC + \angle ABC = 360^{\text{o}}.$$

e com isso $\angle DAB + \angle ABC = 180^{\text{o}}$. E temos também $\angle ABC + \angle CBE = 180^{\text{o}}$. Dessa forma, concluí-se que $\angle DAB = \angle CBE$, e, $AD \parallel BC$ e também $AB \parallel CD$.

Assim, podemos concluir que $ABCD$ é paralelogramo.

- Item 3:

Figura 4 – Paralelogramo $ABCD$, ponto médio M das diagonais AC e BD



Fonte: elaborado pelo autor

Seja $ABCD$ um paralelogramo e M o ponto de encontro de suas diagonais como na Figura 4. Pelos itens anteriores, já concluímos que os ângulos e lados opostos de um paralelogramo são iguais. Como são ângulos alternos internos, $\angle DAC = \angle BCA$. Da mesma forma, $\angle ADB = \angle CBD$ e com isso, $\Delta ADM \equiv \Delta CBM(ALA)$. Daí, $AM = MC$ e $DM = MB$. Logo, M é ponto médio das diagonais do paralelogramo.

Por outro lado, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujas diagonais se interceptam em seus pontos médios, ou seja, $AM = MC$ e $DM = MB$. Assim, $\angle DMA = \angle CMB$. Então, $\Delta ADM \equiv \Delta CBM(LAL)$. Portanto, $AD = BC$ e, de maneira análoga, $AB = CD$.

Em face do acima exposto, podemos concluir que $ABCD$ é paralelogramo.

□

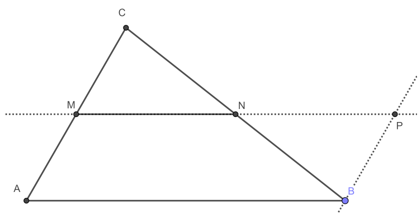
Do exposto, temos condições para identificar e caracterizar um paralelogramo a partir de uma figura geométrica dada.

Na sequência, temos o Teorema da Base Média de um ΔABC.

1.1.2 Teorema da base média

Teorema 1.1.3. *(DOLCE; POMPEO, 1993) Sejam o ΔABC um triângulo e M, N os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente. Então $MN \parallel AB$ e $MN = \frac{AB}{2}$.*

Figura 5 – Base média de um triângulo ΔCAB



Fonte: elaborador pelo autor

Demonstração. Prolonguemos a base média MN até um ponto P de tal forma que $MN = NP$, como visto na Figura 5. Em seguida, construímos o ΔNBP. Note que ΔCMN e ΔNBP são congruentes, pelo caso LAL. Assim, $BP = AM$ e $\angle MAB = \angle NPB$ e:

$$CM \parallel BP \Rightarrow BP \parallel AM.$$

Dessa maneira, $MACP$ é paralelogramo, pois AM e BP são segmentos paralelos e iguais. Então, $MP \parallel AB$ e

$$MP = AB \Rightarrow 2MN = AB \Rightarrow MN = \frac{AB}{2}.$$

□

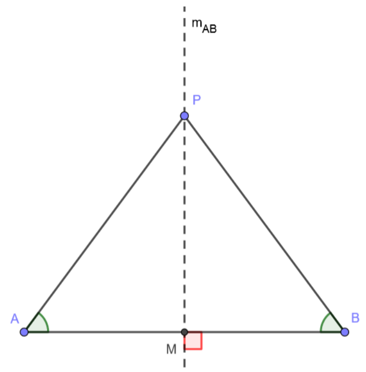
Em suma, conhecidos os dois pontos médios dos lados adjacentes de um ΔABC, podemos traçar o segmento que forma a base média ao terceiro lado desse triângulo.

Na subseção seguinte identificamos as propriedades relativas à mediatriz de um segmento.

1.1.3 Mediatriz

Teorema 1.1.4. *(DOLCE; POMPEO, 1993) Sejam A, B e P três pontos distintos no plano. $PA = PB$ se, e somente se, o ponto P pertence à mediatriz do segmento AB.*

Figura 6 – Mediatriz de AB



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Seja M o ponto médio de AB e m_{AB} a sua mediatriz, como visto na Figura 6. Tome $P \in m$. Com isso, $AM = MB$ e m_{AB} é perpendicular à AB. Daí, $\Delta AMP \equiv \Delta BMP(LAL)$ e, então $PA = PB$.

Por outro lado, suponha que $PA = PB$. Daí, ΔABP é isósceles de base AB. Traçamos a mediana relativa ao lado AB. Temos que $\Delta AMP \equiv \Delta BMP(LLL)$ e, então $\angle AMP = \angle BMP = 90^o$. Dessa forma conclui-se que P está sobre a mediatriz m_{AB}. $\square$

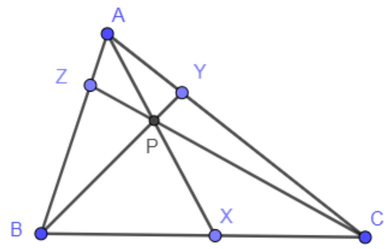
Prosseguimos na subseção seguinte com o Teorema de Ceva[1]

1.1.4 Teorema de Ceva

Teorema 1.1.5. *(THIAGO, 2012e) Sejam X, Y e Z pontos sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente, do triângulo ΔABC. Os segmentos AX, BY e CZ são concorrentes em um ponto P se, e somente se,* $\dfrac{BX}{CX} \cdot \dfrac{CY}{AY} \cdot \dfrac{AZ}{BZ} = 1.$

[1] Giovanni Ceva (1647-1734) foi um matemático italiano.Trabalhou principalmente com geometria. Em 1678 publicou o livro "De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio", que contém o teorema que leva o seu nome.

Figura 7 – ΔABC e as cevianas AX, BY e CZ



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Para dois triângulos com mesma altura, a razão de suas áreas está diretamente relacionada à razão de suas bases. Daí, para o triângulo ΔABC da Figura 7, temos as expressões:

$$\frac{BX}{CX} = \frac{[\Delta ABX]}{[\Delta ACX]} = \frac{[\Delta BPX]}{[\Delta CPX]} = \frac{[\Delta ABX] - [\Delta BPX]}{[\Delta ACX] - [\Delta CPX]} = \frac{[\Delta PAB]}{[\Delta PCA]} \qquad (1.1).$$

Pudemos reescrever a igualdade $\dfrac{[\Delta ABX]}{[\Delta ACX]} = \dfrac{[\Delta BPX]}{[\Delta CPX]}$ como $\dfrac{[\Delta ABX] - [\Delta BPX]}{[\Delta ACX] - [\Delta CPX]}$ devido a seguinte propriedade das razões e proporções: se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, então $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a-c}{b-d}$, para a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, com $b \neq d$ e b e d não nulos.

Analogamente,

$$\frac{CY}{AY} = \frac{[\Delta PBC]}{[\Delta PAB]} \qquad (1.2)$$

e

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{[\Delta PCA]}{[\Delta PBC]} \qquad (1.3).$$

Multiplicando $(1), (2)$ e (3) segue que:

$$\frac{AZ.BX.CY}{AY.BZ.CX} = \frac{[\Delta PAB].[\Delta PBC].[\Delta PCA]}{[\Delta PCA].[\Delta PAB].[\Delta PBC]} = 1.$$

Agora, tendo a igualdade anterior como ponto de partida:

Sejam os pontos X, Y e Z, pontos sobre os lados BC, AC e AB, tais que:

$$\frac{AZ.BX.CY}{AY.BZ.CX} = 1.$$

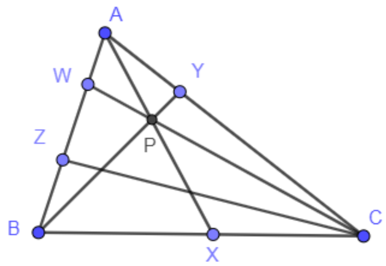
Suponhamos, por absurdo, que AX, BY e CZ não sejam concorrentes.

Seja W um ponto sobre o lado AB tal que AX, BY e CW sejam concorrentes em P, com $W \neq Z$, como na Figura 8.

Do exposto, se AX, BY e CW concorrem em P, então

$$\frac{AW.BX.CY}{AY.BW.CX} = 1.$$

Figura 8 – Ponto $W \neq Z$



Fonte: elaborado pelo autor

Comparando esta última expressão a $\dfrac{AZ.BX.CY}{AY.BZ.CX} = 1$, tem-se que:

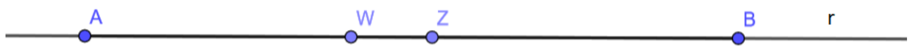
$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{AW}{BW} \Rightarrow Z = W.$$

Este resultado é encontrado pela aplicação direta do seguinte lema:

Lema 1.1.6. *Dados os pontos A, B e W sobre uma reta r. É única a posição com que o ponto W divide o segmento AB numa razão k dada.*

Demonstração. Suponha que W divida o segmento AB na razão k. Suponha também que W seja interior ao segmento AB, conforme a Figura 9.

Figura 9 – Pontos W e Z dividem o segmento AB.



Fonte: elaborado pelo autor

$$\begin{aligned} k = \frac{AZ}{BZ} = \frac{AW}{BW} \quad &\Rightarrow \quad \frac{AW}{BW} - \frac{BW}{BW} = \frac{AZ}{BZ} - \frac{BZ}{BZ} \\ &\Rightarrow \quad \frac{AB}{BW} = \frac{BW - AW}{BW} = \frac{BZ - AZ}{BZ} = \frac{AB}{BZ} \\ &\Rightarrow \quad BW = BZ \\ &\Rightarrow \quad W = Z. \end{aligned}$$

□

E, se $Z = W$, então $\dfrac{AZ.BX.CY}{AY.BZ.CX} = \dfrac{AW.BX.CY}{AY.BW.CX}$, e portanto, $\dfrac{AZ}{BZ} = \dfrac{AW}{BW}$.

Logo, AX, BY e CZ são concorrentes em P.

□

Cevianas são segmentos de reta que partem do vértice do triângulo para o lado oposto a esse vértice. O nome ceviana foi dado em homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva [2]. Medianas, alturas e bissetrizes são casos especiais de cevianas. O Teorema de Ceva dá condições para que três cevianas sejam concorrentes.

1.2 Geometria Analítica Vetorial

1.2.1 Grandezas escalares e vetoriais

Algumas grandezas físicas podem ser determinadas a partir de um número real a elas associado, tais como o comprimento (distância), a massa (quantidade de matéria), o volume (capacidade). Por outro lado, outras grandezas carecem de mais informações para que sejam perfeitamente compreendidas. Nos contextos apresentados podemos diferenciar as grandezas em *escalares* e *vetoriais*.

- Grandeza escalar: associa-se um número real. Essa grandeza pode ser dimensional (ex: 5 Kg e 100 m^3) ou adimensional (ex: número de voltas em uma bobina).

- Grandeza vetorial: associam-se três informações, tais como:

    1. Módulo ou norma.
    2. Direção.
    3. Sentido.

1.2.2 Vetor

A palavra *vetor* advém do verbo *vehere* que, em latim, significa transportar, levar. Então, um vetor $\overrightarrow{AB}$ traduz que o ponto A é transportado ao ponto B (VENTURI, 1949). No sentido da grandeza vetorial, Venturi (1949) apresenta duas definições para *vetor*:

1. uma entidade tripla formada por uma direção, um sentido e um número não-negativo; e

2. o conjunto de todos os segmentos orientados de mesma direção, de mesmo sentido e de mesmo comprimento.

No escopo deste trabalho, utilizaremos a definição 1 apresentada por Venturi para um vetor.

A Figura 10 ilustra as informações associadas à grandeza vetorial $\overrightarrow{AB}$:

[2] Giovanni Ceva (1647-1734) foi um matemático italiano conhecido por suas contribuições no campo da Geometria.

Figura 10 – Vetor que leva A a B

Fonte: elaborado pelo autor

- módulo ou norma: é o número não-negativo que indica o comprimento do vetor. Notação: $\|\overrightarrow{AB}\|$.
- direção: do ângulo θ.
- sentido: do ponto A (origem) para o ponto B (destino).

Obs:

1. O vetor de módulo unitário $vers\overrightarrow{v}$ na mesma direção do vetor $\overrightarrow{v}$ chama-se *versor*.

$$vers\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}, \|\overrightarrow{v}\| \neq 0.$$

2. Vetor nulo é o vetor de direção e sentido arbitrários, e módulo igual a zero. Notação: $\overrightarrow{0}$.

3. A notação $\overrightarrow{A}$ está relacionada às coordenadas desse ponto, ou seja, da Figura 11, podemos escrever a expressão para as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$, no $\mathbb{R}^2$ como:

$$\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A) - (x_O, y_O) = (x_A, y_A) - (0,0) = (x_A, y_A)$$

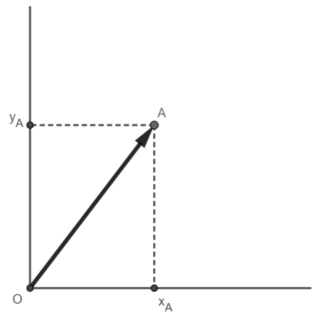
Dessa forma, o vetor $\overrightarrow{OA}$ é representado pelas coordenadas do ponto A. Abusando da notação, escreve-se que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A}$.

A representação do $\overrightarrow{A}$ no $\mathbb{R}^2$ é (x_A, y_A), conforme Figura 11.

Num sistema de coordenadas cartesianas, como na Figura 12, concluímos que a expressão para o vetor $\overrightarrow{AB}$, em função dos pontos A e B, e aplicando o conceito de vetor como algo que "transporta"(em latim, *vehere*), $\overrightarrow{AB}$ pode ser escrito na forma inteiramente vetorial:

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}.$$

Figura 11 – Representação do vetor no plano cartesiano OXY



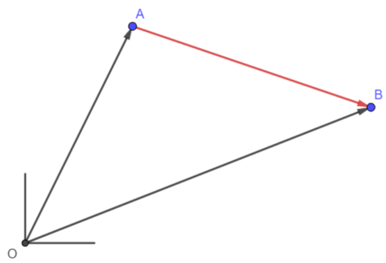
Fonte: elaborado pelo autor

Nesta última expressão, o vetor $\overrightarrow{AB}$ foi escrito como uma diferença entre os vetores $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$. Adotando-se um referencial, $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$ são os vetores posição dos pontos A e B.

No plano cartesiano, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ ficam:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A)\,.$$

Figura 12 – Representação do vetor



Fonte: elaborado pelo autor

1.2.3 Operações com vetores

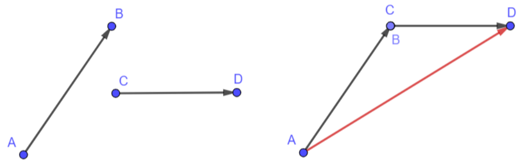
Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no $\mathbb{R}^2$.

A adição dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, resulta em um vetor que designamos por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Assim, fixando um sistema de eixos cartesianos ortogonais OXY, e sejam $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y)$ e $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$, o vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é dado:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_x, u_y) + (v_x, v_y) = (u_x + v_x, u_y + v_y).$$

O destino do vetor $\overrightarrow{AB}$ é a origem do vetor $\overrightarrow{CD}$, portanto $B = C$, como indicado na Figura 13.

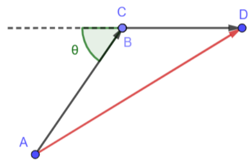
Figura 13 – Vetores e suas posições originais (à esq.); Vetor soma (à dir.)



Fonte: elaborado pelo autor

Seja θ a direção do vetor $\overrightarrow{AC}$ em relação ao vetor $\overrightarrow{CD}$. Para o cálculo do módulo do vetor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, verificamos na Figura 14, que o $\angle ACD = 180^o - \theta$.

Figura 14 – Vetor soma e a direção θ



Fonte: elaborado pelo autor

Aplicando a lei dos cossenos no ΔABD:

$$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 - 2.\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{CD}\|.\cos(\angle ACD).$$

E, como se verifica na Figura 14, $\angle ACD = 180 - \theta$.

Mas $\cos(180^o - \theta) = -\cos\theta$. Substituindo então na expressão, fica:

$$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 + 2.\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{CD}\|.\cos\theta.$$

$$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 + 2.\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{CD}\|.\cos\theta}.$$

Propriedades da adição de vetores no espaço:

- Comutatividade: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- Associatividade: $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
- Existência de elemento neutro: $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$, de coordenadas $\overrightarrow{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, representado por um segmento nulo, é o único que satisfaz $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.
- Existência de inverso aditivo: Dado $\overrightarrow{u}$, existe $\overrightarrow{v}$, tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Denota-se portanto $\overrightarrow{v}$ por $-\overrightarrow{u}$.

Definição 1.2.1. *(VENTURI, 1949) Seja um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ e um vetor $\overrightarrow{v}$. O produto do vetor $\overrightarrow{v}$ pelo escalar λ, representado por $\lambda\overrightarrow{v}$ e definido por:*

- *se $\lambda > 0$, então os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\lambda\overrightarrow{v}$ tem o mesmo sentido, mesma direção e norma $\lambda.\|\overrightarrow{v}\|$.*
- *se $\lambda < 0$, então os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\lambda\overrightarrow{v}$ tem sentidos opostos, mesma direção e norma $-(\lambda.\|\overrightarrow{v}\|)$.*

Em coordenadas cartesianas no plano, a multiplicação de um vetor $\overrightarrow{u}$ por λ: $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = (\lambda u_x, \lambda u_y)$.

Teorema 1.2.2. *(VENTURI, 1949) Dois vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos se, e somente se, existir um escalar λ tal que:*

$$\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.$$

Demonstração. Se $\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{u}$, então $vers\overrightarrow{v} = \pm vers\overrightarrow{v}$. Assim:

$$\frac{\overrightarrow{v}}{\|v\|} = \pm\frac{\overrightarrow{u}}{\|u\|}.$$

Dessa forma:

$$\overrightarrow{v} = \pm\left(\frac{\|v\|}{\|u\|}\right)\overrightarrow{u}.$$

Mas, $\dfrac{\|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \lambda \in \mathbb{R}$. Logo, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Se $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$, então, pela definição de produto de um vetor por escalar, $\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{u}$.

O vetor nulo $\overrightarrow{0}$, por ter comprimento zero, não faz sentido atribuir sentido ou direção a este, portanto, pode-se considerá-lo o único vetor paralelo a todos os vetores. Dessa forma, se $\overrightarrow{u}$ for o vetor nulo, então $\overrightarrow{u}$ é paralelo a $\overrightarrow{v}$.

□

Teorema 1.2.3. *(VENTURI, 1949) O ponto médio M de um segmento AB é dado pela expressão: $\overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}}{2}$.*

Demonstração. Seja M ponto médio de AB. Logo, $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$, assim, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Daí temos que:

$$\overrightarrow{M} - \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{M}$$

e

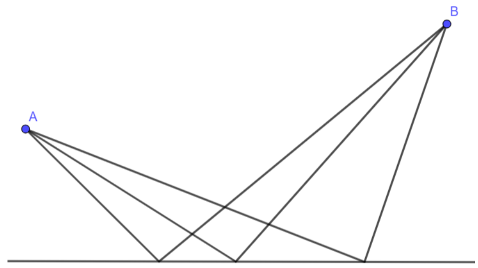
$$\overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}}{2}.$$

□

1.3 Máximos e Mínimos

O ser humano tem uma tendência em otimizar e está baseada na tentativa de encontrar maneiras melhores e mais eficientes para fazer uma determinada tarefa (NAIK, 2007). Naik (2007) aponta que essa busca pela eficiência não está restrita apenas aos seres humanos, uma vez que a natureza também busca, de forma incessante, configurações ou arranjos físicos e químicos cada vez mais estáveis.

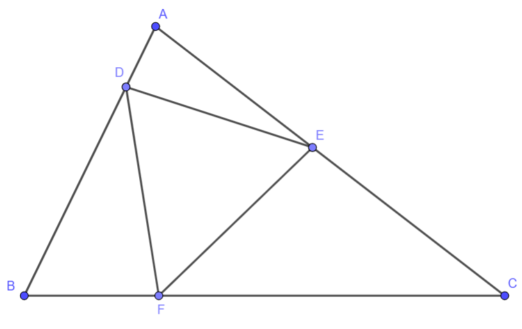
Figura 15 – Caminho mínimo entre A e B que passa por uma reta dada - Problema de Heron



Fonte: elaborado pelo autor

Essa busca também ocorre na Matemática, em especial na Geometria, quando se busca escolher o caminho, de menor distância possível, entre dois pontos, passando por uma reta dada (Problema de Heron), como na Figura 15; quando se escolhe, dentre todos os triângulos inscritíveis em um triângulo acutângulo, aquele de menor perímetro (Problema de Fagnano), como na Figura 16; ou quando precisamos determinar o ponto interior a um triângulo, cuja soma das distâncias aos vértices desse triângulo é mínima (Problema de Fermat), entre outras otimizações.

Figura 16 – ΔDEF inscrito no ΔABC acutângulo - Problema de Fagnano

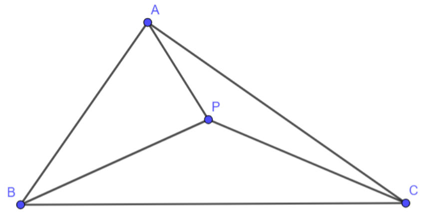


Fonte: elaborado pelo autor

No escopo da otimização geométrica, envolvendo o triângulo, utilizaremos ferramentas geométricas, algébricas ou até mesmo físicas, para mostrar que dentre todos os outros pontos, aqueles ditos notáveis, são pontos de máximo e mínimo e assim otimizam uma dada propriedade geométrica.

Nesse viés, apresentamos nos teoremas a seguir a Desigualdade das Médias (Teorema 1.3.1) e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.3.2).

Figura 17 – ΔABC e ponto P no seu interior: $PA + PB + PC$ - Problema de Fermat



Fonte: elaborado pelo autor

Teorema 1.3.1. *(WAGNER, 2011) Desigualdade das médias aritmética (MA) e geométrica (MG), $MA \geq MG$, representada por:.*

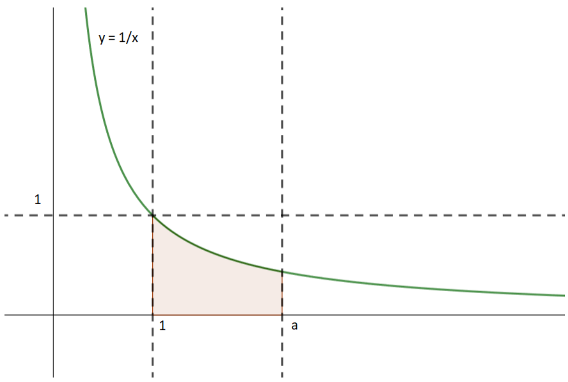
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

para n natural, $n \geq 2$ e $x_i \in \mathbb{R}_+, 1 \leq i \leq n$. A igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Iremos provar a desigualdade das médias aritmética e geométrica baseando-se na demonstração de George Pólya [3].

Vejamos a gráfico da Figura 18.

Figura 18 – Gráfico de $y = \frac{1}{x}$



Fonte: elaborado pelo autor

A área do retângulo delimitado pelo eixo x e pelas retas $x = 1, x = a$ e $y = 1$ é maior que a área delimitada pela curva $y = \dfrac{1}{x}$. Assim,

$$\text{Área do retângulo} \ \geq \ \text{Área delimitada pela curva.}$$

Sendo que pelo gráfico da Figura 18 podemos expressar da seguinte maneira:

$$(a - 1) \geq \ln a.$$

[3] George Pólya (1887-1985) foi um matemático húngaro. Foi professor de matemática de 1914 a 1940 em ETH Zurich e de 1940 a 1953 na Universidade de Stanford. Contribuiu significativamente aos campos da análise combinatória, teoria dos números, análise numérica e teoria das probabilidades.

Façamos $a = 1 + x$, temos que:

$$x \geq \ln(1+x) \Leftrightarrow e^x \geq (1+x).$$

Sendo que $e^x = (1+x)$ se, e só se, $x = 0$.

Na desigualdade $e^x \geq (1+x)$, substitui-se x por $\dfrac{x_i}{MA} - 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e dessa forma:

$$e^{\left(\frac{x_1}{MA} - 1\right)} \geq \frac{x_1}{MA}$$
$$e^{\left(\frac{x_2}{MA} - 1\right)} \geq \frac{x_2}{MA}$$
$$\vdots$$
$$e^{\left(\frac{x_n}{MA} - 1\right)} \geq \frac{x_n}{MA}$$

onde MA é a média aritmética dos termos x_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Multiplicando as desigualdades acima, obtém-se:

$$e^{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{MA} - n} \geq \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{MA^n}.$$

Como $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \cdot MA$ e $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = MG^n$, a desigualdade acima fica:

$$e^{\frac{n.MA}{MA} - n} \geq \frac{MG^n}{MA^n},$$

e, finalmente,

$$1 \geq \frac{MG^n}{MA^n} \Leftrightarrow MA \geq MG.$$

A igualdade vale se, e só se, $\dfrac{x_i}{MA} - 1 = 0$, ou seja, $x_i = MA$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Temos também que $MG^n = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = MA \cdot MA \cdots MA = MA^n$. Assim concluímos que $MG = MA$.

□

Teorema 1.3.2. *(MENDES, 2012a) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais. Então:*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2.$$

Esta desigualdade é conhecida como Desigualdade de Cauchy-Schwarz. A igualdade ocorre quando a_i e b_i são proporcionais, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração. Esta demonstração é baseada em Wagner (1995), que primeiramente relembra a Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica para dois números reais positivos quaisquer a e b:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

e que a igualdade ocorre se, e só se, $a = b$.

Considere:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$
$$B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Também: $\hat{a_i} = \dfrac{a_i}{A}$ e $\hat{b_i} = \dfrac{b_i}{B}$.

Somando para cada $\hat{a_i}^2$ e $\hat{b_i}^2$:

$$\hat{a_1}^2 + \hat{a_2}^2 + \ldots + \hat{a_n}^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{A^2} = 1$$

$$\hat{b_1}^2 + \hat{b_2}^2 + \ldots + \hat{b_n}^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{B^2} = 1.$$

Façamos $\left(\hat{a_i} - \hat{b_i}\right)^2 \geq 0$, o que leva a

$$\hat{a_i}^2 + \hat{b_i}^2 \geq 2\hat{a_i}\hat{b_i}.$$

Somando as desigualdades $\hat{a_i}\hat{b_i} \leq \dfrac{\hat{a_i}^2}{2} + \dfrac{\hat{b_i}^2}{2}$, vem:

$$\begin{aligned} \hat{a_1}\hat{b_1} + \hat{a_2}\hat{b_2} + \ldots + \hat{a_n}\hat{b_n} &\leq \frac{\hat{a_1}^2}{2} + \frac{\hat{b_1}^2}{2} + \ldots + \frac{\hat{a_n}^2}{2} + \frac{\hat{b_n}^2}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{a_1}{A}.\frac{b_1}{B} + \ldots + \frac{a_n}{A}.\frac{b_n}{B} \leq 1,$$

e, finalmente:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leq AB.$$

Substituindo, obtém-se:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leq \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\right)\left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}\right),$$

e, portanto,

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geq (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2$$

Ainda, a igualdade vale se, e só se,

$$\hat{a_1} = \hat{b_1}, \ldots, \hat{a_n} = \hat{b_n} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_1}{A} = \frac{b_1}{B}, \ldots, \frac{a_n}{A} = \frac{b_n}{B} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

□

2 Pontos Notáveis Clássicos

Neste capítulo identificaremos propriedades geométricas, as posições em coordenadas cartesianas e particularidades relativas à otimização de distâncias dos Pontos Notáveis Clássicos, o incentro, o baricentro, o circuncentro e o ortocentro, bem como serão evidenciadas as posições desses centros, em coordenadas cartesianas e suas peculiaridades de otimização.

2.1 Incentro - X(1)

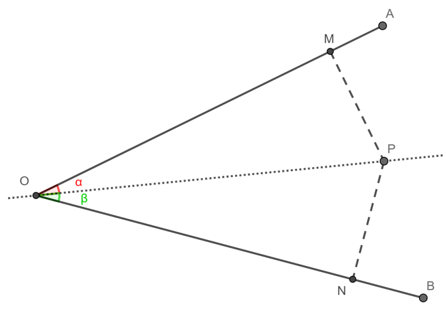
Nesta seção, abordamos o primeiro Ponto Notável Clássico, o incentro, primeiro Centro de Kimberling (X(1)), sua caracterização, sua posição em coordenadas, bem como algumas de suas propriedades de otimização.

Caracterização do incentro

Para que possamos prosseguir na caracterização do incentro, primeiramente lançaremos mão do seguinte lema:

Lema 2.1.1. *(THIAGO, 2012a) Seja $\angle AOB$ um ângulo dado e P um ponto em seu interior. A distância de P a OA é igual à distância de P a OB se, e somente se, P pertence à bissetriz do $\angle AOB$.*

Figura 19 – P pertence à bissetriz do $\angle AOB$



Fonte: elaborada pelo autor

Demonstração. Observe a Figura 19. O que queremos é demonstrar que, dados M e N, as projeções de P sobre OA e OB, respectivamente, $PM = PN \Leftrightarrow P$ pertence à bissetriz de $\angle AOB$.

Seja P um ponto sobre a bissetriz do $\angle AOB$. Então $\angle MOP = \angle PON = \alpha$ e $\angle OMP = \angle PNO = 90^o$, sendo OP lado comum. Logo, $\Delta MOP \equiv \Delta PON(LAA)$. Portanto, concluímos que $PM = PN$.

Seja $PM = PN$. Aplicando o Teorema de Pitágoras nos ΔPON e ΔMOP:

$$ON^2 = PO^2 - PN^2,$$

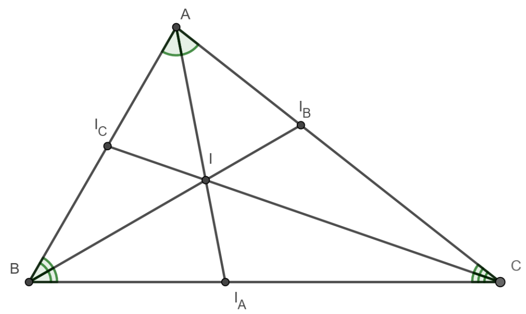
$$OM^2 = PO^2 - PM^2.$$

Como $PM = PN$ por hipótese, então $OM = ON$. Logo, $\Delta MOP \equiv \Delta PON(LLL)$ e, finalmente, $\angle PON = \angle MOP$, o que resulta que P pertence à bissetriz do $\angle MON = \angle AOB$.

□

Teorema 2.1.2. *(THIAGO, 2012a) As três bissetrizes internas de um triângulo intersectam-se num único ponto chamado incentro.*

Figura 20 – ΔABC e o incentro (I)



Fonte: elaborada pelo autor

Demonstração. Para identificar e caracterizar o incentro de um triângulo, primeiramente precisamos verificar a propriedade relativa a um ponto P qualquer, quando P está sobre a bissetriz de um ângulo.

No prosseguimento da demonstração do Teorema 2.1.2, provemos agora que as três bissetrizes dos ângulos dos vértices do ΔABC se interceptam num único ponto.

Seja I pertencente às bissetrizes dos $\angle BCA$ e $\angle ABC$. Da Figura 21 e, aplicando o Lema 2.1.1, temos:

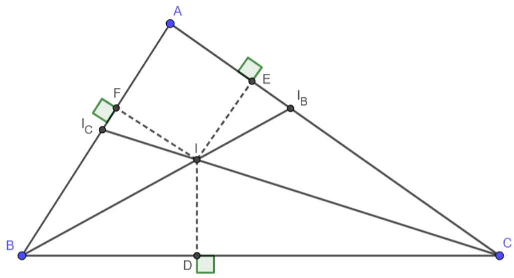
$$I \in \text{bissetriz } \angle BCA \Leftrightarrow d\left(I, AC\right) = d\left(I, BC\right),$$

$$I \in \text{bissetriz } \angle ABC \Leftrightarrow d\left(I, AB\right) = d\left(I, BC\right).$$

Então:

$$d\left(I, AC\right) = d\left(I, BC\right).$$

Figura 21 – ΔABC e as bissetrizes dos ângulos de seus vértices

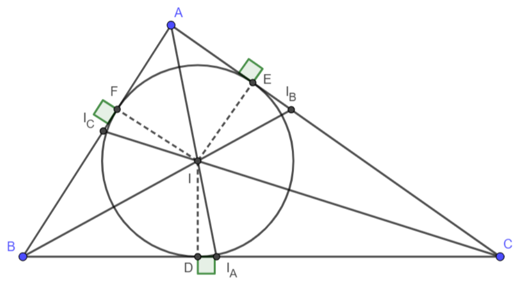


Fonte: elaborada pelo autor

Assim, novamente pelo Lema 2.1.1, $I \in$ bissetriz de $\angle BAC$. Observe ainda que, como $d\,(I, AC) = d\,(I, BC) = d\,(I, AB)$, I equidista dos lados do ΔABC.

Portanto, I é o encontro das bissetrizes internas do ΔABC, assim I também é o centro da circunferência inscrita a esse triângulo, sendo $d\,(I, AC) = d\,(I, BC) = d\,(I, AB) = r$ o seu raio, conforme a Figura 22.

Figura 22 – Incentro (I) e a circunferência inscrita ao ΔABC



Fonte: elaborada pelo autor

□

Vetor posição do Incentro

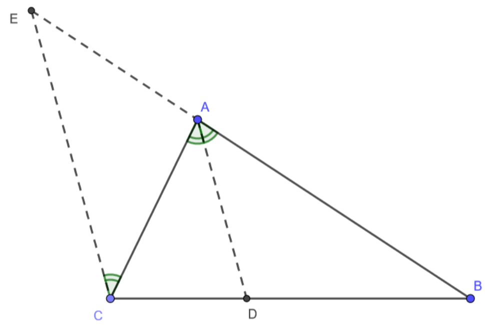
Primeiramente, faremos uma rápida demonstração do teorema da bissetriz interna, que servirá de subsídio para determinarmos o vetor posição do incentro.

Teorema 2.1.3. *(THIAGO, 2012a) A bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.*

Demonstração. Seja AD a bissetriz interna relativa ao ângulo $\angle A$ do triângulo ΔABC. Essa bissetriz determina sobre o lado BC o ponto D, conforme a Figura 23.

Na construção da Figura 23, no ΔABC, traçamos uma reta paralela ao segmento AD que passa pelo ponto C e a reta suporte ao segmento AB. Essas duas retas se encontram no ponto E.

Figura 23 – ΔABC, bissetriz interna AD



Fonte: elaborada pelo autor

Da Figura 23, podemos concluir que, $\angle DAC = \angle ACE$ pois são ângulos alternos internos das retas paralelas AD e CE. E também, $\angle BAD = \angle AEC$, pois são ângulos correspondentes destas mesmas retas parelelas.

Como $\angle BAD = \angle DAC$, temos que $\angle ACE = \angle AEC$. Portanto, ΔACE é isósceles com $AE = AC$.

Pelo Teorema de Tales (PINHEIRO, 2012), $\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{AE}{DC}$. Como $AE = AC$, segue que:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}.$$

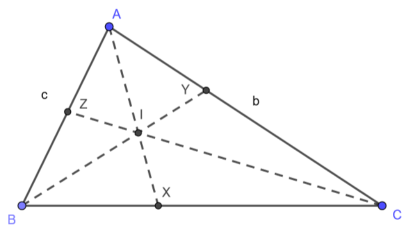
□

Na determinação do vetor posição do incentro, aplicamos o Teorema 2.1.3 aos lados do ΔABC na Figura 24. Assim, segue que:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{c}{b},$$

onde b e c são os lados AC e AB, respectivamente, do ΔABC.

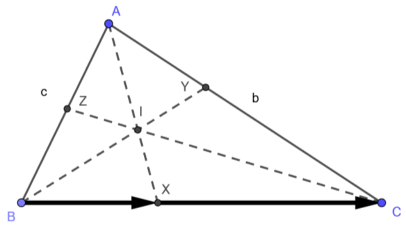
Figura 24 – ΔABC e incentro (I)



Fonte: elaborada pelo autor

Vetorialmente, como BX e XC são segmentos paralelos, de mesmo sentido e direção, temos $\overrightarrow{BX} = \dfrac{c}{b} \cdot \overrightarrow{XC}$, sendo que a, b e c são os lados do ΔABC como se verifica na Figura 25.

Figura 25 – Vetores paralelos



Fonte: elaborada pelo autor

Pela Figura 26 podemos desenvolver a seguinte soma vetorial: $\overrightarrow{BX} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{BC}$. Juntando ambas as equações temos:

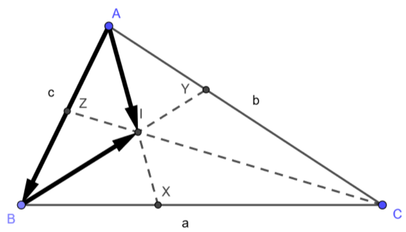
$$\frac{c}{b}\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$$

$$\frac{c}{b}\left(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{X}\right) + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{X} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{X} + \frac{c}{b}\overrightarrow{X} = \frac{c\overrightarrow{C}}{b} + \overrightarrow{B} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{X} = \frac{c\overrightarrow{C} + b\overrightarrow{B}}{c+b}.$$

Figura 26 – ΔABC e incentro (I)



Fonte: elaborada pelo autor

Analogamente, podemos obter as expressões vetoriais para os vetores posição $\overrightarrow{Y}$ e $\overrightarrow{Z}$:

$$\overrightarrow{Y} = \frac{a\overrightarrow{A} + c\overrightarrow{C}}{a+c},$$

$$\overrightarrow{Z} = \frac{a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B}}{a+b}.$$

Da Figura 26 uma vez que $\overrightarrow{AI} \parallel \overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BI} \parallel \overrightarrow{BY}$ temos as seguintes operações vetoriais:

$$\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AX},$$

$$\overrightarrow{BI} = \mu\overrightarrow{BY}$$

e

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI}.$$

Daí vem:

$$\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BY} = \lambda\overrightarrow{AX}.$$

Então:

$$\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} + \mu(\overrightarrow{I_B} - \overrightarrow{B}) = \lambda(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{A}).$$

Sem perda de generalidade, faz-se $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$:

$$\overrightarrow{B} + \mu\left(\frac{a\overrightarrow{A} + c\overrightarrow{C}}{a+c} - \overrightarrow{B}\right) = \lambda\left(\frac{b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C}}{b+c}\right) \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{B}\left(\frac{\lambda b}{b+c} + \mu - 1\right) + \overrightarrow{C}\left(\frac{\lambda c}{b+c} - \frac{\mu c}{a+c}\right) = \overrightarrow{0}.$$

Como $\overrightarrow{B}$ e $\overrightarrow{C}$ não são paralelos, a soma anterior será nula se os coeficientes forem nulos:

$$\frac{\lambda b}{b+c} + \mu - 1 = 0$$

e

$$\frac{\lambda c}{b+c} - \frac{\mu c}{a+c} = 0.$$

O que resulta em $\lambda = \dfrac{b+c}{a+b+c}$ e $\mu = \dfrac{a+c}{a+b+c}$. Sabemos que $\overrightarrow{BI} = \mu\overrightarrow{BY}$ e aplicando nesta expressão os resultados para $\overrightarrow{Y}$ e para μ, vem:

$$\overrightarrow{I} - \overrightarrow{B} = \frac{a+c}{a+b+c}\left(\frac{a\overrightarrow{A} + c\overrightarrow{C}}{a+c} - \overrightarrow{B}\right) + \overrightarrow{B} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{I} = \frac{a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C}}{a+b+c}.$$

Portanto, o vetor posição do incentro, $\overrightarrow{I}$ é uma média ponderada dos vetores posições dos vértices do ΔABC com os seus lados como pesos.

No $\mathbb{R}^2$, temos que as coordenadas cartesianas dos vértices do ΔABC são: $\overrightarrow{A} = (x_A, y_A)$, $\overrightarrow{B} = (x_B, y_B)$ e $\overrightarrow{C} = (x_C, y_C)$. Logo, a expressão para as coordenadas de $\overrightarrow{I}$ fica:

$$\overrightarrow{I} = (x_I, y_I) = \left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right).$$

Incentro - Otimização

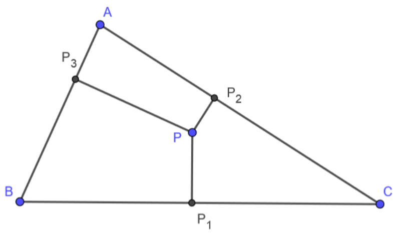
Mendes (2012b) apresentou o seguinte resultado para contribuir na caracterização do incentro como ponto de máximo:

Teorema 2.1.4. *(MENDES, 2012b) Seja um ponto P no interior de um triângulo ΔABC e P_1, P_2 e P_3 os pés das perpendiculares de P a BC, AC e AB, respectivamente. Então o ponto P que minimiza a expressão*

$$\frac{AB}{PP_3} + \frac{BC}{PP_1} + \frac{AC}{PP_2}$$

é o incentro do ΔABC.

Figura 27 – ΔABC e P interior



Fonte: elaborada pelo autor

Demonstração. Pela Figura 27 obtemos as expressões para as áreas dos triângulos $\Delta PBC, \Delta PAC$ e ΔPAB

$$[\Delta PBC] = \frac{(PP_1)(BC)}{2},$$

$$[\Delta PAC] = \frac{(PP_2)(AC)}{2}$$

e

$$[\Delta PAB] = \frac{(PP_3)(AB)}{2}.$$

Logo, as expressões acima resultam em:

$$[\Delta ABC] = [\Delta PBC] + [\Delta PAC] + [\Delta PAB] = \frac{(PP_1)(BC) + (PP_2)(AC) + (PP_3)(AB)}{2}.$$

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.3.2) já demonstrada no Capítulo 1 deste trabalho nos mostra que $(AB^2 + BC^2 + AC^2) \geq (AB + BC + AC)^2$. Dessa forma, aplicando esse resultado a expressão abaixo, obtemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{AB}{PP_3} + \frac{BC}{PP_1} + \frac{AC}{PP_2}\right)(AB.PP_3 + BC.PP_1 + AC.PP_2) &= \left(AB^2 + BC^2 + AC^2\right) \\ &\geq (AB + BC + AC)^2.\end{aligned}$$

Então temos:

$$\left(\frac{AB}{PP_3}+\frac{BC}{PP_1}+\frac{AC}{PP_2}\right)(AB.PP_3+BC.PP_1+AC.PP_2)\geq(AB+BC+AC)^2 \tag{2.1.1}$$

Como $AB + AC + BC = 2p$ (perímetro de ΔABC), e $PP_1.BC + PP_2.AC + PP_3.AB = 2[\Delta ABC]$, segue que:

$$\left(\frac{AB}{PP_3}+\frac{BC}{PP_1}+\frac{AC}{PP_2}\right)\geq\frac{(AB+BC+AC)^2}{(AB.PP_3+BC.PP_1+AC.PP_2)}=\frac{4p^2}{2[\Delta ABC]}.$$

$$\left(\frac{AB}{PP_3}+\frac{BC}{PP_1}+\frac{AC}{PP_2}\right)\geq\frac{2p^2}{[\Delta ABC]}.$$

Essa última expressão revela que o valor mínimo para $\frac{AB}{PP_3}+\frac{BC}{PP_1}+\frac{AC}{PP_2}$ é $\frac{2p^2}{[\Delta ABC]}$.

O Teorema 1.3.2 ainda diz que ocorre a igualdade na expressão 2.1.1 quando as parcelas que compõem a soma forem proporcionais. Dessa forma:

$$\frac{\frac{AB}{PP_3}}{AB.PP_3}=\frac{\frac{BC}{PP_1}}{BC.PP_1}=\frac{\frac{AC}{PP_2}}{AC.PP_2}\Leftrightarrow PP_1=PP_2=PP_3.$$

Essa última igualdade ocorre quando as projeções de P sobre os lados do ΔABC são iguais, logo, pelo Teorema 2.1.2, o ponto P é o incentro desse triângulo. □

2.2 Baricentro - X(2)

Nesta seção, abordamos o segundo ponto notável clássico, o baricentro, segundo Centro de Kimberling (X(2)), destacamos sua caracterização, sua posição em coordenadas cartesianas e suas propriedades de otimização.

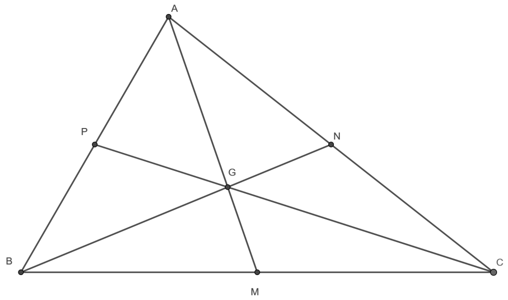
Caracterização do Baricentro

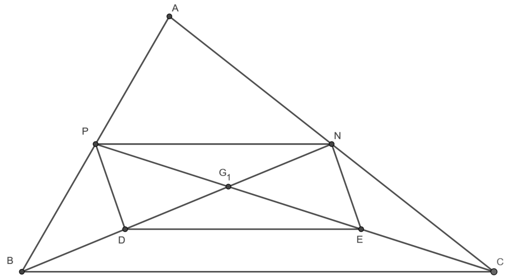
Teorema 2.2.1. *As três medianas de um triângulo interceptam-se num único ponto chamado baricentro, que divide cada uma das medianas em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.*

Demonstração. Dividiremos a abordagem em duas partes.

1. Provar a existência do encontro de duas medianas quaisquer (existência).

Figura 28 – ΔABC, medianas AM, BN e CP, baricentro G (à esq.); ΔABC e paralelogramo $PNED$ (à dir.)





Fonte: elaborada pelo autor

2. Provar que a terceira mediana intercepta nesse mesmo ponto (unicidade).

Na primeira parte, P e N são pontos médios de AB e AC, respectivamente, como indica a Figura 28. Dessa figura, concluímos que: $\Delta APN \sim \Delta ABC(LAL)$. Então:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$$

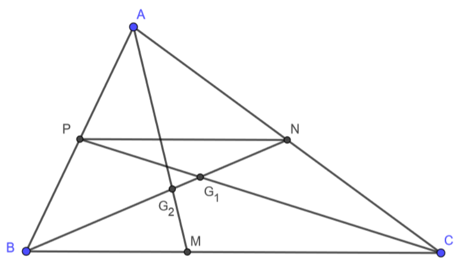
e PN é base média do ΔABC relativa ao lado BC, logo, $PN = \dfrac{BC}{2}$ e $PN \parallel BC$.

Sejam D e E pontos médios de BG_1 e de CG_1, respectivamente, como indica a Figura 28. No triângulo ΔBG_1C, DE é base média de BC. Assim, $DE \parallel BC$ e $DE = \dfrac{BC}{2}$.

Então, $DE = PN$ e $DE \parallel PN$. Logo, pela Definição 1.1.1 e pelo Teorema 1.1.2, o quadrilátero $PNED$ é paralelogramo.

Ainda, pelo Teorema 1.1.2, $DG_1 = G_1N$ e $EG_1 = G_1P$. Mas $BD = DG_1$ e $CE = EG_1$, logo conclui-se que: $BD+DG_1 = BG_1 = 2G_1N$ e $CE+EG_1 = CG_1 = 2G_1P$. Dessa forma, BN e CP interceptam num ponto G_1 que é o ponto médio das diagonais do paralelogramo $PNED$.

Figura 29 – Mediana AM intercepta BN em $G_2 \neq G_1$



Fonte: elaborada pelo autor

Na segunda parte, por hipótese, façamos $G_2 \neq G_1$ o ponto de encontro de AM e BN, onde M é o ponto médio de BC, como na Figura 29. Então, $AG_2 = 2G_2M$ e $BG_2 = 2G_2N$. Assim, o segmento BN determinará pontos distintos, $G_2 \neq G_1$, que dividem o segmento BN na mesma razão, o que é uma **contradição**. Logo, $G_2 = G_1 = G$.

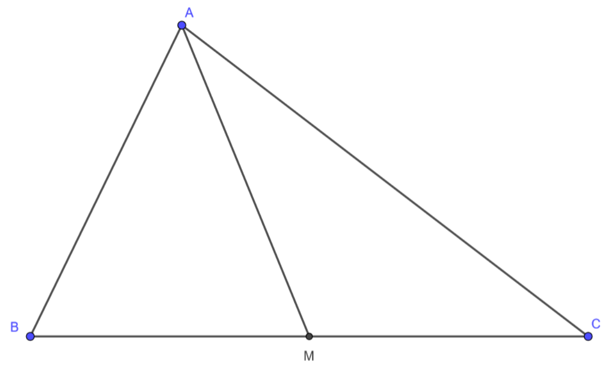
Finalmente, as medianas AM, BN e CP encontram-se em um único ponto G que divide os segmentos na razão de 2 para 1.

$$AG = 2GM, BG = 2GN, CG = 2GP.$$

□

A mediana AM divide o ΔABC em dois triângulos ΔABM e ΔAMC, como na Figura 30:

Figura 30 – ΔABC, mediana AM



Fonte: elaborada pelo autor

O ΔABC possui altura igual a h, que é a mesma altura dos triângulos ΔABM e ΔAMC.

$$[\Delta ABM] = \frac{BM.h}{2} \text{ e } [\Delta AMC] = \frac{MC.h}{2}.$$

Como M é ponto médio de BC, então $BM = MC$. Portanto:

$$[\Delta ABM] = [\Delta AMC].$$

Para as três medianas de um ΔABC, temos como resultado o seguinte teorema:

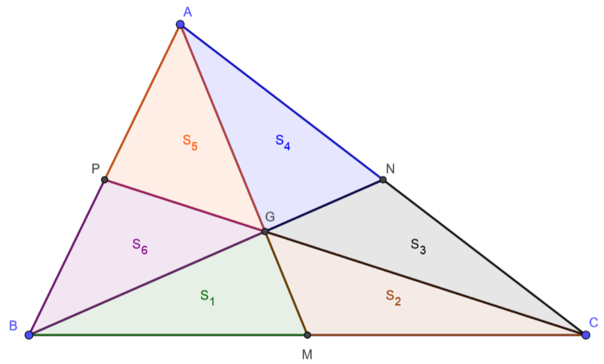
Teorema 2.2.2. *As três medianas de um ΔABC o dividem em seis triângulos de áreas iguais.*

Demonstração. O baricentro G divide a mediana AM na razão $2:1$, ou seja, $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{1}{2}$, pelo Teorema 2.2.1.

Seja $[\Delta ABC] = S$. Já sabemos que ΔABC e ΔAMC têm áreas iguais, assim, $[\Delta ABM] = [\Delta AMC] = \dfrac{S}{2}$. Sejam S_1, S_5 e S_6 as áreas dos triângulos $\Delta BGM, \Delta APG$ e ΔPBG. Então, pela Figura 31:

$$[\Delta ABM] = S_1 + S_5 + S_6 \text{ (2.2.1)}.$$

Figura 31 – ΔABC, medianas AM, BN e CP



Fonte: elaborada pelo autor

No ΔABM,

$$\frac{S_1}{S_5+S_6}=\frac{AG}{GM}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2} \quad (2.2.2)$$

Das expressões 2.2.1 e 2.2.2, segue que: $S_1=\dfrac{[\Delta ABM]}{3}$, logo, $S_1=\dfrac{S}{6}$.

No ΔBGC, a mediana GM o divide em dois triângulos de áreas iguais, a saber: $[\Delta BGM]=[\Delta GMC]$, portanto, $S_1=S_2=\dfrac{S}{6}$. Aplicando raciocínio análogo aos demais triângulos, concluímos que

$$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=\frac{S}{6}.$$

□

Como consequência deste último teorema, temos que os triângulos $\Delta AGC, \Delta AGB$ e ΔBGC tem áreas iguais, pois $S_3+S_4=S_5+S_6=S_1+S_2$.

Vetor posição do Baricentro

Teorema 2.2.3. *Seja um ΔABC de vértices A, B e C e seja O um ponto qualquer. Então o centro de massa ou centróide de ΔABC é o ponto G cuja expressão é:*

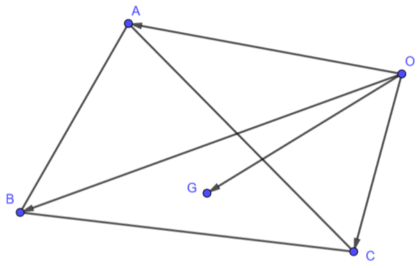
$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}.$$

Demonstração. Teremos que mostrar que a expressão do centro de massa de A, B e C independe da escolha do ponto O; e que $\overrightarrow{G}$ é caracterizado pela relação:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}.$$

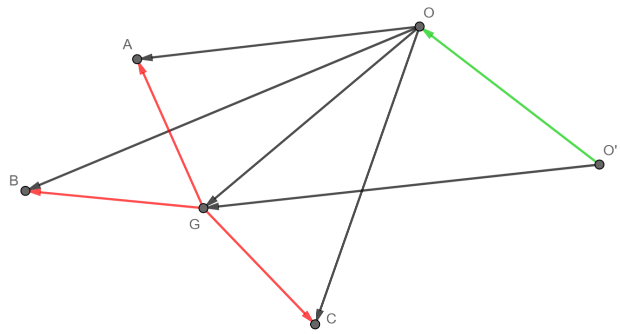
Assim, tome O' outro ponto qualquer, $O'\neq O$, conforme indica a Figura 33. Dessa forma temos:

Figura 32 – Pontos A, B, C, G e O



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 33 – A, B, C, G, O e O' pontos quaisquer no espaço



Fonte: elaborada pelo autor

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O'G} &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} \\
&= \overrightarrow{O'O} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\
&= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{O'O}}{3} \\
&= \frac{\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C}}{3}.
\end{aligned}$$

Uma vez que esta última expressão, para um ponto $O' \neq O$ é a mesma do enunciado do Teorema 2.2.3, logo ela independe da posição desse ponto. Façamos então $O = G$:

$$\overrightarrow{GG} = \frac{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}{3}$$

e que pela existência do elemento neutro da adição de vetores $\overrightarrow{GG} = \overrightarrow{0}$, visto na Seção

1.2.3, temos que:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

e

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{A} - \overrightarrow{G}) + (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{G}) + (\overrightarrow{C} - \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{0}.$$

Portanto, conclui-se a expressão para o vetor posição do baricentro ($\overrightarrow{G}$):

$$\overrightarrow{G} = \frac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{3}.$$

No $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{G}$ fica:

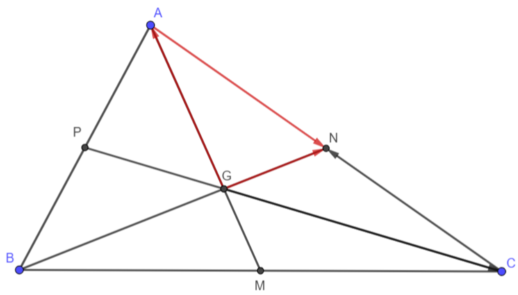
$$\overrightarrow{G} = (x_G, y_G) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

□

Vejamos agora uma abordagem vetorial para a propriedade do baricentro apresentada pelo Teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.4. *(VENTURI, 1949) Seja $\overrightarrow{G}$ o vetor posição do baricentro do ΔABC e $\overrightarrow{M}, \overrightarrow{N}$ e $\overrightarrow{P}$ os vetores posição dos pontos médios dos seus lados AC, BC e AB respectivamente.*

Figura 34 – ΔABC e baricentro (G)



Fonte: elaborada pelo autor

Então:

- $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GN}$ *e* $BG = 2GN$*.*
- $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ *e* $AG = 2GM$*.*
- $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GP}$ *e* $CG = 2GP$*.*

Demonstração. No triângulo ABC da Figura 34 temos que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{GN} \text{ e } \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{GN}.$$

Somando ambas as expressões acima:

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{GN} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CN} \\
&= \overrightarrow{GA} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \overrightarrow{GC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2} \\
&= \overrightarrow{GA} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \overrightarrow{GC} - \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \\
&= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.2.3, sabemos que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, então:

$$2\overrightarrow{GN} = -\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BG}.$$

Aplicando raciocínio análogo, concluí-se que: $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ e $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GP}$.

Pelo Teorema 1.2.2, os vetores encontrados são paralelos, e, pela Definição 1.2.1 esses vetores tem o mesmo sentido e suas normas são: $AG = 2GM, CG = 2GP$ e $BG = 2GN$. □

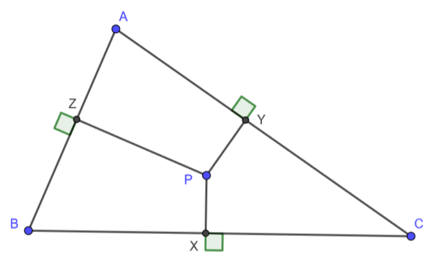
Concluímos acerca das características impostas pelo baricentro às medianas do ΔABC, e no prosseguimento, faremos uma análise das propriedades de otimização relativas a esse Ponto Notável Clássico.

Baricentro - Otimização

O teorema a seguir nos mostra como Kimberling (2010) apresenta o baricentro como um ponto notável que maximiza a expressão do produto de três distâncias:

Teorema 2.2.5. *O baricentro é o ponto de máximo do produto das três distâncias de um ponto interno aos lados de um ΔABC.*

Figura 35 – ΔABC e P interior



Fonte: elaborada pelo autor

Demonstração. Seja a função $f(x, y, z) = xyz$, onde $x = PX, y = PY$ e $z = PZ$ são as distâncias de P aos lados do ΔABC. Precisamos determinar x, y e z que maximizam essa função.

Sejam a, b e c os comprimentos de BC, AC e AB respectivamente. Pela Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica apresentada no Teorema 1.3.1, temos que:

$$\sqrt[3]{(ax)(by)(cz)} \leq \frac{ax+by+cz}{3} = \frac{2[\Delta ABC]}{3} \Leftrightarrow$$
$$xyz \leq \frac{8\left([\Delta ABC]\right)^3}{27abc}.$$

A igualdade ocorre quando $ax = by = cz$, ou seja, quando o ponto P determina triângulos de áreas iguais

$$[\Delta PAB] = [\Delta PAC] = [\Delta PBC].$$

Pelo Teorema 2.2.2, isto ocorre quando $P = G$. Assim, P é o baricentro do ΔABC.

□

2.3 Ortocentro - X(4)

Nesta seção, abordamos o quarto ponto notável clássico, o ortocentro, quarto Centro de Kimberling (X(4)), sua caracterização, posição em coordenadas no interior do triângulo e algumas de suas propriedades de otimização.

Apresentar o ortocentro - X(4) antes do circuncentro - X(3) neste trabalho se revelará útil do ponto de vista das demonstrações vindouras, uma vez que nos valeremos dos resultados dos teoremas apresentados aqui nesta parte do trabalho para prosseguir as discussão e as análise do circuncentro.

Caracterização do ortocentro

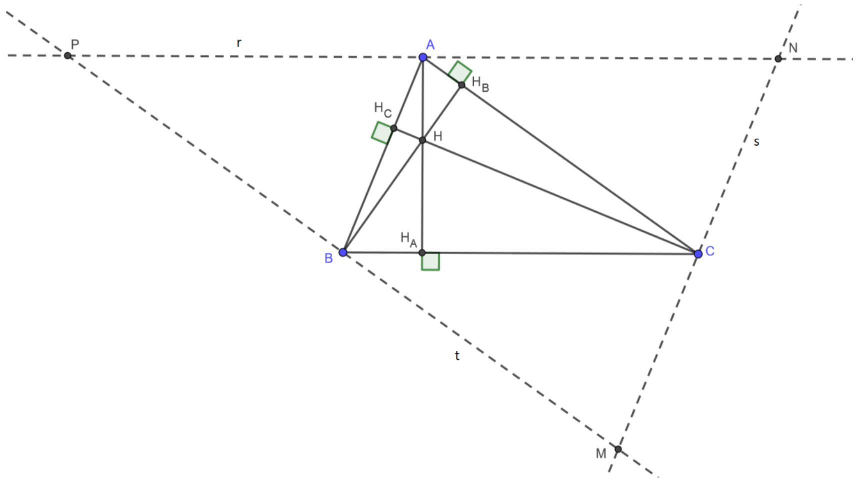
Teorema 2.3.1. *Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto, o ortocentro.*

Demonstração. Seja o triângulo ΔABC da Figura 36. Tracemos as retas $r \parallel BC$, que passa por A, $s \parallel AB$, que passa por C e $t \parallel AC$, que passa por B. Seja M, N e P os pontos de interseção das retas s e t, r e s e r e t, respectivamente. Assim, identificamos que:

- $AC \parallel t$ e $BP \subset t \Rightarrow AC \parallel BP$.
- $BC \parallel r$ e $AP \subset r \Rightarrow BC \parallel AP$.

Logo, pela Definição 1.1.1, o quadrilátero $ACBP$ é paralelogramo.

Figura 36 – ΔABC, ortocentro H e ΔMNP formado pelas retas suportes r, s e t



Fonte: elaborado pelo autor

De forma análoga, os quadriláteros $ABCN$ e $ABMC$ são paralelogramos. Diante disso, podemos concluir que: $AC = BP$, $AP = BC$, $AN = BC$, $AB = CN$, $AB = CM$, e $AC = BM$.

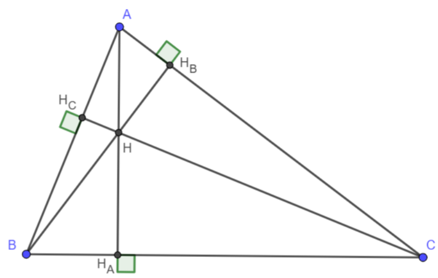
Daí, conclui-se que: A é ponto médio de PN, B é ponto médio de PM e C é ponto médio de MN.

No triângulo ΔABC, AH_A é altura relativa ao vértice A, então $AH_A \perp BC$. Como $BC \parallel r$ e $PN \subset r$, então AH_A é perpendicular a r e PN.

Já sabemos que A é ponto médio de PN e $AH_A \perp PN$, então a reta que contém AH_A é mediatriz de PN. Analogamente, as retas que contêm BH_B e CH_C são mediatrizes de PM e MN, respectivamente.

Logo, pelo Teorema 2.4.1, AH_A, BH_B, CH_C se intersectam nesse ponto, que, em relação ao ΔABC, é o seu ortocentro (H). $\square$

Figura 37 – ΔABC, ortocentro H



Fonte: elaborado pelo autor

Vetor posição do ortocentro

Agora vejamos a aplicação dos conhecimentos de geometria analítica vetorial na identificação do vetor posição do ortocentro.

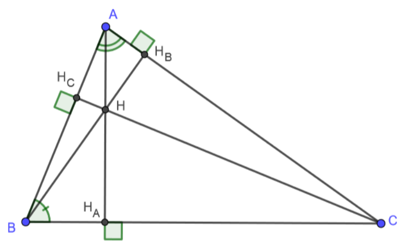
Observando a Figura 38, o ΔABC nos identificar as seguintes relações:

$$\text{tg}\angle B = \frac{CH_C}{BH_C} \Rightarrow CH_C = BH_C.\,\text{tg}\angle B$$

e

$$\text{tg}\angle A = \frac{CH_C}{AH_C} \Rightarrow CH_C = AH_C.\,\text{tg}\angle A.$$

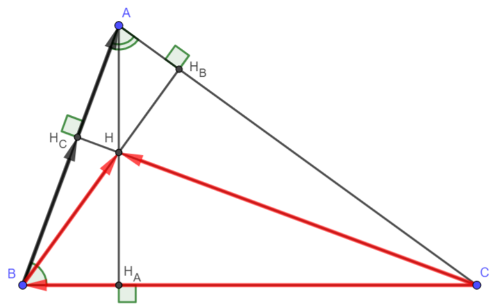
Figura 38 – ΔABC e as alturas traçadas dos seus vértices



Fonte: elaborado pelo autor

Comparando essas duas expressões temos: $BH_C.\,\text{tg}\angle B = AH_C.\,\text{tg}\angle A$ donde $BH_C = H_CA\dfrac{\text{tg}\angle A}{\text{tg}\angle B}$, com $\angle B \neq 90^o$.

Figura 39 – ΔABC, ortocentro H e vetores



Fonte: elaborado pelo autor

Traçando os vetores $\overrightarrow{H_CA}, \overrightarrow{BH_C}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CH}$ e $\overrightarrow{BH}$, como indica a Figura 39 verificamos que:

$$\overrightarrow{BH_C} + \overrightarrow{H_CA} = \overrightarrow{BA} \qquad (2.2.3)$$

.

$$\frac{\text{tg}\angle A}{\text{tg}\angle B}\overrightarrow{H_CA} + \overrightarrow{H_CA} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{H_CA} = \frac{\text{tg}\angle B}{\text{tg}\angle A + \text{tg}\angle B}\overrightarrow{BA} \qquad (2.2.4),$$

combinando as expressões 2.2.3 e 2.2.4:

$$\overrightarrow{BH_C} = \frac{\text{tg}\angle A}{\text{tg}\angle A + \text{tg}\angle B}\overrightarrow{BA} \qquad (2.2.5)$$

Sabendo que $\overrightarrow{BH_C} = \overrightarrow{H_C} - \overrightarrow{B}$ e que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ e isolando $\overrightarrow{H_C}$ na expressão 2.2.5:

$$\overrightarrow{H_C} = \frac{\overrightarrow{A}\,\mathrm{tg}\angle A + \overrightarrow{B}\,\mathrm{tg}\angle B}{\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B} \qquad (2.2.6).$$

Analogamente,

$$\overrightarrow{H_B} = \frac{\overrightarrow{A}\,\mathrm{tg}\angle A + \overrightarrow{C}\,\mathrm{tg}\angle C}{\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle C} \qquad (2.2.7)$$

e

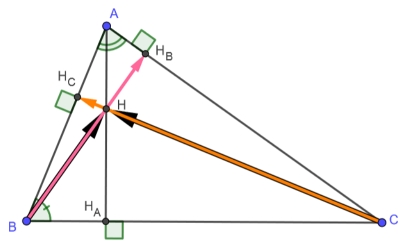
$$\overrightarrow{H_A} = \frac{\overrightarrow{B}\,\mathrm{tg}\angle B + \overrightarrow{C}\,\mathrm{tg}\angle C}{\mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C} \qquad (2.2.8).$$

A Figura 39 ainda nos permite verificar a seguinte soma vetorial envolvendo o ponto H, o ortocentro, e os vértices B e C do triângulo ΔABC:

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH} \qquad (2.2.9).$$

Os vetores $\overrightarrow{BH}$ e $\overrightarrow{CH}$ são paralelos aos vetores $\overrightarrow{BH_B}$ e $\overrightarrow{CH_C}$, respectivamente, conforme a Figura 40. Logo,

Figura 40 – Vetores paralelos



Fonte: elaborado pelo autor

- $\overrightarrow{BH} = \lambda\overrightarrow{BH_B}, \qquad \lambda > 0 \qquad (2.2.10).$
- $\overrightarrow{CH} = \mu\overrightarrow{CH_C}, \qquad \mu > 0 \qquad (2.2.11).$

Combinando as expressões $2.2.6, 2.2.7, 2.2.9, 2.2.10$ e $2.2.11$ temos:

$$\mu\overrightarrow{CH_C} = \overrightarrow{CB} + \lambda\overrightarrow{BH_B} \Leftrightarrow$$

$$\mu\left(\frac{\overrightarrow{A}tg\angle A + \overrightarrow{B}tg\angle B}{tg\angle A + tg\angle B} - \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} + \lambda\left(\frac{\overrightarrow{A}tg\angle A + \overrightarrow{C}tg\angle C}{tg\angle A + tg\angle C} - \overrightarrow{B}\right).$$

Sem perda de generalidade, façamos $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$. Então, a expressão obtida fica:

$$\mu\left(\frac{\overrightarrow{A}tg\angle A + \overrightarrow{B}tg\angle B}{tg\angle A + tg\angle B}\right) = \overrightarrow{B} + \lambda\left(\frac{\overrightarrow{A}tg\angle A + \overrightarrow{C}tg\angle C}{tg\angle A + tg\angle C} - \overrightarrow{B}\right).$$

Daí chegamos a:

$$\overrightarrow{A}\left(\mu\frac{tg\angle A}{tg\angle A+tg\angle B}-\lambda\frac{tg\angle A}{tg\angle A+tg\angle C}\right)+\overrightarrow{B}\left(\mu\frac{tg\angle B}{tg\angle A+tg\angle B}+\lambda-1\right)=\overrightarrow{0}.$$

Sabemos que A e B não são paralelos, portanto equação soma vetorial acima só poderá resultar em um vetor nulo se os coeficientes de $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$ forem ambos nulos, sendo que para essa análise será dividida em duas equações, uma para as abscissas dos vetores $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$ e outra para as ordenadas:

- $\mu\dfrac{tg\angle A}{tg\angle A+tg\angle B}-\lambda\dfrac{tg\angle A}{tg\angle A+tg\angle C}=0.$
- $\mu\dfrac{tg\angle B}{tg\angle A+tg\angle B}+\lambda-1=0.$

Isolando μ, temos:

$$\mu=\lambda\frac{tg\angle A+tg\angle B}{tg\angle A+tg\angle B}.$$

Substituindo a expressão obtida para μ na *equação 1*:

$$\lambda\frac{\cancel{tg\angle A+tg\angle B}}{tg\angle A+tg\angle C}\frac{tg\angle B}{\cancel{tg\angle A+tg\angle B}}+\lambda-1=0.$$

Logo,

$$\lambda=\frac{tg\angle A+tg\angle C}{tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C}$$

e

$$\mu=\frac{tg\angle A+tg\angle B}{tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C}.$$

Por fim, substituindo as expressões para λ e μ na expressão (8), obtemos o vetor posição do ortocentro ($\overrightarrow{H}$):

$$\overrightarrow{H}-\overrightarrow{B}=\lambda\left(\overrightarrow{H_B}-\overrightarrow{B}\right)\Rightarrow\overrightarrow{H}=\frac{\overrightarrow{A}tg\angle A+\overrightarrow{B}tg\angle B+\overrightarrow{C}tg\angle C}{tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C}.$$

No $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{H}$ fica:

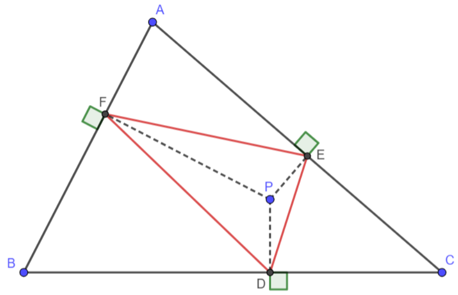
$$\overrightarrow{H}=(x_H,y_H)=\left(\frac{x_Atg\angle A+x_Btg\angle B+x_Ctg\angle C}{tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C},\frac{y_Atg\angle A+y_Btg\angle B+y_Ctg\angle C}{tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C}\right).$$

Ortocentro - Otimização

Nesta etapa vamos identificar a propriedade de otimização relativa ao ortocentro. Porém, primeiramente definimos Triângulo Pedal e Triângulo Órtico, bem como apresentamos um teorema que caracteriza a relação do ortocentro do ΔABC e o seu triângulo órtico.

Definição 2.3.2. *Seja P um ponto qualquer interior ao triângulo ABC e sejam D, E e F as projeções ortogonais de P sobre os lados BC, AC e AB. O triângulo ΔDEF será chamado de triângulo pedal.*

Figura 41 – ΔABC, ponto P, suas projeções e triângulo pedal ΔDEF



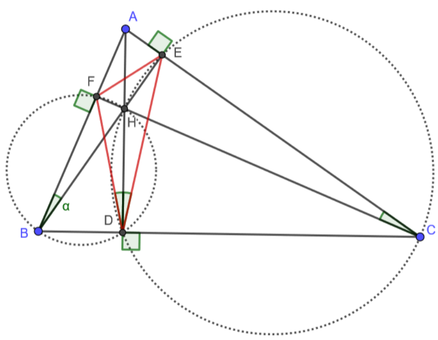
Fonte: elaborado pelo autor

Definição 2.3.3. *Considere ΔABC, não retângulo, e sejam D, E e F os pés das alturas de ΔABC. O ΔDEF é chamado de triângulo órtico do ΔABC.*

Pelas Definições 2.3.2 e 2.3.3, o triângulo órtico é um triângulo pedal cujos vértices são as projeções do ortocentro sobre os lados do ΔABC.

Teorema 2.3.4. *O ortocentro (H) do ΔABC é o incentro do seu triângulo órtico ΔDEF.*

Figura 42 – ΔABC, triângulo órtico ΔDEF

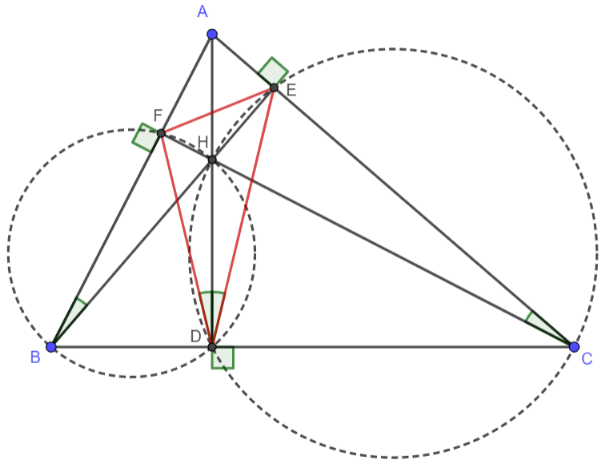


Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Como indica a Figura 42, $\angle ABE = \alpha$. Então $\angle EAB = 90^o - \alpha$. E $\angle FCA = 90^o - \angle CAF = 90^o - \angle EAB = 90^o - (90^o - \alpha) = \alpha$.

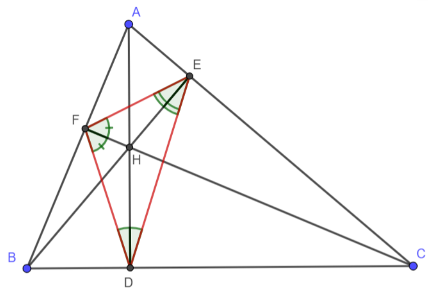
Da Figura 43, $\angle BFH + \angle BDH = 180^o$, logo o quadrilátero $BDHF$ é inscritível (THIAGO, 2012d), logo $\angle FBH = \angle FDH = \alpha$. Analogamente, $\angle ECH = \angle EDH = \alpha$.

Figura 43 – ΔABC, triângulo órtico ΔDEF e quadriláteros inscritíveis



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 44 – H é ortocentro de ΔABC e incentro de ΔDEF



Fonte: elaborado pelo autor

Assim, o ortocentro, H, do ΔABC está na bissetriz de $\angle FDE$ do triângulo órtico ΔDEF. Aplicando raciocínio análogo para os ângulos $\angle EFD$ e $\angle FED$, concluí-se que H é o incentro do ΔDEF.

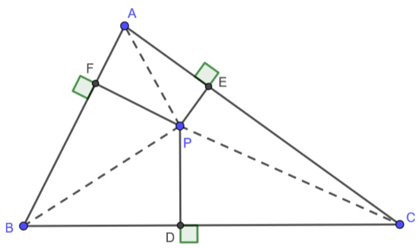
□

Hiriart-Urruty e Laurent (2014) mostraram a propriedade do ortocentro como ponto de mínimo:

Teorema 2.3.5. *(HIRIART-URRUTY; LAURENT, 2015) A soma das distâncias de P, interior ao ΔABC aos vértices do triângulo pedal e aos vértices desse triângulo é mínima quando P for o ortocentro do ΔABC, isto é, $PA+PB+PC+PD+PE+PF$ é mínima, quando P for o ortocentro.*

Demonstração. Para demonstrarmos tal propriedade, nos valeremos da Definição 2.3.2 para o triângulo pedal e do conceito de distância de ponto a reta.

Figura 45 – Ortocentro como ponto de mínimo



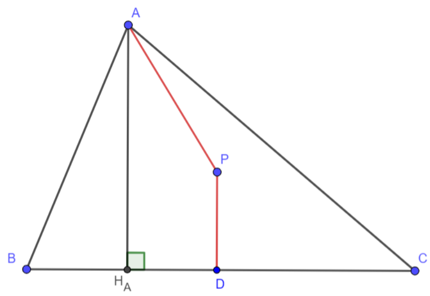
Fonte: elaborado pelo autor

Seja P um ponto no interior do ΔABC conforme a Figura 46. Queremos encontrar a condição que torna $PA + PB + PC + PD + PE + PF$ mínima. Primeiramente vamos analisar essa condição pela posição dos pontos A, P e D.

Seja $S_1 = PA + PD$. A soma S_1 será minimizada quando os pontos A, P e D estiverem alinhados e quando a distância de A para D for a menor possível, condição que será alcançada quando o segmento AD for perpendicular ao lado BC do ΔABC. Dessa forma, $D = H_A$.

Então, S_1 é mínima quando os pontos A, P e D são colineares. O segmento AD é mínimo, quando $D = H_A$, dessa forma, todos os pontos que minimizam a soma S_1 estão sobre o segmento AD, na situação $D = H_A$, sendo que o ortocentro é um desses pontos.

Figura 46 – Distância $PA + PD$



Fonte: elaborado pelo autor

Analogamente, as somas $S_2 = PB + PE$ e $S_3 = PC + PF$ são mínimas quando os três pontos forem colineares. A interseção de AD, BE e CF é o ortocentro, na condição de S_1, S_2 e S_3 mínima.

Portanto, $P = H$ e minimiza $S_1 + S_2 + S_3 = PA + PB + PC + PD + PE + PF$.

Concluí-se também que, quando isso ocorre, o triângulo pedal ΔDEF se trata do triângulo órtico, pois os pontos que formam os vértices do triângulo pedal são as projeções de P sobre os lados do ΔABC, nos termos da Definição 2.3.2.

$\square$

Ainda sobre triângulos pedais, destaca-se o Problema de Fagnano[1] que concluiu que o triângulo de menor perímetro que pode ser inscrito num triângulo acutângulo é o triângulo órtico. Uma das demonstrações para esse problema foi apresentada por Pasquali (2004).

2.4 Circuncentro - X(3)

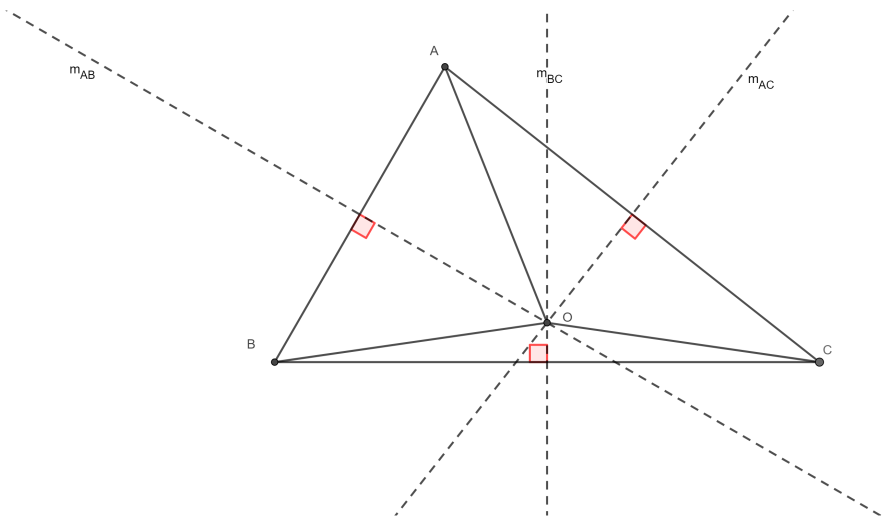
Nesta seção, abordamos o terceiro ponto notável clássico, o circuncentro, terceiro Centro de Kimberling (X(3)), sua caracterização, posição em coordenadas no interior do triângulo e algumas de suas propriedades de otimização.

Alguns dos resultados apresentados aqui são baseados nos teoremas demonstrados para o ortocentro - X(4) de um triângulo.

Caracterização do circuncentro

Teorema 2.4.1. *As três mediatrizes de um triângulo ΔABC se interceptam num ponto chamado circuncentro que é o centro da circunferência circunscrita a esse triângulo.*

Figura 47 – ΔABC e mediatrizes m_{AB}, m_{AC} e m_{BC}



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Sejam m_{BC}, m_{AB} e m_{AC} as mediatrizes relativas aos lados BC, AB e AC, respectivamente, e seja O o encontro das mediatrizes BC e AB.

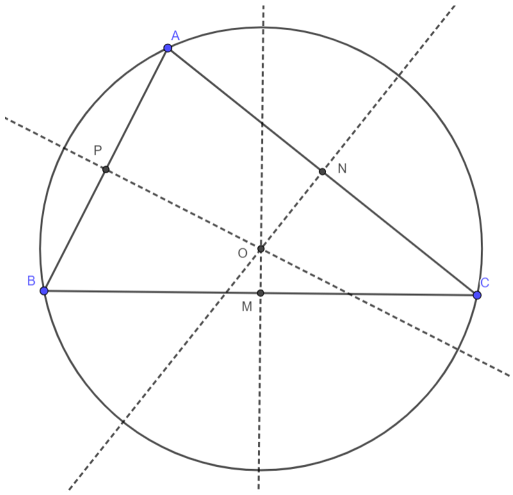
Sabemos que $O \in m_{BC} \Leftrightarrow OB = OC$, da mesma forma $O \in m_{AC} \Leftrightarrow OA = OC$. Logo, $OA = OB$.

[1] Esse problema foi estabelecido pelo matemático Giulio Carlos Fagnano del Toschi (1682-1766) , que foi completamente demonstrado por seu filho Giovanni Fagnano (1715-1797) em 1775 utilizando cálculo diferencial.

Como $OA = OB \Leftrightarrow O \in m_{AB}$, então O é a interseção das três mediatrizes. $\square$

Uma vez que $OA = OB = OC$, o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC.

Figura 48 – ΔABC inscrito, circunferência de centro O



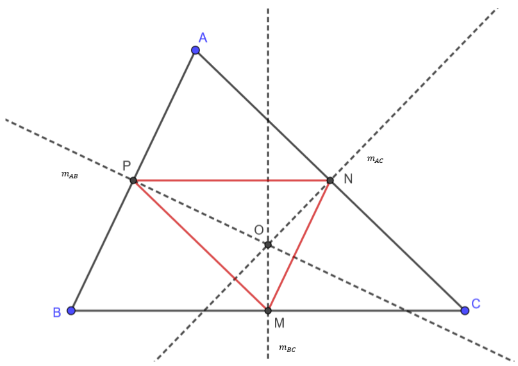
Fonte: elaborado pelo autor

Vetor posição do circuncentro

Teorema 2.4.2. *O circuncentro do ΔABC é o ortocentro do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do ΔABC.*

Demonstração. Sejam os pontos M, N e P médios de BC, AC e AB, respectivamente. A partir desses pontos são traçadas as mediatrizes m_{BC}, m_{AC} e m_{AB}.

Figura 49 – ΔABC e ΔABC



Fonte: elaborado pelo autor

Como $PN \parallel BC$ e $m_{BC} \perp BC$, então $PN \perp m_{BC}$. Analogamente, $PM \perp m_{AC}$ e $MN \perp m_{AB}$. As mediatrizes m_{BC}, m_{AC} e m_{AB} passam pelos vértices do triângulo

ΔMNP, e contém as alturas de ΔMNP, pois $m_{BC} \perp PN, m_{AC} \perp PM$ e $m_{AB} \perp MN$. Portanto, essas retas concorrem no ortocentro de ΔMNP. $\square$

Como consequência disso, obtemos a expressão do vetor posição do circuncentro.

Como já demonstrado, o ponto O é o ortocentro do ΔMNP. Dessa forma, à luz da expressão do vetor posição do ortocentro de um ΔABC, podemos expressar $\overrightarrow{O}$ da seguinte forma:

$$\overrightarrow{O} = \frac{\overrightarrow{M} tg\angle A + \overrightarrow{N} tg\angle B + \overrightarrow{P} tg\angle C}{tg\angle A + tg\angle B + tg\angle C}.$$

Além disso, como M, N e P são pontos médios de BC, AC e AB: $\overrightarrow{M} = \dfrac{\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{2}, \overrightarrow{N} = \dfrac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C}}{2}, \overrightarrow{P} = \dfrac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}}{2}$, pelo Teorema 1.2.3. Substituindo esses resultados na expressão do circuncentro:

$$\overrightarrow{O} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{2} tg\angle A + \dfrac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C}}{2} tg\angle B + \dfrac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}}{2} tg\angle C}{tg\angle A + tg\angle B + tg\angle C} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{O} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{A}(tg\angle B+tg\angle C)+\overrightarrow{B}(tg\angle A+tg\angle C)+\overrightarrow{C}(tg\angle A+tg\angle B)+\overrightarrow{A}tg\angle A+\overrightarrow{B}tg\angle B+\overrightarrow{C}tg\angle C-\left(\overrightarrow{A}tg\angle A+\overrightarrow{B}tg\angle B+\overrightarrow{C}tg\angle C\right)}{tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C}\right).$$

Manipulando a expressão e simplificando os termos comuns:

$$\overrightarrow{O} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{A}\cancel{(tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C)}+\overrightarrow{B}\cancel{(tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C)}+\overrightarrow{C}\cancel{(tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C)}}{\cancel{tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C}}\right) - \frac{\overrightarrow{H}}{2}.$$

O que resulta em:

$$\overrightarrow{O} = \frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{2} - \frac{\overrightarrow{H}}{2}.$$

Assim, substituindo a expressão para o vetor posição do baricentro do Teorema 2.2.3, o vetor posição do circuncentro fica:

$$\overrightarrow{O} = \frac{3\overrightarrow{G}}{2} - \frac{\overrightarrow{H}}{2}.$$

As coordenadas de $\overrightarrow{O}$ no $\mathbb{R}^2$ podem ser obtidas a partir das coordenadas de $\overrightarrow{G}$ e de $\overrightarrow{H}$ já demonstradas nas seções 2.2 e 2.3:

As coordenadas de $\overrightarrow{O}$ a partir da expressão anterior ficam:

$$\overrightarrow{O} = (x_O, y_O)$$

Em que:

$$x_O = \frac{1}{2}\left(\frac{x_A(2tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C)+x_B(tg\angle A+2tg\angle B+tg\angle C)+x_C(tg\angle A+tg\angle B+2tg\angle C)}{2(tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C)}\right)$$

e

$$y_O = \frac{1}{2}\left(\frac{y_A(2tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C)+y_B(tg\angle A+2tg\angle B+tg\angle C)+y_C(tg\angle A+tg\angle B+2tg\angle C)}{2(tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C)}\right)$$

Agora que já identificamos e caracterizamos o baricentro, o ortocentro e o circuncentro, no prosseguimento apresentamos um teorema acerca da colinearidade desses três Pontos Notáveis Clássicos: a Reta de Euler[2]

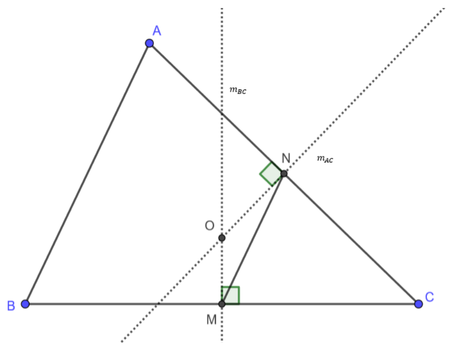
Reta de Euler

Teorema 2.4.3. *(THIAGO, 2012b) O ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo, não equilátero são colineares. A reta por eles determinada é chamada de* ***Reta de Euler****.*

Demonstração. Esta demonstração terá duas abordagens, uma utilizando conceitos relativos à geometria euclidiana plana e outra por um viés de geometria analítica vetorial tomando por base a expressão obtida para o vetor posição do circuncentro no Teorema 2.4.2.

Primeiramente, traçamos a base média, MN, do ΔABC, determinada pelos pontos médios dos lados AC e BC, os pontos M e N, respectivamente. No prosseguimento, tracemos as mediatrizes dos segmentos AC e BC para determinar o circuncentro (O), como indica a Figura 50.

Figura 50 – ΔABC e o quadrilátero inscritível $MCNO$



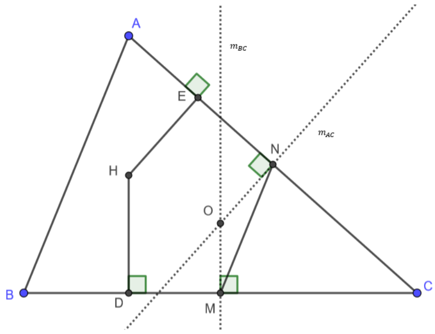
Fonte: elaborado pelo autor

[2] Leonhard Paul Euler (1707-1783) foi um matemático e físico suíço de língua alemã.

O quadrilátero $MCNO$ é inscritível, seus ângulos internos opostos somam 180º (THIAGO, 2012d), e, portanto $\angle MON = 180º - \angle NCM$.

Aplicando raciocínio análogo ao quadrilátero $DCEH$, como na Figura 51, temos que $\angle DHE = 180º - \angle DCE = 180º - \angle NCM$. Logo, $\angle DHE = \angle MON$.

Figura 51 – ΔABC e o quadrilátero inscritível $DCEH$



Fonte: elaborado pelo autor

Podemos concluir então que o $\Delta AHB \sim \Delta MON(AAA)$.

Daí:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{AH} \Rightarrow \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2}.$$

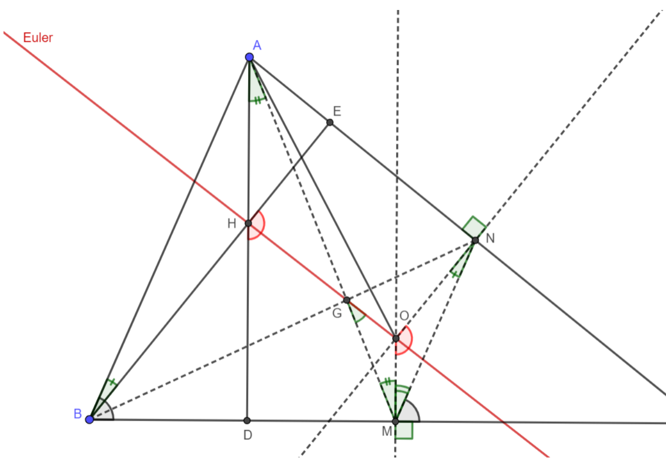
Traçando AM e BN, encontramos o baricentro (G) do ΔABC. Assim, $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{2}{1}$.

Como $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{2}{1}$ e sabemos que $\dfrac{AH}{OM} = \dfrac{2}{1}$, então

$$\frac{AH}{OM} = \frac{HG}{GO} = \frac{2}{1}$$

e concluímos que $\Delta AHG \sim \Delta MOG(AAA)$. Portanto, $\angle MGO = \angle AGH$. Dessa forma, H, G e O são colineares.

Figura 52 – ΔABC e a Reta de Euler



Fonte: elaborado pelo autor

□

Outra demonstração - abordagem vetorial. Do Teorema 2.4.2, temos que o vetor posição do circuncentro é dado pela expressão:

$$\overrightarrow{O} = \frac{3}{2}\overrightarrow{G} - \frac{1}{2}\overrightarrow{H}.$$

Daí,

$$2\overrightarrow{O} = 3\overrightarrow{G} - \overrightarrow{H} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{O} - 2\overrightarrow{G} = \overrightarrow{G} - \overrightarrow{H} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{HG}.$$

Dado que $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO}$, então, pelo Teorema 1.2.2, $\overrightarrow{GO} \parallel \overrightarrow{HG}$, e H, G e O são colineares. □

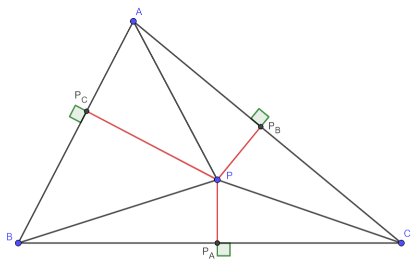
Circuncentro - Otimização

Teorema 2.4.4. *(LU, 2007) Seja um ponto P no interior do triângulo ΔABC. Se x, y e z são as distâncias de P aos lados do triângulo ΔABC, então*

$$PA + PB + PC \geq 2(x + y + z)$$

sendo que a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo ΔABC é equilátero e o ponto P é o circuncentro.

Figura 53 – Ponto P e os segmentos que determinam as distâncias de P até os lados do ΔABC



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Sejam P_A, P_B as P_C as projeções ortogonais de P aos lados do ΔABC. O quadrilátero AP_CPP_B da Figura 53 é inscritível, e, portanto $\angle P_CAP_B + \angle P_CPP_B = 180^o$.

Além disso, verifica-se no ΔP_CPP_B que, pela lei dos senos:

$$\frac{P_CP_B}{\text{sen}\angle A} = 2R = PA$$

onde PA é o diâmetro da circunferência circunscrita ao quadrilátero AP_CPP_B.

Seja $P_CP = z, P_BP = y$. Aplicando a lei dos cossenos ao ΔP_CPP_B:

$$P_CP_B^2 = y^2 + z^2 - 2yz.\cos(180^o - \angle A) = y^2 + z^2 + 2yz.\cos\angle A$$

sabemos que $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o \Rightarrow \cos \angle A = -\cos \angle B . \cos \angle C + \operatorname{sen} \angle B . \operatorname{sen} \angle C$

Então,

$$\begin{aligned} PA^2 \operatorname{sen}^2 \angle A &= y^2 + z^2 + 2yz\,(-\cos \angle B . \cos \angle C + \operatorname{sen} \angle B . \operatorname{sen} \angle C) \\ &= y^2 + z^2 + 2yz . \operatorname{sen} \angle B . \operatorname{sen} \angle C - 2yz . \cos \angle B . \cos \angle C \\ &= (y \operatorname{sen} \angle C + z \operatorname{sen} \angle B)^2 + (y \cos \angle C - z \cos \angle B)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$PA \operatorname{sen} \angle A \geq y \operatorname{sen} \angle C + y \operatorname{sen} \angle B \Rightarrow PA \geq y \frac{\operatorname{sen} \angle C}{\operatorname{sen} \angle A} + z \frac{\operatorname{sen} \angle B}{\operatorname{sen} \angle A}.$$

Analogamente, chamando $P_A P = x$,

$$PA \geq x \frac{\operatorname{sen} \angle C}{\operatorname{sen} \angle B} + z \frac{\operatorname{sen} \angle A}{\operatorname{sen} \angle B}$$

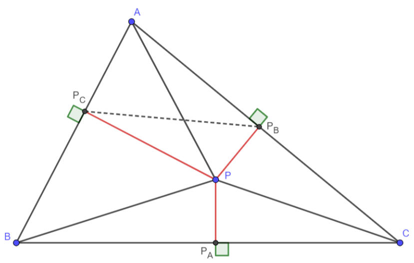
e

$$PC \geq x \frac{\operatorname{sen} \angle B}{\operatorname{sen} \angle C} + y \frac{\operatorname{sen} \angle A}{\operatorname{sen} \angle C}.$$

Fazendo $PA + PB + PC$:

$$PA+PB+PC \geq x \left(\frac{\operatorname{sen} \angle C}{\operatorname{sen} \angle B} + \frac{\operatorname{sen} \angle B}{\operatorname{sen} \angle C} \right) + y \left(\frac{\operatorname{sen} \angle A}{\operatorname{sen} \angle C} + \frac{\operatorname{sen} \angle C}{\operatorname{sen} \angle A} \right) + z \left(\frac{\operatorname{sen} \angle B}{\operatorname{sen} \angle A} + \frac{\operatorname{sen} \angle A}{\operatorname{sen} \angle B} \right) \quad (1).$$

Figura 54 – ΔABC, ponto P no seu interior e segmento $P_C P_B$



Fonte: elaborado pelo autor

A expressão anterior nos faz relembrar a Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica aplicada a dois números reais do Teorema 1.3.1, a saber: x e $\frac{1}{x}$:

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \left(\frac{1}{x} \right)}.$$

Logo,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad (2).$$

Aplicando esse resultado à desigualdade (1), temos que:

$$\frac{\operatorname{sen} \angle C}{\operatorname{sen} \angle B} + \frac{\operatorname{sen} \angle B}{\operatorname{sen} \angle C} \geq 2$$

$$\frac{\operatorname{sen}\angle A}{\operatorname{sen}\angle C}+\frac{\operatorname{sen}\angle C}{\operatorname{sen}\angle A}\geq 2$$

e

$$\frac{\operatorname{sen}\angle B}{\operatorname{sen}\angle A}+\frac{\operatorname{sen}\angle A}{\operatorname{sen}\angle B}\geq 2.$$

Dessa maneira $PA+PB+PC\geq 2x+2y+2z$.

Assim,

$$PA+PB+PC\geq 2\left(x+y+z\right) \qquad (3).$$

Para a demonstração do Teorema de Erdös-Mordell, enunciamos o seguinte lema apresentado por Torres (2003):

Lema 2.4.5. *(TORRES, 2003)* $PA\cdot PB\geq AB\cdot P_BP+AC\cdot P_CP$, *com igualdade se, e só se,* $P_BP_C\parallel BC$.

Torres (2003) destacou que a desigualdade apresentada no Lema 2.4.5, equivale às seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}PA&\geq\frac{AB}{BC}\cdot P_BP+\frac{AC}{BC}\cdot P_CP\\ PB&\geq\frac{BC}{AC}\cdot P_CP+\frac{AB}{AC}\cdot P_AP\\ PC&\geq\frac{AC}{AB}\cdot P_AP+\frac{BC}{AB}\cdot P_BP\end{aligned}$$

Somando essas desigualdades, segue que:

$$PA+PB+PC\geq\left(\frac{AC}{AB}+\frac{AB}{AC}\right)\cdot P_AP+\left(\frac{BC}{AB}+\frac{AB}{BC}\right)\cdot P_BP+\left(\frac{AC}{BC}+\frac{BC}{AC}\right)\cdot P_CP$$

Aplicando o resultado oriundo da Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica, conforme indica a expressão (2), esta última desigualdade fica:

$$\left(PA+PB+PC\right)\geq 2\left(P_AP+P_BP+P_CP\right).$$

Torres (2003) aponta que essa desigualdade será uma igualdade se, e só se, $AB=AC=BC$, e além disso, deve-se ter $P_AP_B\parallel AB, P_AP_C\parallel AC$ e $P_BP_C\parallel BC$. Dessa forma, conclui-se que esse resultado implica que P é o circuncentro do ΔABC que é equilátero (TORRES, 2003).

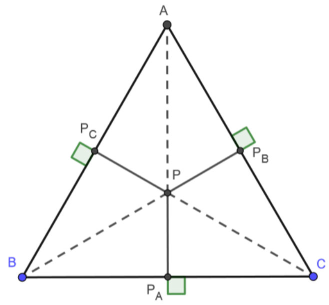
Outra constatação para esse resultado foi apresentada por Bogomolny (2018) quando foi utilizada construção geométrica para provar tal resultado (BOGOMOLNY, 2018).

Por outro lado, se ΔABC for equilátero, como na Figura 55, temos que

$$PA=PB=PC=\frac{2}{3}\cdot\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{AB\sqrt{3}}{3},$$

onde $\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$ é a altura do ΔABC.

Figura 55 – ΔABC equilátero. Ponto P é o circuncentro



Fonte: elaborado pelo autor

E,

$$x = y = z = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{6}.$$

Combinando esses resultados à desigualdade (3):

$$3.\frac{AB\sqrt{3}}{3} = 2\left(\frac{AB\sqrt{3}}{6} \cdot 3\right), \text{ o que comprova a igualdade.}$$

$\square$

3 Pontos Notáveis Não Clássicos

Neste Capítulo identificamos e apresentamos alguns centros de triângulo listados na Enciclopédia de Kimberling, elencados na Tabela 1 deste trabalho e que não são tão abordados no estudo dos Pontos Notáveis, e, por conseguinte, são denominados Pontos Notáveis Não Clássicos para fins deste trabalho.

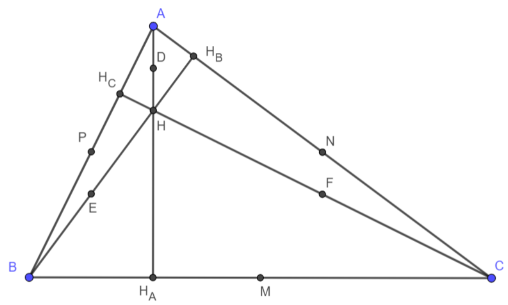
3.1 Centro da Circunferência dos Nove Pontos - X(5)

Clark Kimberling (2020) relacionou como o quinto ponto notável em sua Enciclopédia, o Centro da Circunferência dos Nove Pontos.

Nesse sentido, apresentaremos aqui nesta seção os pontos concíclicos, ainda que à primeira vista possam não indicar tal propriedade comum, e a posição do centro da circunferência formada por esses pontos.

Identificação da circunferência dos nove pontos

Figura 56 – ΔABC e os pontos $H_A, E, P, H_C, D, H_B, N, F, M$



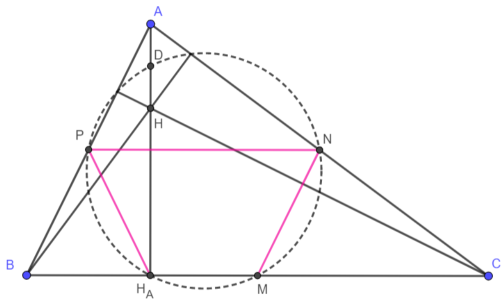
Fonte: elaborado pelo autor

Teorema 3.1.1. *(PINHEIRO, 1989) Seja o ΔABC conforme a Figura 56. Os pés das alturas, os pontos médios dos lados e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro do ΔABC, estão sobre uma circunferência chamada "circunferência dos nove pontos".*

A Revista do Professor de Matemática (RPM) número 14 apresentou a raiz histórica e a existência da circunferência que passa pelos nove pontos descritos no Teorema 3.1.1 (PINHEIRO, 1989). Apresentamos a seguir uma das possíveis demonstrações para o Teorema 3.1.1.

Demonstração. Demonstraremos que H_A e D pertencem à circunferência que passa pelos pontos M, N e P. Para atestarmos essa propriedade para os pontos E, H_C e F, H_B, o raciocínio será análogo.

Figura 57 – Quadrilátero PH_AMN



Fonte: elaborado pelo autor

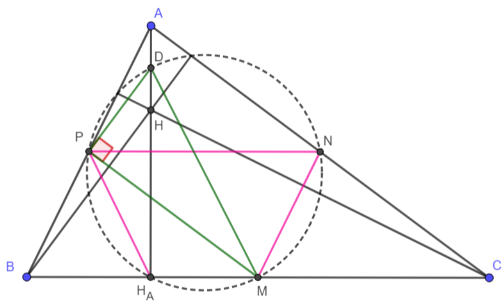
Da Figura 57, P e N são pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, logo PN é base média do ΔABC relativa ao lado BC, e, portanto, pelo Teorema 1.1.3, $PN \parallel BC$ e $PN = \frac{BC}{2}$. Pelo mesmo raciocínio, MN é base média de AB, logo $MN = PB$.

O ΔBH_AA é triângulo retângulo. Uma vez que P é ponto médio de AB, dessa forma H_AP é mediana relativa à hipotenusa AB, portanto $H_AP = PB$.

Como M e N são pontos médios de BC e de AC, respectivamente, pelo Teorema 1.1.3, MN é base média do ΔABC relativa ao lado AB, e, portanto, $MN \parallel AB$ e $MN = \frac{AB}{2}$.

Dessa forma, $MN = PB = H_AP$ e, como já demonstramos acima, $PN \parallel BC$. Então PH_AMN é um quadrilátero que possui dois lados paralelos e os outros dois tem comprimentos iguais. Assim, esse quadrilátero é um trapézio isósceles, e, portanto, é inscritível. A circunferência que passa por M, N e P também passa por H_A.

Figura 58 – D pertence à circunferência



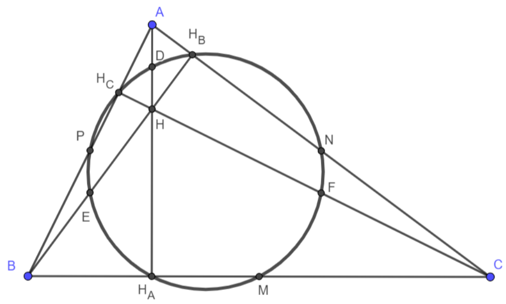
Fonte: elaborado pelo autor

Agora, em relação ao ponto D. Observando o ΔABC na Figura 58, $PM \parallel AC$ e $PM = \frac{AC}{2}$, conclui-se que PM é base média de AC, pelo Teorema 1.1.3. Ainda, pela Figura 58, temos que, $BH \perp AC$, $PM \parallel AC$ e $PD \parallel BH$. Então, $PD \perp PM$ donde se conclui que ΔDPM é retângulo em P.

Da Figura 58, ΔDH_AM e ΔDPM têm a mesma hipotenusa, DM, logo, os arcos DPM e DH_AM "observam"um ângulo de 180º sob o segmento em comum, a hipotenusa DM. Diante disso, DM é diâmetro da circunferência que passa pelos pontos D, P, H_A e M. Então o quadrilátero DPH_AM é inscritível.

Assim, a circunferência que passa por M, N e P, também passa por D. Adotando raciocínio análogo, a circunferência também passa por E, H_C e por F, H_B. Finalmente, $H_A, E, P, H_C, D, H_B, N, F, M$ são concíclicos.

Figura 59 – $H_A, E, P, H_C, D, H_B, N, F, M$ concíclicos



Fonte: elaborado pelo autor

□

A RPM 14 (PINHEIRO, 1989) nos ensinou que demonstração da existência da Circunferência dos Nove Pontos tem sido, erroneamente, atribuída a Euler pois o centro da Circunferência dos Nove Pontos se localiza na Reta de Euler, fato demonstrado em 1765.

Contudo, a demonstração da existência da Circunferência dos Nove Pontos foi creditada a Feuerbach, em trabalho publicado em 1822.

Por essa razão, a circunferência dos nove pontos também é conhecida como Circunferência de Feuerbach (BOYER, 1974).

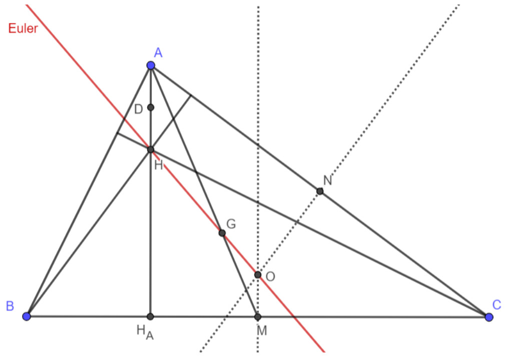
Teorema 3.1.2. *(PINHEIRO, 1989) O centro da circunferência dos nove pontos é o ponto médio do segmento formado pelo ortocentro e pelo circuncentro.*

Demonstração. Primeiramente, da Figura 58, verifica-se que o diâmetro da circunferência dos nove pontos é DM, pois $\angle DPM = 90^o$ descreve um arco capaz de 180º em relação ao segmento DM.

Já foi demonstrado que o ortocentro (H), o baricentro (G) e o circuncentro (O) são colineares e que estão localizados sobre a Reta de Euler. Na Figura 60, traçamos a Reta de Euler para localizar o segmento que une H e O.

Localizados o circuncentro (O) e o baricentro (G) do ΔABC, no prosseguimento, a partir da Figura 60, temos que $OM \perp BC$, uma vez que OM está sobre a mediatriz,

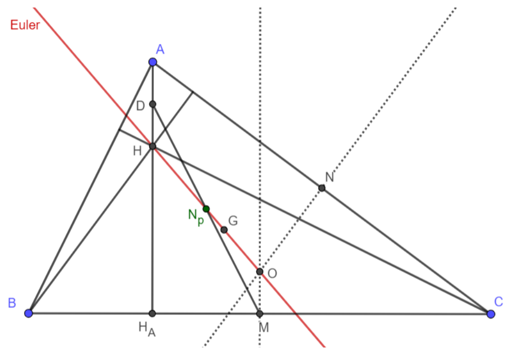
Figura 60 – ΔAGH, ΔOGM e a Reta de Euler



Fonte: elaborado pelo autor

e $AH \perp BC$, uma vez que AH está sobre a altura do ABC que parte do vértice A, $\angle OMG = \angle GAH$ e $\angle OGM = \angle AGH$, uma vez que estes são opostos pelo vértice. Daí, concluímos que $\Delta AGH \sim \Delta OGM(AAA)$, então $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{AH}{OM}$.

Figura 61 – ΔDHN_p e ΔN_pMO



Fonte: elaborado pelo autor

Como D é ponto médio de AH, então, $DH = \frac{AH}{2}$. Já sabemos que $AH = 2OM$, então $DH = OM$. Da Figura 61, temos que $\angle OMN_p = \angle N_pDH$, $\angle DN_pH = \angle ON_pM$ e $\angle DHN_p = \angle MON_p$. Dessa forma, concluímos que $\Delta DHN_p \equiv \Delta OMN_p(ALA)$ e então $DN_p = MN_p$, isto é N_p é o centro da circunferência. Também, $HN_p = N_pO$. Logo, N_p é ponto médio do segmento que une o ortocentro ao circuncentro.

□

Vetor posição do centro do círculo dos nove pontos

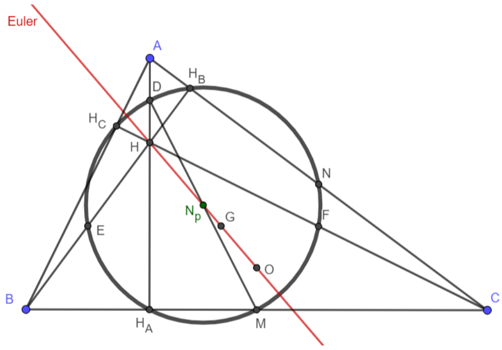
Pelo Teorema 3.1.2, sabemos que o centro da circunferência dos nove pontos, N_p, é o ponto médio do segmento que une o ortocentro (H) ao circuncentro (O).

$$\overrightarrow{HN_p} = \overrightarrow{N_pO} \Leftrightarrow \overrightarrow{N_p} - \overrightarrow{H} = \overrightarrow{O} - \overrightarrow{N_p}.$$

Então,

$$\overrightarrow{N_p} = \frac{\overrightarrow{H} + \overrightarrow{O}}{2}.$$

Figura 62 – Circunferência dos nove pontos e seu centro N_p



Fonte: elaborado pelo autor

Pelo Teorema 2.4.2 temos que $\overrightarrow{O} = \frac{3\overrightarrow{G} - \overrightarrow{H}}{2}$. Substituindo este resultado na expressão acima:

$$\overrightarrow{N_p} = \frac{3\overrightarrow{G} + \overrightarrow{H}}{4}.$$

Aplicando as expressões obtidas para os vetores posição do baricentro e do ortocentro, a expressão para o centro da circunferência dos nove pontos fica:

$$\overrightarrow{N_p} = \frac{tg\angle A\left(2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right) + tg\angle B\left(\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right) + tg\angle C\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + 2\overrightarrow{C}\right)}{tg\angle A + tg\angle B + tg\angle C} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{N_p} = \frac{\overrightarrow{A}(2tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C)+\overrightarrow{B}(tg\angle A+2tg\angle B+tg\angle C)+\overrightarrow{C}(tg\angle A+tg\angle B+2tg\angle C)}{tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C}.$$

No $\mathbb{R}^2$, as coordenadas x_{N_p} e y_{N_p} de $\overrightarrow{N_p}$ ficam:

$$x_{N_p} = \frac{x_A(2tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C)+x_B(tg\angle A+2tg\angle B+tg\angle C)+x_C(tg\angle A+tg\angle B+2tg\angle C)}{tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C}$$

e

$$y_{N_p} = \frac{y_A(2tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C)+y_B(tg\angle A+2tg\angle B+tg\angle C)+y_C(tg\angle A+tg\angle B+2tg\angle C)}{tg\angle A+tg\angle B+tg\angle C}.$$

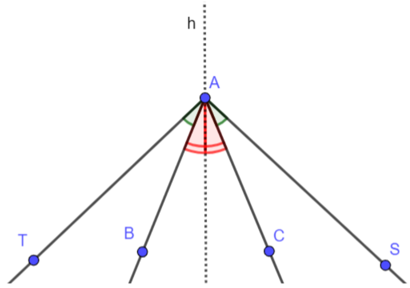
3.2 Ponto Simediano - X(6)

Kimberling (2010) relacionou como o sexto ponto notável em sua Enciclopédia, o Ponto Simediano.

Para demonstrar as propriedades relativas a esse ponto, bem como a sua caracterização, primeiramente apresentamos o conceito de linhas isogonais e os resultados dessa conceituação para o Ponto Simediano.

Definição 3.2.1. *(Patrascu; Smarandache, 2010) As linhas AB e AC são ditas isogonais quando possuem a mesma inclinação em relação à bissetriz h do $\angle TAS$.*

Figura 63 – Linhas isogonais AB e AC



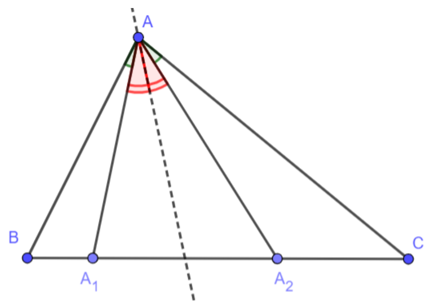
Fonte: elaborado pelo autor

Nesse sentido, podem-se enunciar algumas conclusões acerca dessa definição aplicada aos triângulos:

Teorema 3.2.2. *(Patrascu; Smarandache, 2010) Em um ΔABC, se AA_1 e AA_2 são cevianas isogonais, com A_1 e A_2 sobre o lado BC, então:*

$$\frac{A_1B}{A_1C}\frac{A_2B}{A_2C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Figura 64 – ΔABC e cevianas isogonais AA_1 e AA_2



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Note que:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{[BAA_1]}{[CAA_1]} = \frac{\frac{1}{2}.AB.AA_1.\operatorname{sen}(\angle BAA_1)}{\frac{1}{2}.AC.AA_1.\operatorname{sen}(\angle CAA_1)} = \frac{AB.\operatorname{sen}(\angle BAA_1)}{AC.\operatorname{sen}(\angle CAA_1)}$$

e

$$\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{[BAA_2]}{[CAA_2]} = \frac{\frac{1}{2}.AB.AA_2.\operatorname{sen}(\angle BAA_2)}{\frac{1}{2}.AC.AA_2.\operatorname{sen}(\angle CAA_2)} = \frac{AB.\operatorname{sen}(\angle BAA_2)}{AC.\operatorname{sen}(\angle CAA_2)}.$$

Pela Definição 3.2.1, tem-se que $\angle BAA_1 = \angle CAA_2$ e $\angle BAA_2 = \angle CAA_1$. Então, mulitplicando ambas as expressões acima, obtém-se:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\frac{A_2B}{A_2C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

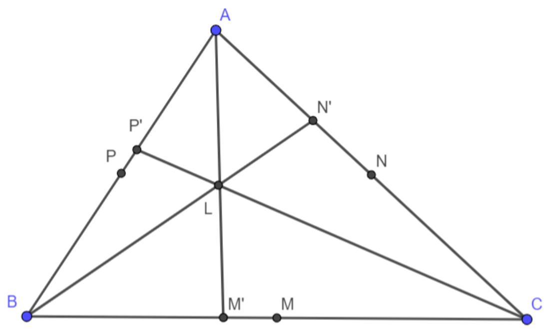
□

Os pontos A_1 e A_2 são ditos *conjugados isogonais* (OBM, 2017), se forem reflexões das medianas sobre as bissetriz do $\angle A$.

Em um ΔABC, as cevianas isogonais às medianas desse triângulo são chamadas de *simedianas* (**si**métrico + **mediana**) (OBM, 2017). Essas cevianas são simétricas às medianas do ΔABC em relação às bissetrizes internas dos vértices desse triângulo. Essa denominação especial nos remete ao teorema que enuncia a concorrência dessas simedianas, como demonstrado por Patrascu e Smarandache (2010).

Teorema 3.2.3. *(Patrascu; Smarandache, 2010) As simedianas de um ΔABC são concorrentes em um único ponto chamado de Ponto Simediano, ou Ponto de Lemoine*[1].

Figura 65 – ΔABC e o Ponto Simediano L



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente, do ΔABC, e AM', BN' e CP' as simedianas desse triângulo, como se verifica na Figura 65.

Obsevando a Figura 65, aplicando o Teorema 3.2.2, tem-se:

$$\frac{M'B}{M'C}\frac{MB}{MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Como M é ponto médio do segmento BC, então $MB = MC$, logo:

$$\frac{M'B}{M'C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Analogamente,

$$\frac{N'C}{N'A} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$$

e

$$\frac{P'A}{P'B} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

[1] Émile Michel Hyacinthe Lemoine (1840-1912) foi um engenheiro civil, matemático e geômetra francês

Assim,

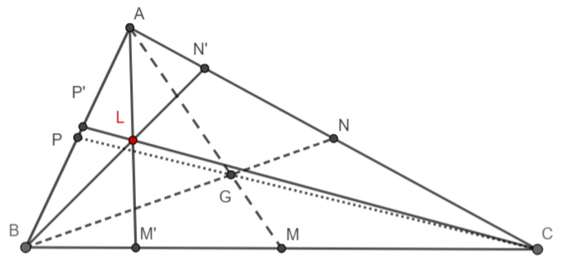
$$\frac{M'B.N'C.P'A}{M'C.N'A.P'B} = \frac{BC^2.AB^2.AC^2}{AB^2.BC^2.AC^2} = 1.$$

Pelo Teorema de Ceva (Teorema 1.1.5), segue que AM', BN' e CP' se intersectam em um ponto L, que é o Ponto Simediano ou Ponto de Lemoine. □

O Ponto de Simediano, $X(6)$, é o conjugado isogonal do baricentro, $X(2)$, em um ΔABC, gerado pelas simedianas, cevianas isogonais às medianas que geram o baricentro.

A título de exemplo, o conjugado isogonal do incentro - X(2), é o próprio incentro, uma vez que as cevianas isogonais das bissetrizes coincidem com as próprias bissetrizes do ΔABC (OBM, 2017).

Figura 66 – ΔABC, Ponto Simediano (L) e o Baricentro (G)

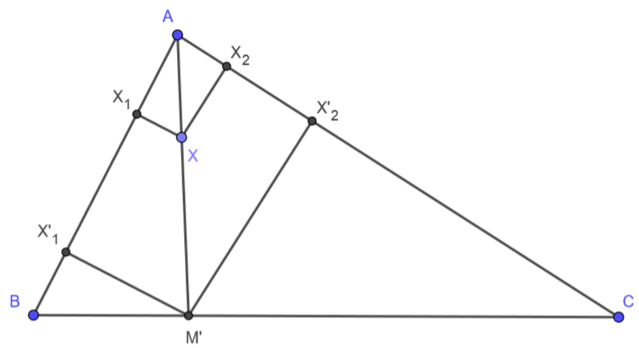


Fonte: elaborado pelo autor

O teorema a seguir nos mostra uma propriedade acerca de um ponto qualquer, interno a um ΔABC, que esteja sobre uma simediana desse triângulo.

Teorema 3.2.4. *(Patrascu; Smarandache, 2010) Se X é um ponto interior ao ΔABC sobre AM', ceviana isogonal à mediana que parte do vértice A, então a razão das distâncias de X aos lados AB e AC é igual à razão dos comprimentos de AB e AC, respectivamente.*

Figura 67 – ΔABC e a simediana AM'



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Sejam X_1 e X_2 as projeções do ponto X, que está sobre a simediana AM', sobre os lados AB e AC; e sejam X_1' e X_2' as projeções do ponto M' sobre os lados AB e AC, respectivamente. Logo $XX_1 \perp AB$, $M'X_1' \perp AB$ e $XX_2 \perp AC$, $M'X_2' \perp AC$.

Observando a Figura 67 e interpretando o enunciado do Teorema 3.2.4, conclui-se que o objetivo desse teorema é retratar que

$$\frac{XX_1}{XX_2} = \frac{AB}{AC}.$$

Ainda da Figura 67, tem-se que $\Delta AX_1X \sim \Delta AX_1'M'(AAA)$, portanto,

$$\frac{XX_1}{M'X_1'} = \frac{AX}{AM'}.$$

E também $\Delta AX_2X \sim \Delta AX_2'M'(AAA)$, portanto,

$$\frac{XX_2}{M'X_2'} = \frac{AX}{AM'}.$$

Comparando as duas últimas igualdades:

$$\frac{XX_1}{XX_2} = \frac{M'X_1'}{M'X_2'}.$$

Dos $\Delta X_1'BM'$ e $\Delta X_2'M'C$ conclui-se que:

$$M'X_1' = M'B.\operatorname{sen}\angle B$$

e

$$M'X_2' = M'C.\operatorname{sen}\angle C.$$

Daí:

$$\frac{XX_1}{XX_2} = \frac{M'X_1'}{M'X_2'} = \frac{M'B.\operatorname{sen}\angle B}{M'C.\operatorname{sen}\angle C}.$$

Do Teorema 3.2.3 verifica-se que $\dfrac{M'B}{M'C} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Portanto,

$$\frac{XX_1}{XX_2} = \frac{AB^2.\operatorname{sen}\angle B}{AC^2.\operatorname{sen}\angle C}$$

Multiplicando $\dfrac{1}{2} \cdot BC$ ao numerador e ao denominador do membro da direita dessa última igualdade, tem-se:

$$\frac{XX_1}{XX_2} = \frac{AB.\frac{1}{2}.BC.AB.\operatorname{sen}(\angle B)}{AC.\frac{1}{2}.BC.AC.\operatorname{sen}(\angle C)} \qquad (2)$$

A área do ΔABC é $[\Delta ABC] = \dfrac{BC.AB.\operatorname{sen}(\angle B)}{2} = \dfrac{BC.AC.\operatorname{sen}(\angle C)}{2}$, então a expressão (2) fica:

$$\frac{XX_1}{XX_2} = \frac{AB.\cancel{[\Delta ABC]}}{AC.\cancel{[\Delta ABC]}} = \frac{AB}{AC}$$

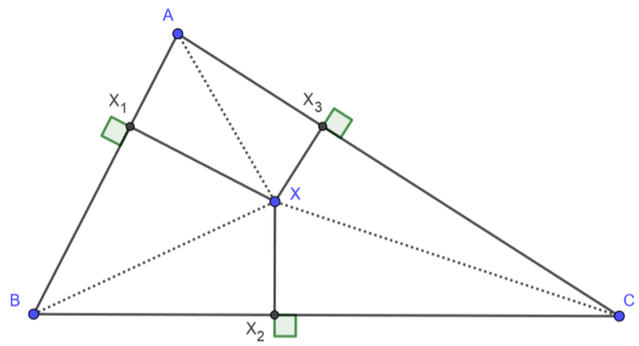
□

Do exposto, conclui-se que a razão das distâncias de um ponto qualquer, interno a um triângulo, localizado sobre uma das simedianas, até os lados desse triângulo é a razão dos comprimentos desses lados.

No prosseguimento, apresentamos uma propriedade de otimização de distâncias acerca do Ponto Simediano demonstrada por Patrascu e Smarandache (2010).

Teorema 3.2.5. *(Patrascu; Smarandache, 2010) Em um ΔABC, seja X um ponto qualquer em seu interior. A soma dos quadrados das distâncias de X aos lados do ΔABC será mínima quando X for o Ponto Simediano.*

Figura 68 – Ponto X e as distâncias XX_1, XX_2 e XX_3 aos lados de ΔABC



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Da Figura 68:

$$[\Delta ABC] = [\Delta AXB] + [\Delta BXC] + [\Delta CXA] \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = \frac{1}{2}(AB.XX_1 + BC.XX_2 + AC.XX_3) \Leftrightarrow$$
$$2[\Delta ABC] = AB.XX_1 + BC.XX_2 + AC.XX_3.$$

Elevando ambos os membros da expressão acima ao quadrado tem-se:

$$4[\Delta ABC]^2 = (AB.XX_1 + BC.XX_2 + AC.XX_3)^2.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.3.2):

$$(AB.XX_1 + BC.XX_2 + AC.XX_3)^2 \leq \left(AB^2 + BC^2 + AC^2\right)\left(XX_1^2 + XX_2^2 + XX_3^2\right).$$

Então temos:

$$XX_1^2 + XX_2^2 + XX_3^2 \geq \frac{4[\Delta ABC]^2}{AB^2 + BC^2 + AC^2}.$$

$XX_1^2 + XX_2^2 + XX_3^2$, que é a soma dos quadrados das distâncias de X aos lados do ΔABC, será mínima quando

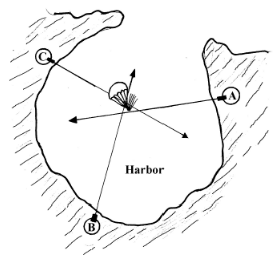
$$\frac{XX_1}{AB} = \frac{XX_2}{BC} = \frac{XX_3}{AC}.$$

Esse resultado nos remete ao Teorema 3.2.4, e, dessa forma, a soma dos quadrados será mínima quando X for o ponto de encontro das simedianas do ΔABC, o seu Ponto de Lemoine - $X(6)$.

□

Smither (2011) revelou a aplicação prática dos efeitos da propriedade de otimização relativa ao Ponto de Lemoine, quando trabalhava na Marinha Americana e necessitou estimar a posição de minas explosivas que eram lançadas de paraquedas de aeronaves inimigas em uma baía. Na baía iriam ser construídas três estações de observação que poderíam rastrear a trajetória do paraquedas sob três ângulos diferentes. Esses três ângulos poderiam ser utilizados para estimar a região de queda do paraquedas com a mina explosiva.

Figura 69 – Região estimada do paraquedas

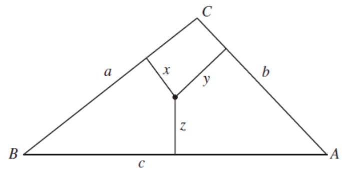


Fonte: Smither (2011)

O método descrito por Smither para abordar o problema foi, inicialmente determinar a interseção das linhas de visada de cada estação (A, B e C). Smither relata que aquilo que a Marinha queria era estimar o ponto que tornaria mínima a soma dos quadrados das distâncias do ponto de queda às linhas de visada, isto é, $min(x^2 + y^2 + z^2)$.

Ele concluiu que nenhuma dessas linhas eram concorrentes em um único ponto e, dessa forma, concluiu que a mina lançada teria que estar em uma região triangular conforme se observa na Figura 69. Sugeriu então que deveria existir uma solução geométrica e, após várias estimativas para os valores das distâncias do ponto de queda da mina explosiva e as distâncias entre as interseções das linhas de visada das estações, Smither sempre encontrava o mesmo padrão, o que possibilitou a seguinte construção:

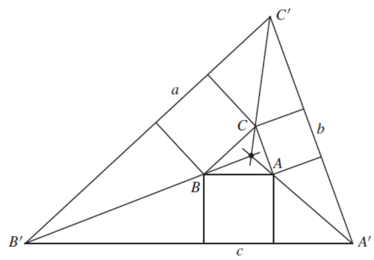
Figura 70 – Linhas de visada das estações formando uma região triangular



Fonte: Smither (2011)

A construção da Figura 71 se inicia com o desenho de quadrados a partir dos lados do ΔABC e traçando paralelas aos lados de ΔABC. Essas paralelas possibilitam a construção do $\Delta A'B'C'$, que é semelhante ao ΔABC. Ambos esses triângulos têm as mesmas simedianas, logo têm o mesmo Ponto Simediano. Smither (2011) confessa que em 1951, época do ocorrido, teve dificuldades para obter a precisão necessária sem o auxílio dos meios computacionais que estão à disposição atualmente.

Figura 71 – Construção para o Ponto Simediano (SMITHER, 2011)



Fonte: Smither (2011)

3.3 Ponto de Gergonne - X(7)

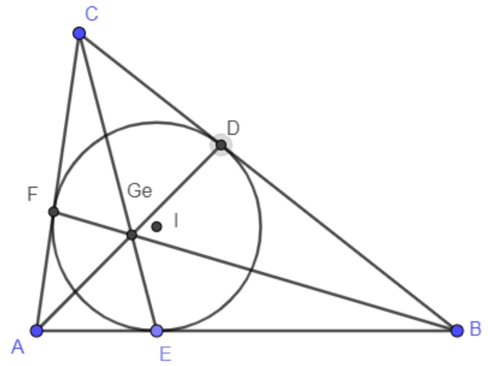
Da Seção 2.1 verificou-se que, dado um triângulo ΔABC, determina-se o ponto de encontro das bissetrizes internas desse triângulo, o seu incentro.

A partir dessa circunferência e seus pontos de tangência com o triângulo ΔABC, pontos D, E e F da Figura 72, seria possível determinar algum outro ponto fruto da concorrência de segmentos de reta, cevianas, da mesma forma como produzimos o incentro? A resposta para essa pergunta é sim e o ponto é chamado de Ponto de Gergonne.

Teorema 3.3.1. *(MARTINS, 2015) Sejam D, E e F os pontos de contato da circunferência inscrita com os lados BC, CA e AB, respectivamente do triângulo ΔABC. As cevianas AD, BE e CF concorrem em um único ponto chamado Ponto de Gergonne.*

A demonstração desse terá duas abordagens: a primeira, como consequência direta da aplicação do Teorema de Ceva e, a segunda, por meio das conclusões do Teorema de Brianchon.

Figura 72 – Circunferência inscrita *incentro*, I e *Ponto de Gergonne* Ge

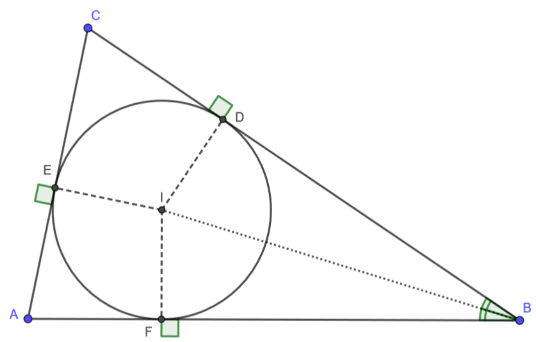


Fonte: elaborado pelo autor

Pelo Teorema de Ceva

Demonstração. Seja I o incentro do ΔABC, D, E e F os pontos de contato da circunferência inscrita ao ΔABC com os lados BC, AB e AC, respectivamente, conforme a Figura 73.

Figura 73 – Incentro I e pontos de contato da circunferência inscrita ao ΔABC



Fonte: elaborado pelo autor

Da Figura 73, temos:

1. $DI = IF = r$(raio).
2. BI é lado comum.
3. $\angle IBD = \angle IBF$.

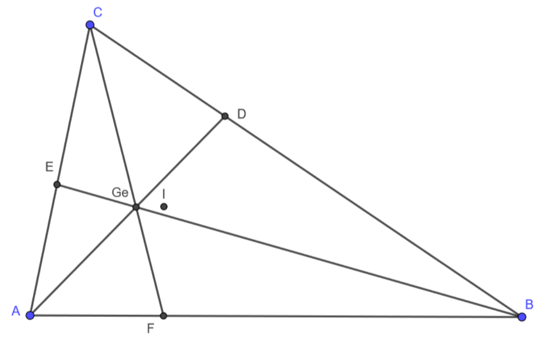
$\Delta IBD \equiv \Delta IBF(ALA) \Rightarrow DB = BF$. Aplicando raciocínio análogo segue que: $AF = AE, CD = CE$.

Assim, temos que:

$$\frac{AF.BD.CE}{AE.BF.CD} = \frac{AE}{AE}.\frac{BD}{BD}.\frac{CD}{CD} = 1.$$

Pelo Teorema de Ceva (Teorema 1.1.5), conclui-se que as cevianas AD, BE e CF são concorrentes em um único ponto (Ge), como se verifica na Figura 74.

Figura 74 – Interseção das cevianas AD, BE e CF



Fonte: elaborado pelo autor

□

Então viu-se que as cevianas que unem os vértices de um triângulo aos pontos de tangência da circunferência inscrita nesse triângulo se interceptam em um único ponto. A essa descoberta se deu o nome de Ponto de Gergonne, em homenagem ao matemático francês Joseph Diez Gergonne (1771-1859). As cevianas AD, BE e CF são denominadas cevianas de Gergonne.

Pelo Teorema de Brianchon

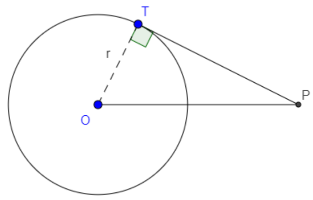
Coxeter (1967) relembra que o matemático Charles Julien Brianchon (1783-1864) enunciou um teorema que relaciona um hexágono circunscrito a uma cônica. Coxeter reforça que este teorema se aplica ao campo da Geometria Projetiva, porém, quando a cônica delimitada pela figura plana convexa for um círculo (circunferência), esse teorema se torna um desafio da Geometria Euclidiana Plana.

Primeiramente enuciam-se as definições de Potência de Ponto e de Eixo Radical que auxiliarão na demonstração do teorema supracitado.

Definição 3.3.2 (Potência de Ponto)**.** *A potência de um ponto P, em relação a um círculo L, de centro O e raio r, é dada por: $Pot_L(P) = PO^2 - r^2$.*

- *se P é exterior a L, então $PO > r$ e $Pot_L(P) > 0$.*
- *se P pertence à circunferência de λ, então $PO = r$ e $Pot_L(P) = 0$(nula).*
- *se P é interior a L, então $PO < r$ e $Pot_L(P) < 0$.*

Figura 75 – Circunferência $L(O, r)$, com ponto P externo a L

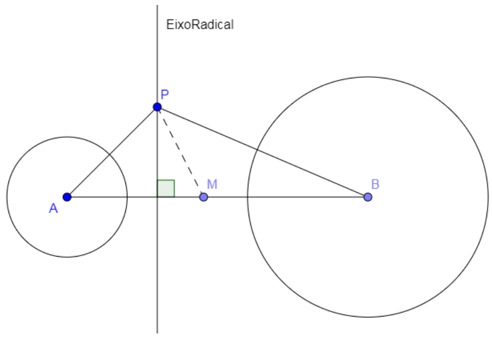


Fonte: elaborado pelo autor

Definição 3.3.3 (Eixo Radical)**.** *Dados dois círculos não concêntricos, chama-se eixo radical desses círculos, o lugar geométrico de todos os pontos de igual potência em relação a esses dois círculos.*

$$Pot_{L(A,r_A)}(P) = Pot_{L(B,r_B)}(P).$$

Figura 76 – Circunferências $L(A, r_A)$ e $L(B, r_B)$ e eixo radical passando por P, perpendicular ao segmento que une os centros das circunferências, onde $Pot_{L(A,r_A)}(P) = Pot_{L(B,r_B)}(P)$



Fonte: elaborado pelo autor

O lema a seguir auxiliará a demonstração do Teorema de Brianchon e é uma consequência das definições descritas acima.

Lema 3.3.4. *(THIAGO, 2012c) Dados três círculos de centros não colineares, os três eixos radicais relativos a cada par de círculos concorrem em um único ponto, denominado centro radical, que possui igual potência em relação aos três círculos dados.*

Demonstração. Sejam três círculos de centros A, B e C não colineares e os respectivos eixos radicais E_{AB}, E_{AC} e E_{BC}, entre cada par de círculos, conforme figura abaixo:

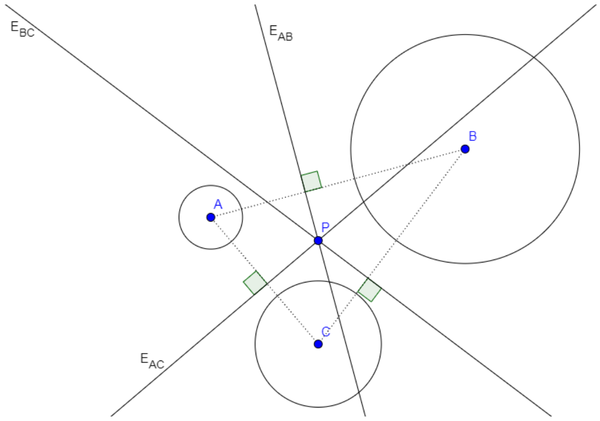
Seja P o ponto de interseção entre E_{AB} e E_{AC}. Daí vem:

$$P \in E_{AB} \Rightarrow Pot_A(P) = Pot_B(P)$$

e

$$P \in E_{AC} \Rightarrow Pot_A(P) = Pot_C(P).$$

Figura 77 – P é o ponto de interseção entre os eixos radicais E_{AB}, E_{AC} e E_{BC}



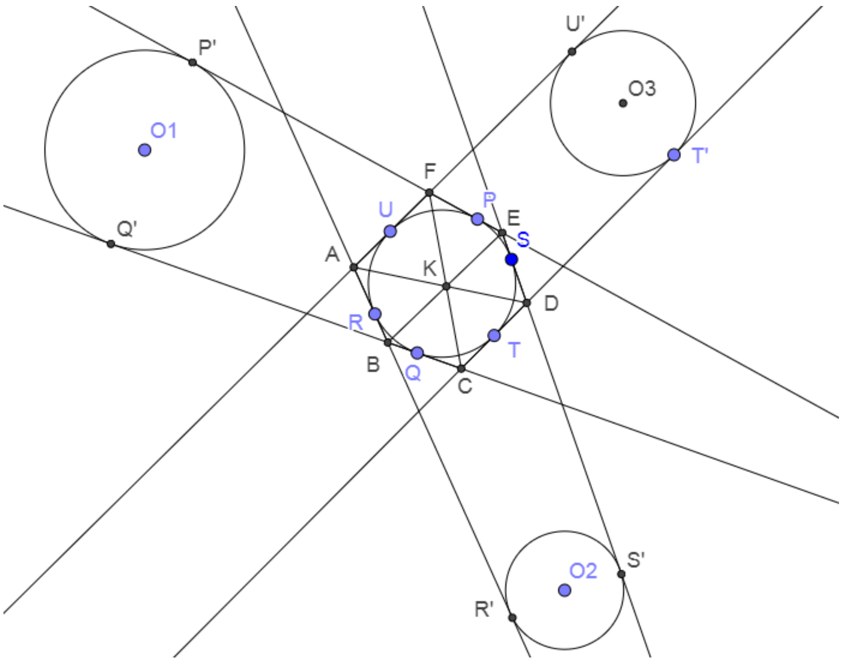
Fonte: elaborado pelo autor

Portanto, $Pot_B(P) = Pot_C(P)$ e P pertence ao E_{BC}. Dessa forma, os três eixos E_{AB}, E_{AC} e E_{BC} concorrem no ponto P, que é o *centro radical* das circunferências A, B e C, ou seja, é o ponto de igual potência em relação a essas circunferências. $\square$

Teorema 3.3.5. *(COXETER; GREITZER, 1967) Se um hexágono, com nenhum par de lados opostos paralelos, está circunscrito a um círculo, então as suas três diagonais são concorrentes em um ponto chamado de Ponto de Brianchon.*

Demonstração. Seja o hexágono ABCDEF circunscrito a um círculo, com P, Q, R, S, T e U sendo os pontos de tangência dos lados do hexágono com este círculo.

Figura 78 – Hexágono ABCDEF, prolongamentos dos lados AB, BC, CD, DE, EF e FA, circunferência inscrita tangente aos pontos P, S, T, Q, R e U. Diagonais AD, BE e CF encontram-se no ponto K



Fonte: elaborado pelo autor

Tome P', Q', R', S', T' e U' sobre os prolongamentos dos lados EF, CB, AB, ED, CD e AF, respectivamente, de um comprimento tal que $PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'$ e dessa forma permita a construção dos círculos A, B e C, tangentes a esses segmentos nesses pontos, conforme a Figura 78.

Verificam-se na Figura 78 as seguintes igualdades:

$$AR = AU$$

e

$$RR' = UU'.$$

Como $AR = AU$ e $RR' = UU'$, então $AR' = AU'$ e, com isso, o ponto A tem a mesma potência em relação aos círculos B e C. De forma análoga, conclui-se que o ponto D possui a mesma potência em relação aos mesmos círculos. Logo, AD é eixo radical dos círculos B e C, pela Definição 3.3.4.

A potência do ponto A em relação às circunferências B e C:

$$Pot_B(A) = (AO2)^2 - r_2^2 = (AU')^2$$

e

$$Pot_C(A) = (AO3)^2 - r_3^2 = (AR')^2.$$

Como $AU' = AU + UU'$ e $AR' = AR + RR'$, e $AR = AU$ e $RR = UU'$, porque são pontos de tangência do hexágono com a circunferência inscrita, então, $AU' = RR'$.

Logo, $Pot_B(A) = Pot_C(A)$. O mesmo vale para o ponto D:

$$SS' = SD + DS'$$

e

$$TT' = TD + DT'.$$

Como $SS' = TT'$ por hipótese, $SD + DS' = TD + TT'$. Mas $SD = TD$, nesse caso, $DS' = DT'$.

Daí vem:

$$Pot_B(D) = (DO2)^2 - r_2^2 = (DS')^2$$

e

$$Pot_C(D) = (DO3)^2 - r_3^2 = (DT')^2.$$

Portanto, $Pot_B(D) = Pot_C(D)$, o que decorre que a reta AD é eixo radical das circunferências B e C.
Analogamente,

- a reta CF é eixo radical de A e C.
- a reta BE é eixo radical de A e B.

Dado que, AD, BE e CF se interceptam no ponto K, veremos se K é o centro radical das circunferências A, B e C:
Seja K o ponto de interseção das retas AD, BE e CF.

$$K \in CF \Rightarrow Pot_A(K) = Pot_C(K)$$

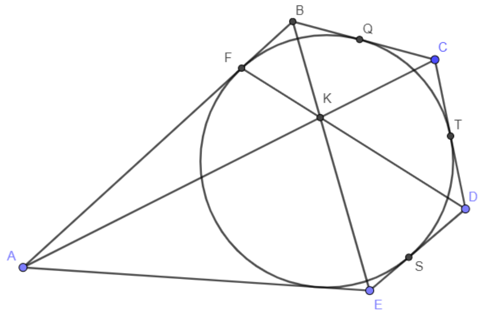
e

$$K \in AD \Rightarrow Pot_C(K) = Pot_B(K).$$

Então, $Pot_A(K) = Pot_B(K)$, portanto K é o ponto que possui potências iguais em relação à três circunferências dadas, e, portanto, de acordo com o Lema 3.3.4, K é o centro radical de A, B e C. □

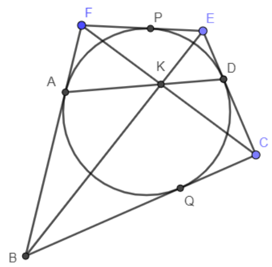
Coxeter (1967, p. 79) concluiu que, no caso de um hexágono $ABCDEF$ se degenere para um pentágono $ABCDE$, ao se aplicar o Teorema de Brianchon a esse pentágono, considerando que o ponto de tangência F do hexágono $ABCDEF$ é um ponto da diagonal do desse pentágono. O mesmo raciocínio vale para um quadrilátero $BCEF$ e para o triângulo ΔBCF, conforme Figuras 97 e 98.

Figura 79 – Hexágono $ABCDEF$ degenerado em no pentágono $ABCDE$ e suas diagonais AC, BE e DF



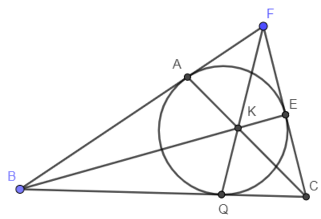
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 80 – Pentágono $ABCDE$ degenerado em quadrilátero $BCEF$ e suas diagonais BE e CF



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 81 – Quadrilátero $BCEF$ degenerado em triângulo BCF e suas diagonais (cevianas) BE, QF e AC



Fonte: elaborado pelo autor

No hexágono $ABCDEF$, o centro radical, o Teorema de Brianchon determinou que o ponto K, interseção dos eixos radicais que passam pelas diagonais AD, BE e CF, é o lugar geométrico dos pontos que tem igual potência em relação a três circunferências dadas, ou seja, é o centro radical dessa circunferências. Para o pentágono $ABCDE$, esse ponto de encontro das diagonais AC e BF; para o quadrilátero $BCEF$ é o ponto de encontro de BE e CF; para o triângulo ΔBCF é o ponto de encontro das cevianas AC, BE e QF.

Coxeter (1967) concluiu que, quando aplicado o Teorema de Brianchon ao pentágono, ao quadrilátero e ao triângulo, figuras degeneradas do hexágono ABCDEF, as diagonais, ou as cevianas no caso do triângulo, mantém seu ponto de concorrência. Este ponto é o **Ponto de Brianchon**. **No caso em particular no triângulo, esse ponto também é o seu Ponto de Gergonne** $X(7)$. Dessa maneira, o Ponto de Gergonne também pode ser encontrado em outras figuras planas convexas.

3.4 Ponto de Fermat ou de Torricelli - X(13)

A caracterização dos Pontos Notáveis vistos até aqui nos permitiu apresentar algumas de suas propriedades, atributos que refletem o seu caráter único dentre todos os outros pontos do triângulo. A tabela abaixo resume alguns dos centros de triângulo e suas propriedades vistas até aqui.

Tabela 3 – Alguns dos pontos notáveis e suas propriedades de máximos e mínimos

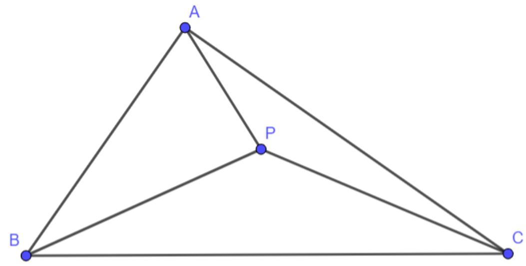
Nome	Ponto Notável	Propriedade de otimização
Incentro	X(1)	minimizar as projeções de um ponto P interno ao ΔABC aos lados do ΔABC (Proposição 2.1.4)
Baricentro	X(2)	maximiza o produto das distâncias de um ponto P interno ao ΔABC aos lados de ΔABC (Teorema 2.2.5)
Circuncentro	X(3)	minimiza as distâncias de um ponto P aos vértices de um triângulo equilátero ΔABC (Teorema 2.4.4)
Ortocentro	X(4)	minimiza a soma das distâncias de um ponto P interno ao ΔABC aos vértices do ΔABC e aos vértices do triângulo pedal (Teorema 2.3.5)
Ponto Simediano	X(6)	minimizar a soma dos quadrados das distâncias de um ponto P interno ao ΔABC aos lados do ΔABC (Teorema 3.2.5)

Fonte: elaborado pelo autor

A Tabela 3 nos mostra que pontos notáveis, clássicos, como o X(1), X(2), X(3) e X(4) e até mesmo não clássicos como o X(6), são capazes de minimizar ou maximizar expressões envolvendo distâncias quando se trata de triângulos. Verificando a Enciclopédia de Kimberling, verificamos outros centros de triângulo que apresentam aplicações e resultados relevantes nesse campo da otimização. Vejamos algumas dessas propriedades para o centro X(13), chamado de Ponto de Fermat, ou de Torricelli.

Teorema 3.4.1. *(BOLTYANSKI; MARTINI; SOLTAN, 1999) Existe um ponto do ΔABC que minimiza a soma das distâncias até os vértices desse triângulo. Esse ponto é chamado de Ponto de Fermat ou de Torricelli.*

Figura 82 – Ponto P $\in \Delta ABC$ que torna $PA + PB + PC$ mínimo



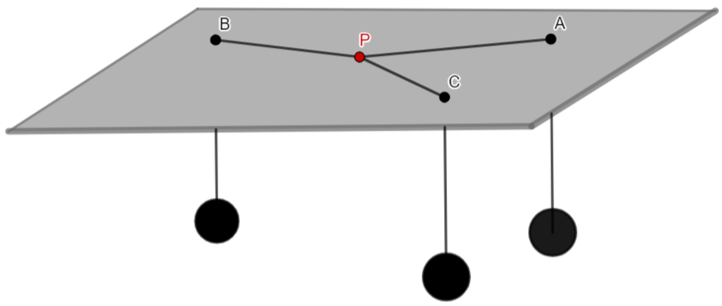
Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Para demonstrar tal teorema, precisamos encontrar um ponto no interior do ΔABC cuja soma das distâncias a cada um dos vértices é mínima. Trataremos deste problema por uma abordagem física e por uma abordagem geométrica:

Propriedade Física

Rao e Prasanna (2016) elaboraram um esquema tal como uma mesa alta com furos nos pontos A, B e C. Dessa forma, tomaram três tiras de corda de comprimento idêntico à altura da mesa. Passaram cada tira por um dos furos e amarre as três pontas juntas. Nas outras pontas das tiras que ficaram fora da mesa, amarraram objetos de pesos iguais de tal forma que o arranjo ficou conforme com a Figura 83.

Figura 83 – Mesa com furos em A, B e C. Objetos de pesos iguais



Fonte: elaborado pelo autor

Rao e Prasanna (2016) definem que a energia potencial[2] do sistema é

$$E_p = W.h_1 + W.h_2 + W.h_3$$

onde W é o peso[3] de cada corpo e h_1, h_2 e h_3 são as alturas de cada corpo em relação ao solo. Mas $h_1 = AP$, $h_2 = BP$ e $h_3 = CP$, onde P é o ponto de amarração das três tiras e está sobre a mesa. Então,

$$E_p = W\,(AP + BP + CP)\,.$$

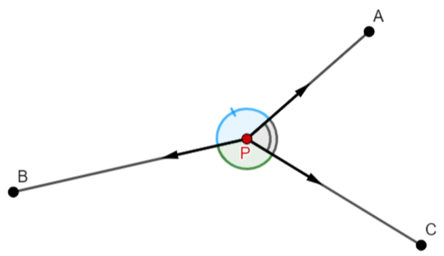
[2] Energia relativa à altura de uma massa em relação a um referencial, neste caso, ao solo

[3] O valor do peso de um corpo é dado pelo produto da massa (quantidade de matéria) desse corpo pela aceleração da gravidade local

Dessa forma, a energia potencial do sistema, E_p, será mínima quando o sistema estiver em equilíbrio, isto é, quando $AP + BP + CP$ for mínimo (RAO; PRASANNA, 2016).

Nessa condição, as forças atuantes sobre o sistema deverão estar em equilíbrio estático. No o ponto P, as forças deverão estar conforme a Figura 84.

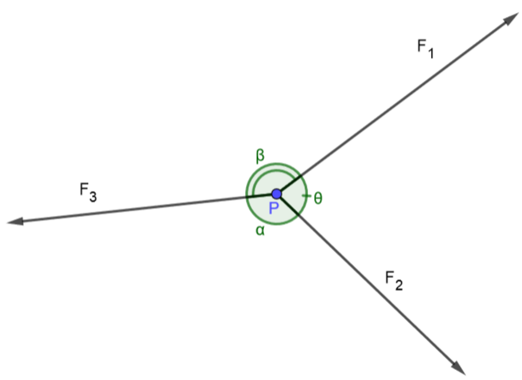
Figura 84 – Esquema de forças no ponto P



Fonte: elaborado pelo autor

Na condição de três forças em equilíbrio estático, temos o resultado do Teorema de Lami. O Teorema de Lami estabelece que se três forças atuando sobre um único ponto estão em equilíbrio, cada força é proporcional ao seno do ângulo entre as outras duas forças.

Figura 85 – Diagrama de forças: Três forças em equilíbrio



Fonte: elaborado pelo autor

$$\frac{F_1}{\operatorname{sen}(\angle\alpha)} = \frac{F_2}{\operatorname{sen}(\angle\beta)} = \frac{F_3}{\operatorname{sen}(\angle\theta)}$$

Aplicando o Teorema de Lami ao ponto P, temos que:

$$\frac{W}{\operatorname{sen}(\angle BPC)} = \frac{W}{\operatorname{sen}(\angle APC)} = \frac{W}{\operatorname{sen}(\angle APB)}.$$

Daí vem que: $\operatorname{sen}(\angle BPC) = \operatorname{sen}(\angle APC) = \operatorname{sen}(\angle APB)$.

A igualdade $\angle APC = \angle APB = \angle BPC$ ocorre quando os ângulos são iguais a 120º.

No âmbito do ensino básico, uma das formas de se ilustrar as características do Ponto de Fermat é apresentada por Park e Flores (2015) em um experimento ilustrativo em ambiente de sala de aula.

Park e Flores (2015) apresentam um experimento utilizado por George Polya, que empregava um triângulo em um plano vertical e pequenas roldanas ao invés de furos sobre mesas. Quando os objetos de massas iguais são suspensos pelas roldanas o sistema fica equilibrado, como se verifica na Figura 102, e os ângulos entre os fios são de 120º.

Figura 86 – $\Delta AC'C$ e $\Delta ABB'$

Fonte:(PARK; FLORES, 2015)

Caso uma das massas for movida para cima ou para baixo, o sistema tenderá, por si só, à posição prévia de equilíbrio (PARK; FLORES, 2015). Essa configuração pode ser exibida em ambiente de sala de aula como atividade de cunho prático para contextualizar o Ponto de Fermat e despertar no aluno a curiosidade e o interesse pelos Pontos Notáveis.

Propriedade Geométrica

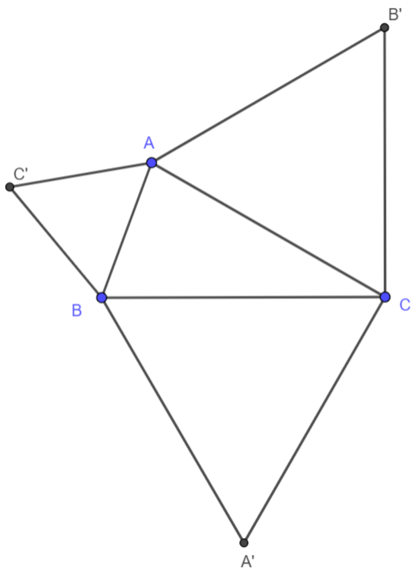
Encontrar um ponto interno ao ΔABC, cuja soma das distâncias a cada um dos vértices do ΔABC seja mínima.

Este problema foi proposto pelo matemático francês Fermat (1601-1665) ao físico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), aluno de Galileo Galilei (1564-1642).

Existem diversas maneiras para se construir o Ponto de Fermat. Apresentaremos aqui uma delas, envolvendo a identificação proposta por Evangelista Torricelli em aproximadamente 1640 empregando os resultados encontrados por Viviani (1622-1703), físico e matemático italiano, aluno de Torricelli e de Galileo (BOLTYANSKI; MARTINI; SOLTAN, 1999). Vejamos a partir da Figura 82:

1. Dado o ΔABC da Figura 82, construa triângulos equiláteros externamente sobre cada lado do ΔABC, da forma ilustrada na Figura 87.

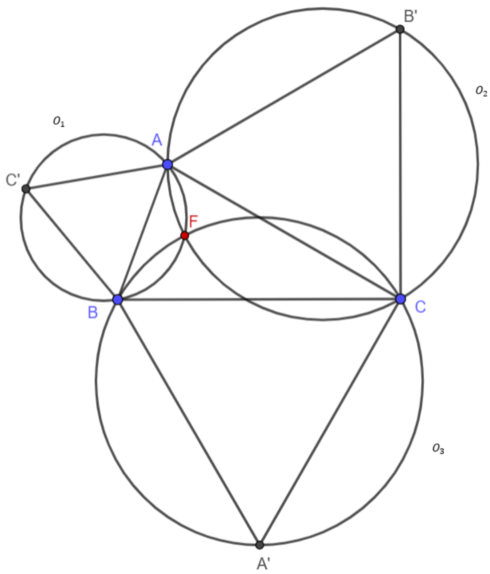
Figura 87 – Construção dos triângulos equiláteros



Fonte: elaborado pelo autor

2. Trace os círculos circunscritos aos triângulos equiláteros construídos, como na Figura 88.

Figura 88 – Círculos circunscritos aos triângulos equiláteros



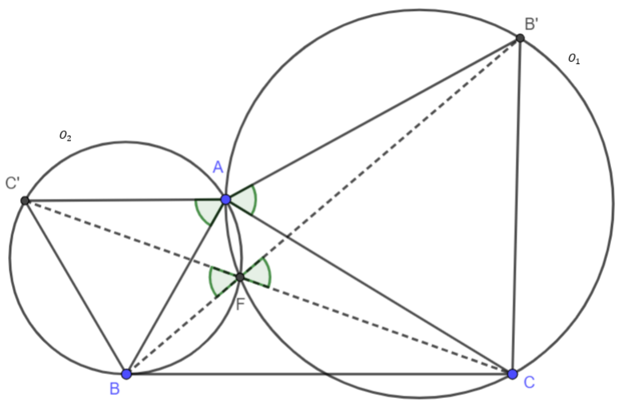
Fonte: elaborado pelo autor

3. Prove que os círculos circunscritos aos triângulos da Figura 89 são concorrentes em um ponto F.

   A partir daí, é necessário provar que os três círculos circunscritos são concorrentes no ponto F, como sugere a Figura 88. Para tanto, analisaremos o problema da seguinte forma:

   - pela interseção das circunferências que passam pelos pontos A, B', C e A, B, C'.
   - pela pertinência desse ponto de interseção à circunferência que passa pelos pontos A', B, C.

Figura 89 – Interseções entre as circunferências



Fonte: elaborado pelo autor

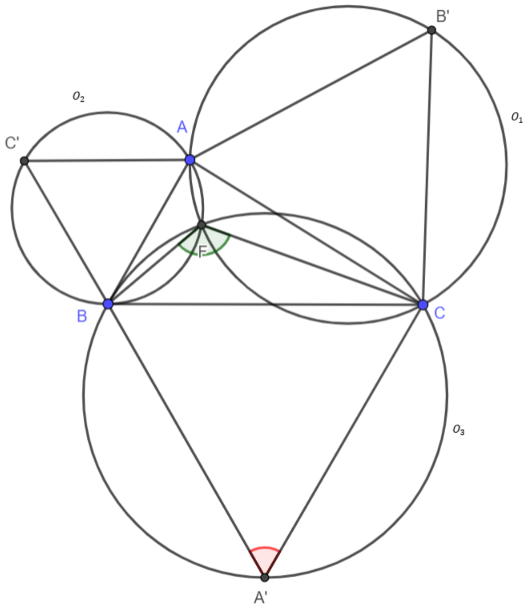
Em relação à Figura 89, chamemos as circunferências que passam por A, B', C; A, B, C'; e A', B, C de O_1, O_2 e O_3, respectivamente. Verifica-se que $\angle C'AB = 60^o$ e $\angle C'FB = 60^o$, pois ambos os ângulos descrevem um arco capaz de 120º em relação ao segmento $C'B$. Já $\angle CFB' = \angle CAB' = 60^o$, por descreverem um arco capaz de 120º em relação ao segmento CB'. Logo, F pertence ao arco $C'AB$ e F pertence ao arco CAB'. Finalmente, $F \in O_1 \cap O_2$.

Em seguida, se $\angle BA'C = 60^o$, então o arco BA'C mede 120º. Daí, o arco BFC mede 240º, logo $\angle BFC = 120^o$. Portanto, $\angle BA'C + \angle BFC = 180^o$, logo o quadrilátero $FBA'C$ é inscritível. Então, $F \in O_3$, o que resulta: $F \in O_1 \cap O_2 \cap O_3$.

O resultado do último item descrito acima é que $\angle AFC = \angle AFB = \angle BFC = 120^o$. Vejamos a demonstração desse fato. Pela Figura 90, verifica-se que o quadrilátero $AB'CF$ é inscritível. Logo, seus ângulos opostos são suplementares. Assim: $\angle AFC + \angle AB'C = 180^o$. Como $\Delta AB'C$ é equilátero por construção,

$$\angle AFC + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \angle AFC = 120^o.$$

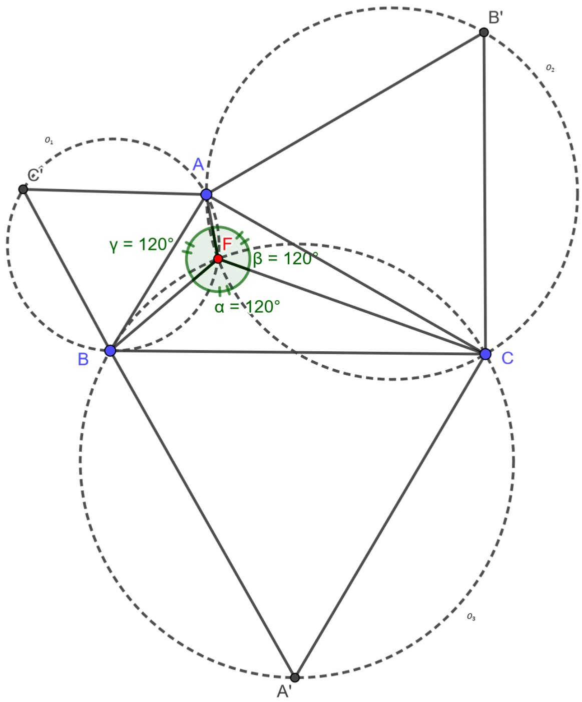
Figura 90 – Pertinência do ponto F à circunferência que passa por B, A’ e C



Fonte: elaborado pelo autor

Aplicando-se o mesmo raciocínio aos quadriláteros $AFBC'$ e $A'BFC$, conclui-se que $\angle AFB = \angle BFC = 120^o$, como ilustra a Figura 91.

Figura 91 – $\angle AFB = \angle BFC = \angle AFC = 120^o$

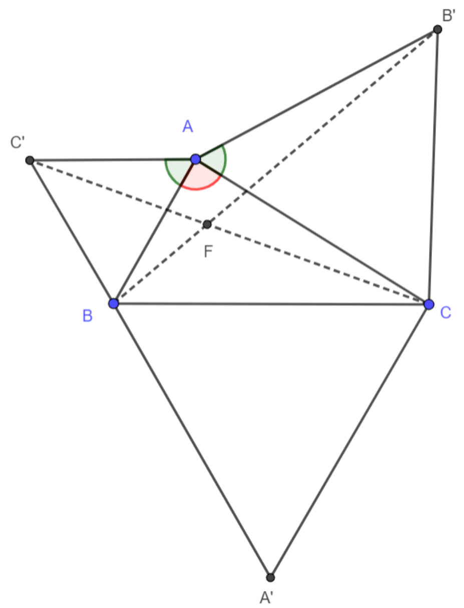


Fonte: elaborado pelo autor

□

Corolário 3.4.2. *(BOLTYANSKI; MARTINI; SOLTAN, 1999) Tem-se que* $AA' = BB' = CC'$.

Figura 92 – $\Delta AC'C$ e $\Delta ABB'$



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Sabemos que $\Delta A'BC, \Delta ABC'$ e $\Delta AB'C$ são equiláteros, $AC' = AB$, $\angle C'AC = \angle BAB'$ e $AC = AB'$, como se verifica na Figura 92. Logo, $\Delta AC'C \equiv \Delta ABB'(LAL)$. Dessa congruência conclui-se que $C'C = BB'$. Aplicando raciocínio análogo aos $\Delta B'CB$ e $\Delta CA'A$, resulta em $AA' = BB' = CC'$. □

O estudo dos Pontos Notáveis Não Clássicos, isto é, os centros de triângulo que não são tão abordados no ensino básico, nos permitiu identificar e demonstrar algumas de suas propriedades no campo da Geometria Euclidiana Plana e da Otimização.

Os Pontos Notáveis Não Clássicos estudados ainda requerem aprofundamento, uma vez que a determinação dos vetores posição e também das propriedades de otimização de todos esses centros de triângulo não foram alcançados por este trabalho.

4 Análise dos resultados

O estudo dos pontos notáveis relacionados na Enciclopédia de Kimberling (KIMBERLING, 2020) proporcionou o aprofundamento dos conceitos já explorados nos bancos escolares do Ensino Médio, bem como trazer à luz outras formas de abordar e demonstrar propriedades que tornam esses pontos ainda mais dignos da notoriedade que possuem.

Para tanto, este trabalho dividiu os Centros de Triângulo de Kimberling estudados em dois grupos, os chamados Pontos Notáveis Clássicos, aqueles que o aluno tem mais contato nos seus anos de formação básica, a saber: o Incentro, o Baricentro, o Circuncentro e o Ortocentro; e os Pontos Notáveis Não Clássicos, a saber: o centro da Circunferência dos Nove Pontos, o Ponto Simediano, o Ponto de Gergonne e o Ponto de Fermat, de menor abordagem.

4.1 Dos Pontos Notáveis Clássicos

A análise dos Pontos Notáveis Clássicos começa com a verificação do incentro - X(1) e sua identificação em um triângulo ΔABC. A posição do incentro se caracterizou por ser privilegiada, uma vez que é o centro da circunferência inscrita a esse triângulo e, além disso o cálculo do vetor que indica a posição desse ponto mostra que esse centro do triângulo é função das posições dos vértices e dos comprimentos dos lados desse triângulo.

$$\overrightarrow{X(1)} = \frac{a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C}}{a+b+c}.$$

No plano cartesiano, $\mathbb{R}^2$, valendo-se da notação de Kimberling para o incentro, X(1), as coordenadas de $\overrightarrow{X(1)}$ são:

$$\overrightarrow{X(1)} = \left(x_{X(1)}, y_{X(1)}\right) = \left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right).$$

Dessa forma, conhecidas as posições dos vértices de um triângulo qualquer, bem como os comprimentos de seus lados, se consegue precisar a localização do incentro.

O incentro possui suas aplicações no campo da otimização de distâncias, uma vez que é o ponto que minimiza a soma das projeções do incentro aos lados do ΔABC, verificado no Teorema 2.1.4.

O baricentro - X(2) confirmou suas propriedades notáveis quando foram se demonstrou como o centro de massa de um sistema composto por três pontos. Essa característica foi evidenciada pela expressão do vetor posição do seu ponto:

$$\overrightarrow{X(2)} = \frac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{3}.$$

No plano cartesiano, $\mathbb{R}^2$, valendo-se da notação de Kimberling para o baricentro, X(2), as coordenadas de $\overrightarrow{X(2)}$ ficam:

$$\overrightarrow{X(2)} = \left(x_{X(2)}, y_{X(2)}\right) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

No escopo das otimizações de distâncias, provou-se que o ponto P é o baricentro do ΔABC quando ele maximiza o produto das distâncias de P aos lados do ΔABC, como visto no Teorema 2.2.5.

Para fins desse trabalho, embora o ortocentro - X(4) suceda o circuncentro - X(3) na Enciclopedia de Kimberling, aquele centro de triângulo foi identificado e teve suas propriedades verificadas antes do X(3), uma vez que a existência de X(4) no triângulo, bem como algumas características decorrentes dela, serviriam de subsídio para analisar o centro X(3).

Assim, o estudo do ortocentro permitiu aprofundar os conceitos relativos ao triângulo pedal e ao triângulo órtico, além de concluir sobre a localização precisa desse centro de triângulo por meio de seu vetor posição.

Conclui-se então que o vetor posição do ortocentro do ΔABC é função das posições dos vértices e dos ângulos internos desse triângulo.

$$\overrightarrow{X(4)} = \frac{\overrightarrow{A}\,\mathrm{tg}\angle A + \overrightarrow{B}\,\mathrm{tg}\angle B + \overrightarrow{C}\,\mathrm{tg}\angle C}{\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C}.$$

No $\mathbb{R}^2$, valendo-se da notação de Kimberling para o ortocentro, X(4), as coordenadas de $\overrightarrow{X(4)}$ ficam:

$$\overrightarrow{X(4)} = (x_H, y_H) = \left(\frac{x_A\,\mathrm{tg}\angle A + x_B\,\mathrm{tg}\angle B + x_C\,\mathrm{tg}\angle C}{\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C}, \frac{y_A\,\mathrm{tg}\angle A + y_B\,\mathrm{tg}\angle B + y_C\,\mathrm{tg}\angle C}{\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C}\right).$$

Demonstrou-se pelo Teorema 2.3.5 que o ponto P é o ortocentro do ΔABC quando ele minimiza a soma das distância de P, interior ao ΔABC, até os vértices desse triângulo e as distâncias de P até os vértices do triângulo pedal.

No prosseguimento, uma vez caracterizado o ortocentro - X(4), demonstraram-se as características e propriedades relativas ao circuncentro - X(3) de um triângulo, dado que o circuncentro do ΔABC é o ortocentro do triângulo formado pelos pontos médios dos lados BC, AC e AB, o que restou provado no Teorema 2.4.2.

Essa conclusão foi determinante para calcularmos e expressarmos o vetor posição do circuncentro - X(3), o que na notação de Kimberling fica:

$$\overrightarrow{O} = \frac{3\overrightarrow{G}}{2} - \frac{\overrightarrow{H}}{2}.$$

Assim, as coordenadas, no plano cartesiano, do circuncentro na notação de Kimberling, X(3), ficam:

$$x_{X(3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_A(2\,\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C) + x_B(\mathrm{tg}\angle A + 2\,\mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C) + x_C(\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + 2\,\mathrm{tg}\angle C)}{2(\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C)}\right)$$

$$y_{X(3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_A(2\,\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C) + y_B(\mathrm{tg}\angle A + 2\,\mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C) + y_C(\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + 2\,\mathrm{tg}\angle C)}{2(\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C)}\right)$$

A caracterização do circuncentro - X(3), do ortocentro - X(4) e do baricentro - X(2) permitiu demonstrar que esses três centros são colineares e que pertencem a um lugar geométrico denominado Reta de Euler, como verificado no Teorema 2.4.3. O baricentro divide o segmento de reta que une o ortocentro ao circuncentro na razão 2 para 1:

$$\frac{HG}{GO} = \frac{2}{1}.$$

O circuncentro de um triângulo tem implicações diretas na Desigualdade de Erdös-Mordell, quando esse triângulo é equilátero, verificado por meio do Teorema 2.4.4.

Em face do acima exposto foi possível ratificar as propriedades de otimização de máximos e mínimos e características geométricas que tornam os quatro Pontos Notáveis Clássicos singulares do ponto de vista geométrico.

Por meio da geometria analítica vetorial, foram determinadas as posições de cada um desses centros de triângulo, desde que certos parâmetros já sejam conhecidos, como as posições dos vértices, os ângulos internos ou os comprimentos dos lados do triângulo. Dessa forma, entende-se ter facultado ao aluno do Ensino Médio uma ferramenta que incremente o seu cabedal de conhecimentos sobre os pontos notáveis para o cálculo de suas coordenadas cartesianas.

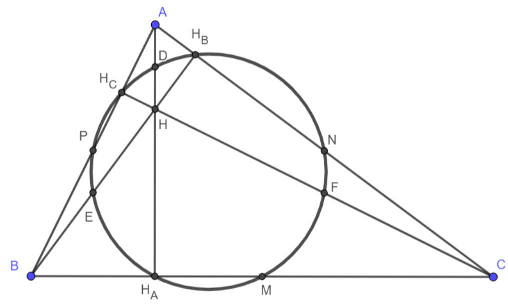
4.2 Dos Pontos Notáveis Não Clássicos

Prosseguindo na análise dos centros de triângulo, verifica-se na Enciclopédia de Kimberling os próximos pontos, do X(5) ao X(13), como foram elencados os treze primeiros pontos na Tabela 1 na página 18 deste trabalho.

No entanto, no grupo dos Pontos Notáveis Não Clássicos listados na Tabela 1, o escopo deste trabalho não incluiu o ponto de Nagel - X(8), o *mittenpunkt* - X(9), o centro de Spieker - X(10), o ponto de Feuerbach - X(11) e o conjugado harmônico do ponto de Feuerbach - X(12).

Dessa forma, o Capítulo 3 se iniciou pelo Teorema 3.1.1, identificando que certos pontos no triângulo ΔABC são concíclicos a despeito desses pontos não serem dotados de características ditas notáveis. São esses pontos os pés das alturas, os pontos médios dos lados e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices do ΔABC ao seu ortocentro.

Figura 93 – $H_A, E, P, H_C, D, H_B, N, F, M$ concíclicos



Fonte: elaborado pelo autor

Daí, concluiu-se que o centro da circunferência formada pelos nove pontos apresentados na Figura 93 pertence é colinear ao ortocentro, ao baricentro e ao circuncentro do ΔABC, e, portanto, encontra-se sobre a Reta de Euler. Ademais, o centro dessa circunferência é o ponto médio do segmento formado pelo ortocentro e pelo circuncentro, restando demonstrado pelo Teorema 3.1.2.

A posição do centro da circunferência dos nove pontos é dada pelo seu vetor posição, que, utilizando a notação de Kimberling, X(5):

$$\overrightarrow{X(5)} = \frac{\vec{A}(2\,\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C) + \vec{B}(\mathrm{tg}\angle A + 2\,\mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C) + \vec{C}(\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + 2\,\mathrm{tg}\angle C)}{\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C}.$$

No $\mathbb{R}^2$, as coordenadas de $\overrightarrow{X(5)}$ ficam:

$$x_{X(5)} = \frac{x_A(2\,\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C) + x_B(\mathrm{tg}\angle A + 2\,\mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C) + x_C(\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + 2\,\mathrm{tg}\angle C)}{\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C}$$

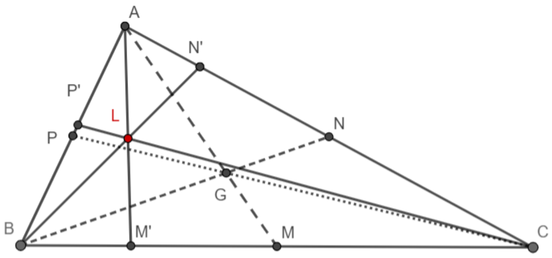
e

$$y_{X(5)} = \frac{y_A(2\,\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C) + y_B(\mathrm{tg}\angle A + 2\,\mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C) + y_C(\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + 2\,\mathrm{tg}\angle C)}{\mathrm{tg}\angle A + \mathrm{tg}\angle B + \mathrm{tg}\angle C}.$$

O estudo do ponto simediano - X(6) possibilitou introduzir o conceito de linhas isogonais, que se tratando das cevianas de um ΔABC, são as cevianas isogonais. Esses conceitos culminaram com os resultados do Teorema 3.2.2 e a caracterização do ponto simediano, ou ponto de Lemoine proveniente do Teorema 3.2.3.

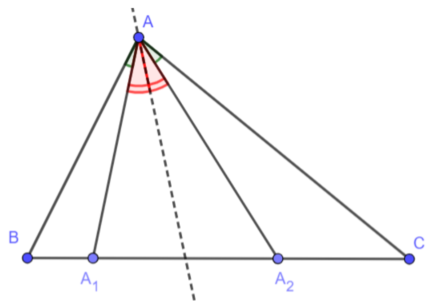
Como consequência, verificou-se que o ponto simediano é um conjugado isogonal do baricentro, ou seja, são pontos que estão sobre as interseções das cevianas isogonais

Figura 94 – ΔABC, Ponto Simediano (L) e o Baricentro (G)



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 95 – ΔABC e cevianas isogonais AA_1 e AA_2



Fonte: elaborado pelo autor

às medianas, ilustrado na Figura 94 , isto é, que possuem a mesma inclinação relativa às bissetrizes dos ângulos internos do ΔABC, como se verifica na Figura 95.

O ponto simediano é um ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias desse ponto aos lados do ΔABC. Uma aplicação prática desse fato foi evidenciada por Smither (2011), quando se valeu inconscientemente desse resultado para estimar a posição de minas explosivas em relação a três pontos de observação distintos.

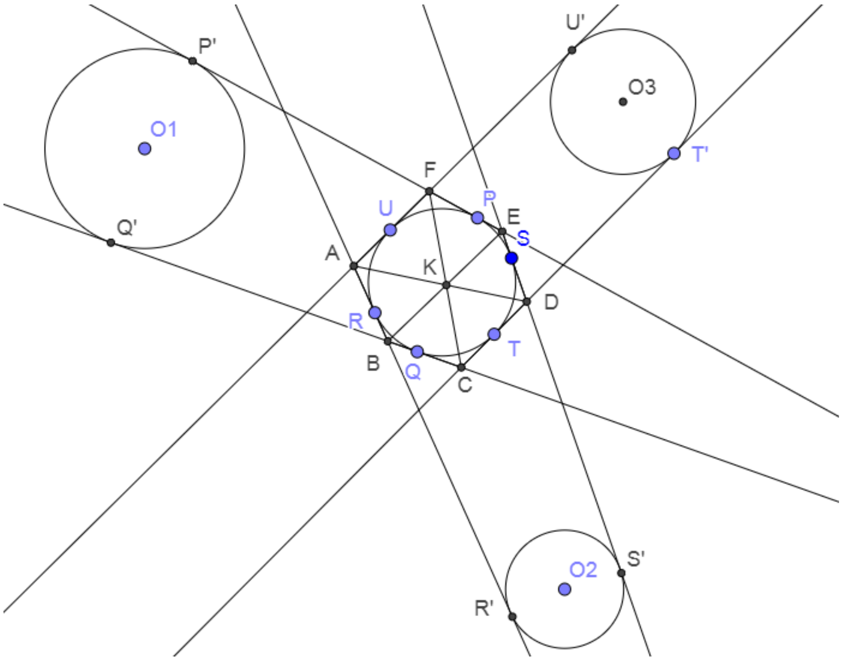
O ponto de Gergonne advém dos pontos de contato da circunferência inscrita no ΔABC. As cevianas que partem do vértice até os pontos de contato dessa circunferência se encontram em um ponto, que é o centro notável em questão.

Apesar de ser possível obter a sua construção geométrica de maneira relativamente simples, quando comparado aos demais Pontos Notáveis Não Clássicos descritos por este trabalho, o ponto de Gergonne possui aplicações que podem extrapolar ao campo da geometria projetiva, como é o caso da aplicação do Teorema de Brianchon (Teorema 3.3.5).

O Teorema de Brianchon revela que o ponto de encontro das diagonais de um hexágono de lados não paralelos é o centro radical das três circunferências formadas pelo prolongamento das retas suportes dos lados desse hexágono. Coxeter (1967) conclui que esse ponto de encontro, em um triângulo, é o ponto de Gergonne desse hexágono.

Os resultados oriundos do Teorema de Brianchon, esses se aplicam a figuras geométricas com número de lados superior ao do triângulo, como os hexágonos, pentágonos,

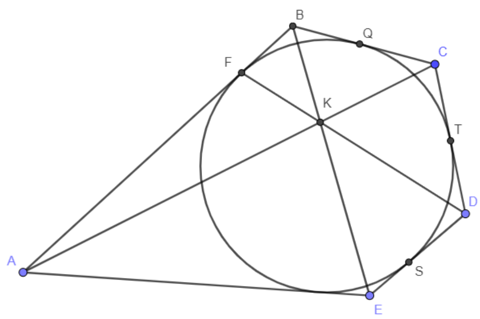
Figura 96 – Hexágono $ABCDEF$, prolongamentos dos lados AB, BC, CD, DE, EF e FA, circunferência inscrita tangente aos pontos P, S, T, Q, R e U. Diagonais AD, BE e CF encontram-se no ponto K



Fonte: elaborado pelo autor

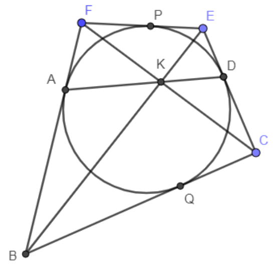
como na Figura 97, e quadriláteros convexos, como na Figura 98. Coxeter (1967) ensina que ao se degenerarem os lados dessas figuras, o ponto de encontro das diagonais se torna o ponto de Gergonne do triângulo, como na Figura 99.

Figura 97 – Hexágono $ABCDEF$ degenerado em no pentágono $ABCDE$ e suas diagonais AC, BE e DF



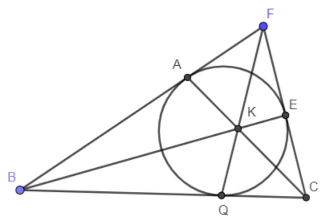
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 98 – Pentágono $ABCDE$ degenerado em quadrilátero $BCEF$ e suas diagonais BE e CF



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 99 – Quadrilátero $BCEF$ degenerado em triângulo BCF e suas diagonais (cevianas) BE, QF e AC

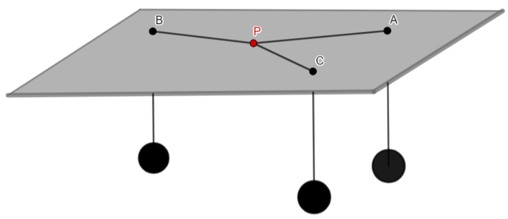


Fonte: elaborado pelo autor

O ponto de Fermat se revelou como um centro de triângulo notável por suas propriedades físicas e geométricas.

No escopo da Física Clássica, evidenciou-se que o ponto de Fermat é o ponto no espaço onde um sistema composto por três massas, como ilustrado na Figura 100 possui energia potencial mínima.

Figura 100 – Mesa com furos em A, B e C. Objetos de pesos iguais

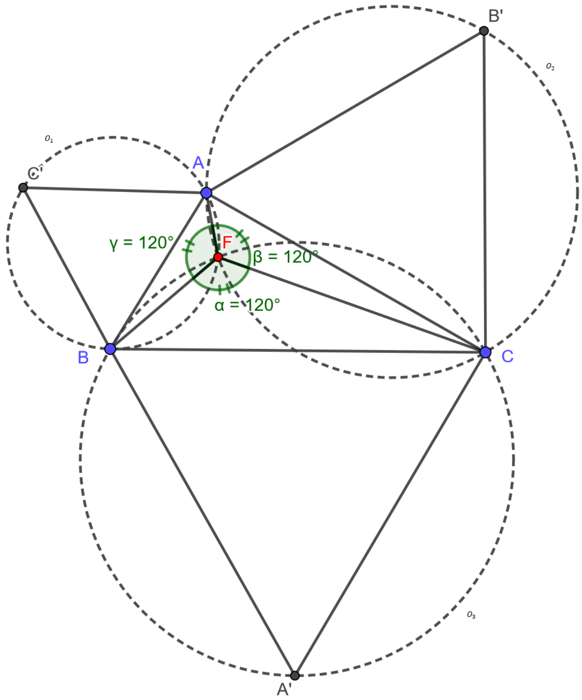


Fonte: elaborado pelo autor

No esquema da Figura 100, as tiras AP, BP e CP que prendem as massas estão igualmente espaçadas sob ângulos de 120º.

Já no âmbito da Geometria Plana o ponto de Fermat é o ponto interno ao ΔABC cuja soma das distância a cada um dos vértices desse triângulo é mínima. Tal feito só pode ser alcançado se esse ponto (F) estiver localizado na interseção dos segmentos AF, BF e CF que deverão estar igualmente espaçados sob ângulos de 120º, como visto na Figura 101.

Figura 101 – $\angle AFB = \angle BFC = \angle AFC = 120^o$



Fonte: elaborado pelo autor

Para o Ponto de Fermat - X(13), temos o método apresentado por Park e Flores (2015) em um experimento ilustrativo em ambiente de sala de aula. Tal metodologia consistiu em verificar experimentalmente a condição de equilíbrio entre três corpos de massas iguais presos por fios formando ângulos de 120º.

Figura 102 – $\Delta AC'C$ e $\Delta ABB'$

Fonte:(PARK; FLORES, 2015)

A identificação do ponto de Fermat permitiu concluir acerca de um mesmo resultado sob duas abordagens de naturezas diferentes, uma física e outra geométrica, com aplicações práticas em ambiente de sala de aula.

Dessa forma, o estudo dos Pontos Notáveis Não Clássicos acarretou a identificação dos centros de triângulos que, apesar de serem pouco abordados e discutidos no Ensino Médio, têm um amplo campo para exploração e aplicação das propriedades que os impulsionam a se tornarem cada vez mais notáveis, no ponto de vista da geometria, e notados, no ponto de vista do ensino e da aprendizagem.

O estudo dos Pontos Notáveis Não Clássicos não se esgota com esse trabalho, de sorte a identificação dos vetores posição, das propriedades de otimização, entre outras, de todos os Pontos Notáveis Não Clássicos possam ser aprofundadas.

Considerações Finais

Em relação ao estudo

No intuito de identificar, caracterizar e elucidar algumas das propriedades dos Pontos Notáveis de um triângulo, uma das grandes motivações desta pesquisa já tinha sido mencionada por Kimberling, isto é, a necessidade de se encontrar características, parâmetros que podiam se repetir, independemente do triângulo analisado.

Assim, este trabalho buscou aprofundar alguns dos centros de Kimberling, aqueles ditos Pontos Notáveis Clássicos de um triângulo, ou seja, aqueles centros relacionados na *Encyclopedia of Triangle Centers - ETC* que mais se evidenciavam no ensino da geometria do triângulo no currículo do aluno em seus anos de formação básica, o Incentro (X(1)), o ponto de encontro das bissetrizes internas; o Baricentro (X(2)), o encontro das medianas; o Circuncentro (X(3)), o encontro das mediatrizes e o Ortocentro (X(4)) o encontro das alturas.

O estudo a respeito desses pontos clássicos permitiu revelar algumas propriedades e aplicações relativas à otimização, e, assim, entender a capacidade desses pontos em maximizar ou minimizar distâncias.

Na esteira da caracterização dos quatro Pontos Notáveis Clássicos citados, este trabalho verificou no compêndio de Kimberling a existência de outros Pontos Notáveis não tão evidentes assim no ensino da geometria do triângulo, porém, como foi apresentado por este estudo, não são menos importantes. Esses outros pontos, o Centro da Circunferência dos Nove Pontos (X(5)); o Ponto Simediano (X(6)); o Ponto de Gergonne (X(7)) e o Ponto de Fermat (X(13)) denominados "Não Clássicos", foram identificados, e tiveram algumas de suas propriedades relativas à otimização elucidadas.

O estudo da Circunferência dos Nove Pontos - X(5) permitiu demonstrar a existência de pontos internos a um triângulo que são concíclicos e o centro dessa circunferência está sobre um lugar geométrico de grande relevância, a Reta de Euler.

A identificação do Ponto Simediano - X(6) tornou possível o estudo sobre conjugados isogonais e a conclusão acerca da sua relação com o Baricentro. Adicionalmente, foi apresentada sua propriedade geométrica e sua aplicação prática na análise e na localização de trajetórias.

O Ponto de Gergonne - X(7) possibilitou o estudo do Teorema de Brianchon, cuja aplicação está voltada para o hexágono mas seus efeitos podem ser verificados no triângulo, quando aquela figura de seis lados se degenera para uma de três lados.

A pesquisa na Enciclopedia de Kimberling oportunizou a análise do Ponto de Fermat - X(13) cujas propriedades foram demonstradas tanto no campo da Física quanto no campo da Geometria Plana.

Os resultados obtidos tanto para os Pontos Notáveis Clássicos, embora possam já ser conhecidos, quanto para os Pontos Notáveis Não Clássicos, se limitaram ao estudo de um total de oito centros de triângulo. Cabe lembrar aqui que, Kimberling, ao elaborar o seu compêndio, relacionou mais de mil centros, e a relação compilada não é exaustiva e está sujeita à complementação conforme o surgimento de descobertas e novos estudos no campo da Geometria.

Trabalhos futuros

Frente a essas considerações, vê-se a relevância deste estudo e de sua continuidade no sentido de aprofundar a pesquisa acerca dos Pontos Notáveis relacionados por Kimberling. Apresentar e elucidar as propriedades dos Pontos Notáveis foi o objetivo deste trabalho, porém espera-se que os pontos levantados aqui subsidiem e incentivem a realização de pesquisas futuras no sentido de desvendar aquilo que está além dos Pontos Notáveis do triângulo.

Para exemplificar, sugere-se como continuação deste trabalho:

- identificar, caracterizar os pontos X(8), X(9), X(10), X(11) e X(12), a fim de se consolidar os conhecimentos sobre os treze primeiros centros de Kimberling.
- aprofundar o estudo dos Pontos Notáveis, conjugando os conceitos da Geometria Euclidiana Plana, da Geometria Analítica Vetorial e de Otimização a fim de melhor detalhar, em especial os Pontos Notáveis Não Clássicos.
- estender a pesquisa feita até aqui para os demais centros de Kimberling, a fim de se evidenciar as propriedades singulares dos Pontos Notáveis de um triângulo.
- aplicar propriedades dos Pontos Notáveis Clássicos e dos Não Clássicos em ambiente de sala de aula.

Referências

BOGOMOLNY, A. *Erdös Mordell Inequality*. 2018. <https://www.cut-the-knot.org/triangle/ErdosMordell.shtml>. Acesso: 07/04/2020. Citado na página 66.

BOLTYANSKI, V.; MARTINI, H.; SOLTAN, V. *Geometric methods and optimization problems, Kluwer, Dordrecht, 1999.* [S.l.: s.n.], 1999. VIII. Citado 3 vezes nas páginas 87, 91 e 94.

BORCHERDS, M. *GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone*. 2007. <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso: 08/10/2019. Citado na página 19.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda., 1974. Citado na página 70.

COXETER, H.; GREITZER, S. *Geometry Revisited*. Mathematical Association of America, 1967. (Anneli Lax New Mathematical Library, v. 19). ISBN 9780883856192. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=TAb9dL4uXCAC>. Citado na página 83.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana: exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com resposta*. 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 21, 23 e 24.

HIRIART-URRUTY, J.-B.; LAURENT, P.-J. A characterization by optimization of the orthocenter of a triangle. *Elemente der Mathematik*, v. 70, p. 45–48, 01 2015. Citado na página 57.

KIMBERLING, C. *Encyclopedia of Triangle Centers - ETC*. 2020. <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Acesso: 23/02/2020. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 95.

LU, Z. *Erdös-Mordell inequality and beyond*. 2007. <https://www.math.uci.edu/~zlu/talks/2007-uci-mathclub/ucimathclub.pdf>. Acesso: 30/10/2019. Citado na página 64.

MARTINS, R. A. *Colinearidade e Concorrência em Olimpíadas Internacionais de Matemática: uma reflexão voltada para o ensino da Geometria Plana no Brasil*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, 2015. Citado na página 79.

MENDES, M. Desigualdades - parte ii. *Pólos Olímpicos de Treinamento, Curso de Álgebra - Nível 2*, v. 9, 2012. Citado na página 34.

MENDES, M. Problemas envolvendo máximos e mínimos. *Pólos Olímpicos de Treinamento, Curso de Álgebra - Nível 2*, v. 10, 2012. Citado na página 43.

NAIK, V. Optimization methods in planar geometry. *Chennai Mathematical Institute*, 2007. Citado na página 32.

OBM. *Geometria do Triângulo: fatos e problemas*. 2017. <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/teorema_miquel.pdf>. Acesso: 07/04/2020. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.

PARK, J.; FLORES, A. Fermat's point from five perspectives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 46, p. 425–441, 3 2015. Citado 2 vezes nas páginas 90 e 102.

Patrascu, I.; Smarandache, F. A Theorem about Simultaneous Orthological and Homological Triangles. *arXiv e-prints*, p. arXiv:1004.0347, abr. 2010. Citado 4 vezes nas páginas 73, 74, 75 e 77.

PINHEIRO, P. R. O círculo dos nove pontos. In: *Revista do Professor de Matemática*. [S.l.: s.n.], 1989. v. 14. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 70.

PINHEIRO, R. Teorema de tales e aplicações. *Pólos Olímpicos de Treinamento, Curso de Geometria - Nível 2*, v. 3, 2012. Citado na página 40.

RAO, J.; PRASANNA, T. Tables turned: Physics in the service of mathematics. *Resonance*, v. 21, p. 1135–1149, 12 2016. Citado na página 89.

SMITHER, R. K. The symmedian point: Constructed and applied. In: *The College Mathematics Journal*. [S.l.: s.n.], 2011. v. 42, n. 2. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 79.

THIAGO, C. Pontos notáveis 2: Incentro. *Pólos Olímpicos de Treinamento, Curso de Geometria - Nível 2*, v. 16, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 39.

THIAGO, C. Pontos notáveis 3: Circuncentro e o ortocentro. *Pólos Olímpicos de Treinamento, Curso de Geometria - Nível 2*, v. 17, 2012. Citado na página 62.

THIAGO, C. Potência de ponto e eixo radical. *Pólos Olímpicos de Treinamento, Curso de Geometria - Nível 2*, v. 11, 2012. Citado na página 82.

THIAGO, C. Quadriláteros inscritíveis. *Pólos Olímpicos de Treinamento, Curso de Geometria - Nível 2*, v. 8, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 63.

THIAGO, C. Teorema de ceva e teorema de menelaus. *Pólos Olímpicos de Treinamento, Curso de Geometria - Nível 2*, v. 14, 2012. Citado na página 24.

TORRES, A. Desigualdades. *Revista Eureka*, São Paulo, v. 18, p. 42 – 52, dez. 2003. Citado na página 66.

VENTURI, J. J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*. 9. ed. Curitiba: Artes Gráficas e Editora Unificado, 1949. Citado 3 vezes nas páginas 27, 31 e 49.

WAGNER, E. *Duas Médias*. 2011. <http://www.rpm.org.br/cdrpm/18/11.htm>. Acesso: 07/04/2020. Citado na página 33.