

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

**Teoria de Perturbação na Dinâmica de Campos  
Térmicos: Aspectos Formais, Fórmula de  
Redução e Cálculo de Taxas de Decaimento.**

Chrystian de Assis Siqueira

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Física.

**Orientador:** Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana

*Brasília-DF*

*Abril, 2009*

## Agradecimentos

Agradeço à minha família pelo apoio, em especial ao meu pai, Floriano, aos meus irmãos, Simone, Sérgio e Célio, à minha companheira Sandra e à minha sogrinha Juvenilha. Agradeço também aos meus tios Euclides e Lenir, Otílio e Iole, Wilson e Joana e aos meus primos Lima, Emanuel e Fátima pelo apoio em momentos difíceis. Agradeço a todos os meus amigos, em especial a Tiago e Patrícia, Alex, Hermann, Leandro, Marcelo, Abraão, Nanderson, Ronni, Roberto e Érica de Mello. Agradeço também aos amigos da São Bento Flávio e Eduardo. Agradeço a todos os amigos da egrégora do CELF em especial ao mestre Gerd Fonrobert e aos amigos Dermeval, Robson e Afonso. Agradeço também aos amigos do Instituto de Química Prof. João Batista e Érica Moreno. Agradeço também ao meu orientador Ademir E. de Santana e aos membros da banca Adolfo P. C. Malbouisson, Silvana Perez, Amilcar Rabelo de Queiroz e Tarcisio Marciano da Rocha Filho. Agradeço também a todos os servidores do Instituto de Física em especial à Célia, Severino, Felipe e à Coordenadora da Pós-Graduação Vanessa Carvalho de Andrade. Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

## Resumo

Neste trabalho fazemos uma apresentação pouco usual dos fundamentos da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT), onde acrescentamos alguns elementos novos que são úteis, tanto para uma boa compreensão do formalismo, como para servirem de ferramentas de cálculo. Definimos os estados térmicos da DCT em termos de ensembles estatísticos gerais. Construimos os operadores térmicos bosônico e fermiônico, que são objetos de atuação mais abrangente que a transformação de Bogoliubov, operando tanto em operadores de campo, como em funções complexas. Considerando, por simplicidade, o caso do campo escalar real, escrevemos o teorema de Wick da DCT numa forma mais robusta, o que permitiu a dedução de uma fórmula de redução para a DCT. A partir desta fórmula a dedução do funcional gerador das funções de Green é imediata. Esses resultados podem ser obtidos no caso de outros campos. Devido a instabilidade térmica, esta fórmula só pode ser implementada nas primeiras ordens da teoria de perturbação. Como aplicação desta fórmula calculamos as taxas de decaimento para 3 processos físicos no nível de árvore: bóson $\rightarrow$ bóson+bóson, bóson $\rightarrow$ bóson+ $\dots$ +bóson

e bóson  $\rightarrow$  férmion + anti-férmion. Calculamos também a amplitude de espalhamento em 1 loop para um processo bóson + bóson  $\rightarrow$  bóson + bóson.

## Abstract

In this work we present the foundations of Thermofield Dynamics (TFD), in a not so usual way, where we add some new elements useful for the understanding of the formalism as well as tools for calculations. We define the TFD states in terms of general statistical ensembles. We introduce thermal operators, for bosons and fermions, acting on fields operators as in c-number functions, generalizing the Bogoliubov transformation. Considering, for the sake of simplicity, the real scalar field, we derive the Wick theorem for TFD, in a rigorous way, giving rise as a result a derivation of reduction formulas for TFD. From this result we obtain a generator functional for the Green functions in straightforward way. These results can also be derived for the context of other fields. Due to thermal instabilities this formula can be implemented up to few order in the perturbative approach. As an application, we calculate the decay rates for three physical process at the tree level:  $\text{boson} \rightarrow \text{boson} + \text{boson}$ ;  $\text{boson} \rightarrow \text{boson} + \dots + \text{boson}$ ;  $\text{boson} \rightarrow \text{fermion} + \text{antifermion}$ . We also calculate the scattering amplitude, at the one-loop level, for the process:  $\text{boson} + \text{boson} \rightarrow \text{boson} + \text{boson}$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Introdução ao Formalismo de DCT</b>	<b>14</b>
2.1	Graus de liberdade auxiliares na Mecânica Estatística Quântica.	14
2.2	Graus de liberdade auxiliares na DCT e estados térmicos . . .	24
2.3	Duplicação dos graus de liberdade na DCT . . . . .	30
2.3.1	Geradores de simetrias e observáveis . . . . .	30
2.3.2	Álgebra de Lie duplicada . . . . .	32
2.3.3	Regras de conjugação til . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Campo escalar real na DCT.</b>	<b>35</b>
3.1	Estado térmico do oscilador bosônico com 1 nível: sistema $\mathcal{OB}_\epsilon$ .	35
3.2	A transformação de Bogoliubov bosônica para o sistema $\mathcal{OB}_\epsilon$ .	44
3.2.1	A termalização dos operadores do sistema $\mathcal{OB}_\epsilon \cup \widetilde{\mathcal{OB}}_\epsilon$ .	48
3.2.2	Notação matricial para o sistema $\mathcal{OB}_\epsilon \cup \widetilde{\mathcal{OB}}_\epsilon$ . . . . .	51

3.3	Estado térmico do oscilador bosônico com infinitos graus de liberdade: sistema $\mathcal{OB}_\infty$ . . . . .	56
3.4	A transformação de Bogoliubov para o sistema $\mathcal{OB}_\infty$ . . . . .	61
3.4.1	A termalização dos operadores do sistema $\mathcal{OB}_\infty \cup \widetilde{\mathcal{OB}}_\infty$ . . . . .	64
3.4.2	Notação matricial para o sistema $\mathcal{OB}_\infty \cup \widetilde{\mathcal{OB}}_\infty$ . . . . .	65
3.5	Campo escalar real na DCT. . . . .	68
3.6	Propagador térmico do campo escalar real na DCT. . . . .	72
3.6.1	Termalização do campo escalar real e os operadores térmicos bosônicos. . . . .	75
<b>4</b>	<b>Campo de Dirac na DCT</b>	<b>83</b>
4.1	Estado térmico do oscilador fermiônico carregado com 1 grau de liberdade: sistema $\mathcal{OF}_\epsilon$ . . . . .	83
4.2	Transformação de Bogoliubov para o sistema $\mathcal{OF}_\epsilon$ . . . . .	89
4.2.1	A termalização dos operadores do sistema $\mathcal{OF}_\epsilon \cup \widetilde{\mathcal{OF}}_\epsilon$ . . . . .	94
4.2.2	Notação matricial para o sistema $\mathcal{OF}_\epsilon \cup \widetilde{\mathcal{OF}}_\epsilon$ . . . . .	96
4.3	Estado térmico do oscilador fermiônico com infinitos graus de liberdade $\mathcal{OF}_\infty$ . . . . .	100
4.4	A transformação de Bogoliubov para o sistema $\mathcal{OF}_\infty$ . . . . .	107
4.4.1	A termalização dos operadores do sistema $\mathcal{OF}_\infty \cup \widetilde{\mathcal{OF}}_\infty$ . . . . .	112

4.4.2	Notação matricial para o sistema $\mathcal{OF}_\infty \cup \widetilde{\mathcal{OF}}_\infty$ . . . . .	115
4.5	Propagador térmico do campo de Dirac na DCT. . . . .	119
4.5.1	Propagador térmico do campo de Dirac na DCT. . . . .	125
4.5.2	A termalização do campo de Dirac e os operadores térmicos fermiônicos. . . . .	128
<b>5</b>	<b>DCT Interagente</b>	<b>135</b>
5.1	Lei de substituição til para campos livres e a condição KMS para o propagador livre. . . . .	136
5.1.1	Lei de substituição til: caso livre . . . . .	138
5.2	Representação de interação na DCT e funções de Green interagentes . . . . .	141
5.3	Teorema de Wick para DCT . . . . .	146
5.4	Operador funcional de espalhamento térmico $\widehat{S}[J]$ da DCT . . . . .	155
5.4.1	O funcional gerador $Z[J; \theta_\beta]$ das funções de Green térmicas na DCT . . . . .	156
5.4.2	Fórmula de redução para DCT . . . . .	157
5.5	Análise da teoria de perturbação na DCT . . . . .	160
5.5.1	Lei de substituição: caso interagente . . . . .	160
5.5.2	Condição KMS e teoria de perturbação . . . . .	164

<b>6</b>	<b>Espalhamento Térmico</b>	<b>178</b>
6.1	Fórmula de redução na forma funcional na TQC . . . . .	179
6.2	Amplitude de espalhamento térmica	
	$\mathcal{M}(i \rightarrow f; \theta_\beta)$ . . . . .	188
6.3	Aplicações . . . . .	191
6.3.1	Taxa de decaimento térmica para o processo	
	$\sigma \rightarrow \pi + \pi$ . . . . .	191
6.3.2	Taxa de decaimento térmica para o processo	
	$\sigma \rightarrow \pi + \cdots + \pi$ . . . . .	202
6.3.3	Taxa de decaimento térmico para o processo	
	$\phi \rightarrow \psi + \bar{\psi}$ . . . . .	209
6.3.4	Amplitude térmica $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$ para o processo	
	$\phi + \phi \rightarrow \phi + \phi$ até 1 <i>loop</i> . . . . .	216
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>227</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) foi proposta por Takahashi e Umezawa como uma teoria quântica de campos térmica de tempo real completamente estruturada na noção de espaços de Hilbert [1–3]. Com o aparecimento da DCT, como uma versão do formalismo de Matsubara em termos de operadores, várias aplicações tornaram-se possíveis contemplando o fenômeno térmico dentro do escopo da teoria quântica de campos [1–4], em particular explorando representações algébricas [5].

A despeito do sucesso e dos desenvolvimentos realizados nas últimas cinco décadas, desde a publicação do artigo de Matsubara em 1955, a construção de uma teoria quântica de campos térmica geral permanece um problema aberto, encontrando dificuldades, por exemplo, na dedução de equações de transporte para sistemas descritos por uma teoria quântica de campos no

espaço-tempo curvo [6, 7]; ou lidando com a possibilidade de surgirem novas informações experimentais, como em física de altas energias, nas transições de fase do estado de hádrons para o estado de plasma quark-glúon [8, 9]. Em tais situações, a DCT aparece como uma forte candidata para novos desenvolvimentos devido a sua natureza algébrica.

A DCT está assentada sob duas bases: as regras de conjugação til (dual) e a transformação de Bogoliubov. A primeira define a duplicação algébrica das variáveis dinâmicas, e a segunda introduz os efeitos térmicos por meio da condensação do vácuo. Por causa desses constituintes algébricos, a DCT tem se mostrado útil no desenvolvimento das teorias de campos térmicas, com particular ênfase em grupos de simetria. Isto pode ser verificado quando consideramos que, por exemplo: os geradores da transformação de Bogoliubov são os geradores do grupo  $SU(2)$ , no caso dos férmions e são os geradores do grupo  $SU(1,1)$  no caso dos bósons [4]; elementos de q-grupos têm sido explorados em conexão com a noção das regras de conjugação til e da transformação de Bogoliubov, introduzindo o efeito térmico por meio da deformação na álgebra de Weyl-Heisenberg [10–12]; a natureza da duplicação tem sido analisada em termos de biálgebras, e também nesse contexto, uma conexão entre os elementos das álgebras de Hopf e das álgebras  $w^*$  foram

sugeridas [13, 14].

Consequentemente, o espaço vetorial da DCT é tomado como o espaço de representação para a álgebra de Lie [15]. Com isso as equações de movimento em DCT são deduzidas a partir do estudo dos grupos de simetria de Galileu e Poincaré [15, 16]; as equações de Liouville-von Neumann são introduzidas para os campos de Klein-Gordon e de Dirac associados com a teoria cinética [17]; e o limite clássico da DCT podem ser identificados [18, 19]. Um elemento característico para essa teoria de representação das álgebras de Lie é a duplicação do conjunto de operadores definidos no espaço de Hilbert da DCT (de fato, esta duplicação já está presente em qualquer formalismo de teoria de campos que lida com o fenômeno térmico [1]). Tal duplicação surge do fato de que os geradores das simetrias e as variáveis dinâmicas, desempenhando o mesmo papel no nível algébrico, são distintos no sentido da dinâmica. Este resultado sugere uma associação entre as álgebras de Lie definidas no espaço de Hilbert e as representações das  $w^*$ -álgebras [20–22], em particular, como uma generalização do trabalho de Ojima [23] para tratar sistemas fora do equilíbrio [16, 17]. Este tipo de representação, chamada *thermo-Lie álgebras*, é útil porque se estabelece a teoria quântica de campos térmica de maneira segura do ponto de vista físico e matemático. Por

exemplo, as regras de conjugação til em DCT são deduzidas sob bases gerais e podem também ser aplicadas a sistemas interagentes; o que não é o caso da formulação original, que é fisicamente bem embasada, mas se restringe a sistemas livres e encontrava problemas na extensão para o caso interagente. Fazendo uso dessas termo-álgebras, o formalismo da DCT trata consistentemente as interações por meio de uma teoria de perturbação análoga à TQC a  $T = 0$ .

### **Objetivo geral.**

O objetivo central deste trabalho é construir os elementos da teoria de perturbação de espalhamento térmico utilizando o formalismo da DCT, sob bases rigorosas. Este aspecto não foi ainda tratado de modo satisfatório na literatura.

Neste espírito, obtemos as amplitudes de espalhamento e reação para processos ocorrendo em um meio à temperatura finita no nível de árvore e em 1 loop. Por meio destas amplitudes calculamos as taxas de decaimento para processos envolvendo bósons e férmions. Estes resultados são obtidos a partir de uma fórmula de redução para a DCT que foi deduzida neste trabalho por meio do teorema de Wick para a DCT. Devido à instabilidade térmica esta fórmula só pode ser utilizada nas primeiras ordens da teoria de perturbação.

A partir desta fórmula obtemos também o funcional gerador das funções de Green para o campo escalar real, resultado que pode ser generalizado para outros campos.

No desenvolvimento deste trabalho alguns dos elementos da DCT foram reformulados, facilitando a compreensão do formalismo. A Duplicação dos graus de liberdade da DCT é descrita em termos do conceito de graus de liberdade auxiliares, que é um ingrediente já presente na Mecânica Estatística Quântica usual. O conceito de estados térmicos é definido em termos de ensembles estatísticos gerais. Construimos operadores térmicos de Bogoliubov bosônicos e fermiônicos. Estes objetos simplificam bastante o cálculo dos propagadores térmicos. Escrevemos o teorema de Wick para a DCT numa forma fechada, que utilizamos para deduzir a fórmula de redução para a DCT, e que também pode ser utilizada na obtenção do funcional gerador das funções de Green.

### **Estrutura da tese e objetivos específicos.**

No capítulo 2 fazemos uma breve revisão dos elementos básicos da Mecânica Estatística Quântica (MEQ), por dois motivos: o primeiro é discutir o conceito de graus de liberdade auxiliares e o papel que estes desempenham no tratamento dos fenômenos térmicos; o segundo motivo é demonstrar a

equivalência entre a DCT e a MEQ no tratamento de sistemas no equilíbrio térmico. Em seguida introduzimos a duplicação dos graus de liberdade na DCT, sendo que os graus de liberdade adicionados podem ser interpretados como graus de liberdade auxiliares, que são convenientemente escolhidos para serem semelhantes aos graus de liberdade ordinários do sistema de interesse. A duplicação dos graus de liberdade serve de base para definirmos o conceito de *estado térmico*, que consiste numa descrição do estado de equilíbrio térmico de um sistema macroscópico em termos de um estado puro, lembrando que estados de equilíbrio são usualmente descritos em termos de estados mistos. Uma das contribuições deste trabalho consiste em definir o estado térmico em termos de ensembles estatísticos gerais. Na parte final deste capítulo, a duplicação é considerada sob um ponto de vista formal, utilizando-se as termo-álgebras no contexto da teoria quântica.

No capítulo 3 vamos construir o formalismo da DCT para o campo escalar neutro. Para tanto, vamos considerar primeiro um sistema extremamente simples: o oscilador bosônico com um grau de liberdade. A razão é a de enfatizarmos elementos algébricos da DCT sem nos preocuparmos com outros detalhes; mas também porque este simples sistema serve de protótipo para o estudo do campo escalar neutro. Ainda no caso do oscilador bosônico simples,

introduzimos a notação matricial da DCT, e mostramos que o estado térmico associado ao ensemble grande canônico pode ser escrito em termos de uma transformação unitária, que é uma transformação de Bogoliubov, um dos pilares da DCT, servindo de base para todos os processos de termalização do formalismo. Em seguida todos estes resultados são generalizados para o caso de um oscilador bosônico com infinitos graus de liberdade, ou seja, para o caso do campo escalar neutro. A termalização dos operadores de campo é definida por meio dos operadores térmicos, objetos que foram forjados neste trabalho, e por meio dos quais podemos obter quantidades termalizadas a partir das não termalizadas de maneira direta e em completa analogia aos cálculos realizados para o oscilador com um grau de liberdade.

No capítulo 4 fazemos para o campo de Dirac tudo o que foi feito para o campo escalar neutro. A estrutura deste capítulo é basicamente a mesma do capítulo 3.

No capítulo 5 apresentamos mais um ingrediente algébrico da DCT: a lei de substituição til [24]. Esta lei, que corresponde a condição KMS [25], constitui um elemento essencial na dedução da teoria de perturbação canônica da DCT [26]. Com este procedimento, demonstramos, de modo inédito na literatura, o teorema de Wick para DCT, definindo o conceito de con-

tração térmica entre campos, numa forma completamente análoga à TQC. Uma outra contribuição do nosso trabalho consiste no operador funcional de espalhamento térmico, em termos do qual o funcional gerador das funções de Green é obtido, e ainda, encontramos uma fórmula análoga à fórmula de redução da TQC que relaciona o operador de espalhamento térmico ao funcional gerador. Este cálculo pode ser analogamente realizado para outros campos como o fermiônico e vetorial, por exemplo. No capítulo seguinte fazemos uma aplicação envolvendo o caso fermiônico. Apresentamos a lei de substituição til na forma interagente e discutimos o papel que ela desempenha no sentido de garantir que a teoria de perturbação da DCT seja bem definida em todas as ordens. No final deste capítulo fazemos uma breve comparação entre as teorias de perturbação da DCT, do formalismo de Matsubara e de Keldysh-Schwinger.

No capítulo 6 fazemos uma breve discussão sobre a fórmula de redução na forma funcional da TQC no intuito de discutir algumas questões importantes que surgem quando estamos tratando de fenômenos térmicos, como a instabilidade térmica, por exemplo. Apresentamos o conceito de amplitude de espalhamento térmico, definidas em [27], que permite o cálculo de seções de choque e taxas de decaimento térmicas [28]. Com o intuito de

testar a fórmula de redução que deduzimos para a DCT no capítulo 5, calculamos as taxas de decaimento térmicas obtidas em [27] para 3 processos físicos, os dois primeiros envolvendo decaimento bóson-bóson e o último envolvendo decaimento de um bóson num par férmion-anti-férmion. No capítulo 7 fazemos a conclusão da tese apresentando algumas perspectivas para a continuação deste trabalho.

## Capítulo 2

# Introdução ao Formalismo de DCT

Neste capítulo vamos discutir a conexão entre a DCT e a MEQ, para tanto vamos introduzir o conceito de estado térmico associado a um ensemble estatístico por meio da duplicação dos graus de liberdade do sistema. Em seguida vamos propor duas possíveis interpretações para esta duplicação e no final do capítulo veremos que a duplicação dos graus de liberdade pode ser obtida a partir da estrutura algébrica da TQC.

### 2.1 Graus de liberdade auxiliares na Mecânica Estatística Quântica.

Considere que um sistema quântico macroscópico,  $\mathcal{S}$ , de volume  $V$  e composto por  $N$  partículas, está em equilíbrio térmico à temperatura  $T = 1/\beta$ .

A média térmica de um observável  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{S}$  é dada por

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\beta = Z_\beta^{-1} \sum_{J \in \mathcal{C}} e^{-\beta E_J} \langle J | \mathcal{O} | J \rangle, \quad (2.1)$$

onde os  $J_s$  denotam os microestados acessíveis ao sistema  $\mathcal{S}$  e compatíveis com condições macroscópicas dadas em

$$\mathcal{C} = \{J | V_J = V, N_J = N, E_{min} \leq E_J \leq \infty\}. \quad (2.2)$$

Ou seja, entre os microestados acessíveis, todos estão contidos numa região de volume  $V$ , possuem o número de partículas igual a  $N$ , sendo que a energia dos microestados pode variar livremente, desde um valor mínimo,  $E_{min}$ , até  $\infty$ . O conjunto de microestados  $\mathcal{C}$  caracterizados pelo peso estatístico  $e^{-\beta E_J}$  é chamado ensemble canônico. A função de partição canônica  $Z_\beta$ , dada por

$$Z_\beta = \sum_{J \in \mathcal{C}} e^{-\beta E_J}, \quad (2.3)$$

depende das variáveis macroscópicas fixadas por  $V, N, T$ . É a partir da função de partição que obtemos as funções termodinâmicas que descrevem o comportamento macroscópico do sistema  $\mathcal{S}$ .

A definição da média térmica Eq.(2.1) equivale a tratar o estado macroscópico de  $\mathcal{S}$  como um estado misto, ou seja, como uma superposição incoerente dos microestados  $J \in \mathcal{M}$ , podendo, portanto, ser descrito por um

operador densidade  $\rho_\beta$  definido por

$$\rho_\beta = Z_\beta^{-1} \sum_{J \in \mathcal{C}} e^{-\beta E_J} |J\rangle\langle J|, \quad (2.4)$$

de maneira que, em termos do operador densidade  $\rho_\beta$ , podemos reescrever (2.1) e (2.3) da seguinte forma

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\beta = \text{Tr} \rho_\beta \mathcal{O}, \quad (2.5)$$

onde o operador  $\rho_\beta$  satisfaz

$$\text{Tr} \rho_\beta = 1. \quad (2.6)$$

Ou seja, a prescrição que permite obter o comportamento macroscópico do sistema  $\mathcal{S}$  em equilíbrio térmico à temperatura  $T$ , consiste em caracterizar o estado macroscópico de  $\mathcal{S}$  por meio de um estado misto descrito pelo operador densidade (2.4), que permite o cálculo de qualquer observável  $\mathcal{O}$  do sistema macroscópico  $\mathcal{S}$  via (2.5). [29]

Na teoria quântica a média de um dado observável  $\mathcal{O}$ , resultante de grande número de medições realizadas num sistema  $\mathcal{S}$ , que se encontra num estado  $|\psi(t)\rangle$ , é instantaneamente dada por

$$\langle \mathcal{O} \rangle(t) = \langle \Psi(t) | \mathcal{O} | \Psi(t) \rangle. \quad (2.7)$$

Na Mecânica Estatística Quântica (MEQ) argumenta-se que a média estatística (2.1) resulta naturalmente de uma média do tipo (2.7), quando o observável  $\mathcal{O}$  se refere a um sistema macroscópico  $\mathcal{S}$ .

Um dos argumentos está expresso nos postulados básicos da MEQ, os quais são formulados para sistemas quase isolados. A menos que o sistema de interesse seja o próprio universo, todos os sistemas de interesse são sistemas quase isolados; ou seja, sempre estamos de fato interessados em subsistemas de um sistema maior, de maneira que certos graus de liberdade não observados são incorporados naquilo que chamaremos de resto do mundo. Supõe-se, portanto, que o sistema de interesse  $\mathcal{S}$ , sempre está interagindo fracamente com o resto do mundo, o qual é descrito por um sistema quântico que denotaremos por  $\mathcal{A}$ . O espaço de Hilbert que descreve o sistema como um todo é dado por  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ , de forma que um observável associado ao sistema  $\mathcal{S}$  é dado por  $\mathcal{O} \otimes \mathbb{I}$ . Um estado genérico de  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  pode ser escrito como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_J |J, \psi_J(t)\rangle, \quad (2.8)$$

onde  $|J\rangle$  são autoestados ortonormalizados do operador hamiltoniano do sistema  $\mathcal{S}$ . Nesse temos que a média do operador  $\mathcal{O}$  é dada por

$$\langle \mathcal{O} \rangle(t) = \sum_{J', J} \langle \Psi_{J'}(t) | \Psi_J(t) \rangle \langle J' | \mathcal{O} | J \rangle, \quad (2.9)$$

No entanto, como os tempos envolvidos em medições do observável  $\mathcal{O}$  são curtos em relação ao tempo de resolução do aparelho de medida, porém são extremamente longos quando comparados aos tempos envolvidos nos movimentos das partículas que constituem o sistema  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{A}$ , o aparelho na verdade consegue detectar apenas uma média temporal do valor esperado (2.9)

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_{J', J} \overline{\langle \Psi_{J'}(t) | \Psi_J(t) \rangle} \langle J' | \mathcal{O} | J \rangle, \quad (2.10)$$

onde o traço sobre a amplitude  $\langle \Psi_{J'}(t) | \Psi_J(t) \rangle$  indica média temporal. O postulado das fases aleatórias da MEQ afirma que [30]

$$\overline{\langle \Psi_{J'}(t) | \Psi_J(t) \rangle} = 0, \quad J' \neq J,$$

considerando que as fases entre os estados  $|\Psi_{J'}(t)\rangle$  e  $|\Psi_J(t)\rangle$  variam tão rapidamente que a média temporal ao longo do tempo de medição se anula. Isso significa que a média (2.10) fica

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_J \overline{\langle \Psi_J(t) | \Psi_J(t) \rangle} \langle J | \mathcal{O} | J \rangle, \quad (2.11)$$

onde as médias  $\{\overline{\langle \Psi_J(t) | \Psi_J(t) \rangle}\}$  são dadas pelo postulado das probabilidades iguais a priori, que será dado a seguir.

Considere um sistema macroscópico  $\mathcal{S}'$ , de volume  $V$  e com  $N$  partículas, interagindo tão fracamente com o resto do mundo, que sua energia pode ser

considerada aproximadamente constante. Sejam  $\{E_J\}$  as autoenergias do hamiltoniano  $H$  do sistema  $\mathcal{S}$ , ou seja

$$H|J\rangle = E_J|J\rangle.$$

O postulado das propabilidades iguais a priori afirma que

$$\begin{aligned} \overline{\langle \Psi_J(t) | \Psi_J(t) \rangle} &= 1 & E_J \in [E, E + \Delta], \\ &= 0 & E_J \notin [E, E + \Delta], \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde  $\Delta \ll E$ . Podemos introduzir um operador densidade  $\rho_E$  a partir de (2.12), definindo seus elementos de matriz  $\rho_{EJJ}$  na base  $\{J\}$  por

$$\rho_{EJJ} = \overline{\langle \Psi_J(t) | \Psi_J(t) \rangle},$$

de onde segue

$$\rho_E = \Omega_E^{-1} \sum_{J \in \mathcal{M}} |J\rangle \langle J|,$$

sendo que  $\mathcal{M}$  é definido por

$$\mathcal{M} = \{J | V_J = V, N_J = N, E \leq E_J \leq E + \Delta\}, \tag{2.13}$$

e a função  $\Omega_E$ , definida por

$$\Omega_E = \sum_{J \in \mathcal{M}} 1, \tag{2.14}$$

contabiliza o número de microestados  $J$  acessíveis ao sistema  $\mathcal{S}'$  caracterizado pelas condições macroscópicas dadas por  $\mathcal{M}$ . O conjunto  $\mathcal{M}$  de microestados equiprováveis é chamado de ensemble microcanônico. Em termos do operador densidade  $\rho_E$ , (2.11) é dado por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = Tr \rho_E \mathcal{O}, \quad (2.15)$$

onde, é imediato que

$$Tr \rho_E = 1,$$

Se considerarmos que o sistema  $\mathcal{S}'$ , em vez de ser o sistema de interesse, é um sistema composto pelo sistema de interesse  $\mathcal{S}$  e por um reservatório térmico à temperatura  $T = 1/\beta$ , pode-se mostrar, a partir de (2.15) e mais algumas considerações [29,30], que a média macroscópica de um observável de  $\mathcal{S}'$  é dada por (2.1), o que significa que os ensemble microcanônico e canônico são equivalentes, assim como os demais ensembles que são definidos fixando outras variáveis macroscópicas como pressão, potencial químico, etc. Isso significa que a média (2.9) tomada num estado puro do sistema macroscópico  $\mathcal{S}$  no estado de equilíbrio, via o postulado das fases aleatórias, equivale a média (2.5) associada ao estado misto descrito por (2.4).

Um outro argumento que tenta justificar que a média (2.1) decorre do

valor esperado (2.7), consiste em considerar que o nosso conhecimento a respeito de um sistema macroscópico  $\mathcal{S}'$  é incompleto, ou seja, que há graus de liberdade de  $\mathcal{A}$ , dentro de  $\mathcal{S}'$ , que não percebemos [31]. Nesta abordagem, um observável macroscópico está associado aos graus de liberdade que conhecemos sendo, portanto, dado por  $\mathcal{O} \otimes \mathbb{I}$ , de maneira que, se o sistema com todos os seus graus de liberdade  $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \otimes \mathcal{A}$  estiver num estado  $|\Psi\rangle$ , o valor esperado do observável será dado por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \Psi | \mathcal{O} \otimes \mathbb{I} | \Psi \rangle. \quad (2.16)$$

Sejam  $\{|J\rangle\}$  e  $\{|a\rangle\}$  bases ortonormais, respectivamente, em  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{A}$ . Em termos destas bases, a relação de completude em  $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \otimes \mathcal{A}$ , é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{J,a} |J,a\rangle \langle J,a| &= \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \\ &= 1, \end{aligned}$$

a qual utilizada duas vezes no valor esperado (2.16), resulta em

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_{J,a,J',a'} \langle \Psi | J,a \rangle \langle a|a' \rangle \langle J|\mathcal{O}|J' \rangle \langle J',a' | \Psi \rangle. \quad (2.17)$$

Considerando  $\langle a|a'\rangle = \delta_{aa'}$ , teremos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O} \rangle &= \sum_{J a J'} \langle \Psi | J, a \rangle \langle J | \mathcal{O} | J' \rangle \langle J', a | \Psi \rangle, \\
&= \sum_{J a J'} \langle J', a | \Psi \rangle \langle \Psi | J, a \rangle \langle J | \mathcal{O} | J' \rangle, \\
&= \sum_{J J'} \left( \sum_a \langle J', a | \Psi \rangle \langle \Psi | J, a \rangle \right) \langle J | \mathcal{O} | J' \rangle. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Seja  $\rho_\Psi$  um operador densidade, associado ao sistema  $\mathcal{S}$ , definido nas bases  $\{|J\rangle\}$  e  $\{|J'\rangle\}$  por

$$\langle J' | \rho_\Psi | J \rangle = \sum_a \langle J', a | \Psi \rangle \langle \Psi | J, a \rangle,$$

ou seja,

$$\rho_\Psi = \sum_{J' J a} |J'\rangle \langle J', a | \Psi \rangle \langle \Psi | J, a \rangle \langle J|. \tag{2.19}$$

A partir da definição de  $\rho_\Psi$ , é imediato que

$$\begin{aligned}
Tr \rho_\Psi &= \sum_J \langle J | \rho_\Psi | J \rangle, \\
&= \sum_J \left( \sum_a \langle J, a | \Psi \rangle \langle \Psi | J, a \rangle \right), \\
&= \sum_{J a} \langle \Psi | J, a \rangle \langle J, a | \Psi \rangle, \\
&= \langle \Psi | \Psi \rangle.
\end{aligned}$$

Considerando que o estado  $|\Psi\rangle$  é normalizado, teremos

$$Tr \rho_\Psi = 1.$$

Em termos de  $\rho_\Psi$ , (2.18) fica

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O} \rangle &= \sum_{JJ'} \langle J' | \rho_\Psi | J \rangle \langle J | \mathcal{O} | J' \rangle, \\
&= \sum_{J'} \langle J' | \rho_\Psi \mathcal{O} | J' \rangle, \\
&= \text{Tr} \rho_\Psi \mathcal{O}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Isso significa que o argumento do conhecimento incompleto dos graus de liberdade de um sistema  $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \otimes \mathcal{A}$  faz com que o valor esperado (2.16), num estado puro  $|\Psi\rangle \in \mathcal{S}'$ , resulte num estado misto relativo aos graus de liberdade de  $\mathcal{S}$ , que são os graus de liberdade que conhecemos. O que, assim como os postulados da MEQ, leva à mesma caracterização do estado macroscópico de  $\mathcal{S}$  em termos de um estado misto.

É importante ressaltar que, nessas duas abordagens, fez-se uso de graus de liberdade auxiliares, no intuito de se obter a caracterização correta do estado macroscópico como estado misto a partir do estado puro do sistema, o qual é descrito como sendo composto pelo sistema de interesse mais um sistema auxiliar. Na primeira argumentação, os graus de liberdade do resto do mundo, na segunda, os graus de liberdade desconhecidos de  $\mathcal{S}'$ , desempenham o papel de graus de liberdade auxiliares. No entanto, estes graus de liberdade adicionais não desempenham qualquer outro papel, que o de justificar a correta descrição do estado macroscópico do sistema de interesse como

estado misto associado a algum ensemble.

## 2.2 Graus de liberdade auxiliares na DCT e estados térmicos

A DCT também faz uso de graus de liberdade auxiliares com o mesmo propósito que na MEQ. Entretanto, na DCT, estes graus de liberdade participam ativamente junto com os graus de liberdade do sistema de interesse ao longo de todo o formalismo, servindo de base para uma estrutura rica em recursos e desdobramentos, como veremos ao longo deste trabalho.

Voltemos ao caso do sistema  $\mathcal{S}$ , de volume  $V$  e constituído de  $N$  partículas, que está em equilíbrio térmico à temperatura  $T = 1/\beta$ . Seguindo os mesmos passos iniciados em (2.16), definiremos uma média  $\langle \mathcal{O} \rangle$  por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \Psi | \mathcal{O} \otimes \mathbb{I} | \Psi \rangle. \quad (2.21)$$

No entanto, na DCT, escolhemos um sistema auxiliar, que representaremos por  $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ , que é dual<sup>1</sup> de  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ . Isso significa que o espaço total é dado por  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ . Escolhemos também um estado  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{S}}}$  de maneira que

---

<sup>1</sup>Na próxima seção definiremos a operação de conjugação dual, chamada de conjugação til, que explica com mais detalhes a relação entre os espaços  $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{S}}}$  e  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ . Nesta seção os espaços  $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{S}}}$  e  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  podem ser considerados idênticos sem nenhum prejuízo aos cálculos que serão realizados.

$\rho_\Psi$ , definido em (2.19), seja igual a  $\rho_\beta$  em (2.4), ou seja,

$$\begin{aligned}\rho_\Psi &= \rho_\beta \\ &= Z_\beta^{-1} \sum_{J \in \mathcal{C}} e^{-\beta E_J} |J\rangle\langle J|.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Segundo (2.19), temos

$$\sum_{J', \tilde{J}} |J'\rangle\langle J', \tilde{J}| \Psi\rangle\langle \Psi| J, \tilde{J}\rangle\langle J| = Z_\beta^{-1} \sum_{J \in \mathcal{C}} e^{-\beta E_J} |J\rangle\langle J|,$$

o que implica em

$$\begin{aligned}\sum_{\tilde{J}} \langle J', \tilde{J}| \Psi\rangle\langle \Psi| J, \tilde{J}\rangle &= Z_\beta^{-1} e^{-\beta E_J} \delta_{JJ'}, & \forall J, J' \in \mathcal{C}, \\ &= 0, & \forall J, J' \notin \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Portanto, para  $J, J' \in \mathcal{C}$ , teremos

$$\begin{aligned}\langle J', \tilde{J}| \Psi\rangle\langle \Psi| J, \tilde{J}\rangle &= Z_\beta^{-1} e^{-\beta E_J} \delta_{JJ'} \delta_{J\tilde{J}}, \\ &= Z_\beta^{-1} e^{-\beta E_J} \delta_{J\tilde{J}} \delta_{J' \tilde{J}}, \\ &= \delta_{J' \tilde{J}} Z_\beta^{-1/2} e^{-\beta E_{J'}/2} \delta_{J\tilde{J}} Z_\beta^{-1/2} e^{-\beta E_J/2}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Ou seja, uma condição suficiente para que tenhamos (2.23) é que

$$\langle J, \tilde{J}| \Psi\rangle = \delta_{J\tilde{J}} Z_\beta^{-1/2} e^{-\beta E_J/2}, \quad \forall J, \tilde{J} \in \mathcal{C},\tag{2.24}$$

o que significa que

$$|\Psi\rangle = Z_\beta^{-1/2} \sum_{J \in \mathcal{C}} e^{-\beta E_J/2} |J, \tilde{J}\rangle,\tag{2.25}$$

onde estamos considerando implicitamente  $\tilde{J} = J$ , conforme demanda  $\delta_{J\tilde{J}}$  em (2.24). Por ora, vamos chamar o estado  $|\Psi\rangle$  em (2.25) simplesmente de estado térmico e denotá-lo por

$$|0, \beta\rangle = Z_\beta^{-1/2} \sum_{J \in \mathcal{C}} e^{-\beta E_J/2} |J, \tilde{J}\rangle, \quad (2.26)$$

de maneira, que conforme o nosso ponto de partida (2.21), teremos

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle 0, \beta | \mathcal{O} \otimes \mathbb{I} | 0, \beta \rangle,$$

o qual, segundo (2.20), resulta em

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle &= \text{Tr} \rho_\beta \mathcal{O}, \\ &= Z_\beta^{-1} \sum_{J \in \mathcal{C}} e^{-\beta E_J} \langle J | \mathcal{O} | J \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,  $\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle_\beta$  é a média do observável  $\mathcal{O}$  do sistema macroscópico  $\mathcal{S}$  no equilíbrio térmico à temperatura  $T = 1/\beta$ .

Lembramos que o estado microscópico  $J$  de um sistema quântico, cujas partículas ocupam níveis  $\{j\}$ , é completamente caracterizado especificando-se os números de partículas  $\{n_j\}$  em cada nível (o qual é chamado de número de ocupação do nível  $j$ ) de forma que temos  $J = \{n_j\}$ . Seja  $\epsilon_j$  a energia de uma partícula no nível  $j$ . Em termos do número de ocupação, o número de partículas e a energia de um microestado  $\{n_j\}$ , são dados por

$$N\{n_j\} = \sum_j n_j, \quad E\{n_j\} = \sum_j n_j \epsilon_j.$$

Em termos dessa notação, o estado térmico (2.26) é dado por

$$|0, \beta\rangle = Z_\beta^{-1/2} \sum_{\{n_j\}}^{N\{n_j\}=N} e^{-\beta E\{n_j\}/2} |\{n_j\}, \{\tilde{n}_j\}\rangle, \quad (2.27)$$

a função de partição (2.3) é dada por

$$Z_\beta = \sum_{\{n_j\}}^{N\{n_j\}=N} e^{-\beta E\{n_j\}}, \quad (2.28)$$

e a média térmica de um operador é dada por

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\beta = Z_\beta^{-1} \sum_{\{n_j\}}^{N\{n_j\}=N} e^{-\beta E\{n_j\}} \langle \{n_j\} | \mathcal{O} | \{n_j\} \rangle.$$

Vale ressaltar que podemos equivalentemente obter um estado térmico como  $|0, \beta\rangle$  em qualquer ensemble, o que nos permite descrever estados de equilíbrio caracterizados por diversas variáveis termodinâmicas. Seja  $\mathcal{S}$  um sistema macroscópico cujo estado de equilíbrio é descrito pelo operador densidade  $\rho_\mathcal{E}$ , que é definido por

$$\begin{aligned} \rho_\mathcal{E} &= \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{E}} \rho_\mathcal{E}\{n_j\} |\{n_j\}\rangle \langle \{n_j\}|, \\ \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{E}} \rho_\mathcal{E}\{n_j\} &= 1. \end{aligned}$$

O estado térmico correspondente é dado por

$$|0, \mathcal{E}\rangle = \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{E}} \rho_\mathcal{E}^{1/2}\{n_j\} |\{n_j\}, \{\tilde{n}_j\}\rangle, \quad (2.29)$$

onde  $\mathcal{E}$  representa o ensemble estatístico contendo as condições macroscópicas que caracterizam o estado de equilíbrio de  $\mathcal{S}$ . Por exemplo, no ensemble microcanônico, teremos

$$|0, E\rangle = \Omega_E^{-1/2} \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{M}} |\{n_j\}, \{\tilde{n}_j\}\rangle, \quad (2.30)$$

onde  $\Omega_E$  e  $\mathcal{M}$ , já foram definidos em (2.13) e (2.14). No ensemble grande canônico teremos

$$|0, \beta\mu\rangle = \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{G}} e^{-\beta(E\{n_j\} - \mu N\{n_j\})/2} |\{n_j\}, \{\tilde{n}_j\}\rangle, \quad (2.31)$$

onde  $\mu$  é o potencial químico e  $\mathcal{G}$  é definido por

$$\mathcal{G} = \{\{n_j\} \mid V\{n_j\} = V, \quad 0 \leq N\{n_j\} \leq \infty, \quad E_0 \leq E\{n_j\} \leq \infty\}, \quad (2.32)$$

sendo que o conjunto de microestados  $\mathcal{G}$  caracterizado pelo peso estatístico  $e^{-\beta(E\{n_j\} - \mu N\{n_j\})}$  é o ensemble grande canônico.  $\Xi_{\beta\mu}$  é a função de partição grande canônica, sendo dada por

$$\Xi_{\beta\mu} = \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{G}} e^{-\beta(E\{n_j\} - \mu N\{n_j\})}. \quad (2.33)$$

Notamos ainda que as condições de normalização dos estados térmicos são equivalentes às condições de que o traço dos operadores densidade sejam iguais a unidade, e que também equivalem às definições das funções de par-

tição. Por exemplo, no ensemble microcanônico, teremos

$$\begin{aligned}
 \langle 0, E | 0, E \rangle &= \text{Tr} \rho_E, \\
 &= \Omega_E^{-1} \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{M}} 1, \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

que implica em

$$\Omega_E = \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{M}} 1,$$

da mesma forma, para o ensemble grande canônico, teremos

$$\begin{aligned}
 \langle 0, \beta\mu | 0, \beta\mu \rangle &= \text{Tr} \rho_{\beta\mu}, \\
 &= \Xi_{\beta\mu}^{-1} \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{G}} e^{-\beta(E\{n_j\} - \mu N\{n_j\})}, \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

que resulta em

$$\Xi_{\beta\mu} = \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{G}} e^{-\beta(E\{n_j\} - \mu N\{n_j\})}; \quad (2.34)$$

o que, é claro, vale para outros ensembles.

Antes de concluir esta seção, vamos voltar a questão da interpretação física dos graus de liberdade auxiliares. Apesar de termos utilizado os cálculos que foram estruturados na segunda argumentação, onde o sistema

macroscópico possui graus de liberdade escondidos, sabemos que ambas as argumentações são questionáveis na medida em que nenhuma delas está formalmente fundamentada na dinâmica do sistema macroscópico. Entendemos que o papel que ambos os argumentos desempenham é meramente o de justificar a descrição correta do estado macroscópico em termos do estado misto caracterizado por um ensemble adequado. Portanto, o leitor fica livre para interpretar os graus de liberdade auxiliares como um recurso que reproduza os efeitos do resto de mundo sobre o sistema de interesse, ou que reproduza o fato de estarmos lidando com um sistema cujos graus de liberdade não são totalmente conhecidos. Qualquer outra interpretação, que cumpra o mesmo papel que as duas apresentadas, pode ser equivalentemente adotada. Na próxima seção veremos que o espaço duplicado  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{\tilde{\xi}}$  pode ser obtido da própria estrutura algébrica da teoria quântica, o que permitirá definir formalmente o espaço  $\mathcal{H}_{\tilde{\xi}}$ .

## 2.3 Duplicação dos graus de liberdade na DCT

### 2.3.1 Geradores de simetrias e observáveis

A fim de introduzirmos um formalismo baseado no estado térmico  $|0, \beta\rangle$  a partir de considerações gerais, assumimos que o conjunto de variáveis cinemáticas,  $\mathcal{V}$ , é um espaço vetorial dos automorfismos em um espaço de

Hilbert  $\mathcal{H}_T$ . O conjunto  $\mathcal{V}$  é composto de dois subespaços e é escrito como  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{ob} \oplus \mathcal{V}_{gen}$ , onde  $\mathcal{V}_{ob}$  consiste no conjunto de observáveis cinemáticas, enquanto que  $\mathcal{V}_{gen}$  consiste no conjunto de geradores (cinemáticos) de simetria. Esta classificação de  $\mathcal{V}$  é usual em teoria quântica (e também em clássica), mas neste caso temos  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{ob} = \mathcal{V}_{gen}$ . Isto ocorre porque para cada gerador de simetria existe um correspondente observável descrito pelo mesmo objeto algébrico<sup>2</sup>.

Deve-se enfatizar que, a despeito da correspondência 1 – 1 entre observáveis e geradores de simetria ser fisicamente embasada, não existe nenhuma imposição mecânica, (de natureza cinemática ou dinâmica) *a priori* para considerar que um gerador de simetria e o correspondente observável devem ser descritos pelo mesmo objeto matemático. De fato, estamos livres para considerar uma situação mais geral. Aqui consideramos a mesma correspondência entre geradores e observáveis, mas  $\mathcal{V}_{ob}$  e  $\mathcal{V}_{gen}$  serão considerados como diferentes entre si. Ou seja,  $\mathcal{V}_{ob}$  e  $\mathcal{V}_{gen}$  serão descritos por diferentes aplicações em  $\mathcal{H}_T$ . Para enfatizar esta diferença, denotaremos elementos arbitrários de  $\mathcal{V}_{ob}$  por  $A$  e por  $\hat{A}$  o correspondente elemento em  $\mathcal{V}_{gen}$ . Agora analisaremos a consequência de tal *condição de separabilidade* em uma situação geral.

---

<sup>2</sup>Nesta seção seguiremos de perto os resultados das referências [5, 14, 15]

### 2.3.2 Álgebra de Lie duplicada

Tomando  $\mathcal{H}_T$  como um espaço vetorial para a representação da álgebra de Lie  $l$ , podemos escrever

$$[\widehat{A}_i, \widehat{A}_j] = ic_{ij}^k \widehat{A}_k, \quad (2.35)$$

onde  $\widehat{A}_i \in \mathcal{V}_{gen}$ . A presença do número imaginário  $i$  serve para enfatizar que estamos tratando com uma representação unitária de  $l$ .

A Eq.(2.35) mostra que temos uma representação para  $l$  em termos dos operadores do tipo  $\widehat{A}$ . Contudo, como  $\mathcal{H}_T$  é o espaço de representação, devemos considerar os operadores do tipo  $A$  (de modo contrário teremos apenas a representação usual). Conseqüentemente temos relações de comutação adicionais entre os operadores  $A$  e  $\widehat{A}$ , e entre os operadores  $A$ . Ou seja,

$$[\widehat{A}_i, A_j] = if_{ij}^k A_k, \quad (2.36)$$

$$[A_i, A_j] = ig_{ij}^k A_k, \quad (2.37)$$

onde  $f_{ij}^k$  e  $g_{ij}^k$  são constantes de estrutura a serem fixadas. Observe que estas relações de comutação Eqs.(2.35)-(2.37) descrevem uma álgebra de Lie (a ser denotada por  $l_T$ ) que é um produto semi-direto de duas subálgebras,  $\mathcal{V}_{gen}$  e  $\mathcal{V}_{obs}$ , sendo  $\mathcal{V}_{obs}$  a subálgebra invariante. A razão para isto é uma imposi-

ção física. Desde que os operadores  $A$  descrevem observáveis cinemáticas, a Eq.(2.36) é interpretada como a ação infinitesimal da simetria gerada por  $\widehat{A}_i$  no observável  $A_i$ , resultando em outro observável dado por  $if_{ij}^k A_k$ . Aqui tomamos  $f_{ij}^k = g_{ij}^k \equiv c_{ij}^k$  [18].

### 2.3.3 Regras de conjugação til

Algumas propriedades da álgebra  $l_T$ , que serão úteis no estudo das representações, podem ser imediatamente deduzidas. Definindo a variável  $\widetilde{A}$ ,

$$\widetilde{A} = A - \widehat{A}, \quad (2.38)$$

as relações de comutação dadas por Eqs.(2.35)-(2.37) são agora reescritas como

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= ic_{ij}^k A_k, \\ [\widetilde{A}_i, \widetilde{A}_j] &= -ic_{ij}^k \widetilde{A}_k, \\ [A_i, \widetilde{A}_j] &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Este resultado mostra que a duplicação dos graus de liberdade foi introduzida, em comparação com a teoria de representação de grupos padrão (irredutível). Esta é uma consequência direta da separabilidade entre as aplicações em  $\mathcal{H}_T$  descrevendo os geradores de simetria e aquelas descrevendo os observáveis.

Tal duplicação pode ser descrita como uma aplicação em  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{ob} \oplus \mathcal{V}_{gen}$ , ou seja,  $\lambda : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , denotada por  $\lambda A \lambda = \tilde{A}$  satisfazendo as seguintes condições:

$$(A_i A_j) \tilde{\ } = \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \quad (2.40)$$

$$(c A_i + A_j) \tilde{\ } = c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j, \quad (2.41)$$

$$(A_i^\dagger) \tilde{\ } = (\tilde{A}_i)^\dagger, \quad (2.42)$$

$$(\tilde{A}_i) \tilde{\ } = A_i. \quad (2.43)$$

Estas propriedades são chamadas *regras de conjugação til*.

O espaço  $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{S}}}$  definido nesta seção é portanto, obtido a partir das regras conjugação til aplicadas do espaço  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ . Chamaremos os graus de liberdade auxiliares associados a  $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{S}}}$  de graus de liberdade til.

## Capítulo 3

### Campo escalar real na DCT.

Nesta seção aplicaremos o formalismo da DCT para o caso do oscilador bosônico com um grau de liberdade. Com isso ganharemos novos elementos para o estudo dos campos térmicos. O processo de termalização será implementado via a duplicação algébrica dos graus de liberdade e a transformação de Bogoliubov será introduzida diretamente para os operadores de campo: um resultado importante para cálculos e inusitado na literatura.

#### 3.1 Estado térmico do oscilador bosônico com 1 nível: sistema $\mathcal{OB}_\epsilon$ .

Seja  $\mathcal{OB}_\epsilon$  um oscilador harmônico quântico com 1 grau de liberdade, o qual chamaremos de nível  $\epsilon$ , descrito pelo operador hamiltoniano  $H$ , dado

por<sup>1</sup>

$$H = \epsilon a^\dagger a \quad (3.1)$$

onde os operadores de criação e destruição, respectivamente,  $a^\dagger$  e  $a$ , satisfazem a álgebra

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (3.2)$$

O operador número  $\mathbf{N}$  é definido por

$$\mathbf{N} = a^\dagger a, \quad (3.3)$$

sendo que, a partir de (3.2), podemos verificar que

$$[\mathbf{N}, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [\mathbf{N}, a] = -a. \quad (3.4)$$

Considerando (3.4), pode-se mostrar que o espectro de autovalores de  $\mathbf{N}$  é dado por  $\{n = 0, 1, 2, \dots\}$  e que os respectivos autoestados ortonormalizados, denotados por  $\{|n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\}$ , são dados por

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>Estamos adotando o sistema de unidades com  $\hbar = 1$ .

de forma que um autoestado  $|n\rangle$  contém  $n$  partículas. Os autoestados de  $\mathbf{N}$  satisfazem

$$\mathbf{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (3.6)$$

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \quad , \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \quad (3.7)$$

Em termos do operador número, o hamiltoniano pode ser escrito como

$$H = \epsilon\mathbf{N}. \quad (3.8)$$

Assim, o espectro de autoenergias de  $H$  é dado por  $\{\epsilon_n = n\epsilon | n = 1, 2, \dots\}$ , sendo que os autoestados são os mesmos de  $\mathbf{N}$ , os quais, conforme (3.7), expandem o espaço de Hilbert do sistema  $\mathcal{OB}_\epsilon$ . Um autoestado  $|n\rangle$  descreve  $n$  partículas no nível  $\epsilon$ , possuindo, portanto, energia igual a  $n\epsilon$ . O autoestado  $|0\rangle$  não contém nenhuma partícula. Por isso é chamado estado de vácuo, o qual, conforme (3.6), satisfaz

$$a|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a^\dagger = 0. \quad (3.9)$$

A fim de construir o formalismo da DCT, temos de duplicar os graus de liberdade do sistema em acordo com as regras de conjugação til, Eqs.(2.40)-(2.43), ou seja, os operadores til têm de ser introduzidos. No caso do sistema  $\mathcal{OB}_\epsilon$ , isso quer dizer que temos de introduzir os operadores  $\{\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}, \tilde{\mathbf{N}} =$

$\{\tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \tilde{H} = \epsilon \tilde{\mathbf{N}}\}$ . Aplicando as regras de conjugação til para a álgebra dada em (3.2), obtemos

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad [\tilde{a}, \tilde{a}] = [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0, \quad (3.10)$$

e, aplicando-as nas eqs.(3.6)-(3.8), obtemos

$$\begin{aligned} |\tilde{n}\rangle &= \frac{(\tilde{a}^\dagger)^{\tilde{n}}}{\sqrt{\tilde{n}!}} |\tilde{0}\rangle \\ \sum_{\tilde{n}} |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}| &= 1 \quad , \quad \langle \tilde{m} | \tilde{n} \rangle = \delta_{\tilde{m}\tilde{n}}, \\ \tilde{\mathbf{N}} |\tilde{n}\rangle &= \tilde{n} |\tilde{n}\rangle \quad , \quad \tilde{H} |\tilde{n}\rangle = \tilde{n} \epsilon |\tilde{n}\rangle \end{aligned}$$

Assim temos um oscilador harmônico auxiliar relativo ao grau de liberdade til, que denotaremos por  $\widetilde{\mathcal{OB}}_\epsilon$ , com o espaço de Hilbert  $\widetilde{\mathcal{H}}_\epsilon$ . Na DCT construímos o grau de liberdade til de maneira que ele seja independente do ordinário. Temos, portanto, que a álgebra entre os operadores til e ordinários é dada por

$$[a, \tilde{a}] = [a, \tilde{a}^\dagger] = [a^\dagger, \tilde{a}] = [a^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0. \quad (3.11)$$

Lembramos que a relação (2.39) se refere a observáveis, por isso só está indiretamente relacionada a (3.11), já que os observáveis (ordinários e til) do sistema  $\mathcal{OB}_\epsilon \cup \widetilde{\mathcal{OB}}_\epsilon$  são  $\{H, \tilde{H}, \mathbf{N}, \tilde{\mathbf{N}}\}$ , e não os operadores  $\{a, \tilde{a}, a^\dagger, \tilde{a}^\dagger\}$ .

Conforme já discutimos na primeira seção, o papel que os graus de liberdade til (auxiliares) desempenham no esquema da DCT, consiste em fornecer

as bases para a descrição macroscópica do sistema de interesse, neste caso, o sistema  $\mathcal{OB}_\epsilon$ . Isso significa que a duplicação do grau de liberdade de  $\mathcal{OB}_\epsilon$  não implica que estamos, de fato, acrescentando fisicamente um outro oscilador harmônico idêntico ao original. O que estamos acrescentando é um recurso do formalismo, que, conforme as duas possíveis interpretações da MEQ apresentadas, ou simula o efeito da interação fraca do resto do mundo sobre  $\mathcal{OB}_\epsilon$ , ou considera que estamos descrevendo um sistema cujos graus de liberdade não são totalmente conhecidos. A energia do sistema  $\mathcal{OB}_\epsilon$  continua sendo, portanto,  $H = \epsilon N$ , porém, conforme vimos em (2.38), o gerador das translações temporais  $\hat{H}$  do oscilador duplicado, cujo espaço de Hilbert é  $\mathcal{H}_\epsilon \otimes \tilde{\mathcal{H}}_\epsilon$ , é dado por

$$\begin{aligned}\hat{H} &= H - \tilde{H} \\ &= \epsilon N - \epsilon \tilde{N} \\ &= \epsilon(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}).\end{aligned}$$

Considere agora que o sistema  $\mathcal{OB}_\epsilon$  possui  $N$  partículas e está em equilíbrio térmico à temperatura  $T^2$ . Denotemos o número de ocupação do nível  $j = \epsilon$  por  $n_j = n_\epsilon$ . O microestado de  $\mathcal{OB}_\epsilon$  é dado por  $J = n_\epsilon$ , sendo que o número

---

<sup>2</sup>Esse sistema não possui volume definido.

de partículas e a energia do sistema neste microestado são dados por

$$\begin{aligned} N_{n_\epsilon} &= \sum_{j=\epsilon} n_j, & E_{n_\epsilon} &= \sum_{j=\epsilon} n_j \epsilon_j, \\ &= n_\epsilon, & &= n_\epsilon \epsilon, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Conforme (2.27), o estado térmico  $|0, \beta\rangle$  associado a esse sistema é dado por

$$\begin{aligned} |0, \beta\rangle &= Z_\beta^{-1/2} \sum_{\{n_\epsilon\}}^{n_\epsilon=N} e^{-\beta E_{n_\epsilon}/2} |n_\epsilon, \tilde{n}_\epsilon\rangle, \\ &= Z_\beta^{-1/2} \sum_{n_\epsilon=N} e^{-\beta n_\epsilon \epsilon/2} |n_\epsilon, \tilde{n}_\epsilon\rangle, \\ &= Z_\beta^{-1/2} e^{-\beta N \epsilon/2} |N, \tilde{N}\rangle. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A condição de normalização deste estado térmico resulta em

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | 0, \beta \rangle &= Z_\beta^{-1} e^{-\beta \epsilon N} \langle N, \tilde{N} | N, \tilde{N} \rangle, \\ &= Z_\beta^{-1} e^{-\beta \epsilon N}, \\ &= 1, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$Z_\beta = e^{-\beta \epsilon N}. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) em (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} |0, \beta\rangle &= |N, \tilde{N}\rangle, \\ &= \frac{(a^\dagger)^N (\tilde{a}^\dagger)^{\tilde{N}}}{\sqrt{N! \tilde{N}!}} |0, \tilde{0}\rangle, \\ &= \frac{(a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^N}{N!} |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde fizemos  $\tilde{N} = N$ , como vimos em (2.24). Note que o estado térmico (3.15) desse sistema em particular não depende da temperatura. Vejamos como isto está em acordo o que esperamos para o estado de equilíbrio desse sistema. Como vimos em (3.12), a energia do nosso sistema é constante, pois o único microestado que satisfaz a condição  $N_{n_\epsilon} = N$  é  $n_\epsilon = N$ . Isso significa que a média térmica da energia tem de ser igual a  $\epsilon N$ , ou seja<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\langle H \rangle_\beta &= \langle 0, \beta | H | 0, \beta \rangle = \langle N, \tilde{N} | H | N, \tilde{N} \rangle, \\ &= \langle N | H | N \rangle \langle \tilde{N} | \tilde{N} \rangle = \epsilon \langle N | \mathbf{N} | N \rangle, \\ &= \epsilon N,\end{aligned}$$

como deveria ser.

Considere agora que o nosso oscilador bosônico atingiu o estado de equilíbrio, trocando calor e partículas com o meio externo, à temperatura  $T = 1/\beta$  e com o potencial químico  $\mu$ . Conforme (2.31), o estado térmico que descreve esta situação é dado por

$$|0, \beta\mu\rangle = \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{n_\epsilon \in \mathcal{G}} e^{-\beta(E_{n_\epsilon} - \mu N_{n_\epsilon})/2} |n_\epsilon, \tilde{n}_\epsilon\rangle. \quad (3.16)$$

e, conforme vimos em (2.34), a sua condição de normalização resulta em

$$\Xi_{\beta\mu} = \sum_{n_\epsilon \in \mathcal{G}} e^{-\beta(E_{n_\epsilon} - \mu N_{n_\epsilon})},$$

---

<sup>3</sup>A partir de agora denotaremos  $\mathcal{O} \otimes \mathbb{I}$  simplesmente por  $\mathcal{O}$ , sem risco de causar confusão.

onde  $\mathcal{G}$  é definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \{n_\epsilon \mid 0 \leq N_{n_\epsilon} \leq \infty, \quad 0 \leq E_{n_\epsilon} \leq \infty\}, \\ &= \{n_\epsilon \mid 0 \leq n_\epsilon \leq \infty\}.\end{aligned}$$

Portanto, a função de partição  $\Xi_{\beta\mu}$  é dada por

$$\begin{aligned}\Xi_{\beta\mu} &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{N_{n_\epsilon}=N \\ \{n_\epsilon\}}} e^{-\beta(\epsilon-\mu)n_\epsilon}, \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_\epsilon=N} e^{-\beta(\epsilon-\mu)n_\epsilon} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)N}, \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Quanto ao estado térmico (3.16), temos

$$\begin{aligned}|0, \beta\mu\rangle &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{n_\epsilon \in \mathcal{G}} e^{-\beta(E\{n_\epsilon\} - \mu N\{n_\epsilon\})/2} |n_\epsilon, \tilde{n}_\epsilon\rangle, \\ &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{N_{n_\epsilon}=N \\ \{n_\epsilon\}}} e^{-\beta(\epsilon-\mu)n_\epsilon/2} |n_\epsilon, \tilde{n}_\epsilon\rangle, \\ &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_\epsilon=N} e^{-\beta(\epsilon-\mu)n_\epsilon/2} |n_\epsilon, \tilde{n}_\epsilon\rangle \\ &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)N/2} |N, \tilde{N}\rangle.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Neste caso a média térmica da energia é dada por

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle_{\beta\mu} &= \langle 0, \beta\mu | H | 0, \beta\mu \rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1} \sum_{N, N'=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)(N'+N)/2} \langle N', \widetilde{N}' | H | N, \widetilde{N} \rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1} \sum_{N, N'=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)(N'+N)/2} \epsilon \delta_{\widetilde{N}' \widetilde{N}} \langle N' | \mathbf{N} | N \rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)N} \epsilon N.
\end{aligned}$$

Podemos escrever este último resultado da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle_{\beta\mu} &= \Xi_{\beta\mu}^{-1} \left( -\epsilon \frac{d}{dx} \right) \sum_{N=0}^{\infty} e^{-xN} \Big|_{x=\beta(\epsilon-\mu)}, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1} \left( -\epsilon \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{1 - e^{-x}} \Big|_{x=\beta(\epsilon-\mu)}, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1} \frac{\epsilon e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{(1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)})^2}.
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado (3.17), temos

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle_{\beta\mu} &= \frac{\epsilon e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}, \\
&= \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}, \\
&= \epsilon n_B(\epsilon),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde  $n_B(\epsilon)$  é função de distribuição de Bose-Einstein. Lembrando que  $H = \epsilon \mathbf{N}$  e, considerando (3.19), é imediato que

$$\langle \mathbf{N} \rangle_{\beta\mu} = n_B(\epsilon), \tag{3.20}$$

como deveria ser.

Até agora nada foi feito além reescrever os ingredientes básicos da MEQ em termos de estados térmicos, que são estados puros no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_\epsilon \otimes \tilde{\mathcal{H}}_\epsilon$ . Isso foi feito pela consideração de graus de liberdade auxiliares til, que são semelhantes aos do sistema de interesse. Na seção seguinte veremos que esta escolha nos permite definir, em particular, o estado térmico (3.16) em termos de uma transformação de Bogoliubov.

### 3.2 A transformação de Bogoliubov bosônica para o sistema $\mathcal{OB}_\epsilon$ .

Nesta seção veremos que o estado térmico bosônico  $|0, \beta\mu\rangle$  pode ser escrito como<sup>4</sup>

$$|0, \beta\mu\rangle = \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})|0\rangle \tag{3.21}$$

onde  $\mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})$  é uma transformação unitária, que também será utilizada para definir transformações nos operadores  $\{a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\}$  do sistema  $\mathcal{OB}_\epsilon \otimes \widetilde{\mathcal{OB}}_\epsilon$ . Dizemos que o operador  $\mathcal{U}_{\beta\mu}$  termaliza a teoria duplicada a  $T = 0$ . Essas transformações nos permitem realizar cálculos de quaisquer quantidades associadas a um sistema no estado de equilíbrio algebricamente, sem a necessidade de realizarmos as somas sob os microestados do ensemble grande

---

<sup>4</sup>Denotaremos o vácuo da teoria duplicada, para todas as teorias, por  $|0, \tilde{0}\rangle = |0\rangle$ .

canônico. Considerando que os campos bosônicos livres da TQC são como infinitos osciladores harmônicos da mesma forma que  $\mathcal{OB}_\epsilon$ , veremos que todos estes resultados podem ser generalizados para o caso de campos bosônicos à temperatura finita.

Substituindo a eq.(3.15) em (3.18), temos

$$\begin{aligned}
|0, \beta\mu\rangle &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)N/2} \frac{(a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^N}{N!} |0\rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(e^{-\beta(\epsilon-\mu)/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^N}{N!} |0\rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \exp(e^{-\beta(\epsilon-\mu)/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0\rangle,
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado (3.17), segue

$$|0, \beta\mu\rangle = (1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)})^{-1/2} \exp(e^{-\beta(\epsilon-\mu)/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0\rangle. \quad (3.22)$$

Considere a seguinte notação

$$\cosh \theta_{\beta\mu} = \frac{e^{\beta(\epsilon-\mu)}}{(e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1)^{1/2}} \equiv u(\theta_{\beta\mu}), \quad (3.23)$$

$$\sinh \theta_{\beta\mu} = \frac{1}{(e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1)^{1/2}} \equiv v(\theta_{\beta\mu}), \quad (3.24)$$

$$\tanh \theta_{\beta\mu} = e^{-\beta(\epsilon-\mu)/2}, \quad (3.25)$$

que são definições consistentes, já que

$$\begin{aligned}
u^2(\theta_{\beta\mu}) - v^2(\theta_{\beta\mu}) &= \cosh^2 \theta_{\beta\mu} - \sinh^2 \theta_{\beta\mu}, \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}} - \frac{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}, \\
&= \frac{1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}, \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Note que a temperatura  $T = 1/\beta$ , o potencial químico  $\mu$  e a energia  $\epsilon$  estão implicitamente consideradas no parâmetro  $\theta_{\beta\mu}$ , segundo as definições dadas nas eqs.(3.23)-(3.25). Substituindo as definições (3.23) e (3.25) em (3.22), obtemos

$$|0; \beta\mu\rangle = \cosh^{-1} \theta_{\beta\mu} e^{\tanh \theta_{\beta\mu} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0\rangle. \tag{3.27}$$

Considerando as seguintes relações

$$\tilde{a}^\dagger \tilde{a} |0\rangle = 0 \Rightarrow e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} |0\rangle = |0\rangle, \tag{3.28}$$

$$a^\dagger a |0\rangle = 0 \Rightarrow e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} a^\dagger a} |0\rangle = |0\rangle, \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
-a \tilde{a} |0\rangle = 0 &\Rightarrow e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} a^\dagger a} e^{\tanh \theta_{\beta\mu} (-a \tilde{a})} |0\rangle \\
&= |0\rangle,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

podemos reescrever (3.27) como

$$\begin{aligned}
|0; \beta\mu\rangle &= \cosh^{-1} \theta_{\beta\mu} e^{\tanh \theta_{\beta\mu} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} a^\dagger a} \\
&\times e^{\tanh \theta_{\beta\mu} (-\tilde{a}a)} |0\rangle, \\
&= \cosh^{-1} \theta_{\beta\mu} e^{\tanh \theta_{\beta\mu} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} (\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a)} \\
&\times e^{\tanh \theta_{\beta\mu} (-\tilde{a}a)} |0\rangle, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

e, considerando  $[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$ , temos que o termo  $\cosh^{-1} \theta_{\beta\mu}$  pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\cosh^{-1} \theta_{\beta\mu} &= e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu}}, \\
&= e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]}, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
|0; \beta\mu\rangle &= e^{\tanh \theta_{\beta\mu} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} (\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] + a^\dagger a)} e^{\tanh \theta_{\beta\mu} (-\tilde{a}a)} |0\rangle, \\
&= e^{\tanh \theta_{\beta\mu} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} (\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a)} e^{\tanh \theta_{\beta\mu} (-\tilde{a}a)} |0\rangle, \\
&= e^{\tanh \theta_{\beta\mu} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} [a^\dagger \tilde{a}^\dagger, -a\tilde{a}]} e^{\tanh \theta_{\beta\mu} (-\tilde{a}a)} |0\rangle, \\
&= e^{-\theta_{\beta\mu} (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)} |0\rangle, \tag{3.33}
\end{aligned}$$

onde utilizamos a identidade

$$e^{\tanh \theta_{\beta\mu} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu} [a^\dagger \tilde{a}^\dagger, -a\tilde{a}]} e^{\tanh \theta_{\beta\mu} (-\tilde{a}a)} = e^{-\theta_{\beta\mu} (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)}. \tag{3.34}$$

Note que o argumento da exponencial (3.33) é anti-hermitiano, o nos permite definir o operador hermitiano  $\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})$  por

$$\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu}) = -i\theta_{\beta\mu}(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger), \quad (3.35)$$

de forma que, em termos de (3.35), o resultado (3.33) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |0, \beta\mu\rangle &= \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})|0\rangle, \\ &= e^{-i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})}|0\rangle, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde  $\mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})$  é o operador que transforma  $|0\rangle$  em  $|0; \beta\mu\rangle$ . É imediato que  $\mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})$  é unitário, já que  $\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})$  é hermitiano. A partir de agora denotaremos o estado térmico  $|0, \beta\mu\rangle$  em termos do parâmetro  $\theta_{\beta\mu}$  por  $|0, \theta_{\beta\mu}\rangle$ .

Veremos, a seguir, que o operador  $\mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})$  é uma transformação de Bogoliubov, sendo  $\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})$  o gerador desta transformação.

### 3.2.1 A termalização dos operadores do sistema $\mathcal{OB}_\epsilon \cup \widetilde{\mathcal{OB}}_\epsilon$ .

A partir do operador unitário  $\mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})$ , introduzimos a termalização dos operadores  $\{a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\}$ , que é definida por

$$a(\theta_{\beta\mu}) = \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})a\mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}) \quad (3.37)$$

$$a^\dagger(\theta_{\beta\mu}) = \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})a^\dagger\mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}), \quad (3.38)$$

$$\tilde{a}(\theta_{\beta\mu}) = \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})\tilde{a}\mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}), \quad (3.39)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\theta_{\beta\mu}) = \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})\tilde{a}^\dagger\mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}). \quad (3.40)$$

Uma propriedade destas definições é que

$$\begin{aligned} a(\theta_{\beta\mu})|0; \theta_{\beta\mu}\rangle &= \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})a\mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu})\mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})|0, \tilde{0}\rangle, \\ &= \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})a|0\rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\tilde{a}(\theta_{\beta\mu})|0; \theta_{\beta\mu}\rangle = 0. \quad (3.42)$$

Portanto  $|0; \theta_{\beta\mu}\rangle$  é um estado de vácuo para os operadores  $a(\theta_{\beta\mu})$  e  $\tilde{a}(\theta_{\beta\mu})$ , mas não o é para os operadores  $a$  e  $\tilde{a}$ . Neste sentido,  $|0; \theta_{\beta\mu}\rangle$  é um estado puro para os operadores térmicos, e um estado térmico para os operadores não térmicos; esta é a razão pela qual  $|0; \theta_{\beta\mu}\rangle$  é usualmente chamado de vácuo térmico.

Vejamos como calcular  $a(\theta_{\beta\mu})$ , dado na eq.(3.37).

$$\begin{aligned} a(\theta_{\beta\mu}) &= \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})a\mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}) \\ &= e^{-i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})}ae^{i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a, i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})]^{(n)}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a, i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})]^{(2n)}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a, \mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})]^{(2n+1)}}{(2n+1)!}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Considerando a definição de  $\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})$  na eq.(3.35) e a álgebra dos operadores  $\{a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\}$  dada nas eqs.(3.2), (3.10) e (3.11), podemos verificar que os

comutadores da expressão acima resultam em

$$\begin{aligned}
[a, i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})]^{(2n)} &= \underbrace{[\cdots [a, i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})], \cdots, i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})]}_{2n} = (\theta_{\beta\mu})^{2n} a, \\
[a, i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})]^{(2n+1)} &= \underbrace{[\cdots [a, i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})], \cdots, i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})]}_{2n+1} = -(\theta_{\beta\mu})^{2n+1} \tilde{a}^\dagger,
\end{aligned}$$

de maneira que (3.43), fica

$$\begin{aligned}
a(\theta_{\beta\mu}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta_{\beta\mu})^{2n}}{(2n)!} a - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta_{\beta\mu})^{2n+1}}{(2n+1)!} \tilde{a}^\dagger, \\
&= \cosh \theta_{\beta\mu} a - \sinh \theta_{\beta\mu} \tilde{a}^\dagger, \\
&= u(\theta_{\beta\mu}) a - v(\theta_{\beta\mu}) \tilde{a}^\dagger.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Usando as regras de conjugação til e a conjugação hermitiana no resultado (3.44), podemos obter as seguintes relações

$$a(\theta_{\beta\mu}) = u(\theta_{\beta\mu}) a - v(\theta_{\beta\mu}) \tilde{a}^\dagger, \tag{3.45}$$

$$\tilde{a}^\dagger(\theta_{\beta\mu}) = -v(\theta_{\beta\mu}) a + u(\theta_{\beta\mu}) \tilde{a}^\dagger, \tag{3.46}$$

$$\tilde{a}(\theta_{\beta\mu}) = u(\theta_{\beta\mu}) \tilde{a} - v(\theta_{\beta\mu}) a^\dagger, \tag{3.47}$$

$$a^\dagger(\theta_{\beta\mu}) = -v(\theta_{\beta\mu}) \tilde{a} + u(\theta_{\beta\mu}) a^\dagger. \tag{3.48}$$

Considerando as definições (3.23) e (3.24), vemos que as relações (3.45) e (3.46) definem uma transformação de Bogoliubov para os operadores bosônicos  $\{a, \tilde{a}^\dagger\}$ , assim como as relações (3.47) e (3.48) definem uma transformação de Bogoliubov para os operadores bosônicos  $\{\tilde{a}, a^\dagger\}$  [1]. A partir de agora

iremos nos referir ao operador  $\mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})$ , ou às relações (3.45)-(3.48) como transformação de Bogoliubov para bósons. Note que a transformação de Bogoliubov mistura os graus de liberdade ordinários aos graus de liberdade til. Encontrar a transformação de Bogoliubov é, de fato, um resultado interessante que deriva da escolha de graus de liberdade auxiliares semelhantes aos ordinários.

### 3.2.2 Notação matricial para o sistema $\mathcal{OB}_\epsilon \cup \widetilde{\mathcal{OB}}_\epsilon$ .

Como a ação da transformação de Bogoliubov sobre os operadores bosônicos  $\{a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\}$  é linear, podemos reescrever as transformações (3.45)-(3.48) por meio de uma notação matricial, que será dada por

$$\begin{pmatrix} a(\theta_{\beta\mu}) \\ \tilde{a}^\dagger(\theta_{\beta\mu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}) & -v(\theta_{\beta\mu}) \\ -v(\theta_{\beta\mu}) & u(\theta_{\beta\mu}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\begin{pmatrix} a^\dagger(\theta_{\beta\mu}) \\ \tilde{a}(\theta_{\beta\mu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}) & -v(\theta_{\beta\mu}) \\ -v(\theta_{\beta\mu}) & u(\theta_{\beta\mu}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger \\ \tilde{a} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

As componentes são definidas por

$$a_1 = a, \quad a_1^\dagger = a^\dagger,$$

$$a_2 = \tilde{a}^\dagger, \quad a_2^\dagger = \tilde{a},$$

$$U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{11} = u(\theta_{\beta\mu}), \quad U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{12} = -v(\theta_{\beta\mu}),$$

$$U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{21} = -v(\theta_{\beta\mu}), \quad U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{22} = u(\theta_{\beta\mu}),$$

Em termos dessa notação podemos reescrever as transformações (3.45)-(3.48) da seguinte maneira

$$a_A(\theta_{\beta\mu}) = U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AB}a_B, \quad (3.51)$$

$$a_A^\dagger(\theta_{\beta\mu}) = U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AB}a_B^\dagger. \quad (3.52)$$

Em termos desta notação, podemos também escrever a álgebra dos operadores  $\{a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\}$ , dada em (3.2), (3.10) e (3.11), da seguinte maneira

$$[a_A, a_B^\dagger] = \tau_{AB}, \quad (3.53)$$

onde  $\tau$  é a matriz

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

os demais comutadores sendo nulos.

### **Propriedades da matriz de Bogoliubov bosônica.**

Uma consequência da unitariedade do operador  $\mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu})$  nas definições (3.37)-(3.40) é que a termalização dos operadores  $\{a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\}$  é uma transformação canônica, ou seja, os operadores termalizados  $\{a(\theta_{\beta\mu}), a^\dagger(\theta_{\beta\mu}), \tilde{a}(\theta_{\beta\mu}), \tilde{a}^\dagger(\theta_{\beta\mu})\}$  também satisfazem álgebra (3.53). Por exemplo, considere o

seguinte comutador

$$\begin{aligned}
[a(\theta_{\beta\mu})_A, a^\dagger(\theta_{\beta\mu})_B] &= a(\theta_{\beta\mu})_A a^\dagger(\theta_{\beta\mu})_B - a^\dagger(\theta_{\beta\mu})_B a(\theta_{\beta\mu})_A, \\
&= \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu}) a_A \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}) \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu}) a_B^\dagger \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}) \\
&\quad - \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu}) a_B^\dagger \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}) \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu}) a_A \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}), \\
&= \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu}) a_A a_B^\dagger \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}) - \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu}) a_B^\dagger a_A \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}), \\
&= \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu}) (a_A a_B^\dagger - a_B^\dagger a_A) \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}), \\
&= \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu}) [a_A, a_B^\dagger] \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}) = \tau_{AB} \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu}) \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}), \\
&= \tau_{AB},
\end{aligned}$$

o que, é claro, pode ser feito para os demais comutadores. Por exemplo, considere

$$[a(\theta_{\beta\mu})_A, a(\theta_{\beta\mu})_B] = \mathcal{U}_B(\theta_{\beta\mu}) [a_A, a_B] \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_{\beta\mu}) = 0.$$

Vejamos como este fato também se traduz por meio das propriedades da matriz de Bogoliubov bosônica  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu})$ . Considerando a relação (3.26) e a definição de  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu})$ , que é dada por

$$U^{-1}(\theta_{\beta\mu}) = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}) & -v(\theta_{\beta\mu}) \\ -v(\theta_{\beta\mu}) & u(\theta_{\beta\mu}) \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

podemos verificar as seguintes propriedades

$$U^{-1T}(\theta_{\beta\mu}) = U^{-1}(\theta_{\beta\mu}), \quad (3.55)$$

$$U(\theta_{\beta\mu}) = \boldsymbol{\tau}U^{-1}(\theta_{\beta\mu})\boldsymbol{\tau}, \quad (3.56)$$

$$U^{-1}(\theta_{\beta\mu})\boldsymbol{\tau}U^{-1}(\theta_{\beta\mu}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (3.57)$$

Podemos verificar a invariância da álgebra (3.53) sob a ação da transformação de Bogoliubov

$$\begin{aligned} [a(\theta_{\beta\mu})_A, a^\dagger(\theta_{\beta\mu})_B] &= [U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}a_C, U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{BD}a_D^\dagger], \\ &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{BD}[a_C, a_D^\dagger], \end{aligned}$$

considerando (3.53) e o fato de que a matriz  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu})$  é simétrica, temos

$$\begin{aligned} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}U^{-1T}(\theta_{\beta\mu})_{BD}\boldsymbol{\tau}_{CD}, \\ &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}\boldsymbol{\tau}_{CD}U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{DB}. \end{aligned}$$

Por fim, considerando a propriedade (3.57), temos

$$[a(\theta_{\beta\mu})_A, a^\dagger(\theta_{\beta\mu})_B] = \boldsymbol{\tau}_{AB}, \quad (3.58)$$

como já havíamos concluído anteriormente.

### Exemplo

As relações transformações de Bogoliubov são muito práticas na realização de alguns cálculos. Consideremos, como exemplo, o cálculo da média

térmica  $\langle \mathbf{N} \rangle_\beta$  do operador  $\mathbf{N} = a^\dagger a$ , que é dada por

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{N} \rangle_{\beta\mu} &= \langle 0; \theta_{\beta\mu} | a^\dagger a | 0; \theta_{\beta\mu} \rangle = \langle 0; \tilde{0} | e^{i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})} a^\dagger a e^{-i\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})} | 0; \tilde{0} \rangle \\
&= \langle 0; \tilde{0} | e^{-i\mathcal{G}_B(-\theta_{\beta\mu})} a^\dagger e^{i\mathcal{G}_B(-\theta_{\beta\mu})} e^{-i\mathcal{G}_B(-\theta_{\beta\mu})} a e^{i\mathcal{G}_B(-\theta_{\beta\mu})} | 0; \tilde{0} \rangle \\
&= \langle 0; \tilde{0} | a^\dagger(-\theta_{\beta\mu}) a(-\theta_{\beta\mu}) | 0; \tilde{0} \rangle.
\end{aligned}$$

Considerando (3.45) e (3.47), temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{N} \rangle_{\beta\mu} &= \langle 0; \tilde{0} | (u(-\theta_{\beta\mu}) a^\dagger - v(-\theta_{\beta\mu}) \tilde{a})(u(-\theta_{\beta\mu}) a - v(-\theta_{\beta\mu}) \tilde{a}^\dagger) | 0; \tilde{0} \rangle, \\
&= \langle 0; \tilde{0} | (u(\theta_{\beta\mu}) a^\dagger + v(\theta_{\beta\mu}) \tilde{a})(u(\theta_{\beta\mu}) a + v(\theta_{\beta\mu}) \tilde{a}^\dagger) | 0; \tilde{0} \rangle, \\
&= v^2(\theta_{\beta\mu}) \langle 0; \tilde{0} | \tilde{a} \tilde{a}^\dagger | 0; \tilde{0} \rangle = v^2(\theta_{\beta\mu}) = \frac{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}, \\
&= n_B(\epsilon), \tag{3.59}
\end{aligned}$$

que é o mesmo resultado que obtivemos em (3.20). Para obter (3.59), utilizamos as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] &= 1, \quad \langle 0; \tilde{0} | a^\dagger = 0, \quad a | 0; \tilde{0} \rangle = 0. \\
u(-\theta_{\beta\mu}) &= u(\theta_{\beta\mu}), \quad v(-\theta_{\beta\mu}) = -v(\theta_{\beta\mu})
\end{aligned}$$

e a definição (3.24).

### 3.3 Estado térmico do oscilador bosônico com infinitos graus de liberdade: sistema $\mathcal{OB}_\infty$ .

Considere que um oscilador bosônico, denotado por  $\mathcal{OB}_\infty$ , com infinitos graus de liberdade, é descrito pelo hamiltoniano  $H$ , que é definido por

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \epsilon_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}, \quad (3.60)$$

onde os operadores de criação e destruição, respectivamente,  $a_{\vec{p}}^\dagger$  e  $a_{\vec{p}}$ , satisfazem a álgebra <sup>5</sup>

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \quad , \quad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0. \quad (3.61)$$

Seja  $\mathbf{N}$  o operador número, definido por

$$\mathbf{N} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}, \quad (3.62)$$

considerando a álgebra (3.61), obtemos

$$[\mathbf{N}, a_{\vec{p}}^\dagger] = a_{\vec{p}}^\dagger \quad , \quad [\mathbf{N}, a_{\vec{p}}] = -a_{\vec{p}}, \quad (3.63)$$

e, a partir de (3.63), verificamos que os autovalores de  $\mathbf{N}$  são dados por

$$N\{n_{\vec{p}}\} = V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} n_{\vec{p}}, \quad (3.64)$$

---

<sup>5</sup>A rigor estamos lidando com um sistema de grandes dimensões, porém antes de tomarmos o limite termodinâmico. Assim sendo, o nosso sistema possui um volume finito  $V$ , de maneira que a função delta de Dirac que estamos utilizando é definida por  $\delta(\vec{p} - \vec{q}) = V \delta_{\vec{p}\vec{q}}$ , onde  $\delta_{\vec{p}\vec{q}} = 1$ , se  $\vec{p} = \vec{q}$ , e  $\delta_{\vec{p}\vec{q}} = 0$ , se  $\vec{p} \neq \vec{q}$ , e ainda, as integrais em  $\vec{p}$ , são tais que  $V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \rightarrow \sum_{\vec{p}}$ .

onde  $n_{\vec{p}} = 0, 1, 2, \dots$  e  $V$  é o volume do sistema. Os autoestados ortonormalizados de  $\mathbf{N}$ , denotados por  $\{|\{n_{\vec{p}}\}\rangle\}$ , são dados por

$$|\{n_{\vec{p}}\}\rangle = \prod_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{p}}!}} \left( \frac{a_{\vec{p}}^\dagger}{\sqrt{V}} \right)^{n_{\vec{p}}} |0\rangle, \quad (3.65)$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \mathbf{N}|\{n_{\vec{p}}\}\rangle &= N\{n_{\vec{p}}\}|\{n_{\vec{p}}\}\rangle, \\ \langle\{n_{\vec{p}}\}|\{n'_{\vec{p}}\}\rangle &= \prod_{\vec{p}} \delta_{n_{\vec{p}}n'_{\vec{p}}} \quad , \quad \sum_{\{n_{\vec{p}}\}} |\{n_{\vec{p}}\}\rangle \langle\{n_{\vec{p}}\}| = 1. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Isto significa que os estados  $\{|\{n_{\vec{p}}\}\rangle\}$  formam uma base para o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  do sistema  $\mathcal{OB}_\infty$ . Podemos verificar que os vetores  $\{|\{n_{\vec{p}}\}\rangle\}$ , também são autoestados do hamiltoniano  $H$ , ou seja,

$$\begin{aligned} H|\{n_{\vec{p}}\}\rangle &= E\{n_{\vec{p}}\}|\{n_{\vec{p}}\}\rangle, \\ &= V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} n_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} |\{n_{\vec{p}}\}\rangle, \end{aligned} \quad (3.67)$$

sendo  $E\{n_{\vec{p}}\}$  a autoenergia do sistema no autoestado  $|\{n_{\vec{p}}\}\rangle$ .

O sistema  $\mathcal{OB}_\infty$  pode ser visto como uma coleção infinita de osciladores harmônicos independentes, um para cada nível  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ . Cada um desses osciladores é descrito por um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{\vec{p}}$  que possui a mesma estrutura do espaço  $\mathcal{H}_\epsilon$ , associado ao oscilador  $\mathcal{OB}_\epsilon$ , ou seja, cada nível  $\vec{p}$  do sistema pode ser ocupado por  $n_{\vec{p}}$  partículas, sendo que  $n_{\vec{p}}$  é o número de

ocupação do nível  $\vec{p}$ . Como os graus de liberdade associados aos diferentes níveis  $\vec{p}$ , são independentes, o espaço de Hilbert associado ao sistema  $\mathcal{OB}_\infty$  pode ser escrito como  $\mathcal{H} = \otimes_{\vec{p}} \mathcal{H}_{\vec{p}}$ , onde os espaços  $\{\mathcal{H}_{\vec{p}}\}$  são ortogonais entre si. [32, 33]

Da mesma forma que fizemos com o sistema  $\mathcal{OB}_\epsilon$ , vamos introduzir os graus de liberdade auxiliares til por meio dos operadores  $\{\tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger, \tilde{a}_{\vec{p}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{H}\}$ , da base  $\{|\{\tilde{n}_{\vec{p}}\}\rangle\}$  e, por fim, do espaço  $\tilde{\mathcal{H}} = \otimes_{\vec{p}} \tilde{\mathcal{H}}_{\vec{p}}$ . Com as regras de conjugação til, podemos imediatamente obter a álgebra dos operadores til  $\tilde{a}_{\vec{p}}$  e  $\tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger$ , que fica

$$[\tilde{a}_{\vec{p}}, \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \quad , \quad [\tilde{a}_{\vec{p}}, \tilde{a}_{\vec{p}}] = [\tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger, \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger] = 0. \quad (3.68)$$

Podemos obter também as demais relações que definem o sistema  $\tilde{\mathcal{OB}}_\infty$  e o seu respectivo espaço de Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}} = \otimes_{\vec{p}} \tilde{\mathcal{H}}_{\vec{p}}$ , que são

$$\begin{aligned} |\{\tilde{n}_{\vec{p}}\}\rangle &= \prod_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}_{\vec{p}}!}} \left( \frac{\tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger}{\sqrt{V}} \right)^{\tilde{n}_{\vec{p}}} |0\rangle, \quad (3.69) \\ \sum_{\{\tilde{n}_{\vec{p}}\}} |\{\tilde{n}_{\vec{p}}\}\rangle \langle \{\tilde{n}_{\vec{p}}\}| &= 1 \quad , \quad \langle \{\tilde{n}_{\vec{p}}\} | \{\tilde{n}'_{\vec{p}}\} \rangle = \prod_{\vec{p}} \delta_{\tilde{n}_{\vec{p}} \tilde{n}'_{\vec{p}}}, \\ \tilde{\mathbf{N}} |\{\tilde{n}_{\vec{p}}\}\rangle &= V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \tilde{n}_{\vec{p}} |\{\tilde{n}_{\vec{p}}\}\rangle \quad , \quad \tilde{H} |\{\tilde{n}_{\vec{p}}\}\rangle = V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \tilde{n}_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} |\{\tilde{n}_{\vec{p}}\}\rangle. \end{aligned}$$

Como os operadores bosônicos til e ordinários são independentes, a álgebra que descreve a relação esses operadores é dada por

$$[a_{\vec{p}}, \tilde{a}_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}, \tilde{a}_{\vec{q}}^\dagger] = [a_{\vec{p}}^\dagger, \tilde{a}_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, \tilde{a}_{\vec{q}}^\dagger] = 0. \quad (3.70)$$

Nesse caso o oscilador duplicado é descrito pelo espaço de Hilbert  $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ , cuja base ortonormalizada  $\{|\{n_{\vec{p}}'\}, \{\tilde{n}_{\vec{p}}\}\rangle\}$  é dada por

$$|\{n_{\vec{p}}'\}, \{\tilde{n}_{\vec{p}}\}\rangle = \prod_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{p}}'!}} \left( \frac{a_{\vec{p}}^\dagger}{\sqrt{V}} \right)^{n_{\vec{p}}'} \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}_{\vec{p}}!}} \left( \frac{\tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger}{\sqrt{V}} \right)^{\tilde{n}_{\vec{p}}} |0\rangle. \quad (3.71)$$

É neste espaço que construiremos o estado térmico associado ao sistema  $\mathcal{OB}_\infty$ .

Agora vamos generalizar o resultado (3.36), referente ao sistema  $\widetilde{\mathcal{OB}}_\epsilon$ , para o caso do sistema  $\widetilde{\mathcal{OB}}_\infty$ . Dadas as semelhanças entre os sistemas  $\widetilde{\mathcal{OB}}_\epsilon$  e  $\widetilde{\mathcal{OB}}_\infty$ , veremos que os cálculos são completamente análogos.

Considere que o sistema  $\mathcal{OB}_\infty$ , está em equilíbrio térmico à temperatura  $T = 1/\beta$  e com um potencial químico  $\mu$ . O estado microscópico do sistema  $\mathcal{OB}_\infty$  é dado por  $J = \{n_{\vec{p}}\}$ . Segundo (3.64) e (3.67), o número de partículas e a energia de  $\mathcal{OB}_\infty$  num microestado  $\{n_{\vec{p}}\}$ , são dados por

$$\begin{aligned} N\{n_{\vec{p}}\} &= V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} n_{\vec{p}}, & E\{n_{\vec{p}}\} &= V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} n_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}}, \\ &= \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}} & &= \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}}, \end{aligned}$$

e segundo (2.31), o estado térmico do sistema  $\mathcal{OB}_\infty$  neste estado de equilíbrio é dado por

$$|0, \beta\mu\rangle = \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\vec{p}}\}^{N\{n_{\vec{p}}\}=N}} e^{-\beta(E\{n_{\vec{p}}\} - \mu N\{n_{\vec{p}}\})/2} |\{n_{\vec{p}}\}, \{\tilde{n}_{\vec{p}}\}\rangle. \quad (3.72)$$

onde a função de partição é calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\Xi_{\beta\mu} &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\vec{p}}\}}^{N\{n_{\vec{p}}\}=N} e^{-\beta(E\{n_{\vec{p}}\}-\mu N\{n_{\vec{p}}\})}, \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\vec{p}}\}}^{N\{n_{\vec{p}}\}=N} e^{-\beta \sum_{\vec{p}} (\epsilon_{\vec{p}} - \mu) n_{\vec{p}}} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\vec{p}}\}}^{N\{n_{\vec{p}}\}=N} \prod_{\vec{p}} e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu) n_{\vec{p}}}, \\
&= \prod_{\vec{p}} \sum_{n_{\vec{p}}=0}^{\infty} e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu) n_{\vec{p}}} = \prod_{\vec{p}} \frac{1}{1 - e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)}}. \tag{3.73}
\end{aligned}$$

Considerando que a base do espaço  $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$  é dada por (3.71) e , realizando manipulações semelhantes àquelas utilizadas no cálculo da função de partição  $\Xi_{\beta\mu}$ , temos que (3.72) fica

$$\begin{aligned}
|0, \beta\mu\rangle &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\vec{p}}\}}^{N\{n_{\vec{p}}\}=N} \prod_{\vec{p}} e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu) n_{\vec{p}}/2} \prod_{\vec{p}} \frac{1}{n_{\vec{p}}!} \left( \frac{a_{\vec{p}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{p}}^{\dagger}}{V} \right)^{n_{\vec{p}}} |0\rangle\rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\vec{p}}\}}^{N\{n_{\vec{p}}\}=N} \prod_{\vec{p}} \frac{1}{n_{\vec{p}}!} \left( \frac{e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)/2} a_{\vec{p}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{p}}^{\dagger}}{V} \right)^{n_{\vec{p}}} |0\rangle\rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \prod_{\vec{p}} \sum_{n_{\vec{p}}=0}^{\infty} \frac{1}{n_{\vec{p}}!} \left( \frac{e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)/2} a_{\vec{p}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{p}}^{\dagger}}{V} \right)^{n_{\vec{p}}} |0\rangle\rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \prod_{\vec{p}} \exp \left( \frac{1}{V} e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)/2} a_{\vec{p}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \right) |0\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Considerando o resultado (3.73), temos

$$|0, \beta\mu\rangle = \prod_{\vec{p}} (1 - e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)})^{1/2} e^{\left( \frac{1}{V} e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)/2} a_{\vec{p}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \right)} |0\rangle\rangle. \tag{3.74}$$

### 3.4 A transformação de Bogoliubov para o sistema $\mathcal{OB}_\infty$ .

Analogamente à notação dada nas Eqs.(3.23)-(3.25), introduzimos

$$u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \equiv \cosh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} = \frac{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}}-\mu)/2}}{(e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}}-\mu)} - 1)^{-1/2}}, \quad (3.75)$$

$$v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \equiv \sinh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} = \frac{1}{(e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}}-\mu)} - 1)^{-1/2}}, \quad (3.76)$$

$$\tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} = e^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}}-\mu)/2}, \quad (3.77)$$

em termos desta notação, (3.74) fica

$$|0, \beta\mu\rangle = \prod_{\vec{p}} \cosh^{-1} \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger} |0\rangle. \quad (3.78)$$

Vemos que o estado térmico  $|0, \beta\mu\rangle$  é um funcional do parâmetro  $\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}$ , portanto iremos denotá-lo por  $|0; \theta_{\beta\mu}\rangle$ . Analogamente às eqs.(3.28)-(3.30), temos

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}} |0\rangle\rangle &= 0, \quad a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} |0\rangle\rangle = 0, \quad -a_{\vec{p}} \tilde{a}_{\vec{p}} |0\rangle\rangle = 0 \\ \Rightarrow \prod_{\vec{p}} e^{-\frac{1}{V} \ln \cosh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (\tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}})} e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (-a_{\vec{p}} \tilde{a}_{\vec{p}})} |0\rangle\rangle &= |0\rangle\rangle, \end{aligned}$$

de maneira que (3.78) fica

$$\begin{aligned} |0; \theta_{\beta\mu}\rangle &= \prod_{\vec{p}} \cosh^{-1} \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger} e^{-\frac{1}{V} \ln \cosh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (\tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}})} \\ &\times e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (-a_{\vec{p}} \tilde{a}_{\vec{p}})} |0\rangle\rangle. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Lembrando que, para um sistema de dimensões finitas, temos

$$\begin{aligned} [\tilde{a}_{\vec{p}}, \tilde{a}_{\vec{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}), \\ &= \delta_{\vec{p}\vec{q}} V, \end{aligned}$$

de tal maneira que, para  $\vec{p} = \vec{q}$ , temos

$$\frac{[\tilde{a}_{\vec{p}}, \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger]}{V} = 1. \quad (3.80)$$

Utilizando este resultado, podemos fazer como em (3.32), ou seja,

$$\begin{aligned} \prod_{\vec{p}} \cosh^{-1} \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} &= \prod_{\vec{p}} e^{-\ln \cosh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}}, \\ &= \prod_{\vec{p}} e^{-\frac{1}{V} \ln \cosh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} [\tilde{a}_{\vec{p}}, \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger]}, \end{aligned}$$

que, substituído em (3.79), resulta em

$$\begin{aligned} |0; \theta_{\beta\mu}\rangle &= \prod_{\vec{p}} e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger)} e^{-\frac{1}{V} \ln \cosh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (\tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}} + [\tilde{a}_{\vec{p}}, \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger] + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}})} \\ &\times e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (-a_{\vec{p}} \tilde{a}_{\vec{p}})} |0\rangle, \\ &= \prod_{\vec{p}} e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger)} e^{-\frac{1}{V} \ln \cosh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (\tilde{a}_{\vec{p}} \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}})} \\ &\times e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (-a_{\vec{p}} \tilde{a}_{\vec{p}})} |0\rangle, \\ &= \prod_{\vec{p}} e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger)} e^{-\frac{1}{V} \ln \cosh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} [a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger, -a_{\vec{p}} \tilde{a}_{\vec{p}}]} \\ &\times e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (-a_{\vec{p}} \tilde{a}_{\vec{p}})} |0\rangle, \\ &= \prod_{\vec{p}} e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger)} e^{-\frac{1}{V} \ln \cosh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} [a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger, -a_{\vec{p}} \tilde{a}_{\vec{p}}]} \\ &\times e^{\frac{1}{V} \tanh \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (-a_{\vec{p}} \tilde{a}_{\vec{p}})} |0\rangle, \end{aligned}$$

Utilizando a identidade (3.34) para cada nível  $\vec{p}$ , teremos

$$\begin{aligned}
|0; \beta\mu\rangle &= \prod_{\vec{p}} e^{\frac{1}{V}\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}(a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger - \tilde{a}_{\vec{p}} a_{\vec{p}})} |0\rangle, \\
&= e^{\frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger - \tilde{a}_{\vec{p}} a_{\vec{p}})} |0\rangle, \\
&= e^{\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger - \tilde{a}_{\vec{p}} a_{\vec{p}})} |0\rangle.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Definindo o operador  $\mathcal{G}_B(\theta_{\beta\mu})$  por

$$\mathcal{G}_B[\theta_{\beta\mu}] = -i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}} (\tilde{a}_{\vec{p}} a_{\vec{p}} - \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger), \tag{3.82}$$

temos que o estado térmico  $|0; \beta\mu\rangle$  associado ao sistema  $\mathcal{OB}_\infty$  no estado de equilíbrio a uma temperatura  $T$  e potencial químico  $\mu$ , pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
|0; \beta\mu\rangle &= \mathcal{U}_B[\theta_{\beta\mu}] |0\rangle, \\
&= e^{-i\mathcal{G}_B[\theta_{\beta\mu}]} |0\rangle,
\end{aligned}$$

onde  $\mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}]$  é um operador unitário que transforma o vácuo do sistema  $\mathcal{OB}_\infty \otimes \widetilde{\mathcal{OB}}_\infty$  no estado térmico  $|0; \beta\mu\rangle$ . Dizemos que  $\mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}]$  thermaliza o vácuo do sistema duplicado  $|0\rangle$ .

É importante notar que, no limite  $V \rightarrow \infty$  (infinitos modos), o vácuo térmico  $|0; \beta\mu\rangle$  deixa de ser unitariamente equivalente a  $|0\rangle$ <sup>6</sup>. Esta é a principal característica da transformação de Bogoliubov, junto com o fato de que a canonicidade algébrica é preservada [1].

---

<sup>6</sup>Isso implica que os vácuos térmicos a diferentes temperaturas não são unitariamente equivalentes nesse limite.

### 3.4.1 A termalização dos operadores do sistema $\mathcal{OB}_\infty \cup \widetilde{\mathcal{OB}}_\infty$ .

A termalização dos operadores  $\{a_{\vec{p}}, \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger, \tilde{a}_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger\}$  é definida por

$$a_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) = \mathcal{U}_B[\theta_{\beta\mu}]a_{\vec{p}}\mathcal{U}_B[\theta_{\beta\mu}]^\dagger, \quad (3.83)$$

$$\tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) = \mathcal{U}_B[\theta_{\beta\mu}]\tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger\mathcal{U}_B[\theta_{\beta\mu}]^\dagger, \quad (3.84)$$

$$\tilde{a}_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) = \mathcal{U}_B[\theta_{\beta\mu}]\tilde{a}_{\vec{p}}\mathcal{U}_B[\theta_{\beta\mu}]^\dagger, \quad (3.85)$$

$$a_{\vec{p}}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) = \mathcal{U}_B[\theta_{\beta\mu}]a_{\vec{p}}^\dagger\mathcal{U}_B[\theta_{\beta\mu}]^\dagger, \quad (3.86)$$

de maneira que, como em (3.41) e (3.42), temos

$$a_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})|0; \theta_{\beta\mu}\rangle = 0 \quad , \quad \tilde{a}_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})|0; \theta_{\beta\mu}\rangle = 0,$$

ou seja, o estado térmico  $|0; \theta_{\beta\mu}\rangle$  é um estado de vácuo em relação aos operadores termalizados (3.83)-(3.86), por isso é chamado de vácuo térmico.

O cálculo das transformações (3.83)-(3.86) se dá como em (3.37), ou seja, calculamos (3.83) e obtemos as demais por conjugação til e hermitiana. Para (3.83) teremos

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) &= e^{-i\mathcal{G}_B[\theta_{\beta\mu}]}a_{\vec{p}}e^{i\mathcal{G}_B[\theta_{\beta\mu}]} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a_{\vec{p}}, i\mathcal{G}_B[\theta_{\beta\mu}]]^{(n)}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a_{\vec{p}}, i\mathcal{G}_B[\theta_{\beta\mu}]]^{(2n)}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a_{\vec{p}}, i\mathcal{G}_B[\theta_{\beta\mu}]]^{(2n+1)}}{(2n+1)!}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

onde

$$[a_{\vec{p}}, i\mathcal{G}_B[\theta_{\beta\mu}]]^{(2n)} = (\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})^{2n} a_{\vec{p}}, \quad [a_{\vec{p}}, i\mathcal{G}_B[\theta_{\beta\mu}]]^{(2n+1)} = -(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})^{2n+1} \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger,$$

de maneira que a Eq.(3.87) fica

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})^{2n}}{(2n)!} a_{\vec{p}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})^{2n+1}}{(2n+1)!} \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger, \\ &= \cosh(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) a_{\vec{p}} - \sinh(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger. \\ &= u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) a_{\vec{p}} - v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger. \end{aligned}$$

Com as regras de conjugação til e a conjugação hermitiana, podemos obter de imediato a termalização dos demais operadores, resultando em

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) &= u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) a_{\vec{p}} - v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger, & a_{\vec{p}}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) &= -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \tilde{a}_{\vec{p}} + u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) a_{\vec{p}}^\dagger \\ \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) &= -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) a_{\vec{p}} + u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger, & \tilde{a}_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) &= u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \tilde{a}_{\vec{p}} - v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) a_{\vec{p}}^\dagger. \end{aligned} \tag{3.88}$$

### 3.4.2 Notação matricial para o sistema $\mathcal{OB}_\infty \cup \widetilde{\mathcal{OB}}_\infty$ .

Podemos reescrever as transformações (3.88) por meio de uma notação matricial, que será dada por

$$\begin{pmatrix} a_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \\ \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) & -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \\ -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) & u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{p}} \\ \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger \end{pmatrix}, \tag{3.89}$$

$$\begin{pmatrix} a_{\vec{p}}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \\ \tilde{a}_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) & -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \\ -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) & u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{p}}^\dagger \\ \tilde{a}_{\vec{p}} \end{pmatrix}, \tag{3.90}$$

de maneira que as componentes são dadas por

$$\begin{aligned}
a_{\vec{p}1} &= a_{\vec{p}}, & a_{\vec{p}1}^\dagger &= a_{\vec{p}}^\dagger, \\
a_{\vec{p}2} &= \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger, & a_{\vec{p}2}^\dagger &= \tilde{a}_{\vec{p}}, \\
U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{11} &= u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}), & U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{12} &= -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}), \\
U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{21} &= -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}), & U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{22} &= u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}),
\end{aligned}$$

Em termos dessa notação podemos reescrever as transformações (3.89-3.90) da seguinte maneira

$$a(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{\vec{p}A} = U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{AB} a_{\vec{p}B}, \quad (3.91)$$

$$a^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{\vec{p}A} = U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{AB} a_{\vec{p}B}^\dagger. \quad (3.92)$$

Considerando a relação (3.26) e a definição da matriz de Bogoliubov bosônica  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})$ , que é dada por

$$U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) & -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \\ -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) & u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) \end{pmatrix}, \quad (3.93)$$

podemos verificar para a matriz  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})$  as mesmas propriedades que  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu})$  dadas em (3.55)-(3.57). Em termos desta notação, podemos também escrever a álgebra dos operadores  $a_{\vec{p}A}, a_{\vec{p}A}^\dagger$ , dada em (3.61), (3.68) e (3.70), da seguinte maneira

$$[a_{\vec{p}A}, a_{\vec{q}B}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \tau_{AB}, \quad \text{demais comutadores nulos,} \quad (3.94)$$

e ainda, podemos verificar a invariância da álgebra (3.94) sob a ação da transformação de Bogoliubov

$$\begin{aligned}
[a_{\vec{p}}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_A, a_{\vec{q}}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}})_B] &= [U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{AC}a_{\vec{p}C}, U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}})_{BD}a_{\vec{q}D}^\dagger], \\
&= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}})_{AC}U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}})_{BD}[a_{\vec{p}C}, a_{\vec{q}D}^\dagger], \\
&= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}})_{AC}[a_{\vec{p}C}, a_{\vec{q}D}^\dagger]U^{-1T}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}})_{BD}, \\
&= (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{AC}\tau_{CD}U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}})_{DB} \\
&= (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{AC}\tau_{CD}U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{BD}, \\
&= (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})\tau_{AB}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que a transformação de Bogoliubov é canônica. Neste cálculo utilizamos o fato de que a matriz  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}})$  é simétrica, como em (3.55); na penúltima linha, fizemos  $\vec{q} = \vec{p}$ , devido à presença da delta de Dirac e, por último, usamos (3.94).

### Exemplo

Seja  $\mathbf{n}_{\vec{p}} = \frac{1}{V}a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}$  o operador número de ocupação do nível  $\vec{p}$ , associado ao sistema  $\mathcal{OB}_\infty$  no equilíbrio térmico à temperatura  $1/\beta$  e potencial químico  $\mu$ . Vejamos como o cálculo do número de ocupação médio  $\langle \mathbf{n}_{\vec{p}} \rangle_{\beta\mu}$ , se dá

algebricamente

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{n}_{\vec{p}} \rangle_{\beta\mu} &= \frac{1}{V} \langle 0; \theta_{\beta\mu} | a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} | 0; \theta_{\beta\mu} \rangle = \frac{1}{V} \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}]^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}] | 0, \tilde{0} \rangle \\
&= \frac{1}{V} \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{U}[-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}] a_{\vec{p}}^\dagger \mathcal{U}[-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}]^\dagger \mathcal{U}[-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}] a_{\vec{p}} \mathcal{U}[-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}]^\dagger | 0, \tilde{0} \rangle \\
&= \frac{1}{V} \langle 0, \tilde{0} | U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{1A} a_{\vec{p}A}^\dagger U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{1B} a_{\vec{p}B} | 0, \tilde{0} \rangle \\
&= \frac{1}{V} U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{1A} U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{1B} (\langle 0, \tilde{0} | a_{\vec{p}A}^\dagger a_{\vec{p}B} | 0, \tilde{0} \rangle) \\
&= \frac{1}{V} U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{1A} U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{1B} (\delta_{A2} \delta_{B2} V) \\
&= (U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{12})^2 = v^2(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1}, \\
&= n_B(\epsilon_{\vec{p}}), \tag{3.95}
\end{aligned}$$

onde  $n_B(\epsilon_{\vec{p}})$  é a função de distribuição de Bose-Einstein. Para obter (3.95), utilizamos as seguintes relações

$$\langle 0; \tilde{0} | a_{\vec{p}}^\dagger = 0, \quad a_{\vec{p}} | 0; \tilde{0} \rangle = 0, \quad v(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}}) = -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})$$

mais a relação (3.80) e a definição (3.76).

### 3.5 Campo escalar real na DCT.

O operador hamiltoniano do campo escalar real  $\phi(\vec{x})$  é dado por

$$H[\phi, \pi] = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\pi^2(\vec{x}) + (\nabla\phi(\vec{x}))^2 + m^2\phi^2(\vec{x})), \tag{3.96}$$

onde os campos  $\phi(\vec{x})$  e  $\pi(\vec{x})$  satisfazem a seguinte álgebra

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.97)$$

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0, \quad (3.98)$$

sendo  $\pi(\vec{x})$  o momento conjugado de  $\phi(\vec{x})$ . A dependência temporal dos campos  $\phi(\vec{x})$  e  $\pi(\vec{x})$  é dada pela representação de Heisenberg

$$\phi(x) = \phi(\vec{x}, x^0) = e^{i\hat{H}[\phi, \pi]x^0} \phi(\vec{x}) e^{-i\hat{H}[\phi, \pi]x^0}, \quad (3.99)$$

$$\pi(x) = \pi(\vec{x}; x^0) = e^{i\hat{H}[\phi, \pi]x^0} \pi(\vec{x}) e^{-i\hat{H}[\phi, \pi]x^0}, \quad (3.100)$$

que equivale às equações de movimento de Heisenberg, dadas por

$$\begin{aligned} i\partial_0\phi(x) &= [\phi(x), H[\phi, \pi]], & i\partial_0\pi(x) &= [\pi(x), H[\phi, \pi]], \\ &= i\pi(x), & &= -i(-\vec{\partial}^2 + m^2)\phi(x). \end{aligned}$$

A equação à direita é a definição de momento conjugado. Considerando ambas as equações, obtemos

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0, \quad (3.101)$$

onde  $\partial^2 = \partial_0^2 - \vec{\partial} \cdot \vec{\partial}$ . A solução da equação (3.101) é dada por

$$\phi(x) = \int d\omega_{\vec{p}} (e^{-ipx} a_{\vec{p}} + e^{-ipx} a_{\vec{p}}^\dagger), \quad (3.102)$$

onde  $px = p_0x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$ , sendo  $p_0 = \epsilon_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  e denotamos

$$d\omega_{\vec{p}} = \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\epsilon_{\vec{p}}}}.$$

Considerando a definição do momento conjugado  $\pi(x)$ , temos

$$\pi(\vec{x}) = -i \int d\omega_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} (e^{-ipx} a_{\vec{p}} - e^{ipx} a_{\vec{p}}^\dagger). \quad (3.103)$$

Os operadores  $a_{\vec{p}}$  e  $a_{\vec{p}}^\dagger$  têm de satisfazer a álgebra

$$\begin{aligned} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}), \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] &= [a_{\vec{q}}^\dagger, a_{\vec{p}}^\dagger] = 0. \end{aligned}$$

em acordo com a álgebra dos operadores  $\phi$  e  $\pi$  dada nas eqs.(3.97) e (3.98).

Substituindo as soluções (3.102) e (3.103) no hamiltoniano (3.96), teremos

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \epsilon_{\vec{p}} a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + \text{const.} \quad (3.104)$$

A menos da constante na equação acima, vemos que o campo escalar livre equivale ao sistema  $\mathcal{OB}_\infty$ , estudado nas seções anteriores.

No intuito de construir o formalismo da DCT, vamos duplicar os graus de liberdade do campo escalar real. Com a utilização das regras de conjugação til, podemos obter os campos associados aos graus de liberdade til imediatamente a partir de (3.102) e (3.103), o que resulta em

$$\phi(x)_A = \int d\omega_{\vec{p}} (e^{-ipx} a_{\vec{p}A} + e^{ipx} a_{\vec{p}A}^\dagger), \quad (3.105)$$

$$\pi(x)_A = -i \int d\omega_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} (e^{-ipx} a_{\vec{p}A} - e^{ipx} a_{\vec{p}A}^\dagger), \quad (3.106)$$

onde as componentes são definidas por

$$\begin{aligned} \phi(x)_A &= (\phi(x), \tilde{\phi}^\dagger(x)), & \pi(x)_A &= (\pi(x), \tilde{\pi}^\dagger(x)), \\ &= (\phi(x), \tilde{\phi}(x)), & &= (\pi(x), \tilde{\pi}(x)). \end{aligned}$$

O campos  $\phi$  e  $\pi$ , dados nas eqs.(3.105) e (3.106), podem ser equivalentemente obtidos por meio de

$$\phi(x)_A = e^{i\hat{H}[\phi,\pi]x^0} \phi(0, \vec{x})_A e^{-i\hat{H}[\phi,\pi]x^0}, \quad (3.107)$$

$$\pi(x)_A = e^{i\hat{H}[\phi,\pi]x^0} \pi(0, \vec{x})_A e^{-i\hat{H}[\phi,\pi]x^0}, \quad (3.108)$$

onde o gerador das translações temporais do sistema de campos duplicado é dado por

$$\begin{aligned} \hat{H}[\phi, \tilde{\phi}, \pi, \tilde{\pi}] &= H[\phi, \pi] - H[\tilde{\phi}, \tilde{\pi}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\pi^2(\vec{x}) + (\nabla\phi(\vec{x}))^2 + m^2\phi^2(\vec{x}) \\ &\quad - \tilde{\pi}^2(\vec{x}) - (\nabla\tilde{\phi}(\vec{x}))^2 - m^2\tilde{\phi}^2(\vec{x})), \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \sum_A \tau_{AA} (\pi^2(\vec{x})_A + (\nabla\phi(\vec{x})_A)^2 + m^2\phi^2(\vec{x})_A), \end{aligned} \quad (3.109)$$

Lembrando que os graus de liberdade auxiliares til, são apenas um recurso do formalismo da DCT, como já discutimos nas seções anteriores, de forma que

a energia do campo escalar é associada ao hamiltoniano  $H$  e não o operador  $\hat{H}$ . A álgebra dos operadores  $\phi(\vec{x})_A$  e  $\pi(\vec{x})_A$  é dada por

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x})_A, \pi(\vec{y})_B] &= i\tau_{AB}\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi(\vec{x})_A, \phi(\vec{y})_B] &= [\pi(\vec{x})_A, \pi(\vec{y})_B] = 0. \end{aligned}$$

### 3.6 Propagador térmico do campo escalar real na DCT.

Antes de iniciarmos os cálculos, é conveniente separarmos as contribuições dos campos associadas aos operadores de criação e destruição, da seguinte maneira

$$\phi(x)_A = \phi^+(x)_A + \phi^-(x)_A,$$

onde as componentes são dadas por

$$\begin{aligned} \phi^+(x)_1 &= \int d\omega_{\vec{p}} e^{-i\omega x} a(\vec{p}), & \phi^+(x)_2 &= \int d\omega_{\vec{p}} e^{i\omega x} \tilde{a}(\vec{p}), \\ \phi^-(x)_1 &= \int d\omega_{\vec{p}} e^{i\omega x} a^\dagger(\vec{p}), & \phi^-(x)_2 &= \int d\omega_{\vec{p}} e^{-i\omega x} \tilde{a}^\dagger(\vec{p}), \end{aligned} \tag{3.110}$$

as quais satisfazem

$$\begin{aligned}
\phi^+(x)_1|0\rangle\rangle = 0 \leftarrow a(\vec{p})|0\rangle\rangle = 0 \quad , \quad \phi^+(x)_2|0\rangle\rangle = 0 \leftarrow \tilde{a}(\vec{p})|0\rangle\rangle = 0, \\
\langle\langle 0|\phi^-(x)_1 = 0 \leftarrow \langle\langle 0|a^\dagger(\vec{p}) = 0 \quad , \quad \langle\langle 0|\phi^-(x)_2 = 0 \leftarrow \langle\langle 0|\tilde{a}^\dagger(\vec{p}) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.111}$$

O propagador do campo escalar  $\phi(x)_A$  é definido por [34]

$$\Delta(x-y)_{AB} = \langle\langle 0|T\{\phi(x)_A\phi(y)_B\}|0\rangle\rangle.$$

Considerando as propriedades (3.111), temos

$$\begin{aligned}
\Delta(x-y)_{AB} &= \langle\langle 0|T[(\phi^+(x)_A + \phi^-(x)_A)(\phi^+(y)_B + \phi^-(y)_B)]|0\rangle\rangle, \\
&= \langle\langle 0|T\{\phi^+(x)_A\phi^-(y)_B\}|0\rangle\rangle \\
&+ \langle\langle 0|T\{\phi^-(x)_A\phi^+(y)_B\}|0\rangle\rangle, \\
&= \bar{\theta}(x^0 - y^0)\langle\langle 0|\phi^+(x)_A\phi^-(y)_B|0\rangle\rangle \\
&+ \bar{\theta}(y^0 - x^0)\langle\langle 0|\phi^+(y)_B\phi^-(x)_A|0\rangle\rangle,
\end{aligned}
\tag{3.112}$$

onde  $\bar{\theta}(t)$  é a função degrau definida por

$$\bar{\theta}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 1/2 & \text{para } t = 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}
\tag{3.113}$$

Considerando as componentes (3.110) juntamente com a álgebra dos operadores  $\{a(\vec{p})_A, a^\dagger(\vec{p})_A\}$ , verificamos que<sup>7</sup>

$$\langle\langle 0|\phi^+(x)_A\phi^-(y)_B|0\rangle\rangle = \delta_{\mathbf{AB}} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\tau_{\mathbf{AB}}ip(x-y)}}{2\epsilon_{\vec{p}}}, \quad (3.114)$$

$$\langle\langle 0|\phi^+(y)_B\phi^-(x)_A|0\rangle\rangle = \delta_{\mathbf{AB}} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{\tau_{\mathbf{AB}}ip(x-y)}}{2\epsilon_{\vec{p}}}.$$

Substituindo as representações de Fourier para as funções degraus

$$\bar{\theta}(x^0 - y^0) = i \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{e^{-i(p_0 + \sigma_1 \epsilon_{\vec{p}})(x^0 - y^0)}}{p_0 + \sigma_1 \epsilon_{\vec{p}} + i\delta}, \quad (3.115)$$

$$\bar{\theta}(y^0 - x^0) = -i \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{e^{-i(p_0 + \sigma_2 \epsilon_{\vec{p}})(x^0 - y^0)}}{p_0 + \sigma_2 \epsilon_{\vec{p}} - i\delta}, \quad (3.116)$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \pm,$$

com  $\sigma_1 = -\tau_{\mathbf{AA}}$  e  $\sigma_2 = \tau_{\mathbf{AA}}$ , em (3.114) e (3.112), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(x^0 - y^0) \langle\langle 0|\phi^+(x)_A\phi^-(y)_B|0\rangle\rangle &= \delta_{\mathbf{AB}} \int \frac{d^4\vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{i}{2\epsilon_{\vec{p}}} \frac{e^{\tau_{\mathbf{AB}}ip(x-y)}}{p_0 - \tau_{\mathbf{AB}}\epsilon_{\vec{p}} + i\delta}, \\ \bar{\theta}(y^0 - x^0) \langle\langle 0|\phi^+(y)_B\phi^-(x)_A|0\rangle\rangle &= \delta_{\mathbf{AB}} \int \frac{d^4\vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{2\epsilon_{\vec{p}}} \frac{e^{\tau_{\mathbf{AB}}ip(x-y)}}{p_0 + \tau_{\mathbf{AB}}\epsilon_{\vec{p}} - i\delta}. \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados em (3.112), obtemos<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \Delta(x-y)_{AB} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\tau_{\mathbf{AB}}}{p^2 - m^2 + i\tau_{\mathbf{AB}}\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad (3.117) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta(p)_{AB} e^{-ip(x-y)}, \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Denotaremos em negrito os índices repetidos que não estão somando segundo a convenção de Einstein.

<sup>8</sup>A quantidade infinitesimal  $\epsilon$ , no denominador de (3.117) é definida por  $\epsilon = 2\epsilon_{\vec{p}}\delta$ .

onde  $\Delta(p)_{AB}$  é dado por

$$\Delta(p)_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}.$$

### 3.6.1 Termalização do campo escalar real e os operadores térmicos bosônicos.

Nas seções anteriores vimos que a transformação de Bogoliubov sobre os operadores  $\{a_{\vec{p}A}, a_{\vec{p}A}^\dagger\}$  é linear. Considerando que, na representação de interação, os campos  $\phi(x)_A$  são escritos em termos de  $\{a_{\vec{p}A}, a_{\vec{p}A}^\dagger\}$ , segundo (3.105) e (3.106), temos que a atuação da transformação de Bogoliubov sobre os operadores de campo  $\phi(x)_A$  pode ser definida de maneira direta, sendo também linear, o que pode ser traduzido em termos de certos operadores térmicos que vamos definir adiante. Isso significa que estaremos termalizando os operadores de campo  $\phi(x)_A$ .

Quando construímos o formalismo da DCT para o sistema  $\mathcal{OB}_\infty$ , o consideramos no estado de equilíbrio caracterizado pela temperatura  $T$  e pelo potencial químico  $\mu$ . Este estado de equilíbrio, associado ao ensemble grande canônico, é particularmente conveniente pois o número de partículas não é fixado. No caso de sistemas de campos quânticos, consideramos estados de equilíbrio caracterizados pela temperatura e por vários potenciais químicos  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , dependendo de quantas cargas conservadas  $Q_1, Q_2, \dots$  admitem

os campos que constituem o sistema. No caso, em particular, do campo escalar real não há cargas conservadas, o que significa que podemos trabalhar no ensemble grande canônico, desde que façamos  $\mu = 0$ . O estado térmico que descreve o campo escalar real no estado de equilíbrio é, portanto, dado por

$$|0; \theta_\beta\rangle \equiv |0; \theta_{\beta\mu}\rangle|_{\mu=0} = \mathcal{U}(\theta_\beta)|0\rangle = e^{-i\mathcal{G}_B[\theta_\beta]}|0\rangle,$$

onde o gerador da transformação de Bogoliubov  $\mathcal{G}_B[\theta_\beta]$  é dado por

$$\mathcal{G}_B[\theta_\beta] = -i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \theta_\beta^{\vec{p}} (\tilde{a}_{\vec{p}} a_{\vec{p}} - \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger), \quad (3.118)$$

sendo que  $\theta_\beta^{\vec{p}}$  é definido por

$$u(\theta_\beta^{\vec{p}}) \equiv \cosh \theta_\beta^{\vec{p}} = \frac{1}{(1 - e^{-\beta\epsilon_{\vec{p}}})^{-1/2}}, \quad (3.119)$$

$$v(\theta_\beta^{\vec{p}}) \equiv \sinh \theta_\beta^{\vec{p}} = \frac{e^{-\beta\epsilon_{\vec{p}}/2}}{(1 - e^{-\beta\epsilon_{\vec{p}}})^{-1/2}}, \quad (3.120)$$

$$\tanh \theta_\beta^{\vec{p}} = e^{-\beta\epsilon_{\vec{p}}/2}. \quad (3.121)$$

Seja o campo escalar real termalizado  $\phi(x; \theta_\beta)_A$  definido por

$$\phi(x; \theta_\beta)_A = \mathcal{U}_B(\theta_\beta)\phi(x)_A\mathcal{U}_B^\dagger(\theta_\beta), \quad (3.122)$$

então, segundo as definições (3.83)-(3.86), teremos

$$\begin{aligned}
\phi(x; \theta_\beta)_A &= \int d\omega_{\vec{p}} (e^{-ipx} \mathcal{U}_B(\theta_\beta) a_{\vec{p}A} \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_\beta) + e^{ipx} \mathcal{U}_B(\theta_\beta) a_{\vec{p}A}^\dagger \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_\beta)), \\
&= \int d\omega_{\vec{p}} (e^{-ipx} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{p}})_{AB} a_{\vec{p}B} + e^{ipx} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{p}})_{AB} a_{\vec{p}B}^\dagger), \\
&= \int d\omega_{\vec{p}} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{p}})_{AB} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (e^{-iE_{\vec{p}}x^0} a_{\vec{p}B} + e^{iE_{\vec{p}}x^0} a_{-\vec{p}B}^\dagger), \\
&= \int d\omega_{\vec{p}} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{q}})_{AB} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \\
&\times (e^{-iE_{\vec{p}}x^0} a_{\vec{p}B} + e^{iE_{\vec{p}}x^0} a_{-\vec{p}B}^\dagger), \\
&= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{q}})_{AB} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int d\omega_{\vec{p}} \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{r}\cdot(\vec{q}-\vec{p})} \\
&\times (e^{-iE_{\vec{p}}x^0} a_{\vec{p}B} + e^{iE_{\vec{p}}x^0} a_{-\vec{p}B}^\dagger), \\
&= \int d^3\vec{r} \left( \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{q}})_{AB} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{r})} \right) \int d\omega_{\vec{p}} e^{i\vec{r}\cdot\vec{p}} \\
&\times (e^{-iE_{\vec{p}}x^0} a_{\vec{p}B} + e^{iE_{\vec{p}}x^0} a_{-\vec{p}B}^\dagger). \tag{3.123}
\end{aligned}$$

Definindo o núcleo

$$U_{\vec{x}-\vec{r}}^{-1}(\theta_\beta)_{AB} = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{q}})_{AB} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{r})}, \tag{3.124}$$

e o substituindo em (3.123), temos

$$\phi(x^0, \vec{x}; \theta_\beta)_A = \int d^3\vec{r} U_{\vec{x}-\vec{r}}^{-1}(\theta_\beta)_{AB} \phi(x^0, \vec{r})_B. \tag{3.125}$$

Vamos definir, portanto, os operadores de campo termalizados pela ação da transformação de Bogoliubov sobre os operadores de campo da teoria duplicada a  $T = 0$ , conforme (3.125). Com essa finalidade, vamos introduzir

o operador  $U^{-1}(\theta_\beta)_{AB}$ , chamado operador térmico de Bogoliubov, cuja ação é definida por

$$U^{-1}(\theta_\beta)_{AB} \cdot f(x_0, \vec{x})_B \equiv \int d^3\vec{r} U_{\vec{x}-\vec{r}}^{-1}(\theta_\beta)_{AB} f(x^0, \vec{r})_B \quad (3.126)$$

onde  $U_{\vec{x}-\vec{r}}^{-1}(\theta_\beta)_{AB}$  é dado por (3.124) e  $f(x_0, \vec{x})_A = (f(x_0, \vec{x})_1, f(x_0, \vec{x})_2)$  é uma função complexa que pode ser escrita como

$$f(x_0, \vec{x})_B = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{f}(p)_B e^{-ip_0x^0 + i\vec{p}\cdot\vec{x}}. \quad (3.127)$$

Neste caso, considerando (3.126)-(3.127) temos

$$\begin{aligned} & U^{-1}(\theta_\beta)_{AB} \cdot f(x_0, \vec{x})_B \\ &= \int d^3\vec{r} U_{\vec{x}-\vec{r}}^{-1}(\theta_\beta)_{AB} f(x^0, \vec{r})_B, \\ &= \int d^3\vec{r} \left( \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{q}})_{AB} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{r})} \right) \left( \int \frac{d^4\vec{p}}{(2\pi)^4} \bar{f}(p)_B e^{-ip_0x^0 + i\vec{p}\cdot\vec{r}} \right), \\ &= \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{q}})_{AB} e^{-ip_0x^0 + i\vec{q}\cdot\vec{x}} \bar{f}(p)_B \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{r}\cdot(\vec{q}-\vec{p})}, \\ &= \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{q}})_{AB} \bar{f}(p)_B e^{-ip_0x^0 + i\vec{q}\cdot\vec{x}} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{q}), \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{p}})_{AB} \bar{f}(p)_B e^{-ipx}, \end{aligned} \quad (3.128)$$

ou seja, o efeito do o operador térmico consiste em realizar a transformação de Bogoliubov

$$\bar{f}(p)_A \rightarrow U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{q}})_{AB} \bar{f}(p)_B,$$

nas componentes de Fourier  $\bar{f}(p)_A$  de  $f(x)_A$ .

Conforme vimos em (3.125), em termos do operador térmico, o operador de campo termalizado  $\phi(x; \theta_\beta)_A$  é, portanto, dado por

$$\begin{aligned}
\phi(x^0, \vec{x}; \theta_\beta)_A &= \mathcal{U}_B(\theta_\beta) \phi(x)_A \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_\beta), \\
&= \mathbf{U}^{-1}(\theta_\beta)_{AB} \cdot \phi(x^0, \vec{x})_B \\
&= \int d\omega_{\vec{p}} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{p}})_{AB} (e^{-iE_{\vec{p}}x^0} a_{-\vec{p}B} + e^{iE_{\vec{p}}x^0} a_{\vec{p}B}^\dagger) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \\
&= \int d\omega_{\vec{p}} (e^{-ipx} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{p}})_{AB} a_{\vec{p}B} + e^{ipx} U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{p}})_{AB} a_{\vec{p}B}^\dagger), \\
&= \int d\omega_{\vec{p}} (e^{-ipx} a_{\vec{p}B}(\theta_\beta^{\vec{p}}) + e^{ipx} a_{\vec{p}B}^\dagger(\theta_\beta^{\vec{p}})). \tag{3.129}
\end{aligned}$$

É imediato que o efeito da ação do operador  $\mathbf{U}^{-1}(\theta_\beta)_{AB}$  sobre um campo, consiste em realizar a transformação linear de Bogoliubov (3.91)-(3.92) nos operadores de criação e destruição. Uma consequência disso é que as propriedades da matriz  $U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{p}})_{AB}$  são imediatamente espelhadas no operador  $\mathbf{U}^{-1}(\theta_\beta)_{AB}$ . Isso equivale a fazer as seguintes substituições

$$a_{\vec{p}B} \rightarrow a_{\vec{p}B}(\theta_\beta^{\vec{p}}), \quad a_{\vec{p}B}^\dagger \rightarrow a_{\vec{p}B}^\dagger(\theta_\beta^{\vec{p}}),$$

no campo  $\phi(x)_A$ , como é de se esperar pela definição (3.122). A vantagem do operador térmico de Bogoliubov é que o mesmo atua não só sobre operadores, mas também sobre funções  $C^\infty$ . Isso significa que podemos considerar a sua aplicação em integrais de trajetória.

## Cálculo do propagador térmico do campo escalar real

Na DCT o propagador do campo escalar real termalizado é definido por [34]

$$\Delta(x - y; \theta_\beta)_{AB} = \langle 0; \theta_\beta | T \{ \phi(x)_A \phi(y)_B \} | 0; \theta_\beta \rangle, \quad (3.130)$$

de maneira que a componente associada aos graus de liberdade ordinários,  $A = B = 1$ , resulta em

$$\Delta(x - y; \theta_\beta)_{11} = \Xi_\beta^{-1} \text{Tr} e^{-\beta H} T \{ \phi(x) \phi(y) \}. \quad (3.131)$$

Vejamos como podemos utilizar a transformação de Bogoliubov sobre os campos para definir uma transformação de Bogoliubov sobre o propagador da teoria duplicada a  $T = 0$ .

$$\begin{aligned} \Delta(x - y; \theta_\beta)_{AB} &= \langle 0; \theta_\beta | T \{ \phi(x)_A \phi(y)_B \} | 0; \theta_\beta \rangle, \\ &= \langle 0; \tilde{0} | \mathcal{U}_B^\dagger(\theta_\beta) T \{ \phi(x)_A \phi(y)_B \} \mathcal{U}_B(\theta_\beta) | 0; \tilde{0} \rangle, \\ &= \langle 0; \tilde{0} | \mathcal{U}_B(-\theta_\beta) T \{ \phi(x)_A \phi(y)_B \} \mathcal{U}_B^\dagger(-\theta_\beta) | 0; \tilde{0} \rangle, \\ &= \langle 0; \tilde{0} | T [ \mathcal{U}_B(-\theta_\beta) \phi(x)_A \mathcal{U}_B^\dagger(-\theta_\beta) \mathcal{U}_B(-\theta_\beta) \phi(y)_B \\ &\times \mathcal{U}_B^\dagger(-\theta_\beta) ] | 0; \tilde{0} \rangle, \\ &= \langle 0; \tilde{0} | T [ \mathbf{U}^{-1}(-\theta_\beta)_{AC} \cdot \phi(x)_C \mathbf{U}^{-1}(-\theta_\beta)_{BD} \cdot \phi(y)_D ] | 0; \tilde{0} \rangle, \\ &= \mathbf{U}(\theta_\beta)_{AC} \cdot \langle 0; \tilde{0} | T [ \phi(x)_C \phi(y)_D ] | 0; \tilde{0} \rangle \cdot \overleftarrow{\mathbf{U}}(\theta_\beta)_{BD}, \quad (3.132) \end{aligned}$$

onde utilizamos as seguintes propriedades da matriz de Bogoliubov  $U(\theta_\beta)_{AB}$

$$\mathbf{U}^{-1}(-\theta_\beta) = \mathbf{U}(\theta_\beta) \quad \mathbf{U}^T(\theta_\beta) = \mathbf{U}(\theta_\beta).$$

Substituindo o resultado (3.117) em (3.132), teremos

$$\begin{aligned} \Delta(x-y; \theta_\beta)_{AB} &= \mathbf{U}(\theta_\beta)_{AC} \cdot \left( \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta(p)_{CD} e^{-ip(x-y)} \right) \cdot \overleftarrow{\mathbf{U}}(\theta_\beta)_{BD} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} U(\theta_\beta^{\vec{p}})_{AC} \Delta(p)_{CD} U^T(\theta_\beta^{\vec{p}})_{DB} e^{-ip(x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta(p; \theta_\beta)_{AB} e^{-ip(x-y)} \end{aligned}$$

onde  $\Delta(p; \theta_\beta)$  é dado por

$$\begin{aligned} \Delta(p; \theta_\beta) &= U(\theta_\beta^{\vec{p}}) \Delta(p) U^T(\theta_\beta^{\vec{p}}), \\ &= U(\theta_\beta^{\vec{p}}) \Delta(p) U(\theta_\beta^{\vec{p}}), \\ &= U(\theta_\beta^{\vec{p}}) \frac{i\tau}{p^2 - m^2 + i\tau\epsilon} U(\theta_\beta^{\vec{p}}), \\ &= \begin{pmatrix} \Delta(p; \theta_\beta)_{11} & \Delta(p; \theta_\beta)_{12} \\ \Delta(p; \theta_\beta)_{21} & \Delta(p; \theta_\beta)_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.133}$$

onde as componentes de  $\Delta(p; \theta_\beta)$  são dadas por

$$\begin{aligned} \Delta(p; \theta_\beta)_{11} &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi v^2(\theta_\beta^{p_0}) \delta(p^2 - m^2), \\ \Delta(p; \theta_\beta)_{12} &= \Delta(p; \theta_\beta)_{21} = 2\pi u(\theta_\beta^{p_0}) v(\theta_\beta^{p_0}) \delta(p^2 - m^2), \\ \Delta(p; \theta_\beta)_{22} &= \frac{-i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} + 2\pi v^2(\theta_\beta^{p_0}) \delta(p^2 - m^2), \end{aligned}$$

Para obter este resultado, utilizamos a propriedade  $U^T(\theta_\beta^{p_0}) = U(\theta_\beta^{p_0})$ , a relação

$$\frac{1}{p^2 - m^2 - i\epsilon} - \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = 2\pi i \delta(p^2 - m^2)$$

e definimos os elementos  $u(\theta_\beta^{p_0})$  e  $v(\theta_\beta^{p_0})$  da seguinte maneira

$$u(\theta_\beta^{p_0}) = \frac{e^{\beta|p_0|/2}}{\sqrt{e^{\beta|p_0|} - 1}}, \quad v(\theta_\beta^{p_0}) = \frac{1}{\sqrt{e^{\beta|p_0|} - 1}}.$$

# Capítulo 4

## Campo de Dirac na DCT

Este capítulo possui basicamente a mesma estrutura do capítulo anterior, de forma que os resultados obtidos para o campo escalar real serão aqui obtidos para o caso do campo de Dirac.

### 4.1 Estado térmico do oscilador fermiônico carregado com 1 grau de liberdade: sistema $\mathcal{OF}_\epsilon$ .

Seja  $\mathcal{OF}_\epsilon$  um oscilador fermiônico, com 1 grau de liberdade (nível  $\epsilon$ ), descrito pelo operador hamiltoniano  $H$ , que é dado por

$$H = \epsilon(a^\dagger a + b^\dagger b) \tag{4.1}$$

onde os operadores  $a, a^\dagger, b, b^\dagger$  satisfazem a seguinte álgebra<sup>1</sup>

$$\{a^\dagger, a\} = 1, \quad \{a^\dagger a^\dagger\} = \{a, a\} = 0, \quad (4.2)$$

$$\{b^\dagger, b\} = 1, \quad \{b^\dagger b^\dagger\} = \{b, b\} = 0, \quad (4.3)$$

$$\{a, b\} = \{a, b^\dagger\} = \{a^\dagger, b\} = \{a^\dagger, b^\dagger\} = 0. \quad (4.4)$$

Sejam  $\mathbf{N}_a = a^\dagger a$  e  $\mathbf{N}_b = b^\dagger b$  operadores números de partículas do tipo  $a$  e  $b$ . Podemos mostrar a partir da álgebra (4.2-4.4), que o espectro de autovalores de  $\mathbf{N}_a$  e  $\mathbf{N}_b$  é dado, respectivamente, por  $\{n^a = 0, 1\}$  e  $\{n^b = 0, 1\}$ , sendo que os estados ortonormalizados, denotados por  $\{|n^a, n^b\rangle\}$  e definidos por

$$|n^a, n^b\rangle = (a^\dagger)^{n^a} (b^\dagger)^{n^b} |0, 0\rangle; \quad n^a, n^b = 0, 1,$$

são autoestados de  $\mathbf{N}_a$  e  $\mathbf{N}_b$  simultaneamente, de maneira que um autoestado  $|n^a, n^b\rangle$  só pode conter uma ou nenhuma partícula de cada tipo. O estado  $|0, 0\rangle$ , não contém nenhuma partícula, por isto é chamado estado de vácuo. Seja  $N = N_a + N_b$  o operador número total de partículas. Os autoestados  $\{|n^a, n^b\rangle, n^a, n^b = 0, 1\}$  satisfazem

$$\mathbf{N}|n^a, n^b\rangle = (n^a + n^b)|n^a, n^b\rangle, \quad (4.5)$$

$$\langle \bar{n}^a, \bar{n}^b | n^a, n^b \rangle = \delta_{\bar{n}^a n^a} \delta_{\bar{n}^b n^b} \quad , \quad \sum_{n^a, n^b=0,1} |n^a, n^b\rangle \langle n^b, n^b| = 1, \quad (4.6)$$

---

<sup>1</sup>As chaves denotam anti-comutadores:  $\{A, B\} = AB + BA$ .

Como o hamiltoniano pode ser escrito como  $H = \epsilon \mathbf{N}$ , o espectro de autoenergias é dado por  $\{\epsilon\{n^a, n^b\} = (n^a + n^b)\epsilon | n^a, n^b = 0, 1\}$ , sendo que os correspondentes autoestados são  $\{|n^a, n^b\rangle\}$  que expandem o espaço de Hilbert do sistema  $\mathcal{OF}_\epsilon$  que denotaremos por  $\mathcal{H}_{F\epsilon}$ .

Para construir DCT para o sistema  $\mathcal{OF}_\epsilon$  temos de duplicar os graus de liberdade do sistema introduzindo os operadores til  $\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger, \tilde{N}_a, \tilde{b}, \tilde{b}^\dagger, \tilde{N}_b, \tilde{H}\}$  segundo as regras de conjugação til. A álgebra dos operadores til fica da mesma forma que (4.2-4.4), ou seja

$$\{\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}\} = 1, \quad \{\tilde{a}^\dagger \tilde{a}^\dagger\} = \{\tilde{a}, a\} = 0, \quad (4.7)$$

$$\{\tilde{b}^\dagger, \tilde{b}\} = 1, \quad \{\tilde{b}^\dagger \tilde{b}^\dagger\} = \{\tilde{b}, \tilde{b}\} = 0, \quad (4.8)$$

$$\{\tilde{a}, \tilde{b}\} = \{\tilde{a}, \tilde{b}^\dagger\} = \{\tilde{a}^\dagger, \tilde{b}\} = \{\tilde{a}^\dagger, \tilde{b}^\dagger\} = 0. \quad (4.9)$$

Construímos os graus de liberdade til de forma que eles sejam independentes dos ordinários. No caso de operadores fermiônicos isso significa que todos os operadores ordinários  $\{a, a^\dagger, b, b^\dagger\}$  anti-comutam com todos os operadores til  $\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger, \tilde{b}, \tilde{b}^\dagger\}$ , o que não está em desacordo com a condição (2.39), já que esta se refere a observáveis, o que não é o caso dos operadores  $\{a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger, b, b^\dagger, \tilde{b}, \tilde{b}^\dagger\}$ .

O espaço de Hilbert associado aos graus de liberdade til possui a mesma estrutura do ordinário, de maneira que o espaço de Hilbert do sistema dupli-

cado é expandido pelos estados ortonormalizados dados por

$$\{|\{\bar{n}^a, \bar{n}^b\}, \{\tilde{n}^a, \tilde{n}^b\}\rangle | \bar{n}^a, \bar{n}^b, \tilde{n}^a, \tilde{n}^b = 0, 1\}, \quad (4.10)$$

que são definidos por

$$|\{\bar{n}^a, \bar{n}^b\}, \{\tilde{n}^a, \tilde{n}^b\}\rangle = (a^\dagger)^{\bar{n}^a} (i\tilde{a}^\dagger)^{\tilde{n}^a} (b^\dagger)^{\bar{n}^b} (i\tilde{b}^\dagger)^{\tilde{n}^b} |0, 0; \tilde{0}, \tilde{0}\rangle,$$

onde  $|0, 0; \tilde{0}, \tilde{0}\rangle$  é o estado de vácuo duplicado.

Considere que o sistema  $\mathcal{OF}_\epsilon$  está em equilíbrio térmico à temperatura  $T$  e com um potencial químico  $\mu$ , o qual está associado a uma carga conservada  $Q$  dada por

$$\begin{aligned} Q &= N_a - N_b, \\ &= a^\dagger a - b^\dagger b. \end{aligned}$$

Pela definição de  $Q$  temos

$$\begin{aligned} Q|\{\bar{n}^a, \bar{n}^b\}, \{\tilde{n}^a, \tilde{n}^b\}\rangle &= (\bar{n}^a - \bar{n}^b)|\{\bar{n}^a, \bar{n}^b\}, \{\tilde{n}^a, \tilde{n}^b\}\rangle, \\ &= \begin{cases} +1|\{1, 0\}, \{\tilde{n}^a, \tilde{n}^b\}\rangle, & \text{para } \bar{n}^a = 1, \bar{n}^b = 0 \\ -1|\{0, 1\}, \{\tilde{n}^a, \tilde{n}^b\}\rangle & \text{para } \bar{n}^a = 0, \bar{n}^b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

e, portanto, a carga da partícula  $a$  é  $+1$  e a carga da partícula  $b$  é  $-1$ .

Denotemos os números de ocupação do nível  $j = \epsilon$  por  $n_\epsilon^a = n^a$  e  $n_\epsilon^b = n^b$ . O microestado de  $\mathcal{OF}_\epsilon$  é dado por  $J = \{n^a, n^b\}$ , sendo que a carga e a energia

do sistema neste microestado são dados por

$$\begin{aligned}
Q\{n^a, n^b\} &= \sum_{j=\epsilon} (n_j^a - n_j^b), \\
&= (n^a - n^b), \\
E\{n^a, n^b\} &= \sum_{j=\epsilon} (n_j^a + n_j^b)\epsilon_j, \\
&= (n^a + n^b)\epsilon = 0,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde  $n^a, n^b = 0, 1$ . Conforme (2.31), estado térmico que descreve esta situação é dado por

$$\begin{aligned}
|0, \beta\mu\rangle &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{n^a, n^b=0,1} e^{-\beta(E\{n^a, n^b\} - \mu Q\{n^a, n^b\})/2} |\{n^a, n^b\}, \{\tilde{n}^a, \tilde{n}^b\}\rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} (|\{0, 0\}, \{\tilde{0}, \tilde{0}\}\rangle + e^{-\beta(\epsilon-\mu)/2} |\{1, 0\}, \{\tilde{1}, \tilde{0}\}\rangle \\
&\quad + e^{-\beta(\epsilon+\mu)/2} |\{1, 0\}, \{\tilde{1}, \tilde{0}\}\rangle + e^{-2\beta\epsilon/2} |\{1, 1\}, \{\tilde{1}, \tilde{1}\}\rangle),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

cuja normalização resulta em

$$\begin{aligned}
\Xi_{\beta\mu} &= \sum_{n^a, n^b=0,1} e^{-\beta(E\{n^a, n^b\} - \mu Q\{n^a, n^b\})} = \sum_{n^a, n^b=0,1} e^{-\beta(\epsilon(n^a+n^b) - \mu(n^a-n^b))}, \\
&= \sum_{n^a, n^b=0,1} e^{-\beta((\epsilon-\mu)n^a + (\epsilon+\mu)n^b)} = \sum_{n^a=0,1} e^{-\beta(\epsilon-\mu)n^a} \sum_{n^b=0,1} e^{-\beta(\epsilon+\mu)n^b}, \\
&= (1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)})(1 + e^{-\beta(\epsilon+\mu)}), \\
&= n_F^{-1}(\epsilon)\bar{n}_F^{-1}(\epsilon)e^{-2\beta\epsilon},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde  $n_F(\epsilon)$  e  $\bar{n}_F(\epsilon)$  são as funções de distribuição de Fermi-Dirac com poten-

ciais químicos, respectivamente, iguais a  $\mu$  e  $-\mu$ , ou seja,

$$n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}, \quad \bar{n}_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1}.$$

Substituindo (4.13) em (4.12), obtemos

$$\begin{aligned} |0, \beta\mu\rangle &= n_F^{1/2}(\epsilon)\bar{n}_F^{1/2}(\epsilon)e^{\beta\epsilon}[\{|0, 0\rangle, \{\tilde{0}, \tilde{0}\}\rangle \\ &+ e^{-\beta(\epsilon-\mu)/2}|\{1, 0\rangle, \{\tilde{1}, \tilde{0}\}\rangle + e^{-\beta(\epsilon+\mu)/2}|\{0, 1\rangle, \{\tilde{0}, \tilde{1}\}\rangle \\ &+ e^{-2\beta\epsilon/2}|\{1, 1\rangle, \{\tilde{1}, \tilde{1}\}\rangle], \end{aligned} \quad (4.14)$$

A média térmica do operador carga  $Q = (a^\dagger a - b^\dagger b)$ , em termos do estado térmico  $|0, \beta\mu\rangle$ , é dada por

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle_{\beta\mu} &= \langle 0, \beta\mu | Q | 0, \beta\mu \rangle, \\ &= n_F(\epsilon)\bar{n}_F(\epsilon)e^{2\beta\epsilon}[\langle \{0, 0\}, \{\tilde{0}, \tilde{0}\} | + \langle \{1, 0\}, \{\tilde{1}, \tilde{0}\} | e^{-\beta(\epsilon-\mu)/2} \\ &+ \langle \{0, 1\}, \{\tilde{0}, \tilde{1}\} | e^{-\beta(\epsilon+\mu)/2} + \langle \{1, 1\}, \{\tilde{1}, \tilde{1}\} | e^{-2\beta\epsilon/2}] \\ &\times Q[\{|0, 0\rangle, \{\tilde{0}, \tilde{0}\}\rangle + e^{-\beta(\epsilon-\mu)/2}|\{1, 0\rangle, \{\tilde{1}, \tilde{0}\}\rangle \\ &+ e^{-\beta(\epsilon+\mu)/2}|\{0, 1\rangle, \{\tilde{0}, \tilde{1}\}\rangle + e^{-2\beta\epsilon/2}|\{1, 1\rangle, \{\tilde{1}, \tilde{1}\}\rangle]. \end{aligned}$$

Considerando que

$$\begin{aligned} Q|\{0, 0\}, \{\tilde{0}, \tilde{0}\}\rangle &= Q|\{1, 1\}, \{\tilde{1}, \tilde{1}\}\rangle = 0, \\ Q|\{1, 0\}, \{\tilde{1}, \tilde{0}\}\rangle &= |\{1, 0\}, \{\tilde{1}, \tilde{0}\}\rangle, \quad Q|\{0, 1\}, \{\tilde{0}, \tilde{1}\}\rangle = -|\{0, 1\}, \{\tilde{0}, \tilde{1}\}\rangle, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\langle Q \rangle_{\beta\mu} &= n_F(\epsilon)\bar{n}_F(\epsilon)e^{2\beta\epsilon}[e^{-\beta(\epsilon-\mu)} - e^{-\beta(\epsilon+\mu)}], \\
&= n_F(\epsilon)\bar{n}_F(\epsilon)[e^{\beta(\epsilon+\mu)} - e^{\beta(\epsilon-\mu)}], \\
&= n_F(\epsilon)\bar{n}_F(\epsilon)[1 + e^{\beta(\epsilon+\mu)} - (1 + e^{\beta(\epsilon-\mu)})], \\
&= n_F(\epsilon)\bar{n}_F(\epsilon)e^{2\beta\epsilon}[\bar{n}_F^{-1}(\epsilon) - n_F^{-1}(\epsilon)], \\
&= n_F(\epsilon) - \bar{n}_F(\epsilon),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

ou seja, as partículas  $a$  e  $b$ , respectivamente, com cargas  $+1$  e  $-1$  e potenciais químicos  $+\mu$  e  $-\mu$ , têm a ocupação média do nível  $j = \epsilon$ , no estado de equilíbrio, caracterizada pela distribuição de Fermi-Dirac [35].

## 4.2 Transformação de Bogoliubov para o sistema $\mathcal{O}\mathcal{F}_\epsilon$ .

Nesta seção veremos que o estado térmico fermiônico  $|0, \beta\mu\rangle$  pode ser escrito como

$$|0, \beta\mu\rangle = \mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})|0\rangle \tag{4.16}$$

onde denotamos o vácuo duplicado  $|\{0, \tilde{0}\}, \{0, \tilde{0}\}\rangle$  por  $|0\rangle$  e  $\mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})$  é uma transformação unitária, que serve de base para todos os processos de thermalização do formalismo da DCT, permitindo a sua generalização para os

campos fermiônicos. Considerando a definição dos elementos da base (4.10), temos que o estado térmico em (4.12) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
|0, \beta\mu\rangle &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{n^a, n^b=0,1} e^{-\beta(E\{n^a, n^b\} - \mu Q\{n^a, n^b\})/2} |\{n^a, n^b\}, \{\tilde{n}^a, \tilde{n}^b\}\rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{n^a=0,1} \sum_{n^b=0,1} e^{-\beta((\epsilon-\mu)n^a + (\epsilon+\mu)n^b)} (ia^\dagger \tilde{a}^\dagger)^{n^a} (ib^\dagger \tilde{b}^\dagger)^{n^b} \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{n^a=0,1} (e^{-\beta(\epsilon-\mu)} ia^\dagger \tilde{a}^\dagger)^{n^a} \sum_{n^b=0,1} (e^{-\beta(\epsilon+\mu)} ib^\dagger \tilde{b}^\dagger)^{n^b} |0\rangle\rangle \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} (1 + ie^{-\beta(\epsilon-\mu)} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) (1 + ie^{-\beta(\epsilon+\mu)} b^\dagger \tilde{b}^\dagger) |0\rangle\rangle. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Note que os pares de operadores fermiônicos  $a^\dagger \tilde{a}^\dagger$  e  $b^\dagger \tilde{b}^\dagger$  comutam. Considere as seguintes definições

$$u(\theta_{\beta\mu}^\pm) \equiv \cos(\theta_{\beta\mu}^\pm) = \frac{e^{\beta(\epsilon \mp \mu)/2}}{(e^{\beta(\epsilon \mp \mu)} + 1)^{-1/2}}, \tag{4.18}$$

$$v(\theta_{\beta\mu}^\pm) \equiv \sin(\theta_{\beta\mu}^\pm) = \frac{1}{(e^{\beta(\epsilon \mp \mu)} + 1)^{-1/2}}, \tag{4.19}$$

$$\tan(\theta_{\beta\mu}^\pm) = e^{-\beta(\epsilon \mp \mu)/2}, \tag{4.20}$$

que são consistentes já que,

$$\begin{aligned}
u(\theta_{\beta\mu}^\pm)^2 + v(\theta_{\beta\mu}^\pm)^2 &= \cos^2(\theta_{\beta\mu}^\pm) + \sin^2(\theta_{\beta\mu}^\pm), \\
&= \frac{e^{\beta(\epsilon \mp \mu)}}{1 + e^{\beta(\epsilon \mp \mu)}} + \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon \mp \mu)}} = 1.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Note que

$$v^2(\theta_{\beta\mu}^+) = n_F(\epsilon), \quad v(\theta_{\beta\mu}^-)^2 = \bar{n}_F(\epsilon). \tag{4.22}$$

Substituindo as definições (4.18) e (4.19) em (4.17), obtemos

$$|0, \beta\mu\rangle = (\cos(\theta_{\beta\mu}^+) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^+) a^\dagger \tilde{a}^\dagger) (\cos(\theta_{\beta\mu}^-) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^-) b^\dagger \tilde{b}^\dagger) |0\rangle, \quad (4.23)$$

Com a notação introduzida nas definições (4.18-4.20), o estado térmico  $|0, \beta\mu\rangle$  é função do parâmetro  $\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} = (\theta_{\beta\mu}^+, \theta_{\beta\mu}^-)$ , por isso, o denotaremos por  $|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle$ . E ainda, tendo em vista que, nos passos seguintes, apenas o segundo termo do lado direito da igualdade na Eq.(4.23) participa dos cálculos, denotaremos o primeiro termo abreviadamente por

$$(\dots \tilde{a}^\dagger) = (\cos(\theta_{\beta\mu}^+) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^+) a^\dagger \tilde{a}^\dagger),$$

portanto a expressão (4.23) fica escrita da seguinte maneira

$$|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle = (\dots \tilde{a}^\dagger) (\cos(\theta_{\beta\mu}^-) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^-) b^\dagger \tilde{b}^\dagger) |0\rangle.$$

Substituindo as expansões em série de Taylor das funções  $\cos(\theta_{\beta\mu}^-)$  e  $\sin(\theta_{\beta\mu}^-)$ , escritas com o número imaginário  $i$

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{\beta\mu}^-) &= \sum_{n^b=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n^b} (\theta_{\beta\mu}^-)^{2n^b}}{(2n^b)!} = \sum_{n^b=0}^{\infty} \frac{(i\theta_{\beta\mu}^-)^{2n^b}}{(2n^b)!} \\ \sin(\theta_{\beta\mu}^-) &= \sum_{n^b=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n^b} (\theta_{\beta\mu}^-)^{2n^b+1}}{(2n^b+1)!} = -i \sum_{n^b=0}^{\infty} \frac{(i\theta_{\beta\mu}^-)^{2n^b+1}}{(2n^b+1)!}, \end{aligned}$$

em (4.23), obtemos

$$|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle = (\dots \tilde{a}^\dagger) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta_{\beta\mu}^-)^{2n}}{(2n)!} |0\rangle \right) - i^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta_{\beta\mu}^-)^{2n+1}}{(2n+1)!} b^\dagger \tilde{b}^\dagger |0\rangle,$$

e considerando as seguintes relações

$$\begin{aligned}(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger)^{2n^b}|0\rangle &= |0\rangle, \\(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger)^{2n^b+1}|0\rangle &= b^\dagger\tilde{b}^\dagger|0\rangle,\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}|0; \theta_{\beta\mu}\rangle &= (\dots\tilde{a}^\dagger)\left\{\sum_{n^b=0}^{\infty}\frac{(i\theta_{\beta\mu}^-)^{2n^b}}{(2n^b)!}(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger)^{2n^b}\right. \\&+ \left.\sum_{n^b=0}^{\infty}\frac{(i\theta_{\beta\mu}^-)^{2n^b+1}}{(2n^b+1)!}(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger)^{2n^b+1}\right\}|0\rangle, \\&= (\dots\tilde{a}^\dagger)\left\{\sum_{n^b=0}^{\infty}\frac{(i\theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger))^{2n^b}}{(2n^b)!}\right. \\&+ \left.\sum_{n^b=0}^{\infty}\frac{(i\theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger))^{2n^b+1}}{(2n^b+1)!}\right\}|0\rangle, \\&= (\dots\tilde{a}^\dagger)\left\{\sum_{n^b=0}^{\infty}\frac{(i\theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger))^{n^b}}{n^b!}\right\}|0\rangle \\&= (\dots\tilde{a}^\dagger)\{\exp(i\theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger))\}|0\rangle, \\&= \exp(i\theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger))(\dots\tilde{a}^\dagger)|0\rangle, \\&= \exp(i\theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger))(\cos(\theta_{\beta\mu}^+) + i\sin(\theta_{\beta\mu}^+)a^\dagger\tilde{a}^\dagger)|0\rangle\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que os termos  $(\tilde{a}a + a^\dagger\tilde{a}^\dagger)$  e  $(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger)$  comutam, já que contêm apenas pares de operadores fermiônicos. Se repetirmos os mesmos passos com o termo

$$(\cos(\theta_{\beta\mu}^+) + i\sin(\theta_{\beta\mu}^+)a^\dagger\tilde{a}^\dagger)|0\rangle,$$

obtemos

$$|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle = \exp(i\theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger)) \exp(i\theta_{\beta\mu}^+(\tilde{a}a + a^\dagger\tilde{a}^\dagger))|0\rangle,$$

e ainda pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} |0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= \exp(i\theta_{\beta\mu}^+(\tilde{a}a + a^\dagger\tilde{a}^\dagger)) \exp(i\theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger))|0\rangle \\ &= e^{i\theta_{\beta\mu}^+(\tilde{a}a + a^\dagger\tilde{a}^\dagger)} e^{i\theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger)}|0\rangle \\ &= e^{\{i\theta_{\beta\mu}^+(\tilde{a}a + a^\dagger\tilde{a}^\dagger) + i\theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger)\}}|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Seja  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})$  o operador definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_F(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}) &= \mathcal{G}_F(\theta_{\beta\mu}^+) + \mathcal{G}_F(\theta_{\beta\mu}^-) \\ &= \theta_{\beta\mu}^+(\tilde{a}a + a^\dagger\tilde{a}^\dagger) + \theta_{\beta\mu}^-(\tilde{b}b + b^\dagger\tilde{b}^\dagger) \end{aligned}$$

é imediato que  $\mathcal{G}_F(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})$  é hermitiano. Vale lembrar que, diferentemente dos operadores bosônicos, a ordem na qual os operadores fermiônicos estão escritos é relevante, já que eles anti-comutam. Em termos de  $\mathcal{G}_F(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})$ , o estado térmico (4.24) é dado por

$$\begin{aligned} |0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= \mathcal{U}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})|0\rangle, \\ &= \mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)\mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)|0\rangle, \\ &= e^{i\mathcal{G}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)} e^{i\mathcal{G}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)}|0\rangle, \end{aligned}$$

onde os operadores unitários  $\mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu})$  e  $\mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu})$  são definidos por

$$\mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+) = e^{i\mathcal{G}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)}, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-) = e^{i\mathcal{G}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)}. \quad (4.26)$$

### 4.2.1 A termalização dos operadores do sistema $\mathcal{O}\mathcal{F}_\epsilon \cup \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{F}_\epsilon}$ .

Vamos definir a termalização dos operadores  $\{a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger, b, b^\dagger, \tilde{b}, \tilde{b}^\dagger\}$  a partir do operador  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}(\theta_{\beta\mu})$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned} a(\theta_{\beta\mu}^+) &= \mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})a\mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})^\dagger, & b(\theta_{\beta\mu}^-) &= \mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})b\mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})^\dagger, \\ &= \mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)a\mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)^\dagger, & &= \mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)b\mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)^\dagger, \\ -i\tilde{a}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^+) &= \mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})(-i\tilde{a}^\dagger)\mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})^\dagger, & -i\tilde{b}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^-) &= \mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})(-i\tilde{b}^\dagger)\mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})^\dagger, \\ &= \mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)(-i\tilde{a}^\dagger)\mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)^\dagger, & &= \mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)(-i\tilde{b}^\dagger)\mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)^\dagger, \\ a^\dagger(\theta_{\beta\mu}^+) &= \mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})a^\dagger\mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})^\dagger, & b^\dagger(\theta_{\beta\mu}^-) &= \mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})b^\dagger\mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})^\dagger, \\ &= \mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)a^\dagger\mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)^\dagger, & &= \mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)b^\dagger\mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)^\dagger, \\ -i\tilde{a}(\theta_{\beta\mu}^+) &= \mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})(-i\tilde{a})\mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})^\dagger, & -i\tilde{b}(\theta_{\beta\mu}^-) &= \mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})(-i\tilde{b})\mathcal{U}_F(\theta_{\beta\mu})^\dagger, \\ &= \mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)(-i\tilde{a})\mathcal{U}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)^\dagger, & &= \mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)(-i\tilde{b})\mathcal{U}_F^-(\theta_{\beta\mu}^-)^\dagger, \end{aligned}$$

de maneira que estes operadores satisfazem

$$\begin{aligned} a(\theta_{\beta\mu}^+)|\theta_{\beta\mu}\rangle &= 0, & b(\theta_{\beta\mu}^-)|0; \theta_{\beta\mu}\rangle &= 0, \\ -i\tilde{a}(\theta_{\beta\mu}^+)|0; \theta_{\beta\mu}\rangle &= 0, & -i\tilde{b}(\theta_{\beta\mu}^-)|0; \theta_{\beta\mu}\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Assim sendo,  $|0; \theta_{\beta\mu}\rangle$  é um estado de vácuo para os operadores termalizados  $\{a(\theta_{\beta\mu}^+), \tilde{a}(\theta_{\beta\mu}^+), b(\theta_{\beta\mu}^-), \tilde{b}(\theta_{\beta\mu}^-)\}$ , embora não o seja para os operadores

$\{a, \tilde{a}, b, \tilde{b}\}$ . Por isso chamamos o estado térmico  $|0; \theta_{\beta\mu}\rangle$  de vácuo térmico.

Considerando a definição do operador termalizado  $a(\theta^+ \beta\mu)$  e (4.25), teremos

$$\begin{aligned} a(\theta_{\beta\mu}^+) &= e^{i\mathcal{G}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)} a e^{-i\mathcal{G}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a, -i\mathcal{G}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)]^{(2n)}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a, -i\mathcal{G}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)]^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pode-se mostrar que os comutadores acima resultam em

$$[a, -i\mathcal{G}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)]^{(2n)} = (-i\theta_{\beta\mu}^+)^{2n} a \quad , \quad [a, -i\mathcal{G}_F^+(\theta_{\beta\mu}^+)]^{(2n+1)} = (-i\theta_{\beta\mu}^+)^{2n+1} \tilde{a}^\dagger,$$

os quais substituídos em (4.27), resultam em

$$\begin{aligned} a(\theta_{\beta\mu}^+) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta_{\beta\mu}^+)^{2n}}{(2n)!} a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta_{\beta\mu}^+)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tilde{a}^\dagger \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\theta_{\beta\mu}^+)^{2n}}{(2n)!} \right) a - i \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\theta_{\beta\mu}^+)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \tilde{a}^\dagger \\ &= \cos(\theta_{\beta\mu}^+) a - \sin(\theta_{\beta\mu}^+) i \tilde{a}^\dagger \\ &= u(\theta_{\beta\mu}^+) a - v(\theta_{\beta\mu}^+) i \tilde{a}^\dagger. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Como os operadores  $a$  e  $b$  possuem a mesma estrutura, é imediato que obteremos um resultado análogo para o operador  $b(\theta_{\beta\mu}^-)$ , que é

$$b(\theta_{\beta\mu}^-) = u(\theta_{\beta\mu}^-) b - v(\theta_{\beta\mu}^-) i \tilde{b}^\dagger. \quad (4.29)$$

As demais transformações podem ser obtidas, a partir de (4.28) e (4.29), pela aplicação da conjugação hermitiana e das regras de conjugação til. Com isso

os operadores termalizados  $\{a(\theta_{\beta\mu}^+), \tilde{a}(\theta_{\beta\mu}^+), b(\theta_{\beta\mu}^-), \tilde{b}(\theta_{\beta\mu}^-)\}$  são dados por

$$\begin{aligned}
a(\theta_{\beta\mu}^+) &= u(\theta_{\beta\mu}^+)a - v(\theta_{\beta\mu}^+)i\tilde{a}^\dagger, & b(\theta_{\beta\mu}^-) &= u(\theta_{\beta\mu}^-)b + v(\theta_{\beta\mu}^-)(-i\tilde{b}^\dagger), \\
i\tilde{a}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^+) &= v(\theta_{\beta\mu}^+)a + u(\theta_{\beta\mu}^+)i\tilde{a}^\dagger, & -i\tilde{b}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^-) &= -v(\theta_{\beta\mu}^-)b + u(\theta_{\beta\mu}^-)(-ib^\dagger), \\
a^\dagger(\theta_{\beta\mu}^+) &= u(\theta_{\beta\mu}^+)a^\dagger - v(\theta_{\beta\mu}^+)(-i\tilde{a}), & b^\dagger(\theta_{\beta\mu}^-) &= u(\theta_{\beta\mu}^-)b^\dagger + v(\theta_{\beta\mu}^-)i\tilde{b}, \\
-i\tilde{a}(\theta_{\beta\mu}^+) &= v(\theta_{\beta\mu}^+)a^\dagger + u(\theta_{\beta\mu}^+)(-i\tilde{a}), & i\tilde{b}(\theta_{\beta\mu}^-) &= -v(\theta_{\beta\mu}^-)b^\dagger + u(\theta_{\beta\mu}^-)i\tilde{b},
\end{aligned}
\tag{4.30}$$

É importante notar que, com as convenções que adotamos [23, 36], a regra de conjugação til dupla para operadores fermiônicos é igual à regra para operadores bosônicos, ou seja,

$$\tilde{\tilde{a}} = a, \quad \tilde{\tilde{b}} = b, \quad \tilde{\tilde{a}^\dagger} = a^\dagger, \quad \tilde{\tilde{b}^\dagger} = b^\dagger \dots$$

## 4.2.2 Notação matricial para o sistema $\mathcal{OF}_\epsilon \cup \widetilde{\mathcal{OF}}_\epsilon$ .

Uma vez que a ação da transformação de Bogoliubov sobre os operadores fermiônicos  $\{a, \tilde{a}^\dagger, \tilde{a}, a^\dagger\}$  é linear, podemos escrever as transformações (4.30)

na forma matricial

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a(\theta_{\beta\mu}^+) \\ i\tilde{a}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^+) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^+) & -v(\theta_{\beta\mu}^+) \\ v(\theta_{\beta\mu}^+) & u(\theta_{\beta\mu}^+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ i\tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a^\dagger(\theta_{\beta\mu}^+) \\ -i\tilde{a}(\theta_{\beta\mu}^+) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^+) & -v(\theta_{\beta\mu}^+) \\ v(\theta_{\beta\mu}^+) & u(\theta_{\beta\mu}^+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger \\ -i\tilde{a} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} b(\theta_{\beta\mu}^-) \\ -i\tilde{b}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^-) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^-) & v(\theta_{\beta\mu}^-) \\ -v(\theta_{\beta\mu}^-) & u(\theta_{\beta\mu}^-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -i\tilde{b}^\dagger \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} b^\dagger(\theta_{\beta\mu}^-) \\ i\tilde{b}(\theta_{\beta\mu}^-) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^-) & v(\theta_{\beta\mu}^-) \\ -v(\theta_{\beta\mu}^-) & u(\theta_{\beta\mu}^-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^\dagger \\ i\tilde{b} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

onde as componentes são definidas por

$$\begin{aligned}
a_1 &= a, & a_2 &= i\tilde{a}^\dagger, & b_1 &= b, & b_2 &= -i\tilde{b}^\dagger \\
a_1^\dagger &= a^\dagger, & a_2^\dagger &= -i\tilde{a}, & b_1^\dagger &= b^\dagger, & b_2^\dagger &= i\tilde{b},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{11} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{22} = u(\theta_{\beta\mu}^+), & U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{11} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{22} = u(\theta_{\beta\mu}^-) \\
U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{12} &= -U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{21} = -v(\theta_{\beta\mu}^+), & U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{12} &= -U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{21} = v(\theta_{\beta\mu}^-).
\end{aligned}$$

Em termos dessa notação, podemos reescrever as transformações (4.54) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
a_A(\theta_{\beta\mu}^+) &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{AB} a_B, & b_A(\theta_{\beta\mu}^-) &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{AB} b_B \\
a_A^\dagger(\theta_{\beta\mu}^+) &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{AB} a_B^\dagger, & b_A^\dagger(\theta_{\beta\mu}^-) &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{AB} b_B^\dagger,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

sendo que a álgebra dos operadores fermiônicos  $\{a, \tilde{a}^\dagger, \tilde{a}, a^\dagger, b, \tilde{b}^\dagger, \tilde{b}, b^\dagger\}$  é dada por

$$\{a_A, a_B^\dagger\} = \delta_{AB}, \quad \{b_A, b_B^\dagger\} = \delta_{AB}, \quad (4.32)$$

e as demais relações de anti-comutação são nulas. Considerando a relação (4.21) e as definições da matriz de Bogoliubov fermiônica  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^\pm)$ , dadas por

$$U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^\pm) = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^\pm) & \mp v(\theta_{\beta\mu}^\pm) \\ \pm v(\theta_{\beta\mu}^\pm) & u(\theta_{\beta\mu}^\pm) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

podemos verificar as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^\pm) &= U^T(\theta_{\beta\mu}^\pm), & U(\theta_{\beta\mu}^\pm) &= U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^\pm), \\ U(\theta_{\beta\mu}^\pm)\boldsymbol{\tau}U(\theta_{\beta\mu}^\pm) &= \boldsymbol{\tau}, & \boldsymbol{\tau}U(\theta_{\beta\mu}^\pm)\boldsymbol{\tau} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^\pm), \end{aligned}$$

e, a partir destas propriedades, podemos verificar que a transformação de Bogoliubov fermiônica é canônica, ou seja, ela deixa a álgebra dos operadores fermiônicos invariante

$$\begin{aligned} \{a_A(\theta_{\beta\mu}), a_B^\dagger(\theta_{\beta\mu})\} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{BD}\{a_C, a_D^\dagger\} \\ &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}U^T(\theta_{\beta\mu})_{BD}\delta_{CD} \\ &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}\delta_{CD}U(\theta_{\beta\mu})_{DB} \\ &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}U(\theta_{\beta\mu})_{CB} \\ &= \delta_{AB}. \end{aligned}$$

Para as relações de anti-comutação dos operadores  $b_A$  e  $b_B^\dagger$  a demonstração é completamente análoga.

### Exemplo

Vejamos como se dá o cálculo da carga  $Q$  em termos dos operadores termalizados e do vácuo térmico

$$\begin{aligned}
\langle Q \rangle_{\beta\mu} &= \langle 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} | Q | 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} \rangle, \\
&= \langle \langle 0 | \mathcal{U}_F^\dagger(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}) Q \mathcal{U}_F(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}) | 0 \rangle \rangle, \\
&= \langle \langle 0 | \mathcal{U}_F(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}) (N_a - N_b) \mathcal{U}_F(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})^\dagger | 0 \rangle \rangle, \\
&= \langle \langle 0 | \mathcal{U}_F(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}) a^\dagger a \mathcal{U}_F(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})^\dagger | 0 \rangle \rangle \\
&\quad - \langle \langle 0 | \mathcal{U}_F(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}) b^\dagger b \mathcal{U}_F(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})^\dagger | 0 \rangle \rangle,
\end{aligned}$$

lembrando que o operador  $\mathcal{U}_F(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})$  é unitário, temos

$$\begin{aligned}
\langle Q \rangle_{\beta\mu} &= -\langle \langle 0 | \mathcal{U}_F^+(-\theta_{\beta\mu}^+) a^\dagger \mathcal{U}_F(-\theta_{\beta\mu}^+)^\dagger \\
&\quad \times \mathcal{U}_F^+(-\theta_{\beta\mu}^+) a \mathcal{U}_F^+(-\theta_{\beta\mu}^+)^\dagger | 0 \rangle \rangle \\
&\quad + \langle \langle 0 | \mathcal{U}_F^-(-\theta_{\beta\mu}^-) b^\dagger \mathcal{U}_F^-(-\theta_{\beta\mu}^-)^\dagger \\
&\quad \times \mathcal{U}_F^-(-\theta_{\beta\mu}^-) b \mathcal{U}_F^-(-\theta_{\beta\mu}^-)^\dagger | 0 \rangle \rangle,
\end{aligned}$$

e, considerando as transformações de Bogoliubov (4.54), a atuação do vácuo  $|0\rangle\rangle$  sobre os operadores  $\{a, a^\dagger, b, b^\dagger\}$  e a álgebra destes operadores, teremos

$$\begin{aligned}
\langle Q \rangle_{\beta\mu} &= -v^2(-\theta_{\beta\mu}^+) \langle\langle 0|(-i\tilde{a})i\tilde{a}^\dagger|0\rangle\rangle \\
&+ v^2(-\theta_{\beta\mu}^-) \langle\langle 0|i\tilde{b}(-i\tilde{b}^\dagger)|0\rangle\rangle, \\
&= -v^2(-\theta_{\beta\mu}^+) + v^2(-\theta_{\beta\mu}^-), \\
&= n_F(\epsilon) - \bar{n}_F(\epsilon),
\end{aligned}$$

como já havíamos obtido antes em (4.15).

### 4.3 Estado térmico do oscilador fermiônico com infinitos graus de liberdade $\mathcal{OF}_\infty$ .

Considere que um oscilador fermiônico, denotado por  $\mathcal{OF}_\infty$ , com infinitos graus de liberdade, é descrito pelo hamiltoniano  $H$ , que é dado por

$$H = \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \epsilon_{\vec{p}} (a_{\vec{p}s}^\dagger a_{\vec{p}s} + b_{\vec{p}s}^\dagger b_{\vec{p}s}),$$

onde os operadores de criação e destruição  $\{a_{\vec{p}s}, b_{\vec{p}s}, a_{\vec{q}r}^\dagger, b_{\vec{q}r}^\dagger\}$  satisfazem a álgebra

$$\begin{aligned}
\{a_{\vec{p}s}, a_{\vec{q}r}^\dagger\} &= (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(\vec{p} - \vec{q}), & \{b_{\vec{p}s}, b_{\vec{q}r}^\dagger\} &= (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(\vec{p} - \vec{q}), \\
\{a_{\vec{p}s}, a_{\vec{q}r}\} &= \{a_{\vec{p}s}^\dagger, a_{\vec{q}r}^\dagger\} = 0, & \{b_{\vec{p}s}, b_{\vec{q}r}\} &= \{b_{\vec{p}s}^\dagger, b_{\vec{q}r}^\dagger\} = 0, \\
\{a_{\vec{p}s}, b_{\vec{q}r}\} &= \{a_{\vec{p}s}^\dagger, b_{\vec{q}r}^\dagger\} = 0, & \{a_{\vec{p}s}^\dagger, b_{\vec{q}r}\} &= \{a_{\vec{p}s}, b_{\vec{q}r}^\dagger\} = 0,
\end{aligned}$$

(4.34)

Sejam  $\mathbf{N}_a$  e  $\mathbf{N}_b$  operadores números de partículas do tipo  $a$  e  $b$ , definidos por

$$\mathbf{N}_a = \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}s}^\dagger a_{\vec{p}s}, \quad \mathbf{N}_b = \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} b_{\vec{p}s}^\dagger b_{\vec{p}s},$$

Podemos mostrar, a partir da álgebra (4.34), que o espectro de autovalores de  $\mathbf{N}_a$  e  $\mathbf{N}_b$  é dado, respectivamente, por

$$\mathbf{N}_a = V \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} n_{\vec{p}s}^a, \quad \mathbf{N}_b = V \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} n_{\vec{p}s}^b,$$

onde  $\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b = 0, 1\}$ . Os estados ortonormalizados  $\{|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle\}$ , definidos por

$$|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle = \prod_{\vec{p}s} (a_{\vec{p}s}^\dagger)^{n_{\vec{p}s}^a} (b_{\vec{p}s}^\dagger)^{n_{\vec{p}s}^b} |0, 0\rangle; \quad n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b = 0, 1,$$

são autoestados de  $\mathbf{N}_a$  e  $\mathbf{N}_b$  simultaneamente. Seja  $N = \mathbf{N}_a + \mathbf{N}_b$  o operador número total de partículas. Os autoestados  $\{|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle, n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b = 0, 1\}$  satisfazem

$$\begin{aligned} N|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle &= V \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (n_{\vec{p}s}^a + n_{\vec{p}s}^b) |\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle, \\ \langle\{\bar{n}_{\vec{p}s}^a, \bar{n}_{\vec{p}s}^b\}|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle &= \prod_{\vec{p}s} \delta_{\bar{n}_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^a} \delta_{\bar{n}_{\vec{p}s}^b, n_{\vec{p}s}^b}, \\ \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}} |\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle \langle\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}| &= 1, \end{aligned}$$

de maneira que um autoestado  $|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle$  contém um total de partículas dado por

$$N\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\} = V \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (n_{\vec{p}s}^a + n_{\vec{p}s}^b),$$

contabilizando todos os níveis  $\{\vec{p}s\}$ . O estado  $|0,0\rangle$ , não contém nenhuma partícula, por isto é chamado estado de vácuo.

Note que os estados  $\{|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle\}$  também são autoestados do hamiltoniano  $H$  de maneira que

$$\begin{aligned} H|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle &= E\{|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle\}, \\ &= V \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \epsilon_{\vec{p}} (n_{\vec{p}s}^a + n_{\vec{p}s}^b) |\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\rangle, \end{aligned}$$

onde  $\{E\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}\}$  são as autoenergias do hamiltoniano.

Agora vamos duplicar os graus de liberdade do sistema, como temos feito nas seções anteriores, introduzindo os graus de liberdade til. Por meio das regras de conjugação til, introduzimos os operadores  $\{\tilde{a}_{\vec{p}s}, \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{N}_a, \tilde{b}_{\vec{p}s}, \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{N}_b\}$  e obtemos a álgebra dos operadores  $\{\tilde{a}_{\vec{p}s}, \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{b}_{\vec{q}r}, \tilde{b}_{\vec{q}r}^\dagger\}$  que resulta em

$$\begin{aligned} \{\tilde{a}_{\vec{p}s}, \tilde{a}_{\vec{q}r}^\dagger\} &= (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(\vec{p} - \vec{q}), & \{\tilde{b}_{\vec{p}s}, \tilde{b}_{\vec{q}r}^\dagger\} &= (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(\vec{p} - \vec{q}), \\ \{\tilde{a}_{\vec{p}s}, \tilde{a}_{\vec{q}r}\} &= \{\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{a}_{\vec{q}r}^\dagger\} = 0, & \{\tilde{b}_{\vec{p}s}, \tilde{b}_{\vec{q}r}\} &= \{\tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{b}_{\vec{q}r}^\dagger\} = 0, \\ \{\tilde{a}_{\vec{p}s}, \tilde{b}_{\vec{q}r}\} &= \{\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{b}_{\vec{q}r}^\dagger\} = 0, & \{\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{b}_{\vec{q}r}\} &= \{\tilde{a}_{\vec{p}s}, \tilde{b}_{\vec{q}r}^\dagger\} = 0. \end{aligned}$$

(4.35)

Os graus de liberdade til são independentes dos ordinários, de maneira que, para operadores fermiônicos, isso quer dizer que todos os operadores ordinários anti-comutam com os operadores til. O espaço de Hilbert associado aos graus de liberdade til tem a mesma estrutura que o ordinário. Assim sendo temos que o espaço de Hilbert total é expandido pela seguinte base de ortonormalizada<sup>2</sup>

$$|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}, \{\tilde{n}_{\vec{p}s}^a, \tilde{n}_{\vec{p}s}^b\}\rangle |n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b, \tilde{n}_{\vec{p}s}^a, \tilde{n}_{\vec{p}s}^b = 0, 1\rangle, \quad (4.36)$$

que são definidos por

$$|\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}, \{\tilde{n}_{\vec{p}s}^a, \tilde{n}_{\vec{p}s}^b\}\rangle = \prod_{\vec{p}s} \left( \frac{a_{\vec{p}s}^\dagger}{\sqrt{V}} \right)^{n_{\vec{p}s}^a} \left( \frac{i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{\sqrt{V}} \right)^{\tilde{n}_{\vec{p}s}^a} \left( \frac{b_{\vec{p}s}^\dagger}{\sqrt{V}} \right)^{n_{\vec{p}s}^b} \left( \frac{i\tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger}{\sqrt{V}} \right)^{\tilde{n}_{\vec{p}s}^b} |0\rangle, \quad (4.37)$$

onde  $|0\rangle\rangle = |\{0, 0\}; \{\tilde{0}, \tilde{0}\}\rangle$  é o estado de vácuo duplicado.

Considere que o sistema  $\mathcal{OB}_\infty$ , está em equilíbrio térmico à temperatura  $T$  e com um potencial químico  $\mu$ , o qual está associado a uma carga  $Q = N_a - N_b$ , sendo que a carga da partícula  $a$  é  $+1$  e a carga da partícula  $b$  é  $-1$ . Agora vamos obter o estado térmico que descreve este estado de equilíbrio do sistema  $\mathcal{OB}_\infty$  e vamos mostrar, à semelhança do sistema  $\mathcal{OF}_e$ , que este

---

<sup>2</sup>Neste caso temos  $n_{\vec{p}s}^a \neq \tilde{n}_{\vec{p}s}^a$  e  $n_{\vec{p}s}^b \neq \tilde{n}_{\vec{p}s}^b$  em geral. Estes números de ocupação têm de ser iguais apenas na expansão dos estados térmicos.

estado térmico também pode ser descrito por meio de uma transformação unitária que é a base do formalismo da DCT para campos fermiônicos.

Denotemos os números de ocupação do nível  $j = \vec{p}s$  por  $n_j^a = n_{\vec{p}s}^a$  e  $n_j^b = n_{\vec{p}s}^b$ . Um microestado de  $\mathcal{OF}_\infty$  é dado por  $\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}$ , sendo que a carga e a energia do sistema neste microestado são dados por

$$\begin{aligned} Q\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\} &= \sum_j (n_j^a - n_j^b), & E\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\} &= \sum_j (n_j^a + n_j^b)\epsilon_j, \\ &= V \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (n_{\vec{p}s}^a - n_{\vec{p}s}^b), & &= V \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (n_{\vec{p}s}^a + n_{\vec{p}s}^b)\epsilon_{\vec{p}}, \\ &= \sum_{\vec{p}s} (n_{\vec{p}s}^a - n_{\vec{p}s}^b), & &= \sum_{\vec{p}s} (n_{\vec{p}s}^a + n_{\vec{p}s}^b)\epsilon_{\vec{p}}, \end{aligned}$$

e segundo (2.31), o estado térmico do sistema  $\mathcal{OB}_\infty$  neste estado de equilíbrio é dado por

$$|0, \beta\mu\rangle = \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}} e^{-\beta(E\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\} - \mu Q\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\})/2} |\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}, \{\tilde{n}_{\vec{p}s}^a, \tilde{n}_{\vec{p}s}^b\}\rangle, \quad (4.38)$$

onde a função de partição é calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\Xi_{\beta\mu} &= \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}} e^{-\beta(E\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\} - \mu Q\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\})}, \\
&= \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p}s} [(n_{\vec{p}s}^a + n_{\vec{p}s}^b) \epsilon_{\vec{p}} - \mu (n_{\vec{p}s}^a - n_{\vec{p}s}^b)]}, \\
&= \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a\}} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^b\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p}s} [(\epsilon_{\vec{p}} - \mu) n_{\vec{p}s}^a + (\epsilon_{\vec{p}} + \mu) n_{\vec{p}s}^b]}, \\
&= \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p}s} (\epsilon_{\vec{p}} - \mu) n_{\vec{p}s}^a} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^b\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p}s} (\epsilon_{\vec{p}} + \mu) n_{\vec{p}s}^b}, \\
&= \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a\}} \prod_{\vec{p}s} e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu) n_{\vec{p}s}^a} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^b\}} \prod_{\vec{p}s} e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} + \mu) n_{\vec{p}s}^b}
\end{aligned}$$

Redistribuído os termos das somas  $\sum_{\{n_{\vec{p}s}^a\}} \prod_{\vec{p}s}$  e  $\sum_{\{n_{\vec{p}s}^b\}} \prod_{\vec{p}s}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\Xi_{\beta\mu} &= \prod_{\vec{p}s} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a=0,1\}} e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu) n_{\vec{p}s}^a} \prod_{\vec{p}s} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^b=0,1\}} e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} + \mu) n_{\vec{p}s}^b}, \\
&= \prod_{\vec{p}s} (1 + e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)}) \prod_{\vec{p}s} (1 + e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} + \mu)}), \\
&= \prod_{\vec{p}} (1 + e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)})^2 (1 + e^{-\beta (\epsilon_{\vec{p}} + \mu)})^2. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Considerando que a base do espaço de Hilbert total do sistema duplicado é dada por (4.37) e seguindo passos semelhantes aos realizados no cálculo da

função de partição, temos

$$\begin{aligned}
|0, \beta\mu\rangle &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}} e^{-\beta(E\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\} - \mu Q\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\})/2} |\{n_{\vec{p}s}^a, n_{\vec{p}s}^b\}, \{\tilde{n}_{\vec{p}s}^a, \tilde{n}_{\vec{p}s}^b\}\rangle \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a\}} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^b\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p}s} [(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)n_{\vec{p}s}^a + (\epsilon_{\vec{p}} + \mu)n_{\vec{p}s}^b]/2} \\
&\times \prod_{\vec{p}s} \left( \frac{ia_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} \right) n_{\vec{p}s}^a \left( \frac{ib_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} \right) n_{\vec{p}s}^b |0\rangle, \tag{4.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^b\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p}s} (\epsilon_{\vec{p}} + \mu)n_{\vec{p}s}^b/2} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p}s} (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)n_{\vec{p}s}^a/2} \\
&\times \prod_{\vec{p}s} \left( \frac{ia_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} \right) n_{\vec{p}s}^a \left( \frac{ib_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} \right) n_{\vec{p}s}^b |0\rangle, \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Como os operadores fermiônicos estão distribuídos aos pares, eles comutam entre si. Isso significa que podemos rearranjá-los a vontade, portanto temos

$$\begin{aligned}
|0, \beta\mu\rangle &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^b\}} \prod_{\vec{p}s} e^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}} + \mu)n_{\vec{p}s}^b/2} \left( \frac{ib_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} \right) n_{\vec{p}s}^b \\
&\times \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a\}} \prod_{\vec{p}s} e^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)n_{\vec{p}s}^a/2} \left( \frac{ia_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} \right) n_{\vec{p}s}^a |0\rangle,
\end{aligned}$$

e novamente, redistribuindo os termos das somas  $\sum_{\{n_{\vec{p}s}^a\}} \prod_{\vec{p}s}$  e  $\sum_{\{n_{\vec{p}s}^b\}} \prod_{\vec{p}s}$ ,

teremos

$$\begin{aligned}
|0, \beta\mu\rangle &= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \prod_{\vec{p}s} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^b=0,1\}} (ie^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}+\mu})/2} \frac{b_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger}{V})^{n_{\vec{p}s}^b} \\
&\times \prod_{\vec{p}s} \sum_{\{n_{\vec{p}s}^a=0,1\}} (ie^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}-\mu})/2} \frac{a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V})^{n_{\vec{p}s}^a} |0\rangle, \\
&= \Xi_{\beta\mu}^{-1/2} \prod_{\vec{p}s} (1 + ie^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}+\mu})/2} \frac{b_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger}{V}) \\
&\times \prod_{\vec{p}s} (1 + ie^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}-\mu})/2} \frac{a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V}) |0\rangle. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

A seguir analisaremos a transformação de Bogoliubov.

## 4.4 A transformação de Bogoliubov para o sistema $\mathcal{OF}_\infty$ .

Considere as seguintes definições

$$u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm}) \equiv \cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm}) = \frac{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}\mp\mu})/2}}{(e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}\mp\mu})} + 1)^{-1/2}}, \tag{4.43}$$

$$v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm}) \equiv \sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm}) = \frac{1}{(e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}\mp\mu})} + 1)^{-1/2}}, \tag{4.44}$$

$$\tan(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm}) = e^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}\mp\mu})/2}, \tag{4.45}$$

que são consistentes já que,

$$\begin{aligned}
u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm})^2 + v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm})^2 &= \cos^2(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm}) + \sin^2(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm}), \\
&= \frac{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}\mp\mu})}}{1 + e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}\mp\mu})}} + \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}\mp\mu})}} = 1. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Note que

$$v^2(\theta_{\beta\mu}^+)^2 = n_F(\epsilon_{\vec{p}}), \quad v(\theta_{\beta\mu}^-)^2 = \bar{n}_F(\epsilon_{\vec{p}}). \quad (4.47)$$

Em termos dessa notação, a função de partição  $\Xi_{\beta\mu}$  em (4.39) fica

$$\Xi_{\beta\mu} = \prod_{\vec{p}s} \cos^{-2}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \cos^{-2}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}),$$

com isso o resultado (4.42) é escrito como

$$\begin{aligned} |0, \beta\mu\rangle &= \prod_{\vec{p}s} \cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \prod_{\vec{p}s} (1 + i \tan(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \frac{b_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger}{V}) \\ &\times \prod_{\vec{p}s} (1 + i \tan(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \frac{a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V}) |0\rangle, \\ &= \prod_{\vec{p}s} (\cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \frac{b_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger}{V}) \\ &\times \prod_{\vec{p}s} (\cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \frac{a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V}) |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Com a notação introduzida nas definições (4.43) e (4.45), o estado térmico  $|0, \beta\mu\rangle$  é função do parâmetro  $\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} = (\theta_{\beta\mu}^+, \theta_{\beta\mu}^-)$ , por isso, o estado térmico será denotado por  $|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle$ . À semelhança dos cálculos realizados em para o sistema  $\mathcal{OF}_\epsilon$ , nos passos seguintes, manipularemos apenas o termo

$$\prod_{\vec{p}s} (\cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \frac{a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V}) |0\rangle,$$

por isso, denotaremos o outro termo abreviadamente por

$$(\cdots \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) = \prod_{\vec{p}s} (\cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \frac{b_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger}{V}).$$

Com isso, a expressão (4.48) fica escrita da seguinte maneira

$$|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle = (\cdots \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) \prod_{\vec{p}s} (\cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \frac{a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V}) |0\rangle. \quad (4.49)$$

Substituindo as expansões em série de Taylor das funções  $\cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})$  e  $\sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})$ ,

dadas por

$$\cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

em (4.49), obtemos

$$|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle = (\cdots \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) \prod_{\vec{p}s} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})^{2n}}{(2n)!} |0\rangle - i^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} |0\rangle \right\},$$

e considerando as seguintes relações

$$\begin{aligned} \left( \frac{\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} \right)^{2n} |0\rangle &= |0\rangle, \\ \left( \frac{\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} \right)^{2n+1} |0\rangle &= \frac{a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} |0\rangle, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= (\cdots \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) \prod_{\vec{p}s} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta_{\beta\mu}^{+\vec{p}})^{2n}}{(2n)!} \left( \frac{\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} \right)^{2n} \right. \\
&+ \left. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta_{\beta\mu}^{+\vec{p}})^{2n+1}}{(2n+1)!} \left( \frac{\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger}{V} \right)^{2n+1} \right\} |0\rangle, \\
&= (\cdots \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) \prod_{\vec{p}s} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{i\theta_{\beta\mu}^{+\vec{p}}}{V} (\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger) \right)^{2n}}{(2n)!} \right. \\
&+ \left. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{i\theta_{\beta\mu}^{+\vec{p}}}{V} (\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger) \right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\} |0\rangle, \\
&= (\cdots \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) \prod_{\vec{p}s} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{i\theta_{\beta\mu}^{+\vec{p}}}{V} (\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger) \right)^n}{n!} \right\} |0\rangle \\
&= (\cdots \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) \prod_{\vec{p}s} \left\{ \exp\left( \frac{i\theta_{\beta\mu}^{+\vec{p}}}{V} (\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger) \right) \right\} |0\rangle,
\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que os termos  $(\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger)$  e  $(\tilde{b}_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s} + b_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger)$  comutam, como comentado antes.

$$\begin{aligned}
|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= \exp\left( \sum_{\vec{p}s} \frac{i\theta_{\beta\mu}^{+\vec{p}}}{V} (\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger) \right) \prod_{\vec{p}s} (\cdots \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) |0\rangle, \\
&= \exp\left( i \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \theta_{\beta\mu}^{+\vec{p}} (\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger) \right) \\
&\times \prod_{\vec{p}s} (\cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) b^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) |0\rangle,
\end{aligned}$$

Com o mesmo procedimento, trocando apenas  $a \rightarrow b$  e  $+ \rightarrow -$ , podemos obter o resultado correspondente para o termo

$$\prod_{\vec{p}s} (\cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) + i \sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) b^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) |0\rangle$$

de maneira que

$$\begin{aligned}
|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= e^{i \sum_s \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+} (\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger)} e^{i \sum_s \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^-} (\tilde{b}_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s} + b_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger)} |0\rangle\rangle, \\
&= e^{i \sum_s \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} [\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+} (\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger) + \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^-} (\tilde{b}_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s} + b_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger)]} |0\rangle\rangle,
\end{aligned}$$

Sejam  $\mathcal{G}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]$ ,  $\mathcal{G}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+]$  e  $\mathcal{G}_F^-[\theta_{\beta\mu}^-]$  operadores definidos por

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_F[\theta_{\beta\mu}^+] &= i \sum_s \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+} (\tilde{a}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + a_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger) \\
\mathcal{G}_F[\theta_{\beta\mu}^-] &= i \sum_s \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^-} (\tilde{b}_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s} + b_{\vec{p}s}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger) \\
\mathcal{G}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}] &= \mathcal{G}_F[\theta_{\beta\mu}^+] + \mathcal{G}_F[\theta_{\beta\mu}^-]
\end{aligned}$$

vemos que estes operadores são hermitianos. Vale lembrar que, diferentemente dos operadores bosônicos, a ordem na qual os operadores fermiônicos estão escritos é relevante, já que anti-comutam entre si. Em termos de  $\mathcal{G}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]$  o estado térmico (4.24) é dado por

$$\begin{aligned}
|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}] |0\rangle\rangle, \\
&= \mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+] \mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^-] |0\rangle\rangle, \\
&= e^{i\mathcal{G}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+]} e^{i\mathcal{G}_F^-[\theta_{\beta\mu}^-]} |0\rangle\rangle,
\end{aligned}$$

onde os operadores unitários  $\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]$ ,  $\mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+]$  e  $\mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^-]$  são definidos por

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}] &= e^{i\mathcal{G}_F(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})}, \\
\mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+] &= e^{i\mathcal{G}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+]} \quad , \quad \mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^-] = e^{i\mathcal{G}_F^-[\theta_{\beta\mu}^-]}.
\end{aligned}$$

Na seção seguinte veremos, à semelhança dos outros sistemas estudados, que a transformação unitária  $\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]$ , por meio da qual o estado térmico  $|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle$  se relaciona com o vácuo da teoria duplicada  $|0\rangle$ , é uma transformação de Bogoliubov que mistura os graus de liberdade ordinários e til e que participa em todos os processos de termalização que são a base do formalismo da DCT para campos fermiônicos.

#### 4.4.1 A termalização dos operadores do sistema $\mathcal{OF}_\infty \cup \widetilde{\mathcal{OF}}_\infty$ .

A partir do operador  $\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]$ , vamos definir a termalização do operadores  $\{a_{\vec{p}s}, a_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{a}_{\vec{p}s}, \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, b_{\vec{p}s}, b_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{b}_{\vec{p}s}, \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger\}$  da seguinte forma

$$\begin{aligned}
a_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) &= \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]a_{\vec{p}s}\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger, & b_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) &= \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]b_{\vec{p}s}\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger, \\
&= \mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+ ]a_{\vec{p}s}\mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+ ]^\dagger, & &= \mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^- ]b_{\vec{p}s}\mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^- ]^\dagger, \\
-i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) &= \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}](-i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger)\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger, & -i\tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) &= \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}](-i\tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger)\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger, \\
&= \mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+ ](-i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger)\mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+ ]^\dagger, & &= \mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^- ](-i\tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger)\mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^- ]^\dagger, \\
a_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) &= \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]a_{\vec{p}s}^\dagger\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger, & b_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) &= \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]b_{\vec{p}s}^\dagger\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger, \\
&= \mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+ ]a_{\vec{p}s}^\dagger\mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+ ]^\dagger, & &= \mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^- ]b_{\vec{p}s}^\dagger\mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^- ]^\dagger, \\
-i\tilde{a}_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) &= \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}](-i\tilde{a}_{\vec{p}s})\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger, & -i\tilde{b}_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) &= \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}](-i\tilde{b}_{\vec{p}s})\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger, \\
&= \mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+ ](-i\tilde{a}_{\vec{p}s})\mathcal{U}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+ ]^\dagger, & &= \mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^- ](-i\tilde{b}_{\vec{p}s})\mathcal{U}_F^-[\theta_{\beta\mu}^- ]^\dagger,
\end{aligned}$$

de maneira que estes operadores satisfazem

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})|\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= 0, & b_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= 0, \\ -i\tilde{a}_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= 0, & -i\tilde{b}_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= 0. \end{aligned}$$

O estado térmico  $|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle$  é um estado de vácuo para os operadores termalizados  $\{a_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}), \tilde{a}_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}), b_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}), \tilde{b}_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})\}$ , chamado de vácuo térmico. Considerando a definição do operador termalizado  $a_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})$ , temos

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) &= \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]a_{\vec{p}s}\mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger & (4.50) \\ &= e^{i\mathcal{G}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+]}a_{\vec{p}s}e^{-i\mathcal{G}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+]} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a_{\vec{p}s}, -i\mathcal{G}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+]]^{(2n)}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a_{\vec{p}s}, -i\mathcal{G}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+]]^{(2n+1)}}{(2n+1)!}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Pode-se mostrar que os comutadores acima resultam em

$$[a_{\vec{p}s}, -i\mathcal{G}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+]]^{(2n)} = (-i\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})^{2n}a_{\vec{p}s}, \quad [a_{\vec{p}s}, -i\mathcal{G}_F^+[\theta_{\beta\mu}^+]]^{(2n+1)} = (-i\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})^{2n+1}\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger,$$

os quais substituídos em (4.51), dão

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})^{2n}}{(2n)!}a_{\vec{p}s} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})^{2n+1}}{(2n+1)!}\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})^{2n}}{(2n)!}\right)a_{\vec{p}s} - i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger \\ &= \cos(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})a_{\vec{p}s} - \sin(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger \\ &= u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})a_{\vec{p}s} - v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger. \end{aligned} \tag{4.52}$$

É imediato que para o operador  $b_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})$ , teremos

$$b_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) = u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})b_{\vec{p}s} + v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})(-i\tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger). \quad (4.53)$$

As demais transformações podem ser obtidas, a partir de (4.52) e (4.53), pela aplicação da conjugação hermitiana e das regras de conjugação til, resultando em

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) &= u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})a_{\vec{p}s} - v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, & b_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) &= u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})b_{\vec{p}s} + v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})(-i\tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger), \\ i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) &= v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})a_{\vec{p}s} + u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, & -i\tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) &= -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})b_{\vec{p}s} + u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})(-ib_{\vec{p}s}^\dagger), \\ a_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) &= u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})a_{\vec{p}s}^\dagger - v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})(-i\tilde{a}_{\vec{p}s}), & b_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) &= u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})b_{\vec{p}s}^\dagger + v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})i\tilde{b}_{\vec{p}s}, \\ -i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) &= v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})a_{\vec{p}s}^\dagger + u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})(-i\tilde{a}_{\vec{p}s}), & i\tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) &= -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})b_{\vec{p}s}^\dagger + u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})i\tilde{b}_{\vec{p}s}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

#### 4.4.2 Notação matricial para o sistema $\mathcal{OF}_\infty \cup \widetilde{\mathcal{OF}}_\infty$ .

Podemos escrever as transformações (4.54) na forma matricial

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \\ i\widetilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) & -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \\ v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) & u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{p}s} \\ i\widetilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \\ -i\widetilde{a}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) & -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \\ v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) & u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{p}s}^\dagger \\ -i\widetilde{a}_{\vec{p}s} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \\ -i\widetilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) & v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \\ -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) & u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\vec{p}s} \\ -i\widetilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b_{\vec{p}s}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \\ i\widetilde{b}_{\vec{p}s}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) & v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \\ -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) & u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\vec{p}s}^\dagger \\ i\widetilde{b}_{\vec{p}s} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde as componentes são definidas por

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}s1} &= a_{\vec{p}s}, & a_{\vec{p}s2} &= i\widetilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, & b_{\vec{p}s1} &= b_{\vec{p}s}, & b_{\vec{p}s2} &= -i\widetilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger \\ a_{\vec{p}s1}^\dagger &= a_{\vec{p}s}^\dagger, & a_{\vec{p}s2}^\dagger &= -i\widetilde{a}_{\vec{p}s}, & b_{\vec{p}s1}^\dagger &= b_{\vec{p}s}^\dagger, & b_{\vec{p}s2}^\dagger &= i\widetilde{b}_{\vec{p}s}, \\ U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{11} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{22} = u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}), & U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})_{11} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})_{22} = u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}), \\ U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{12} &= -U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{21} = -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}), & U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})_{12} &= -U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})_{21} = v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}), \end{aligned} \tag{4.55}$$

Em termos dessa notação, podemos reescrever as transformações (4.54) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} a(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{\vec{p}sA} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{AB} a_{\vec{p}sB}, & b(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})_{\vec{p}sA} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})_{AB} b_{\vec{p}sB}, \\ a^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{\vec{p}sA} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{AB} a_{\vec{p}sB}^\dagger, & b^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})_{\vec{p}sA} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-})_{AB} b_{\vec{p}sB}^\dagger, \end{aligned}$$

$$(4.56)$$

sendo que a álgebra dos operadores fermiônicos  $\{a_{\vec{p}s}, \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{a}_{\vec{p}s}, a_{\vec{p}s}^\dagger, b_{\vec{p}s}, \tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger, \tilde{b}_{\vec{p}s}, a_{\vec{p}s}^\dagger\}$  é dada por

$$\{a_{\vec{p}sA}, a_{\vec{q}rB}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{sr} \delta_{AB}, \quad \{b_{\vec{p}sA}, b_{\vec{q}rB}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{sr} \delta_{AB},$$

$$(4.57)$$

e as demais relações de anti-comutação são nulas. Considerando a relação (4.46) e as definições da matriz de Bogoliubov fermiônica  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm})$ , dadas por

$$U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) & -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \\ v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) & u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}) \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

$$U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) & v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \\ -v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) & u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Vemos que as matrizes  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm})$  satisfazem as mesmas propriedades que  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^\pm)$  e, portanto, temos que transformação de Bogoliubov para o sistema

$\mathcal{O}\mathcal{F}_\infty$  também é canônica, à semelhança do sistema  $\mathcal{O}\mathcal{F}_\epsilon$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
\{a_{\vec{p}sA}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+}), a_{\vec{q}rB}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}+})\} &= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{AC}U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}+})_{BD}\{a_{\vec{p}sC}, a_{\vec{q}rD}^\dagger\} \\
&= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{AC}U^T(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}+})_{BD}(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})\delta_{sr}\delta_{CD} \\
&= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{AC}\delta_{CD}U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}+})_{DB}(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})\delta_{sr} \\
&= U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{AC}U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}+})_{CB}(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})\delta_{sr} \\
&= (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})\delta_{sr}\delta_{AB},
\end{aligned}$$

sendo que as demais relações de anti-comutação são nulas. Para a álgebra dos operadores  $b_{\vec{p}sA}$  e  $b_{\vec{q}rB}^\dagger$  temos, analogamente,

$$\{b_{\vec{p}sA}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}), b_{\vec{q}rB}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{\vec{q}-})\} = (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})\delta_{sr}\delta_{AB},$$

com as demais relações nulas.

### Exemplo

Agora vamos aplicar este formalismo no cálculo da energia e da carga médias do sistema  $\mathcal{O}\mathcal{F}_\infty$  em equilíbrio térmico à temperatura  $T = 1/\beta$  e com um potencial químico  $\mu$ . Qualquer observável do sistema  $\mathcal{O}\mathcal{F}_\infty$  pode ser descrito em termos dos operadores números de ocupação.  $\mathbf{n}_a^{\vec{p}s} = a_{\vec{p}s}^\dagger a_{\vec{p}s}$  e  $\mathbf{n}_b^{\vec{p}s} = b_{\vec{p}s}^\dagger b_{\vec{p}s}$ , Portanto, antes de calcular a energia e a carga médias, vamos calcular os números de ocupação médios do nível  $\vec{p}s$  pelas partículas  $a$  e  $b$ ,

denotados respectivamente por  $\langle \mathbf{n}_{\vec{p}s}^a \rangle_{\beta\mu}$  e  $\langle \mathbf{n}_{\vec{p}s}^b \rangle_{\beta\mu}$ . O número de ocupação médio  $\langle \mathbf{n}_{\vec{p}s}^a \rangle_{\beta\mu}$  é dado por

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{n}_{\vec{p}s}^a \rangle_{\beta\mu} &= \langle 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} | a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} | 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} \rangle = \langle \langle 0 | \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \mathcal{U}_F[\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}] | 0 \rangle \rangle \\
&= \langle \langle 0 | \mathcal{U}_F[-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}] a_{\vec{p}}^\dagger \mathcal{U}_F[-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger \mathcal{U}_F[-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}] a_{\vec{p}} \mathcal{U}_F[-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]^\dagger | 0 \rangle \rangle \\
&= \langle \langle 0 | (U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{1A} a_{\vec{p}A}^\dagger) U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{1B} a_{\vec{p}B} | 0 \rangle \rangle \\
&= U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{1A} U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{1B} (\langle \langle 0 | a_{\vec{p}A}^\dagger a_{\vec{p}B} | 0 \rangle \rangle) \\
&= U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{1A} (\delta_{A2} \delta_{B2} V) U^T(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{B1} = V U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{12} U^T(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})_{21} \\
&= (-v^2(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}+})) V = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1} V, \\
&= n_B(\epsilon_{\vec{p}}) V, \tag{4.60}
\end{aligned}$$

analogamente teremos

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{n}_{\vec{p}s}^b \rangle_{\beta\mu} &= v^2(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}-}) V = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} + \mu)} - 1} V, \\
&= \bar{n}_B(\epsilon_{\vec{p}}) V. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Nesse caso a média da energia é dada por

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle_{\beta\mu} &= \langle 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} | \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \epsilon_{\vec{p}} (\mathbf{n}_{\vec{p}s}^a + \mathbf{n}_{\vec{p}s}^b) | 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} \rangle, \\
&= \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \{ \epsilon_{\vec{p}} \langle 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} | \mathbf{n}_{\vec{p}s}^a | 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} \rangle + \langle 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} | \mathbf{n}_{\vec{p}s}^b | 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} \rangle \}, \\
&= \sum_{s=1,2} V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \epsilon_{\vec{p}} \{ n_B(\epsilon_{\vec{p}}) + \bar{n}_B(\epsilon_{\vec{p}}) \}, \\
&= 2V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \epsilon_{\vec{p}} \{ n_B(\epsilon_{\vec{p}}) + \bar{n}_B(\epsilon_{\vec{p}}) \},
\end{aligned}$$

e a carga média é dada por

$$\begin{aligned}
\langle Q \rangle_{\beta\mu} &= \langle 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} | \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (\mathbf{n}_{\vec{p}s}^a - \mathbf{n}_{\vec{p}s}^b) | 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} \rangle, \\
&= \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \{ \langle 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} | \mathbf{n}_{\vec{p}s}^a | 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} \rangle - \langle 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} | \mathbf{n}_{\vec{p}s}^b | 0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} \rangle \}, \\
&= \sum_{s=1,2} V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \{ n_B(\epsilon_{\vec{p}}) - \bar{n}_B(\epsilon_{\vec{p}}) \}, \\
&= 2V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \{ n_B(\epsilon_{\vec{p}}) - \bar{n}_B(\epsilon_{\vec{p}}) \},
\end{aligned}$$

que são resultados conhecidos [35]. Para obter (4.60) e (4.61), utilizamos as seguintes relações

$$\langle \langle 0 | \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger = 0, \quad \tilde{a}_{\vec{p}s} | 0 \rangle \rangle = 0, \quad [\tilde{a}_{\vec{p}s}, \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger] = V.$$

## 4.5 Propagador térmico do campo de Dirac na DCT.

O hamiltoniano do campo de Dirac é descrito pelo hamiltoniano

$$H[\psi, \bar{\psi}] = \int d^3\vec{x} [\bar{\psi}(\vec{x}) (-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} + M) \psi(\vec{x})], \quad (4.62)$$

onde os operadores de campo satisfazem

$$\begin{aligned}
\{ \psi(\vec{x})^a, \bar{\psi}(\vec{y})^b \} &= \gamma_b^{0a} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\
\{ \psi^a(\vec{x}), \psi^b(\vec{y}) \} &= \{ \bar{\psi}(\vec{x})^a, \bar{\psi}(\vec{y})^b \} = 0.
\end{aligned} \quad (4.63)$$

sendo  $\gamma^0$  a componente temporal da matriz de Dirac  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ . A dependência temporal dos campos  $\psi(\vec{x})^a$  e  $\bar{\psi}(\vec{y})_a$  é dada na representação de Heisenberg por

$$\begin{aligned}\psi(x)^a &= \psi(x^0, \vec{x}) = e^{iH[\psi, \bar{\psi}]x^0} \psi(\vec{x})^a e^{-iH[\psi, \bar{\psi}]x^0}, \\ \bar{\psi}(x)_b &= \bar{\psi}(x^0, \vec{y}) = e^{iH[\psi, \bar{\psi}]x^0} \bar{\psi}(\vec{x})_b e^{-iH[\psi, \bar{\psi}]x^0},\end{aligned}$$

ou, equivalentemente, pelas de equações de movimento de Heisenberg

$$\begin{aligned}i\partial_0\psi(x) &= [\psi(x), H[\psi, \bar{\psi}]], & i\partial_0\bar{\psi}(x) &= [\bar{\psi}(x), H[\psi, \bar{\psi}]], \\ &= \gamma^0(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} + M)\psi(x), & &= -\bar{\psi}(x)(i\vec{\gamma} \cdot \overleftarrow{\partial} - M)\gamma^0, \\ \Rightarrow (i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x) &= 0, & \Rightarrow \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + M) &= 0,\end{aligned}\tag{4.64}$$

que são as equações de Dirac para os campos  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$ .

A solução das equações (4.64) é dada por [33]

$$\psi(x)^a = \sum_{s=1,2} \int d\omega_{\vec{p}} \left[ a_{\vec{p}s} u(\vec{p}s)^a e^{-ipx} + b_{\vec{p}s}^\dagger v(\vec{p}s)^a e^{ipx} \right], \tag{4.65}$$

$$\bar{\psi}(x)_a = \sum_{s=1,2} \int d\omega_{\vec{p}} \left[ a_{s\vec{p}}^\dagger \bar{u}(\vec{p}s)_a e^{ipx} + b_{\vec{p}s} \bar{v}(\vec{p}s)_a e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right], \tag{4.66}$$

onde os operadores  $\{a_{\vec{p}s}, a_{\vec{p}s}^\dagger, b_{\vec{p}s}, b_{\vec{p}s}^\dagger\}$  têm de satisfazer a álgebra (4.34) em acordo com a álgebra dos operadores  $\psi^a$  e  $\bar{\psi}_b$  dada em (4.63). Substituindo

as soluções (4.65) e (4.66) no hamiltoniano (4.62), teremos

$$H = \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \epsilon_{\vec{p}} (a_{\vec{p}s}^\dagger a_{\vec{p}s} + b_{\vec{p}s}^\dagger b_{\vec{p}s}) + \text{const.}$$

A menos da constante na equação acima, vemos que o campo de Dirac equivale ao sistema  $\mathcal{OF}_\infty$ , que foi estudado nas seções anteriores.

A fim de construir o formalismo da DCT para o campo de Dirac, vamos acrescentar os graus de liberdade auxiliares com a utilização das regras de conjugação til aplicadas diretamente nas soluções (4.65) e (4.66), obtendo

$$\psi(x)_A^a = \sum_{s=1,2} \int d\omega_{\vec{p}} \left[ a_{\vec{p}sA} u(\vec{p}s)^a e^{-ipx} + b_{\vec{p}sA}^\dagger v(\vec{p}s)^a e^{ipx} \right], \quad (4.67)$$

$$\bar{\psi}(x)_{aA} = \sum_{s=1,2} \int d\omega_{\vec{p}} \left[ a_{\vec{p}sA}^\dagger \bar{u}(\vec{p}s)_a e^{ipx} + b_{\vec{p}sA} \bar{v}(\vec{p}s)_a e^{-ipx} \right], \quad (4.68)$$

onde as componentes são definidas por

$$\psi(x)_1^a = \psi(x)^a, \quad \bar{\psi}(x)_{a1} = \psi^\dagger(x)_b \gamma_a^{0b}, \quad (4.69)$$

$$\psi(x)_2^a = i\tilde{\psi}^{\dagger T}(x)^a, \quad \bar{\psi}(x)_{a2} = -i\tilde{\psi}^T(x)_b \gamma_a^{0b}, \quad (4.70)$$

Em termos dessas componentes, a álgebra dos operadores  $\psi(\vec{x})_A^a$  e  $\bar{\psi}(\vec{y})_{bB}$  é dada por

$$\{\psi(x)_A^a, \bar{\psi}(y)_{bB}\} = \gamma_b^{0a} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{AB},$$

$$\{\psi(x)_A^a, \psi(y)_B^b\} = \{\bar{\psi}(x)_{Aa}, \bar{\psi}(y)_{bB}\} = 0,$$

(4.71)

onde  $x^0 = y^0$ . O campos  $\psi(x)_A$  e  $\bar{\psi}(y)_A$  podem ser equivalentemente obtidos por meio da representação de Heisenberg para o sistema duplicado

$$\psi(x)_A^a = e^{i\hat{H}[\phi,\pi]x^0} \psi(0, \vec{x})_A^a e^{-i\hat{H}[\phi,\pi]x^0}, \quad (4.72)$$

$$\bar{\psi}(y)_{aA} = e^{i\hat{H}[\phi,\pi]y^0} \bar{\psi}(0, \vec{y})_{aA} e^{-i\hat{H}[\phi,\pi]y^0}, \quad (4.73)$$

que equivalem a

$$i\partial_0\psi(x)_A^a = [\psi(x)_A^a, \hat{H}], \quad i\partial_0\bar{\psi}(x)_{aA} = [\bar{\psi}(x)_{aA}, \hat{H}],$$

que são as equações de Heisenberg para o sistema duplicado, onde o gerador das translações temporais  $\hat{H}[\psi, \bar{\psi}]$  é dado por

$$\begin{aligned} \hat{H}[\psi, \bar{\psi}, \tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}] &= H[\psi, \bar{\psi}] - \tilde{H}[\tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}] \\ &= \int d^3\vec{x} [\bar{\psi}(x)(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\partial} + M)\psi(x) \\ &\quad - \tilde{\bar{\psi}}(x)(i\vec{\gamma}^*\cdot\vec{\partial} + M)\tilde{\psi}(x)]. \end{aligned}$$

Como as componentes  $\psi(x)_1^a$  e  $\bar{\psi}(x)_{a1}$  são iguais às ordinárias, é imediato que  $H[\psi, \bar{\psi}]$  é dado por

$$H[\psi, \bar{\psi}] = \int d^3\vec{x} \bar{\psi}(x)_1(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\partial} + M)\psi(x)_1,$$

Em termos das componentes  $\psi(x)_2^a$  e  $\bar{\psi}(x)_{a2}$ , definidas em (4.70), o hamiltoniano  $\tilde{H}[\tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}]$  fica

$$\begin{aligned}\tilde{H}[\tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}] &= \int d^3\vec{x} \tilde{\bar{\psi}}(x) (i\vec{\gamma}^* \cdot \vec{\partial} + M) \tilde{\psi}(x), \\ &= \int d^3\vec{x} \tilde{\bar{\psi}}^\dagger(x) \gamma^{0*} (i\vec{\gamma}^* \cdot \vec{\partial} + M) \tilde{\psi}(x),\end{aligned}\quad (4.74)$$

$$\begin{aligned}&= - \int d^3\vec{x} \tilde{\bar{\psi}}^T(x) (i\vec{\gamma}^{*T} \cdot \overleftarrow{\partial} + M) \gamma^{0*T} \tilde{\psi}^{\dagger T}(x), \\ &= - \int d^3\vec{x} \tilde{\bar{\psi}}^T(x) (i\vec{\gamma}^\dagger \cdot \overleftarrow{\partial} + M) \gamma^{0\dagger} \tilde{\psi}^{\dagger T}(x),\end{aligned}\quad (4.75)$$

considerando as seguintes propriedades das matrizes  $\{\gamma^\mu\}$

$$\begin{aligned}\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu &\Rightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \\ \gamma^0 \vec{\gamma}^\dagger \gamma^0 = \vec{\gamma}, \end{cases} \\ (\gamma^0)^2 &= 1,\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\tilde{H}[\tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}] &= - \int d^3\vec{x} \tilde{\bar{\psi}}^T(x) (i\vec{\gamma}^\dagger \cdot \overleftarrow{\partial} + M) \gamma^0 \tilde{\psi}^{\dagger T}(x), \\ &= - \int d^3\vec{x} (-i\tilde{\bar{\psi}}^T(x) \gamma^0) (i\gamma^0 \vec{\gamma}^\dagger \gamma^0 \cdot \overleftarrow{\partial} + M) (i\tilde{\psi}^{\dagger T}(x)), \\ &= - \int d^3\vec{x} \bar{\psi}(x)_2 (i\vec{\gamma} \cdot \overleftarrow{\partial} + M) \psi(x)_2.\end{aligned}\quad (4.76)$$

Podemos reescrever o termo cinético da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\int d^3 \vec{x} \bar{\psi}(x)_2 i \vec{\gamma} \cdot \overleftarrow{\partial} \psi(x)_2 &= \int d^3 \vec{x} i \vec{\partial}(\bar{\psi}(x)_2) \cdot \vec{\gamma} \psi(x)_2 \\
&= \int d^3 \vec{x} \bar{\psi}(x)_2 (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial}) \psi(x)_2 \\
&\quad + i \int d^3 \vec{x} \vec{\partial} \cdot (\bar{\psi}(x)_2 \vec{\gamma} \psi(x)_2), \\
&= \int d^3 \vec{x} \bar{\psi}(x)_2 (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial}) \psi(x)_2 \\
&\quad + i \int_{\partial} d\vec{S} \cdot (\bar{\psi}(x)_2 \vec{\gamma} \psi(x)_2), \\
&= \int d^3 \vec{x} \bar{\psi}(x)_2 (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial}) \psi(x)_2.
\end{aligned}$$

onde a integral de superfície se anula devido à conservação da carga. Substituindo este último resultado em (4.76), obtemos

$$\tilde{H}[\tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}] = - \int d^3 \vec{x} \bar{\psi}(x)_2 (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} + M) \psi(x)_2. \quad (4.77)$$

e, portanto, o hamiltoniano  $\hat{H}$  fica

$$\hat{H}[\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_2, \bar{\psi}_2] = \int d^3 \vec{x} \sum_A \delta_{AA} \bar{\psi}(x)_A (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} + M) \psi(x)_A. \quad (4.78)$$

Uma boa razão para se definir as componentes  $\psi(x)_2^a$  e  $\bar{\psi}(x)_{a2}$ , segundo (4.70), é que o efeito das regras de conjugação til sobre as matrizes de Dirac  $\{\gamma^\mu\}$  é anulado pelas suas propriedades, independente de qual representação, de Weyl ou de Dirac [32, 33], estejamos utilizando. Repare também que, com as definições dadas nas Eqs.(4.69) e (4.70), a base de espinores

$\{u(\vec{p}s)^a, v(\vec{p}s)^a, \bar{u}(\vec{p}s)_a, \bar{v}(\vec{p}s)_a\}$  nas Eqs.(4.67) e (4.68), que expandem os campos  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ , são os mesmos para as componentes  $A = 1$  e  $A = 2$ . Isso simplifica o cálculo de propagador fermiônico livre, como veremos adiante. E, por fim, a delta  $\delta_{AA}$  de (4.78), em contraste com  $\tau_{AA}$  em (3.109), aparece devido à natureza de Grassmann dos campos  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ , quando realizamos a transposição de (4.74) para (4.75).

O hamiltoniano  $H$  ainda está associado à energia do campo de Dirac, mas só gera a dinâmica do sistema ordinário, enquanto que a dinâmica do sistema duplicado é gerada pelo operador  $\hat{H}$ .

#### 4.5.1 Propagador térmico do campo de Dirac na DCT.

O propagador fermiônico duplicado a  $T = 0$  é definido por

$$S(x-y)_{bAB}^a = \langle\langle 0|T\{\psi(x)_A^a \bar{\psi}(y)_{bB}\}|0\rangle\rangle. \quad (4.79)$$

A fim de calculá-lo, é conveniente distinguirmos as partes dos operadores de campo (4.72) e (4.73) segundo a maneira como elas atuam no vácuo  $|0\rangle$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \psi(x)_A^a &= \psi^+(x)_A^a + \psi^-(x)_A^a, \\ \bar{\psi}(x)_{aA} &= \bar{\psi}^+(x)_{aA} + \bar{\psi}^-(x)_{aA} \end{aligned}$$

as quais são dadas por

$$\begin{aligned}
\psi^+(x)_1^a &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p u(\vec{p}s)^a e^{-ip \cdot x} a_{\vec{p}s}, & \psi^-(x)_1^a &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p v(\vec{p}s)^a e^{ip \cdot x} b_{\vec{p}s}^\dagger, \\
\psi^+(x)_2^a &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p u(\vec{p}s)^a e^{-ip \cdot x} i\tilde{b}_{\vec{p}s}, & \psi^-(x)_2^a &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p v(\vec{p}s)^a e^{ip \cdot x} i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger, \\
\bar{\psi}^+(x)_{a1} &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p \bar{v}(\vec{p}s)_a e^{-ip \cdot x} b_{\vec{p}s}, & \bar{\psi}^-(x)_{a1} &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p \bar{u}(\vec{p}s)_a e^{ip \cdot x} a_{s\vec{p}}^\dagger, \\
\bar{\psi}^+(x)_{a2} &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p \bar{u}(\vec{p}s)_a e^{ip \cdot x} (-i\tilde{a}_{s\vec{p}A}), \\
\bar{\psi}^-(x)_{a2} &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p \bar{v}(\vec{p}s)_a e^{ip \cdot x} (-i\tilde{b}_{\vec{p}sA}^\dagger),
\end{aligned} \tag{4.80}$$

satisfazendo, portanto

$$\begin{aligned}
\psi^+(x)_A^a |0\rangle\rangle &= 0 \leftarrow a_{\vec{p}s} |0\rangle\rangle = 0, & i\tilde{b}_{\vec{p}s} |0\rangle\rangle &= 0, \\
\bar{\psi}^+(x)_{aA} |0\rangle\rangle &= 0 \leftarrow b_{\vec{p}s} |0\rangle\rangle = 0, & -i\tilde{a}_{s\vec{p}A} |0\rangle\rangle &= 0, \\
\langle\langle 0 | \psi^-(x)_A^a &= 0 \leftarrow \langle\langle 0 | b_{\vec{p}s}^\dagger = 0, & \langle\langle 0 | i\tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger &= 0, \\
\langle\langle 0 | \bar{\psi}^-(x)_{aA} &= 0 \leftarrow \langle\langle 0 | a_{s\vec{p}}^\dagger = 0, & \langle\langle 0 | (-i\tilde{b}_{\vec{p}sA}^\dagger) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Em termos destas componentes, o propagador (4.79) fica

$$\begin{aligned}
S(x-y)_{bAB}^a &= \langle\langle 0|T\{\psi(x)_A^a\bar{\psi}(y)_{bB}\}|0\rangle\rangle, \\
&= \langle\langle 0|T[(\psi^+(x)_A^a + \psi^-(x)_A^a)(\bar{\psi}^+(y)_{bB} + \bar{\psi}^-(y)_{bB})]|0\rangle\rangle, \\
&= \langle\langle 0|T\{\psi^+(x)_A^a\bar{\psi}^-(y)_{bB}\}|0\rangle\rangle \\
&+ \langle\langle 0|T\{\psi^-(x)_A^a\bar{\psi}^+(y)_{bB}\}|0\rangle\rangle, \\
&= \bar{\theta}(x^0 - y^0)\langle\langle 0|\psi^+(x)_A^a\bar{\psi}^-(y)_{bB}|0\rangle\rangle \\
&- \bar{\theta}(y^0 - x^0)\langle\langle 0|\bar{\psi}^+(y)_{bB}\psi^-(x)_A^a|0\rangle\rangle. \tag{4.82}
\end{aligned}$$

Utilizando (4.80) e a álgebra dos operadores  $\{a_{\vec{p}sA}, a_{\vec{p}sA}^\dagger, b_{\vec{p}sA}, b_{\vec{p}sA}^\dagger\}$ , podemos verificar

$$\langle\langle 0|\psi^+(x)_A^a\bar{\psi}^-(y)_{bB}|0\rangle\rangle = \delta_{\mathbf{AB}} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{(\not{y} + \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{AB}}M)_b^a}{2E_{\vec{p}}} e^{-\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{AB}}ip(x-y)}, \tag{4.83}$$

$$\langle\langle 0|\bar{\psi}^+(y)_{bB}\psi^-(x)_A^a|0\rangle\rangle = \delta_{\mathbf{AB}} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{(\not{y} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{AB}}M)_b^a}{2E_{\vec{p}}} e^{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{AB}}ip(x-y)}. \tag{4.84}$$

Escolhendo  $\sigma_1 = -\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{AA}}$  e  $\sigma_2 = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{AA}}$  para as representações de Fourier das funções degrau (3.115) e (3.116), e considerando os resultados (4.83) e (4.84), os dois termos da última igualdade em (4.82), ficam

$$\begin{aligned}
\theta(x^0 - y^0) \langle \langle 0 | \psi^+(x)_A^a \bar{\psi}^-(y)_{bB} | 0 \rangle \rangle &\equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^+(p)_{bAB}^a e^{-ip(x-y)}, \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i\tau_{\mathbf{AB}}(\not{p} + M)_b^a}{p_0 - \tau_{\mathbf{AB}} E_{\vec{p}} + i\delta} \frac{e^{-ip(x-y)}}{2E_{\vec{p}}}, \\
-\theta(y^0 - x^0) \langle \langle 0 | \bar{\psi}^+(y)_{bB} \psi^-(x)_A^a | 0 \rangle \rangle &\equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^-(p)_{bAB}^a e^{-ip(x-y)}, \\
&= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i\tau_{\mathbf{AB}}(\not{p} + M)_b^a}{p_0 + \tau_{\mathbf{AB}} E_{\vec{p}} - i\delta} \frac{e^{-ip(x-y)}}{2E_{\vec{p}}},
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Substituindo este resultado em (4.82), obtemos por fim

$$\begin{aligned}
S(x-y)_{bAB}^a &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (S^+(p)_{bAB}^a + S^-(p)_{bAB}^a) e^{-ip(x-y)}, \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i\delta_{\mathbf{AB}}(\not{p} + M)_b^a}{p^2 - M^2 + i\epsilon\tau_{\mathbf{AB}}} e^{-ip(x-y)}, \\
&\equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S(p)_{bAB}^a e^{-ip(x-y)},
\end{aligned} \tag{4.86}$$

onde a matriz  $S(p)_{bAB}^a$  é dada por

$$\begin{aligned}
S(p)_b^a &= S^+(p)_{bAB}^a + S^-(p)_{bAB}^a \\
&= \begin{pmatrix} \frac{i(\not{p} + M)_b^a}{p^2 - M^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{i(\not{p} + M)_b^a}{p^2 - M^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Na sequência analisaremos a termalização dos campos.

#### 4.5.2 A termalização do campo de Dirac e os operadores térmicos fermiônicos.

Analogamente ao caso dos bósons, vamos definir a ação da transformação de Bogoliubov sobre os operadores de campo  $\{\psi(x)_A^a, \bar{\psi}(x)_{aA}\}$  na representa-

ção de interação, a partir da sua ação linear sobre os operadores de criação e aniquilação, dada em (4.56). Vamos definir, primeiro, a ação das transformações de Bogoliubov fermiônicas sobre funções  $f(x)_A$  a partir dos operadores térmicos, a semelhança do que foi feito em (3.128).

Sejam  $\{U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+}), U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})\}$  operadores térmicos cuja ação é dada por

$$U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\pm})_{AB}f(x)_B = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^{\pm}})_{AB} \bar{f}(p)_B e^{-ip(x-y)}. \quad (4.87)$$

onde  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})$  e  $U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})$  são as matrizes de Bogoliubov fermiônicas definidas em (4.58) e (4.59).

Seja o operador de campo termalizado  $\psi(x; \theta_{\beta\mu})_A^a$  definido por

$$\begin{aligned} \psi(x; \theta_{\beta\mu})_A^a &= \mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}] \psi(x)_A^a \mathcal{U}^\dagger[\theta_{\beta\mu}] \\ &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p \{ u(\vec{p}s)^a e^{-ipx} \mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+}] a_{\vec{p}sA} \mathcal{U}^\dagger[\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+}] \\ &\quad + v(\vec{p}s)^a e^{ipx} \mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}^-] b_{\vec{p}sA}^\dagger \mathcal{U}^\dagger[\theta_{\beta\mu}^-] \} \\ &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p \{ u(\vec{p}s)^a e^{-ipx} U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{AB} a_{\vec{p}sB} \\ &\quad + v(\vec{p}s)^a e^{ipx} U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{AB} b_{\vec{p}sB}^\dagger \} \\ &= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p \{ u(\vec{p}s)^a e^{-ip \cdot x} \left( U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{A1} a_{\vec{p}s} + U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{A2} i \tilde{a}_{\vec{p}s}^\dagger \right) \\ &\quad + v(\vec{p}s)^a e^{ip \cdot x} \left( U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{A1} b_{\vec{p}s}^\dagger + U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{A2} i \tilde{b}_{\vec{p}s} \right) \}. \end{aligned}$$

Considerando as definições dos operadores térmicos (4.87) e das componentes

(4.80), teremos

$$\begin{aligned}\psi(x; \theta_{\beta\mu})_A^a &= \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{A1} \psi^+(x)_1^a + \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{A2} \psi^-(x)_2^a \\ &+ \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{A1} \psi^-(x)_1^a + \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{A2} \psi^+(x)_2^a.\end{aligned}\quad (4.88)$$

E ainda, definindo os seguintes operadores térmicos como

$$\mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}^{+-} = (\mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{A1}, \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{A2}) \quad (4.89)$$

$$\mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}^{-+} = (\mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{A1}, \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{A2}). \quad (4.90)$$

podemos escrever (4.88) como

$$\psi(x; \theta_{\beta\mu})_A^a = \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}^{+-} \psi^+(x)_C^a + \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{AC}^{-+} \psi^-(x)_C^a. \quad (4.91)$$

Seja o operador de campo termalizado  $\bar{\psi}(y; \theta_{\beta\mu})_{bB}$ , definido por

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(y; \theta_{\beta\mu})_{bB} &\equiv \mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}] \bar{\psi}(y)_{bB} \mathcal{U}^\dagger[\theta_{\beta\mu}] \\ &= e^{i\mathcal{G}_F[\theta_{\beta\mu}]} \bar{\psi}(y)_{bB} e^{-i\mathcal{G}_F[\theta_{\beta\mu}]}.\end{aligned}$$

Procedendo da mesma maneira que caso anterior, temos

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(y; \theta_{\beta\mu})_{bB} &= \mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}] \bar{\psi}(y)_{bB} \mathcal{U}^\dagger[\theta_{\beta\mu}] \\
&= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p [\bar{u}(\vec{p}s)_b e^{ip \cdot x} \mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}^+] a_{\vec{p}sB}^\dagger \mathcal{U}^\dagger[\theta_{\beta\mu}^+] \\
&\quad + \bar{v}(\vec{p}s)_b e^{-ip \cdot x} \mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}^-] b_{\vec{p}sB} \mathcal{U}^\dagger[\theta_{\beta\mu}^-]] \\
&= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p [\bar{u}(\vec{p}s)_b e^{ip \cdot x} U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{AB} a_{\vec{p}sB}^\dagger \\
&\quad + \bar{v}(\vec{p}s)_b e^{-ip \cdot x} U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{AB} b_{\vec{p}sB}] \\
&= \sum_{s=1,2} \int d\omega_p [\bar{u}(\vec{p}s)_b e^{ip \cdot x} (U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{A1} a_{\vec{p}s}^\dagger + U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{A2} (-i\tilde{a}_{\vec{p}s})) \\
&\quad + \bar{v}(\vec{p}s)_b e^{-ip \cdot x} (U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{A1} b_{\vec{p}s} + U^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{A2} (-i\tilde{b}_{\vec{p}s}^\dagger))] , \\
&= \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{B1} \bar{\psi}^-(y)_{b1} + \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^+)_{B2} \bar{\psi}^+(y)_{b2} \\
&\quad + \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{B1} \bar{\psi}^+(y)_{b1} + \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu}^-)_{B2} \bar{\psi}^-(y)_{b2}. \tag{4.92}
\end{aligned}$$

Podemos reescrever (4.92) em termos dos operadores térmicos (4.89) e (4.90),

o que resulta em

$$\bar{\psi}(y; \theta_{\beta\mu})_{bB} = \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{BD}^- \bar{\psi}^+(y)_{bD} + \mathbf{U}^{-1}(\theta_{\beta\mu})_{BD}^{+-} \bar{\psi}^-(y)_{bD}.$$

### Cálculo do propagador térmico do campo de Dirac.

Na DCT o propagador fermiônico termalizado é definido por

$$S(x - y; \theta_{\beta\mu})_{bAB}^a = \langle 0; \theta_{\beta\mu} | T \{ \psi(x)_A^a \bar{\psi}(y)_{bB} \} | 0; \theta_{\beta\mu} \rangle.$$

Vejamos como a linearidade das transformações de Bogoliubov para os campos  $\psi(x)_A^a$  e  $\bar{\psi}(y)_{bB}$ , também se traduz no propagador fermiônico pela utilização dos operadores térmicos

$$\begin{aligned}
S(x-y; \theta_{\beta\mu})_{bAB}^a &= \langle 0; \theta_{\beta\mu} | T \{ \psi(x)_A^a \bar{\psi}(y)_{bB} \} | 0; \theta_{\beta\mu} \rangle, \\
&= \langle 0; \tilde{0} | \mathcal{U}^\dagger[\theta_{\beta\mu}] T[\psi(x)_A^a \bar{\psi}(y)_{bB}] \mathcal{U}[\theta_{\beta\mu}] | 0; \tilde{0} \rangle, \\
&= \langle 0; \tilde{0} | \mathcal{U}[-\theta_{\beta\mu}] T[\psi(x)_A^a \bar{\psi}(y)_{bB}] \mathcal{U}^\dagger[-\theta_{\beta\mu}] | 0; \tilde{0} \rangle, \\
&= \langle 0; \tilde{0} | T[\mathcal{U}[-\theta_{\beta\mu}] \psi(x)_A^a \mathcal{U}^\dagger[-\theta_{\beta\mu}] \mathcal{U}[-\theta_{\beta\mu}] \bar{\psi}(y)_{bB} \\
&\quad \times \mathcal{U}^\dagger[-\theta_{\beta\mu}] | 0; \tilde{0} \rangle, \\
&= \langle 0; \tilde{0} | T[\psi(x; -\theta_{\beta\mu})_A^a \bar{\psi}(y; -\theta_{\beta\mu})_{bB}] | 0; \tilde{0} \rangle, \\
&= \langle 0; \tilde{0} | T[(\mathbf{U}^{-1}(-\theta_{\beta\mu})_{AC}^{+-} \psi^+(x)_C^a + \mathbf{U}^{-1}(-\theta_{\beta\mu})_{AC}^{-+} \psi^-(x)_C^a) \\
&\quad \times (\mathbf{U}^{-1}(-\theta_{\beta\mu})_{BD}^{-+} \bar{\psi}^+(y)_{bD} + \mathbf{U}^{-1}(-\theta_{\beta\mu})_{BD}^{+-} \bar{\psi}^-(y)_{bD})] | 0; \tilde{0} \rangle,
\end{aligned}$$

considerando as propriedades (4.81), teremos

$$\begin{aligned}
&S(x-y; \theta_{\beta\mu})_{bAB}^a \\
&= \mathbf{U}^{-1}(-\theta_{\beta\mu})_{AC}^{+-} \langle 0; \tilde{0} | T[\psi^+(x)_C^a \bar{\psi}^-(y)_{bD}] | 0; \tilde{0} \rangle \overleftarrow{\mathbf{U}^{-1}}(-\theta_{\beta\mu})_{BD}^{+-} \\
&+ \mathbf{U}^{-1}(-\theta_{\beta\mu})_{AC}^{-+} \langle 0; \tilde{0} | T[\psi^-(x)_C^a \bar{\psi}^+(y)_{bD}] | 0; \tilde{0} \rangle \overleftarrow{\mathbf{U}^{-1}}(-\theta_{\beta\mu})_{BD}^{-+}, \\
&= \mathbf{U}^{-1}(-\theta_{\beta\mu})_{AC}^{+-} \theta(x^0 - y^0) \langle 0; \tilde{0} | \psi^+(x)_C^a \bar{\psi}^-(y)_{bD} | 0; \tilde{0} \rangle \overleftarrow{\mathbf{U}^{-1}}(-\theta_{\beta\mu})_{BD}^{+-} \\
&- \mathbf{U}^{-1}(-\theta_{\beta\mu})_{AC}^{-+} \theta(y^0 - x^0) \langle 0; \tilde{0} | \psi^-(x)_C^a \bar{\psi}^+(y)_{bD} | 0; \tilde{0} \rangle \overleftarrow{\mathbf{U}^{-1}}(-\theta_{\beta\mu})_{BD}^{-+},
\end{aligned}$$

Considerando os resultados em (4.85), teremos

$$\begin{aligned}
& S(x-y; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{bAB}^a \\
&= \mathbf{U}^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{AC}^{+-} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S^+(p)_{bAB}^a e^{-ip(x-y)} \overleftarrow{\mathbf{U}}^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{BD}^{+-} \\
&- \mathbf{U}^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{AC}^{-+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S^-(p)_{bAB}^a e^{-ip(x-y)} \overleftarrow{\mathbf{U}}^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{BD}^{-+}, \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{AC}^{+-} S^+(p)_{bAB}^a U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{BD}^{+-} e^{-ip(x-y)} \\
&- \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{AC}^{-+} S^-(p)_{bAB}^a U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{BD}^{-+} e^{-ip(x-y)},
\end{aligned}$$

e, definindo  $S(p; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{bAB}^a$  por

$$S(x-y; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{bAB}^a = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{bAB}^a e^{-ip(x-y)},$$

teremos, portanto,

$$\begin{aligned}
S(p; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{bAB}^a &= U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{AC}^{+-} S^+(p)_{bCD}^a U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{BD}^{+-} \\
&+ U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{AC}^{-+} S^-(p)_{bCD}^a U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{BD}^{-+}, \\
&= U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{A1} S^+(p)_{b11}^a U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{B1} \\
&+ U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})_{A2} S^+(p)_{b22}^a U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})_{B2} \\
&+ U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})_{A1} S^-(p)_{b11}^a U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})_{B1} \\
&+ U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{A2} S^-(p)_{b22}^a U^{-1}(-\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{B2}.
\end{aligned}$$

Considerando que  $U^{-1}(-\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm}) = U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}\pm})$ , teremos

$$\begin{aligned}
S(p; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{bAB}^a &= U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{A1} S^+(p)_{b11}^a U^T(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{1B} \\
&+ U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})_{A2} S^+(p)_{b22}^a U^T(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})_{2B} \\
&+ U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})_{A1} S^-(p)_{b11}^a U^T(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})_{1B} \\
&+ U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{A2} S^-(p)_{b22}^a U^T(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})_{2B}. \tag{4.93}
\end{aligned}$$

Seja  $U(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{p_0})$  a matriz definida por

$$U(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{p_0}) = \bar{\theta}(p_0) U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^+})|_{\epsilon_{\vec{p}} \rightarrow p_0} + \bar{\theta}(-p_0) U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}^-})|_{\epsilon_{\vec{p}} \rightarrow -p_0}.$$

Considerando as posições dos pólos de  $S^+(p)_{b11}^a$ ,  $S^-(p)_{b11}^a$ ,  $S^+(p)_{b22}^a$  e  $S^-(p)_{b22}^a$ , dadas por (4.85), pode-se verificar que (4.93) é dada por

$$S(p; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{bAB}^a = U(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{p_0})_{AC} S(p)_{CDb}^a U^T(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{p_0})_{DB}.$$

O propagador térmico do campo de Dirac da DCT é, portanto

$$S(x-y; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{bAB}^a = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} U(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{p_0})_{AC} S(p)_{CDb}^a U^T(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{p_0})_{DB} e^{-ip(x-y)},$$

que é um resultado conhecido da literatura [36].

# Capítulo 5

## DCT Interagente

Neste capítulo apresentaremos a lei de substituição til [24] nas formas livre e interagente, discutindo o importante papel que elas desempenham na teoria de perturbação da DCT [26]. Vamos definir o operador de espalhamento térmico  $e$ , com o auxílio do teorema de Wick para DCT, vamos deduzir uma fórmula de redução na forma funcional para a DCT, que permite obter amplitudes de espalhamento térmicas [27] em termos do funcional gerador das funções de Green da DCT, o qual é obtido a partir desta mesma fórmula.

Por uma questão de simplicidade, trataremos apenas do campo escalar real em equilíbrio térmico à temperatura  $T = 1/\beta$  e com potencial químico  $\mu = 0$ , já que este campo é descarregado. Neste caso o estado térmico é dado por  $|0; \theta_{\beta\mu}\rangle|_{\mu=0} = |0; \theta_{\beta}\rangle$ , o que significa ainda que este estado térmico está associado ao ensemble grande canônico.

## 5.1 Lei de substituição til para campos livres e a condição KMS para o propagador livre.

Uma consequência do fato de as médias térmicas em Mecânica Estatística serem definidas por meio de

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\beta = Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(\mathcal{O} \rho(\beta)), \quad (5.1)$$

é a chamada condição Kubo-Martin-Schwinger [25], que pode ser exemplificada da seguinte maneira: em (5.1), tomemos  $\mathcal{O} = A(t')B(t)$ , onde  $A(t')$  e  $B(t)$  são operadores cuja dependência temporal é dada na representação de Heisenberg

$$A(t') = e^{it'H} A e^{-it'H}, \quad B(t) = e^{it'H} B e^{-it'H},$$

temos portanto

$$\begin{aligned} \langle A(t')B(t) \rangle_\beta &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(A(t')B(t)e^{-\beta H}), \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(B(t)e^{-\beta H} A(t')), \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta H} (e^{\beta H} B(t) e^{-\beta H}) A(t')), \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta H} B(t - i\beta) A(t')), \\ &= \langle B(t - i\beta) A(t') \rangle_\beta, \end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade de invariância sob permutação cíclica dos operadores e também  $B(t - i\beta) = e^{\beta H} B(t) e^{-\beta H}$ . Analogamente podemos fazer

$$\begin{aligned}
\langle A(t') B(t) \rangle_\beta &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(A(t') B(t) e^{-\beta H}), \\
&= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}((e^{-\beta H} A(t') e^{\beta H}) e^{-\beta H} B(t)), \\
&= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta H} B(t) A(t' + i\beta)), \\
&= \langle B(t) A(t' + i\beta) \rangle_\beta,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle A(t') B(t) \rangle_\beta = \langle B(t - i\beta) A(t') \rangle_\beta = \langle B(t) A(t' + i\beta) \rangle_\beta$$

Esta é a chamada condição KMS. Em TQC a temperatura finita, onde os objetos básicos são as funções de correlação térmicas, por exemplo

$$\Delta(x - y; \theta_\beta) = Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta H} T\phi(x)\phi(y)), \quad (5.2)$$

no caso do campo escalar real, a condição KMS tem uma consequência fundamental sobre as funções de correlação que consiste na sua periodicidade, a qual, em termos de (5.2), pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\Delta^*(x - y) &= \Delta(x - y - i\beta\eta(x_0 - y_0)\hat{n}_0; \theta_\beta), \\
\eta(x_0 - y_0) &= \frac{x_0 - y_0}{|x_0 - y_0|}, \quad \hat{n}_0^\mu = (1, 0, 0, 0),
\end{aligned}$$

Se realizarmos uma rotação de Wick ( $x^0 \rightarrow -i\tau$ ) em uma TQC a temperatura finita, ela se euclidiana e a condição KMS representa uma condição de periodicidade, cujo período é dado por  $\beta$  [5, 37]. Na DCT, com os ingredientes algébricos da duplicação dos graus de liberdade, regras de conjugação til e a termalização do vácuo e dos operadores, temos que a média térmica (5.2), escrita em termos do valor esperado no vácuo térmico (3.130), é uma consequência direta desta estrutura. No entanto, como a condição KMS se expressa em termos destes ingredientes? Analisaremos este aspecto na sequência.

### 5.1.1 Lei de substituição til: caso livre

Seja  $\phi(x)_A = (\phi(x), \tilde{\phi}(x))$  um campo escalar real livre dado por

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int d\omega_{\vec{p}}(e^{ipx} a_{\vec{p}} + e^{-ipx} a_{\vec{p}}^\dagger), \\ \tilde{\phi}(x) &= \int d\omega_{\vec{p}}(e^{-ipx} \tilde{a}_{\vec{p}} + e^{ipx} \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger).\end{aligned}$$

Considerando as relações que definem o vácuo e os operadores de criação e aniquilação termalizados<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
a_{\vec{p}}(\theta_{\beta}^{\vec{p}})|0; \theta_{\beta}\rangle = 0 &\Rightarrow \tilde{a}_{\vec{p}}^{\dagger}|0; \theta_{\beta}\rangle = e^{\frac{\beta E_{\vec{p}}}{2}} a_{\vec{p}}|\theta_{\beta}; 0\rangle, \\
\tilde{a}_{\vec{p}}(\theta_{\beta}^{\vec{p}})|0; \theta_{\beta}\rangle = 0 &\Rightarrow \tilde{a}_{\vec{p}}|\theta_{\beta}; 0\rangle = e^{-\frac{\beta E_{\vec{p}}}{2}} a_{\vec{p}}^{\dagger}|\theta_{\beta}; 0\rangle, \\
\langle 0; \theta_{\beta}|\tilde{a}_{\vec{p}}^{\dagger}(\theta_{\beta}^{\vec{p}}) = 0 &\Rightarrow \langle 0; \theta_{\beta}|a_{\vec{p}} = \langle 0; \theta_{\beta}|\tilde{a}_{\vec{p}} e^{\frac{\beta E_{\vec{p}}}{2}}, \\
\langle 0; \theta_{\beta}|a_{\vec{p}}^{\dagger}(\theta_{\beta}^{\vec{p}}) = 0 &\Rightarrow \langle 0; \theta_{\beta}|a_{\vec{p}}^{\dagger} = \langle 0; \theta_{\beta}|\tilde{a}_{\vec{p}} e^{-\frac{\beta E_{\vec{p}}}{2}},
\end{aligned}$$

podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
\langle 0; \theta_{\beta}|\phi(x) &= \langle 0; \theta_{\beta}|\tilde{\phi}^{\dagger}(x + i\hat{n}_0\frac{\beta}{2}), \\
\tilde{\phi}^{\dagger}(x + i\hat{n}_0\frac{\beta}{2})|0; \theta_{\beta}\rangle &= \phi(x + i\beta\hat{n}_0)|0; \theta_{\beta}\rangle,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
\phi(x)|0; \theta_{\beta}\rangle &= \tilde{\phi}^{\dagger}(x - i\hat{n}_0\frac{\beta}{2})|0; \theta_{\beta}\rangle, \\
\langle 0; \theta_{\beta}|\tilde{\phi}^{\dagger}(x - i\hat{n}_0\frac{\beta}{2}) &= \langle 0; \theta_{\beta}|\phi(x + i\hat{n}_0\beta),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

---

<sup>1</sup>Aqui estamos utilizando as relações dadas em (3.88).

As relações (5.3) e (5.4) são leis de substituição til [24] para os campos  $\phi(x)$  e  $\tilde{\phi}(x)$ . A partir destas relações, podemos mostrar

$$\begin{aligned}
\Delta_{>}(x, y; \theta_{\beta}) &= \langle 0; \theta_{\beta} | \phi(x) \phi(y) | 0; \theta_{\beta} \rangle \quad \text{para } x_0 > y_0 \\
&= \langle 0; \theta_{\beta} | \tilde{\phi}^{\dagger}(x + i\frac{\beta}{2}\hat{n}_0) \phi(y) | 0; \theta_{\beta} \rangle \\
&= \langle 0; \theta_{\beta} | \phi(y) \tilde{\phi}^{\dagger}(x + i\frac{\beta}{2}\hat{n}_0) | 0; \theta_{\beta} \rangle \\
&= \langle 0; \theta_{\beta} | \phi(y) \phi(x + i\beta\hat{n}_0) | 0; \theta_{\beta} \rangle \\
&= \Delta_{<}(y, x - i\beta\hat{n}_0; \theta_{\beta}), \tag{5.5}
\end{aligned}$$

que foi obtida utilizando as relações (5.3). Além disso

$$\begin{aligned}
\Delta_{<}(y, x; \theta_{\beta}) &= \langle 0; \theta_{\beta} | \phi(y) \phi(x) | 0; \theta_{\beta} \rangle \quad \text{para } x_0 > y_0 \\
&= \langle 0; \theta_{\beta} | \phi(y) \tilde{\phi}^{\dagger}(x - i\frac{\beta}{2}\hat{n}_0) | 0; \theta_{\beta} \rangle \\
&= \langle 0; \theta_{\beta} | \tilde{\phi}^{\dagger}(x - i\frac{\beta}{2}\hat{n}_0) \phi(y) | 0; \theta_{\beta} \rangle \\
&= \langle 0; \theta_{\beta} | \phi(x - i\beta\hat{n}_0) \phi(y) | 0; \theta_{\beta} \rangle \\
&= \Delta_{>}(x - i\beta\hat{n}_0, y; \theta_{\beta}), \tag{5.6}
\end{aligned}$$

que foi obtida utilizando as relações (5.4), de maneira que, a partir dos resultados (5.5) e (5.6), temos

$$\begin{aligned}
\Delta_0^*(x - y; \theta_\beta) &= \langle 0; \theta_\beta | T\phi(y)\phi(x) | 0; \theta_\beta \rangle^* \\
&= \theta(x_0 - y_0)\Delta_>^*(x, y; \theta_\beta) + \theta(y_0 - x_0)\Delta_<^*(y, x; \theta_\beta) \\
&= \theta(x_0 - y_0)\Delta_<(y, x; \theta_\beta) + \theta(y_0 - x_0)\Delta_>(x, y; \theta_\beta) \\
&= \theta(x_0 - y_0)\Delta_>(x - i\beta\hat{n}_0, y; \theta_\beta) \\
&\quad + \theta(y_0 - x_0)\Delta_<(y, x + i\beta\hat{n}_0; \theta_\beta). \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Delta_0^*(x - y; \theta_\beta) = \Delta_0(x - i\eta(x_0 - y_0)\beta\hat{n}_0, y; \theta_\beta),$$

valendo, portanto, a condição KMS. Além de descrever a condição KMS nos termos da DCT, na próxima seção veremos que as leis de substituição til, Eqs.(5.3) e (5.4), desempenham um papel importante na teoria de perturbação da DCT.

## 5.2 Representação de interação na DCT e funções de Green interagentes

As funções de correlação de  $n$  pontos interagentes são definidas como

$$\Delta(x_1, \dots, x_n; \theta_\beta)_{A_1 \dots A_n} = \langle \Omega; \theta_\beta | T\Phi(x_1)_{A_1} \dots \Phi(x_n)_{A_n} | \Omega; \theta_\beta \rangle \tag{5.8}$$

onde os operadores de campo  $\phi(x_j)_{A_j}$  na representação de Heisenberg são dados por

$$\Phi(x_j)_{A_j} = e^{ix^0 \hat{H}} \phi(0, \vec{x}_j)_{A_j} e^{-ix^0 \hat{H}},$$

sendo que a hamiltoniana duplicada  $\hat{H}$  é escrita como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= H - \tilde{H} \\ &= H_0 + H_{int} - (\tilde{H}_0 + \tilde{H}_{int}) \\ &= H_0 - \tilde{H}_0 + H_{int} - \tilde{H}_{int} \\ &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \end{aligned}$$

Os operadores na representação de interação são definidos de maneira análoga a TQC a  $T = 0$ , ou seja,

$$\phi(x_j)_{A_j} = e^{ix_j^0 \hat{H}_0} \phi(0, \vec{x}_j)_{A_j} e^{-ix_j^0 \hat{H}_0}.$$

Em termos do operador  $\hat{U}$ , definido por

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_2, t_1) &= U(t_2, t_1) \tilde{U}(t_2, t_1) \\ &= e^{it_2 \hat{H}_0} e^{-i(t_2 - t_1) \hat{H}} e^{-it_1 \hat{H}_0} \\ &= T \exp\left(-i \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{H}_I(t)\right), \end{aligned}$$

onde  $\hat{H}_I$  é dado por

$$\hat{H}_I(t) = e^{it \hat{H}_0} \hat{H} e^{-it \hat{H}_0}.$$

Note que  $\widehat{U}(t_2, t_1) = U(t_2, t_1)\widetilde{U}(t_2, t_1)$ . Temos que a relação entre as representações é

$$\Phi(x_j)_{A_j} = \widehat{U}(0, x_j^0)\phi(x_j)_{A_j}\widehat{U}(x_j^0, 0), \quad (5.9)$$

sendo  $x_j^0 = 0$  o instante em que as representações de Heisenberg e de interação coincidem.

Antes de aplicarmos (5.9) na função de correlação (5.8), precisamos escrever o vácuo térmico interagente  $|\Omega; \theta_\beta\rangle$  em termos do livre  $|0; \theta_\beta\rangle$ , o qual, conforme já vimos anteriormente na eq.(2.31), é dado por<sup>2</sup>

$$|0; \theta_\beta\rangle = Z_0(\beta)^{-1/2}e^{-\beta H_0/2}|\mathbf{1}\rangle, \quad (5.10)$$

com

$$\langle \theta_\beta; 0 | \mathcal{O} | 0; \theta_\beta \rangle = Z_0(\beta)^{-1/2} \text{Tr} e^{-\beta H_0/2} \mathcal{O},$$

$$Z_0(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H_0}.$$

Analogamente, em conexão com

$$\langle \Omega; \theta_\beta | \mathcal{O} | \Omega; \theta_\beta \rangle = Z(\beta)^{-1/2} \text{Tr} e^{-\beta H/2} \mathcal{O},$$

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H},$$

temos a definição para o vácuo térmico interagente

$$|\Omega; \theta_\beta\rangle = Z(\beta)^{-1/2}e^{-\beta H/2}|\mathbf{1}\rangle. \quad (5.11)$$

---

<sup>2</sup>Denotamos  $|\mathbf{1}\rangle = \sum_{\{n_j\} \in \mathcal{G}} |\{n_j\}, \{\tilde{n}_j\}\rangle$ .

Considerando as definições (5.10) e (5.11) podemos relacionar os vácuos térmicos livre e interagente

$$\begin{aligned}
|\Omega; \theta_\beta\rangle &= Z(\beta)^{-1/2} e^{-\beta H/2} |\mathbf{1}\rangle, \\
&= Z(\beta)^{-1/2} e^{-\beta H/2} (Z_0(\beta)^{1/2} e^{\beta H_0/2} Z_0(\beta)^{-1/2} e^{-\beta H_0/2}) |\mathbf{1}\rangle, \\
&= Z(\beta)^{-1/2} e^{-\beta H/2} Z_0(\beta)^{1/2} e^{\beta H_0/2} |0; \theta_\beta\rangle, \\
&= \left( \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \right)^{1/2} (e^{-\beta H/2} e^{\beta H_0/2}) |0; \theta_\beta\rangle, \\
&= \left( \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \right)^{1/2} U(0, i\frac{\beta}{2}) |0; \theta_\beta\rangle, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\langle \Omega; \theta_\beta | = \langle 0; \theta_\beta | U(-i\frac{\beta}{2}, 0) \left( \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \right)^{1/2}, \tag{5.13}$$

onde  $U$  é dado por

$$U(t_2, t_1) = e^{it_2 H_0} e^{-i(t_2 - t_1) H} e^{-it_1 H_0}.$$

Agora voltemos à função de correlação. Substituindo (5.9), (5.12) e (5.13)

em (5.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1, \dots, x_n; \theta_\beta)_{A_1 \dots A_n} &= \langle \Omega; \theta_\beta | T \Phi(x_1)_{A_1} \dots \Phi(x_n)_{A_n} | \Omega; \theta_\beta \rangle \\
&= \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \langle 0; \theta_\beta | U\left(\frac{-i\beta}{2}, 0\right) \widehat{U}(0, x_1^0) \phi(x_1)_{A_1} \widehat{U}(x_1^0, 0) \dots \\
&\times \widehat{U}(0, x_n^0) \phi(x_n)_{A_n} \widehat{U}(x_n^0, 0) U\left(0, \frac{i\beta}{2}\right) | 0; \theta_\beta \rangle \\
&= \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \langle 0; \theta_\beta | U\left(\frac{-i\beta}{2}, 0\right) U(0, \infty) \widetilde{U}(0, \infty) \widehat{U}(\infty, x_1^0) \dots \\
&\times \dots \widehat{U}(x_n^0, -\infty) \widetilde{U}(-\infty, 0) U(-\infty, 0) U\left(0, \frac{i\beta}{2}\right) | 0; \theta_\beta \rangle \\
&= \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \langle 0; \theta_\beta | U\left(\frac{-i\beta}{2}, \infty\right) \widetilde{U}(0, \infty) \widehat{U}(\infty, x_1^0) \dots \\
&\times \dots \widehat{U}(x_n^0, -\infty) \widetilde{U}(-\infty, 0) U\left(-\infty, \frac{i\beta}{2}\right) | 0; \theta_\beta \rangle \\
&= \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \langle 0; \theta_\beta | \widetilde{U}(0, \infty) U\left(\frac{-i\beta}{2}, \infty\right) \widehat{U}(\infty, x_1^0) \dots \\
&\times \dots \widehat{U}(x_n^0, -\infty) U\left(-\infty, \frac{i\beta}{2}\right) \widetilde{U}(-\infty, 0) | 0; \theta_\beta \rangle.
\end{aligned}$$

Considerando a regra de substituição til para os termos extremos

$$\begin{aligned}
\langle 0; \theta_\beta | \widetilde{U}(0, \infty) &= \langle 0; \theta_\beta | U\left(\infty - i\frac{\beta}{2}, i\frac{\beta}{2}\right), \\
\widetilde{U}(-\infty, 0) | 0; \theta_\beta \rangle &= U\left(-\infty, -\infty + i\frac{\beta}{2}\right) | 0; \theta_\beta \rangle,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

temos

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1, \dots, x_n; \theta_\beta)_{A_1 \dots A_n} &= \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \langle 0; \theta_\beta | U\left(\infty - i\frac{\beta}{2}, i\frac{\beta}{2}\right) T[\widehat{U}(\infty, -\infty) \\
&\phi(x_1)_{A_1} \dots \phi(x_n)_{A_n}] U\left(-\infty, -\infty + i\frac{\beta}{2}\right) | 0; \theta_\beta \rangle.
\end{aligned}$$

Se fizermos nesta fórmula  $n = 0$  teremos

$$\frac{Z}{Z_0} = \langle 0; \theta_\beta | U(-i\frac{\beta}{2} + \infty, \infty) T\hat{U}(\infty, -\infty) U(-\infty, -\infty + i\frac{\beta}{2}) | 0; \theta_\beta \rangle,$$

e portanto

$$\begin{aligned} & \Delta(x_1, \dots, x_n; \theta_\beta)_{A_1 \dots A_n} \\ = & \frac{\langle 0; \theta_\beta | U(-i\frac{\beta}{2} + \infty, \infty) T\hat{U}(\infty, -\infty) \phi(x_1)_{A_1} \dots \phi(x_n)_{A_n} U(-\infty, -\infty + i\frac{\beta}{2}) | 0; \theta_\beta \rangle}{\langle 0; \theta_\beta | U(-i\frac{\beta}{2} + \infty, \infty) T\hat{U}(\infty, -\infty) U(-\infty, -\infty + i\frac{\beta}{2}) | 0; \theta_\beta \rangle}. \end{aligned}$$

Salvo casos patológicos [26], a contribuição dos termos extremos no numerador e denominador se cancelam, resultando numa fórmula análoga à de Gell-Mann-Low [33] que é

$$\Delta(x_1, \dots, x_n; \theta_\beta)_{A_1 \dots A_n} = \frac{\langle 0; \theta_\beta | T\hat{U}(\infty, -\infty) \phi(x_1)_{A_1} \dots \phi(x_n)_{A_n} | 0; \theta_\beta \rangle}{\langle 0; \theta_\beta | T\hat{U}(\infty, -\infty) | 0; \theta_\beta \rangle}. \quad (5.15)$$

### 5.3 Teorema de Wick para DCT

Como em TQC a  $T = 0$ , para calcularmos as funções de correlação (5.15) perturbativamente, precisamos expandir a exponencial

$$\hat{U}(\infty, -\infty) = T \exp(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}_I(t)),$$

nas potências do argumento

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}_I(t) = -i \int d^4x \mathcal{H}_{int}(x),$$

onde usualmente a densidade hamiltoniana  $\mathcal{H}(x)$  é dada por um produto dos campos envolvidos na teoria. Assim sendo, o objeto básico que nos resta calcular na expansão perturbativa é da forma  $\langle 0, \theta_\beta | T \phi(x_1)_{A_1} \cdots \phi(x_n)_{A_n} | 0, \theta_\beta \rangle$ .

Comecemos pelo caso mais simples, com  $n = 2$ , isto é, vamos calcular

$$\langle 0, \theta_\beta | T \phi(x_1)_{A_1} \phi(x_2)_{A_2} | 0, \theta_\beta \rangle. \quad (5.16)$$

Os campos na representação de interação são dados por

$$\phi(x)_A = \int d\omega_{\vec{p}} (e^{-ipx} a_{\vec{p}A} + e^{ipx} a_{\vec{p}A}^\dagger). \quad (5.17)$$

E, como o valor esperado (5.16) é relativo ao vácuo térmico, convém escrever os operadores de criação e destruição em termos dos operadores térmicos por meio da transformação de Bogoliubov,  $a_A = U(\theta)_{AB} a(\theta)_B$ , o que, substituindo em (5.17), resulta em

$$\begin{aligned} \phi(x)_{\bar{A}} &= \phi(x)_{\bar{A}\theta}^+ + \phi(x)_{\bar{A}\theta}^-, \\ \phi(x)_{\bar{A}\theta}^- &= (\phi(x)_{\bar{A}\theta}^+)^\dagger, \\ \phi(x)_{\bar{A}\theta} &= \int d\omega_{\vec{p}} Q(x, p, \theta_\beta^{\vec{p}})_{\bar{A}\bar{B}} a_{\vec{p}}(\theta_\beta^{\vec{p}})_{\bar{B}}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde  $Q$  é dado por

$$Q(x, p; \theta) = \begin{pmatrix} e^{-ipx} u(\theta_\beta^{\vec{p}}) & e^{ipx} v(\theta_\beta^{\vec{p}}) \\ e^{-ipx} v(\theta_\beta^{\vec{p}}) & e^{ipx} u(\theta_\beta^{\vec{p}}) \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

e portanto os campos se decompõem em  $\phi_\theta^\dagger$  e  $\phi_\theta^-$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\phi(x)_A &= \phi(x)_{A\theta}^+ + \phi(x)_{A\theta}^- \\
&= \int d\omega_{\vec{p}} Q(x, p; \theta_\beta)_{AB} a_{\vec{p}}(\theta_\beta)_B \\
&\quad + \int d\omega_{\vec{p}} Q^*(x, p; \theta_\beta)_{AB} a_{\vec{p}}^\dagger(\theta_\beta)_B.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Em TQC a  $T = 0$  os índices  $+$  e  $-$  se referem à decomposição dos campos em frequências positivas e negativas. Aqui essa interpretação da notação perde o sentido, visto que as frequências positivas e negativas se misturam em  $\phi_\theta^+$  e  $\phi_\theta^-$ . No nosso caso, os sinais se referem a decomposição em operadores de aniquilação  $a_{\vec{p}}(\theta_\beta)_{\bar{A}} = (a_{\vec{p}}(\theta_\beta), \tilde{a}_{\vec{p}}(\theta_\beta))$  para o sinal  $+$  e de criação  $a_{\vec{p}}^\dagger(\theta_\beta)_{\bar{A}} = (a_{\vec{p}}^\dagger(\theta_\beta), \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger(\theta_\beta))$  para o sinal  $-$ . Foi com essa intenção que modificamos os índices fazendo

$$A \rightarrow \bar{A}, \quad B \rightarrow \bar{B}. \tag{5.21}$$

Lembremos que a notação matricial definida para descrever a transformação de Bogoliubov é dada por

$$a_{\vec{p}}(\theta_\beta^{\vec{p}})_A = (a_{\vec{p}}(\theta_\beta^{\vec{p}}), \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger(\theta_\beta^{\vec{p}})), \quad a_{\vec{p}}^\dagger(\theta_\beta^{\vec{p}})_A = (a_{\vec{p}}^\dagger(\theta_\beta^{\vec{p}}), \tilde{a}_{\vec{p}}(\theta_\beta^{\vec{p}})).$$

Com a modificação (5.21), as componentes 1 e 2, significam respectivamente, não til e til.

Com os campos decompostos segundo (5.20), podemos estender o teorema de Wick para a DCT como

$$\begin{aligned}
T\phi(x_1)_A\phi(x_2)_B &= \phi(x_1)_A\phi(x_2)_B \quad \text{para } x_1^0 > x_2^0 \\
&= (\phi(x_1)_{A\theta}^+ + \phi(x_1)_{A\theta}^-)(\phi(x_2)_{B\theta}^+ + \phi(x_2)_{B\theta}^-) \\
&= \underline{\phi(x_1)_{A\theta}^+\phi(x_2)_{B\theta}^+} + \phi(x_1)_{A\theta}^+\phi(x_2)_{B\theta}^- \\
&= \underline{\phi(x_1)_{A\theta}^-\phi(x_2)_{B\theta}^+} + \phi(x_1)_{A\theta}^-\phi(x_2)_{B\theta}^- \\
&= \underline{\phi(x_1)_{A\theta}^+\phi(x_2)_{B\theta}^+} + \underline{\phi(x_2)_{B\theta}^-\phi(x_1)_{A\theta}^-} \\
&+ \underline{\phi(x_1)_{A\theta}^-\phi(x_2)_{B\theta}^+} + \underline{\phi(x_1)_{A\theta}^-\phi(x_2)_{B\theta}^-} \\
&+ [\phi(x_1)_{A\theta}^+, \phi(x_2)_{B\theta}^-],
\end{aligned} \tag{5.22}$$

onde os termos sublinhados estão normalmente ordenados relativamente aos operadores térmicos. Definindo o ordenamento normal relativamente aos operadores térmicos por

$$\begin{aligned}
N_\theta a_{\vec{p}}(\theta_\beta) a_{\vec{q}}^\dagger(\theta_\beta) &= a_{\vec{p}}(\theta_\beta) a_{\vec{q}}^\dagger(\theta_\beta), \\
N_\theta a_{\vec{q}}^\dagger(\theta_\beta) a_{\vec{p}}(\theta_\beta) &= a_{\vec{p}}(\theta_\beta) a_{\vec{q}}^\dagger(\theta_\beta), \\
N_\theta a_{p_1}(\theta_\beta) \tilde{a}_{q_1}^\dagger(\theta_\beta) \tilde{a}_{p_1}(\theta_\beta) a_{q_2}^\dagger(\theta_\beta) &= a_{p_1}(\theta_\beta) \tilde{a}_{p_2}(\theta_\beta) a_{p_1}^\dagger(\theta_\beta) \tilde{a}_{q_2}^\dagger(\theta_\beta), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

e definindo contração térmica entre campos por

$$\begin{aligned} \overline{\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B} &= \theta(x_1^0 - x_2^0) [\phi(x_1)_{A\theta}^+, \phi(x_2)_{B\theta}^-] \\ &+ \theta(x_2^0 - x_1^0) [\phi(x_2)_{B\theta}^+, \phi(x_1)_{A\theta}^-], \end{aligned}$$

podemos reescrever (5.22) como

$$T\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B = N_\theta \phi(x_1)_A \phi(x_2)_B + \overline{\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B}.$$

A partir desta definição, segue que

$$\overline{\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B} = \Delta_0(x_1 - x_2; \theta_\beta)_{AB} \quad (5.23)$$

Considerando este teorema de Wick para a DCT, quando  $n = 3, 4, \dots$ , podemos notar que

$$T \prod_{i=1}^n \phi(x_i)_{A_i} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{\pi\}} N_\theta \prod_{j=1}^{n-2k} \phi(x_{\pi_j})_{A_{\pi_j}} \prod_{\{(\pi l', \pi l)\}} \Delta_0(x_{\pi l'} - x_{\pi l}; \theta_\beta)_{A_{\pi l'} A_{\pi l}} \quad (5.24)$$

onde  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  é uma permutação de  $(1, \dots, n)$ , onde que  $\pi_j$  é um elemento de uma combinação de  $(1, \dots, n)$  tomados  $n - 2k$  a  $n - 2k$ , para  $j = 1, \dots, n - 2k$ .  $\{(\pi l, \pi l')\}$  é o conjunto de todos os pares entre os  $\pi l', \pi l$  para  $n - 2k \leq l, l' \leq n$ , sendo  $l \neq l'$ . A expressão (5.24) é o Teorema de Wick para DCT. A partir disso podemos calcular o produto ordenado dos campos,

bem como o resultado da atuação do operador ordenamento temporal em funcionais dos campos. Vejamos um exemplo:

$$\begin{aligned}
T \exp(i \int dx J(x) \tau \phi(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \prod_{j=1}^n \int dx_j (J(x_j) \tau)_{A_j} T \prod_{i=1}^n \phi(x_i)_{A_i} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{\pi\}} N_{\theta} \left[ \prod_{j=1}^{n-2k} \int dx_{\pi_j} (J(x_j) \tau)_{A_{\pi_j}} \phi(x_{\pi_j})_{A_{\pi_j}} \right] \\
&\times \prod_{\{(\pi', \pi)\}} \int dx_{\pi'} dx_{\pi} (J(x_{\pi'}) \tau)_{A_{\pi'}} (J(x_{\pi}) \tau)_{A_{\pi}} \Delta_0(x_{\pi'} - x_{\pi}; \theta_{\beta})_{A_{\pi'} A_{\pi}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{\pi\}} N_{\theta} \left( \int dx J(x) \tau \phi(x) \right)^{n-2k} \\
&\times \left( \int dx' dx J(x') \tau \Delta_0(x' - x; \theta_{\beta}) \tau J(x) \right)^k. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Seja  $W_0[J; \theta_{\beta}]$  o funcional definido por

$$W_0[J; \theta_{\beta}] = -\frac{1}{2} \int dx' dx J(x') \tau \Delta_0(x' - x; \theta_{\beta}) \tau J(x). \tag{5.26}$$

Substituindo (5.26) na última igualdade em (5.25), e somando sob as permutações

tações  $\{\pi\}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
T \exp(i \int dx J(x) \tau \phi(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} \frac{(2k)!}{2^k k!} \\
&\times N_{\theta} \left( \int dx J(x) \tau \phi(x) \right)^{n-2k} (-2W_0[J])^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} N_{\theta} \left( \frac{i^{n-2k} \left( \int dx J(x) \tau \phi(x) \right)^{n-2k}}{(n-2k)!} \right) \frac{i^{2k}}{2^k k!} (-2W_0[J])^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2k}^{\infty} N_{\theta} \left[ \frac{\left( i \int dx J(x) \tau \phi(x) \right)^{n-2k}}{(n-2k)!} \right] \frac{1}{k!} (W_0[J; \theta_{\beta}])^k \\
&= N_{\theta} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( i \int dx J(x) \tau \phi(x) \right)^n \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (W_0[J; \theta_{\beta}])^k \right) \\
&= N_{\theta} \exp(i \int dx J(x) \tau \phi(x)) e^{W_0[J; \theta_{\beta}]},
\end{aligned}$$

e portanto

$$T \exp(i \int dx J(x) \tau \phi(x)) = N_{\theta} \exp(i \int dx J(x) \tau \phi(x)) e^{W_0[J; \theta_{\beta}]}. \quad (5.27)$$

Um detalhe interessante desta fórmula é que, devido a forma quadrática de  $W_0$ , a mesma permanece válida se substituirmos

$$(J(x)\tau)_A \rightarrow - \int d^4 y \Delta_0^{-1}(x-y; \theta_{\beta})_{AB} \tau_{BC} \frac{\delta}{\delta J(y)_C} \quad (5.28)$$

na exponencial sob ordenamento normal. É fácil entender por que esta substituição funciona: o sinal negativo de (5.28) cancela o sinal negativo de (5.27), o inverso do propagador em (5.28) “cancela” o propagador em (5.27) e a matriz  $\tau$  em (5.28) cancela um dos  $\tau$ s em (5.28), só restando, portanto,  $J(x)\tau$ .

O inverso do propagador em (5.28) é definido por

$$\Delta_0^{-1}(x; \theta_\beta)_{AC} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \Delta_0^{-1}(p; \theta_\beta)_{AC} \quad (5.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_0^{-1}(p; \theta_\beta)_{AC} &= ((U(\theta_\beta^{\vec{p}}) \Delta_0(p; 0) U(\theta_\beta^{\vec{p}}))_{AC})^{-1} \\ &= (U^{-1}(\theta_\beta^{\vec{p}}) \Delta_0^{-1}(p; 0) U_{\vec{p}}^{-1}(\theta_\beta^{\vec{p}}))_{AC} \\ &= (\tau U(\theta_\beta^{\vec{p}}) \tau \Delta_0^{-1}(p; 0) \tau U(\theta_\beta^{\vec{p}}) \tau)_{AC} \\ &= (\tau U(\theta_\beta^{\vec{p}}) \Delta_0^{-1}(p; 0) U(\theta_\beta^{\vec{p}}) \tau)_{AC} \\ &= (\tau U(\theta_\beta^{\vec{p}}) (\frac{1}{i}(p^2 - m^2) \tau + \epsilon \mathbf{1}) U(\theta_\beta^{\vec{p}}) \tau)_{AC} \\ &= ((\frac{1}{i}(p^2 - m^2) \tau (U(\theta_\beta^{\vec{p}}) \tau U(\theta_\beta^{\vec{p}})) \tau + \epsilon \tau U^2(\theta_\beta^{\vec{p}}) \tau))_{AC} \\ &= ((\frac{1}{i}(p^2 - m^2) \tau + \epsilon \tau U^2(\theta_\beta^{\vec{p}}) \tau))_{AC}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

Tomando-se o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos uma forma para  $\Delta_0^{-1}(p; \theta_\beta)$  que é mais simples, sendo independente da temperatura, que é dada por

$$\Delta_0^{-1}(p; \theta_\beta)_{AC} \rightarrow \frac{1}{i}(p^2 - m^2) \tau_{AC}.$$

É claro que esta forma não pode ser utilizada, quando precisarmos inverter  $\Delta_0^{-1}(p; \theta_\beta)$ , obtendo  $\Delta_0(p; \theta_\beta)$  novamente. Considerando este último resul-

tado em (5.29), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta_0^{-1}(x-z; \theta_\beta)_{AC} &= K(x)\delta(x-z)i\tau_{AC} \\ &= K(z)\delta(x-z)i\tau_{AC},\end{aligned}\tag{5.31}$$

onde  $K = \partial^\mu\partial_\mu + m^2$  é o operador de Klein-Gordon. A partir de (5.31) podemos verificar a seguinte relação

$$\int dz \Delta_0^{-1}(x-z; \theta_\beta)_{AC} \Delta_0(z-y; \theta_\beta)_{CB} = \delta(x-y)\delta_{AB},$$

de maneira que

$$K(x)\Delta_0(x-y; \theta_\beta)_{AB} = -i\tau_{AB}\delta(x-y).\tag{5.32}$$

Nesse caso, considerando (5.28) e a forma do inverso do propagador (5.31) na fórmula (5.27), temos

$$T \exp(i \int dx J(x)\tau\phi(x)) = N_\theta \exp\left(\int dx \phi(x)K(x)\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{W_0[J;\theta_\beta]}\tag{5.33}$$

Este resultado pode ser generalizado para o caso outros campos. Mais adiante faremos uma aplicação no caso de campos fermiônicos.

## 5.4 Operador funcional de espalhamento térmico $\widehat{S}[J]$ da DCT

Considerando as teorias nas quais a interação  $\widehat{\mathcal{H}}_{int} = -\widehat{\mathcal{L}}_{int}$  é funcional apenas dos campos, podemos definir o seguinte operador funcional

$$\widehat{S}[J] = \mathcal{N} T \exp \left( i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int}(\phi(x)) + i \int dx J(x) \tau \phi(x) \right) \quad (5.34)$$

onde escolhemos a constante  $\mathcal{N}$  como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{1}{\langle 0; \theta_\beta | \exp(i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int}(\phi(x))) | 0; \theta_\beta \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle 0; \theta_\beta | T \widehat{U}(\infty, -\infty) | 0; \theta_\beta \rangle}, \end{aligned}$$

de forma que  $\widehat{S}[J]$  satisfaça

$$\langle 0; \theta_\beta | \widehat{S}[J = 0] | 0; \theta_\beta \rangle = \mathcal{N} \langle 0; \theta_\beta | \exp(i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int}(\phi(x))) | 0; \theta_\beta \rangle = 1. \quad (5.35)$$

Outra propriedade de  $\widehat{S}[J]$ , que pode ser verificada diretamente é

$$\widehat{S}[J] = \mathcal{N} \exp \left( i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int} \left( -i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right) T \exp \left( i \int dx J(x) \tau \phi(x) \right),$$

Substituindo (5.33) no resultado anterior, podemos reescrever o operador  $\widehat{S}[J]$  do seguinte modo

$$\begin{aligned} \widehat{S}[J] &= \mathcal{N} \exp \left( i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int} \left( -i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right) N_\theta \exp \left( \int dx \phi(x) K(x) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) e^{W_0[J; \theta_\beta]}, \\ &= N_\theta \exp \left( \int dx \phi(x) K(x) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \mathcal{N} \exp \left( i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int} \left( -i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right) e^{W_0[J; \theta_\beta]}. \end{aligned}$$

(5.36)

### 5.4.1 O funcional gerador $Z[J; \theta_\beta]$ das funções de Green térmicas na DCT

Seja  $Z[J; \theta_\beta]$  um funcional definido por

$$Z[J; \theta_\beta] = \langle 0; \theta_\beta | \widehat{S}[J] | 0; \theta_\beta \rangle. \quad (5.37)$$

Considerando a definição de  $\widehat{S}[J]$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{i^n} \prod_{j=1}^n \tau_{A_j A_j} \frac{\delta^n Z[J; \theta_\beta]}{\prod_{j=1}^n \delta J(x_j)_{A_j}} \Big|_{J=0} &= \frac{\langle 0; \theta_\beta | T \widehat{U}(\infty, -\infty) \phi(x_1)_{A_1} \dots | 0; \theta_\beta \rangle}{\langle 0; \theta_\beta | T \widehat{U}(\infty, -\infty) | 0; \theta_\beta \rangle}, \\ &= \Delta(x_1, \dots, x_n; \theta_\beta)_{A_1 \dots A_n} \end{aligned}$$

e portanto, considerando (5.8),  $Z[J; \theta_\beta]$  é o funcional gerador das funções de Green térmicas na DCT. Substituindo (5.36) em (5.37), temos que

$$\begin{aligned} Z[J; \theta_\beta] &= \mathcal{N} \langle 0, \theta_\beta | N_\theta \exp\left(\int dx \phi(x) K(x) \frac{\delta}{\delta J(x)}\right) | 0, \theta_\beta \rangle \\ &\times \exp\left(i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int}\left(-i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) e^{W_0[J; \theta_\beta]}, \\ &= \mathcal{N} \exp\left(i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int}\left(-i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) e^{W_0[J; \theta_\beta]}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Usando a propriedade (5.35), mostramos que o funcional é normalizado, ou seja

$$Z[J = 0; \theta_\beta] = 1. \quad (5.39)$$

Isto permite reobter a constante  $\mathcal{N}$ , a partir de (5.38),

$$\mathcal{N}^{-1} = \exp\left(i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int}\left(-i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) e^{W_0[J; \theta_\beta]} \Big|_{J=0}$$

que, substituindo em (5.38), resulta

$$Z[J; \theta_\beta] = \frac{\exp(i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int}(-i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)})) e^{W_0[J; \theta_\beta]}}{\exp(i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int}(-i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)})) e^{W_0[J; \theta_\beta]|_{J=0}}}. \quad (5.40)$$

Como o funcional gerador é normalizado, as funções de Green obtidas são totalmente conectadas às pernas externas; ou seja, não há bolhas de vácuo.

### 5.4.2 Fórmula de redução para DCT

Considerando o resultado (5.38) em (5.36), podemos reescrever o operador de espalhamento térmico  $\widehat{S}[J]$  em termos do funcional gerador

$$\widehat{S}[J] = N_\theta \exp\left(\int dx \phi(x) K(x) \frac{\delta}{\delta J(x)}\right) Z[J; \theta_\beta]. \quad (5.41)$$

A expressão análoga a esta em TQC ( $T = 0$ ) é às vezes referida como a fórmula de redução na forma funcional [32]. Mais adiante esta fórmula será aplicada perturbativamente na obtenção da amplitude de espalhamento térmica, o que permite o cálculo da taxa de decaimento  $\Gamma$  em um meio a temperatura  $1/\beta$ . Comparamos então estes resultados com a literatura [27, 28].

A fórmula (5.40) aqui deduzida via Teorema de Wick para DCT, é a mesma obtida por [38], que, construindo uma equação diferencial funcional para  $Z$ , propuseram (5.40) como ansatz resultando num propagador térmico interagente satisfazendo a condição KMS, que é assegurada pela existência de uma representação espectral. Mais adiante veremos que a existência de uma

representação espectral para o propagador interagente possui consequências importantes na teoria de perturbação da DCT.

### Funcional gerador $Z[J; \theta_\beta]$ em termos de integrais de trajetória

Note que a forma do funcional gerador  $Z[J; \theta_\beta]$  é gaussiana, uma vez que o funcional  $W_0[J]$  é quadrático nas correntes. Segue então que a fórmula (5.40) pode ser obtida a partir da seguinte integração funcional

$$\begin{aligned}
Z[J; \theta_\beta] &= \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\phi \exp[i \int dx dy (\frac{1}{2} \phi(x) \tau i \Delta_0^{-1}(x-y; \theta_\beta) \tau \phi(y)) \\
&\quad + i \int dx (\widehat{\mathcal{L}}_{int}(\phi(x)) + J(x) \tau \phi(x))] \\
&= \mathcal{N}' \exp[i \int dx (\widehat{\mathcal{L}}_{int}(-i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)}))] \\
&\quad \times \int \mathcal{D}\phi \exp[i \int dx dy (\frac{1}{2} \phi(x) \tau i \Delta_0^{-1}(x-y; \theta_\beta) \tau \phi(y)) \\
&\quad + i \int dx J(x) \tau \phi(x)], \tag{5.42}
\end{aligned}$$

onde a integral funcional gaussiana é dada por

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\phi \exp(i \int dx dy (\frac{1}{2} \phi(x) \tau i \Delta_0^{-1}(x-y; \theta_\beta) \tau \phi(y)) + i \int dx J(x) \tau \phi(x)) \\
&= \mathcal{N}'' \exp(-\frac{1}{2} \int dx dy J(y) \tau \Delta_0(x-y; \theta_\beta) \tau J(x)) \\
&= \mathcal{N}'' e^{W_0[J; \theta_\beta]}. \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Como já vimos, nas Eqs.(5.29) e (5.30), o inverso do propagador  $\Delta_0(x-y; \theta_\beta)$  é dado por

$$\begin{aligned}\Delta_0^{-1}(x-y; \theta_\beta) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \Delta_0^{-1}(p; \theta_\beta) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \left( \frac{1}{i} (p^2 - m^2) \tau + \epsilon \tau U^2(\theta_\beta) \tau \right),\end{aligned}$$

e, considerando que em (5.43), o propagador  $\Delta_0(x-y; \theta_\beta)$  é obtido pela inversão de  $\Delta_0^{-1}(x-y; \theta_\beta)$ , temos que o termo proporcional a  $\epsilon$  deve ser mantido. O referido termo desempenha ainda o papel de fator de convergência da integral gaussiana.

Substituindo (5.43) em (5.42), temos que o funcional  $Z[J; \theta_\beta]$  é dado por

$$\begin{aligned}Z[J; \theta_\beta] &= \mathcal{N}' \mathcal{N}'' \exp\left(i \int dx \left( \widehat{\mathcal{L}}_{int} i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)\right) e^{W_0[J; \theta_\beta]} \\ &= \mathcal{N}' \mathcal{N}'' \exp\left(i \int dx \left( \widehat{\mathcal{L}}_{int} i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)\right) e^{W_0[J; \theta_\beta]}.\end{aligned}\tag{5.44}$$

Se escolhermos a constante  $\mathcal{N}'$  como

$$\mathcal{N}' = \frac{1}{\mathcal{N}'' \exp\left(i \int dx \left( \widehat{\mathcal{L}}_{int} i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)\right) e^{W_0[J; \theta_\beta]}|_{J=0}},$$

o funcional (5.44) fica normalizado, sendo dado por

$$Z[J; \theta_\beta] = \frac{\exp\left(i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int} \left(-i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) e^{W_0[J; \theta_\beta]}}{\exp\left(i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int} \left(-i\tau \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) e^{W_0[J; \theta_\beta]}|_{J=0}},\tag{5.45}$$

exatamente como em (5.40). Em [39], o que fizemos foi construir uma prescrição de termalização onde o inverso do propagador  $\Delta_0^{-1}(x - y; \theta_\beta)$  é obtido por meio de um operador térmico de Bogoliubov com a mesma atuação que (3.128) para o caso do campo escalar real, o que, de maneira similar ao que acabamos de fazer, resulta no funcional (5.40).

## 5.5 Análise da teoria de perturbação na DCT

No começo deste capítulo vimos que a lei de substituição til para campos livres, que é uma consequência natural da estrutura algébrica da DCT, é equivalente a condição KMS para o propagador livre. Além disso, em (5.14) vimos que esta condição é um ingrediente importante na dedução da teoria de perturbação das funções de correlação de  $n$  pontos (5.15). Vejamos como essa mesma estrutura algébrica implica na condição KMS para o caso do propagador interagente e quais as consequências disso na teoria de perturbação da DCT.

### 5.5.1 Lei de substituição: caso interagente

Antes de resolvermos essa questão, vejamos alguns resultados que serão úteis mais adiante e que decorrem da duplicação dos graus de liberdade e da regra de conjugação til da DCT. Sejam  $A$  e  $\tilde{A}$  operadores bosônicos

que atuam nos setores não til e til, respectivamente, do espaço de Hilbert duplicado  $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ , que é expandido pela base<sup>3</sup>  $\{|m, \tilde{n}\rangle\}$ . Por definição temos

$$\begin{aligned}\langle m, \tilde{n}|A|p, \tilde{q}\rangle &= \langle m|A|p\rangle\langle \tilde{n}|\tilde{q}\rangle, \\ \langle m, \tilde{n}|\tilde{A}|p, \tilde{q}\rangle &= \langle m|p\rangle\langle \tilde{n}|\tilde{A}|\tilde{q}\rangle,\end{aligned}$$

sendo que a relação entre os operadores do espaço til e não til pode ser definida como [40]

$$\langle \tilde{n}|\tilde{A}^\dagger|\tilde{p}\rangle = \langle p|A|n\rangle. \quad (5.46)$$

Vejamos o que podemos dizer a respeito do vetor  $\tilde{A}^\dagger|1\rangle$ , em consequência de (5.46), considerando suas componentes

$$\begin{aligned}\langle m, \tilde{n}|\tilde{A}^\dagger|1\rangle &= \langle m, \tilde{n}|\tilde{A}^\dagger \sum_p |p, \tilde{p}\rangle \\ &= \sum_p \langle \tilde{n}|\tilde{A}^\dagger|\tilde{p}\rangle\langle m|p\rangle\end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Não confundir  $m, \tilde{m}, n, \tilde{n}, p, \tilde{p}, \dots$  com números inteiros, eles são vetores ortonormalizados que expandem o espaço de Hilbert da TQC.

utilizando (5.46), teremos

$$\begin{aligned}
\langle m, \tilde{n} | \tilde{A}^\dagger | 1 \rangle &= \sum_p \langle m | p \rangle \langle p | A | n \rangle = \langle m | \sum_p | p \rangle \langle p | A | n \rangle \\
&= \langle m | A | n \rangle = \langle m | A | \sum_p | p \rangle \langle p | n \rangle \\
&= \sum_p \langle m, \tilde{n} | A | p, \tilde{p} \rangle = \langle m, \tilde{n} | A | \sum_p | p, \tilde{p} \rangle \\
&= \langle m, \tilde{n} | A | 1 \rangle,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\tilde{A}^\dagger | 1 \rangle = A | 1 \rangle. \quad (5.47)$$

Digamos que esta é a versão mais simples da lei de substituição til. Uma consequência desta lei sobre o vácuo térmico interagente é

$$\begin{aligned}
|\Omega; \theta_\beta \rangle &= Z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta}{2} H} | 1 \rangle \\
&= Z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta}{2} \tilde{H}} | 1 \rangle
\end{aligned} \quad (5.48)$$

Considere agora um campo escalar real  $\phi(x)_A = (\phi(x), \tilde{\phi}(x))$  na representação de Heisenberg

$$\begin{aligned}
\phi(x)_A &= e^{ix^0 \hat{H}} \phi(x)_A e^{-ix^0 \hat{H}} \\
&= (e^{ix^0 H} \phi(x) e^{-ix^0 H}, e^{-ix^0 \tilde{H}} \tilde{\phi}(x) e^{ix^0 \tilde{H}})
\end{aligned}$$

onde  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$  é o hamiltoniano total do sistema. Vejamos o que

podemos dizer a respeito do seguinte vetor

$$\phi(x)|\Omega; \theta_\beta\rangle = Z^{-\frac{1}{2}}\phi(x)e^{-\frac{\beta}{2}H}|1\rangle.$$

Considerando a lei de substituição til (5.47), temos

$$\begin{aligned}\phi(x)|\Omega; \theta_\beta\rangle &= Z^{-\frac{1}{2}}\left(\phi(x)e^{-\frac{\beta}{2}H}\right)^{\sim\uparrow}|1\rangle \\ &= Z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\beta}{2}\tilde{H}}\tilde{\phi}^\dagger(x)|1\rangle \\ &= Z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\beta}{2}\tilde{H}}\tilde{\phi}(x)e^{\frac{\beta}{2}\tilde{H}}e^{-\frac{\beta}{2}\tilde{H}}|1\rangle;\end{aligned}$$

e com (5.48), temos

$$\begin{aligned}\phi(x)|\Omega; \theta_\beta\rangle &= e^{-\frac{\beta}{2}\tilde{H}}\tilde{\phi}^\dagger(x)e^{\frac{\beta}{2}\tilde{H}}|\Omega; \theta_\beta\rangle \\ &= \tilde{\phi}^\dagger(x - i\frac{\beta}{2}\hat{n}_0)|\Omega; \theta_\beta\rangle\end{aligned}$$

que é uma das leis de substituição til no caso interagente. Com manipulações semelhantes as que acabamos de realizar, podemos mostrar as demais leis para o caso interagente, ou seja

$$\begin{aligned}\langle\Omega; \theta_\beta|\phi(x) &= \langle\Omega; \theta_\beta|\tilde{\phi}^\dagger(x + i\hat{n}_0\frac{\beta}{2}), \\ \tilde{\phi}^\dagger(x + i\hat{n}_0\frac{\beta}{2})|\Omega; \theta_\beta\rangle &= \phi(x + i\beta\hat{n}_0\beta)|\Omega; \theta_\beta\rangle, \\ \langle\Omega; \theta_\beta|\tilde{\phi}^\dagger(x - i\hat{n}_0\frac{\beta}{2}) &= \langle\Omega; \theta_\beta|\phi(x + i\hat{n}_0\beta),\end{aligned}$$

Este resultado se reduz às leis de substituição til livres (5.3) e (5.4), se fizermos  $H_{int} = 0$ . Analogamente aos cálculos (5.5), (5.6) e (5.7), realizados no

caso livre, podemos mostrar que o propagador interagente, definido por

$$\Delta(x - y; \theta_\beta) = \langle \Omega; \theta_\beta | T \phi(x) \phi(y) | \Omega; \theta_\beta \rangle,$$

satisfaz a condição KMS

$$\Delta^*(x - y; \theta_\beta) = \Delta(x - y - i\beta\eta(x_0 - y_0)\hat{n}_0; \theta_\beta),$$

em acordo com a estrutura algébrica da DCT.

### 5.5.2 Condição KMS e teoria de perturbação

Em [38, 41] argumenta-se que a validade da condição KMS pode ser garantida pela existência de uma representação espectral para o propagador interagente. Esta representação é dada por

$$\Delta(p_0, \vec{p}; \theta_\beta)_{AB} = \int d\omega \rho_\beta(\omega, \vec{p}) \Delta_0(p_0, \omega; \theta_\beta)_{AB}, \quad (5.49)$$

onde a função espectral a temperatura finita  $\rho_\beta$  é real, sendo  $\Delta_0(p_0, \omega; \theta_\beta)$  definido por<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \Delta_0(p_0, \omega; \theta_\beta) &= U(\theta_\beta^{p_0}) \mathbf{\Delta}_0(p_0, \omega) U(\theta_\beta^{p_0}) \\ &= U(\theta_\beta^{p_0}) \begin{pmatrix} \overline{\Delta}_0(p_0, \omega) & 0 \\ 0 & \overline{\Delta}_0(p_0, \omega)^* \end{pmatrix} U(\theta_\beta^{p_0}), \end{aligned} \quad (5.50)$$

---

<sup>4</sup>Nesta seção denotaremos as matrizes diagonais por meio do negrito. Note que uma matriz diagonal  $\mathbf{M}$  satisfaz:  $\boldsymbol{\tau} \mathbf{M} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}$ .

e a função  $\bar{\Delta}_0(p_0, \omega)$  é dada por

$$\bar{\Delta}_0(p_0, \omega) = \frac{i}{p_0^2 - \omega^2 + i\epsilon}. \quad (5.51)$$

Considerando (5.51) e substituindo (5.50) em (5.49), teremos

$$\begin{aligned} \Delta(p; \theta_\beta) &= U(\theta_\beta^{p_0}) \mathbf{\Delta}(p; \rho_\beta) U(\theta_\beta^{p_0}) \\ &= U(\theta_\beta^{p_0}) \begin{pmatrix} \Delta(p; \rho_\beta) & 0 \\ 0 & \Delta(p; \rho_\beta)^* \end{pmatrix} U(\theta_\beta^{p_0}), \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde a função  $\Delta(p; \rho_\beta)$  é dada por

$$\Delta(p_0, \vec{p}; \rho_\beta) = \int d\omega \frac{i\rho_\beta(\omega, \vec{p})}{p_0^2 - \omega^2 + i\epsilon}.$$

A equação matricial de Dyson da DCT é dada por

$$\Delta(p; \theta_\beta) = \Delta_0(p; \theta_\beta) + \Delta_0(p; \theta_\beta) (-i\Sigma(p; \theta_\beta)) \Delta(p; \theta_\beta), \quad (5.53)$$

onde  $\Sigma(p; \theta_\beta)$  é a auto-energia térmica. A partir de (5.53) podemos obter

$$\Sigma(p; \theta_\beta) = i(\Delta_0^{-1}(p; \theta_\beta) - \Delta^{-1}(p; \theta_\beta)), \quad (5.54)$$

e, considerando a forma do propagador livre

$$\begin{aligned} \Delta_0(p; \theta_\beta) &= U(\theta_\beta^{p_0}) \mathbf{\Delta}_0(p) U(\theta_\beta^{p_0}), \\ \mathbf{\Delta}_0(p) &= \begin{pmatrix} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e a Eq.(5.52), teremos

$$\begin{aligned}
\Sigma(p; \theta_\beta) &= U^{-1}(\theta_\beta^{p_0})i(\Delta_0^{-1}(p) - \Delta^{-1}(p; \rho_\beta))U^{-1}(\theta_\beta^{p_0}) \\
&= \tau U(\theta_\beta^{p_0})\tau i(\Delta_0^{-1}(p) - \Delta^{-1}(p; \rho_\beta))\tau U(\theta_\beta^{p_0})\tau \\
&= \tau U(\theta_\beta^{p_0})i(\Delta_0^{-1}(p) - \Delta^{-1}(p; \rho_\beta))U(\theta_\beta^{p_0})\tau \\
&= \tau U(\theta_\beta^{p_0})\bar{\Sigma}(p; \theta_\beta)U(\theta_\beta^{p_0})\tau,
\end{aligned} \tag{5.55}$$

onde  $\bar{\Sigma}(p; \theta_\beta)$  é dada por

$$\bar{\Sigma}(p; \theta_\beta) = i(\Delta_0^{-1}(p) - \Delta^{-1}(p; \rho_\beta)). \tag{5.56}$$

A partir da forma das matrizes  $\Delta_0^{-1}(p)$  e  $\Delta^{-1}(p; \rho_\beta)$ , podemos concluir que

$$\bar{\Sigma}(p; \theta_\beta) = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}(p; \theta_\beta) & 0 \\ 0 & -\bar{\Sigma}^*(p; \theta_\beta) \end{pmatrix}. \tag{5.57}$$

Isolando  $\Delta(p; \rho_\beta)$  em (5.56) e o substituindo em (5.52) obtemos

$$\Delta(p; \theta_\beta) = U(\theta_\beta^{p_0}) \begin{pmatrix} \frac{i}{p^2 - m^2 - \bar{\Sigma}(p; \theta_\beta) + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{p^2 - m^2 - \bar{\Sigma}^*(p; \theta_\beta) - i\epsilon} \end{pmatrix} U(\theta_\beta^{p_0}). \tag{5.58}$$

A partir de (5.55) e (5.57), fica evidente que as componentes de  $\Sigma(p; \theta_\beta)$  não são independentes. A equação (5.55) nos permite encontrar as relações entre os componentes de  $\Sigma(p; \theta_\beta)$  e  $\bar{\Sigma}(p; \theta_\beta)$

$$\begin{aligned}
Re \Sigma_{11} = -Re \Sigma_{22} = Re \bar{\Sigma}, & \quad Im \Sigma_{11} = Im \Sigma_{22} = \frac{1}{\tanh \frac{\beta|p_0|}{2}} Im \bar{\Sigma}, \\
Re \Sigma_{12} = Re \Sigma_{21} = 0, & \quad Im \Sigma_{12} = Im \Sigma_{21} = -\frac{1}{\sinh \frac{\beta|p_0|}{2}} Im \bar{\Sigma}.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Considere a solução da equação (5.53) na forma da série de Dyson, isto é

$$\begin{aligned}
\Delta(p; \theta_\beta) &= \Delta_0(p; \theta_\beta) + \Delta_0(p; \theta_\beta)(-i\Sigma(p; \theta_\beta))\Delta_0(p; \theta_\beta) \\
&+ \Delta_0(p; \theta_\beta)(-i\Sigma(p; \theta_\beta))\Delta_0(p; \theta_\beta)(-i\Sigma(p; \theta_\beta))\Delta_0(p; \theta_\beta) + \dots .
\end{aligned}
\tag{5.60}$$

Fica então evidente que, cada termo desta série contendo  $n$  propagadores livres  $\Delta_0(p; \theta_\beta)$ , o qual é dado por

$$\begin{aligned}
&\Delta_0(p; \theta_\beta) \\
&= U(\theta_\beta^{p_0}) \begin{pmatrix} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix} U(\theta_\beta^{p_0}) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi n_B \delta(p^2 - m^2) & 2\pi e^{\beta|p_0|/2} n_B \delta(p^2 - m^2) \\ 2\pi n_B e^{\beta|p_0|/2} \delta(p^2 - m^2) & \frac{-i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} + 2\pi n_B \delta(p^2 - m^2) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

vai conter produtos de  $\delta^n(p^2 - m^2)$ , resultando em singularidades que tornam a série sem sentido. No entanto, como resultado da existência da representação espectral (5.49), que equivale à condição KMS, temos que o propagador interagente é dado por (5.58), que é bem definido. Isso significa que, de alguma maneira, os produtos  $\delta^n(p^2 - m^2)$  devem se cancelar.

Vejamos num exemplo simples, no cálculo do propagador interagente em primeira ordem na teoria  $\lambda\phi^4$ , como este cancelamento acontece. Com a duplicação dos graus de liberdade, a teoria  $\lambda\phi^4$  é descrita pela lagrangiana

de interação

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}}_{int} &= \frac{\lambda}{4!}\phi(x)^4 - \frac{\lambda}{4!}\tilde{\phi}(x)^4 \\ &= \frac{\lambda}{4!}\sum_A \tau_{AA}\phi(x)_A^4,\end{aligned}$$

sendo que o funcional gerador das funções de Green térmicas  $Z[J; \theta_\beta]$  para esta teoria é definido por

$$\begin{aligned}Z[J; \theta_\beta] &= \exp\left(i \int dx \widehat{\mathcal{L}}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\tau}{i}\right)\right) e^{W_0[J; \theta_\beta]} \\ &= \left[1 - i \int dx \tau_{AA}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)_A}\right)^4 + \dots\right] e^{W_0[J; \theta_\beta]},\end{aligned}$$

que, em primeira ordem, é dado por

$$Z[J; \theta_\beta] = (1 + D_1[J; \theta_\beta])e^{W_0[J; \theta_\beta]} + \dots,$$

onde  $W_0[J; \theta_\beta]$  e  $D_1[J; \theta_\beta]$  são dados por

$$\begin{aligned}D_1[J; \theta_\beta] &= -i \sum_A \int dx \tau_{AA}\left(\frac{\delta^4 e^{W_0[J; \theta_\beta]}}{\delta J(x)_A^4}\right), \\ W_0[J; \theta_\beta] &= -\frac{1}{2} \int dx dy J(x) \tau \Delta(x-y; \theta_\beta) \tau J(y).\end{aligned}$$

Conforme (5.15), o propagador interagente é definido por

$$\begin{aligned}\Delta(x-y; \theta_\beta)_{AB} &= \frac{\tau_{AA}\tau_{BB}}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)_A \delta J(y)_B} \Big|_{J=0} \\ &= -\tau_{AA}\tau_{BB} \frac{\delta^2 e^{W_0[J; \theta_\beta]}}{\delta J(x)_A \delta J(y)_B} \Big|_{J=0} - \tau_{AA}\tau_{BB} \frac{\delta^2 D_1[J; \theta_\beta]}{\delta J(x)_A \delta J(y)_B} \Big|_{J=0} \\ &+ \dots\end{aligned}$$

onde, é imediato que

$$-\tau_{AA}\tau_{BB}\frac{\delta^2 e^{W_0[J;\theta_\beta]}}{\delta J(x)_A\delta J(y)_B}\Big|_{J=0} = \Delta_0(x-y;\beta)_{AB} \quad (5.61)$$

e, com um pouco de trabalho, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^2 D_1[J;\theta_\beta]}{\delta J(x)_A\delta J(y)_B}\Big|_{J=0} \\ = & i\frac{\lambda}{2}\int dx'[\tau_{AA}\Delta_0(x-x';\theta_\beta)_{A1}\Delta_0(0;\theta_\beta)_{11}\Delta_0(x'-y;\theta_\beta)_{1B}\tau_{BB} \\ & - \tau_{AA}\Delta_0(x-x';\theta_\beta)_{A2}\Delta_0(0;\theta_\beta)_{22}\Delta_0(x'-y;\theta_\beta)_{2B}\tau_{BB}] + \dots \end{aligned}$$

Por conseguinte, o propagador interagente resulta em

$$\begin{aligned} \Delta(x-y;\theta_\beta)_{AB} &= \Delta_0(x-y;\theta_\beta)_{AB} \\ &- i\frac{\lambda}{2}\int dx'[\Delta_0(x-x';\theta_\beta)_{A1}\Delta_0(0;\theta_\beta)_{11}\Delta_0(x'-y;\theta_\beta)_{1B} \\ &- \Delta_0(x-x';\theta_\beta)_{A2}\Delta_0(0;\theta_\beta)_{22}\Delta_0(x'-y;\theta_\beta)_{1B}] \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}[\Delta_0(p;\theta_\beta)_{AB} \\ &+ \Delta_0(p;\theta_\beta)_{AA'}(-i\Sigma(p;\theta_\beta)_{A'B'})\Delta_0(p;\theta_\beta)_{B'B}] + \dots \end{aligned} \quad (5.62)$$

de forma que a série de Dyson no espaço dos momentos é dada por

$$\begin{aligned} \Delta(p;\theta_\beta)_{AB} &= \Delta_0(p;\theta_\beta)_{AB} + \Delta_0(p;\theta_\beta)_{A1}(-i\Sigma(p;\theta_\beta)_{11})\Delta_0(p;\theta_\beta)_{1B} \\ &+ \Delta_0(p;\theta_\beta)_{A2}(-i\Sigma(p;\theta_\beta)_{22})\Delta_0(p;\theta_\beta)_{1B} + \dots \end{aligned}$$

$$(5.63)$$

É evidente que os produtos dos propagadores  $\Delta_0(p; \theta_\beta)$ , no segundo e terceiro termos da série de Dyson (5.63), contêm singularidades do tipo  $\delta^2(p^2 - m^2)$ .

$$A \text{ --- } \textcircled{\times} \text{ --- } B = A \text{ --- } B + A \text{ --- } \textcircled{\bullet} \text{ --- } B + A \text{ --- } \textcircled{\circ} \text{ --- } B + \dots$$

Figura 5.1: A série de Dyson (5.63) representada por meio de diagramas de Feynman. Nos dois últimos diagramas, o ponto cheio representa o vértice da lagrangiana ordinária, que recebe o fator  $-i\lambda$ , e o ponto vazio representa o vértice da lagrangiana til, que recebe o fator  $+i\lambda$ .

A partir de (5.63), temos que a auto-energia térmica  $\Sigma(p; \theta_\beta)$  é identificada como

$$\Sigma(p; \theta_\beta) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} \Delta(0; \theta_\beta)_{11} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} \Delta(0; \theta_\beta)_{22} \end{pmatrix} = \Delta m^2(\theta_\beta) \tau \quad (5.64)$$

onde definimos  $\Delta m^2(\theta_\beta)$

$$\begin{aligned} \Delta m^2(\theta_\beta) &= \frac{\lambda}{2} \Delta(0; \theta_\beta)_{11} = \frac{\lambda}{2} \Delta(0; \theta_\beta)_{22} \\ &= \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{p}}} \left( 1 + 2v^2(\theta_\beta^{\vec{p}}) \right), \\ &= \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{p}}} \coth \left( \beta \frac{E_{\vec{p}}}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.65)$$

que é uma quantidade real. A partir de (5.55), podemos obter a auto-energia

$\bar{\Sigma}(p; \theta_\beta)$ , que leva a

$$\bar{\Sigma}(0; \theta_\beta) = \Delta m^2(\theta_\beta) \tau.$$

Portanto, conforme (5.58), o propagador interagente  $\Delta(p; \theta_\beta)$  pode ser escrito como

$$\Delta(p; \theta_\beta) = U(\theta_\beta^{p_0}) \begin{pmatrix} \frac{i}{p^2 - m^2 - \Delta m^2(\theta_\beta) + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{p^2 - m^2 - \Delta m^2(\theta_\beta) - i\epsilon} \end{pmatrix} U(\theta_\beta^{p_0}) \quad (5.66)$$

Em primeira ordem, vemos que o propagador interagente é bem definido a despeito da referida presença de singularidades do tipo  $\delta^2(p^2 - m^2)$  em (5.63).

Vejamos como se dá o cancelamento.

### Fórmula da derivada da massa

Utilizando (5.63) e (5.64), podemos reescrever a correção de primeira ordem no propagador interagente como

$$\begin{aligned} & -\tau_{AA}\tau_{BB} \left. \frac{\delta^2 D_1}{\delta J(x)_A \delta J(y)_B} \right|_{J=0} \\ &= -i\Delta m^2(\theta_\beta) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} (\Delta(p; \theta_\beta)_{A1} \Delta(p; \theta_\beta)_{1B} - \Delta(p; \theta_\beta)_{A2} \Delta(p; \theta_\beta)_{2B}) \end{aligned} \quad (5.67)$$

Para mostrar o cancelamento das singularidades em termos gerais, ou seja, em qualquer ordem, devemos utilizar a chamada fórmula da derivada da massa (FDM) [42–44], que é dada por

$$\frac{1}{N!} \left( i \frac{\partial}{\partial m^2} \right)^N [\Delta(p; \theta_\beta) \boldsymbol{\tau}]_{AB} = [(\Delta(p; \theta_\beta) \boldsymbol{\tau})^{N+1}]_{AB}. \quad (5.68)$$

O detalhe interessante desta fórmula é que o lado direito da igualdade parece conter as singularidades do tipo  $\delta^N(p^2 - m^2)$ . No entanto, essas singularidades se cancelam resultando no termo bem definido à esquerda da igualdade. Esta fórmula pode ser verificada de forma direta para caso  $N = 1$ , e demonstrada para qualquer ordem  $N$  via princípio de indução finita. No nosso caso  $N = 1$ , portanto temos

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial m^2} [\Delta_0(p; \theta_\beta) \boldsymbol{\tau}]_{AB} &= [(\Delta_0(p; \theta_\beta) \boldsymbol{\tau})^2]_{AB} \Rightarrow \\
i \frac{\partial}{\partial m^2} \Delta_0(p; \theta_\beta)_{AB} &= \Delta_0(p; \theta_\beta)_{A1} \Delta_0(p; \theta_\beta)_{1B} - \Delta_0(p; \theta_\beta)_{A2} \Delta_0(p; \theta_\beta)_{2B}
\end{aligned} \tag{5.69}$$

que é igual ao termo a direita da igualdade em (5.67). Substituindo (5.69) em (5.67), teremos

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{\tau}_{AA} \boldsymbol{\tau}_{BB} \frac{\delta^2 D_1}{\delta J(x)_A \delta J(y)_B} &= -i \Delta m^2(\theta_\beta) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} i \frac{\partial}{\partial m^2} \Delta_0(p; \theta_\beta)_{AB}, \\
&= \Delta m^2(\theta_\beta) \frac{\partial}{\partial m^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \Delta_0(p; \theta_\beta)_{AB}, \\
&= \Delta m^2(\theta_\beta) \frac{\partial}{\partial m^2} \Delta_0(x-y; \theta_\beta)_{AB},
\end{aligned}$$

que é livre das referidas singularidades. Substituindo o resultado (5.70) em (5.62), obtemos

$$\Delta(x-y; \theta_\beta)_{AB} = \Delta_0(x-y; \theta_\beta)_{AB} + \Delta m^2(\theta_\beta) \frac{\partial}{\partial m^2} \Delta_0(x-y; \theta_\beta)_{AB} + \dots$$

Isso significa que o efeito da interação até um loop corresponde à um acréscimo de uma massa, associada a  $\Delta m^2(\theta_\beta)$ , na teoria livre, ou seja,

$$\Delta(x - y; \theta_\beta)_{AB} = \Delta_0(x - y; \theta_\beta)_{AB}|_{m^2 + \Delta m^2(\theta_\beta)} + \dots$$

como já era esperado em (5.66). Este exemplo mostra a ausência de singularidades esperadas na teoria de perturbação até um *loop* para propagador interagente da teoria  $\lambda\phi^4$ , mas estes tipos de singularidades também podem surgir em quaisquer diagramas que contenham subdiagramas do tipo auto-energia. No entanto, a existência da representação espectral, que confirma a validade da condição KMS, nos assegura que essas singularidades deve se cancelar [41].

### **Comparações entre as teorias de perturbação da DCT e dos formalismos de Matsubara e Keldysh-Schwinger**

O formalismo de Matsubara [52], por se tratar de uma teoria de tempo imaginário definida no espaço  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{E}^3$ , possui uma teoria de perturbação com diagramas que são puramente reais. No entanto, em algumas aplicações [28,68] como o estudo de processos dissipativos, o cálculo da parte imaginária dos diagramas é essencial. Nestes casos, o formalismo de Matsubara pode ser utilizado realizando-se uma continuação analítica do tempo imaginário de volta para o tempo real. A DCT, por outro lado, é uma teoria de tempo real

definida no espaço de Minkowski, de maneira que as partes real e imaginária dos diagramas são evidentes. O propagador livre  $\Delta_0(p; \theta_\beta^{p_0})$ , por exemplo, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\Delta_0(p; \theta_\beta^{p_0}) &= U(\theta_\beta^{p_0}) \mathbf{\Delta}_0(p) U(\theta_\beta^{p_0}) \\
&= U(\theta_\beta^{p_0}) \left( iP \left( \frac{1}{p^2 - m^2} \right) \boldsymbol{\tau} + \pi \delta(p^2 - m^2) \mathbf{1} \right) U(\theta_\beta^{p_0}) \\
&= iP \left( \frac{1}{p^2 - m^2} \right) U(\theta_\beta^{p_0}) \boldsymbol{\tau} U(\theta_\beta^{p_0}) + \pi \delta(p^2 - m^2) U^2(\theta_\beta^{p_0}) \\
&= iP \left( \frac{1}{p^2 - m^2} \right) \boldsymbol{\tau} + \pi \delta(p^2 - m^2) U^2(\theta_\beta^{p_0}).
\end{aligned}$$

Desse modo, quando a parte imaginária de um diagrama é o objeto de interesse, ela pode ser obtida de forma direta na DCT, e de forma indireta em Matsubara; mas em geral o resultado é o mesmo. As relações (5.59) foram utilizadas para se verificar a igualdade entre a parte imaginária de  $\bar{\Sigma}$ , obtida de forma direta em DCT e por continuação analítica no formalismo de Matsubara [68]. Por outro lado, quando a parte real de um diagrama é o objeto de interesse, ela pode ser obtida diretamente em Matsubara e indiretamente na DCT. A teoria de perturbação da DCT, devido a duplicação dos graus de liberdade, apresenta uma série de diagramas para cada diagrama do formalismo de Matsubara. Em [43], apresenta-se uma prescrição que extrai dessa série de diagramas a parte física associada aos campos ordinários com a utilização da FDM (5.68). Essa prescrição resulta em uma quantidade real,

que é livre das singularidades do tipo  $\delta^N(p^2 - m^2)$  e, em geral, com resultados iguais aos obtidos no formalismo de Matsubara. No caso de diagramas com pernas externas, por exemplo, a prescrição consiste em somar sob todos os diagramas permitidos pela estrutura da teoria de perturbação na DCT, fixando-se uma das pernas externas como sendo associada ao campo ordinário. Vejamos um exemplo simples discutido em [35], que consiste na seguinte contribuição de segunda ordem

$$\Sigma_{Matsu}(p = 0; \beta) = \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (5.70)$$

para auto-energia a temperatura  $T = 1/\beta$  da teoria  $\lambda\phi^3$ .

Segundo a prescrição dada em [43], temos que a parte física da auto-energia térmica é dada pelos diagramas da DCT na figura 5.2, e que estão associados ao diagrama da figura 5.70. O resultado é

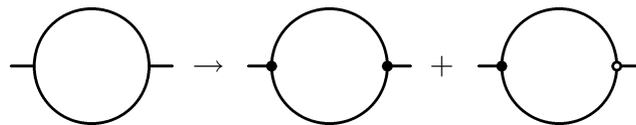


Figura 5.2: Prescrição de Fujimoto para obtenção da parte física do diagrama (5.70) na DCT.

cujo cálculo resulta em

$$\begin{aligned}
Re\Sigma(0; \theta_\beta) &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
&= i \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Delta_0(p; \theta_\beta^{p_0})_{11}^2 + \frac{i(-i\lambda)(+i\lambda)}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Delta_0(p; \theta_\beta^{p_0})_{12}^2 \\
&= -i \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \Delta_0(p; \theta_\beta^{p_0})_{11}^2 - \Delta_0(p; \theta_\beta^{p_0})_{12}^2 \right] \\
&= -i \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} i \frac{\partial}{\partial m^2} [\Delta_0(p; \theta_\beta^{p_0})_{11}] \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial}{\partial m^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Delta_0(p; \theta_\beta^{p_0})_{11} \\
&= \frac{\lambda^2}{4} \frac{\partial}{\partial m^2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{(1 + 2v^2(\theta_\beta^{p_0}))}{E_{\vec{p}}} \\
&= \frac{\lambda^2}{4} \frac{\partial}{\partial m^2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\coth(\beta E_{\vec{p}}/2)}{E_{\vec{p}}}
\end{aligned}$$

que é bem definida, e igual ao resultado obtido via formalimo de Matsubara [46].

O formalismo de Keldysh-Schwinger, também conhecido como formalismo de Contorno Temporal Fechado (CTF), assim como a DCT, é um formalismo de tempo real podendo ser definido em termos de vários contornos temporais, os quais usualmente partem de um instante inicial  $t = -\infty$  e terminam em  $t = -\infty - i\beta$ . No caso particular do caminho mostrado na figura (5.3), o propagador livre do campo escalar real no formalismo CTF é dado por<sup>5</sup>

$$\Delta_{CTF} = \boldsymbol{\tau} \Delta_{DCT} \boldsymbol{\tau},$$

---

<sup>5</sup>Lembremos que na DCT temos  $W_0[J; \theta_\beta] = e^{\boldsymbol{\tau} \Delta_{DCT} \boldsymbol{\tau}}$

que resulta, portanto, no mesmo funcional gerador das funções de Green para o dois formalismos.

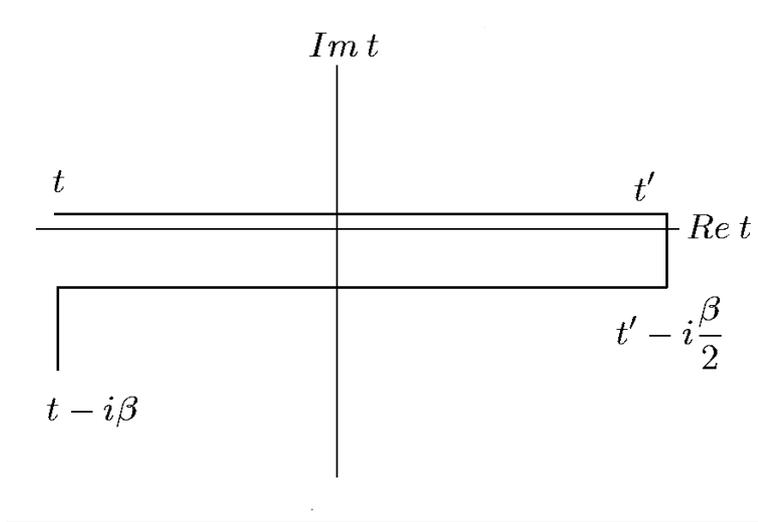


Figura 5.3: Note que a projeção do contorno temporal no eixo real é fechado. Os instantes são  $t$  e  $t'$  são tomados em  $t \rightarrow -\infty$  e  $t' \rightarrow +\infty$ .

Em se tratando do cálculo de quantidades físicas associadas a sistemas no equilíbrio, os dois formalismos são equivalentes [48, 49]. Apesar das semelhanças, as estruturas que constituem as teorias são fundamentalmente diferentes. Por se tratarem de teorias de tempo real, ambas contêm a duplicação, todavia as regras de conjugação til, as leis de substituição til e as relações de comutação entre operadores bosônicos til e não til, ou de anti-comutação entre operadores fermiônicos til e não til, não têm paralelo em CTF.

## Capítulo 6

# Espalhamento Térmico

Considerando a fórmula para o operador de espalhamento térmico (5.41) juntamente com o funcional gerador das funções de Green térmicas da DCT (5.40), que obtivemos via o teorema de Wick para DCT, vamos obter a amplitude de espalhamento térmica em termos do funcional gerador das funções de green térmicas da DCT no nível de árvore e em 1 *loop* para alguns exemplos, os quais já foram obtidos e comparados com os resultados obtidos por outros métodos em [27]. Antes vamos fazer uma breve discussão a respeito da fórmula de redução na forma funcional no caso da TQC a  $T = 0$ . [32]

## 6.1 Fórmula de redução na forma funcional na TQC

Seja  $Z[J_\phi, J_\varphi]$  o funcional gerador das funções de Green de uma teoria escalar, cuja interação é descrita por  $\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int}(\phi(x), \varphi(x))$ , dado por

$$Z[J_\phi, J_\varphi] = \exp\left(-i \int dx \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\phi(x)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\varphi(x)}\right)\right) e^{W_0[J_\phi, J_\varphi]}, \quad (6.1)$$

onde  $W_0[J_\phi, J_\varphi]$  é dado por

$$\begin{aligned} W_0[J_\phi, J_\varphi] &= W_\phi + W_\varphi, \\ W_\phi &= -\frac{1}{2} \int dx dy J_\phi(x) \Delta_\phi(x-y) J_\phi(y), \\ W_\varphi &= -\frac{1}{2} \int dx dy J_\varphi(x) \Delta_\varphi(x-y) J_\varphi(y). \end{aligned}$$

A partir de  $Z[J_\phi, J_\varphi]$  podemos estudar qualquer processo de espalhamento onde um conjunto de partículas incidentes  $\{i\}$  são espalhadas sob a ação da interação  $\mathcal{L}_{int}$  resultando nas partículas  $\{f\}$

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots \rightarrow p_{f1} + p_{f2} + \dots \quad .$$

A quantidade básica que descreve este processo é a amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}(i \rightarrow f)$ , a partir da qual podemos calcular quantidades mensuráveis tais como a seção de choque diferencial  $d\sigma$

$$d\sigma = \frac{1}{4E_{i1}E_{i2}v_{12}} d\Pi_f |\mathcal{M}(p_{i1} + p_{i2} \rightarrow p_{f1} + p_{f2} + \dots)|^2, \quad (6.2)$$

e a taxa de decaimento  $\Gamma$ , no caso de partículas instáveis

$$\Gamma(E_i) = \frac{1}{2E_i} \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_{f1} + p_{f2} + \dots)|^2, \quad (6.3)$$

sendo  $\int d\Pi_f$  a chamada integral de  $n$  corpos relativisticamente invariante, que é dada por

$$\int d\Pi_f = \int \prod_j \frac{d^3 p_{fj}}{(2\pi)^3 2E_{fj}} (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f). \quad (6.4)$$

A amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}(i \rightarrow f)$  é obtida da matriz  $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$  segundo

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) i \mathcal{M}(i \rightarrow f), \quad (6.5)$$

onde os conjuntos de partículas  $\{i\}$  e  $\{f\}$  são descritos pelos estados  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$  definidos por

$$|i\rangle = \prod_{l=1} \sqrt{2E_{il}} a_{\vec{p}_l}^\dagger |0\rangle, \\ \langle f| = \langle 0| \prod_{l=1} \sqrt{2E_{fl}} a_{\vec{p}_l}.$$

Podemos obter a amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}(i \rightarrow f)$  a partir do funcional  $Z[J_\phi, J_\varphi]$  pela chamada fórmula de redução na forma funcional [32]

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f|S[J_\phi, J_\varphi]|i\rangle|_{J=0} \\ &= \langle f|N \exp\left[\int dx (\phi(x)K_\phi(x) \frac{\delta}{\delta J_\phi(x)} + \varphi(x)K_\varphi(x) \frac{\delta}{\delta J_\varphi(x)})\right]|i\rangle \\ &\times Z[J_\phi, J_\varphi]|_{J=0} \end{aligned} \quad (6.6)$$

sendo que os operadores  $K_\phi$  e  $K_\varphi$  são dados por

$$K_\phi(x) = \partial_x^2 + m_\phi^2 \quad , \quad K_\varphi(x) = \partial_x^2 + m_\varphi^2 \quad (6.7)$$

e têm sua atuação dada por

$$K_\phi(x)\Delta_\phi(x-x') = K_\varphi(x)\Delta_\varphi(x-x') = -i\delta^4(x-x') \quad (6.8)$$

onde  $N$  é o ordenamento normal relativo ao vácuo  $|0\rangle$ . Expandimos (6.6) no argumento da exponencial

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f|i\rangle Z[J_\phi, J_\varphi]|_{J=0} + \int dx [\langle f|\phi(x)|i\rangle K_\phi(x) \frac{\delta Z}{\delta J_\phi(x)} \\ &\quad + \langle f|\varphi(x)|i\rangle K_\varphi(x) \frac{\delta Z}{\delta J_\varphi(x)}] + \dots \\ &= \delta_{fi} + \sum_{n=1}^n \frac{1}{n!} \int \prod_{l=1}^n dx_l \sum_{pq} \prod_{pq} \langle f|N\phi(x_p)\varphi(x_q)|i\rangle K_\phi(x_p)K_\varphi(x_q) \\ &\quad \times \frac{\delta^n Z[J_\phi, J_\varphi]}{\prod_{pq} \delta J_\phi(x_p)\delta J_\varphi(x_q)}|_0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

e calculamos a amplitude  $\langle f|N\phi(x_p)\phi(x_q)|i\rangle$  realizando todas as possíveis contrações entre os estados de 1 partícula em  $|i\rangle$  e  $\langle f|$  e os campos  $\phi(x_p)$  e  $\varphi(x_q)$ . Por exemplo a contração entre os campos  $\phi(x)$  e o estado de 1

partícula  $|\vec{k}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{k}}}a_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle$  é definida por [33]

$$\begin{aligned}
\overline{\phi(x)|\vec{k}\rangle} &\equiv \phi(x)^+|\vec{k}\rangle \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-ipx} a_{\vec{p}} \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^+ |0\rangle \\
&= |0\rangle \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\vec{k}}}{2E_{\vec{p}}}} e^{-ipx} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}^\dagger] \\
&= |0\rangle \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\vec{p}}}{2E_{\vec{k}}}} e^{-ipx} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{k}) \\
&= |0\rangle e^{-ikx},
\end{aligned} \tag{6.10}$$

e analogamente temos

$$\begin{aligned}
\overline{\langle\vec{k}|\phi(x)} &\equiv \langle\vec{k}|\phi(x)^- \\
&= e^{ikx}\langle 0|.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Nos primeiros termos da expansão em (6.9), há em geral poucos campos para contrair com os estados de 1 partícula em  $|i\rangle$  e  $\langle f|$  e, portanto, os estados não contraídos gerarão diagramas desconexos que estão associados a grupos de partículas que não interagem. Usualmente, descartamos tais amplitudes. A expansão (6.9) é truncada na amplitude  $\langle f|N \prod_{pq} \phi(x_p)\varphi(x_q)|i\rangle$  onde todos os estados em  $|i\rangle$  e  $\langle f|$  estão contraídos com os campos em  $\prod_{pq} \phi(x_p)\varphi(x_q)$ , pois a amplitude  $\langle f|N \prod_{pq} \phi(x_p)\varphi(x_q)|i\rangle$  se anula quando houver mais campos

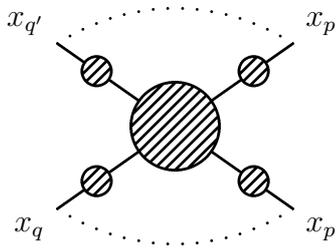
que estados para contrair, já que para os campos restantes teremos

$$\begin{aligned}\phi(x)^+|0\rangle &= \varphi(x)^+|0\rangle = 0, \\ \langle 0|\phi(x)^- &= \langle 0|\varphi(x)^- = 0.\end{aligned}$$

Estamos interessados nas amplitudes conexas onde todas as partículas participam na interação, ou seja, quando houver contração total em  $\langle f|N \prod_{pq} \phi(x_p)\varphi(x_q)|i\rangle$ . Nestes termos, precisaremos da função de Green interagente e conexa de  $n$  pontos em (6.9), sendo  $n$  o número total de partículas em  $\{i\}$  e  $\{f\}$ . A função de Green em (6.9) se decompõe em funções de Green conexas de maneira que

$$\frac{\delta^n Z[J_\phi, J_\varphi]}{\prod_{pq} \delta J_\phi(x_p)\delta J_\varphi(x_q)} \Big|_0 = \frac{\delta^n W[J_\phi, J_\varphi]}{\prod_{pq} \delta J_\phi(x_p)\delta J_\varphi(x_q)} \Big|_0 + (\text{termos desconexos}), \quad (6.12)$$

onde  $W[J_\phi, J_\varphi]$  é o funcional gerador das funções de Green conexas, que é definido por  $W[J_\phi, J_\varphi] = \log Z[J_\phi, J_\varphi]$ . A função de Green interagente conexa de  $n$  pontos possui a seguinte estrutura

$$\frac{\delta^n W[J_\phi, J_\varphi]}{\prod_{pq} \delta J_\phi(x_p)\delta J_\varphi(x_q)} \Big|_0 = \begin{array}{c} x_{q'} \quad \cdots \quad x_{p'} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_q \quad \cdots \quad x_p \end{array} \quad (6.13)$$


O papel dos termos  $\prod_{pq} K_\phi(x_p)K_\varphi(x_q)$ , juntamente com as condições de renormalização das massas, é o de amputar as pernas dos diagramas provenientes de (6.13), de maneira que se considerarmos (6.12) e (6.13) em (6.9), teremos por fim [33]

$$\mathcal{M}(i \rightarrow f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ & \cdots & \\ & \diagup & \diagdown \\ & \text{---} & \text{---} \\ & \diagdown & \diagup \\ & \cdots & \\ & i & \end{array} \\ \end{array} \quad (6.14)$$

onde a amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}(i \rightarrow f)$  é dada pela soma de todos os diagramas amputados e conexos. As condições de renormalização das massas podem ser dadas em termos das auto-energias dos campos  $\phi$  e  $\varphi$  da seguinte maneira [33]

$$\begin{aligned} \Sigma_\phi(p^2)|_{p^2=m^2} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dp^2}\Sigma_\phi(p^2)|_{p^2=m^2} = 0, \\ \Sigma_\varphi(p^2)|_{p^2=m^2} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dp^2}\Sigma_\varphi(p^2)|_{p^2=m^2} = 0, \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde  $\Sigma_\phi$  e  $\Sigma_\varphi$  são as auto-energias dos campos  $\phi$  e  $\varphi$ . As condições (6.15) são essenciais para fixar os pólos dos propagadores interagentes  $\Delta_\phi$  e  $\Delta_\varphi$  nas massas físicas dos campos  $\phi$  e  $\varphi$ . Isso é possível desde que as auto-energias sejam reais, uma vez que essas condições são garantidas, ordem-a-ordem, pela adição de contra-termos (reais) na lagrangiana do sistema<sup>1</sup>. Na teoria de

<sup>1</sup>A lagrangiana total do sistema, ou seja, parte livre + contra-termos + interação, tem de ser real.

perturbação renormalizada os pólos dos propagadores livres também ocorrem nas massas físicas dos campos, que correspondem as massas de cada  $K(x)$  na Eq.(6.7). Isso permite que o termo  $\prod_{pq} K_\phi(x_p)K_\varphi(x_q)$  realize as amputações nas pernas externas dos diagramas em (6.13). Caso os pólos dos propagadores interagentes ocorram fora da camada de massa (da massa física), a atuação de  $\prod_{pq} K_\phi(x_p)K_\varphi(x_q)$  nos propagadores interagentes resulta em zero e, nesse caso, a amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}(i \rightarrow f)$  se anula. Este é o caso quando houver instabilidade. A auto-energia de uma partícula instável na camada de massa é imaginária tendo em vista que os contra-termos são reais. Assim as condições de renormalização só podem garantir que

$$\begin{aligned} \text{Re } \Sigma(p^2)|_{p^2=m^2} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dp^2} \text{Re } \Sigma(p^2)|_{p^2=m^2} = 0, \\ \text{Re } \Sigma_\varphi(p^2)|_{p^2=m^2} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dp^2} \text{Re } \Sigma_\varphi(p^2)|_{p^2=m^2} = 0. \end{aligned}$$

Isso sugere que, se utilizarmos a fórmula de redução para descrever um processo de espalhamento com instabilidade, iremos obter trivialmente  $\mathcal{M}(i \rightarrow f) = 0$ ; o que faz sentido se considerarmos que a fórmula de redução supõe que as partículas espalhadas sejam estáveis. Na dedução de fórmula de redução considera-se um conjunto de partículas livres  $\{i\}$ , infinitamente distantes num tempo  $t \rightarrow -\infty$ . Encontram-se e interagem entre si em  $t = 0$ , são espalhadas e tornam a ficar infinitamente distantes e livres, acessando os estados

$\{f\}$  num tempo  $t \rightarrow +\infty$ . Qualquer partícula instável que estivesse livre em  $t \rightarrow -\infty$  teria decaído antes de colidir em  $t = 0$ . Portanto, não havendo interação, teríamos

$$S_{fi} = \delta_{fi} \Rightarrow \mathcal{M}(i \rightarrow f) = 0.$$

Entretanto, o processo de renormalização perturbativa é realizado ordem a ordem, e pode ocorrer que parte imaginária da auto-energia só apareça em uma ordem mais elevada. Isso significa que podemos utilizar a fórmula de redução para obter uma amplitude de espalhamento nas primeiras ordens, mesmo quando houver instabilidade. Em particular podemos sempre utilizá-la no nível de árvore.

### **Significado físico da taxa de decaimento $\Gamma(i \rightarrow f; T \neq 0)$**

Como já discutimos anteriormente, a  $T = 0$ , a instabilidade de uma partícula está associada à parte imaginária da sua auto-energia. Mais precisamente, temos que a taxa de decaimento é dada por

$$\Gamma(E; T = 0) = -\frac{1}{E} \text{Im} \Sigma(E; T = 0). \quad (6.16)$$

Fisicamente é interpretada segundo (6.3), estando associada a probabilidade de decaimento; de maneira que  $\Gamma = \frac{1}{\tau}$ , onde  $\tau$  é um tempo característico de decaimento. Após um tempo  $t \gg \tau$ , espera-se que todas as partículas

num sistema de partículas instáveis tenham decaído. Em se tratando de processos microscópicos, a amplitude de decaimento  $\mathcal{M}(i \rightarrow f)$  não depende da temperatura, ou, como usualmente nos referimos, o sistema está a  $T = 0$ .

É um fato conhecido [27, 28, 53, 68] que nas teorias de campos a  $T \neq 0$  temos que a parte imaginária da auto-energia é não nula, mesmo para partículas estáveis<sup>2</sup>. Em [28], Weldon investigando o significado de  $Im\Sigma(T \neq 0)$ , obtido no formalismo de Matsubara, interpreta

$$\Gamma(E; T \neq 0) = -\frac{1}{E} Im\Sigma(E; T \neq 0)$$

como a taxa com que uma função de distribuição se aproxima da função de distribuição no equilíbrio

$$\begin{aligned} n_\sigma(E) &= \frac{1}{(e^{\beta E} - \sigma)}, \\ \sigma &= 1 \text{ para bósons,} \\ \sigma &= -1 \text{ para férmions,} \end{aligned}$$

para um sistema próximo do equilíbrio em contato com um banho térmico a temperatura  $T = \frac{1}{\beta}$ . A expressão encontrada para  $\Gamma(T \neq 0)$  é semelhante a usual (6.3), sendo dada pela integral (6.4) do módulo ao quadrado da amplitude de probabilidade  $|\mathcal{M}(i \rightarrow f)|^2$  contendo, no entanto, alguns fatores

<sup>2</sup>No caso em particular do formalismo de Matsubara, onde todos os cálculos resultam em quantidades reais, a parte imaginária é obtida via continuação analítica.

estatísticos relativos ao banho térmico. Os significados dos processos físicos

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots \rightarrow p_{f1} + p_{f2} + \dots$$

considerados a  $T = 0$  e  $T \neq 0$ , no entanto, são completamente diferentes. No primeiro caso, trata-se de um processo microscópico onde o conceito de temperatura sequer faz sentido, a despeito de nos referirmos a ele como a  $T = 0$ . No segundo caso o processo na verdade representa um conjunto infinito de processos que participam na manutenção do equilíbrio térmico de um sistema que é posto em contato com um banho térmico a temperatura  $T \neq 0$ . Este é um processo físico mais realístico uma vez que todo processo de espalhamento sempre se dá em algum banho térmico. Avaliar o efeito desse banho térmico é o propósito central da TQC a  $T \neq 0$ .

## 6.2 Amplitude de espalhamento térmica

$$\mathcal{M}(i \rightarrow f; \theta_\beta)$$

Em [28], Weldon questiona se nos formalismos de tempo real, como DCT, obter-se-ia a mesma parte imaginária para as auto-energias calculadas pelo formalismo de Matsubara. As referências [27, 68] respondem esta questão afirmativamente. Particularmente em [27], Khanna e Rakhimov definem o conceito de amplitude térmica de espalhamento  $\mathcal{M}(i \rightarrow f; \theta_\beta)$  a partir de dois

ingredientes: o primeiro é a termalização dos estados de multi-partículas  $\{i\}$  e  $\{f\}$

$$\begin{aligned}
|i\rangle &\rightarrow |i; \theta_\beta\rangle \equiv \mathcal{U}(\theta_\beta)|i; 0\rangle, \\
|i\rangle = \left(\prod_{l=1} \sqrt{2E_{il}} a_{\vec{p}_l}^\dagger\right)|0\rangle &\rightarrow |i; \theta_\beta\rangle = \left(\prod_{l=1} \sqrt{2E_{il}} a_{\vec{p}_l}^\dagger(\theta_\beta^{\vec{p}_l})_{A=1}\right)|0; \theta_\beta\rangle,
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
\langle f| &\rightarrow \langle f; \theta_\beta| \equiv \langle 0; f| \mathcal{U}^\dagger(\theta_\beta), \\
\langle f| = \langle 0| \left(\prod_{l=1} \sqrt{2E_{fl}} a_{\vec{p}_l}\right) &\rightarrow \langle f; \theta_\beta| = \langle 0; \theta_\beta| \left(\prod_{l=1} \sqrt{2E_{fl}} a_{\vec{p}_l}(\theta_\beta^{\vec{p}_l})_{A=1}\right),
\end{aligned} \tag{6.18}$$

onde apenas as partículas físicas (não til) são termalizadas, e o segundo é a termalização da matriz de espalhamento

$$\widehat{S}(\theta_\beta)_{fi} = \langle f; \theta_\beta| \widehat{S} |i, \theta_\beta\rangle. \tag{6.19}$$

A amplitude de espalhamento térmica  $\mathcal{M}(i \rightarrow f; \theta_\beta)$  é definida em termos da matriz de espalhamento térmica (6.19), em analogia a (6.5)

$$\langle f; \theta_\beta| \widehat{S} |i, \theta_\beta\rangle = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) i \mathcal{M}(i \rightarrow f; \theta_\beta), \tag{6.20}$$

sendo o operador  $\widehat{S}$  dado pela série de Dyson

$$\widehat{S} = \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} \int \prod_{j=1}^n dx_j T \left[ \prod_{j=1}^n \widehat{H}_{int}(x_j) \right]. \tag{6.21}$$

Em [34], o significado da termalização de estados arbitrários da DCT é discutido em termos gerais, de forma que os estados térmicos sempre podem ser mapeados em matrizes de densidade, analogamente ao vácuo térmico, como vimos no capítulo 2.

### Contrações térmicas entre campos e estados

A amplitude  $\langle f; \theta_\beta | \widehat{S} | i, \theta_\beta \rangle$  pode ser calculada diretamente pelo teorema de Wick para DCT (5.24). Neste contexto, o conceito de contração térmica entre campos é estendido, considerando também contrações térmicas entre campos e estados térmicos em analogia a (6.10) e (6.11), ou seja

$$\begin{aligned}
\overline{\phi(x)_A | \vec{k}; \theta_\beta} &\equiv \phi(x)_{A\theta}^\dagger | \vec{k}; \theta_\beta \rangle \\
&= \int d\omega_{\vec{p}} Q(x, p; \theta_\beta)_{AB} a_{\vec{p}}(\theta_\beta)_B \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^\dagger(\theta_\beta)_1 |0; \theta_\beta \rangle \\
&= |0; \theta_\beta \rangle \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\vec{k}}}{2E_{\vec{p}}}} Q(x, p; \theta_\beta)_{AB} [a_{\vec{p}}(\theta_\beta)_B, a_{\vec{k}}^\dagger(\theta_\beta)_1] \\
&= |0; \theta_\beta \rangle \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\vec{k}}}{2E_{\vec{p}}}} e^{-ipx} Q(x, p; \theta_\beta)_{AB} \tau_{B1} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{k}) \\
&= |0; \theta_\beta \rangle Q(x, k; \theta_\beta)_{A1} \tag{6.22}
\end{aligned}$$

$$= |0; \theta_\beta \rangle e^{-ikx} U(\theta_\beta)_{A1}, \tag{6.23}$$

e também temos

$$\begin{aligned} \overline{\langle \vec{k}; \theta_\beta | \phi(x) \rangle} &\equiv \langle \vec{k}; \theta_\beta | \phi(x)^- \\ &= Q^*(x, k; \theta_\beta^{\vec{k}})_{A1} \langle \theta_\beta; 0 | \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$= U(\theta_\beta^{\vec{k}})_{A1} e^{ikx} \langle \theta_\beta; 0 |, \quad (6.25)$$

onde  $Q$  é dado em (5.19). Em termos da amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}(i \rightarrow f; \theta_\beta)$ , Khanna e Rakhimov definem, em um meio a temperatura  $T = 1/\beta$ , a taxa de decaimento  $\Gamma(\theta_\beta)$  por

$$\Gamma(E_i; \theta_\beta) = \frac{1}{2E_i} \int d\pi_f |\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_{f1} + p_{f2} + \dots; \theta_\beta)|^2. \quad (6.26)$$

A seguir usaremos a fórmula de redução que introduzimos para calcular a taxa de amplitude termalizada em alguns casos de interesse.

## 6.3 Aplicações

### 6.3.1 Taxa de decaimento térmica para o processo

$$\sigma \rightarrow \pi + \pi.$$

Considere um processo de decaimento onde uma partícula escalar real  $\sigma$  decai em duas partículas escalares reais  $\pi$ .

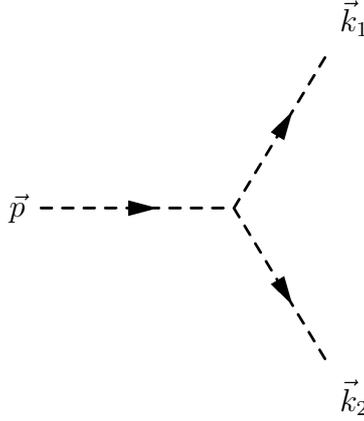


Figura 6.1: Decaimento  $i_\sigma \rightarrow f_\pi$

Neste caso temos

$$|i_\sigma\rangle = |\vec{p}\rangle \quad , \quad p = (E, \vec{p}) \quad , \quad p^2 = m_\sigma^2,$$

$$\langle f_\pi| = \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2| \quad , \quad k_1 = (E_1, \vec{k}_1) \quad , \quad k_2 = (E_2, \vec{k}_2), \quad k_1^2 = k_2^2 = m_\pi^2.$$

A lagrangiana de interação que descreve este decaimento é dada por [27]

$$\mathcal{L}_{int}(\sigma(x), \pi(x)) = -\frac{\lambda}{2!} \sigma(x) \pi^2(x).$$

Em DCT, devido a duplicação dos graus de liberdade, temos que a lagrangiana do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_{int}(\sigma(x), \tilde{\sigma}(x), \pi(x), \tilde{\pi}(x)) &= \mathcal{L}_{int}(\sigma(x), \pi(x)) - \widetilde{\mathcal{L}}_{int}(\tilde{\sigma}(x), \tilde{\pi}(x)) \\ &= -\frac{\lambda}{2} (\sigma(x) \pi^2(x) - \tilde{\sigma}(x) \tilde{\pi}^2(x)) \\ &= \sum_A \tau_{AA} \mathcal{L}_{int}(\sigma(x)_A, \pi(x)_A)_A \\ &= -\frac{\lambda}{2} \sum_A \tau_{AA} \sigma(x)_A \pi^2(x)_A \end{aligned}$$

Para obtermos a amplitude de decaimento térmica  $\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta)$ , precisamos termalizar os estados  $\{i_\sigma\}$  e  $\{f_\pi\}$

$$\begin{aligned} |\vec{p}\rangle &= (\sqrt{2E_\sigma} a_{\vec{p}}^\dagger) |0\rangle \rightarrow |\vec{p}; \theta_\beta\rangle = (\sqrt{2E_\sigma} a_{\vec{p}}^\dagger (\theta_\beta^{\vec{p}})_{A=1}) |0; \theta_\beta\rangle, \\ \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 | &= \langle 0 | (\prod_{l=1}^2 \sqrt{2E_{\pi l}} a_{\vec{k}_l}^-) \rightarrow \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2; \theta_\beta | = \langle 0; \theta_\beta | (\prod_{l=1}^2 \sqrt{2E_{\pi l}} a_{\vec{k}_l}^- (\theta_\beta^{\vec{k}_l})_{A=1}), \end{aligned}$$

e contruir a matriz de espalhamento térmica  $\widehat{S}(\theta_\beta)_{f_\pi i_\sigma}$  que, conforme (6.19), é definida por

$$\widehat{S}(\theta_\beta)_{f_\pi i_\sigma} = \langle f_\pi; \theta_\beta | \widehat{S}[J_\sigma, J_\pi] | i_\sigma; \theta_\beta \rangle_{J_\sigma, J_\pi=0}, \quad (6.27)$$

e que, analogamente a (5.41), é dada pela seguinte fórmula de redução

$$\begin{aligned} \widehat{S}(\theta_\beta)_{f_\pi i_\sigma} &= \langle f_\pi; \theta_\beta | N_\theta \exp\left( \sum_{\phi=\sigma, \pi} \int dx \phi(x)_A K_\phi(x) \frac{\delta}{\delta J_\phi(x)_A} \right) | i_\sigma; \theta_\beta \rangle \\ &\times Z[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta]_{J_\sigma, J_\pi=0}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

A atuação de  $K_\phi(x) = \partial_x^2 + m_\phi^2$  ( $\phi = \sigma, \pi$ ) é dada por

$$K_\phi(x) \Delta_{0\phi}(x-y; \theta_\beta) = -i\delta(x-y)\tau. \quad (6.29)$$

Expandindo a exponencial de (6.28) temos

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(\theta_\beta)_{f_\pi i_\sigma} &= \delta_{f_\pi i_\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \left( \sum_{\phi_i} \int dx_i \langle f_\pi; \theta_\beta | N_\theta \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) | i_\sigma; \theta_\beta \rangle \right. \\
&\times \prod_{i=1}^n K_{\phi_i}(x_i) \frac{\delta^n Z[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta]}{\prod_{i=1}^n \delta J_{\phi_i}(x_i)_{A_i}} \\
&= \int \prod_{i=1}^3 dx_i \langle f_\pi; \theta_\beta | N_\theta \sigma(x_1)_{A_1} \pi(x_2)_{A_2} \pi(x_3)_{A_3} | i_\sigma; \theta_\beta \rangle \\
&\times K_{\sigma_1}(x_1) K_\pi(x_2) K_\pi(x_3) \frac{\delta^3 Z[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta]}{\delta J_\sigma(x_1)_{A_1} \delta J_\pi(x_2)_{A_2} \delta J_\pi(x_3)_{A_3}} \Big|_0.
\end{aligned}$$

Realizando as contrações térmicas, obtemos

$$\begin{aligned}
S(\theta_\beta)_{f_\pi i_\sigma} &= \int \prod_{i=1}^3 dx_i Q(x_3, k_1; \theta_\beta^{\vec{k}_1})_{1A_3}^* Q(x_2, k_2; \theta_\beta^{\vec{k}_2})_{1A_2}^* Q(x_1, p_1; \theta_\beta^{\vec{p}_1})_{1A_1} \\
&\times K_{\sigma_1}(x_1) K_{\pi_2}(x_2) K_{\pi_3}(x_3) \frac{\delta^3 Z[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta]}{\delta J_\sigma(x_1)_{A_1} \delta J_\pi(x_2)_{A_2} \delta J_\pi(x_3)_{A_3}} \Big|_0,
\end{aligned} \tag{6.30}$$

onde a matriz de espalhamento é dada em termos da função de Green integrante de 3 pontos. O funcional gerador  $Z[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta]$  é dado por

$$Z[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta] = \exp(i \int dx \sum_A \tau_{AA} \mathcal{L}_{int}(x)_A) Z_0[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta], \tag{6.31}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int}(x)_A &= \frac{(-i\lambda)}{2} \tau_{AA} \frac{\delta^3}{\delta J_\sigma(x)_A (\delta J_\pi(x)_A)^2}, \\
Z_0[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta] &= e^{W_0[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta]}, \\
W_0[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta] &= \sum_{\phi=\sigma, \pi} W_{0\phi}[J_\phi; \theta_\beta], \\
W_{0\phi}[J_\phi; \theta_\beta] &= -\frac{1}{2} \int dx dy J_\phi(x) \tau \Delta_{0\phi}(x-y; \theta) \tau J_\phi(y).
\end{aligned}$$

Portanto, até a primeira ordem, temos

$$\begin{aligned}
Z[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta] &= e^{W_0} - i \frac{\lambda}{2} \int dx \sum_A \tau_{AA} \left( \frac{\tau_{AA}}{i} \frac{\delta}{\delta J_\sigma(x)_A} \right) \left( \frac{\tau_{AA}}{i} \frac{\delta}{\delta J_\pi(x)_A} \right)^2 e^{W_0} \\
&= e^{W_0} + \frac{\lambda}{2} \int dx \sum_A \left( \frac{\delta}{\delta J_\sigma(x)_A} e^{W_{0\sigma}} \right) \left( \frac{\delta}{\delta J_\pi(x)_A} \right)^2 e^{W_{0\pi}},
\end{aligned} \tag{6.32}$$

de maneira que

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^3 Z[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta]}{\delta J_\sigma(x_1)_{A_1} \delta J_\pi(x_2)_{A_2} \delta J_\pi(x_3)_{A_3}} \Big|_0 = \frac{\lambda}{2} \int dx \sum_{BA \dots A_j} (-\tau_{AA} \\
&\times \Delta_{0\sigma}(x-x_1; \theta_\beta)_{AB} \tau_{BB}) \left[ \prod_{j=2}^3 (-\tau_{AA} \Delta_{0\pi}(x-x_j; \theta_\beta)_{AA_j} \tau_{A_j A_j}) \right. \\
&\quad \left. + \Delta(x_2-x_3; \theta_\beta) \right].
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Considerando (6.33) e (6.29) em (6.30), obtemos

$$\begin{aligned}
S(\theta_\beta)_{f_\pi i_\sigma} &= -i\lambda \int dx \prod_{j=1}^3 dx_j \sum_{AA_1 \dots A_3} \tau_{AA} \prod_{j=1}^3 \tau_{A_j A_j} \tau_{AA_j} \delta(x - x_j) \\
&\times Q(x_3, k_1; \theta_\beta)_{1A_3}^* Q(x_2, k_2; \theta_\beta)_{1A_2}^* Q(x_1, p_1; \theta_\beta)_{1A_1} \\
&= -i\lambda \int dx dx_1 dx_2 dx_3 \sum_A \tau_{AA}^7 Q_\pi(x_3, k_1; \theta_\beta)_{1A}^* \\
&\times Q_\pi(x_2, k_2; \theta_\beta)_{1A}^* Q_\sigma(x_1, p; \theta_\beta)_{1A} \delta(x - x_1) \delta(x - x_2) \delta(x - x_3) \\
&= -i\lambda \int dx \sum_A \tau_{AA} Q(x, k_1; \theta_\beta)_{1A}^* Q(x, k_2; \theta_\beta)_{1A}^* Q(x, p; \theta_\beta)_{1A} \\
&= -i\lambda \int dx \sum_A \tau_{AA} e^{ix(k_1+k_2-p_1)} U(\theta_\beta^{\vec{k}_1})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{k}_2})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}})_{1A} \\
&= -i\lambda \sum_A \tau_{AA} U(\theta_\beta^{\vec{k}_1})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{k}_2})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}})_{1A} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - k_1 - k_2).
\end{aligned}$$

Lembrando de (6.20), temos que a amplitude térmica  $\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta)$  é dada por

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta) &= -i\lambda U(\theta_\beta^{\vec{k}_1})_{11} U(\theta_\beta^{\vec{k}_1})_{11} U(\theta_\beta^{\vec{p}})_{11} - U(\theta_\beta^{\vec{k}_1})_{12} \\
&\quad \times U(\theta_\beta^{\vec{k}_2})_{12} U(\theta_\beta^{\vec{p}})_{12} \\
&= (-i\lambda) u(\theta_\beta^{\vec{k}_2}) u(\theta_\beta^{\vec{k}_1}) u(\theta_\beta^{\vec{k}_2}) + (+i\lambda) v(\theta_\beta^{\vec{p}}) v(\theta_\beta^{\vec{k}_1}) v(\theta_\beta^{\vec{k}_2}).
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Esta amplitude sugere uma modificação nas regras de Feynman (no espaço do momentos) para o espalhamento térmico: multiplique pelo fator  $u(\theta_\beta^{\vec{p}})$  da transformação de Bogoliubov cada perna externa com momento  $p = (E_{\vec{p}}, \vec{p})$

conectada a um vértice físico (não til), o qual recebe o fator usual  $-i\lambda$ ; multiplique pelo fator  $v_p(\theta_\beta)$  da transformação de Bogoliubov cada perna externa com momento  $p = (E_{\vec{p}}, \vec{p})$  conectada a um vértice do tipo til, o qual recebe o fator  $+i\lambda$ . Neste caso a amplitude (6.34) é diagramaticamente representada na figura 6.2

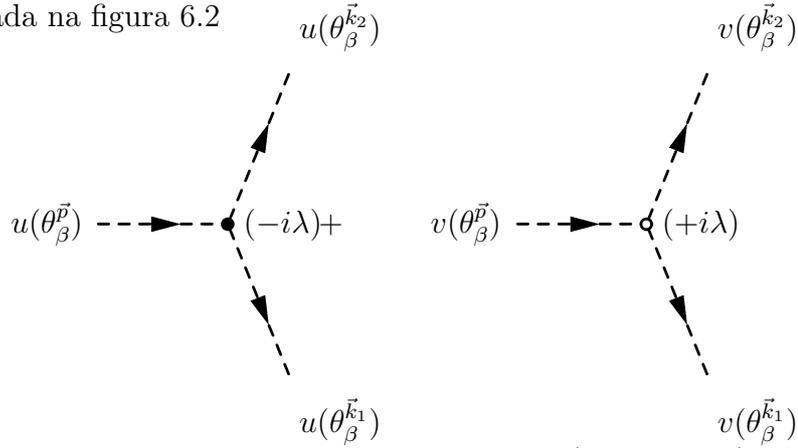


Figura 6.2: Amplitude de decaimento térmica  $i\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta)$ . O vértice físico é representado pelo ponto preto e o vértice til é representado pelo ponto vazio.

Note que para  $\theta_\beta = 0$  ( $T = 0$ ), a amplitude térmica se reduz à amplitude microscópica, o que justifica a convenção de se referir a processos microscópicos como sendo a  $T = 0$ , a despeito do conceito de temperatura não fazer sentido microscopicamente.

A taxa de decaimento térmica  $\Gamma(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta)$  é obtida a partir da amplitude térmica (6.34), segundo (6.26), ou seja

$$\Gamma(p; \theta_\beta) = \frac{1}{2E} \int \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{k}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2) |\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta)|^2. \quad (6.35)$$

Conforme as definições de (3.75)-(3.77) com  $\mu = 0$ , temos

$$\begin{aligned} u^2(\theta_{\beta}^{\vec{q}}) &= 1 + n_B(E_{\vec{q}}) = \frac{e^{\beta E_{\vec{q}}}}{e^{\beta E_{\vec{q}}} - 1}, \\ v^2(\theta_{\beta}^{\vec{q}}) &= n_B(E_{\vec{q}}) = \frac{1}{e^{\beta E_{\vec{q}}} - 1}, \\ \frac{u^2(\theta_{\beta}^{\vec{q}})}{v^2(\theta_{\beta}^{\vec{q}})} &= \frac{1 + n_B(E_{\vec{q}})}{n_B(E_{\vec{q}})} = e^{\beta E_{\vec{q}}}. \end{aligned}$$

Considerando a presença de  $\delta(E - E_1 - E_2)$  no integrando em (6.35), podemos tomar  $E = E_1 + E_2$  em  $|\mathcal{M}|^2$ , o que nos permite fazer

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(i_{\sigma} \rightarrow f_{\pi}; \theta_{\beta})|^2 &= \lambda^2 (u(\theta_{\beta}^{\vec{p}})u(\theta_{\beta}^{\vec{k}_1})u(\theta_{\beta}^{\vec{k}_2}) - v(\theta_{\beta}^{\vec{p}})v(\theta_{\beta}^{\vec{k}_1})v(\theta_{\beta}^{\vec{k}_2}))^2, \\ &= \lambda^2 v^2(\theta_{\beta}^{\vec{k}_1})v^2(\theta_{\beta}^{\vec{k}_2})v^2(\theta_{\beta}^{\vec{p}}) \left( \frac{u(\theta_{\beta}^{\vec{p}})}{v(\theta_{\beta}^{\vec{p}})} \frac{u(\theta_{\beta}^{\vec{k}_1})}{v(\theta_{\beta}^{\vec{k}_1})} \frac{u(\theta_{\beta}^{\vec{k}_2})}{v(\theta_{\beta}^{\vec{k}_2})} - 1 \right)^2, \\ &= \lambda^2 n_B(E_1)n_B(E_2)n_B(E) (e^{\frac{\beta(E+E_1+E_2)}{2}} - 1)^2, \\ &= \lambda^2 n_B(E_1)n_B(E_2)n_B(E) (e^{\beta E} - 1)(e^{\beta(E_1+E_2)} - 1), \\ &= \lambda^2 n_B(E_1)n_B(E_2) \left( \frac{1 + n_B(E_1)}{n_B(E_1)} \frac{1 + n_B(E_2)}{n_B(E_2)} - 1 \right), \\ &= \lambda^2 ((1 + n_B(E_1))(1 + n_B(E_2)) - n_B(E_1)n_B(E_2)). \end{aligned} \tag{6.36}$$

Portanto (6.35) fica

$$\begin{aligned}
\Gamma(p; \theta_\beta) &= \frac{\lambda^2}{2E} \int \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{k}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2), \\
&\times ((1 + n_B(E_1))(1 + n_B(E_2)) - n_B(E_1)n_B(E_2)), \\
&= \frac{\lambda^2}{2E} \int \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_1 2\bar{E}_2} (2\pi) \delta(E - E_1 - \bar{E}_2) (1 + n_B(E_1))(1 + n_B(\bar{E}_2)), \\
&- \frac{\lambda^2}{2E} \int \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_1 2\bar{E}_2} (2\pi) \delta(E - E_1 - \bar{E}_2) n_B(E_1) n_B(\bar{E}_2), \tag{6.37}
\end{aligned}$$

onde  $\bar{E}_2 = \sqrt{(\vec{p} - \vec{k}_1)^2 + m_\pi^2}$ .

Devido à dependência de (6.36) apenas nas energias  $E_1$  e  $E_2$ , iremos denotá-lo por  $|\mathcal{M}|^2(E_1, E_2; \theta_\beta)$ . A partir de (6.36), segue que

$$|\mathcal{M}|^2(E_1, E_2; \theta_\beta = 0) = 1. \tag{6.38}$$

Podemos calcular (6.37) no sistema de referência da partícula  $\sigma$ , o que, juntamente com a lei de conservação do quadri-momento, significa tomar

$$\begin{aligned}
p &= (m_\sigma, \vec{0}), \quad k_1 = (E_\pi, \vec{k}), \quad k_2 = (E_\pi, -\vec{k}), \\
E &= m_\sigma, \quad E_1 = E_2 = E_\pi = \sqrt{\vec{k}^2 + m_\pi^2},
\end{aligned} \tag{6.39}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
\Gamma(m_\sigma; \theta_\beta) &= \frac{1}{2m_\sigma} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3(2E_\sigma)^2} (2\pi)\delta(m_\sigma - 2E_\pi) |\mathcal{M}|^2(E_\pi, E_\pi; \theta_\beta) \\
&= \frac{1}{8\pi m_\sigma} \int \frac{dk k^2}{E_\pi^2} \delta(m_\sigma - 2E_\pi) |\mathcal{M}|^2(E_\pi, E_\pi; \theta_\beta) \\
&= \frac{1}{8\pi m_\sigma} \int dE_\pi \frac{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}}{E_\pi} \delta(m_\sigma - 2E_\pi) |\mathcal{M}|^2(E_\pi, E_\pi; \theta_\beta) \\
&= \frac{\sqrt{1 - (\frac{2m_\pi}{m_\sigma})^2}}{8\pi m_\sigma} |\mathcal{M}|^2(\frac{m_\sigma}{2}, \frac{m_\sigma}{2}; \theta_\beta).
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Considerando (6.36) em (6.40) temos portanto que a taxa de decaimento térmica no sistema de referência da partícula  $\sigma$  é dada por

$$\Gamma(m_\sigma; \theta_\beta) = \Gamma(m_\sigma; 0) (1 + 2n_B(\frac{m_\sigma}{2})) \tag{6.41}$$

Um ponto interessante a se destacar em (6.37) consiste no papel que as componentes til podem desempenhar na interpretação de Weldon [28] para a taxa de decaimento térmica  $\Gamma(p; \theta_\beta)$ . Esta interpretação considera um sistema de partículas  $\sigma$ , próximo do equilíbrio térmico, estando em contato com um banho térmico a temperatura  $T = \frac{1}{\beta}$ , constituído pelas partículas  $\pi$ .

A taxa de decaimento térmica direta  $\Gamma_d(p; \theta_\beta)$ , dada por

$$\Gamma_d(p; \theta_\beta) = \frac{\lambda^2}{2E} \int \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^2 2E_1 2\bar{E}_2} \delta(E - E_1 - \bar{E}_2) (1 + n_B(E_1))(1 + n_B(\bar{E}_2)), \tag{6.42}$$

é a taxa para o decaimento de partículas  $\sigma$

$$\sigma \xrightarrow{\Gamma_d} \pi + \pi$$

cuja ocorrência recebe o peso estatístico  $(1 + n(E_1))(1 + n(\bar{E}_2))$ . Além do decaimento, ocorre também a produção de partículas  $\sigma$  pela aniquilação de partículas  $\pi$  do banho térmico. A taxa de decaimento inversa  $\Gamma_i(p; \theta_\beta)$ , dada por

$$\Gamma_i(p; \theta_\beta) = \frac{\lambda^2}{2E} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_1 2\bar{E}_2} (2\pi) \delta(E - E_1 - \bar{E}_2) n(E_1) n(\bar{E}_2), \quad (6.43)$$

é a taxa para a produção de partículas  $\sigma$

$$\sigma \xleftarrow{\Gamma_i} \pi + \pi$$

cuja ocorrência recebe o peso estatístico  $n(E_1)n(\bar{E}_2)$ . Nesse caso temos que a taxa de decaimento térmica resultante  $\Gamma$  é dada por

$$\Gamma(p; \theta_\beta) = \Gamma_d(p; \theta_\beta) - \Gamma_i(p; \theta_\beta).$$

A origem da taxa  $\Gamma_i$ , consiste no termo  $i\lambda U_{E_1}(\theta_\beta)_{12} U_{E_2}(\theta_\beta)_{12} U_E(\theta_\beta)_{12}$  de (6.34). Este termo por sua vez, resulta da contração térmica entre os estados termalizados e os campos til (6.23) e, por fim, os campos til vêm da lagrangiana til  $\tilde{\mathcal{L}}_{int}$ . Nesse sentido, entendemos que a duplicação dos graus

de liberdade na DCT constitui um ingrediente essencial na manutenção do equilíbrio térmico entre os campos em interação.

$$\Gamma_d$$

$$\sigma \rightleftharpoons \pi + \pi$$

$$\Gamma_i$$

### 6.3.2 Taxa de decaimento térmica para o processo

$$\sigma \rightarrow \pi + \cdots + \pi.$$

Vejamos agora um processo onde uma partícula escalar  $\sigma$  decai em  $m$  partículas escalares  $\pi$ .

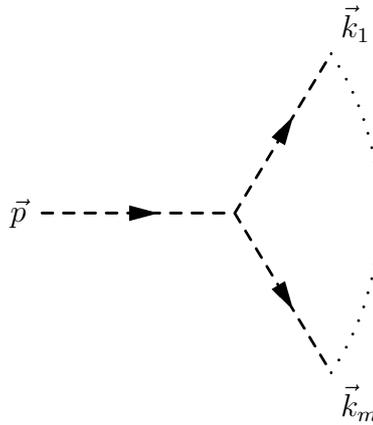


Figura 6.3: Decaimento  $i_\sigma \rightarrow f_\pi$

Neste caso temos

$$\begin{aligned}
|i_\sigma\rangle &= |\vec{p}\rangle \quad , \quad p = (E, \vec{p}) \quad , \quad p^2 = m_\sigma^2, \\
\langle f_\pi| &= \langle \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n| \quad , \quad k_i = (E_i, \vec{k}_i) \quad , \quad \vec{k}_1^2 = \dots = \vec{k}_m^2 = m_\pi^2, \\
i &= 1, \dots, m \quad , \quad (6.44)
\end{aligned}$$

A lagrangiana que descreve esta interação é dada por

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -\frac{\lambda}{m!} \sigma(x) \pi^m(x),$$

com a duplicação dos graus de liberdade temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{L}}_{int}(\sigma(x), \tilde{\sigma}(x), \pi(x), \tilde{\pi}(x)) &= \mathcal{L}_{int}(\sigma(x), \pi(x)) - \widetilde{\mathcal{L}}_{int}(\tilde{\sigma}(x), \tilde{\pi}(x)), \\
&= -\frac{\lambda}{2} (\sigma(x) \pi^2(x) - \tilde{\sigma}(x) \tilde{\pi}^2(x)), \\
&= \sum_A \tau_{AA} \mathcal{L}_{int}(\sigma(x)_A, \pi(x)_A)_A, \\
&= -\frac{\lambda}{m!} \sum_A \tau_{AA} \sigma(x)_A \pi^m(x)_A,
\end{aligned}$$

A termalização dos estados (6.44) leva a

$$\begin{aligned}
|i_\sigma; \theta_\beta\rangle &= \sqrt{2E_p} a_p^\dagger(\theta_\beta) |0, \theta_\beta^\vec{p}\rangle, \\
|f_\pi; \theta_\beta\rangle &= \prod_{i=1}^m \sqrt{2E_i} a_{\vec{k}_i}^\dagger(\theta_\beta^{\vec{k}_i}) |0, \theta_\beta\rangle,
\end{aligned}$$

sendo que a matriz de espalhamento térmica é dada por

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(\theta_\beta)_{f_\pi i_\sigma} &= \langle f; \theta_\beta | N_\theta \exp \left( \int dx \sum_{\phi=\sigma, \pi} \phi(x)_A K_\phi(x) \frac{\delta}{\delta J_\phi(x)_A} \right) | i; \theta_\beta \rangle \\
&\times Z[J_\sigma, J_\pi] | 0, \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \int \prod_{j=1}^{m+1} dx_j \sum_{i=1}^{m+1} \langle f; \theta_\beta | \sigma(x_i)_{A_i} \prod_{j \neq i}^{m+1} \pi(x_j)_{A_j} | i; \theta_\beta \rangle \\
&\times K_\sigma(x_i) \prod_{j \neq i}^{m+1} K_\pi(x_j) \frac{\delta^{m+1} Z[J_\sigma, J_\pi]}{\delta J_\sigma(x_i)_{A_i} \prod_{j \neq i}^{m+1} \delta J_\pi(x_j)_{A_j}} | 0, \\
&= \int dx_1 Q(x_1, p; \theta_\beta)_{1A_1} \prod_{j=2}^{m+1} dx_j Q(x_j, k_{j-1}; \theta_\beta)_{1A_j}^* \\
&\times K_\sigma(x_1) \prod_{j=2}^{m+1} K_\pi(x_j) \frac{\delta^{m+1} Z[J_\sigma, J_\pi]}{\delta J_\sigma(x_1)_{A_1} \prod_{j=2}^{m+1} \delta J_\pi(x_j)_{A_j}} | 0.
\end{aligned} \tag{6.45}$$

O funcional gerador  $Z[J_\sigma, J_\pi; \theta]$  é definido por

$$\begin{aligned}
Z[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta] &= \exp \left( i \int dx \sum_A \tau_{AA} \mathcal{L} \left( \frac{\tau_{AA}}{i} \frac{\delta}{\delta J_\sigma(x)_A}, \frac{\tau_{AA}}{i} \frac{\delta}{\delta J_\pi(x)_A} \right)_A \right) \\
&\times Z_0[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta], \\
Z_0[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta] &= e^{W_0[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta]}, \quad W_0[J_\sigma, J_\pi; \theta_\beta] = \sum_{\phi=\sigma, \pi} W_{0, \phi}[J_\phi; \theta_\beta], \\
W_{0, \phi}[J_\phi; \theta_\beta] &= -\frac{1}{2} \int dx dy J_\phi(x) \tau \Delta_{0\phi}(x-y; \theta_\beta) \tau J_\phi(y)
\end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
Z[J_\sigma, J_\pi; \theta] &= e^{W_0} - i \frac{\lambda}{m!} \int dx \sum_A \tau_{AA} \left( \frac{\tau_{AA}}{i} \frac{\delta}{\delta J_\sigma(x)_A} \right) \left( \frac{\tau_{AA}}{i} \frac{\delta}{\delta J_\pi(x)_A} \right)^m e^{W_0} \\
&= e^{W_0} + \frac{\lambda}{m!} \int dx \sum_A \left( \frac{\tau_{AA}}{i} \right)^{m+2} \frac{\delta e^{W_{0\sigma}}}{\delta J_\sigma(x)_A} \frac{\delta^m e^{W_{0\pi}}}{\delta J_\pi(x)_A^m}
\end{aligned}$$

(6.46)

A partir de (6.46) podemos obter

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^{m+1} Z}{\delta J_\sigma(x_1)_{A_1} \prod_{j=2}^{m+1} \delta J_\pi(x_j)_{A_j}} \Big|_0 \\
&= -\lambda \int dx \sum_A \left( \frac{\tau_{AA}}{i} \right)^{m+2} (-\tau_{AA} \Delta_\sigma(x_1 - x; \theta_\beta)_{AA_1} \tau_{A_1 A_1}) \\
&\times \left[ \prod_{j=2}^{m+1} (-\tau_{AA} \tau_{A_j A_j} \Delta_\pi(x - x_j; \theta_\beta)_{AA_j}) + \text{termos proporcionais a } \Delta(x_i - x_j; \theta_\beta) \right]
\end{aligned}$$

que, substituindo em (6.45) e considerando a atuação dos operadores  $K_\phi$  nos propagadores livres  $\Delta_\phi$ , dada em (6.29), leva à

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(\theta_\beta)_{f_\pi i_\sigma} &= (-)^m \lambda \int dx_1 Q(x_1, p; \theta_\beta)_{1A_1} \prod_{j=2}^{m+1} dx_j Q(x_j, k_{j-1}; \theta_\beta)_{1A_j}^* \\
&\times \int dx \sum_A \frac{(\tau_{AA})^{2m+3}}{i^{m+2}} \tau_{A_1 A_1} (-i\delta(x_1 - x) \tau_{AA_1}) \\
&\times \prod_{j=2}^{m+1} \tau_{A_j A_j} (-i\delta(x - x_j) \tau_{AA_j}) + o(\lambda^2), \\
&= -i\lambda \int dx \sum_A \tau_{AA} Q(x, p; \theta_\beta)_{1A} \prod_{j=1}^m Q(x, k_j; \theta_\beta)_{1A}^* \\
&\quad + o(\lambda^2), \\
&= -i\lambda \int dx e^{-i(p - \sum_j k_j)} \sum_A \tau_{AA} U(\theta_\beta^{\vec{p}})_{1A} \prod_{j=1}^m U(\theta_\beta^{\vec{k}_j})_{1A} \\
&\quad + o(\lambda^2), \\
&= (2\pi)^4 \delta^4(p - \sum_j k_j) (-i\lambda) \sum_A \tau_{AA} U(\theta_\beta^{\vec{p}})_{1A} \prod_{j=1}^m U(\theta_\beta^{\vec{k}_j})_{1A} \\
&\quad + o(\lambda^2).
\end{aligned}$$

A amplitude térmica é, portanto, dada por

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta) &= -i\lambda \sum_A U(\theta_\beta^{\vec{p}})_{11} \prod_{j=1}^m U(\theta_\beta^{\vec{k}_j})_{11} \\ &\quad - U(\theta_\beta^{\vec{p}})_{12} \prod_{j=1}^m U(\theta_\beta^{\vec{k}_j})_{12} + o(\lambda^2) \end{aligned}$$

Em nível de árvore temos, então

$$i\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta) = (-i\lambda)u(\theta_\beta^{\vec{p}}) \prod_{j=1}^m u(\theta_\beta^{\vec{k}_j}) + (+i\lambda)v(\theta_\beta^{\vec{p}}) \prod_{j=1}^m v(\theta_\beta^{\vec{k}_j}),$$

em acordo com as regras de Feynman obtidas no caso anterior, ver figura 6.4.

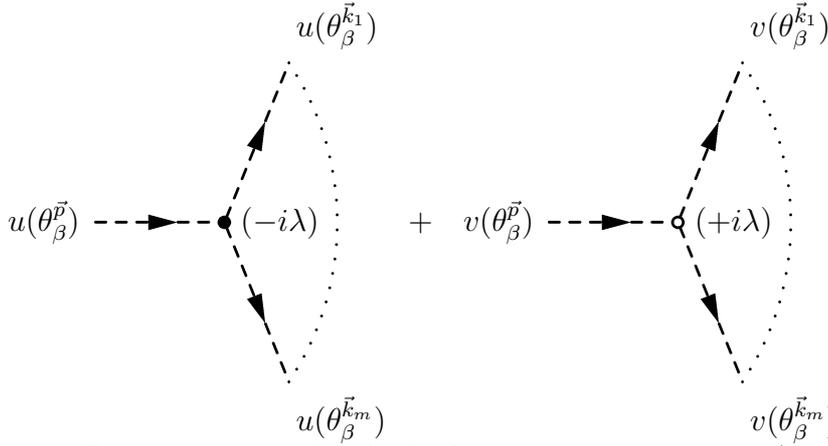


Figura 6.4: Amplitude de decaimento térmica  $i\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta)$ .

A taxa de decaimento térmica para este processo é dada por

$$\Gamma(p; \theta_\beta) = \frac{1}{2E} \int \prod_{j=1}^m \frac{d^3 \vec{k}_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta^4(p - \sum_{j=1}^m k_j) |\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta)|^2, \quad (6.47)$$

onde o quadrado da amplitude térmica  $|\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta)|^2$  pode ser obtido

analogamente a (6.36), resultando em

$$|\mathcal{M}(i_\sigma \rightarrow f_\pi; \theta_\beta)|^2 = \lambda^2 \left( \prod_{j=1}^m (1 + n_B(E_j)) - \prod_{j=1}^m n_B(E_j) \right).$$

Vale lembrar que  $E = \sum_j E_j$ , devido a presença de  $(2\pi)^4 \delta^4(p - \sum_j k_j)$  em (6.47).

Vejam os como as taxas de produção  $\Gamma_i(p; \theta_\beta)$  e decaimento  $\Gamma_d(p; \theta_\beta)$  da partícula  $\sigma$  estão ligadas de maneira que o equilíbrio térmico é estabelecido.

$$\begin{aligned} \Gamma_d(p; \theta_\beta) &= \frac{\lambda^2}{2E} \int \prod_{j=1}^m \frac{d^3 \vec{k}_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta(p - \sum_{j=1}^m k_j) \prod_{j=1}^m (1 + n_B(E_j)) \\ &= \frac{\lambda^2}{2E} \int \prod_{j=1}^m \frac{d^3 \vec{k}_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta(p - \sum_{j=1}^m k_j) \prod_{j=1}^m \frac{(1 + n_B(E_j))}{n_B(E_j)} n_B(E_j) \\ &= \frac{\lambda^2}{2E} \int \prod_{j=1}^m \frac{d^3 \vec{k}_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta(p - \sum_{j=1}^m k_j) \prod_{j=1}^m e^{\beta E_j} n_B(E_j) \\ &= \frac{\lambda^2}{2E} \int \prod_{j=1}^m \frac{d^3 \vec{k}_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta(p - \sum_{j=1}^m k_j) e^{\beta \sum_{j=1}^m E_j} \prod_{j=1}^m n_B(E_j) \\ &= e^{\beta E} \frac{\lambda^2}{2E} \int \prod_{j=1}^m \frac{d^3 \vec{k}_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta(p - \sum_{j=1}^m k_j) \prod_{j=1}^m n_B(E_j) \\ &= e^{\beta E} \Gamma_i(p; \theta_\beta) \end{aligned} \tag{6.48}$$

e, portanto

$$\frac{\Gamma_d(p; \theta_\beta)}{\Gamma_i(p; \theta_\beta)} = e^{\beta E}. \tag{6.49}$$

Quando comentamos sobre o significado das taxas de decaimento térmicas segundo Weldon, dissemos que a mesma estava associada com a maneira por

meio da qual o sistema de partículas  $\sigma$ , em contato com um banho térmico (formado pelas partículas  $\pi$ ), se aproxima do equilíbrio. Vejamos com um pouco mais de detalhes como se dá esse processo.

Suponha que em um dado instante  $t = 0$  o sistema de partículas  $\sigma$  seja caracterizado pela função de distribuição  $\eta_0(E)$ , levemente fora do equilíbrio. É imediato que a taxa de variação de  $\eta_t(E)$  no tempo depende de  $\Gamma_d$  e  $\Gamma_i$ , já que estas taxa indicam, respectivamente, diminuição e aumento de partículas  $\sigma$  com energia  $E$ . A taxa com que  $\eta_t(E)$  diminui é dada por  $-\eta_t\Gamma_d(E)$ , e a taxa com que ela aumenta é dada por  $(1 + \eta_t)\Gamma_d$ , resultando em

$$\frac{\partial\eta_t}{\partial t} = -\eta_t\Gamma_d + (1 + \eta_t)\Gamma_d,$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned}\eta_t(E) &= \frac{\Gamma_i}{\Gamma_d - \Gamma_i} + f(E)e^{-(\Gamma_d - \Gamma_i)t}, \\ &= \frac{1}{\frac{\Gamma_d}{\Gamma_i} - 1} + f(E)e^{-\Gamma t},\end{aligned}$$

Considerando (6.49) temos

$$\begin{aligned}\eta_t(E) &= \frac{1}{e^{\beta E} - 1} + f(E)e^{-\Gamma t}, \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} n_B(E).\end{aligned}$$

Note que, quanto maior a taxa de decaimento térmica  $\Gamma$ , mais rápido a distribuição  $\eta_t(E)$  se aproxima da distribuição bosônica de equilíbrio [28].

### 6.3.3 Taxa de decaimento térmico para o processo

$$\phi \rightarrow \psi + \bar{\psi}$$

Vejamos agora um processo onde um bóson decai num par férmion-anti-férmion, ver figura 6.5, segundo uma densidade lagrangiana do tipo Yukawa, ou seja

$$\mathcal{L} = -ig\phi(x)\bar{\psi}(x)_a\psi(x)^a.$$

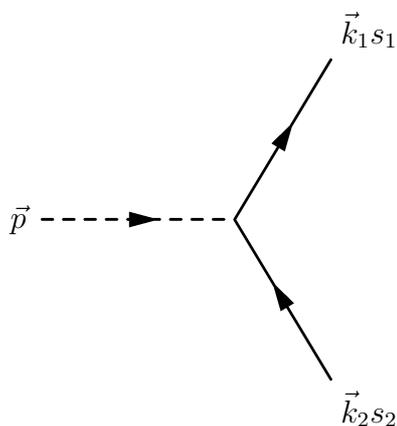


Figura 6.5: Decaimento da teoria  $\mathcal{L} = -g \sum \phi(x)\bar{\psi}(x)_a\psi(x)^a$

As pernas externas para este processo são dadas por

$$|i_\phi\rangle = |\vec{p}\rangle \quad , \quad p = (E, \vec{p}) \quad , \quad p^2 = m^2,$$

$$\langle f_\psi| = \langle \vec{k}_1 s_1, \vec{k}_2 s_2| \quad , \quad k_i = (E_i, \vec{k}_i) \quad , \quad k_i^2 = M^2,$$

$$s_i = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad , \quad i = 1, 2.$$

Analogamente ao hamiltoniano do campo de Dirac (4.78), considerando as definições das componentes  $\psi(x)_2^a = i\tilde{\psi}^{\dagger T}(x)^a$  e  $\bar{\psi}(x)_{a2} = -i\tilde{\psi}^T(x)_b\gamma_a^{0b}$  e a natureza grassmanniana dos campos fermiônicos, temos que o vértice til possui o mesmo sinal que o vértice ordinário

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{L}}_{int}(\phi, \psi, \bar{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}) &= \mathcal{L}(\phi, \psi, \bar{\psi}) - \widetilde{\mathcal{L}}(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}) \\
&= -g\phi(x)\bar{\psi}(x)_a\psi(x)^a + g\tilde{\phi}(x)\tilde{\bar{\psi}}(x)_a\tilde{\psi}(x)^a \\
&= -g\phi(x)\bar{\psi}(x)_a\psi(x)^a - g\tilde{\phi}(x)(-i\tilde{\psi}^t(x)_a\gamma^0)(i\tilde{\psi}^{\dagger t}(x)^a) \\
&= -g\sum_A\delta_{AA}\phi(x)_A\bar{\psi}(x)_{Aa}\psi(x)_A^a.
\end{aligned}$$

A termalização dos estados resulta em

$$\begin{aligned}
|i_\phi; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= \sqrt{2E}a_p^\dagger(\theta_\beta^p)|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle, \\
|f_\pi; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle &= \sqrt{2E_1 2E_2}a_{k_1 s_1}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{k_1+})b_{k_2 s_2}^\dagger(\theta_{\beta\mu}^{k_2-})|0; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}\rangle.
\end{aligned}$$

A matriz de espalhamento térmica  $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{f_\psi i_\phi}$  é dada por

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{f_\psi i_\phi} &= \langle f_\psi; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} | N_\theta \exp\left(\int dx (\phi(x)_A K(x) \frac{\delta}{\delta J(x)_A} + \frac{\delta}{\delta \eta(x)_A^a} \overleftarrow{D}(x)_b^a \psi(x)_b^A \right. \\
&\quad \left. - \bar{\psi}(x)_{Aa} D(x)_b^a \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)_{Ab}})\right) | i_\phi; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu} \rangle Z[J, \eta, \bar{\eta}; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}] | 0,
\end{aligned} \tag{6.50}$$

onde a atuação de  $D(x)_b^a = (i\partial - M)_b^a$  e  $\overleftarrow{D}(x)_b^a = (-i\partial - M)_b^a$  no propagador

fermiônico livre  $S_0(x - y; \theta_{\beta\mu})$  é dada por

$$D(x)_b^a S_0(x - y; \theta_{\beta\mu})_{cAB}^b = i\delta(x - y)\delta_{AB}\delta_c^a, \quad (6.51)$$

$$S_0(x - y; \theta_{\beta\mu})_{bAB}^a \overleftarrow{D}(y)_c^b = i\delta(x - y)_{AB}\delta_c^a. \quad (6.52)$$

Expandindo a exponencial (6.50), obtemos

$$\begin{aligned} S(\theta_{\beta\mu})_{f_\pi i_\sigma} &= - \int \prod_{j=1}^3 dx_j \langle f_\psi; \theta_{\beta\mu} | \psi(x_3)_{C'}^c \psi(x_2)_{Bb'} \phi(x_1)_A | i_\phi; \theta_{\beta\mu} \rangle \\ &\times K(x_1) D(x_2)_{b'}^{b'} \overleftarrow{D}(x_3)_c^c \frac{\delta^3 Z[J, \eta, \bar{\eta}; \theta_{\beta\mu}]}{\delta J(x_1)_A \delta \bar{\eta}(x_2)_{Bb} \delta \eta(x_3)_C} \Big|_0, \end{aligned} \quad (6.53)$$

onde as contrações térmicas são dadas por

$$\begin{aligned} \overbrace{\langle \vec{k}_1 s_1; \theta_{\beta\mu} | \bar{\psi}(x)_{aA} \rangle} &= \bar{M}(x, \vec{k}_1 s_1; \theta_{\beta\mu})_{aA1} \langle 0; \theta_{\beta\mu} |, \\ \overbrace{\langle \vec{k}_2 s_2; \theta_{\beta\mu} | \psi(x)_A^a \rangle} &= N(x, \vec{k}_2 s_2; \theta_{\beta\mu})_{A1}^a \langle 0; \theta_{\beta\mu} |, \\ \overbrace{\langle \phi(x_1)_A | \vec{p}; \theta_{\beta\mu} \rangle} &= |0; \theta_{\beta\mu} \rangle Q(x_1, \vec{p}; \theta_{\beta\mu})_{A1}, \end{aligned}$$

as matrizes  $M, N, Q$  são dadas por

$$\bar{M}(x, ks; \theta_{\beta\mu})_{aA1} = \begin{cases} \bar{M}(x, \vec{k}s; \theta_{\beta\mu})_{a11} = U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{k}+})_{11} \bar{u}(\vec{k}s)_a e^{ikx} \\ \bar{M}(x, \vec{k}s; \theta_{\beta\mu})_{a21} = U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{k}+})_{21} \bar{u}(\vec{k}s)_a e^{ikx} \end{cases}$$

$$N(x, ks; \theta_{\beta\mu})_{A1}^a = \begin{cases} N(x, ks; \theta_{\beta\mu})_{11}^a = U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{k}-})_{11} v(\vec{k}s)^a e^{ikx} \\ N(x, ks; \theta_{\beta\mu})_{21}^a = U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{k}-})_{21} v(\vec{k}s)^a e^{ikx} \end{cases}$$

$$Q(x, p; \theta_{\beta\mu})_{A1} = U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{p}})_{A1} e^{-ipx},$$

e as matrizes  $U(\theta_{\beta}^{\vec{p}})$  e  $U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{k}\pm})$  são dadas por

$$U(\theta_{\beta}^{\vec{p}}) = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta}^{\vec{p}}) & v(\theta_{\beta}^{\vec{p}}) \\ v(\theta_{\beta}^{\vec{p}}) & u(\theta_{\beta}^{\vec{p}}) \end{pmatrix}, \quad U(\theta_{\beta\mu}^{\vec{k}\pm}) = \begin{pmatrix} u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{k}\pm}) & \pm v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{k}\pm}) \\ \mp v(\theta_{\beta\mu}^{\vec{k}\pm}) & u(\theta_{\beta\mu}^{\vec{k}\pm}) \end{pmatrix}.$$

Com estas contrações, (6.53) fica

$$\begin{aligned} \widehat{S}(\theta_{\beta\mu})_{f_{\psi}i_{\phi}} &= - \int \prod_{j=1}^3 dx_j Q(x_1, p; \theta_{\beta})_{A1} \bar{M}(x_2, k_1 s_1; \theta_{\beta})_{B1b'} N(x_3, k_2 s_2; \theta_{\beta})_{C1}^{c'} \\ &\times K(x_1) D(x_2)_{b'}^b \overleftarrow{D}(x_3)_{c'}^c \frac{\delta^3 Z[J, \eta, \bar{\eta}; \theta_{\beta\mu}]}{\delta J(x_1)_A \delta \bar{\eta}(x_2)_{Bb} \delta \eta(x_3)_C} \Big|_0 \end{aligned}$$

O funcional gerador é escrito como

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}; \theta_{\beta\mu}] = \exp(i \int dx \sum_A \tau_{AA} \mathcal{L}_{int}(x)_A) Z_0[J, \eta, \bar{\eta}; \theta_{\beta\mu}],$$

onde  $\mathcal{L}_{int}(x)_A$  é

$$\mathcal{L}_{int}(x)_A = ig \frac{\delta^3}{\delta J(x)_A \delta \eta(x)_A^a \delta \bar{\eta}(x)_{Aa}},$$

o funcional livre  $Z_0[J, \eta, \bar{\eta}; \theta_{\beta}]$  é dado por

$$Z_0[J, \eta, \bar{\eta}; \theta_{\beta\mu}] = e^{W_0[J, \eta, \bar{\eta}; \theta_{\beta\mu}]},$$

e, por fim,

$$\begin{aligned} W_0[J, \eta, \bar{\eta}; \theta_{\beta\mu}] &= W_{0\phi}[J; \theta_{\beta}] + W_{0\psi}[\eta, \bar{\eta}; \theta_{\beta\mu}], \\ W_{0\phi}[J; \theta_{\beta}] &= -\frac{1}{2} \int dx dy J(x) \tau \Delta_{0\phi}(x-y; \theta_{\beta}) \tau J(y), \\ W_{0\psi}[\eta, \bar{\eta}; \theta_{\beta}] &= - \int dx dy \bar{\eta}(x) S_0(x-y; \theta_{\beta\mu}) \eta(y). \end{aligned}$$

Com isso podemos obter

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}] = e^{W_0} \left\{ 1 + g \sum_D \tau_{DD} \int dx \frac{\delta W_{0\phi}}{\delta J(x)_D} \left[ \frac{\delta W_{0\psi}}{\delta \eta(x)_D^e} \frac{\delta W_{0\psi}}{\delta \bar{\eta}(x)_{De}} + \frac{\delta^2 W_{0\psi}}{\delta \eta(x)_D^e \delta \bar{\eta}(x)_{De}} \right] + o(g^2) \right\},$$

e ainda

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^3 Z[J, \eta, \bar{\eta}; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}]}{\delta J(x_1)_A \delta \bar{\eta}(x_2)_{Bb} \delta \eta(x_3)_C^e} \right|_0 &= g \sum_D \tau_{DD} \int dx \Delta_0(x_1 - x; \theta_\beta)_{AD} \\ \times S_0(x_2 - x; \theta_{\beta\mu})_{BD^e}^b S_0(x - x_3; \theta_{\beta\mu})_{cDC}^e &+ S_0(x_2 - x_3; \theta_{\beta\mu})_{cBC}^b \left. \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)_A} \right|_0. \end{aligned}$$

Considerando a ação dos operadores  $K(x_1)$ ,  $D(x_2)$  e  $\overleftarrow{D}(x_3)$  nos propagadores

livres  $\Delta_0$  e  $S_0$ , temos

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}_{\beta\mu})_{f_\psi i_\phi} &= -ig \int dx \prod_{j=1}^3 dx_j \sum_D \boldsymbol{\tau}_{DD} \boldsymbol{\tau}_{DA} \delta_{BD} \delta_{DC} Q(x_1, p; \boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{p}})_{A1} \\
&\times \bar{M}(x_2, k_1 s_1; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{k}_1})_{B1b} N(x_3, k_2 s_2; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{k}_2})_{C1}^b \delta(x-x_1) \delta(x-x_2) \delta(x-x_3) \\
&= -ig \int dx \prod_{j=1}^3 dx_j \sum_A Q(x_1, p; \boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{p}})_{A1} \bar{M}(x_2, k_1 s_1; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{k}_1})_{bA1} \\
&\times N(x_3, k_2 s_2; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{k}_2})_{A1}^b \delta(x-x_1) \delta(x-x_2) \delta(x-x_3) \\
&= ig \int dx \prod_{j=1}^3 dx_j (Q(x_1, p; \boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{p}})_{11} \bar{M}(x_2, k_1 s_1; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{k}_1})_{11b} N(x_3, k_2 s_2; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{k}_2})_{11}^b \\
&+ Q(x_1, p; \boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{p}})_{21} \bar{M}(x_2, k_1 s_1; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{k}_1})_{b21} N(x_3, k_2 s_2; \boldsymbol{\theta}_{\beta\mu}^{\vec{k}_2})_{21}^b) \\
&\times \delta(x-x_1) \delta(x-x_2) \delta(x-x_3) \\
&= -ig \int dx e^{ix(-p+k_1+k_2)} \bar{u}(\vec{k}_1 s_1)_b v(\vec{k}_2 s_2)^b \\
&\times (u(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{p}}) u(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_1+}) u(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_2-}) - v(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{p}}) v(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_1+}) v(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_2-})) \\
&= (2\pi)^4 \delta(p-k_1-k_2) (-ig) (u(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{p}}) u(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_1+}) u(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_2-}) \\
&\quad - v(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{p}}) v(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_1+}) v(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_2-})) \bar{u}(\vec{k}_1 s_1)_b v(\vec{k}_2 s_2)^b
\end{aligned}$$

De maneira que, em primeira ordem, podemos identificar a amplitude de espalhamento térmica como

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}(i_\phi \rightarrow f_\psi; \boldsymbol{\theta}_\beta) &= \bar{u}(\vec{k}_1 s_1)_b v(\vec{k}_2 s_2)^b [(-ig) u(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{p}}) u(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_1+}) u(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_2-}) \\
&\quad + (+ig) v(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{p}}) v(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_1+}) v(\boldsymbol{\theta}_\beta^{\vec{k}_2-})],
\end{aligned}$$

que pode ser representada diagramaticamente como na figura 6.6.

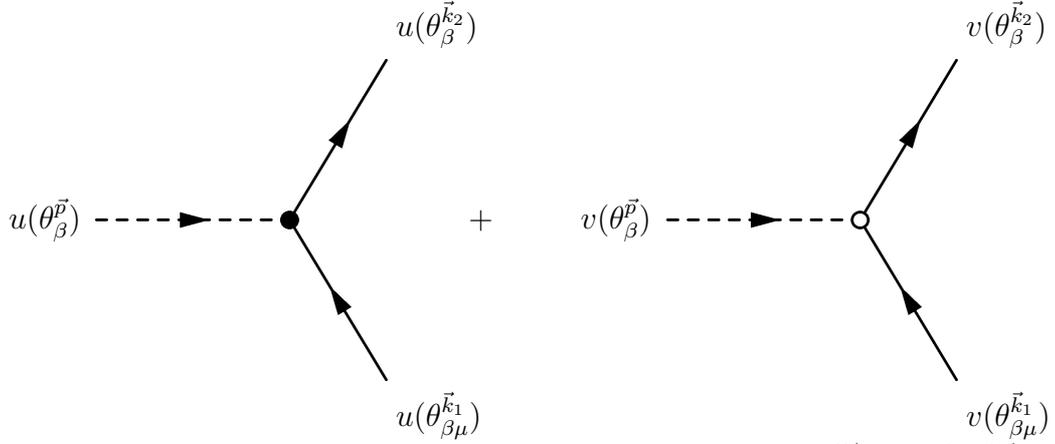


Figura 6.6: Representação diagramática da amplitude  $i\mathcal{M}(i_\phi \rightarrow f_\psi; \theta_\beta)$

O módulo ao quadrado da amplitude de espalhamento é dado por

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{f_i}^{(1)}|^2 &= (-g)^2 \bar{u}(\vec{k}_1 r)_b v(\vec{k}_2 s)^b \bar{u}(\vec{k}_1 r)_a^* v(\vec{k}_2 s)^a W_{\theta_{\beta\mu}}(E_{\vec{k}_1}, E_{\vec{k}_2}) \\ &= g^2 u(\vec{k}_1 r)^a \bar{u}(\vec{k}_1 r)_b v(\vec{k}_2 s)^b \bar{v}(\vec{k}_2 s)_a W_{\theta_{\beta\mu}}(E_{\vec{k}_1}, E_{\vec{k}_2}), \end{aligned}$$

onde

$$W_{\theta_{\beta\mu}}(E_{\vec{k}_1}, E_{\vec{k}_2}) = \frac{(1 - n_F(E_{\vec{k}_1})) (1 - \bar{n}_F(E_{\vec{k}_2}))}{1 + n_B(E_{\vec{k}_1} + E_{\vec{k}_2})}.$$

Realizando as somas nos spins em (6.54), teremos

$$\begin{aligned} \sum_{rs} |\mathcal{M}_{f_i}^{(1)}|^2 &= g^2 \sum_r u(\vec{k}_1 r)^a \bar{u}(\vec{k}_1 r)_b \sum_s v(\vec{k}_2 s)^b \bar{v}(\vec{k}_2 s)_a W_{\theta_{\beta\mu}}(E_{\vec{k}_1}, E_{\vec{k}_2}) \\ &= g^2 \text{Tr}[(\not{q} + M)(\not{k} - M)] W_{\theta_{\beta\mu}}(E_{\vec{k}_1}, E_{\vec{k}_2}), \end{aligned}$$

de maneira que a taxa de decaimento  $\Gamma_{\theta_{\beta\mu}}$  resulta em

$$\Gamma_{\theta_{\beta\mu}} = \frac{1}{2E_j} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{k}_2}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2)}{2E_{\vec{k}_2} E_{\vec{k}_1}} |\mathcal{M}_{f_i}^{(1)}|^2. \quad (6.54)$$

Podemos calcular a taxa de decaimento no sistema de referência do bóson, que corresponde a tomar  $p = (m, \vec{0})$ . Considerando a conservação do momento, neste sistema de referência, temos  $k_1 = (E_{\vec{k}_1}, \vec{k}_1)$  e  $k_2 = (E_{\vec{k}_1}, -\vec{k}_1)$ , portanto a taxa de decaimento (6.54) fica

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\theta_{\beta\mu}} &= \frac{1}{2m} \int \frac{d\Omega dk_1 k_1^2}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)\delta(m - 2E_{\vec{k}_1})}{(2E_{\vec{k}_1})^2} g^2 \text{Tr}\{(\not{k}_1 + M)(\not{k}_2 - M)\} \\
&\times W_{\theta_{\beta\mu}}(E_{\vec{k}_1}, E_{\vec{k}_1}), \\
&= \frac{1}{2m} \frac{g^2}{2\pi m^2} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^2 - M^2\right)^{1/2} 8 \left\{\left(\frac{m}{2}\right)^2 - M^2\right\} W_{\theta_{\beta\mu}}\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \\
&= \frac{2g^2}{\pi m^3} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^2 - M^2\right)^{3/2} \frac{(1 - n_F(m/2))(1 - \bar{n}_F(m/2))}{1 + n_B(m)}.
\end{aligned}$$

### 6.3.4 Amplitude térmica $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$ para o processo $\phi + \phi \rightarrow \phi + \phi$ até 1 loop.

Vamos considerar um processo, representado por,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \rightarrow \vec{p}_3 + \vec{p}_4$$

onde duas partículas de um campo  $\phi$  que interagem segundo a teoria

$$\mathcal{L}_{int} = -i \frac{(\lambda + \delta_\lambda)}{4!} \phi(x)^4 + i \frac{\delta_m}{2} \phi(x)^2,$$

até a segunda ordem em  $\lambda$ , onde  $\delta_\lambda$  e  $\delta_m$  são as contribuições associadas aos contratermos da constante acoplamento e massa respectivamente, que serão

determinados adiante. As pernas externas para este processo são dadas por

$$|i\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \quad , \quad \langle f| = \langle \vec{p}_3, \vec{p}_4|,$$

$$p_i = (E_i, \vec{p}_i) \quad , \quad p_i^2 = m^2, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

A lagrangiana do sistema duplicado é dada por

$$\widehat{\mathcal{L}} = -i \sum_A \tau_{AA} \frac{(\lambda + \delta_\lambda)}{4!} \phi(x)_A^4 + i \sum_A \tau_{AA} \frac{\delta_m}{2} \phi(x)_A^2,$$

a termalização das pernas externas resulta em

$$|i; \theta_\beta\rangle = \sqrt{2E_1 2E_2} a_{\vec{p}_1}^\dagger(\theta_\beta^{\vec{p}_1}) a_{\vec{p}_2}^\dagger(\theta_\beta^{\vec{p}_2}) |0; \theta_\beta\rangle,$$

$$\langle f; \theta_\beta| = \langle 0; \theta_\beta| a_{\vec{p}_3}(\theta_\beta^{\vec{p}_3}) a_{\vec{p}_4}(\theta_\beta^{\vec{p}_4}) \sqrt{2E_3 2E_4},$$

sendo que a matriz de espalhamento térmica é dada por

$$\begin{aligned} \widehat{S}(\theta_\beta)_{fi} &= \langle f; \theta_\beta | N_\theta \exp\left(\int dx \phi(x)_A K(x) \frac{\delta}{\delta J(x)_A}\right) |i; \theta_\beta\rangle Z[J; \theta_\beta] |_{J=0}, \\ &= \frac{1}{4!} \int \prod_{n=1}^4 dx_n \sum_{n=1}^4 \langle f; \theta_\beta | \prod_{n=1}^4 \phi(x_n)_{A_n} |i; \theta_\beta\rangle \\ &\quad \times \prod_{n=1}^4 K(x_n) \frac{\delta^4 Z[J; \theta_\beta]}{\prod_{n=1}^4 \delta J(x_n)_{A_n}} |_0, \\ &= \int \prod_{n=1}^4 dx_n \sum_{A_1 \dots A_n} Q(x_n, p(n); \theta_\beta)_{1A_n}^{(n)} \prod_{n=1}^4 K(x_n) \frac{\delta^4 Z[J; \theta_\beta]}{\prod_{n=1}^4 \delta J(x_n)_{A_n}} |_0, \end{aligned} \tag{6.55}$$

onde os  $Q$ s são definidos por

$$\begin{aligned}
Q(x_1, p_{(1)}; \theta_{\beta}^{\vec{p}_1})_{1A_1}^{(1)} &= Q(x_1, p_{(1)}; \theta_{\beta}^{\vec{p}_1})_{1A_1} = e^{ip_{(1)}x_1} U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_1})_{1A_1}, \\
Q(x_2, p_{(2)}; \theta_{\beta}^{\vec{p}_2})_{1A_2}^{(2)} &= Q(x_2, p_{(2)}; \theta_{\beta}^{\vec{p}_2})_{1A_2} = e^{ip_{(2)}x_2} U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_2})_{1A_2}, \\
Q(x_3, p_{(3)}; \theta_{\beta}^{\vec{p}_3})_{1A_3}^{(3)} &= Q(x_3, p_{(3)}; \theta_{\beta}^{\vec{p}_3})_{1A_3}^* = e^{ip_{(3)}x_3} U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_3})_{1A_3}, \\
Q(x_4, p_{(4)}; \theta_{\beta}^{\vec{p}_4})_{1A_4}^{(4)} &= Q(x_4, p_{(4)}; \theta_{\beta}^{\vec{p}_4})_{1A_4}^* = e^{ip_{(4)}x_4} U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_4})_{1A_4}, \\
p_{(1)} &= -p_1, \quad p_{(2)} = -p_2, \quad p_{(3)} = p_3, \quad p_{(4)} = p_4.
\end{aligned} \tag{6.56}$$

O funcional gerador  $Z[J; \theta_{\beta}]$  é dado por

$$\begin{aligned}
Z[J; \theta_{\beta}] &= \exp(i \int dx \sum_A \tau_{AA} \mathcal{L}_{int}(x)_A) e^{W_0[J; \theta_{\beta}]}, \\
\mathcal{L}_{int}(x)_A &= \frac{-i(\lambda + \delta_{\lambda})}{4!} \frac{\delta^4}{\delta J(x)_A^4} + \frac{i\delta_m}{2!} \frac{\delta^2}{\delta J(x)_A^2}, \\
W_0[J; \theta_{\beta}] &= -\frac{1}{2} \int dx dy J(x) \tau \Delta_0(x-y; \theta_{\beta}) \tau J(y),
\end{aligned}$$

onde  $\delta_{\lambda}$  e, portanto, temos

$$\begin{aligned}
Z[J; \theta_{\beta}] &= e^{W_0[J; \theta_{\beta}]} + \frac{(-i\lambda)}{4!} \int dx \sum_A \tau_{AA} \left( \frac{\delta}{\delta J(x)_A} \right)^4 e^{W_0[J; \theta_{\beta}]}, \\
&+ \frac{(-i(\lambda + \delta_{\lambda}))^2}{(4!)^2 2!} \int dx d\bar{x} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} \left( \frac{\delta}{\delta J(x)_A} \right)^4 \left( \frac{\delta}{\delta J(\bar{x})_{\bar{A}}} \right)^4 e^{W_0[J; \theta_{\beta}]} \\
&+ \frac{(-i(\lambda + \delta_{\lambda})i\delta_m)}{(4!)2!} \int dx d\bar{x} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} \left( \frac{\delta}{\delta J(x)_A} \right)^4 \left( \frac{\delta}{\delta J(\bar{x})_{\bar{A}}} \right)^2 e^{W_0[J; \theta_{\beta}]} \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

de maneira que

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^4 Z[J; \theta_\beta]}{\prod_{n=1}^4 \delta J(x_n)_{A_n}} \Big|_0 \\
= & -i(\lambda + \delta\lambda) \int dx \sum_A \tau_{AA} \prod_{n=1}^4 (-\tau \Delta_{xx_n} \tau)_{AA_n} \\
& -i\lambda(-i\delta_m) \int dx d\bar{x} \sum_i \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} (-\tau \Delta_{x_i \bar{x}} \tau)_{A_i \bar{A}} \prod_{n \neq i} (-\tau \Delta_{xx_n} \tau)_{\bar{A}A_n} \\
& + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int dx d\bar{x} \sum_i \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} (-\tau \Delta_{x_i \bar{x}} \tau)_{A_i \bar{A}} (-\tau \Delta_{\bar{x} \bar{x}} \tau)_{\bar{A}\bar{A}} \\
& \times (-\tau \Delta_{\bar{x}x} \tau)_{\bar{A}A} \prod_{n \neq i} (-\tau \Delta_{xx_n} \tau)_{AA_n} \\
& + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int dx d\bar{x} \sum_{\{ij,kl\}} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} (-\tau \Delta_{xx_i} \tau)_{AA_i} (-\tau \Delta_{xx_j} \tau)_{AA_j} \\
& \times (-\tau \Delta_{\bar{x}x_k} \tau)_{AA_k} (-\tau \Delta_{\bar{x}x_l} \tau)_{AA_l} (-\tau \Delta_{x\bar{x}} \tau)_{A\bar{A}} (-\tau \Delta_{x\bar{x}} \tau)_{A\bar{A}}, \quad (6.57)
\end{aligned}$$

onde consideramos apenas as amplitudes totalmente conectadas, e denotamos os propagadores da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\Delta_{xx_n} &= \Delta(x - x_n; \theta_\beta)_{AA_n} \quad , \quad \Delta_{\bar{x}x_i} = \Delta(\bar{x} - x_i; \theta_\beta)_{\bar{A}A_i}, \\
\Delta_{\bar{x}\bar{x}} &= \Delta(0; \theta_\beta)_{\bar{A}\bar{A}} \quad , \quad \Delta_{\bar{x}x} = \Delta(\bar{x} - x; \theta_\beta)_{\bar{A}A}, \dots ,
\end{aligned}$$

e  $\sum_{\{ij,kl\}}$  significa somar sob todos os pares entre os números 1, 2, 3, 4. Com

a atuação dos operadores de Klein-Gordon  $\prod_n K(x_n)$  a expressão (6.57) fica

$$\begin{aligned}
& \prod_n K(x_n) \frac{\delta^4 Z[J; \theta_\beta]}{\prod_{n=1}^4 \delta J(x_n)_{A_n}} \Big|_0 \\
= & -i(\lambda + \delta\lambda) \int dx \sum_A \tau_{AA} \prod_{n=1}^4 i\tau_{AA_n} \delta(x - x_n) \\
& -i\lambda(-i\delta_m) \int dx d\bar{x} \sum_i \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} i\tau_{A_i \bar{A}} \delta(x_i - \bar{x}) \prod_{n \neq i} i\tau_{\bar{A}A_n} \delta(x - x_n) \\
& + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int dx d\bar{x} \sum_i \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} i\tau_{A_i \bar{A}} \delta(x_i - \bar{x}) (-\tau \Delta_{\bar{x}\bar{x}} \tau)_{\bar{A}\bar{A}} \\
& \times (-\tau \Delta_{\bar{x}x} \tau)_{\bar{A}\bar{A}} \prod_{n \neq i} i\tau_{AA_n} \delta(x - x_n) \\
& + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int dx d\bar{x} \sum_{\{ij,kl\}} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} i\tau_{AA_i} \delta(x - x_i) i\tau_{AA_j} \delta(x - x_j) \\
& \times i\tau_{AA_k} \delta(\bar{x} - x_k) i\tau_{AA_l} \delta(\bar{x} - x_l) (-\tau \Delta_{x\bar{x}} \tau)_{A\bar{A}} (-\tau \Delta_{x\bar{x}} \tau)_{A\bar{A}}, \quad (6.58)
\end{aligned}$$

e, por fim, considerando (6.55), teremos

$$\begin{aligned}
& \widehat{S}(\theta_\beta)_{fi} \\
= & -i(\lambda + \delta\lambda) \sum_A \tau_{AA} \int dx \prod_{n=1}^4 Q(x, p_{(n)}; \theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A}^{(n)} \\
& -i\lambda(-i)(\delta_m + \Delta m^2(\theta_\beta)) \sum_i \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} \int d\bar{x} Q(\bar{x}, p_{(i)}; \theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1\bar{A}}^{(i)} \\
& \times \prod_{n \neq i} \int dx Q(x, p_{(n)}; \theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A}^{(n)} (\Delta_{x\bar{x}})_{A\bar{A}} \\
& + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \sum_{\{ij,kl\}} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} \int dx Q(x, p_{(i)}; \theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1A}^{(i)} Q(x, p_{(j)}; \theta_\beta^{\vec{p}_j})_{1A}^{(j)} \\
& \times \int d\bar{x} Q(\bar{x}, p_{(k)}; \theta_\beta^{\vec{p}_k})_{1\bar{A}}^{(k)} Q(\bar{x}, p_{(l)}; \theta_\beta^{\vec{p}_l})_{1\bar{A}}^{(l)} (\Delta_{x\bar{x}})_{A\bar{A}} (\Delta_{x\bar{x}})_{A\bar{A}},
\end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de  $\Delta m^2(\theta_\beta)$  dada em (5.65). Considerando as

definições (6.56), podemos obter

$$\begin{aligned}
& \widehat{S}(\theta_\beta)_{fi} \\
&= (2\pi)^4 \delta\left(\sum_f p_f - \sum_i p_i\right) \{-i(\lambda + \delta\lambda) \sum_A \tau_{AA} \prod_{n=1}^4 U(\theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A}^{(n)}\} \\
& - i\lambda(-i)(\delta_m + \Delta m^2(\theta_\beta)) \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1\bar{A}} \prod_{n \neq i} U(\theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A} \\
& \times \sum_i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [\Delta(q)_{A\bar{A}} (2\pi)^4 \delta(p_i - q) (2\pi)^4 \delta(q + p_j + p_k + p_l)] \\
& + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \sum_{\{ij,kl\}} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}_j})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}_k})_{1\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_l})_{1\bar{A}} \\
& \times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \Delta(q)_{A\bar{A}} \Delta(r)_{A\bar{A}} (2\pi)^4 \delta(p_i - q - r) (2\pi)^4 \delta(q + r + p_k + p_l),
\end{aligned}$$

onde  $\Delta(q)_{A\bar{A}} = \Delta(q; \theta_\beta)_{A\bar{A}}$  e  $\Delta(r)_{A\bar{A}} = \Delta(r; \theta_\beta)_{A\bar{A}}$ . Realizando as integrações

nos momentos obtemos

$$\begin{aligned}
& \widehat{S}(\theta_\beta)_{fi} \\
&= (2\pi)^4 \delta\left(\sum_f p_f - \sum_i p_i\right) \{-i(\lambda + \delta\lambda) \sum_A \tau_{AA} \prod_{n=1}^4 U(\theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A}^{(n)}\} \\
& - i\lambda(-i)(\delta_m + \Delta m^2(\theta_\beta)) \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1\bar{A}} \prod_{n \neq i} U(\theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A} \\
& \times \sum_i \Delta(p_i)_{A\bar{A}} \\
& + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \sum_{\{ij,kl\}} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}_j})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}_k})_{1\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_l})_{1\bar{A}} \\
& \times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta(q)_{A\bar{A}} \Delta(q - p_k - p_l)_{A\bar{A}},
\end{aligned}$$

de forma que a amplitude de espalhamento térmica  $i\mathcal{M}_{i\rightarrow f}$  é dada por

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{i\rightarrow f} &= -i(\lambda + \delta\lambda) \sum_A \tau_{AA} \prod_{n=1}^4 U(\theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A}^{(n)} \\
&\quad - i\lambda(-i)(\delta_m + \Delta m^2(\theta_\beta)) \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1\bar{A}} \prod_{n \neq i} U(\theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A} \\
&\quad \times \sum_i \Delta(p_i)_{A\bar{A}} \\
&\quad + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \sum_{\{ij,kl\}} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}_j})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}_k})_{1\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_l})_{1\bar{A}} \\
&\quad \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta(q)_{A\bar{A}} \Delta(q - p_k - p_l)_{A\bar{A}} \}, \tag{6.59}
\end{aligned}$$

Podemos escrever o propagador bosônico da seguinte forma

$$\Delta(q)_{A\bar{A}} = \Delta_0(q)_{A\bar{A}} + 2\pi v(\theta_\beta^{p_0}) \delta(p^2 - m^2) (\boldsymbol{\sigma} U(\theta_\beta^{p_0}))_{A\bar{A}},$$

onde a matriz  $\boldsymbol{\sigma}$  é dada por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isso a integral de *loop* no último termo de (6.59) fica

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta(q)_{A\bar{A}} \Delta(q - p_k - p_l)_{A\bar{A}} &= i\tau_{A\bar{A}} V((p_k + p_l)^2) \\
&\quad + f(\beta, kl)_{A\bar{A}}, \tag{6.60}
\end{aligned}$$

onde  $V$  é definido por

$$V(p^2) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log[m^2 - x(1-x)p^2] \right),$$

que corresponde à mesma divergência da teoria  $\lambda\phi^4$  a  $T = 0$ , sendo  $d = 4 - \epsilon$  [33]. A contribuição associada ao efeito de temperatura é finita, sendo dada por

$$\begin{aligned}
f(\beta, kl)_{A\bar{A}} &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \{ \Delta_0(q)_{A\bar{A}} (2\pi) v(\theta_\beta^{r_0}) \delta((p_k + p_l - q)^2 - m^2) (\sigma U(\theta_\beta^{r_0}))_{A\bar{A}} \\
&\quad + \Delta_0(p_k + p_l - q)_{A\bar{A}} (2\pi) v(\theta_\beta^{q_0}) \delta(q^2 - m^2) (\sigma U(\theta_\beta^{q_0}))_{A\bar{A}} \\
&\quad + 4\pi^2 v(\theta_\beta^{q_0}) v(\theta_\beta^{r_0}) (\sigma U(\theta_\beta^{q_0}))_{A\bar{A}} (\sigma U(\theta_\beta^{r_0}))_{A\bar{A}} \delta(q^2 - m^2) \\
&\quad \times \delta((p_k + p_l - q)^2 - m^2) \},
\end{aligned}$$

onde  $r_0 = p_{k0} + p_{l0} - q_0$ . Substituindo (6.60) em (6.59), podemos obter

$$\begin{aligned}
&i\mathcal{M}_{i \rightarrow f} \\
&= -i(\lambda + \delta\lambda + \lambda^2 \sum_{ij,kl} V((p_{(k)} + p_{(l)})^2) \sum_A \tau_{AA} \prod_{n=1}^4 U(\theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A}^{(n)} \\
&\quad - \lambda(\delta_m + \Delta m^2(\theta_\beta)) \sum_{A\bar{A}} \sum_i \tau_{AA} \tau_{A\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1\bar{A}} \prod_{n \neq i} U(\theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A} \Delta(p_i)_{A\bar{A}} \\
&\quad + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \sum_{\{ij,kl\}} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{A\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}_j})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}_k})_{1\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_l})_{1\bar{A}} f(\beta, kl)_{A\bar{A}}.
\end{aligned}$$

A soma em  $V$  no primeiro termo da expressão acima fica

$$\sum_{ij,kl} V((p_{(k)} + p_{(l)})^2) = V(s) + V(t) + V(u),$$

onde  $s, t, u$  são as variáveis de Mandelstam [33], definidas por

$$\begin{aligned}
s &= (p_{(1)} + p_{(2)})^2 = (p_{(3)} + p_{(4)})^2, \\
&= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\
t &= (p_{(1)} + p_{(3)})^2 = (p_{(2)} + p_{(4)})^2, \\
&= (-p_1 + p_3)^2 = (-p_2 + p_4)^2, \\
u &= (p_{(1)} + p_{(4)})^2 = (p_{(2)} + p_{(3)})^2, \\
&= (-p_1 + p_4)^2 = (-p_2 + p_3)^2,
\end{aligned}$$

de forma que a amplitude térmica fica

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{i \rightarrow f} &= -i(\lambda + \delta\lambda + \lambda^2(V(s) + V(t) + V(u))) \sum_A \tau_{AA} \prod_{n=1}^4 U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_n})_{1A}^{(n)} \\
&\quad - \lambda(\delta_m + \Delta m^2(\theta_{\beta})) \sum_{A\bar{A}} \sum_i \tau_{AA} \tau_{A\bar{A}} U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_i})_{1\bar{A}} \prod_{n \neq i} U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_n})_{1A} \\
&\quad \times \Delta(p_i)_{A\bar{A}} + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \sum_{\{ij,kl\}} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{A\bar{A}} U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_i})_{1A} U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_j})_{1A} U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_k})_{1\bar{A}} \\
&\quad \times U(\theta_{\beta}^{\vec{p}_l})_{1\bar{A}} f(\beta, kl)_{A\bar{A}}.
\end{aligned}$$

O segundo termo da expressão acima contém propagadores  $\Delta(p_i)_{A\bar{A}}$  cujos momentos  $p_i$ s estão na camada de massa, portanto contendo singularidades típicas de diagramas não amputados com pernas externas na camada de massa. Para realizar as amputações destas pernas, eliminando as singulari-

dades, precisamos escolher um contratermo de massa cujo  $\delta_m$  é dado por

$$\delta_m = -\Delta m^2(\theta_\beta),$$

com isso teremos

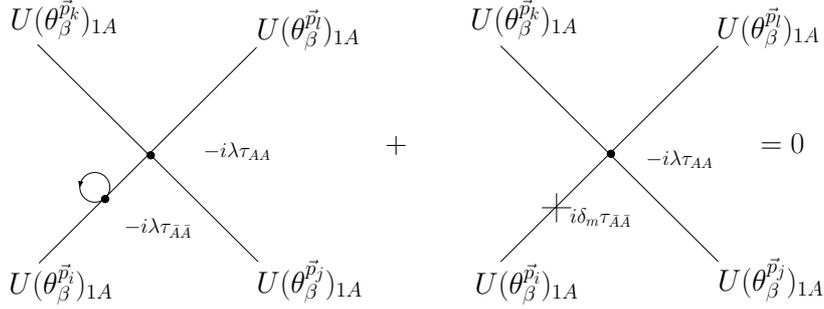


Figura 6.7: Amputação das pernas externas em 1 loop.

Para eliminar as divergências dos  $V$ s no primeiro termo, explicitadas na Eq.(6.61), podemos escolher  $\delta_\lambda$  do contratermo da constante de acoplamento como sendo dado por

$$\delta_\lambda = -\lambda^2(V(4m^2) + 2V(0)), \quad (6.61)$$

exatamente com em  $T = 0$  [33]. Com estes contratermos a amplitude de espalhamento térmica renormalizada  $i\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$  é dada por

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{i \rightarrow f} &= -i(\lambda + \lambda^2(\Delta V(s) + \Delta V(t) + \Delta V(u))) \sum_A \tau_{AA} \prod_{n=1}^4 U(\theta_\beta^{\vec{p}_n})_{1A}^{(n)} \\ &+ \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \sum_{\{ij,kl\}} \sum_{A\bar{A}} \tau_{AA} \tau_{\bar{A}\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_i})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}_j})_{1A} U(\theta_\beta^{\vec{p}_k})_{1\bar{A}} U(\theta_\beta^{\vec{p}_l})_{1\bar{A}} \\ &\times f(\beta, kl)_{A\bar{A}}, \end{aligned}$$

cuja representação diagramática é dada na fig.(6.8)

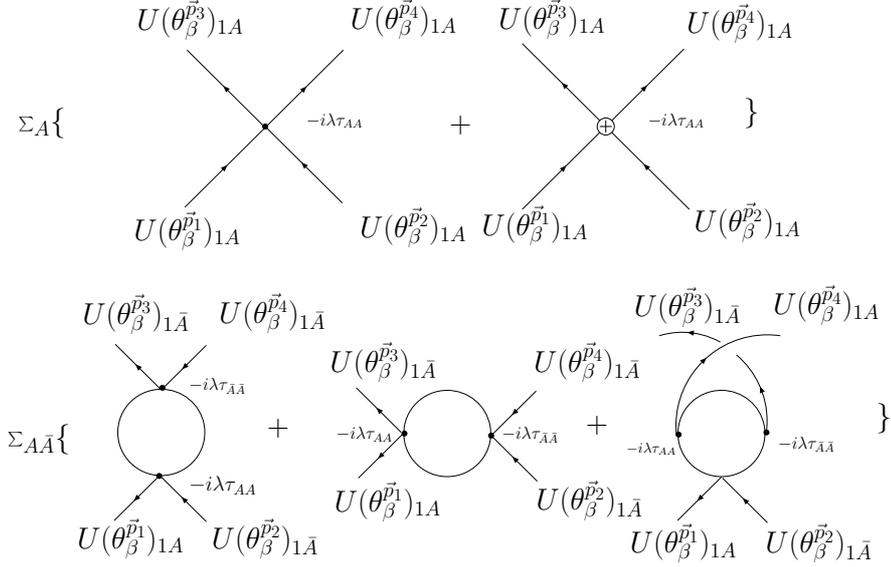


Figura 6.8: Amplitude de espalhamento  $i\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$  em 1 loop.

onde  $\Delta V(s)$ ,  $\Delta V(t)$  e  $\Delta V(u)$  são definidos por

$$\begin{aligned} \Delta V(s) &= V(s) - V(4m^2) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log\left[\frac{m^2 - x(1-x)s}{m^2 - x(1-x)4m^2}\right], \\ \Delta V(t) &= V(t) - V(0) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log\left[\frac{m^2 - x(1-x)t}{m^2}\right], \\ \Delta V(u) &= V(u) - V(0) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log\left[\frac{m^2 - x(1-x)u}{m^2}\right], \end{aligned}$$

os quais são finitos.

# Capítulo 7

## Conclusões e perspectivas

Neste trabalho apresentamos um tratamento formal da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT), tanto do ponto de vista físico como matemático, para construir uma fórmula de redução térmica, com um formalismo de tempo real, e aplicar no cálculo de taxas de decaimento.

Dentre os elementos que acrescentamos ao formalismo da DCT, destacamos a definição dos estados térmicos em termos dos ensembles estatísticos gerais. Isto permitiu realizar uma dedução detalhada das transformações de Bogoliubov  $\mathcal{U}_B[\theta_{\beta\mu}]$  e  $\mathcal{U}_F[\theta_{\beta\mu}]$  associadas, respectivamente, aos campos de Klein-Gordon neutro e de Dirac, ambos no ensemble grande canônico. A partir dessa dedução fica claro a possibilidade de se construir outras transformações de Bogoliubov em ensembles que, a semelhança do grande canônico, não contenham restrições sobre os números de ocupação dos níveis do sis-

tema. Apontamos esta possibilidade como uma perspectiva.

Nos capítulos 3 e 4 introduzimos o conceito de operadores térmicos, respectivamente, bosônico e fermiônico, o que permitiu o cálculo dos propagadores térmicos em termos dos não térmicos com extrema simplicidade. É interessante notar que estes operadores térmicos são definidos para atuar em funções complexas arbitrárias com as componentes duplicadas e não apenas em operadores de campo, o que significa que podemos utilizá-lo no formalismo de integrais de trajetória, um aspecto pouco desenvolvido na DCT. Esperamos ainda que este operador térmico desempenhe um papel semelhante ao operador térmico definido em [63–67], todavia relacionado diagramas gerais da teoria duplicada a  $T = 0$  aos diagramas térmicos da DCT.

No capítulo 5, um ponto central dos nossos desenvolvimentos, tratamos da teoria de perturbação canônica da DCT para o campo escalar real e deduzimos o teorema de Wick da DCT (outro aspecto não explorado na literatura de modo sistemático e consistente). Aplicamos este teorema de Wick na construção da fórmula de redução da DCT. No capítulo 6, como aplicação desses resultados, obtivemos a amplitude térmica em alguns processos de decaimento, a partir da qual calculamos as taxas de decaimento térmicas, reproduzindo os resultados já obtidos em [27]. Devido à instabilidade térmica

a fórmula de redução da DCT só pode ser utilizada nas primeiras ordens da teoria de perturbação. Na última aplicação do capítulo 6, calculamos a amplitude de espalhamento até 1 *loop* para um processo onde duas partículas escalares interagem segundo a teoria  $\lambda\phi^4$ . No entanto existem propostas [59] para se lidar com a instabilidade em TQC e acreditamos que esses esquemas podem igualmente ser implementados na DCT. Apontamos este fato como outra perspectiva de trabalho futuro.

A partir do funcional gerador podemos utilizar a transformação de Bogoliubov generalizada [5, 60, 61] para desenvolver a teoria quântica de campos à temperatura finita confinada em regiões espaciais. Este tipo de procedimento utiliza o fato de que a transformação de Bogoliubov em DCT, de um ponto de vista topológico, equivale a compactificar a teoria de campo em uma topologia S no eixo temporal, com diâmetro de circunferência dado por  $\beta = 1/T$ , onde  $T$  é a temperatura. Esse resultado tem sido generalizado com sucesso para tratar diversos sistemas existindo em regiões limitadas do espaço, como o que dá origem ao efeito Casimir [62]. Entretanto, várias dessas explicações utilizam o formalismo de Matsubara [52]. As vantagens de cálculo que advêm do uso da transformação de Bogoliubov, só podem ser plenamente utilizadas com o desenvolvimento das integrais de trajetórias no

contexto da DCT. Seria interessante também verificar se a transformação de Bogoliubov generalizada permite que a periodicidade espacial, por exemplo, seja implementada algebricamente na forma de uma lei de substituição til, como é o caso da condição KMS. Além disso, lembrando que no caso da condição KMS, a existência de uma representação espectral (5.49) tem implicações importantes sobre a teoria de perturbação da DCT; quais seriam as implicações da periodicidade espacial, implementada via transformação de Bogoliubov generalizada, sobre a teoria de perturbação resultante? Essas são algumas questões e perspectivas com as quais esperamos lidar com o seguimento desta pesquisa.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Umezawa, *Advanced Field Theory : Micro, Macro and Thermal Physics* (American Institute of Physics, New York, 1993).
- [2] H. Umezawa, H. Matsumoto e M. Tachiki, *Thermofield Dynamics and Condensed States* (North-Holland, 1982).
- [3] Y. Takahashi e H. Umezawa, *Collective Phenom.* **2** (1975) 55.
- [4] H. Chu e H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys. A* **9** (1994) (2363.ess, London, 1996).
- [5] A. E. Santana, J. M. C. Malbouisson, F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, *Thermal Field Theories: Algebraic Aspects and Applications* Nonlinear Systems and Fundamental Interactions, Tashkent 2004, Eds. F. C. Khanna e D. Matrasulov (Springer, Berlim, 2006), p. 187.
- [6] E. Calzeta, S. Habib e B. L. Hu, *Phys. Rev. D* **37** (1988) 2901.

- [7] E. Calzeta e B. L. Hu, Phys. Rev. D **40** (1989) 381.
- [8] Proc. of Quark Matter 1996, Heidelberg, Germany, Nucl.no Phys. A 610 (1996).
- [9] G. C. Nayak e V. Ravishankar, Phys. Rev. D **55** (1997) 6877.
- [10] H. S. Song, S. X. Ding e I. An, Journal of Physics A **26** (1993) 5197.
- [11] G. Vitiello, *The Algebraic Structure of Thermofield Dynamics and the  $q$ -Deformations of the Weyl-Heisenberg Algebra*, in *Proceedings of the IVth Workshop on Thermal Theories and Their Applications*, Eds. Y. X. Gui, F. C. Khanna e Z. B. Su (World Scientific, Singapore, 1996).
- [12] E. Celeghini et al, Phys. Lett. A **244** (1998) 455.
- [13] T. Kopf, A. E. Santana e F. C. Khanna, J. Math. Phys. **38** (1997) 4971.
- [14] A. E. Santana, T. Kopf e F. C. Khanna, *Hopf Algebras, Lie Symmetries and Thermal Field Theory*, in Proc. of the XI Lake Louise Winter Institute: Topics in Electroweak Physics, Eds. A. Astbury, B. A. Campbel, F. C. Khanna e J. L. Pinfeld (W. Scientific, Singapore, 1997), p. 510.
- [15] A. E. Santana e F. C. Khanna, Phys. Lett. A **203** (1995) 68.

- [16] A. Matos Neto, J. D. M. Vianna, A. E. Santana e F. C. Khanna, *Physics Essays*, **9** (1996) 596.
- [17] A. E. Santana, A. Matos Neto, J. D. M. Vianna e F. C. Khanna, *w\*-algebra*, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 641.
- [18] A. E. Santana, F. C. Khanna, H. Chu, e Y. C. Chang, *Ann. Phys. (N.Y.)* **249** (1996) 481.
- [19] L. M. da Silva, A. E. Santana, e J. D. M. Vianna, *Braz. J. Phys.* **27** (1997) 619.
- [20] G. G. Emch, *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory* (Wiley-Interscience, New York, 1972).
- [21] O. Bratteli e D. W. Robison, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, vols. I and II* (Springer, Berlin, 1979).
- [22] M. Takesaki, *Tomita Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1970).
- [23] I. Ojima, *Ann. Phys. (N. Y. )* **137**, 1 (1981).
- [24] H. Matsumoto, Y. Nakano, e H. Umezawa, *Phys. Rev. D* **31**, 429, (1985).

- [25] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan 12 (1957) 570; P. C. Martin e J. Schwinger, Phys. Rev. 115 (1959 1342).
- [26] H. Matumoto, H. Umezawa, J. P. Whitehead, Prog. Theor. Phys. **76**, 260, (1986).
- [27] A. Rakhimov e F. C. Khanna, Phys. Rev. C **64**, 064907 (2001).
- [28] H. A. Weldon, Phy. Rev. D **28**, 2007, (1983).
- [29] S. R. A. Salinas, *Introduction to Statistical Physics*(Springer-Verlag, Berlin, 2001).
- [30] K. Huang, *Statistical Mechanics*(J. Wiley and Sons, New York, London, Sydney, 1963).
- [31] S. Attal, A. Joye e C. Pillet, *Open Quantum Systems: The Hamiltonian approach*(Springer-Verlag, Berlin, 2006).
- [32] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [33] M. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995).

- [34] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications* (W.Scientific, Singapore, 2009).
- [35] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, New York, 1989).
- [36] K. Soutome, *Z. Phys.C* **40**, 479 (1988).
- [37] A. Das, *Finite Temperature Field Theory* (World Scientific, New York), (1977).
- [38] G. W. Semenoff e H. Umezawa, *Nucl. Phys. B* **220**, (1983), 196.
- [39] C. A. Siqueira e A. E. Santana, *Thermofield Dynamics and Path-Integral Formalism*, *PoS(IC2006)* **044**, (2006).
- [40] Y. Takahashi e H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, (1996), 1755.
- [41] A.J. Niemi e G.W. Semenoff, *Nucl. Phys. B* **230**, (1983), 181.
- [42] Y. Fujimoto, H. Matsumoto, H. Umezawa. e I. Ojima, *Phys. Rev. D* **30**, 1400, (1984).
- [43] Y. Fujimoto e R. Grigjanis, *Z. Phys. C* **28**, 395, (1985).

- [44] Y. Fujimoto, R. Grigjanis e R. Kobes Prog. Theor. Phys. **76**, 434, (1985).
- [45] A. J. Niemi e G. W. Semenoff, Ann. Phys. **152**, (1984), 105.
- [46] P. F. Bedaque e A. Das, Phys. Rev. D **45**, 2906, (1992).
- [47] J. Schwinger, J. , Math. Phys. **2**, 407, (1961);L. V. Keldysh, Zh. Éksp. Teor. Fiz **47**, 1515, (1964).
- [48] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, F. Mancini, e M. Marinaro, Prog. Theor. Phys. *70* (1983) 599.
- [49] H. Matsumoto, Y. Nakano e H. Umezawa, J. Math. Phys. *25* (1984) 3076.
- [50] A. E. Santana, *A Path-Integral Formalism for Thermofield Dynamics*, work presented at the XXVI Brazilian Meeting on Particles e Fields, 2005, [www.sbfisica.org.br](http://www.sbfisica.org.br).
- [51] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol I (Cambridge Unversity Press, New York, 1995).
- [52] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
- [53] R. Kobes e G. Semenoff, Nucl. Phys B **260**, 741, 1985; **B272**, 329, (1986).

- [54] L. Dolan e R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 3320, (1974).
- [55] A. Niegawa, Phys. Rev. D **57**, 1379, 1998.
- [56] K. Saito, T. Maruyama e K. Soutome, Phys. Rev. C **40** , 407, (1989).
- [57] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1940).
- [58] M. Matsumoto, I. Ojima e H. Umezawa, Ann. Phys (N.Y.), **152**, 348, (1984).
- [59] R. Ticciati, *Quantum Field Theory for Mathematicians* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [60] J. M. C. Malbouisson e A. P. C. Malbouisson, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 2263, (2002).
- [61] A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Nucl. Phys. B **631**, 83, (2002).
- [62] J. C. da Silva, F. C. Khanna, A. Matos Neto, A. E. Santana, Phys. Rev. A **66** (2002) 052101.
- [63] F. T. Brandt, A. Das, e J. Frenkel, *ibid.* **60**, 105008 (1999).

- [64] F. T. Brandt, A. Das, O. Espinosa, J. Frenkel, S. Perez Phys. Rev. D.**72**, 085006 (2005).
- [65] F. T. Brandt, A. Das, O. Espinosa, J. Frenkel, S. Perez. Rev. D **73**, 065010 (2006).
- [66] O. Espinosa e E Stockmeyer Phys. Rev. D.**69**, 065004 (2004).
- [67] O. Espinosa Phys. Rev. D.**71**, 065009 (2005).
- [68] Y. Fujimoto, M. Morikawa e M. Sasaki, Phys. Rev. D **33**, 590, (1986).