

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DO COMPORTAMENTO  
MECÂNICO CÍCLICO DE SOLOS SATURADOS E NÃO  
SATURADOS**

**DORIVAL M. PEDROSO**

**ORIENTADOR: MÁRCIO MUNIZ DE FARIAS**

**TESE DE DOUTORADO EM GEOTECNIA**

**PUBLICAÇÃO: G.TD-039/06**

**BRASÍLIA/DF: SETEMBRO/ 2006**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DO COMPORTAMENTO  
MECÂNICO CÍCLICO DE SOLOS SATURADOS E NÃO SATURADOS

DORIVAL M. PEDROSO

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA  
CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS RE-  
QUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR.

APROVADA POR:

MÁRCIO MUNIZ DE FARIAS, PhD (UnB)  
(ORIENTADOR)

ANDRÉ PACHECO DE ASSIS, PhD (UnB)  
(EXAMINADOR INTERNO)

MANOEL PORFÍRIO CORDÃO NETO, DSc (UnB)  
(EXAMINADOR INTERNO)

MARCELO SANCHEZ, PhD (University of Strathclyde)  
(EXAMINADOR EXTERNO)

IVALDO DÁRIO DA SILVA PONTES FILHO, DSc (UFPe)  
(EXAMINADOR EXTERNO)

DATA: BRASÍLIA/DF, 25 DE SETEMBRO DE 2006.

## FICHA CATALOGRÁFICA

PEDROSO, DORIVAL M.

Representação Matemática do Comportamento Mecânico Cíclico de Solos Saturados e não Saturados [Distrito Federal] 2006

xxiv, 224 p., 210x297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Geotecnia, 2006)

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. Modelagem constitutiva | 2. Carregamentos cíclicos |
| 3. Solos não saturados    | 4. Integração numérica    |
| I. ENC/FT/UnB             | II. Título (série)        |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PEDROSO, D.M. (2006). Representação Matemática do Comportamento Mecânico Cíclico de Solos Saturados e não Saturados. Tese de Doutorado, Publicação G.TD-039/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 224 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Dorival M. Pedroso

TÍTULO DA TESE: Representação Matemática do Comportamento Mecânico Cíclico de Solos Saturados e não Saturados

GRAU / ANO: Doutor / 2006

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de doutorado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Dorival M. Pedroso

dorival.pedroso@gmail.com

# Dedicatória

*Larissa,  
a fonte de toda magia.*

*Meu pai,  
sem dúvidas,  
o melhor.*

*Professor Márcio,  
exemplo de cientista  
e grande pesquisador.*



# Agradecimentos

Ao Professor Márcio por ter me iniciado nesse maravilhoso mundo de pesquisa em geomecânica computacional e ensinado importantes conceitos numéricos/geotécnicos ao longo desses anos. Também foi importante o companheirismo durante nossas discussões extra-acadêmicas por meio do nosso tradicional “happy-hour” com direito a um chopp. A oportunidade única de ter trabalhado com o Professor Márcio é muito apreciada. Agradeço também o impulso inicial com aulas particulares ao longo de muitas manhãs por várias semanas. Suas explicações, correções e idéias sempre me incentivaram a fazer uma pesquisa mais séria e inovadora.

Ao Professor Nakai por ter me ensinado conceitos de modelagem de materiais e, também, apresentado e discutidos outros assuntos interessantes, como ensinamentos da cultura japonesa. A ajuda com resultados experimentais e explicações de aspectos teóricos também são enormemente apreciadas.

Ao Professor Dorival Pedroso pelo maior incentivo de que o estudo é a melhor forma. Agradeço também o suporte mental e carinhoso, a paciência e a compreensão da minha ausência em vários momentos. Seus ensinamentos como professor e como pai certamente contribuíram à conclusão desta tese. Sua valorização da engenharia, a física e a matemática também me induziram ao estudo científico.

À Professora Rebecca Brannon pelos inúmeros textos relacionados ao Cálculo Tensorial e Coordenadas Curvilíneas. Estes foram muito úteis na derivação e entendimento das equações relativas à modelagem constitutiva.

Às minhas irmãs e irmãos Letícia, Dcharley, Isabel, Liliane e Liz Mílzia, pelo incentivo e pela compreensão das minhas faltas a tantos eventos. À minha irmã Liliane por algumas valiosas dicas de Língua Portuguesa. À minha irmã mais velha Dita, pelo incentivo e por cuidar muito bem do meu pai; muito obrigado!

Aos meus irmãos Maurinho e Valerinho pela amizade e companhia ao longo desses anos; também pela paciência e respeito durante nosso convívio e, especialmente, aos momentos alegres que tivemos durante as horas de divertimento com a nossa rede.

Ao grande amigo Raúl Dario pelas inúmeras discussões e auxílios relacionados ao Método dos Elementos Finitos, dentre outras. Também pela participação no desenvolvimento do projeto MechSys, pelas idéias geniais que nos ajudaram em várias partes, pela persistência para superarmos os problemas e, é claro, à amizade ao longo desses anos.

Aos amigos Marcos Aires e Renato Apolinário pelo companheirismo e incentivo, principalmente nas horas de dificuldades. Espero que a harmonia entre nós seja inquebrável, pois ambos são pessoas geniais.

Em especial à minha mãe e minhas tias Geralda e Maura pelo carinho e suporte mental. Também agradeço as preocupações, o incentivo e todas as oportunidades que tivemos de estar juntos. A confiança no meu trabalho e a forma alegre de se expressarem ao receberem os resultados também é, com amor, muito apreciada.

Aos meus tios Durval e Virgínia pelos tantos anos de participação como pai e mãe; muito obrigado. Aos meus primos Du, Alessandra, Peixe, Fernanda, Fred e Aline, pelo companheirismo, amizade e por serem verdadeiros irmãos. Aos meus primos e amigos Cristiane, Mário e Marcos, por terem sempre sido amigos e expressarem alegria e amizade.

Também em especial, a meu amor Larissa, sem a qual os caminhos não teriam saída. Agradeço a compreensão, o incentivo, o amor, as preocupações, e milhares de outros fatos, pensamentos, sentimentos, alegrias e idéias que compartilhamos nestes anos. A força de vontade mostrada durante as dificuldades e a dedicação à solução dos nossos problemas é muito agradecida, pois, foi uma forma única de expressar seu amor; também te amo. De coração, agradeço também a minha nova família: Sílvio, Nair, Dudu e Leandro, pelo apoio e amizade. Muito obrigado pelos anos alegres que passamos.

Finalmente, mas com a mesma importância, ao CNPq (Conselho Nacional - Brasileiro - de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo importante financiamento da pesquisa.

## RESUMO

### Representação Matemática do Comportamento Mecânico Cíclico de Solos Saturados e não Saturados

Materiais granulares, como os solos, apresentam um comportamento mecânico relativamente complexo. Usualmente, o comportamento mecânico de solos é estudado com o auxílio da Mecânica dos Meios Contínuos. Materiais submetidos a carregamentos cíclicos apresentam comportamento mecânico diferenciado, com relação a carregamentos monotônicos. A teoria matemática da elastoplasticidade tem sido empregada na simulação numérica do comportamento de solos. Em simulações com carregamentos cíclicos, o conceito de subcarregamento é útil na representação da transição elástica-plástica. O conceito de variáveis internas é fundamental na criação de leis com memória de características internas. As equações resultam num Sistema Algébrico de Equações Diferenciais (DAS) que pode ser resolvido pelo método Runge-Kutta. Quatro esquemas são analisados: a) Forward-Euler (FE), explícito de primeira ordem b) Backward-Euler (BE), implícito de primeira ordem; c) Modified-Euler (ME), explícito de segunda ordem e d) Runge-Kutta-Dormand-Prince (RKDP), explícito de quinta ordem. Os esquemas Runge-Kutta “embedded”, como o ME e RKDP, são úteis na elaboração de algoritmos que determinam automaticamente o tamanho dos subpassos. Estes são necessários para garantir a acurácia e, no caso do esquema BE, a convergência. Critérios de ruptura são considerados na construção de modelos constitutivos. Para solos, os mais comuns são Mohr-Coulomb, Lade-Duncan e Matsuoka-Nakai. O critério Matsuoka-Nakai pode ser considerado mediante a equação apresentada por Sheng et al. (2000) e que tem origem no trabalho de Argyris et al. (1974). Dois novos critérios são introduzidos: um para materiais isotrópicos, com características similares ao critério de Lade-Duncan, e outro para materiais granulares com anisotropia inerente e/ou induzida. O Algoritmo Genético Evolutivo (AGE) é empregado na determinação de parâmetros constitutivos. Para isso, os parâmetros são reunidos em indivíduos por meio de funções de representação. A evolução dos indivíduos leva aos melhores parâmetros para um conjunto de ensaios experimentais. Ilhas de indivíduos ajudam a manter uma diversidade dos indivíduos. O modelo Subloading  $t_{ij}$  (Sub $t_{ij}$ ) de Nakai & Hinokio (2004) é revisto e suas equações são deduzidas dentro da estrutura da elastoplasticidade com subcarregamento. Com isso a integração numérica do DAS correspondente pode ser facilmente realizada com os esquemas Runge-Kutta. Um novo modelo para solos saturados e carregamentos cíclicos é introduzido. Este modelo, denominado Subloading Cam-clay (SubCam), tem origem nas idéias do modelo Sub $t_{ij}$  e no conceito de subcarregamento. O modelo SubCam é capaz de representar algumas características de solos. Dois modelos para solos não saturados são apresentados. O primeiro, denominado Barcelona Estendido (BarcelonaX) é uma extensão simples do modelo Barcelona (BBM) de Alonso et al. (1990), tendo as mesmas características que o BBM, com exceção à representação da resistência. Esta considera a dependência do ângulo de Lode, similarmente ao critério de Matsuoka-Nakai. O segundo, denominado Subloading Barcelona (SubBar), é uma extensão do modelo BarcelonaX com a adição do conceito de subcarregamento. Com isto, ele tem capacidade de representar o comportamento mecânico para carregamentos cíclicos. O modelo BarcelonaX introduz um novo parâmetro que controla a suavização da única superfície no espaço tensão/sucção. O modelo SubBar adiciona dois parâmetros, em que cada um controla a variação da flexibilidade para ciclos de tensão ou sucção.

## ABSTRACT

### Mathematical Representation of the Cyclic Mechanical Behaviour of Saturated and Unsaturated Soils

Granular materials, such as soils, exhibit a relatively complex mechanical behaviour. Usually, the mechanical behaviour of soils is studied with the aid of the Continuum Mechanics. Materials under cyclic loadings exhibit a different mechanical behaviour, with respect to monotonic loadings. The mathematical theory of elastoplasticity has been employed to the numerical simulation of the behaviour of soils. For cyclic loadings, the concept of subloading is a useful tool to represent the elastic-plastic transition. The concept of internal variables is essential to the elaboration of laws which memorize the internal features of the material. The resulting equations form a Differential Algebraic System (DAS) which may be solved by the Runge-Kutta method. Four schemes are analysed: a) the explicit first order Forward-Euler (FE); b) the implicit first order Backward-Euler (BE); c) the explicit second order Modified-Euler (ME); and c) the explicit fifth order Runge-Kutta-Dormand-Prince (RKDP). The embedded Runge-Kutta schemes, like ME and RKDP, are useful to the elaboration of algorithms which automatically determine the substep size. These substeps are necessary to increase the accuracy and, in the case of BE scheme, to assure the convergence. Failure criteria are considered by constitutive models. For soils, the Mohr-Coulomb, Lade-Duncan and Matsuoka-Nakai are commonly adopted. The Matsuoka-Nakai criterion may be considered by means of an equation presented by Sheng et al. (2000) and which has roots in a work of Argyris et al. (1974). Two new criteria are presented: one for isotropic materials, with similar characteristics to that of Lade-Duncan criterion, and other for materials with inherent and/or induced anisotropy. The Evolutionary Genetic Algorithm (EGA) is employed to the determination of constitutive parameters. For that, the parameters are grouped into individuals by means of representation functions. The evolution of individuals leads to the best parameters for a set of experimental results. Islands of individuals help to keep the diversity of individuals. The subloading  $t_{ij}$  model (Sub $t_{ij}$ ) of Nakai & Hinokio (2004) is reviewed and its equations are deduced under the framework of elastoplasticity. Therefore, the solution of the corresponding DAS may be done with Runge-Kutta schemes. A new model for saturated soils subjected to cyclic loadings is introduced. This model, named Subloading Cam-clay (SubCam), was originated with some ideas of the Sub $t_{ij}$  model and considering the subloading concept. The SubCam model can represent the cyclic behaviour of soils. Two models for unsaturated soils are presented. The first one, named Extended Barcelona (BarcelonaX) is a simple extension to Barcelona model (BBM) of Alonso et al. (1990), which has the same characteristics of BBM, with the exception of the shear strength representation. This considers the influence of Lode angle, similarly to Matsuoka-Nakai criterion. The second model, named Subloading Barcelona (SubBar), is an extension to the BarcelonaX model which adds the concept of subloading, therefore, this model is able to represent the cyclic behaviour. BarcelonaX model adds a new parameter to control the unique surface in the stress/suction space and SubBar model adds two new parameters to control the decrease of flexibility due to suction and/or stress cycles.

# Índice

| Capítulo                                                                        | Página    |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Introdução</b>                                                             | <b>1</b>  |
| 1.1 Objetivos . . . . .                                                         | 3         |
| 1.2 Escopo e Organização . . . . .                                              | 4         |
| <b>2 Revisão Bibliográfica</b>                                                  | <b>7</b>  |
| 2.1 Plano Espacialmente Mobilizado . . . . .                                    | 8         |
| 2.2 Tensor tij e Modelos tij-clay e tij-sand . . . . .                          | 9         |
| 2.3 Conceito de Subcarregamento . . . . .                                       | 10        |
| 2.4 Modelo Subloading tij . . . . .                                             | 10        |
| 2.5 Modelo Barcelona . . . . .                                                  | 11        |
| 2.6 Solução do Sistema Elastoplástico . . . . .                                 | 11        |
| 2.7 Outras Relações Constitutivas . . . . .                                     | 12        |
| 2.8 Cálculo Tensorial . . . . .                                                 | 12        |
| <b>3 Elastoplasticidade e Subcarregamento</b>                                   | <b>15</b> |
| 3.1 Elastoplasticidade Matemática . . . . .                                     | 18        |
| 3.2 Sistema Algébrico de Equações Diferenciais . . . . .                        | 22        |
| 3.3 Solução . . . . .                                                           | 23        |
| <b>4 Ensaios de Laboratório</b>                                                 | <b>25</b> |
| 4.1 Equipamentos . . . . .                                                      | 26        |
| 4.2 Materiais . . . . .                                                         | 27        |
| 4.3 Resultados Experimentais . . . . .                                          | 29        |
| 4.3.1 Ensaios Cíclicos com a Argila Fujinomori (FO1) . . . . .                  | 30        |
| 4.3.2 Ensaios Monotônicos com a Argila Fujinomori (FCH) . . . . .               | 37        |
| 4.3.3 Ensaios Monotônicos com a Areia Toyoura (TSD) . . . . .                   | 37        |
| <b>5 Critérios de Ruptura e Superfícies de Plastificação</b>                    | <b>39</b> |
| 5.1 Ferramental Matemático . . . . .                                            | 40        |
| 5.2 Breve Revisão do Conceito de Plano Espacialmente Mobilizado (SMP) . . . . . | 41        |
| 5.3 Critérios de Ruptura . . . . .                                              | 43        |
| 5.4 Tresca, von Mises e Mohr-Coulomb . . . . .                                  | 44        |
| 5.5 Lade-Duncan . . . . .                                                       | 46        |
| 5.6 Matsuoka-Nakai . . . . .                                                    | 48        |
| 5.7 Argyris-Sheng et al. . . . .                                                | 49        |
| 5.8 Drucker-Prager . . . . .                                                    | 50        |
| 5.9 Novo Critério de Ruptura (SMP-based) . . . . .                              | 52        |
| 5.10 Superfícies de Plastificação . . . . .                                     | 54        |

|          |                                                             |            |
|----------|-------------------------------------------------------------|------------|
| 5.11     | Verificação . . . . .                                       | 58         |
| 5.12     | Conclusões . . . . .                                        | 60         |
| <b>6</b> | <b>Critério de Ruptura Anisotrópico</b>                     | <b>62</b>  |
| 6.1      | Equacionamento . . . . .                                    | 62         |
| 6.2      | Verificação Experimental . . . . .                          | 67         |
| 6.3      | Conclusões . . . . .                                        | 70         |
| <b>7</b> | <b>Modelo Subloading Cam-clay</b>                           | <b>71</b>  |
| 7.1      | Invariantes de Tensão e Deformação . . . . .                | 72         |
| 7.2      | Função de Plastificação . . . . .                           | 73         |
| 7.3      | Deformação de Subplastificação . . . . .                    | 74         |
| 7.4      | Variáveis Internas . . . . .                                | 75         |
| 7.5      | Sistema de Equações (DAS) . . . . .                         | 76         |
| 7.6      | Verificação Experimental . . . . .                          | 80         |
| 7.6.1    | Ensaios Cíclicos com a Argila Fujinomori (FO1) . . . . .    | 80         |
| 7.6.2    | Ensaios Monotônicos com a Argila Fujinomori (FCH) . . . . . | 87         |
| 7.6.3    | Ensaios Monotônicos com a Areia Toyoura (TSD) . . . . .     | 88         |
| 7.7      | Conclusões . . . . .                                        | 89         |
| <b>8</b> | <b>Modelo Subloading tij</b>                                | <b>90</b>  |
| 8.1      | Invariantes de Tensão e Deformação . . . . .                | 91         |
| 8.2      | Função de Plastificação . . . . .                           | 92         |
| 8.3      | Deformação de Subplastificação . . . . .                    | 93         |
| 8.4      | Variáveis Internas . . . . .                                | 94         |
| 8.5      | Sistema de Equações (DAS) . . . . .                         | 95         |
| 8.6      | Verificação Experimental . . . . .                          | 99         |
| 8.6.1    | Ensaios Cíclicos com a Argila Fujinomori (FO1) . . . . .    | 99         |
| 8.6.2    | Ensaios Monotônicos com a Argila Fujinomori (FCH) . . . . . | 105        |
| 8.6.3    | Ensaios Monotônicos com a Areia Toyoura (TSD) . . . . .     | 106        |
| 8.7      | Conclusões . . . . .                                        | 107        |
| <b>9</b> | <b>Modelo para Solos não Saturados</b>                      | <b>109</b> |
| 9.1      | Invariantes de Tensão e Deformação . . . . .                | 111        |
| 9.2      | Influência da Sucção . . . . .                              | 111        |
| 9.3      | Função de Plastificação . . . . .                           | 111        |
| 9.4      | Lei de Fluxo Plástico . . . . .                             | 116        |
| 9.5      | Variáveis Internas . . . . .                                | 116        |
| 9.6      | Relação Tensão-Deformação . . . . .                         | 117        |
| 9.7      | Elastoplasticidade Matemática . . . . .                     | 119        |
| 9.8      | Evolução das Variáveis Internas . . . . .                   | 120        |
| 9.9      | Sistema Algébrico de Equações Diferenciais (DAS) . . . . .  | 121        |
| 9.10     | Características Típicas . . . . .                           | 121        |
| 9.10.1   | Simulações com Carregamentos Monotônicos . . . . .          | 121        |
| 9.10.2   | Simulações de Casos Hipotéticos . . . . .                   | 123        |
| 9.11     | Conclusões . . . . .                                        | 127        |

|                                                                       |            |
|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>10 Modelo Subloading Barcelona</b>                                 | <b>129</b> |
| 10.1 Funções de Plastificação . . . . .                               | 130        |
| 10.2 Variáveis Internas . . . . .                                     | 131        |
| 10.3 Características Típicas . . . . .                                | 134        |
| 10.3.1 Simulações com Carregamentos Monotônicos . . . . .             | 134        |
| 10.3.2 Simulações de Casos Hipotéticos . . . . .                      | 136        |
| 10.3.3 Simulações com Carregamentos Cíclicos . . . . .                | 139        |
| 10.4 Conclusões . . . . .                                             | 143        |
| <b>11 Solução do Sistema Algébrico de Equações Diferenciais Local</b> | <b>144</b> |
| 11.1 Integração Numérica . . . . .                                    | 145        |
| 11.2 Método Runge-Kutta . . . . .                                     | 146        |
| 11.3 Estimativa de Erro . . . . .                                     | 152        |
| 11.4 Divisão dos Passos . . . . .                                     | 153        |
| 11.5 Algoritmos de Integração com Passos Variáveis . . . . .          | 155        |
| 11.5.1 Verificação . . . . .                                          | 160        |
| 11.6 Backward-Euler . . . . .                                         | 162        |
| 11.7 Estimativas de Eficiência com Simulações Pontuais . . . . .      | 169        |
| 11.7.1 Comparação entre (FE), (ME) e (RKDP) . . . . .                 | 169        |
| 11.7.2 Comparação entre (ME) e (BE) . . . . .                         | 169        |
| 11.7.3 Resultados para o Modelo Subloading Cam-clay . . . . .         | 172        |
| 11.7.4 Resultados para o Modelo Subloading tij . . . . .              | 174        |
| 11.8 Conclusões . . . . .                                             | 177        |
| <b>12 Determinação de Parâmetros</b>                                  | <b>180</b> |
| 12.1 Breve Revisão da Biologia . . . . .                              | 181        |
| 12.2 Analogia com a Natureza . . . . .                                | 182        |
| 12.3 Algoritmo para a Otimização de Parâmetros . . . . .              | 188        |
| 12.4 Aplicação . . . . .                                              | 189        |
| 12.4.1 Subloading Cam-clay . . . . .                                  | 189        |
| 12.4.2 Subloading tij . . . . .                                       | 194        |
| 12.5 Conclusões . . . . .                                             | 200        |
| <b>13 Conclusões</b>                                                  | <b>201</b> |
| 13.1 Sugestões . . . . .                                              | 203        |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                                     | <b>204</b> |
| <b>A Notação e Definições</b>                                         | <b>210</b> |
| A.1 Tensores de Quarta Ordem Isotrópicos . . . . .                    | 211        |
| <b>B Projeção e Projetores</b>                                        | <b>212</b> |
| <b>C Autotensores</b>                                                 | <b>215</b> |
| C.1 Determinação Analítica dos Autovalores e Autoprojetores . . . . . | 216        |
| C.2 Derivadas dos Autovalores . . . . .                               | 216        |
| C.3 Derivadas dos Autoprojetores . . . . .                            | 217        |

|          |                                                                                                         |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>D</b> | <b>Cálculo Tensorial</b>                                                                                | <b>220</b> |
| D.1      | Derivadas dos Invariantes Característicos . . . . .                                                     | 220        |
| D.2      | Derivada do Tensor Inverso de um Tensor de Segunda Ordem Simétrico<br>com Relação a Ele Mesmo . . . . . | 220        |
| D.3      | Raiz Quadrada de Tensores de Segunda Ordem Simétricos . . . . .                                         | 221        |
| D.4      | Derivada da Raiz Quadrada de um Tensor de Segunda Ordem Simétrico<br>com Relação a Ele Mesmo . . . . .  | 222        |
| D.5      | Derivada do Tensor $a_{ij}$ com Relação ao Tensor de Tensões . . . . .                                  | 223        |
| D.6      | Derivada do Tensor $t_{ij}$ com Relação ao Tensor de Tensões . . . . .                                  | 224        |



# Lista de Tabelas

| Tabela                                                                                                                                                                                                                               | Página |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 3.1 Elastoplasticidade convencional. . . . .                                                                                                                                                                                         | 20     |
| 4.1 Limitações dos equipamentos de ensaio, com relação ao provável número de componentes de tensão e deformação, capaz de representar o estado mecânico nas amostras. Componentes (a) axial, (r) radial e (t) transversal.           | 27     |
| 4.2 Parâmetros de referência para os materiais analisads e os modelos Subtij e SubCam. . . . .                                                                                                                                       | 28     |
| 4.3 Nomenclatura dos equipamentos (chaves) e componentes de tensão/deformação aplicados na definição das trajetórias seguidas pelo ensaios. Obs.: o (P) da chave corresponde ao invariante de tensão média $p$ de Cambridge. . . . . | 29     |
| 4.4 Invariantes de tensão e deformação. . . . .                                                                                                                                                                                      | 30     |
| 5.1 Substituição das coordenadas $P$ e $Q$ e coeficiente $\mu$ necessária à definição das superfícies com secções octaédrica similares aos critérios de ruptura Drucker-Prager, Matsuoka-Nakai e Lade-Duncan. . . . .                | 55     |
| 7.1 Gradientes de primeira ordem necessários à implementação computacional do modelo Subloading Cam-clay (SubCam). . . . .                                                                                                           | 78     |
| 7.2 Gradientes de segunda ordem necessários à solução do modelo Subloading Cam-clay (SubCam) com esquemas implícitos, considerando $M$ constante.                                                                                    | 79     |
| 7.3 Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios cíclicos com a argila Fujinomori ( <b>FO1</b> ) e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                | 80     |
| 7.4 Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios monotônicos com a argila Fujinomori ( <b>FCH</b> ) e com o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                         | 87     |
| 7.5 Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios monotônicos com a areia Toyoura ( <b>TSD</b> ) e com o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                             | 88     |
| 8.1 Gradientes de primeira ordem necessários à implementação computacional do modelo Subloading tij (Subtij). . . . .                                                                                                                | 97     |
| 8.2 Gradientes de segunda ordem necessários à solução do modelo Subloading tij (Subtij) com esquemas implícitos. . . . .                                                                                                             | 97     |
| 8.3 Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios cíclicos com a argila Fujinomori ( <b>FO1</b> ) e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                | 99     |
| 8.4 Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios monotônicos com a argila Fujinomori ( <b>FCH</b> ) e com o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                         | 105    |
| 8.5 Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios monotônicos com a areia Toyoura ( <b>TSD</b> ) e com o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                             | 107    |

|      |                                                                                                                                                            |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.1  | Parâmetros constitutivos para comportamento mecânico necessários ao modelo BarcelonaX. . . . .                                                             | 110 |
| 9.2  | Constantes e condições iniciais necessários ao modelo BarcelonaX. . . . .                                                                                  | 110 |
| 9.3  | Parâmetros usados para gerar as superfícies do modelo Barcelona Basic Model, apresentada na Figura 9.1. . . . .                                            | 112 |
| 9.4  | Estado inicial usado para gerar as superfícies do modelo Barcelona Basic Model, apresentada na Figura 9.1. . . . .                                         | 113 |
| 9.5  | Estado inicial apresentado nas Figura 9.2 com a superfície do modelo BarcelonaX. . . . .                                                                   | 114 |
| 9.6  | Parâmetros para a superfície do modelo BarcelonaX mostrada nas Figuras 9.2.114                                                                             |     |
| 9.7  | Parâmetros usados nas análises de previsão do modelo BarcelonaX para os casos hipotéticos de Alonso et al. (1990). . . . .                                 | 123 |
|      |                                                                                                                                                            |     |
| 10.1 | Parâmetros constitutivos para comportamento mecânico necessários ao modelo Subloading Barcelona (SubBar). . . . .                                          | 130 |
| 10.2 | Parâmetros para as simulações com $p$ e $s$ constante com o modelo <b>SubBar</b> , cujos resultados são apresentados na Figura 10.4. . . . .               | 134 |
| 10.3 | Estado inicial da simulação com $p=198$ kPa e $s=98$ kPa constantes com o modelo <b>SubBar</b> , cujos resultados são apresentados na Figura 10.4. . . . . | 134 |
| 10.4 | Parâmetros usados nas análises de previsão do modelo SubBar para os casos hipotéticos de Alonso et al. (1990). . . . .                                     | 136 |
| 10.5 | Estados e constantes iniciais para as simulação cíclicas com os modelos BarcelonaX e SubBar. . . . .                                                       | 140 |
|      |                                                                                                                                                            |     |
| 11.1 | Ordem $p$ versus estágios $s$ para os métodos Runge-Kutta. . . . .                                                                                         | 150 |
| 11.2 | Parâmetros dos modelos SubCam e Subtij para a argila Fujinomori usados nas comparações entre os esquemas de integração. . . . .                            | 170 |
| 11.3 | Resultados de integração com o esquema Modified-Euler e o modelo Subloading Cam-clay. . . . .                                                              | 173 |
| 11.4 | Resultados de integração com o esquema Backward-Euler e o modelo Subloading Cam-clay. . . . .                                                              | 173 |
| 11.5 | Resultados de integração com o esquema Modified-Euler e o modelo Subloading tij. . . . .                                                                   | 176 |
| 11.6 | Resultados de integração com o esquema Backward-Euler e o modelo Subloading tij. . . . .                                                                   | 176 |
|      |                                                                                                                                                            |     |
| 12.1 | Parâmetros originais e otimizados para a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                              | 189 |
| 12.2 | Parâmetros originais e otimizados para a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> .194                                                                   |     |

# Lista de Figuras

| Figura                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Página |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 3.1 Conceito de subcarregamento (“subloading”): (a) Superfícies normal e de subcarregamento; (b) Transição elástica-plástica e variação da diferença entre $z_1$ e $z_0$ ; (c) Relação tensão-deformação de modelos convencionais e com subcarregamento - material normalmente-adensado (fofo); (d) Relação tensão-deformação de modelos convencionais e com subcarregamento - material pré-adensado (denso). . . . . | 18     |
| 3.2 Lei de Hooke generalizada. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 19     |
| 3.3 Rotina de atualização para modelos genéricos elastoplásticos com duas ou mais superfícies para incrementos de tensão dados. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                               | 24     |
| 3.4 Rotina de atualização (“Stress-update”) para modelos genéricos elastoplásticos com duas ou mais superfícies para incrementos de deformação dados. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                         | 24     |
| 4.1 Estado de tensão num ponto; Direções (a) axial, (r) radial e (t) transversal. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 25     |
| 4.2 Representação esquemática dos equipamentos - estados de tensão: (a) Triaxial convencional; (b) Triaxial verdadeiro; (c) Cilindro vazado. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 26     |
| 4.3 Resultados do ensaio <b>FO1-CTP-01</b> com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com $p=392$ kPa constante. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 31     |
| 4.4 Resultados do ensaio <b>FO1-CTP-02</b> com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com $p=196$ kPa constante. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 31     |
| 4.5 Resultados do ensaio <b>FO1-CTP-03</b> com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com $p=196$ kPa constante. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 32     |
| 4.6 Resultados do ensaio <b>FO1-CTP-06</b> com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com $p=196$ kPa constante. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 32     |
| 4.7 Resultados do ensaio <b>FO1-CTP-07</b> com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com $p=196$ kPa constante. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 33     |
| 4.8 Resultados do ensaio <b>FO1-CTR-01</b> com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com $\dot{q}/\dot{p} = 3$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 34     |
| 4.9 Resultados do ensaio <b>FO1-CTR-02</b> com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com $\dot{q}/\dot{p} = 3$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 34     |
| 4.10 Resultados do ensaio <b>FO1-TTX-01</b> com a argila Fujinomori; Triaxial cúbico com $p=98$ kPa. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 35     |
| 4.11 Resultados do ensaio <b>FO1-TTX-02</b> com a argila Fujinomori; Triaxial cúbico com $p$ e $q$ variáveis. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 36     |
| 4.12 Resultados do ensaio <b>FO1-TTX-04</b> com a argila Fujinomori; Triaxial cúbico com $p$ e $q$ variáveis. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 36     |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.13 | Resultados dos ensaios <b>FCH-TTP-{01,02,03,04,05}</b> com a argila Fuji-nomori; Triaxial cúbico com $p=196$ kPa constante e vários valores do ângulo de Lode. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 37 |
| 4.14 | Resultados dos ensaios <b>TSD-TTP-{01,02,03,04,05}</b> com a areia Toyoura; Triaxial cúbico com $p=196$ kPa constante e vários valores do ângulo de Lode. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 38 |
| 5.1  | Planos mobilizados em duas e três dimensões: (a) Plano mobilizado e envoltórias Mohr-Coulomb em duas dimensões com $\sigma_3$ na horizontal, como em ensaios convencionais triaxiais; (b) Envoltórias Mohr-Coulomb em três dimensões. Ângulos de atrito mobilizados para cada par de tensão principal.                                                                                                                                                                                                  | 42 |
| 5.2  | Três planos mobilizados e Plano Espacialmente Mobilizado (SMP). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 43 |
| 5.3  | Plano $\Pi$ e ângulo $\theta$ análogo ao de Lode; $\sigma_A$ , $\sigma_B$ e $\sigma_C$ formam um sistema de coordenadas no qual $\sigma_A$ e $\sigma_B$ estão no plano $\Pi$ e $\sigma_C$ é alinhado como o eixo hidrostático. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 44 |
| 5.4  | Critérios de Tresca, von Mises e Mohr-Coulomb. Os números 10, 20 e 30 correspondem aos ângulos de atrito, em graus, usados no cálculo da resistência, sem coesão, segundo o critério Mohr-Coulomb. (a) Curvas envoltórias no plano $\Pi$ ; (b) Superfícies envoltórias no espaço Haigh-Westergard.                                                                                                                                                                                                      | 45 |
| 5.5  | Critérios de Tresca e von Mises no espaço de Haigh-Westergard: (a) Critério de Tresca; (b) Critério de von Mises. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 46 |
| 5.6  | Critério de Mohr-Coulomb no espaço Haigh-Westergard: (a) Vista do plano $\Pi$ ; (b) Vista tridimensional; (c) Vista tridimensional. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 46 |
| 5.7  | Critérios Mohr-Coulomb, Lade-Duncan e Matsuoka-Nakai. Os números 10, 20 e 30 correspondem aos ângulos de atrito, em graus, usados no cálculo da resistência, sem coesão, segundo o critério Mohr-Coulomb: (a) Curvas envoltórias no plano $\Pi$ ; (b) Superfícies envoltórias no espaço Haigh-Westergard ( $\phi = 26^\circ$ ). . . . .                                                                                                                                                                 | 47 |
| 5.8  | Critérios Drucker-Prager (cinza), Lade-Duncan (dourado) e Matsuoka-Nakai (vermelho): (a) Vista do plano $\Pi$ ; (b) Vista tridimensional. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 47 |
| 5.9  | Comparação entre critérios de ruptura. Os números 10, 20 e 30 correspondem aos ângulos de atrito, em graus, usados no cálculo da resistência, sem coesão, segundo o critério Mohr-Coulomb: (a) Comparação entre os critérios Matsuoka-Nakai e Argyris-Sheng et al; (b) Comparação entre os critérios Lade-Duncan e SMP-based. . . . .                                                                                                                                                                   | 53 |
| 5.10 | Critérios SMP (prata) e Lade-Duncan (vermelho): (a) Vista do plano $\Pi$ ; (b) Vista tridimensional. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 54 |
| 5.11 | Superfícies de plastificação com secção de formato similar ao critério de ruptura: (a) Superfície de plastificação com $\phi = 26^\circ$ , $P = P_{oct}$ , $Q = Q_{oct}$ e $\mu = \eta_{max}$ e critério Drucker-Prager; (b) Superfície de plastificação com $\phi = 26^\circ$ , $P = P_{oct}$ , $Q = Q_{oct}$ e $\mu = M(\theta)$ e critério Argyris-Sheng et al.; (c) Superfície de plastificação com $\phi = 26^\circ$ , $P = P_{smp}$ , $Q = Q_{smp}$ e $\mu = k_{novo}$ e o novo critério. . . . . | 55 |
| 5.12 | Superfície com secção octaédrica similar ao critério Drucker-Prager (ângulo de atrito: $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                   | 55 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.13 | Superfície com secção octaédrica similar ao critério Argyris-Sheng et al. (ângulo de atrito: $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico. . .                                        | 56 |
| 5.14 | Superfície com secção octaédrica similar ao critério SMP-based (ângulo de atrito: $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico. . . . .                                               | 56 |
| 5.15 | Vetores normais à superfície com secção octaédrica similar ao critério Drucker-Prager (ângulo de atrito: $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico. . . . .                        | 57 |
| 5.16 | Vetores normais à superfície com secção octaédrica similar ao critério Argyris-Sheng et al. (ângulo de atrito: $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico. . .                      | 57 |
| 5.17 | Vetores normais à superfície com secção octaédrica similar ao novo critério (ângulo de atrito: $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico. . .                                      | 57 |
| 5.18 | Ensaio com $p=196$ kPa constante na argila Fujinomori: (a) Curvas tensão-deformação; (b) Trajetórias de tensão no plano II e critérios de ruptura. . .                                                                                                                         | 58 |
| 5.19 | Ensaio com $p=196$ kPa constante na areia Toyoura: (a) Curvas tensão-deformação; (b) Trajetórias de tensão no plano II e critérios de ruptura. . .                                                                                                                             | 59 |
| 5.20 | Ensaio na areia Monterey (Lade & Duncan, 1973): (a) Amostras preparadas na forma densa; (b) Amostras preparadas na forma fofa. . . . .                                                                                                                                         | 59 |
| 5.21 | Ensaio na areia Cambria (Ochiai & Lade, 1983): (a) Curvas tensão-deformação; (b) Trajetórias de tensão no plano II e critérios de ruptura. . .                                                                                                                                 | 60 |
| 6.1  | Planos de acamamento da areia Shirasu; Vetor normal aos planos de acamamento. . . . .                                                                                                                                                                                          | 63 |
| 6.2  | Superfícies no espaço Haigh-Westergard do critério anisotrópico definido com a normal ao plano mobilizado igual à normal ao SMP: (a) Vista do plano II; (b) Vista do espaço Haigh-Westergard. . . . .                                                                          | 66 |
| 6.3  | Superfícies no espaço Haigh-Westergard do critério anisotrópico: (a) Critério definido com a normal ao plano mobilizado igual à normal ao SMP; (b) Critério definido com a normal ao plano mobilizado igual à normal ao plano octaédrico;. . . . .                             | 67 |
| 6.4  | Ensaio na areia Shirasu preparada na forma fofa (Haruyama, 1987): (a) Curvas tensão-deformação; (b) Trajetórias de tensão no plano II e critérios de ruptura. . . . .                                                                                                          | 68 |
| 6.5  | Ensaio na areia Shirasu preparada na forma densa (Haruyama, 1987): (a) Curvas tensão-deformação; (b) Trajetórias de tensão no plano II e critérios de ruptura. . . . .                                                                                                         | 68 |
| 6.6  | Ensaio na areia Shirasu preparada na forma fofa (Haruyama, 1987): (a) Curvas tensão-deformação com indicação dos pontos com $\varepsilon_d = 2\%$ ; (b) Trajetórias de tensão no plano II e critérios de ruptura com indicação dos pontos com $\varepsilon_d = 2\%$ . . . . .  | 69 |
| 6.7  | Ensaio na areia Shirasu preparada na forma densa (Haruyama, 1987): (a) Curvas tensão-deformação com indicação dos pontos com $\varepsilon_d = 2\%$ ; (b) Trajetórias de tensão no plano II e critérios de ruptura com indicação dos pontos com $\varepsilon_d = 2\%$ . . . . . | 69 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.8  | Comparação entre a resistência simulada pelos critérios Matsuoka-Nakai e anisotrópico e resultados experimentais com a areia Shirasu no estado denso.                                                                                                                                                                                                                                                             | 70  |
| 7.1  | Superfícies do modelo SubCam: (a) Cortes das superfícies de carregamento e plastificação, vistos no plano $q$ versus $p$ . Definição da variável $\rho$ mediante relação linear entre $v = 1 + e$ (“specific volume”) e $\log p$ ; (b) Corte da superfície de carregamento, isomórfica à superfície de plastificação, no plano $q$ versus $p$ , com a parte em extensão desenhada para valores negativos de $q$ . | 73  |
| 7.2  | Superfície de subcarregamento do modelo SubCam: (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico.                                                                                                                                                                                                                                                 | 74  |
| 7.3  | Rotina para o cálculo dos gradientes e variáveis de endurecimento do modelo SubCam.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 79  |
| 7.4  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-01</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 82  |
| 7.5  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-02</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 82  |
| 7.6  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-03</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 83  |
| 7.7  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-06</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 83  |
| 7.8  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-07</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 84  |
| 7.9  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTR-01</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 84  |
| 7.10 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTR-02</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 85  |
| 7.11 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-01</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 85  |
| 7.12 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-02</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 86  |
| 7.13 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-04</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 86  |
| 7.14 | Resultados das simulações dos ensaios <b>FCH-TTP-{01,02,03,04,05}</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 87  |
| 7.15 | Resultados das simulações dos ensaios <b>TSD-TTP-{01,02,03,04,05}</b> com a areia Toyoura e o modelo <b>SubCam</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 88  |
| 8.1  | Relação tensão-dilatância considerada pelo modelo Subloading tij.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 92  |
| 8.2  | Superfícies de carregamento e de plastificação do modelo Subloading tij; Relação $v$ versus $\ln t_N$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 92  |
| 8.3  | Rotina para o cálculo das derivadas relacionadas ao tensor tij.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 98  |
| 8.4  | Cálculo dos gradientes e variáveis de endurecimento do modelo Subtij.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 98  |
| 8.5  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-01</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 100 |
| 8.6  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-02</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 101 |
| 8.7  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-03</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 101 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.8  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-06</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                                             | 102 |
| 8.9  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-07</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                                             | 102 |
| 8.10 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTR-01</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                                             | 103 |
| 8.11 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTR-02</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                                             | 103 |
| 8.12 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-01</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                                             | 104 |
| 8.13 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-02</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                                             | 104 |
| 8.14 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-04</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                                             | 105 |
| 8.15 | Resultados das simulações dos ensaios <b>FCH-TTP-{01,02,03,04,05}</b> com a argila Fujinomori e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                             | 106 |
| 8.16 | Resultados das simulações dos ensaios <b>TSD-TTP-{01,02,03,04,05}</b> com a areia Toyoura e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                                 | 107 |
| 9.1  | Superfície de plastificação do modelo Barcelona (BBM): (a) Superfícies no espaço p,s,q; (b) Vista do plano q,p; (c) Vista do plano q,s. . . . .                                                                                              | 112 |
| 9.2  | Superfície do modelo Barcelona Estendido (BarcelonaX): (a) Superfície no espaço p,s,q; (b) Vista do plano q,p; (c) Vista do plano s,p. . . . .                                                                                               | 113 |
| 9.3  | Vetores normais à superfície do modelo BarcelonaX: (a) Vista do plano q,s; (b) Vista do plano q,p; (c) Vista do plano s,p. . . . .                                                                                                           | 115 |
| 9.4  | Vetores correspondentes à lei de fluxo plástico do modelo BarcelonaX: (a) Vista do plano q,s; (b) Vista do plano s,p. . . . .                                                                                                                | 116 |
| 9.5  | Variação dos incrementos de deformação elástica com a tensão média e a sucção. . . . .                                                                                                                                                       | 118 |
| 9.6  | Relação entre as taxas de deformação elástica desviadora e tensão desviadora. . . . .                                                                                                                                                        | 118 |
| 9.7  | Estado inicial da simulação com o modelo BarcelonaX com p=196 kPa e s=98 kPa ctes. e OSI=0: (a) Espaço p,s,q; (b) Vista do plano q,s; (c) Vista do plano s,p. . . . .                                                                        | 122 |
| 9.8  | Simulações com trajetórias com p e s constantes e diferentes valores constantes de $\theta$ com o modelo <b>BarcelonaX</b> ; Material hipotético com parâmetros da Tabela 9.6; Estados iniciais com sucção nula e igual a 98 kPa. . . . .    | 122 |
| 9.9  | Estados iniciais de tensão/sucção e superfícies de plastificação para os testes hipotéticos 1 e 2; Trajetórias de tensão/sucção para os Testes 1 e 2: $OCR_{ini} = 1.4 \Rightarrow z_{0(ini)} = 0.21 MPa$ e $z_{1(ini)} = 0.3 MPa$ . . . . . | 124 |
| 9.10 | Estados iniciais de tensão/sucção e superfícies de plastificação para os testes hipotéticos 3: Trajetórias de tensão/sucção para os Testes 3: $OCR_{ini} = 1.4 \Rightarrow z_{0(ini)} = 0.21 MPa$ e $z_{1(ini)} = 0.025 MPa$ . . . . .       | 124 |
| 9.11 | Resultados dos Testes 1 (molhagem) com o modelo <b>BarcelonaX</b> . . . . .                                                                                                                                                                  | 125 |
| 9.12 | Resultados dos Testes 2 (secagem) com o modelo <b>BarcelonaX</b> . . . . .                                                                                                                                                                   | 125 |
| 9.13 | Resultados dos Testes 3 (secagem-molhagem) com o modelo <b>BarcelonaX</b> . . . . .                                                                                                                                                          | 126 |
| 9.14 | Resultados dos Testes 4 (aumento de resistência com sucção) com o modelo <b>BarcelonaX</b> . . . . .                                                                                                                                         | 126 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.15  | Resultados dos testes 5 (ruptura devido a molhagem) com o modelo <b>BarcelonaX</b> .                                                                                                                                                            | 127 |
| 10.1  | Superfícies de subcarregamento e normal de plastificação do modelo Subloading Barcelona (SubBar): (a) Vista das superfícies de subcarregamento e normal no espaço p,s,q; (b) Vista das superfícies de subcarregamento e normal no espaço p,s,q. | 131 |
| 10.2  | Variáveis internas do modelo Subloading Barcelona (SubBar); Medidas das superfícies de subcarregamento e normal.                                                                                                                                | 131 |
| 10.3  | Estado inicial da simulação com o modelo Subloading Barcelona (SubBar) com p=196 kPa e s=98 kPa constantes e OSI=0: (a) Espaço p,s,q; (b) Vista do plano q,s; (c) Vista do plano s,p.                                                           | 135 |
| 10.4  | Simulações com trajetórias com p e s constantes e diferentes valores constantes de $\theta$ com o modelo <b>SubBar</b> ; Material hipotético com parâmetros da Tabela 10.2; Estados iniciais com sucção nula e igual a $98kPa$ .                | 135 |
| 10.5  | Resultados dos Testes 1 (molhagem) com o modelo <b>SubBar</b> .                                                                                                                                                                                 | 137 |
| 10.6  | Resultados dos Testes 2 (secagem) com o modelo <b>SubBar</b> .                                                                                                                                                                                  | 137 |
| 10.7  | Resultados dos Testes 3 (secagem-molhagem) com o modelo <b>SubBar</b> .                                                                                                                                                                         | 138 |
| 10.8  | Resultados dos Testes 4 (aumento de resistência com sucção) com o modelo <b>SubBar</b> .                                                                                                                                                        | 138 |
| 10.9  | Resultados dos testes 5 (ruptura devido a molhagem) com o modelo <b>SubBar</b> .                                                                                                                                                                | 139 |
| 10.10 | Estado inicial (esfera amarela) para os testes cíclicos 1 e 3; Superfície do modelo <b>BarcelonaX</b> : (a) Superfície no espaço p,s,q; (b) Vista do plano s,p.                                                                                 | 140 |
| 10.11 | Estado inicial (esfera amarela) para os testes cíclicos 1 e 3; Superfícies do modelo <b>SubBar</b> : (a) Superfícies de subcarregamento e normal no espaço p,s,q; (b) Vista do plano s,p.                                                       | 140 |
| 10.12 | Estado inicial (esfera amarela) para os testes cíclicos 2; Superfície do modelo <b>BarcelonaX</b> : (a) Superfície no espaço p,s,q; (b) Vista do plano s,p.                                                                                     | 141 |
| 10.13 | Estado inicial (esfera amarela) para os testes cíclicos 2; Superfícies do modelo <b>SubBar</b> : (a) Superfícies de subcarregamento e normal no espaço p,s,q; (b) Vista do plano s,p.                                                           | 141 |
| 10.14 | Resultados dos testes cíclicos 1 com os modelos <b>SubBar</b> e BarcelonaX; Triaxial convencional de carregamento-descarregamento, sem extensão (s=0 constante, $\dot{q}/\dot{p} = 3$ constante).                                               | 142 |
| 10.15 | Resultados dos testes cíclicos 2 com os modelos <b>SubBar</b> e BarcelonaX; Triaxial convencional de carregamento-descarregamento, sem extensão (s=0.2 MPa constante, $\dot{q}/\dot{p} = 3$ constante).                                         | 142 |
| 10.16 | Resultados dos testes cíclicos 3 com os modelos <b>SubBar</b> e BarcelonaX; Sucção aumentando-diminuindo seguido de triaxial convencional de carregamento ( $0 < s < 0.1MPa$ , $\dot{q}/\dot{p} = 3$ constante).                                | 143 |
| 11.1  | Método (Forward-)Euler.                                                                                                                                                                                                                         | 147 |
| 11.2  | Método Modified-Euler.                                                                                                                                                                                                                          | 149 |
| 11.3  | Extrapolação de Richardson.                                                                                                                                                                                                                     | 153 |
| 11.4  | Esquema Modified-Euler para a integração numérica de relações elasto-plásticas com subcarregamento, para incrementos de deformação (“stress-update”).                                                                                           | 156 |



|       |                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.5  | Esquema Modified-Euler para a integração numérica de relações elasto-plásticas com subcarregamento para solos não saturados, para incrementos de deformação e sucção (“stress-update”). . . . .                                                          | 157 |
| 11.6  | Esquema Modified-Euler para a integração numérica de relações elasto-plásticas com subcarregamento, para incrementos de tensão (“driver”). . . . .                                                                                                       | 158 |
| 11.7  | Esquema Modified-Euler para a integração numérica de relações elasto-plásticas com subcarregamento para solos não saturados, para incrementos de tensão e sucção (“driver”). . . . .                                                                     | 159 |
| 11.8  | Condições de contorno consideradas na simulação de amostra de ensaio de laboratório. . . . .                                                                                                                                                             | 160 |
| 11.9  | Malhas para a simulação do ensaio de laboratório: (a) Malha de um elemento; (b) Malha com 27 elementos. . . . .                                                                                                                                          | 161 |
| 11.10 | Resultados de simulações via FEM e por meio de integrações pontuais (trajéoria de tensão imposta). . . . .                                                                                                                                               | 161 |
| 11.11 | Método Backward-Euler. . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 162 |
| 11.12 | Esquema de integração implícita Backward-Euler. . . . .                                                                                                                                                                                                  | 164 |
| 11.13 | Esquema Backward-Euler (“fully-implicit”) para a integração numérica (“stress-update”) de relações elasto-plásticas com subcarregamento . . . . .                                                                                                        | 168 |
| 11.14 | Ábaco com os resultados de integração para o modelo Subtij e os esquemas FE (Forward-Euler), ME (Modified-Euler) e RKDP (Runge-Kutta-Dormand-Prince). . . . .                                                                                            | 169 |
| 11.15 | Estados iniciais para os modelos SubCam e Subtij: (a) Estados iniciais e superfície do modelo Subloading Cam-clay; (b) Estados iniciais e superfície do modelo Subloading tij. . . . .                                                                   | 171 |
| 11.16 | Malha de incrementos de deformação impostos. . . . .                                                                                                                                                                                                     | 171 |
| 11.17 | Resultados das simulações pontuais com o modelo <b>SubCam</b> e o esquema <b>Modified-Euler (ME)</b> : (a) Ponto A - Modified-Euler - $STOL = 10^{-1}$ ; (b) ponto A - Modified-Euler - $STOL = 10^{-4}$ . . . . .                                       | 174 |
| 11.18 | Resultados das simulações pontuais com o modelo <b>SubCam</b> e o esquema <b>Backward-Euler (BE)</b> : (a) Ponto A - Backward-Euler - $NDIV = 2 - TOL_{\Sigma} = 10^{-1}$ ; (b) Ponto A - Backward-Euler - $NDIV = 2 - TOL_{\Sigma} = 10^{-5}$ . . . . . | 174 |
| 11.19 | Resultados das simulações pontuais com o modelo <b>Subtij</b> e o esquema <b>Modified-Euler (ME)</b> : (a) Ponto A - Modified-Euler - $STOL = 1E - 1$ ; (b) Ponto A - Modified-Euler - $STOL = 1E - 4$ . . . . .                                         | 177 |
| 11.20 | Resultados das simulações pontuais com o modelo <b>Subtij</b> e o esquema <b>Backward-Euler (BE)</b> : (a) Ponto A - Backward-Euler - $NDIV = 2 - TOL_{\Sigma} = 10^{-1}$ ; (b) Ponto A - Backward-Euler - $NDIV = 2 - TOL_{\Sigma} = 10^{-5}$ . . . . . | 177 |
| 12.1  | DNA e Cromossomo: (a) DNA; (b) cromossomo. . . . .                                                                                                                                                                                                       | 182 |
| 12.2  | Ilhas de indivíduos; Cada ilha possui uma população de indivíduos. Em intervalos de tempo, alguns indivíduos migram para outras ilhas. . . . .                                                                                                           | 185 |
| 12.3  | Geração de gametas. . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 185 |
| 12.4  | Representação Computacional do DNA. . . . .                                                                                                                                                                                                              | 186 |
| 12.5  | Simple algoritmo genético para a otimização de parâmetros. . . . .                                                                                                                                                                                       | 188 |
| 12.6  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-01</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                                                                    | 189 |
| 12.7  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-02</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                                                                    | 190 |

|       |                                                                                                                                                                                                                             |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 12.8  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-03</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                                       | 190 |
| 12.9  | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-06</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                                       | 191 |
| 12.10 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-07</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                                       | 191 |
| 12.11 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTR-01</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                                       | 192 |
| 12.12 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTR-02</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                                       | 192 |
| 12.13 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-01</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                                       | 193 |
| 12.14 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-02</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                                       | 193 |
| 12.15 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-04</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>SubCam</b> . . . . .                                                                                                       | 194 |
| 12.16 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-01</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                       | 195 |
| 12.17 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-02</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                       | 195 |
| 12.18 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-03</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                       | 196 |
| 12.19 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-06</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                       | 196 |
| 12.20 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTP-07</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                       | 197 |
| 12.21 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTR-01</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                       | 197 |
| 12.22 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-CTR-02</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                       | 198 |
| 12.23 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-01</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                       | 198 |
| 12.24 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-02</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                       | 199 |
| 12.25 | Resultados das simulações do ensaio <b>FO1-TTX-04</b> com os parâmetros otimizados e o modelo <b>Subtij</b> . . . . .                                                                                                       | 199 |
| 12.26 | Distribuição de ilhas para três processadores. Os abcissas representam a distribuição de ilhas, por exemplo, 14 <sub>3,3</sub> indica 14 ilhas par o processador mais rápido (PIV 2.4GHz) e 3 ilhas para os demais. . . . . | 200 |
| B.1   | Projeção normal e ortogonal no plano (bidimensional) . . . . .                                                                                                                                                              | 213 |
| B.2   | Projeções ortogonal e oblíqua: (a) Projeção ortogonal; (b) Projeção oblíqua. . . . .                                                                                                                                        | 214 |

# Lista de Símbolos, Nomenclaturas e Abreviações

|                          |                                                                       |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{a}$             | Tensor $a_{ij}$                                                       |
| $\mathbb{C}^e$           | Tensor de quarta ordem de flexibilidade (elástico)                    |
| $\mathbb{C}^{ep}$        | Tensor de quarta ordem de rigidez (elastoplástico)                    |
| $\mathbb{D}^e$           | Tensor de quarta ordem de rigidez (elástico)                          |
| $\mathbb{D}^{ep}$        | Tensor de quarta ordem de rigidez (elastoplástico)                    |
| $h^p$                    | Coefficiente plástico                                                 |
| $\mathcal{H}_k$          | Módulo plástico                                                       |
| $\mathbf{I}$             | Tensor identidade de segunda ordem                                    |
| $\mathbb{I}^{sym}$       | Tensor identidade simétrico de quarta ordem                           |
| $I_{1\sigma}$            | Primeiro invariante característico do tensor de tensões               |
| $I_{2\sigma}$            | Segundo invariante característico do tensor de tensões                |
| $I_{3\sigma}$            | Terceiro invariante característico do tensor de tensões               |
| $M_{CS}$                 | Inclinação da reta de estado crítico                                  |
| $\hat{\mathbf{n}}_{oct}$ | Normal ao plano octaédrico                                            |
| $\hat{\mathbf{n}}_{smp}$ | Normal ao plano espacialmente mobilizado (SMP)                        |
| $p$                      | Invariante de tensão normal de Cambridge                              |
| $\mathbb{P}^{iso}$       | Tensor de quarta ordem cujo resultado será isotrópico                 |
| $\mathbb{P}^{symdev}$    | Tensor de quarta ordem cujo resultado será simétrico-desviador        |
| $P_{smp}$                | Invariante de tensão média baseado no SMP                             |
| $\mathbb{P}_{smp}$       | Projektor que projeta vetores perpendicularmente ao SMP               |
| $q$                      | Invariante de tensão desviadora de Cambridge                          |
| $Q_{smp}$                | Invariante de tensão desviadora baseado no SMP                        |
| $\mathbb{Q}_{smp}$       | Projektor que projeta vetores no SMP                                  |
| $\mathbf{r}$             | Direção das deformações plásticas (fluxo plástico)                    |
| $R_{CS}$                 | Razão entre tensão principal maior e menor no estado crítico          |
| $\mathbf{s}$             | Tensor desviador de tensões                                           |
| $t_N$                    | Invariante normal de tensão modificada                                |
| $t_S$                    | Invariante desviador de tensão modificada                             |
| $\mathbf{t}$             | Tensor $t_{ij}$                                                       |
| $\mathbb{V}$             | Derivada da função de plastificação com relação ao tensor de tensões  |
| $y_k$                    | Derivada da função de plastificação com relação às variáveis internas |
| $z_k$                    | Variáveis internas                                                    |

|                                             |                                                |
|---------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\underline{\underline{\varepsilon}}$       | Tensor de deformações                          |
| $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ | Taxa de variação de deformações                |
| $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$     | Deformação elástica                            |
| $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$     | Deformação plástica                            |
| $\varepsilon_v^p$                           | Deformação volumétrica plástica                |
| $\varepsilon_d^p$                           | Deformação desviadora plástica                 |
| $\varepsilon_v^{p(sy)}$                     | Deformação de subplastificação                 |
| $\varepsilon_v^{p(s)}$                      | Deformação de subplastificação devido à sucção |
| $\varepsilon_v$                             | Deformação volumétrica                         |
| $\varepsilon_d$                             | Deformação desviadora                          |
| $\phi_{CS}$                                 | Ângulo de atrito no estado crítico             |
| $\theta$                                    | Ângulo de Lode                                 |
| $\dot{\Lambda}$                             | Multiplicador de Lagrange plástico             |
| $\Phi$                                      | Denominador do $\dot{\Lambda}$                 |
| $\underline{\underline{\sigma}}$            | Tensor de tensões                              |
| $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$      | Taxa de variação do tensor de tensões          |
| $\underline{\underline{\tau}}$              | Tensor raiz quadrada do tensor de tensões      |

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Materiais granulares, como os solos, apresentam um comportamento mecânico relativamente complexo. Tal característica decorre do fato de que esses materiais consistem de grãos, vazios e fluidos dentro desses vazios, portanto seu comportamento micromecânico é inerentemente descontínuo e heterogêneo.

O comportamento mecânico de materiais granulares pode ser estudado, macroscopicamente, considerando o conceito de meio contínuo e desprezando as parcelas adicionais de grandes deformações. Nestes casos, a complexidade diminui um pouco, no entanto, ainda permanecem algumas dificuldades durante a representação matemática dos fenômenos físicos envolvidos.

Este trabalho visa mostrar que o arcabouço matemático da Teoria da Elastoplasticidade é capaz de representar satisfatoriamente algumas características dos materiais granulares sujeitos a carregamentos monotônicos e/ou cíclicos. As equações aqui propostas procuram simular as seguintes características:

- Comportamento mecânico não linear;
- Variação de deformação volumétrica com mudança de tensão hidrostática;
- Tensão desvio constante para grandes deformações cisalhantes;
- Influência da tensão principal intermediária no comportamento de resistência e deformabilidade;
- Resistência dependente da anisotropia induzida e inerente;
- Ocorrência de deformações plásticas durante descarregamento;
- Mudança suave de comportamento após um pico de resistência em materiais densos ou pré-adensados;
- Densificação de materiais fofos ou normalmente adensados submetidos a ciclos de carregamento-descarregamento;

- 
- Influência da sucção mátrica na resistência e deformabilidade.

Para isso, algumas idealizações, como os conceitos de Estados críticos, Critério de ruptura, Plastificação e Subcarregamento, são consideradas. Essas idealizações são tentativas em se descrever, por meio de expressões numéricas e/ou equações, alguns fenômenos observados experimentalmente.

A verificação da capacidade e qualidade de representação das formulações desenvolvidas deve ser feita comparando os resultados calculados com valores obtidos experimentalmente. Para isso, ensaios de laboratório são realizados, ou, observações de retro-análise são obtidas, fornecendo uma base objetiva de comparação.

Como, geralmente, os ensaios de laboratório definem trajetórias de tensão *a priori*, as equações constitutivas devem ser resolvidas para dados valores de tensão. Como o comportamento de materiais granulares geralmente é não-linear, essas equações são construídas em forma de taxas ou incrementos e o processo de solução requer a integração ou solução do Sistema Algébrico Diferencial correspondente. Em análises de problemas de valor inicial e contorno, como, por exemplo, aqueles simuladas pelo Método dos Elementos Finitos, as relações constitutivas devem ser integradas (“Stress-update”) para incrementos ou taxas de deformação fornecidos.

Portanto, neste trabalho, além de mostrar o desenvolvimento matemático dos Modelos Constitutivos, apresentam-se métodos numéricos para a solução dos sistemas de equações resultantes. O estudo desses métodos, ou esquemas, procura verificar o balanço qualidade de solução *versus* velocidade de execução, fornecendo indicativos para a escolha do método adequado tanto para a simulação de ensaios de laboratório, quanto para programas de solução de problemas de valor inicial e contorno.

As equações constitutivas para materiais granulares requerem a determinação de constantes para a definição das leis evolutivas de cada fenômeno físico que se deseja representar. Essa constantes são conhecidas por Parâmetros Constitutivos e, dependendo da complexidade do modelo, podem exigir procedimentos de tentativa-e-erro, além de requisitarem uma certa quantidade de resultados de ensaios de laboratório. Este trabalho também trata do problema de calibração de parâmetros dos modelos estudados por meio de Algoritmos Genéticos Evolutivos.

O desenvolvimento de modelos constitutivos capazes de representar apropriadamente a maior quantidade de características mecânicas dos materiais granulares é um grande desafio proposto pela atual engenharia de solos. Este desafio tem tomado parte da pesquisa em Geomecânica Computacional, que visa auxiliar o entendimento do comportamento hidro-mecânico de obras geotécnicas. Para isso, os fenômenos físicos são estudados e idealizações matemáticas são elaboradas. O resultado desta metodologia é a formação de Sistemas Algébricos de Equações Diferenciais.

Neste trabalho, os Sistemas Algébricos Diferenciais (DAS) são formados pelas equações da Teoria Matemática da Elastoplasticidade. Mostra-se que diversos modelos elastoplás-

ticos, tanto para solos saturados como para solos não saturados, podem ser representados por um mesmo equacionamento, desenvolvido sob o conceito de Cálculo Tensorial. Esse equacionamento tem a vantagem de permitir a aplicação dos mesmos esquemas de solução ou integração da relação constitutiva, necessários tanto às simulações de ensaios de laboratório quanto às análises de problema de valor inicial e de contorno. O DAS de cada modelo é resolvido por esquemas explícitos baseados no método Runge-Kutta. Algumas investigações com esquemas implícitos também são efetuadas.

Novas relações constitutivas são introduzidas, considerando o mesmo arcabouço matemático da elastoplasticidade. Essas novas equações são úteis na representação das características (macroscópicas) de materiais granulares listadas anteriormente. Considera-se as relações para solos saturados e parcialmente saturados. O objetivo principal da pesquisa é manter a simplicidade das formulações.

A análise numérica de obras geotécnicas, consideradas simplificada como uma composição de estruturas contínuas, por meio de modelos constitutivos, requer a execução de uma grande quantidade de ensaios de laboratório. A execução dos ensaios visa fornecer informações sobre o material para que se possa determinar os parâmetros constitutivos dos modelos matemáticos. Neste trabalho, todos os modelos estudados e introduzidos são aplicáveis à geometria tridimensional e, portanto, requisitam equipamentos especiais de laboratório como o Equipamento Triaxial Cúbico e o Cilindro Vazado. Com isso, os resultados obtidos nos equipamentos do laboratório do Instituto de Tecnologia de Nagoya, Japão, são utilizados.

Os parâmetros dos materiais dependem das equações de um modelo específico e devem ser determinados racionalmente sob um procedimento específico. A determinação desses parâmetros certamente deve ser embasada em vários resultados de laboratório. Entretanto, para alguns modelos, como suas equações constitutivas são geralmente postas sob forma incremental, ou de taxas no tempo, procedimentos de tentativa-e-erro devem ser considerados. Além disso, idealmente, os melhores valores dos parâmetros deveriam ser adotados nas análises. Assim, um método robusto de obtenção e otimização de parâmetros constitutivos, que depende de um conjunto de resultados de ensaios de laboratório, é apresentado. Tal método é construído sob o conceito da Teoria Genética Evolucionária que permite encontrar qualquer quantidade, ou conjunto de valores, que otimiza certa função, neste caso, a função é uma medida da qualidade de representação do modelo constitutivo.

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é apresentar equações constitutivas capazes de representar da melhor forma possível o comportamento mecânico de materiais granulares saturados ou parcialmente saturados sujeitos a carregamentos monotônicos e cíclicos. O

comportamento mecânico deve compreender as relações tensão-deformação e características de resistência. A resistência ao cisalhamento para materiais anisotrópicos também poderá ser considerada. As formulações devem levar em conta a influência da tensão principal intermediária e devem ser aplicáveis a problemas tridimensionais. O sistema de equações diferenciais deve ser resolvido, para isso métodos de solução (integração) poderão ser pesquisados. A eficiência e a acurácia de cada esquema de integração deve ser avaliada. Um procedimento para a determinação e otimização dos parâmetros constitutivos relevantes a cada modelo apresentado deverá ser estudado.

## 1.2 ESCOPO E ORGANIZAÇÃO

Este trabalho é basicamente dividido em três partes: a) Modelos constitutivos, incluindo critérios de ruptura; b) Solução do sistema de equações (DAS) da elastoplasticidade; e c) Determinação e otimização dos parâmetros constitutivos. Um breve resumo de cada capítulo é apresentado a seguir.

O presente **Capítulo** faz a introdução com a seguinte hipótese: **Modelos elasto-plásticos têm potencial aplicação a problemas geotécnicos com carregamentos cíclicos e materiais saturados e parcialmente saturados.**

No **Capítulo 2**, uma breve revisão bibliográfica é apresentada.

O **Capítulo 3** apresenta um resumo da teoria matemática da elastoplasticidade. Ao mesmo tempo, faz-se a introdução do conceito de Subcarregamento, importante no desenvolvimento dos modelos SubCam, Subtij, SubCamX e SubBar. Esse conceito é o ingrediente adicional, com relação ao modelo Cam-clay, que permite a consideração do estado de densificação do material. Isso é feito mediante a definição de duas superfícies no espaço de tensões e a relação entre essas distâncias com uma medida de índice de vazios, ou, deformação de subcarregamento.

O **Capítulo 4**, importante para o entendimento dos gráficos de validação de cada modelo, apresenta o resumo dos resultados de laboratório. Esses resultados são a base de comparação para a qualidade de reprodução dos modelos constitutivos.

No **Capítulo 5**, um novo critério de ruptura é apresentado. Seu equacionamento resulta numa representação da resistência máxima de materiais granulares similar a do critério de Lade-Duncan. Além disso, naquele capítulo, faz-se uma revisão dos critérios de ruptura mais comuns em engenharia, tais como Mohr-Coulomb, Tresca, von Mises, Drucker-Prager, Lade-Duncan e Matsuoka-Nakai.

No **Capítulo 6**, um novo critério de ruptura para materiais granulares com anisotropia inerente e induzida é apresentado. Este critério pode servir como fundação para a elaboração de novos critérios anisotrópicos. O conceito principal usado na sua derivação é a simples teoria de Tensores Projetores.

O **Capítulo 7** apresenta um novo modelo para materiais granulares submetidos a



carregamentos cíclicos. O objetivo principal deste modelo é a simplicidade, permitindo a imediata codificação em programas de simulação. Apesar de sua simplicidade, tal modelo é capaz de representar algumas características importantes, como a variação do estado de densificação a longo dos ciclos de carregamento e descarregamento. Este modelo, denominado por Subloading Cam-clay (SubCam), é uma pequena extensão do modelo Cam-clay e requer a determinação de um parâmetro adicional.

No **Capítulo 8**, faz-se a revisão do modelo elastoplástico com grande capacidade de representação de materiais granulares tridimensionalmente, conhecido por Subloading tij (Subtij). Este modelo utiliza um espaço de tensões transformado,  $tij$ , e foi proposto por Nakai & Hinokio (2004) com o intuito de representar o processo de densificação de materiais granulares.

O **Capítulo 9** contém a revisão do modelo para solos parcialmente saturados, conhecido por Barcelona Basic Model, ou BBM. Além disso, naquele capítulo, uma pequena extensão deste modelo é apresentada, resultando noutro modelo denominado por BarcelonaX. Tal extensão visa unificar as superfícies de plastificação, representada num espaço de quatro dimensões, facilitando a integração numérica das equações constitutivas.

No **Capítulo 10**, um modelo para solos não saturados sujeitos a carregamentos monotônicos e/ou cíclicos é apresentado. Sua dedução considera as equações do modelo Barcelona (BarcelonaX) e o conceito de subcarregamento, por isso é denominado de Subloading Barcelona Model. A principal diferença deste modelo, com relação ao modelo BarcelonaX, é a possibilidade de controlar o decaimento da flexibilidade mecânica tanto devido a ciclos de variação de sucção quanto de tensão, média e/ou cisalhante.

Como todos os modelos são apresentados sob o mesmo arcabouço, com apenas os esquemas apresentados no **Capítulo 11**, pode-se resolver os correspondentes DASs, tanto para trajetórias de tensão impostas, quanto para incrementos de deformação fornecidos (solução via FEM).

No **Capítulo 12**, uma metodologia robusta para obtenção de parâmetros constitutivos é apresentada. Esta metodologia baseia-se na teoria Genética Evolucionária, na qual cada indivíduo equivale a um conjunto de parâmetros e a função objetiva (“fitness”) é dada pela qualidade de representação do modelo.

No **Capítulo 13**, algumas conclusões e sugestões para pesquisas futuras são apresentadas.

O **Apêndice A** apresenta, resumidamente, a notação usada neste trabalho, sendo útil no entendimento das equações apresentadas.

No **Apêndice B**, uma breve revisão dos conceitos de projeção e tensores projetores é feita. No **Apêndice C**, também se faz a revisão dos autotensores. Estes conceitos são úteis na dedução e entendimento dos critérios de ruptura, incluindo o critério anisotrópico, para a determinação dos gradientes de campos tensoriais e para o entendimento do algoritmo de integração do tipo previsor-corretor.

No **Apêndice D**, algumas derivações importantes do Cálculo Tensorial são apresentadas, como a derivada do tensor inverso de um tensor de segunda ordem e a determinação do tensor  $a_{ij}$  do modelo Subloading  $t_{ij}$ .

# Capítulo 2

## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Apesar da enorme evolução proporcionada pelos conceitos relacionados ao modelo Cam-clay (Roscoe et al., 1958; Schofield & Wroth, 1968), como os Estados Críticos, ainda existem certas características inerentes aos solos que são difíceis de serem representadas por um modelo matemático. Algumas delas são: a) anisotropia; b) características transitórias e idade do material; c) estruturação interna; d) comportamento cíclico; e) dilatação positiva durante endurecimento; f) influência do grau de compactação ou adensamento na deformabilidade e resistência do solo; g) influência da saturação no comportamento mecânico e vice-versa; h) influência da tensão principal intermediária, dentre outras;

Para trajetórias de tensão do tipo proporcional, em que a razão entre os incrementos de tensão segue um aumento unidirecional, sem decréscimo, pode-se dizer que as teorias de endurecimento isotrópico ou cinemático, quando inseridas, ao mesmo tempo ou não, em modelos elastoplásticos permitem uma representação razoável das propriedades relacionadas ao endurecimento dos materiais (Pedroso, 2002). Entretanto, experimentos com carregamentos cíclicos mostram que a resposta de um material nessas circunstâncias é bem mais complexa do que sob carregamentos proporcionais (Nakai & Hinokio, 2004).

Certamente é de justificável importância e inerente dificuldade o estudo do comportamento mecânico do solo, quando esse sofre ação de diversos tipos de carregamentos como simétricos, assimétricos e com ciclos de reversão. Assim, várias pesquisas têm sido desenvolvidas em que atenção especial é concedida à influência de solicitações cíclicas e variadas trajetórias de tensão nas características mecânicas dos materiais. Dentre as descobertas mais proeminentes destacam-se os conceitos da Transição elástica-plástica, múltiplas superfícies de plastificação e o conceito de Subcarregamento (Mróz, 1967; Krieg, 1975; Dafalias & Popov, 1975; Hashiguchi & Ueno, 1977; Hashiguchi, 1989).

A descrição do comportamento mecânico de solos não saturados tem se preocupado com a pesquisa pelas melhores medidas de estado. Como medidas mais comuns de estado, destacam-se a tensão líquida, dada pela diferença entre a tensão total e a pressão no ar ( $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - u_a \underline{\underline{I}}$ ) e a sucção mátrica, dada pela diferença entre as pressões no ar e na água ( $s = u_a - u_w$ ) (Fredlund & Rahardjo, 1993). Talvez um dos maiores problemas

para a modelagem de solos não saturados seja a dificuldade em se executar ensaios de laboratório. Estes geralmente são lentos e requisitam cuidados especiais devido à alta pressão nas instalações (Fredlund & Rahardjo, 1993).

Alonso et al. (1990) propuseram uma extensão do modelo Cam-clay para solos parcialmente saturados. Este modelo, conhecido por “Barcelona Basic Model”, aqui simplesmente Modelo Barcelona, tem sido largamente estudado, devido sua capacidade de representar, um tanto quanto satisfatoriamente, as principais características dos solos não saturados (Sheng et al., 2003a,b; Macari et al., 2003; Pinheiro, 2004; Cordão-Neto, 2005; Farias et al., 2006). Dentre elas, destacam-se: a) aumento da resistência com a sucção; b) aumento aparente da pressão de consolidação com o aumento da sucção; c) variação do colapso com a variação de tensão média; aumento até um pico seguido de decréscimo; e d) ocorrência de deformações plásticas com a variação da sucção.

A seguir, uma breve revisão da bibliografia necessária ao desenvolvimento desta Tese é apresentada.

## 2.1 PLANO ESPACIALMENTE MOBILIZADO

Procurando representar a influência de todas as tensões principais no comportamento mecânico dos solos, Matsuoka (1974) definiu três planos no espaço tridimensional de tensões principais, tendo por base as inclinações das retas tangentes aos três círculos de Mohr traçados no gráfico tensão cisalhante versus tensão normal, e considerando os pares formados pela combinação de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Esses planos foram chamados de Planos Mobilizados, pois supôs-se que seriam planos nos quais as partículas dos solos estariam em máxima mobilização, quando solicitadas ao cisalhamento.

Posteriormente, Matsuoka & Nakai (1974) definiram um plano passando pelas intersecções dos três planos mobilizados, com os planos cujas normais são paralelas aos eixos das tensões principais, denominando-o de Plano Espacialmente Mobilizado (SMP – “Spatially Mobilized Plane”), supondo que nesse plano ocorre a máxima mobilização média das partículas do solo, submetidas a esforços cisalhantes. Essa verificação foi fundamentada nas análises de vários ensaios triaxiais, cujos resultados mostraram a unicidade de relações entre taxas dos invariantes de tensão e deformação, quando definidos não mais no plano octaédrico –  $\sigma_{oct}$  e  $\tau_{oct}$  (ou p e q de Cambridge), mas sim no SMP –  $\sigma_{SMP}$  (normal) e  $\tau_{SMP}$  (cisalhante) (neste trabalho,  $t_N$  e  $t_S$ , respectivamente).

Nakai (1980) introduziu uma nova definição para os incrementos dos invariantes de deformação, usados em conjunto com os invariante de tensão no SMP. Estes passaram a ser representados por  $d\varepsilon_{SMP}^*$  (normal) e  $d\gamma_{SMP}^*$  (cisalhante) (aqui,  $d\varepsilon_N$  e  $d\varepsilon_S$ ) em contraposição aos previamente definidos:  $d\varepsilon_{SMP}$  e  $d\gamma_{SMP}$ . Essa substituição possibilitou melhores relações (únicas) entre os incrementos dos invariantes de tensão e de deformação, como na relação tensão-dilatância ( $dt_S/dt_N$  versus  $d\varepsilon_N/d\varepsilon_S$ ) (Nakai & Matsuoka, 1983).

A eficácia do SMP com relação à capacidade em representar o comportamento mecânico do solo foi comprovada por vários estudos. (Matsuoka & Nakai, 1977, 1982, 1985). Isso foi decisivo na aceitação do, então, bem conhecido, critério de ruptura de Matsuoka-Nakai (Matsuoka & Nakai, 1974). Esse critério tem como vantagens gerar uma curva suave no plano octaédrico, ao contrário do que acontece com o critério de Mohr-Coulomb, fornecer a mesma resposta que o critério de Mohr-Coulomb para estados axis-simétricos de compressão e extensão, e considerar a influência dos três invariantes do tensor de tensão na resistência dos solos. Além disso, o critério de ruptura de Matsuoka-Nakai tem fundamentação num conceito de significado físico importante: o caráter friccional dos solos. Neste conceito, a resistência ao cisalhamento é dada para uma relação máxima (constante) entre tensão cisalhante e tensão normal. Portanto, o critério de ruptura de Matsuoka-Nakai é análogo ao de Mohr-Coulomb, mas determina a razão máxima  $t_S/t_N$  para o plano em que as partículas do solo estão mais mobilizadas em média, o SMP.

## 2.2 TENSOR $T_{IJ}$ E MODELOS $T_{IJ}$ -CLAY E $T_{IJ}$ -SAND

Objetivando facilitar e racionalizar a formulação utilizada na representação das propriedades mecânicas dos solos, Nakai & Mihara (1984) definiram um tensor de segunda ordem ( $t_{ij}$ ), alternativo ao tensor de tensões convencional, que leva em conta o comportamento tridimensional do solo, mediante sua obtenção a partir das relações no SMP e não no plano octaédrico. O tensor  $t_{ij}$  é uma nova quantidade mecânica capaz de representar o estado de tensões, mas que modifica os componentes de tensão segundo uma eventual anisotropia induzida. Essa modificação acontece justamente pela definição do tensor  $t_{ij}$ , dada por  $t_{ij} = \sigma_{ik} a_{kj}$ , em que  $a_{ij}$  é um tensor de segunda ordem, cujos valores principais são os componentes do vetor normal ao SMP, calculados pelas razões entre as tensões principais. Do ponto de vista prático, pode-se considerar que o tensor  $t_{ij}$  é um novo auxílio matemático, da mesma maneira que o tensor  $\sigma_{ij}$ , para se estudar as características de resistência e deformabilidade do solo. Sua aplicação à modelagem constitutiva fornece resultados satisfatórios, como aqueles apresentados por diversos autores (Nakai & Matsuoka, 1983; Chowdhury, 1998; Chowdhury & Nakai, 1998; Pedroso, 2002; Pedroso & Farias, 2003).

Nakai & Matsuoka (1986) apresentaram um modelo para argilas utilizando o SMP e o tensor  $t_{ij}$ . Esse modelo, denominado por “ $t_{ij}$ -clay”, possibilitou a consideração da tensão intermediária no comportamento do material. A trajetória de tensão também é levada em conta mediante a divisão do incremento de deformação plástica em uma parte devida ao fluxo associado e uma parte devida à compressão isotrópica. Sua capacidade de aplicação também foi demonstrada. Posteriormente, Nakai (1989) introduziu um modelo para areias, também utilizando o tensor  $t_{ij}$ , conhecido por “ $t_{ij}$ -sand”.

## 2.3 CONCEITO DE SUBCARREGAMENTO

Uma extensão da elastoplasticidade convencional para a representação de carregamentos cíclicos foi feita por Mróz (1967), que definiu um campo de módulos de endurecimento dando origem ao conceito das múltiplas superfícies de plastificação. Este conceito permitiu, de certa forma, a representação da transição gradual entre o regime elástico e elastoplástico. Em sua proposta, curvas tensão-deformação, observadas em ensaios unidimensionais em metais, foram representadas por finitos segmentos com módulos tangentes constantes. Posteriormente, Krieg (1975) e Dafalias & Popov (1975) em seus modelos de duas superfícies (“two-surface model”) ou modelos com superfície limite (“bounding surface model”), independentemente, consideraram duas superfícies: uma superfície limite e outra superfície de carregamento. Essa última, diferentemente das várias superfícies sugeridas por Mróz, tem variação contínua com o módulo plástico.

Hashiguchi & Ueno (1977), com o intuito de simular o comportamento de “softening” de materiais granulares, acrescentaram à teoria da elastoplasticidade o estado de subplastificação. Para isso, definiram uma superfície interna à superfície de plastificação convencional (normal), com evolução dependente da transição elástica-plástica. Essa nova superfície foi designada superfície de subcarregamento (“Subloading surface”), considerando que é uma extensão da superfície de carregamento para o estado de subplastificação. Portanto, também independentemente, sugeriram um modelo de duas superfícies, entretanto, com interpretação física, dada pelo conceito de estado de subplastificação. Os modelos introduzidos foram denominados modelos com superfície de subcarregamento (“Subloading surface models”).

## 2.4 MODELO SUBLOADING TIJ

Nakai & Hinokio (2004) apresentaram um novo modelo constitutivo, com base nos conceitos do Plano Espacialmente Mobilizado e do Tensor Modificado tij, com o intuito de uma melhor reprodução do comportamento mecânico dos solos, principalmente quando solicitações cíclicas são aplicadas. Este modelo, denominado por “Subloading tij” (aqui, simplesmente por Subtij) adota o conceito de “Subloading Surface” elaborado por Hashiguchi (1989) e tem a capacidade de representar a influência do estado de compactação das areias ou de adensamento dos solos argilosos. Para isso, um único parâmetro é adicionado, quando em comparação com o modelo anterior tij-clay.

Algumas das características contempladas pelo modelo Subtij são: a) influência da tensão principal intermediária na deformação e resistência do solo; b) dependência da trajetória e direção do fluxo plástico; c) dilatância positiva durante endurecimento (strain hardening); d) comportamento do solo sobre carregamento cíclico (em parte) e e) influência da densidade e/ou pressão confinante na deformação e resistência. Com isso, o modelo

Subtij é aplicável a simulações de problemas de contorno um tanto quanto complexos como a densificação do solo mediante a introdução de estacas de areia (Farias et al., 2003, 2005).

## 2.5 MODELO BARCELONA

O modelo “Barcelona Basic Model” (BBM) foi proposto por Alonso et al. (1990) com intenções de representar o comportamento de resistência e deformabilidade de solos não-saturados. Ele tem a importante característica de ser simples, utilizando a teoria da elastoplasticidade e conceitos do modelo Cam-clay, como Estado Crítico e domínio elástico variando com a deformação volumétrica plástica.

Macari et al. (2003) apresentaram um estudo dos modelos Barcelona e de Oxford mediante simulações de amostras cúbicas submetidas a carregamento axis-simétrico. Para isso, utilizaram um equipamento triaxial cúbico com controle da sucção.

Os trabalhos de Cordão-Neto (2005) e Pinheiro (2004) possuem informações recentes sobre o modelo Barcelona. Dentre estas, destacam-se o emprego da solução acoplada a problemas de contorno no primeiro trabalho e a extensão do modelo, melhorando sua capacidade em representar o comportamento mecânico fora do plano triaxial, mediante a consideração do Plano Espacialmente Mobilizado e do tensor  $t_{ij}$  no segundo.

## 2.6 SOLUÇÃO DO SISTEMA ELASTOPLÁSTICO

A aplicação de cargas externas a qualquer maciço (de solo) induz mudanças nas tensões e deformações. A Mecânica do Contínuo fornece conceitos que permitem a avaliação do comportamento interno do material, para algumas condições de contorno. O resultado do equacionamento é um Sistema Algébrico de Equações Diferenciais (Ellsiepen & Hartmann, 2001; Hartmann, 2001). Existem restrições devido às condições de Kuhn-Tucker que tornam o sistema do tipo rígido e com restrições (“stiff and constrained”) (Buttner & Simeon, 2002). Assim, métodos um pouco mais elaborados devem ser adotados na procura pela solução desses sistemas.

A Plasticidade Computacional trata da solução da relação constitutiva não linear por meio de integrações numéricas (Simo, 1994; Simo & Hughes, 1998). Os métodos mais comuns são classificados em Explícitos e Implícitos. Os esquemas de integração explícita, subdividem os incrementos de tensão ou deformação em partes e adotam um processo seqüencial atualizando os estados de tensão e deformação, para derivadas avaliadas no início dos passos. Em esquemas implícitos, os gradientes são calculados em estados indeterminados - futuros, de forma que o sistema de equações resultante deverá ser resolvido iterativamente. Se a solução for iterada pelo métodos de Newton, segundas derivadas das funções de plastificação e potencial plástico são necessárias, aumentando o grau de dificuldade das transformações algébricas, principalmente quando modelos mais complexos

são considerados (Pedroso et al., 2005; Pedroso & Farias, 2005)

Métodos explícitos são mais simples de serem implementados em computadores. Além disso, podem ser usados na construção de integradores de múltiplo uso, com aplicação a vários modelos constitutivos (Pedroso & Farias, 2005). Esses métodos são derivados do Método Runge-Kutta (Hairer et al., 1993; Hairer & Wanner, 1996). Alguns métodos Runge-Kutta possuem avaliações intermediárias de ordem diferentes (Gear, 1971), permitindo a medição local dos erros na solução, de forma embutida (“embedded”). Esses métodos permitem a elaboração de esquemas com subdivisão automática dos passos que são bastante eficientes na solução de equações da elastoplasticidade (Sloan, 1987; Sloan & Booker, 1992; Sloan et al., 2001).

As equações evolutivas das variáveis internas de cada modelo constitutivo também devem ser integradas. Farias (1993, 1997) apresentou três formas para a determinação das variáveis internas. Dentre elas, a que considera a integração conjunta da relação tensão-deformação e da evolução das variáveis internas parece ser a mais indicada. Esta forma também é considerada por outros pesquisadores (Simo, 1994; Jeremić & Sture, 1997; Borja, 1990; Sloan et al., 2001; Ahadi & Krenk, 2003).

Pedroso & Farias (2002a, 2005) mostraram que os esquemas explícitos com passos automáticos são mais eficientes e mais precisos na solução do DAS dos modelos SubCam e Subtij em comparação com esquema Backward-Euler. Outra grande vantagem de tais esquemas é a facilidade no controle do erro global na simulação de um problema de contorno, mediante o correspondente controle no erro local.

## 2.7 OUTRAS RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Outros métodos não convencionais também existem para a representação da relação tensão-deformação. Dentre eles, cita-se aqueles conhecidos por Redes Neurais Artificiais (RNA) que funcionam como um sistema de ajuste de pesos mediante treinamento da rede. Esse treinamento requer uma boa quantidade de resultados experimentais em amostras e pode resultar numa alternativa razoável ao método convencional da teoria da elastoplasticidade (Martinez-Carvajal et al., 2005; Martínez-Carvajal, 2006).

## 2.8 CÁLCULO TENSORIAL

O Cálculo Tensorial é a ferramenta utilizada na Mecânica do Contínuo. Sua importância reside no fato de simplificar as expressões entre os componentes das entidades manipuladas. A definição de tensor é a característica que permite isso, por meio da classificação de entidades diferentes que possuem dependência ou não dos sistemas em que são observadas. O conceito de invariância toma o papel principal em várias leis físicas.

A palavra tensor foi introduzida por William Rowan Hamilton em 1846, mas ele a



utilizou para o que é hoje chamado de “modulus”. A palavra adquiriu o significado atual com Woldemar Voigt em 1899. A notação foi desenvolvida por volta de 1890 por Gregorio Ricci-Curbastro sobre o título de Geometria Diferencial Absoluta e foi colocada de forma acessível para vários matemáticos após a publicação por Tullio Levi-Civita do trabalho Cálculo Diferencial Absoluto em 1900. Várias traduções seguiram. O Cálculo Tensorial adquiriu aceitação maior após a introdução da Teoria Geral da Relatividade de Einstein, por volta de 1915. A Relatividade Geral é formulada inteiramente na linguagem de tensores que foi ensinada a Einstein diretamente por Levi-Civita. Todavia, tensores também são usados em outros campos como Mecânica dos Meios Contínuos, por exemplo, o tensor de deformações. (<http://en.wikipedia.org/wiki/Tensor>).

Tensores podem ser vistos como vetores em espaços de ordens diferentes (Brannon, 2000). Isso permite a aplicação de quase todas as definições e propriedades dos vetores aos tensores, como norma, ângulo entre vetores/tensores e produtos interno; até mesmo setas orientadas podem ser utilizadas como um método simbólico de visualização de tensores.

Coordenadas curvilíneas estão ligadas à origem do Cálculo Tensorial e são importantes quando permitirem a simplificação da geometria do problema considerado. O estudo das coordenadas curvilíneas também é adequado quando literaturas mais antigas forem pesquisadas, pois boa parte do material científico na área de tensores, escrito em tempos anteriores, utiliza os conceitos da geometria Riemmaniana e coordenadas curvilíneas. Outra consequência favorável do estudo das coordenadas curvilíneas é o maior entendimento dos problemas representados em sistemas ortonormais (Brannon, 2002a).

Boa parte das leis físicas mecânicas são melhor entendidas e visualizadas quando certas direções particulares das entidades em estudo são postas como sistema de referência. Essas direções são conhecidas por direções principais e, no contexto da mecânica dos meios contínuos, são determinadas de diversas formas, até mesmo graficamente pelo Círculo de Mohr (Brannon, 2003b), que é usado na definição de um dos mais importantes critérios de ruptura para solos: Mohr-Coulomb. Percebe-se, então, a importância da determinação dos valores e direções principais.

A determinação dos valores e direções principais compreende um problema de determinação dos autovalores e autovetores. Dependendo da situação, soluções analíticas trazem complicações, principalmente quando forem transcritas em códigos de computadores. Isso ocorre devido aos erros (de truncamento) internos que os computadores possuem. Portanto, o estudo por métodos robustos de determinação dos autovalores e autovetores são necessários. Hartmann (2003) apresentou um estudo entre os métodos mais utilizados para a determinação analítica computacional dos autovalores, autovetores e até mesmo dos autoprojetores (ou autodíadas). Dentre eles, aquele publicado em Malvern (1969) parece ser o mais difundido.

O conceito que unifica as propriedades dos autovetores e autovalores é a decomposição espectral. Desta, podem ser obtidas novas entidades com características úteis: os auto-

projetores (Brannon, 2003a). Esses permitem a simplificação da representação espectral e a elaboração de funções isotrópicas de tensores como, por exemplo, a exponencial de um tensor ( $\exp_{\approx} \mathbf{a}$ ).

# Capítulo 3

## ELASTOPLASTICIDADE E SUBCARREGAMENTO

Inicialmente, é importante ressaltar que o termo tensão neste trabalho equivale à tensão efetiva definida pela Mecânica dos Solos, dada por  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{efetiva} = \underline{\underline{\sigma}}^{total} - u_w \underline{\underline{I}}$ , em que  $u_w$  é a pressão na água e  $\underline{\underline{I}}$  o tensor identidade de segunda ordem. Em modelos para solos não saturados, o termo tensão indicará a tensão líquida, dada pela diferença entre a tensão total e a pressão no ar ( $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{liquida} = \underline{\underline{\sigma}}^{total} - u_a \underline{\underline{I}}$ , em que  $u_a$  é a pressão no ar). Adota-se a convenção de sinais dada pela Mecânica dos Solos, na qual os valores positivos indicam compressão. Recomenda-se a leitura do Apêndice A para a familiarização com a notação empregada nesta tese.

A base fundamental para quase todos os modelos elastoplásticos aplicáveis a solos é construída com os conceitos da Teoria Matemática da Elastoplasticidade (Hill, 1971): a) decomposição linear das deformações; b) critério de plastificação; c) potencial plástico; e d) condições de carregamento e descarregamento. Tentativas de extensão destes modelos à representação do comportamento cíclico dos materiais foram feitas por vários autores, principalmente considerando-se o conceito de endurecimento cinemático, no qual o domínio elástico, cercado pela superfície de plastificação, move no espaço de tensões. Esta extensão possui algumas vantagens, contudo requer a obtenção não tão fácil de alguns parâmetros constitutivos adicionais. Além disso, estes parâmetros geralmente não possuem interpretação física clara.

Uma extensão fortuita da elastoplasticidade básica foi iniciada por Hashiguchi & Ueno (1977) com a introdução do conceito de subplastificação. Este conceito considera a transição suave entre o comportamento rígido elástico e o elastoplástico, mediante a introdução de uma superfície de subplastificação, também conhecida por superfície de subcarregamento. Os modelos com superfície de subplastificação propostos por Hashiguchi & Ueno (1977) mostram claramente o objetivo de cada superfície construída no espaço de tensões: a) a superfície de carregamento é relacionada à decisão carregamento-descarregamento; b) a superfície potencial plástico fornece a direção das deformações plásticas; e c) a superfície normal de plastificação indica a região no espaço de tensões já visitada pela superfície de subcarregamento. Em seguida, Hashiguchi (1989) apresentou uma completa explicação do

---

conceito de subcarregamento, comparando-o com outras idealizações que tentam simular o comportamento cíclico de materiais. Além disso, a extensão para a consideração da histerese e efeito Masing são acrescentadas. Hashiguchi (2001) mostra que o endurecimento cinemático não é aceitável para solos, pois estes raramente suportam tensões de tração, e sugere a adoção de superfícies que rodam no espaço das tensões, como idealizado pelo endurecimento rotacional. Similarmente aos modelos com endurecimento cinemático, esta última extensão também requer a introdução de parâmetros de difícil obtenção.

A teoria convencional, sob o ponto de vista da mecânica do contínuo, idealiza a decomposição das pequenas deformações em duas parcelas independentes: elástica e plástica. Entretanto, como notado por Collins & Houlsby (1997), alguns materiais são melhor representados pelo acoplamento entre as deformações elásticas e plásticas. Além disso, Muir Wood (1990) mostra alguns modelos para solos, fundamentados na teoria do estado crítico, contendo a rigidez elástica em função do volume específico, e, então, da deformação plástica volumétrica, que é, por sua vez, um tipo de variável interna plástica. Assim, embora o conceito da decomposição linear seja bastante comum, é evidente que outras composições devem ser pesquisadas para melhor representação de alguns materiais.

Modelos elastoplásticos usam variáveis internas. Estas são medidas de controle de um certo modelo matemático que tenta representar algum fenômeno físico. A representação do estado mecânico de um material geralmente leva em conta a história de carregamento e descarregamento. Algumas variáveis podem ter origem diretamente na micromecânica e outras podem ser do tipo fenomenológicas, ou seja, são originadas de observações macroscópicas. Também se pode ter a mistura dos dois tipos de observações na elaboração de variáveis internas. O adjetivo interno indica precisamente que estas variáveis são independentes das leis físicas, como as do movimento e equilíbrio, consideradas pela Mecânica do Contínuo. Ou seja, são quantidades internas tão somente existentes para um certo modelo constitutivo. Geralmente, as variáveis internas ajudam na representação de fenômenos não-lineares.

Em modelos elastoplásticos com endurecimento isotrópico, geralmente uma única variável interna é definida, servindo de controle para tamanho da superfície de plastificação, ou seja, da região de comportamento puramente elástico. A evolução dessa variável é dada em forma de taxa, na qual um parâmetro constitutivo, válido somente ao modelo considerado, é acrescentado. Modelos com endurecimento cinemático (rotacional) podem exigir a adição de mais variáveis internas para a construção do mecanismo de movimento e/ou rotação da superfície de plastificação no espaço das tensões.

O modelo com subcarregamento acrescenta uma variável interna, que, geralmente, mede o tamanho da superfície de subcarregamento. Esta última pode ser adicionada a um modelo elastoplástico convencional, melhorando a capacidade do modelo em reproduzir o comportamento cíclico. Aquela variável permite representar o efeito de densificação/adensamento de materiais granulares, mediante a elaboração de uma lei evolutiva

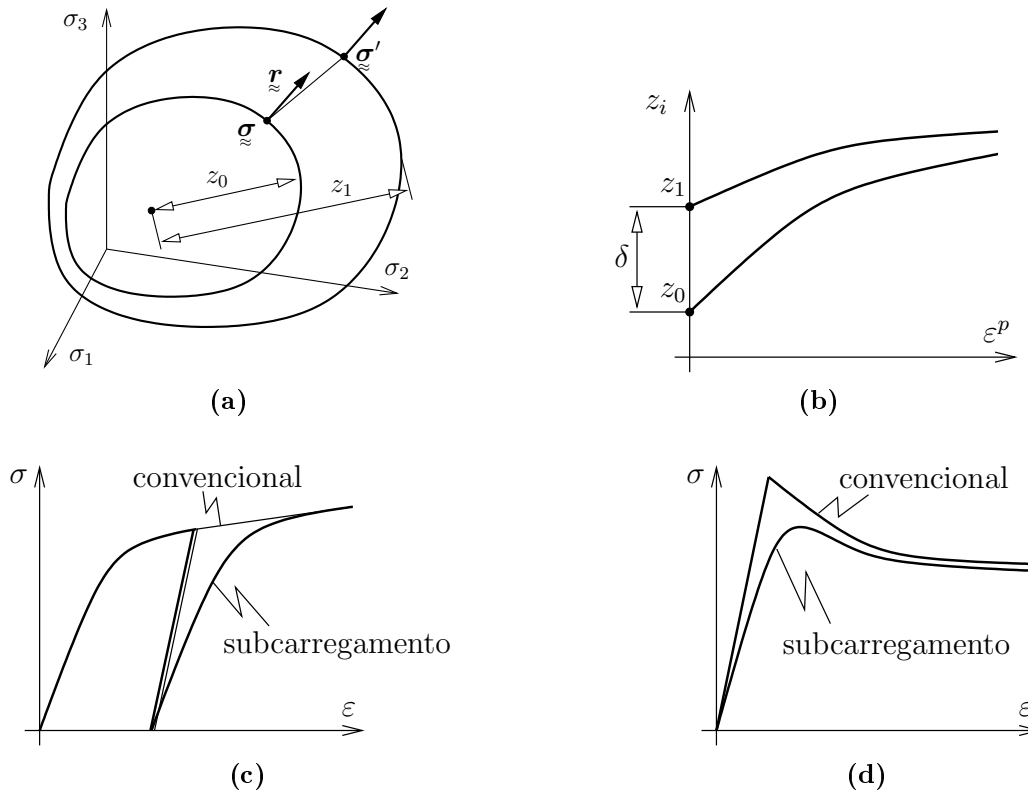
para a distância entre a superfície normal e de subplastificação. Essa distância será nula para materiais normalmente adensados ou fofos, e será maior que zero para materiais pré-adensados ou densos. Assim, na sua forma mais simples, um modelo com subcarregamento requer a adição de apenas um parâmetro constitutivo.

As equações da elastoplasticidade podem ser facilmente generalizadas para a consideração de modelos com subcarregamento. Para isso, é necessário a definição do endurecimento da superfície de subcarregamento. É importante lembrar que a condição de consistência, neste caso, é calculada para a superfície de subcarregamento. Matematicamente, a consequência disso é notada somente na alteração do denominador dos tensores constitutivos  $\underline{\underline{C}}^{ep}$  e  $\underline{\underline{D}}^{ep}$ , por meio do coeficiente plástico  $h^p$  que, agora, é calculado pela multiplicação da nova variável interna, adicionada pelo subcarregamento, pelo módulo de endurecimento alterado pelo estado de densificação/pré-adensamento (diferença entre os tamanhos das superfícies).

Resumidamente, as principais características de um modelo elastoplástico, com duas superfícies de plastificação, considerando o conceito de subcarregamento, com endurecimento isotrópico e com fluxo associado, são:

- A superfície de subcarregamento e a superfície normal são análogas entre si e têm tamanhos  $z_0$  e  $z_1$ , respectivamente (Figura 3.1a);
- A direção da deformação plástica é paralela ao gradiente  $\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{V}}$  da função que define a superfície de subcarregamento;
- O estado de tensão  $\underline{\underline{\sigma}}$  está sempre na superfície de subcarregamento. Existe um estado  $\underline{\underline{\sigma}}'$  conjugado ao  $\underline{\underline{\sigma}}$  na superfície normal que, geralmente, não entra explicitamente na formulação (Figura 3.1a);
- A superfície de subcarregamento cresce e diminui;
- O endurecimento da superfície normal de plastificação geralmente é definido de forma similar ao endurecimento de modelos convencionais. Por exemplo, em analogia ao modelo Cam clay, o endurecimento da superfície normal pode ser:  $\dot{z}_1 = (z_1/\chi)\dot{\epsilon}_v^p$ ;
- O endurecimento da superfície de subcarregamento é vinculado ao da superfície normal mediante a introdução de uma lei de variação para a diferença  $\delta$  entre seus tamanhos. Essa diferença diminui com a ocorrência de deformação plástica (Figura 3.1b);
- A distância  $\delta$  serve de medida de quanto ciclado/densificado o material se encontra;
- Após o recarregamento, observa-se novamente surgimento de deformações elasto-plásticas (Figura 3.1c);

- Em materiais pré-adensados/densos, enquanto os modelos convencionais (com uma superfície de plastificação) geram resultados nos quais existe um pico de resistência bem elevado, o modelo com subcarregamento fornece uma resposta suave para o amolecimento (“softening”) (Figura 3.1d);
- A rigidez pode aumentar ao longo de ciclos de carregamento-descarregamento;



**Figura 3.1:** Conceito de subcarregamento (“subloading”): (a) Superfícies normal e de subcarregamento; (b) Transição elástica-plástica e variação da diferença entre  $z_1$  e  $z_0$ ; (c) Relação tensão-deformação de modelos convencionais e com subcarregamento - material normalmente-adensado (fofo); (d) Relação tensão-deformação de modelos convencionais e com subcarregamento - material pré-adensado (denso).

A implementação computacional de um modelo com subcarregamento é até mais fácil que a de um modelo convencional, pois, como o estado de tensões sempre está na superfície de subcarregamento, a determinação de um eventual estado de tensões que intercepta a superfície de plastificação não é necessária. Essa determinação deve ser codificada em modelos convencionais e geralmente é feita por um algoritmo com o método “Newton-Raphson” (Pedroso, 2002).

### 3.1 ELASTOPLASTICIDADE MATEMÁTICA

A montagem do Sistema Algébrico de Equações Diferenciais (DAS - “Differential Algebraic System”) de um modelo elastoplástico requer a definição das leis de evolução das

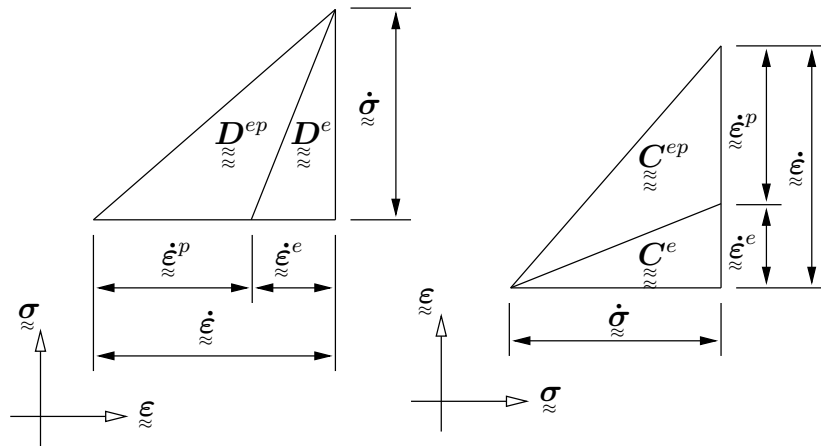
variáveis internas e do fluxo plástico. Este último define a direção e magnitude das deformações plásticas. Convencionalmente, considera-se a decomposição linear do incremento de deformação em parte elástica e parte plástica. Com essas hipóteses, chega-se aos tensores de quarta ordem de módulos elastoplásticos  $\mathbb{C}^{ep}$  e  $\mathbb{D}^{ep}$ . A Tabela 3.1 apresenta antecipadamente as equações necessárias à implementação computacional de um modelo elastoplástico. A seguir essas equações serão deduzidas.

A hipótese inicial para o desenvolvimento do DAS elastoplástico é a divisão linear da taxa de deformação total entre parte elástica e parte plástica. Ao mesmo tempo, a Lei de Hooke Generalizada (Figura 3.2) é considerada.

O DAS resultante terá a seguinte forma:

$$\dot{y} = \mathcal{F}(x, y)\dot{x}, \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{e} \quad y(t_0) = y_0 \quad (3.1)$$

na qual  $x$  e  $y$  podem, alternadamente, representar os tensores de tensão ou deformação.



**Figura 3.2:** Lei de Hooke generalizada.

**Tabela 3.1:** Elastoplasticidade convencional.

| Conceito/Definição                                                                             | Expressão                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Decomposição dos incrementos de deformação                                                     | $\dot{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}} = \dot{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e + \dot{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Lei de Hooke generalizada; incrementos de tensão independentes (“stress-increment driven”)     | $\dot{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{e,nle} : \dot{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Lei de Hooke generalizada; incrementos de deformação independentes (“strain-increment driven”) | $\dot{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^{e,nle} : \dot{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Endurecimento                                                                                  | $z_i = \dot{\Lambda} \mathcal{H}_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Lei de fluxo                                                                                   | $\dot{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p = \dot{\Lambda} \underline{\underline{\underline{\underline{r}}}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Tensor identidade de segunda ordem                                                             | $\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} = \delta_{ij} \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_i \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_j$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Tensor identidade de quarta ordem simétrico para tensores simétricos                           | $\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^{sym} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} \boxtimes \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}})$                                                                                                                                                                                                                    |
| Tensor projetor que gera um tensor de segunda ordem “simétrico-desviador”                      | $\underline{\underline{\underline{\underline{P}}}}^{symdev} = \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^{sym} - \frac{1}{3} \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Módulo plástico                                                                                | $h^p = -\sum_k y_k \mathcal{H}_k$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Módulo tangente elástico linear                                                                | $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^e = \frac{1}{2G} \underline{\underline{\underline{\underline{P}}}}^{symdev} + \frac{1}{9K} \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Módulo tangente elástoplástico                                                                 | $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{ep} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^e + \frac{\underline{\underline{\underline{\underline{r}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{V}}}}}{h^p} k$                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Módulo tangente elástico linear                                                                | $\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^e = 2G \underline{\underline{\underline{\underline{P}}}}^{symdev} + K \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Módulo tangente elástoplástico                                                                 | $\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^{ep} = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^e - \frac{(\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^e : \underline{\underline{\underline{\underline{r}}}}) \otimes (\underline{\underline{\underline{\underline{V}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^e)}{\underline{\underline{\underline{\underline{V}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^e : \underline{\underline{\underline{\underline{r}}}} + h^p} k$ |

Obs.: <sup>e</sup> indica elástico, <sup>p</sup> plástico e <sup>nle</sup> elástico não linear.

Geralmente, a lei elástoplástica é representada compactadamente por meio de tensores de quarta ordem. Neste formato, a relação entre tensões e deformações é indicada por:

$$\dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{ep} : \dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}} \quad \text{ou} \quad \dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^{ep} : \dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}} \quad (3.2)$$

em que  $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{ep}$  e  $\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^{ep}$  são tensores de quarta ordem de módulos de flexibilidade (“compliance”) e de rigidez (“rigidity”), respectivamente.

Para chegar ao DAS da plasticidade, as seguintes equações são consideradas:

a) decomposição aditiva das deformações:

$$\dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}} = \dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}}^e + \dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}}^p \quad (3.3)$$

b) lei de Hooke generalizada:

$$\dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}}^e = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^e : \dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}} \quad \text{ou} \quad \dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^e : \dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}}^e \quad (3.4)$$

c) lei de fluxo:

$$\dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}}^p = \dot{\Lambda} \underline{\underline{\underline{\underline{r}}}} \quad (3.5)$$



d) lei de endurecimento:

$$\dot{z}_i = \dot{\Lambda} \mathcal{H}_i \quad (3.6)$$

e) condição de consistência:

$$\dot{f} = 0 \quad (3.7)$$

em que  $\underline{\underline{\mathbf{r}}}$  (Eq. 3.5)) é um tensor de segunda ordem que pode ser o gradiente da função de plastificação no caso de fluxo associado e  $\mathcal{H}_i$  (Eq. 3.6) relaciona as variáveis internas com o multiplicador plástico  $\dot{\Lambda}$ .

Partindo da decomposição aditiva (Eq. 3.3), lei de Hooke (Eq. 3.4) e lei de fluxo (Eq. 3.5), chega-se às seguintes relações:

$$\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} + \dot{\Lambda} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : (\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} - \dot{\Lambda} \underline{\underline{\mathbf{r}}}) \quad (3.8)$$

em que

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^e = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{sym} - \frac{\nu}{E} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e = \frac{1}{2G} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{symdev} + \frac{1}{9K} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (3.9)$$

e

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^e = \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{sym} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e = 2G \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{symdev} + K \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (3.10)$$

são os tensores (módulo) elástico e  $\dot{\Lambda}$  é o multiplicador plástico.  $E$ ,  $\nu$ ,  $K$  e  $G$  são os parâmetros elásticos, módulo de Young, coeficiente de Poisson, módulo de rigidez volumétrica e módulo de rigidez ao cisalhamento, respectivamente.

Indicando por  $z_i$  as variáveis internas que diretamente influenciam a função de plastificação  $f$ , a condição de consistência pode ser expandida pela fórmula do diferencial total, resultando em:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \dot{z}_i = \underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} + \sum_i y_i \dot{z}_i = 0 \quad (3.11)$$

em que os gradientes  $\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}$  e  $y_i = \frac{\partial f}{\partial z_i}$  foram definidos. Caso o modelo adote fluxo associado, a direção do fluxo plástico  $\underline{\underline{\mathbf{r}}}$  será paralela ao gradiente  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ .

Finalmente, inserindo a lei de fluxo (Eq. 3.5) e a de endurecimento (Eq. 3.6) na Eq. (3.11) (consistência), o multiplicador plástico ou de Lagrange poderá ser expresso em função das taxas de tensão ou deformação, como é mostrado abaixo:

$$\dot{\Lambda} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}}}{-\sum_i y_i \mathcal{H}_i} \quad \text{ou} \quad \dot{\Lambda} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}}{\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{r}}} - \sum_i y_i \mathcal{H}_i} \quad (3.12)$$

Para facilitar, os seguintes valores escalares são definidas:

$$h^p = -\sum_i y_i \mathcal{H}_i \quad (3.13)$$

e

$$\Phi = \underset{\approx}{V} : \underset{\approx}{D}^e : \underset{\approx}{r} - \sum_i y_i \mathcal{H}_i \quad (3.14)$$

permitindo representar a Eq. (3.12) da seguinte forma:

$$\dot{\Lambda} = \frac{\underset{\approx}{V} : \dot{\underset{\approx}{\sigma}}}{h^p} \quad \text{ou} \quad \dot{\Lambda} = \frac{1}{\underset{\approx}{\Phi}} \underset{\approx}{V} : \underset{\approx}{D}^e : \dot{\underset{\approx}{\epsilon}} \quad (3.15)$$

Substituindo as Eqs. (3.15) nas equações (3.8), os seguintes tensores (módulos) podem ser encontrados:

$$\underset{\approx}{C}^{ep} = \underset{\approx}{C}^e + \frac{\underset{\approx}{r} \otimes \underset{\approx}{V}}{-\sum_i y_i \mathcal{H}_i} \quad \text{ou} \quad \underset{\approx}{D}^{ep} = \underset{\approx}{D}^e - \frac{(\underset{\approx}{D}^e : \underset{\approx}{r}) \otimes (\underset{\approx}{V} : \underset{\approx}{D}^e)}{\underset{\approx}{V} : \underset{\approx}{D}^e : \underset{\approx}{r} - \sum_i y_i \mathcal{H}_i} \quad (3.16)$$

ou, então,

$$\underset{\approx}{C}^{ep} = \underset{\approx}{C}^e + \frac{\underset{\approx}{r} \otimes \underset{\approx}{V}}{h^p} \quad \text{ou} \quad \underset{\approx}{D}^{ep} = \underset{\approx}{D}^e - \frac{1}{\underset{\approx}{\Phi}} (\underset{\approx}{D}^e : \underset{\approx}{r}) \otimes (\underset{\approx}{V} : \underset{\approx}{D}^e) \quad (3.17)$$

Similarmente, substituindo as expressões para  $\dot{\Lambda}$  (Eq. 3.15) na lei de endurecimento (Eq. 3.6), as seguintes equações são encontradas:

$$\dot{z}_i = \underset{\approx}{b}_i : \dot{\underset{\approx}{\sigma}} \quad \text{ou} \quad \dot{z}_i = \underset{\approx}{B}_i : \dot{\underset{\approx}{\epsilon}} \quad (3.18)$$

em que

$$\underset{\approx}{b}_i = \frac{\mathcal{H}_i}{h^p} \underset{\approx}{V} \quad (h^p = -\sum_i y_i \mathcal{H}_i) \quad (3.19)$$

e

$$\underset{\approx}{B}_i = \frac{\mathcal{H}_i}{\underset{\approx}{\Phi}} \underset{\approx}{V} : \underset{\approx}{D}^e \quad (\Phi = \underset{\approx}{V} : \underset{\approx}{D}^e : \underset{\approx}{r} - \sum_i y_i \mathcal{H}_i) \quad (3.20)$$

são tensores de segunda ordem independentes das taxas de tensão ou deformação.

## 3.2 SISTEMA ALGÉBRICO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O sistema algébrico de equações diferenciais (DAS), formado pelas equações da elastoplasticidade, pode ser representado matricialmente, considerando as relações tensão-deformação (Eqs. 3.2) e a evolução das variáveis internas (Eqs. 3.18).

Em simulações (pontuais) de ensaios em laboratório, nos quais as trajetórias de tensão são impostas, é necessário a resolução do DAS em que o incremento de tensão ( $\dot{\underset{\approx}{\sigma}}$ ) é variável independente. Este sistema será denominado de “driver” e possui a seguinte representação

matricial:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \\ \dot{z}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{ep}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_i) & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{b}}}_i(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_i) & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \dot{y} = \mathcal{F}(x, y)\dot{x} \quad \circ \Rightarrow \{:, \times\} \quad (3.21)$$

Quando os incrementos de deformação ( $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ ) forem variáveis independentes, como no caso dos solucionadores do problema de valor inicial e de contorno pelo Método dos Elementos Finitos (MEF-IBVS), a solução do DAS geralmente é conhecida por “stress-update”. Neste caso o DAS é representado por:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \\ \dot{z}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_i) & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_i(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_i) & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \dot{y} = \mathcal{F}(x, y)\dot{x} \quad \circ \Rightarrow \{:, \times\} \quad (3.22)$$

### 3.3 SOLUÇÃO

Os sistemas das Eqs. (3.21) e (3.22) têm a forma geral de um Sistema Algébrico Diferencial (DAS) (Eq. 3.1) e podem ser resolvidos pelos métodos já bem estudados pelos matemáticos (Hairer & Wanner, 1996).

Métodos de integração explícitos e implícitos podem ser aplicados na solução dos sistema de equações resultante. Com métodos explícitos de passos variáveis (Sloan, 1987; Sloan & Booker, 1992; Sloan et al., 2001) e determinados automaticamente, a implementação fica bastante facilitada.

Com o algoritmo da Figura 3.3, pretende-se mostrar como a implementação de um modelo elastoplástico (genérico) com subcarregamento (ou não) pode ser atualizado, para valores de incrementos de tensão dados.

Para incrementos de deformação dados (“stress-update”) o algoritmo da Figura 3.4 pode ser adotado.

Nos algoritmos das Figuras 3.3 e 3.4, as rotinas para a integração numérica das equações constitutivas foram indicadas. No Capítulo 11 serão apresentados alguns esquemas de solução tanto para o sistema “driver” quanto para o problema de “stress-update”.

```

Entrada: Incremento de tensão  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ 
Saída : Incremento de deformação  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ 
  ! Verificar condição carregamento-descarregamento
  Calcular gradiente  $\underline{\underline{V}}$  e coeficiente plástico  $h^p$ 
   $\dot{\Lambda} \leftarrow \underline{\underline{V}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}/h^p$ 
  if  $\dot{\Lambda} < 0$  then ! Descarregamento
  |   while integração (com subpassos automáticos) do
  |   |   Integrar com  $\underline{\underline{C}}^e(\underline{\underline{\sigma}})$ 
  |   |   Superfície normal permanece imóvel
  |   |   Superfície de subcarregamento passa pelo ponto de tensão
  |   |   Atualizar variáveis internas (descarregamento)
  |   else ! Carregamento
  |   |   while integração (com subpassos automáticos) do
  |   |   |   Integrate with  $\underline{\underline{C}}^e(\underline{\underline{\sigma}})$ ,  $\underline{\underline{C}}^{ep}(\underline{\underline{\sigma}}, z_i)$  e  $\underline{\underline{b}}_i(\underline{\underline{\sigma}}, z_i)$ 
  |   |   |   Superfícies normal e de subcarregamento movem
  |   |   |   Atualizar variáveis internas (carregamento)

```

**Figura 3.3:** Rotina de atualização para modelos genéricos elastoplásticos com duas ou mais superfícies para incrementos de tensão dados.

```

Entrada: Incremento de deformação  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ 
Saída : Incremento de tensão  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ 
  ! Verificar condição carregamento-descarregamento
  Calcular gradiente  $\underline{\underline{V}}$ 
  numerador ( $\dot{\Lambda}$ )  $\leftarrow \underline{\underline{V}} : \underline{\underline{D}}^e : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ 
  if numerador ( $\dot{\Lambda}$ )  $< 0$  then ! Descarregamento
  |   while integração (com subpassos automáticos) do
  |   |   Integrar com  $\underline{\underline{D}}^e(\underline{\underline{\sigma}})$ 
  |   |   Superfície normal permanece imóvel
  |   |   Superfície de subcarregamento passa pelo ponto de tensão
  |   |   Atualizar variáveis internas (descarregamento)
  |   else ! Carregamento
  |   |   while integração (com subpassos automáticos) do
  |   |   |   Integrar com  $\underline{\underline{D}}^e(\underline{\underline{\sigma}})$ ,  $\underline{\underline{D}}^{ep}(\underline{\underline{\sigma}}, z_i)$  e  $\underline{\underline{B}}_i(\underline{\underline{\sigma}}, z_i)$ 
  |   |   |   Superfícies normal e de subcarregamento movem
  |   |   |   Atualizar variáveis internas (carregamento)

```

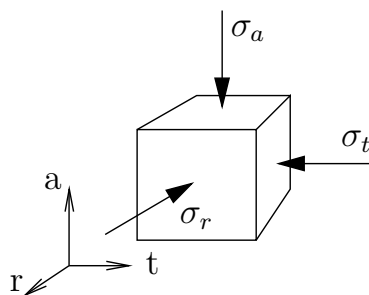
**Figura 3.4:** Rotina de atualização (“Stress-update”) para modelos genéricos elastoplásticos com duas ou mais superfícies para incrementos de deformação dados.

# Capítulo 4

## ENSAIOS DE LABORATÓRIO

Durante a construção e até mesmo ao longo do tempo de vida de algumas obras de engenharia civil, diversas solicitações mecânicas surgem externamente aos maciços de solo e rocha e estruturas interligadas a esses maciços. As solicitações provocarão diferentes trajetórias de tensão e deformação, internamente, nos materiais envolvidos. A solução dos problemas de comportamento mecânico comumente é alcançada com o uso de algumas simplificações como a limitação geométrica em duas dimensões e a desconsideração dos termos de segunda ordem das deformações.

Em algumas situações, as análises mecânicas podem ser representadas bidimensionalmente, em outras, a análise tridimensional é imprescindível. As relações constitutivas deverão considerar as hipóteses simplificadoras das análises, entretanto os equipamentos disponíveis para ensaios em amostras do material estudado acrescentam limitações adicionais. Por exemplo, o equipamento triaxial convencional não permite estudar situações em que o estado da partícula, idealizada por um volume elementar no centro da amostra (Figura 4.1), possa ter mais que dois componentes de tensão/deformação. Outros equipamentos possuem suas limitações.



**Figura 4.1:** Estado de tensão num ponto; Direções (a) axial, (r) radial e (t) transversal.

Certamente o embasamento experimental é a matéria prima fundamental para o desenvolvimento de equações constitutivas, pois, afinal de contas, a modelagem constitutiva tenta representar matematicamente um fenômeno real da natureza, para o qual se deve ter profundo conhecimento; conhecimento esse que só pode ser adquirido por meio de

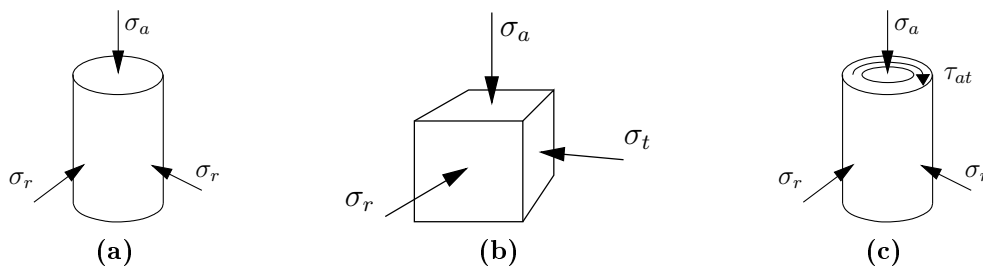
verificação experimental.

A elaboração de leis constitutivas tridimensionais sofre grande influência da qualidade dos resultados obtidos em ensaios. Assim, é difícil afirmar que um equacionamento tem maior abrangência que outro. Além disso, outros problemas surgem com relação à aquisição dos dados experimentais, pois interferências entre as partes mecânicas que aplicam carga/deslocamento, vazamentos de ar/água, distribuição não-homogênea de tensões/deformações na amostra, condições de lubrificação, dentre outros, causam diversas condições que podem diferir daquelas consideradas pelas equações.

## 4.1 EQUIPAMENTOS

Apenas quatro componentes de tensão podem ser simulados pela maioria dos equipamentos de laboratório de comportamento mecânico (Tabela 4.1). Além disso, nem sempre os quatro ocorrem ao mesmo tempo. Neste trabalho, consideram-se os resultados de três tipos de equipamentos: triaxial verdadeiro ou cúbico, triaxial convencional e cilindro vazado (Figura 4.2). Para estes equipamentos, os componentes de tensão são indicados conforme:

- $\sigma_a$ : (a) de axial, correspondente à tensão na direção vertical nos três equipamentos (Figura 4.2);
- $\sigma_r$ : (r) de radial, correspondente às tensões radiais no equipamento convencional e cilindro vazado e a uma das direções horizontais no equipamento verdadeiro (perpendicular ao plano do papel);
- $\sigma_t$ : (t) de  $\theta$  ou transversal, correspondente à direção  $\theta$  no equipamento cilindro vazado e à outra direção horizontal no equipamento verdadeiro;
- $\tau_{at}$ : correspondente ao componente cisalhante que está no plano cuja normal é paralela a  $\theta$ .



**Figura 4.2:** Representação esquemática dos equipamentos - estados de tensão: (a) Triaxial convencional; (b) Triaxial verdadeiro; (c) Cilindro vazado.

**Tabela 4.1:** Limitações dos equipamentos de ensaio, com relação ao provável número de componentes de tensão e deformação, capaz de representar o estado mecânico nas amostras. Componentes (a) axial, (r) radial e (t) transversal.

| Equipamento           | Número de Componentes | Tensão                                                                                                       | Deformação                                                                                                                            |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Triaxial Convencional | 2                     | $\begin{pmatrix} \sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r \end{pmatrix}$                     | $\begin{pmatrix} \varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{pmatrix}$                               |
| Triaxial Verdadeiro   | 3                     | $\begin{pmatrix} \sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_t \end{pmatrix}$                     | $\begin{pmatrix} \varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_t \end{pmatrix}$                               |
| Cilindro Vazado       | 3                     | $\begin{pmatrix} \sigma_a & 0 & \sigma_{at} \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ \sigma_{at} & 0 & \sigma_r \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \varepsilon_a & 0 & \varepsilon_{at} \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ \varepsilon_{at} & 0 & \varepsilon_r \end{pmatrix}$ |

## 4.2 MATERIAIS

O principal material utilizado neste estudo é uma argila com limite de liquidez  $w_L = 44.7\%$ , limite de plasticidade  $w_p = 24.7\%$  e densidade dos grãos de  $G_s = 2.65$ . Essa argila é conhecida por Fujinomori e é comum na área de Chubu e Kansai do Japão (Chowdhury, 1998). Nesta pesquisa não foram realizados ensaios de laboratório. Os resultados do laboratório do Instituto de Tecnologia de Nagoya (NIT) foram utilizados. Os ensaios de comportamento mecânico foram realizados com amostras reconstituídas da argila Fujinomori, tendo em vista a maior repetitividade e homogeneidade que esse tipo de amostragem pode oferecer. Maiores detalhes sobre o preparo das amostras podem ser encontrados em Nakai & Matsuoka (1986).

As razões pela escolha da argila Fujinomori como material de estudo foram: a) é o material usualmente apresentado nos artigos do Professor Nakai, portanto, é útil na verificação das equações deduzidas (modelo Subloading tij); b) vários resultados foram disponibilizados pelo (NIT), contendo resultados de testes mecânicos com três tipos diferentes de equipamento: triaxial convencional, triaxial verdadeiro e cilindro vazado (Figura 4.2); e c) várias trajetórias, incluindo tridimensionais com ciclos de carregamento-descarregamento, foram simuladas no NIT, permitindo a elaboração de modelos válidos para geometria tridimensional.

Três conjuntos de parâmetros para os modelos Subtij e SubCam foram usados com a argila Fujinomori. Cada conjunto corresponde a um determinado grupo de amostras, cujos ensaios foram realizados pelos alunos do laboratório de geomecânica do Professor Nakai. Para facilitar a diferenciação dos gráficos, os três grupos de amostras da argila Fujinomori são simbolizados por um código com três letras, por exemplo:

- FO# (Fujinomori-Old) é resultante dos ensaios antigos, com OCR iguais a 1, 2, 4 e 8, apresentados por Chowdhury (1994);
- FNW (Fujinomori-NeW) são resultados obtidos pela Sra. Myata, Sr. Kido e Sr. Nishimura (Nakai & Hinokio, 2004); e

- FCH (Fujinomori-CHowdhury) corresponde aos ensaios realizado pelo Dr. Chowdhury (Chowdhury, 1998).

Também foi considerada a areia Toyoura. A Tabela 4.2 mostra o conjunto de parâmetros correspondentes ao conjunto de amostras/materiais. No entanto estes parâmetros servem apenas como uma orientação inicial, considerando que as simulações apresentadas serão realizadas com parâmetros otimizados. Nesta tabela, mostram-se também os parâmetros, sugeridos em Nakai & Hinokio (2004), para areia Toyoura do Japão (TSD - Touyouura SanD).

**Tabela 4.2:** Parâmetros de referência para os materiais analisads e os modelos Subtij e SubCam.

| Chave | Material               | $\lambda$ | $\kappa$ | $\nu$ | $R_{CS}$ | $\beta_{stij}$ | $c_{stij}$ | $c_{scam}$ |
|-------|------------------------|-----------|----------|-------|----------|----------------|------------|------------|
| FO1   | Fujinomori-Old(ocr=1)  | 0.0891    | 0.01960  | 0.2   | 3.500    | 1.5            | 500        | 1000       |
| FO2   | Fujinomori-Old(ocr=2)  | 0.0891    | 0.01960  | 0.2   | 3.500    | 1.5            | 500        | 1000       |
| FO4   | Fujinomori-Old(ocr=4)  | 0.0891    | 0.01960  | 0.2   | 3.500    | 1.5            | 500        | 1000       |
| FO8   | Fujinomori-Old(ocr=8)  | 0.0891    | 0.01960  | 0.2   | 3.500    | 1.5            | 500        | 1000       |
| FNW   | Fujinomori-NeW (ocr=1) | 0.1039    | 0.00990  | 0.2   | 3.200    | 1.5            | 500        | 1000       |
| FCH   | Fujinomori-CHow(ocr=1) | 0.0778    | 0.00824  | 0.0   | 3.628    | 1.4            | 500        | 1000       |
| TSD   | Toyouura-SanD          | 0.0700    | 0.00450  | 0.2   | 3.500    | 2.0            | 50         | 1000       |

Os parâmetros ( $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $\nu$ ,  $R_{CS}$ ,  $\beta_{stij}$ ,  $c_{stij}$  e  $c_{scam}$ ) da Tabela 4.2 serão clarificados nos Capítulos subseqüentes. De antemão, aproveita-se a oportunidade para se descrever cada um deles:

- $\lambda$ : Índice de compressibilidade ( $\lambda = 0.4343C_c$ );
- $\kappa$ : Índice de descompressão ( $\kappa = 0.4343C_s$ );
- $\nu$ : Coeficiente de Poisson;
- $R_{CS}$ : Razão  $\sigma_1/\sigma_3$  no estado crítico; função do ângulo de atrito no estado crítico de acordo com a seguinte expressão:  $R_{CS} = \frac{1+\sin\phi_{CS}}{1-\sin\phi_{CS}}$ ;
- $\beta_{stij}$ : Coeficiente de ajuste para a superfície de plastificação do modelo Subloading tij;
- $c_{stij}$ : Coeficiente que controla a taxa de endurecimento ao longo dos ciclos de carregamento-descarregamento para o modelo Subloading tij;
- $c_{scam}$ : Coeficiente que controla a taxa de endurecimento ao longo dos ciclos de carregamento-descarregamento para o modelo Subloading Cam-clay;



### 4.3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Considerando os diferentes equipamentos e trajetórias, elaborou-se um conjunto de chaves (Tabela 4.3), que indicam o tipo de ensaio com sua trajetória de tensão/deformação. As duas primeiras letras representam o equipamento e a última, uma informação adicional sobre a trajetória.

Combinações entre o código do material e a chave do equipamento/trajetória são feitas. Para finalizar, adiciona-se um número indicativo de um ensaio específico. Por exemplo, FO1.CTP.01 indica o ensaio de número 01 realizado com a argila Fujinomori-Old no equipamento triaxial convencional com  $p$  constante.

**Tabela 4.3:** Nomenclatura dos equipamentos (chaves) e componentes de tensão/deformação aplicados na definição das trajetórias seguidas pelos ensaios. Obs.: o (P) da chave corresponde ao invariante de tensão média  $p$  de Cambridge.

| Chave | Descrição                                                                  | Componentes                              |
|-------|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| CTX   | Triaxial convencional (“Conventional TriaXial”)                            | $\sigma_a$ $\sigma_r$                    |
| CTP   | Triaxial conv. com $p$ const. (“Conv. Triax. w. P const.”)                 | $\sigma_a$ $\sigma_r$                    |
| CTA   | Triaxial conv. com $\sigma_a$ const. (“Conv. Triax. w. $\sigma_A$ const.”) | $\sigma_a$ $\sigma_r$                    |
| CTR   | Triaxial conv. com $\sigma_r$ const. (“Conv. Triax. w. $\sigma_R$ const.”) | $\sigma_a$ $\sigma_r$                    |
| TTX   | Triaxial verdadeiro (“True TriaXial”)                                      | $\sigma_a$ $\sigma_r$ $\sigma_t$         |
| TTP   | Triaxial verdadeiro com $p$ const. (“True Triax. w. P const.”)             | $\sigma_a$ $\sigma_r$ $\sigma_t$         |
| HCY   | Cilindro vazado (“Hollow-CYlinder”)                                        | $\sigma_a$ $\sigma_r$ $\varepsilon_{at}$ |
| PSA   | Deformação plana (“Plane-StrAin”)                                          | $\sigma_a$ $\sigma_r$                    |

Para cada ensaio, um conjunto de seis gráficos é apresentado. Estes gráficos auxiliam o entendimento do comportamento do material, facilitando a elaboração de equações constitutivas. Os seis gráficos procuram apresentar as seguintes informações:

1. Relação tensão desviadora  $q$  (normalizada por  $p$ ) *versus* deformação desviadora  $\varepsilon_d$ ;
2. Relação tensão desviadora  $q$  (normalizada por  $p$ ) *versus* deformação volumétrica  $\varepsilon_v$ ;
3. Trajetória de tensão no plano  $q$  *versus*  $p$ ;
4. Relação deformação volumétrica  $\varepsilon_v$  *versus* deformação cisalhante  $\varepsilon_d$  (dilatância);
5. Relação deformação volumétrica  $\varepsilon_v$  (ou volume específico  $v$ ) *versus* tensão normal  $p$  (ou logaritmo natural de  $p$ );
6. Trajetória de tensão no plano  $\Pi$  (ou octaédrico).

Os invariantes de tensão e deformação considerados na elaboração dos gráficos podem ser calculados pelas equações reunidas na Tabela 4.4.

**Tabela 4.4:** Invariantes de tensão e deformação.

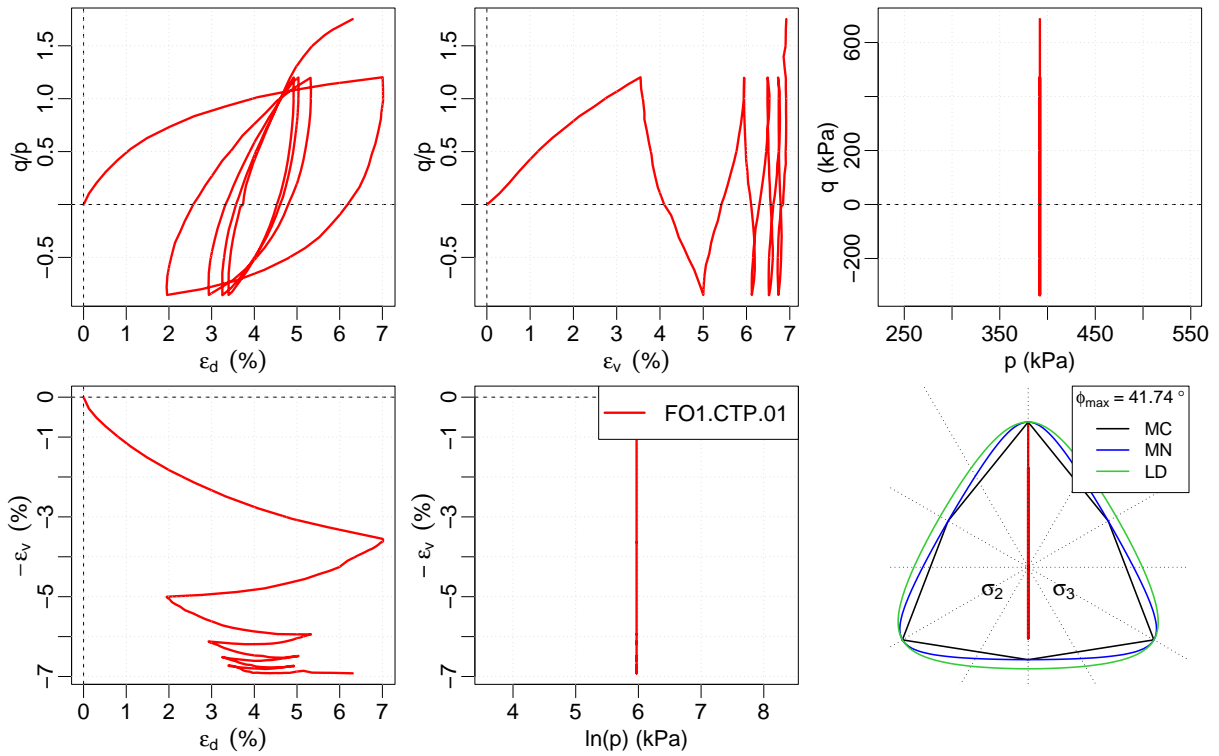
| Laboratório                                                                                                                                                                                                                                                                             | 3D                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $p = \frac{\sigma_a + \sigma_r + \sigma_t}{3}$                                                                                                                                                                                                                                          | $p = \frac{\text{tr } \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}{3}$                                |
| $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_a - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_a)^2 + 6\sigma_{at}^2}$                                                                                                                                                            | $q = \sqrt{\frac{2}{3}} \ \text{dev } \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\ $                  |
| $\varepsilon_v = \varepsilon_a + \varepsilon_r + \varepsilon_t$                                                                                                                                                                                                                         | $\varepsilon_v = \text{tr } \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$                         |
| $\varepsilon_d = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_t)^2 + (\varepsilon_t - \varepsilon_a)^2 + 6\varepsilon_{at}^2}$                                                                                                             | $\varepsilon_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \ \text{dev } \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\ $ |
| Obs.: $\text{tr } \underline{\underline{\boldsymbol{a}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{I}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{a}}} = a_1 + a_2 + a_3$ ( $a_i$ são coordenadas cartesianas)                                                                                      |                                                                                                       |
| $\text{dev } \underline{\underline{\boldsymbol{a}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{symdev} : \underline{\underline{\boldsymbol{a}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{a}}} - (\text{tr } \underline{\underline{\boldsymbol{a}}}) \underline{\underline{\boldsymbol{I}}}/3$ |                                                                                                       |

A seguir, apresentam-se alguns resultados com a argila Fujinomori nos equipamentos triaxial convencional e triaxial cúbico. Resultados com a areia Toyoura no equipamento triaxial cúbico também são apresentados. Por conveniência, os resultados para extensão são mostrados abaixo ( $q < 0$ ) da origem das ordenadas. Esboços dos três critérios de ruptura: Mohr-Coulomb (MC), Matsuoka-Nakai (MN) e Lade-Duncan (LD) também são apresentados. Estes foram calculados com os valores máximos de ângulo de atrito para os maiores valores da razão  $q/p$ . Três grupos de resultados são mostrados: a) Ensaios cíclicos com argila Fujinomori (FO1); b) Ensaios monotônicos com a argila Fujinomori (FCH) e c) Ensaios monotônicos com a com a areia Toyoura (TSD).

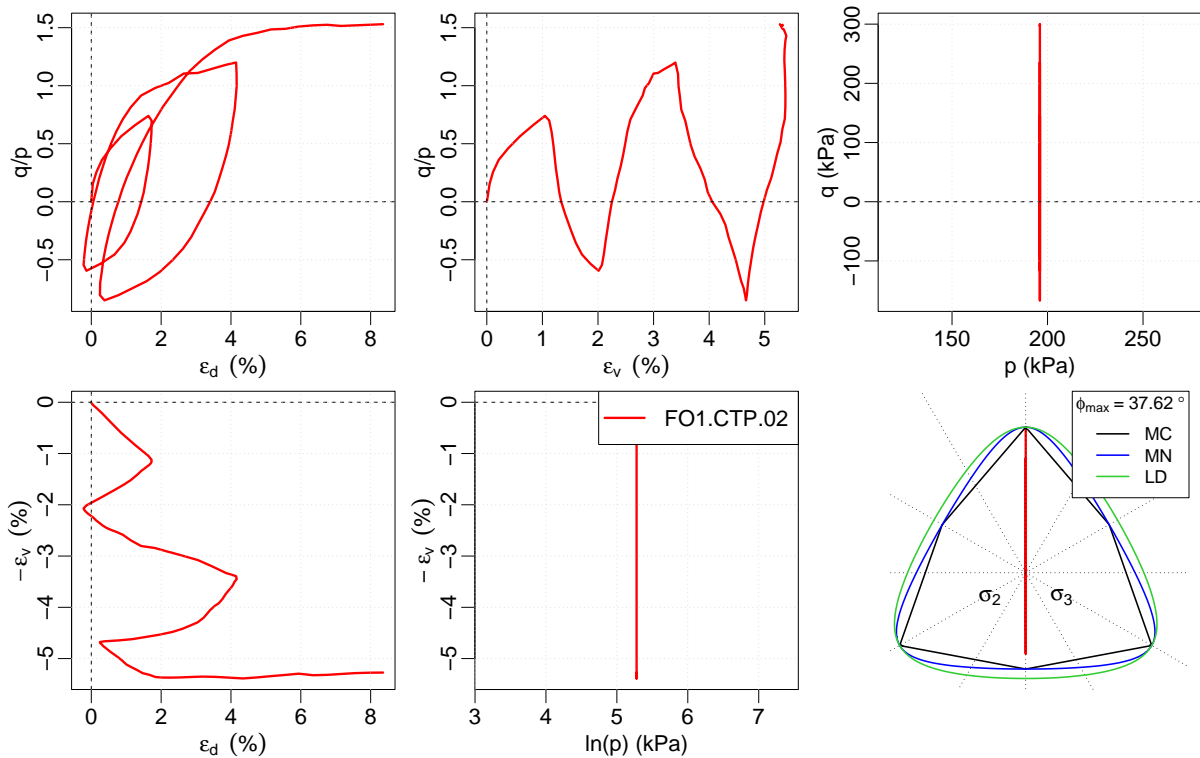
#### 4.3.1 ENSAIOS CÍCLICOS COM A ARGILA FUJINOMORI (FO1)

As Figuras 4.3 até 4.12 mostram os resultados apresentados por Chowdhury (1994) com a argila Fujinomori (FO1 - “Fujinomori Old” com OCR=1). Os cinco primeiros resultados, Figuras 4.3 até 4.7, correspondem aos ensaios com tensão média ( $p$ ) constante. Resultados de dois ensaios do tipo triaxial convencional (CTC) são apresentados nas Figuras 4.8 e 4.9. Por último, os resultados dos ensaios triaxiais cúbicos são mostrados nas Figuras 4.10 até 4.12.

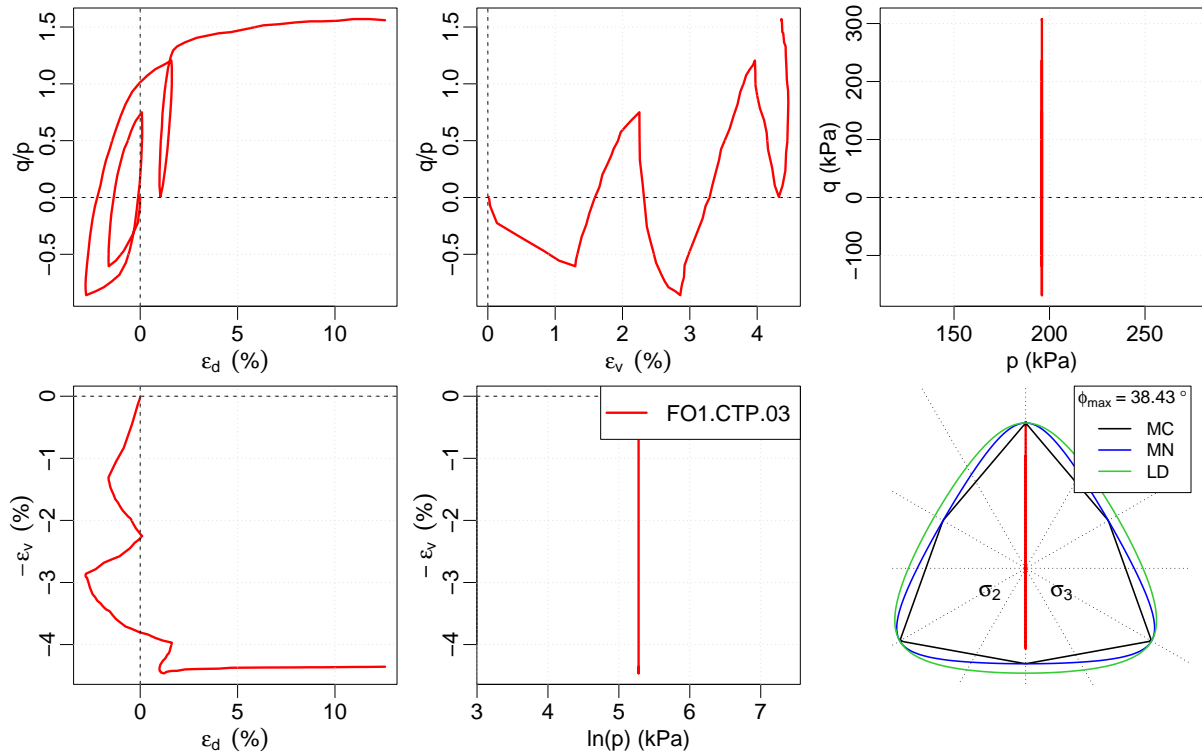
O ensaio FO1-CTP-01 (Figura 4.3) foi realizado com ciclos de compressão e extensão com amplitudes iguais e mostra o ganho de rigidez com o número dos ciclos; nota-se que a deformação volumétrica praticamente não varia após o número excessivo de ciclos de compressão-extensão-recompressão. As Figuras 4.4 e 4.5 mostram resultados dos ensaios FO1-CTP-02 e FO1-CTP-03 realizados com ciclos de amplitude crescente que parecem fazer com que a deformação volumétrica sempre aumente com os ciclos. As Figuras 4.6 e 4.7 mostram os resultados dos ensaios com um ciclo apenas (FO1-CTP-06 e FO1-CTP-07); no primeiro, o carregamento começa em compressão e no segundo em extensão. Nestas duas últimas figuras, nota-se um leve aumento de deformação volumétrica ao longo do descarregamento.



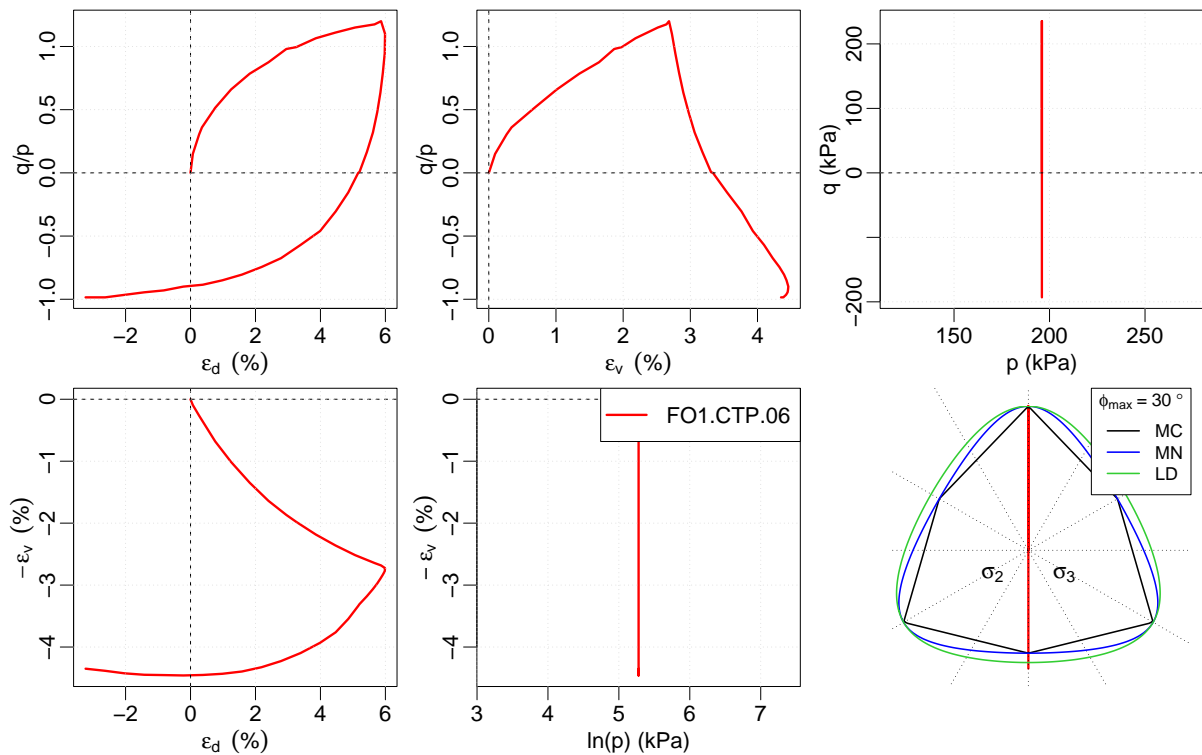
**Figura 4.3:** Resultados do ensaio **FO1-CTP-01** com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com  $p=392$  kPa constante.



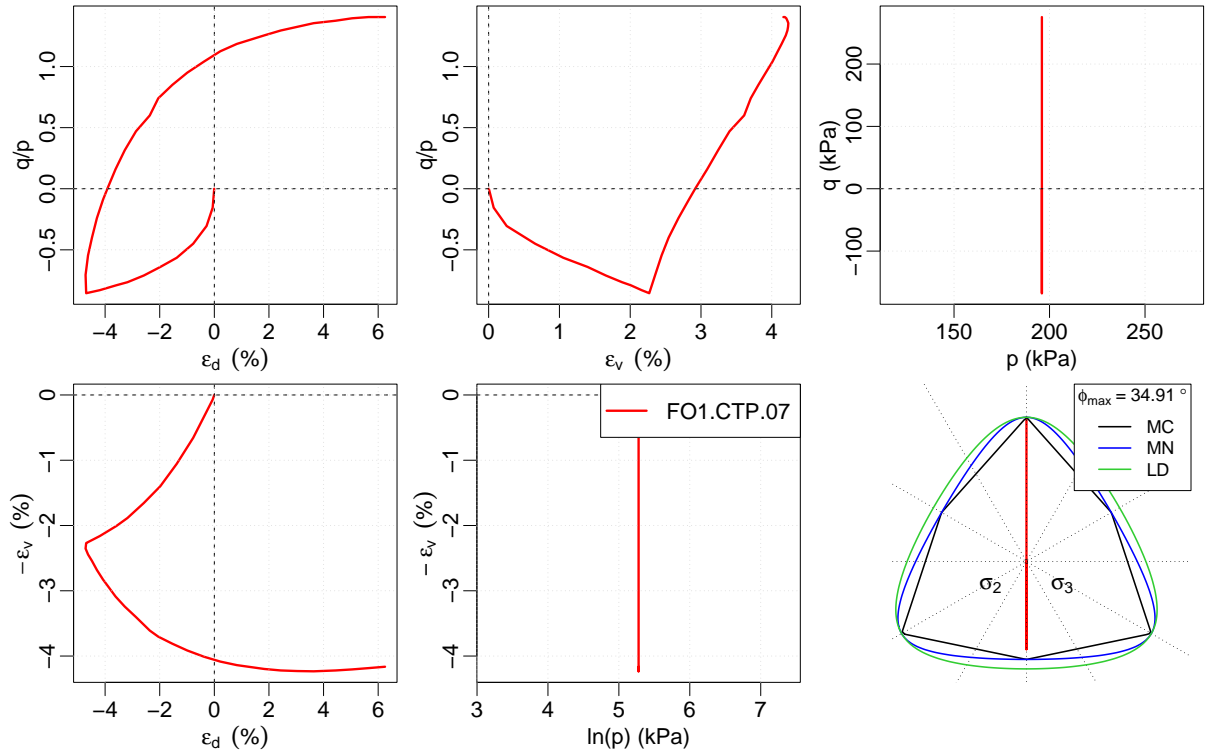
**Figura 4.4:** Resultados do ensaio **FO1-CTP-02** com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com  $p=196$  kPa constante.



**Figura 4.5:** Resultados do ensaio **FO1-CTP-03** com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com  $p=196$  kPa constante.

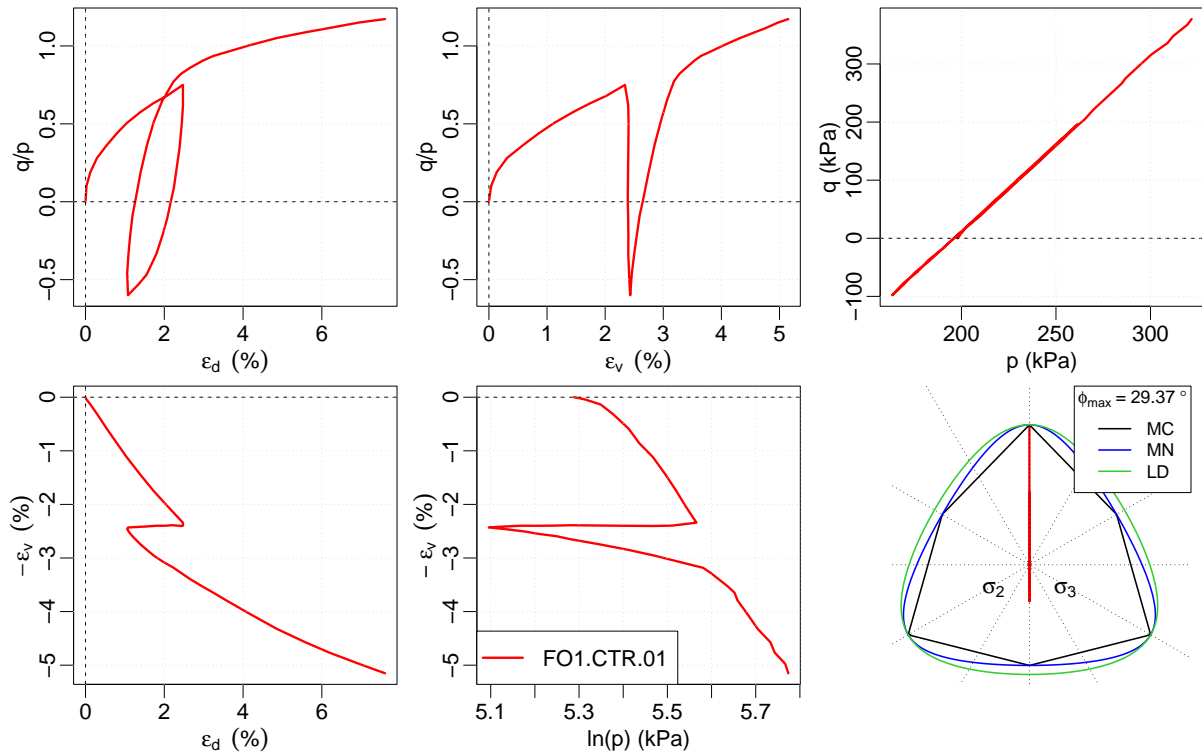


**Figura 4.6:** Resultados do ensaio **FO1-CTP-06** com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com  $p=196$  kPa constante.

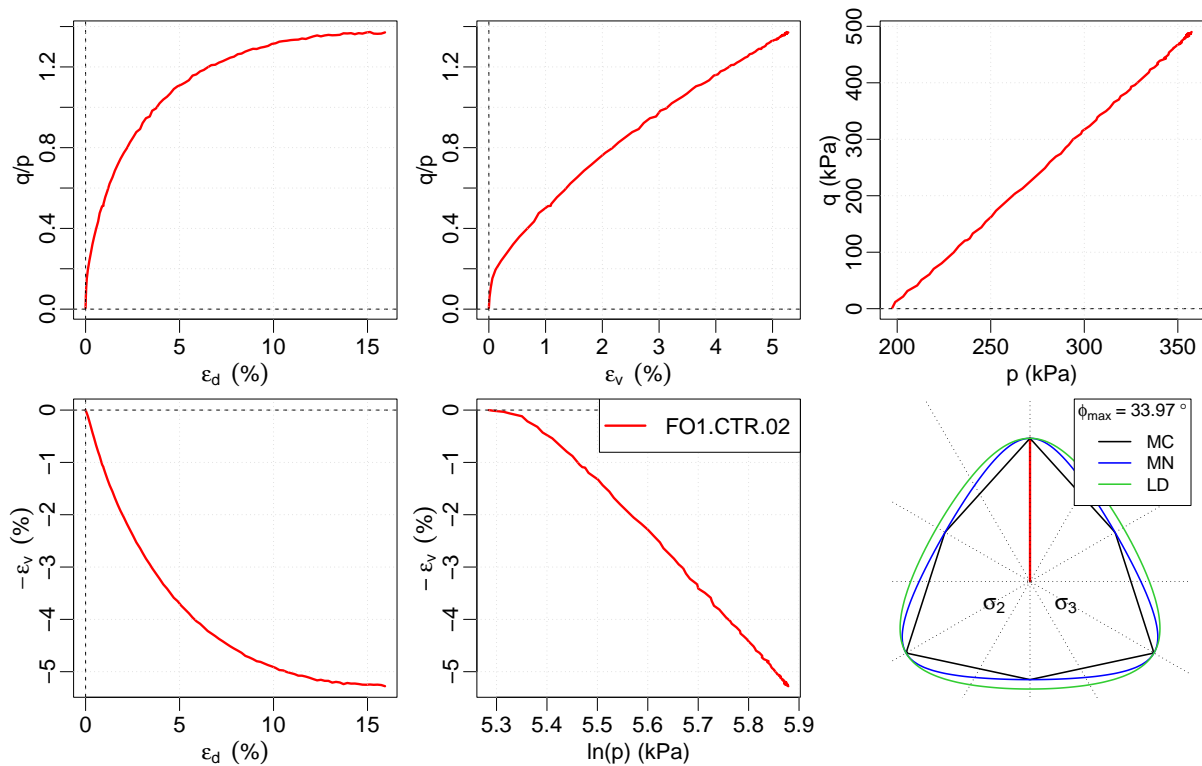


**Figura 4.7:** Resultados do ensaio **FO1-CTP-07** com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com  $p=196$  kPa constante.

As Figuras 4.8 e 4.9 mostram os resultados do tipo CTC, triaxiais convencionais com  $\dot{q}/\dot{p} = 3$  e a argila Fujinomori (FO1). O primeiro possui um ciclo com compressão seguido de descompressão e extensão. O segundo é do tipo monotônico e é útil para a calibração de parâmetros, pois é o mais simples de ser realizado, dentre os demais.

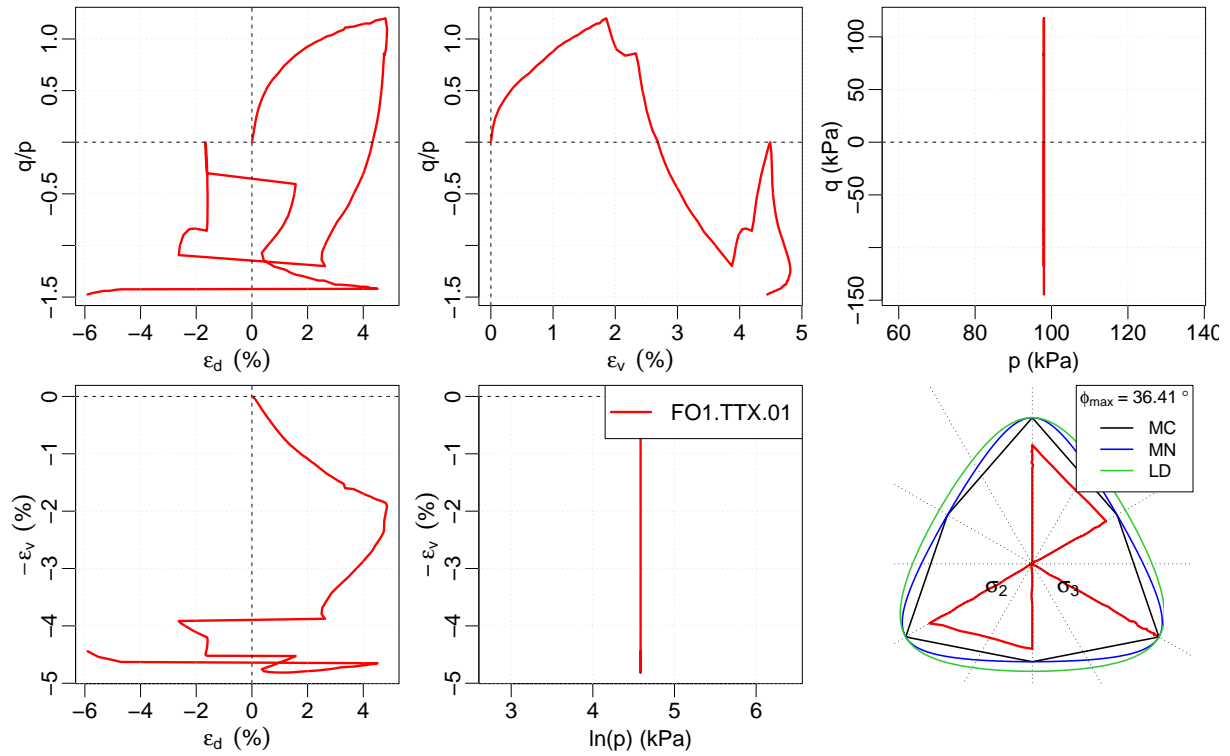


**Figura 4.8:** Resultados do ensaio **FO1-CTR-01** com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com  $\dot{q}/\dot{p} = 3$ .

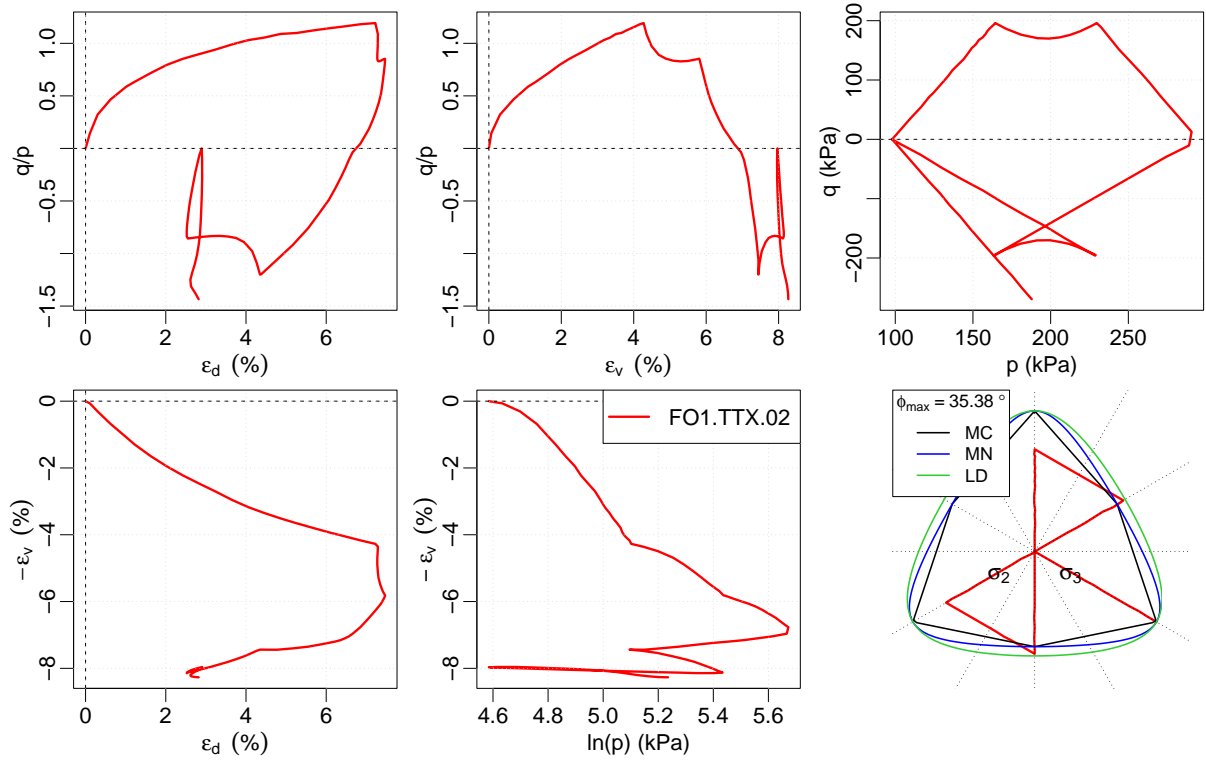


**Figura 4.9:** Resultados do ensaio **FO1-CTR-02** com a argila Fujinomori; Triaxial convencional com  $\dot{q}/\dot{p} = 3$ .

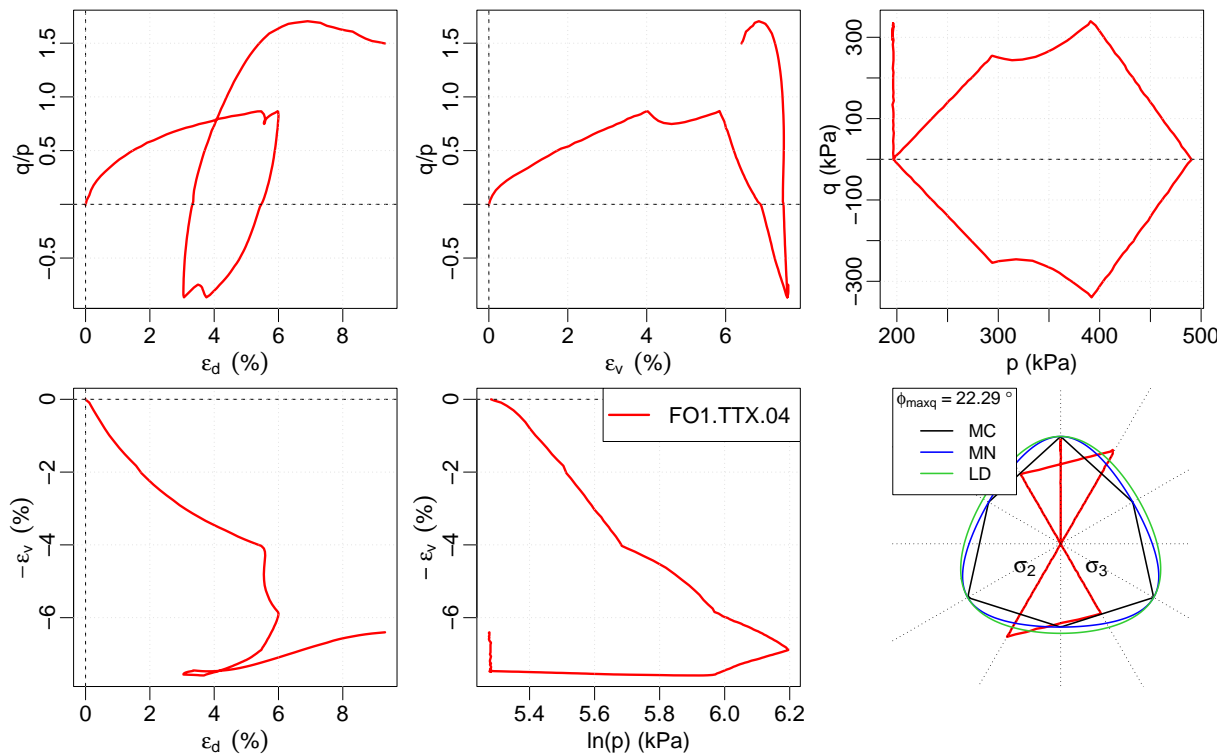
As Figuras 4.10 até 4.12 apresentam resultados de ensaios triaxiais verdadeiros (cúbicos), com diversas trajetórias de tensão e a argila Fujinomori (FO1). Também são cíclicos e possuem trajetórias que saem do plano de axissimetria com ângulos de Lode variando. Verifica-se que os ensaios com trajetórias tridimensionais são bastante complexos e, possivelmente, modelos matemáticos terão dificuldades em representá-los.



**Figura 4.10:** Resultados do ensaio **FO1-TTX-01** com a argila Fujinomori; Triaxial cúbico com  $p=98$  kPa.



**Figura 4.11:** Resultados do ensaio **FO1-TTX-02** com a argila Fujinomori; Triaxial cúbico com  $p$  e  $q$  variáveis.

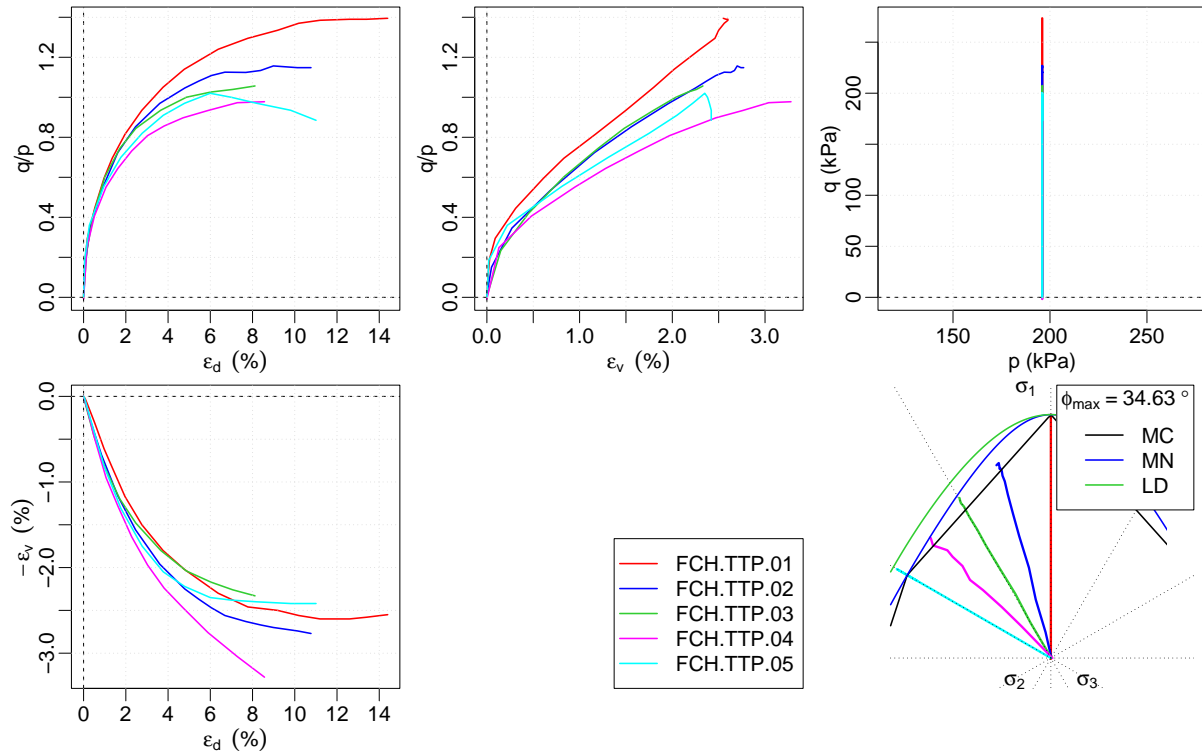


**Figura 4.12:** Resultados do ensaio **FO1-TTX-04** com a argila Fujinomori; Triaxial cúbico com  $p$  e  $q$  variáveis.



### 4.3.2 ENSAIOS MONOTÔNICOS COM A ARGILA FUJINOMORI (FCH)

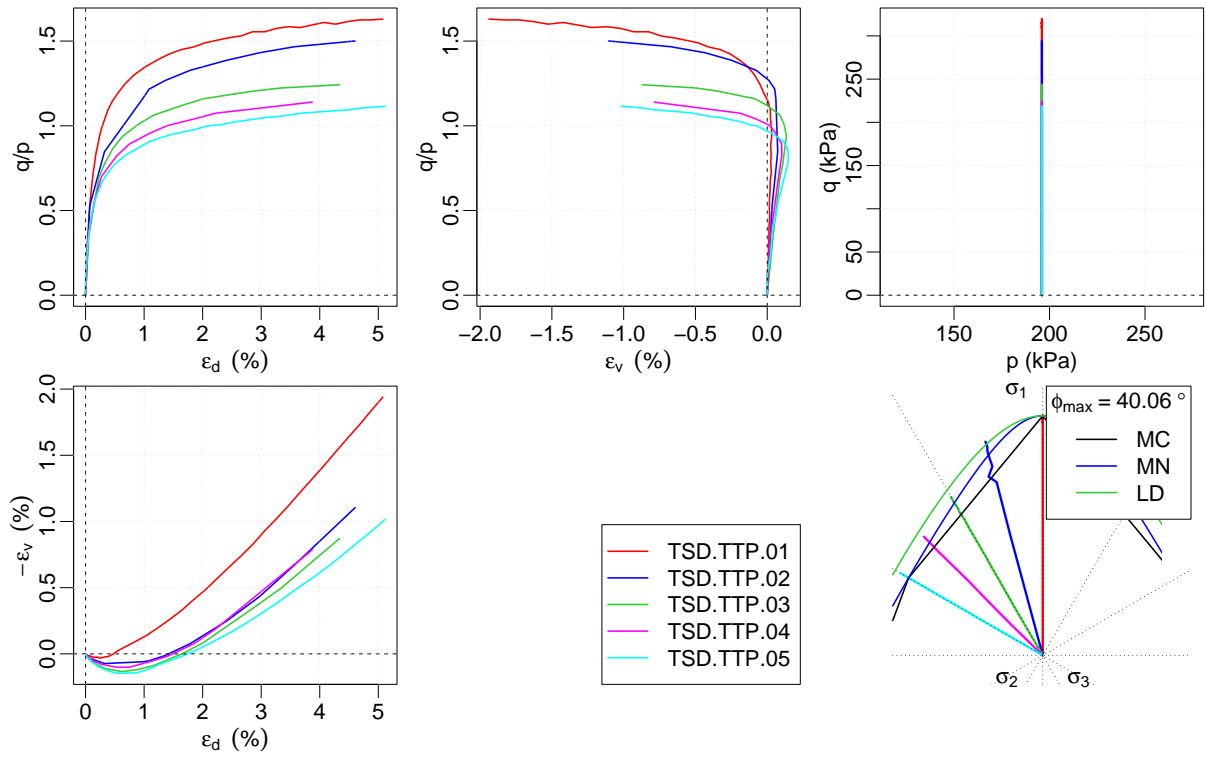
Resultados de ensaios monotônicos com diferentes valores de ângulo de Lode com a argila Fujinomori (FCH) são mostrados na Figura 4.13. Nestes, pode-se verificar a dependência da resistência com relação ao ângulo de Lode. Também se verifica que a deformabilidade depende do ângulo de Lode.



**Figura 4.13:** Resultados dos ensaios **FCH-TTP-{01,02,03,04,05}** com a argila Fujinomori; Triaxial cúbico com  $p=196$  kPa constante e vários valores do ângulo de Lode.

### 4.3.3 ENSAIOS MONOTÔNICOS COM A AREIA TOYOURA (TSD)

Por último, resultados de ensaios monotônicos com diferentes valores de ângulo de Lode são mostrados na Figura 4.14, com a areia Toyoura. Nestes, pode-se verificar a dependência da resistência com relação ao ângulo de Lode. Verifica-se, também, a dilatância positiva durante endurecimento, devido, provavelmente, a um estado volumétrico denso.



**Figura 4.14:** Resultados dos ensaios TSD-TTP-{01,02,03,04,05} com a areia Toyoura; Triaxial cúbico com  $p=196$  kPa constante e vários valores do ângulo de Lode.

# Capítulo 5

## CRITÉRIOS DE RUPTURA E SUPERFÍCIES DE PLASTIFICAÇÃO

A utilização de computadores no estudo do comportamento mecânico de obras de engenharia civil é hoje um requisito indispensável. Vários métodos de solução que podem ser descritos sob um fluxo ordenado de instruções são implementados em máquinas computadoras e utilizados em diversas análises. Com isso, a abordagem numérica computacional ganhou aceitação prática, tornando-se objeto de estudo científico no ambiente acadêmico. Dentre os métodos numéricos de solução de sistemas de equações parciais, o Método dos Elementos Finitos tornou-se bastante difundido entre acadêmicos e até mesmo profissionais em atuação prática.

Do ponto de vista da Mecânica do Contínuo, as interações mecânicas entre os corpos, regidas pelas leis do movimento, podem ser representadas matematicamente por um sistema algébrico de equações diferenciais. A construção desse sistema é possível mediante a elaboração de conceitos fundamentais como os tensores de tensão e de alongamento ou deformação. Os corpos analisados são separados em sistemas isolados, levando-se em conta as interações através da interface de contorno. Os corpos são simplificados por infinitas partículas que se movimentam ao longo do tempo. As relações entre as partículas são matematicamente idealizadas por intermédio da elaboração de Modelos Constitutivos. O objetivo geral das análises de comportamento mecânico é a previsão da situação da estrutura em momentos diferentes.

As estruturas poderão sofrer movimentos de corpo rígido, deformações e até mesmo ruptura. A verificação numérica desses fenômenos irá requisitar uma boa escolha leis constitutivas. Dentre elas, destacam-se os Critérios de Ruptura. No âmbito da engenharia de metais, os critérios de von Mises e Tresca são às vezes adotados. Para materiais granulares, como os solos, geralmente considera-se os critérios Mohr-Coulomb, Lade-Duncan e Matsuoka-Nakai. O critério Mohr-Coulomb tem grande aceitação entre os engenheiros, entretanto, considerando a implementação computacional, existe a desvantagem de as suas equações possuírem descontinuidade com relação às derivadas de primeira ordem. Caso seja aceito que a resistência em compressão e extensão sejam iguais àquelas sugeridas pelo

critério Mohr-Coulomb, pode-se convenientemente adotar o critério Matsuoka-Nakai que resulta em uma superfície contínua envolvendo o cone hexagonal de Mohr-Coulomb. Algumas vezes, o critério Lade-Duncan parece ser mais representativo, principalmente quando for necessário a previsão de uma resistência em extensão levemente superior àquela sugerida pelo critério Mohr-Coulomb.

O conceito chave para a dedução do critério de ruptura Matsuoka-Nakai é a definição do Plano Espacialmente Mobilizado. Esse conceito, proposto por Matsuoka & Nakai (1974), tem fundamento em diversos estudos do funcionamento micro-mecânico de materiais granulares. O Plano Espacialmente Mobilizado (SMP) é um conceito útil para auxiliar a determinação de quantidades relacionadas ao comportamento mecânico das partículas do material. Por isso, sua adoção em simulações numéricas de solos é de grande valia, tanto sob o ponto de vista de deformabilidade quanto de resistência.

Para materiais isotrópicos, a formulação apresentada por Sheng et al. (2000), cujo resultado fornece uma alternativa ao critério Matsuoka-Nakai, é reavaliada. Essa alternativa teve início com a equação apresentada em Argyris et al. (1974) e será denominada de critério “Argyris-Sheng et al.”.

Em seguida, um novo critério de ruptura que prevê resistência similar ao de Lade-Duncan é introduzido. Sua formulação parte da definição de um par de invariantes, cuja dedução é proveniente de algumas propriedades geométricas do SMP, quando visto no espaço das tensões principais ou Haigh-Westergard. Por último, mostra-se a utilização dos invariantes que permitem definir os critérios Drucker-Prager, Argyris-Sheng et al. e o novo critério na construção de superfícies de plastificação, a partir de um mesmo equacionamento. Os gradientes dessas superfícies são deduzidos de forma única e sua aplicação a problemas tridimensionais pode ser feita utilizando o conceito de auto-projetores.

## 5.1 FERRAMENTAL MATEMÁTICO

A ferramenta de maior utilidade na dedução das equações propostas neste trabalho é o conceito de tensores projetores. A forma apresentada por Brannon (2003a), que utiliza uma notação simples e direta para a representação dessas entidades é empregada. No Apêndice A, algumas definições necessárias ao entendimento das equações são resumidas.

Inicialmente, é importante lembrar que tensores são vetores, desde que a dimensão do espaço seja ajustada adequadamente. Assim, vários conceitos familiares aplicados aos vetores tridimensionais também poderão ser aplicados aos tensores como vetores em nove dimensões.

Uma operação útil em vetores (e tensores) é a de projeção, na qual um vetor (tensor) pode ser projetado na direção de outro de forma paralela e/ou perpendicular. No Apêndice B, detalhes da derivação das fórmulas de projeção são mostrados. As deduções estão bem apresentadas em Brannon (2000, 2002b). Brevemente, o tensor de segunda ordem  $\underline{\underline{P}}_n$  que

projeta um vetor qualquer  $\underline{x}$  na direção de outro vetor unitário  $\hat{\underline{n}}$  é obtido pela fórmula:

$$\underline{P}_n = \hat{\underline{n}} \otimes \hat{\underline{n}} \quad \text{ou, igualmente,} \quad \underline{P}_n = \hat{\underline{n}}\hat{\underline{n}} \quad (5.1)$$

O tensor de segunda ordem  $\underline{Q}_n$  que projeta o vetor  $\underline{x}$  no plano cuja normal é  $\hat{\underline{n}}$  será, então:

$$\underline{Q}_n = \underline{I} - \underline{P}_n = \underline{I} - \hat{\underline{n}} \otimes \hat{\underline{n}} \quad (5.2)$$

em que  $\underline{I}$  representa o tensor (simétrico) identidade de segunda ordem.

Um tensor simétrico de segunda ordem pode ser representado, alternativamente, em um sistema com coordenadas equivalentes aos seus autovalores e base de acordo com seus autovetores (unitários) (Apêndice C). Com os autovalores  $\lambda_i$  e autovetores unitários  $\hat{\underline{v}}_i$  pode-se, então, encontrar a decomposição espectral de um tensor  $\underline{a}$  de segunda ordem pela fórmula:

$$\underline{a} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \hat{\underline{v}}_k \otimes \hat{\underline{v}}_k = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \underline{P}_k = \lambda_k \underline{P}_k \quad (\text{soma implícita para } k) \quad (5.3)$$

O produto  $\underline{P}_k = \hat{\underline{v}}_k \otimes \hat{\underline{v}}_k$  resulta em um tensor de segunda ordem simétrico, denominado autoprojeto (Brannon, 2003a) ou bases para autovalores (“eigenvalue-bases”) (Miehe, 1997). Apesar de nem sempre ser possível encontrar autovetores únicos, os autoprojetores serão sempre únicos (Brannon, 2003a; Bařar & Weichert, 2000) e podem ser obtidos analiticamente (Malvern, 1969; Miehe, 1997; Bařar & Weichert, 2000; Hartmann, 2003; Brannon, 2003a). Esse conceito pode ser generalizado para tensores de quarta ordem, para os quais podem ser definidos um conjunto de autotensores.

Em modelagem constitutiva, os autoprojetores auxiliam na obtenção de gradientes de campos escalares como, por exemplo, as funções de plastificação. Dado o campo escalar  $\psi(\sigma_k)$ , em que  $\sigma_k$  são os valores principais (autovalores) do tensor de segunda ordem simétrico  $\underline{\sigma}$ , seu gradiente pode ser encontrado pela seguinte fórmula:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\sigma}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial \underline{\sigma}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_k} \underline{P}_k \quad \text{em que} \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{P}_k \quad (5.4)$$

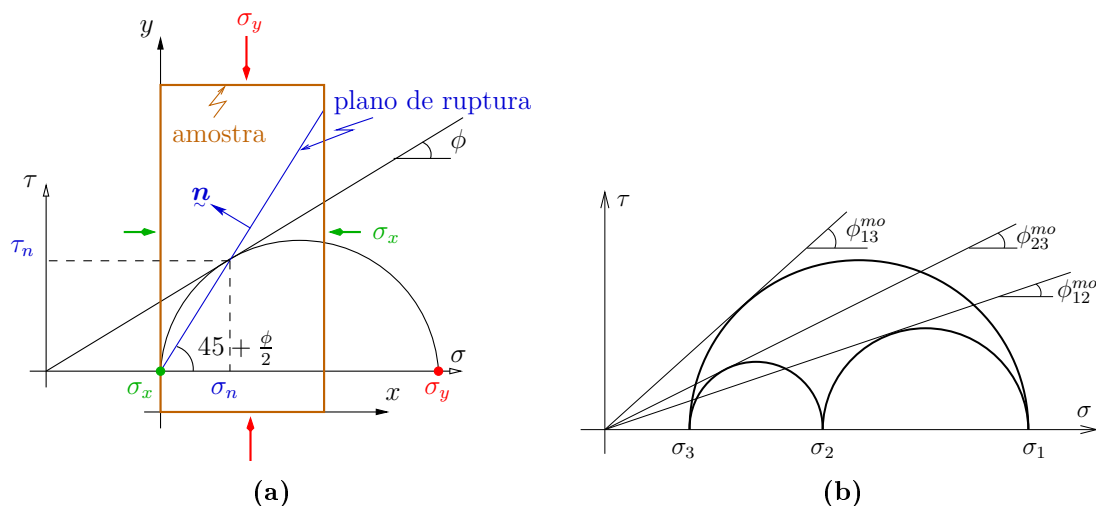
## 5.2 BREVE REVISÃO DO CONCEITO DE PLANO ESPACIALMENTE MOBILIZADO (SMP)

Por meio de experimentos em materiais granulares, como os solos, submetidos a carregamentos que causam tensões com componentes de valores desiguais, observa-se que, parece existir uma faixa, ou banda, em que ocorrem as maiores deformações cisalhantes. Nesta faixa, eventualmente, ocorrerá a ruptura. Em três dimensões, o Plano Espacialmente Mobilizado (“Spatially Mobilized Plane”), introduzido por Matsuoka & Nakai (1974), é

considerado um desses planos e pode auxiliar na representação do comportamento mecânico de materiais granulares (Oda & Iwashita, 1999).

Inicialmente, apresenta-se uma situação bidimensional, na qual uma amostra de solo ideal está sujeita ao estado de tensões mostrado na Figura 5.1a. Este estado é ilustrado graficamente, na mesma figura, traçando-se o círculo de Mohr, correspondente ao estado bidimensional de tensão. A partir do conceito da envoltória de Mohr-Coulomb, em que  $\phi$  é o ângulo de atrito, considera-se que o plano de ruptura na amostra terá inclinação de  $45^\circ + \phi/2$ , com relação ao plano de aplicação da tensão principal maior, que, no espaço da amostra (x-y-z), equivale ao plano horizontal. A normal  $\hat{n}$  a este plano, geralmente, pode ser encontrada achando seus componentes com relação a um sistema de coordenadas espectral (1-2-3) com bases paralelas às direções principais e com escalas correspondentes às tensões principais.

Em duas dimensões, o plano ( $45^\circ + \phi/2$ ) ilustrado na Figura 5.1a possui razão  $\tau/\sigma$  máxima e que, provavelmente, irá ditar o comportamento de resistência de materiais formados por agrupamento de partículas, como os materiais granulares. Em contrapartida, à medida que a coesão do material aumenta, como nos metais, menor será a influência do ângulo de atrito fazendo com que o plano de máxima mobilização seja definido apenas pelo valor máximo de tensão cisalhante. Neste caso, a inclinação de tal plano terá praticamente valor igual a  $45^\circ$ .



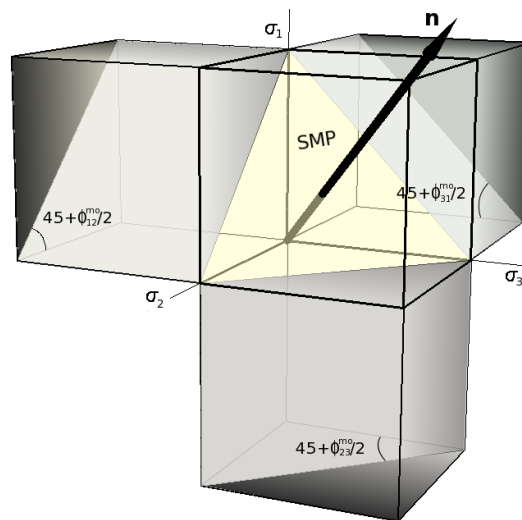
**Figura 5.1:** Planos mobilizados em duas e três dimensões: (a) Plano mobilizado e envoltórias Mohr-Coulomb em duas dimensões com  $\sigma_3$  na horizontal, como em ensaios convencionais triaxiais; (b) Envoltórias Mohr-Coulomb em três dimensões. Ângulos de atrito mobilizados para cada par de tensão principal.

Se os três componentes principais de tensão forem diferentes entre si, três planos podem ser definidos, considerando a combinação de três pares de valores principais, que são utilizados na elaboração de envoltórias do tipo Mohr-Coulomb para três ângulos (mobilizados) de atrito (Figura 5.1b). A questão que surge é: Qual desses planos terá maior

influência no comportamento de resistência e deformabilidade do solo? Com o pensamento de que o plano mais influente será uma composição das inclinações dos três planos mobilizados (Figura 5.2), definidos para  $\phi = \phi_{12}^{mo}$ ,  $\phi = \phi_{23}^{mo}$  e  $\phi = \phi_{31}^{mo}$ , Matsuoka & Nakai (1974) introduziram o Plano Espacialmente Mobilizado (Figura 5.2), cujos componentes da sua normal são obtidos com relação ao sistema de coordenadas espectral (1-2-3), conforme indica a seguinte fórmula:

$$\hat{n}_{smp} = \sqrt{I_3/I_2} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \quad \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \quad \frac{1}{\sqrt{\sigma_3}} \right]_{(1-2-3)}^T, \quad \text{ou seja,} \quad n_{i(1-2-3)} = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_i}} \quad (5.5)$$

em que  $I_2$  e  $I_3$  indicam o segundo e terceiro invariantes do tensor de tensões, respectivamente, e  $\sigma_i$  são as tensões principais.



**Figura 5.2:** Três planos mobilizados e Plano Espacialmente Mobilizado (SMP).

A normal ao SMP varia com as tensões, ou seja, é induzida pelos componentes de tensão. Caso o estado de tensões seja isotrópico, essa normal irá coincidir com a normal ao plano octaédrico no espaço Haigh-Westergard. Um pequeno desvio da situação hidrostática fará com que a normal ao SMP sofra uma rotação de certa forma, indicando uma possível anisotropia induzida pelo estado de tensões. Enquanto o plano octaédrico pode ser adequado para materiais puramente coesivos, o SMP certamente é mais adequado a materiais com comportamento friccional.

### 5.3 CRITÉRIOS DE RUPTURA

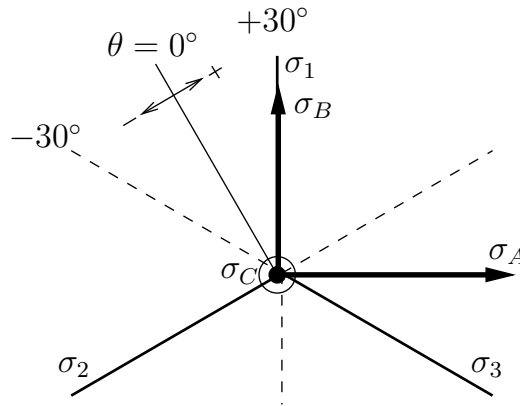
Critérios de ruptura são, praticamente, os primeiros a serem adotados quando da elaboração ou utilização de um modelo elastoplástico. A seguir, alguns critérios convencionais são brevemente lembrados e um novo, que sugere uma forma alternativa ao critério Lade-Duncan, será introduzido.

Para alguns materiais, a envoltória de resistência possui uma secção curva, quando projetada no plano de axis-simetria. Entretanto, apenas as equações que resultam em critérios lineares, naquele plano, serão consideradas. A superfície de resistência terá a forma de um cone deformado, quando desenhada no espaço das tensões principais ou Haigh-Westergard. As comparações serão feitas observando-se as secções no plano II das envoltórias de resistência.

Inicialmente, define-se um ângulo  $\theta$  análogo ao de Lode, como ilustrado na Figura 5.3, que pode ser obtido em função dos componentes de tensão pela seguinte equação:

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( \frac{9\sqrt{2} \det \underline{\underline{s}}}{\sqrt{3} \|\underline{\underline{s}}\|^3} \right) \quad \text{em que} \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}}{3} \underline{\underline{I}} \quad (5.6)$$

Na Eq. (5.6),  $\det \underline{\underline{s}}$  representa o determinante da matriz contendo os componentes do tensor  $\underline{\underline{s}}$  e  $\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}$  corresponde ao traço do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$ .



**Figura 5.3:** Plano II e ângulo  $\theta$  análogo ao de Lode;  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  e  $\sigma_C$  formam um sistema de coordenadas no qual  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$  estão no plano II e  $\sigma_C$  é alinhado como o eixo hidrostático.

## 5.4 TRESCA, VON MISES E MOHR-COULOMB

Tresca e von Mises são dois critérios que foram inicialmente aplicados a materiais puramente coesivos, como os metais. O primeiro, Tresca, diz que o princípio de ruptura (ou plastificação) se iniciará quando um valor máximo de tensão cisalhante for atingido. O segundo, von Mises, foi inicialmente elaborado considerando a teoria da energia de distorção e afirma que a plastificação acontecerá quando o segundo invariante do tensor desviador de tensões se aproximar de certo valor. As secções octaédricas desses critérios são mostradas na Figura 5.4a, para uma tensão média  $p=196$  kPa. Nesta figura, as envoltórias dos critérios de Tresca e von Mises foram determinadas de forma que as resistências em compressão correspondessem às mesmas calculadas com o critério Mohr-Coulomb. Esses dois critérios não consideram o aumento da resistência do material quando a pressão de compressão isotrópica aumenta. Assim, possuem linhas paralelas ao eixo hidrostático



quando suas superfícies são projetadas no plano de axis-simetria (Figura 5.5).

O critério de Mohr-Coulomb tem caráter friccional e é bem conhecido entre os engenheiros geotécnicos. Sua expressão, para materiais sem coesão, pode ser definida em termos dos valores principais de tensão, conforme a seguinte equação:

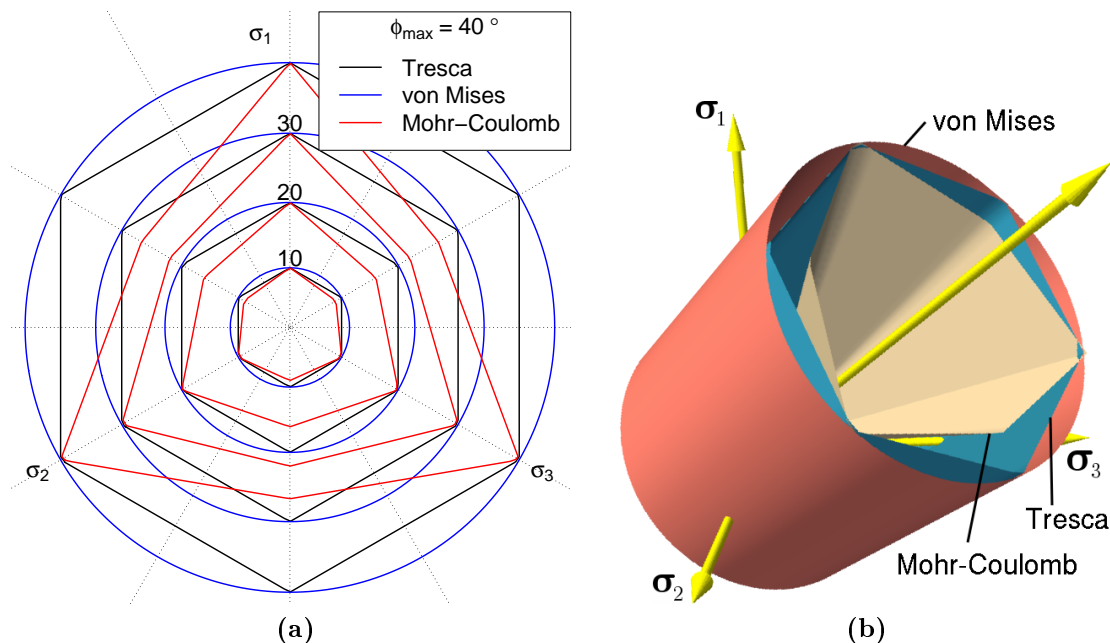
$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \sin \phi \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3) \quad (5.7)$$

em que  $\phi$  é o ângulo de atrito (constante) igual em compressão e extensão. Na Figura 5.4 mostra-se uma secção octaédrica da superfície obtida pelo critério Mohr-Coulomb, para uma tensão média  $p$  igual a 196 kPa e ângulo de atrito  $\phi$  igual a  $36.87^\circ$ . Na Figura 5.6, mostram-se vistas tridimensionais no espaço Haigh-Westergard do critério Mohr-Coulomb.

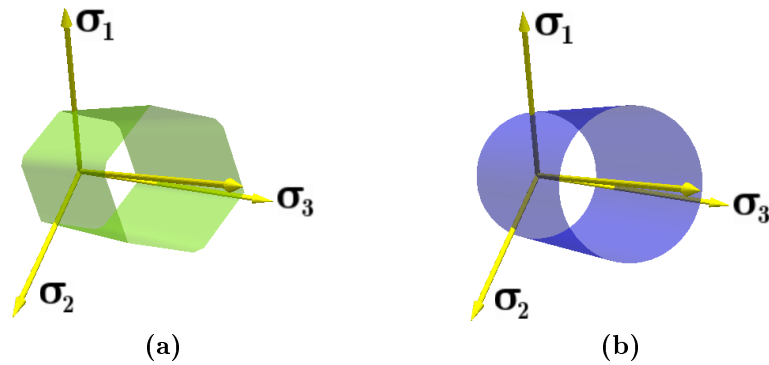
Define-se a quantidade  $\eta_{max}$  como a razão entre a distância máxima  $\sigma_{B(max)}$  ao longo do eixo  $\sigma_B$  (compressão), do hexágono irregular de Mohr-Coulomb até a origem do sistema de coordenadas  $(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C)$  no plano  $\Pi$  com a distância ao longo do eixo  $\sigma_C$  desde a origem do espaço de tensões principais até o plano octaédrico (Figura 5.3). Assim  $\eta_{max}$  é dado pela seguinte equação:

$$\eta_{max} = \frac{\sigma_{B(max)}}{\sigma_C} = \frac{2\sqrt{2} \sin \phi_{max}}{3 - \sin \phi_{max}} \quad (5.8)$$

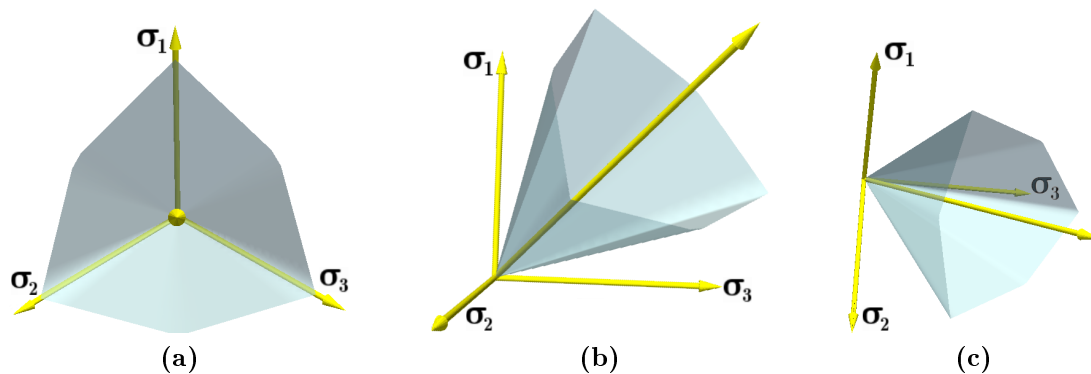
Na Figura 5.4b, mostram-se as envoltórias no espaço Haigh-Westergard dos critérios de Tresca, von Mises e Mohr-Coulomb.



**Figura 5.4:** Critérios de Tresca, von Mises e Mohr-Coulomb. Os números 10, 20 e 30 correspondem aos ângulos de atrito, em graus, usados no cálculo da resistência, sem coesão, segundo o critério Mohr-Coulomb. (a) Curvas envoltórias no plano  $\Pi$ ; (b) Superfícies envoltórias no espaço Haigh-Westergard.



**Figura 5.5:** Critérios de Tresca e von Mises no espaço de Haigh-Westergard: (a) Critério de Tresca; (b) Critério de von Mises.



**Figura 5.6:** Critério de Mohr-Coulomb no espaço Haigh-Westergard: (a) Vista do plano  $\Pi$ ; (b) Vista tridimensional; (c) Vista tridimensional.

## 5.5 LADE-DUNCAN

O critério de Lade-Duncan (Lade & Duncan, 1973) é representado no espaço Haigh-Westergard por uma superfície intermediária às superfícies de Drucker-Prager e Matsuoka-Nakai e que coincide com essas duas últimas em compressão. A forma matemática deste critério pode ser dada em termos dos invariantes de tensão, como sugere a fórmula:

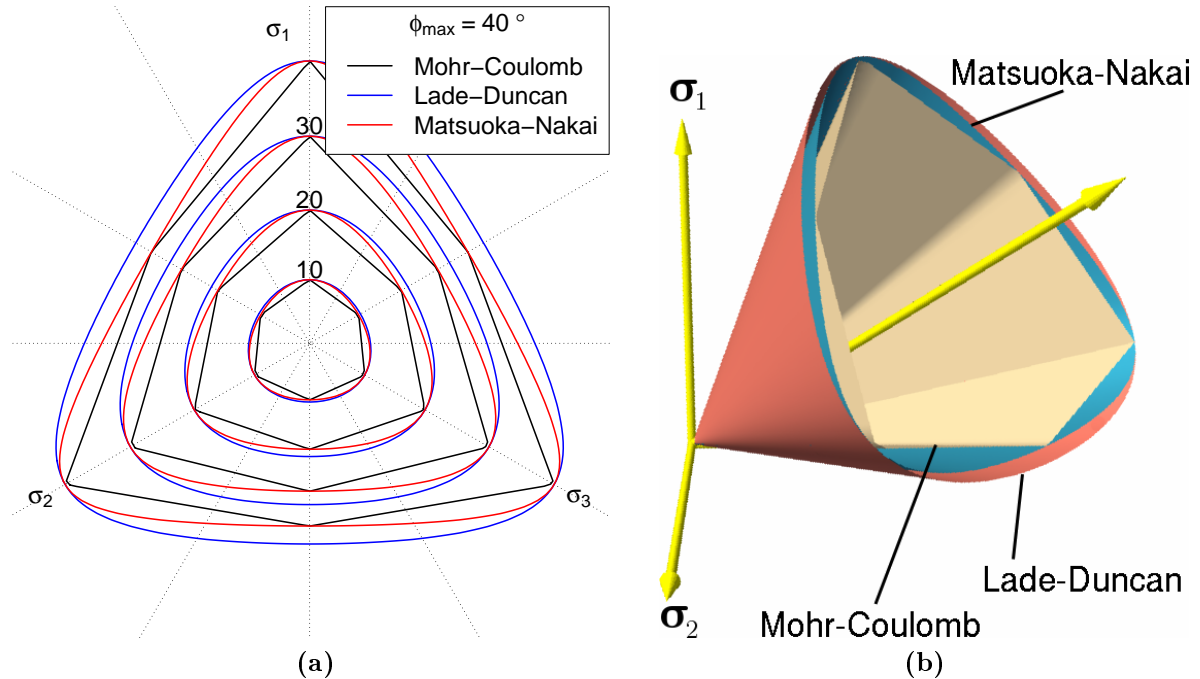
$$\frac{I_1^3}{I_3} = k_{LD} \quad (5.9)$$

em que  $k_{LD}$  é uma constante, função do ângulo de atrito e que pode ser obtida por:

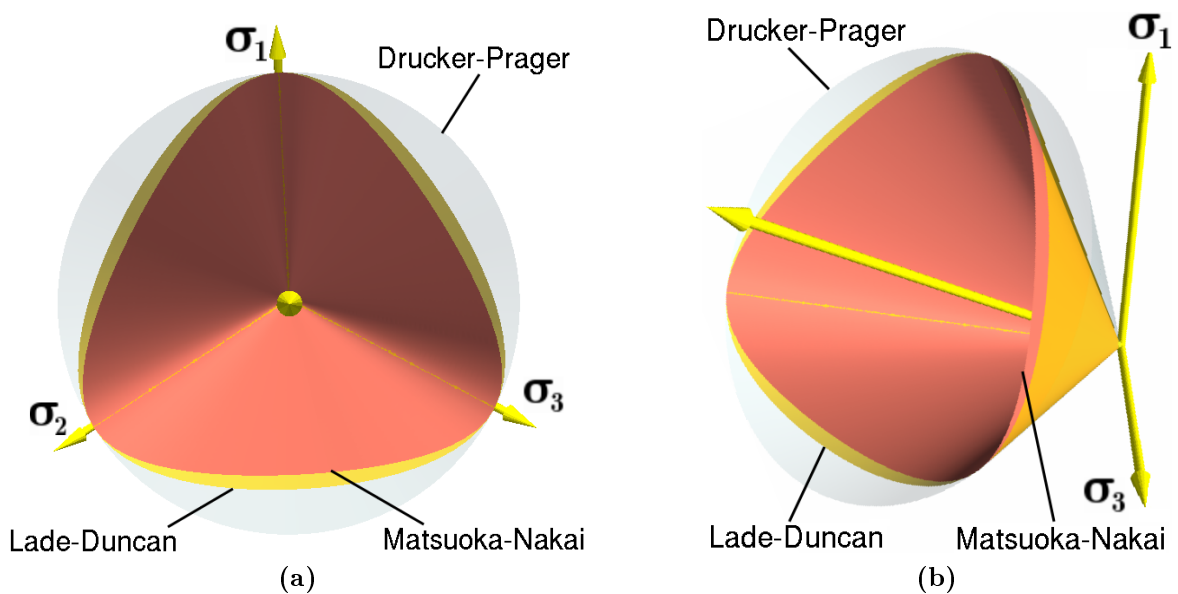
$$k_{LD} = \frac{54}{\sqrt{2}\eta_{max}^3 - 3\eta_{max}^2 + 2} = \frac{(3 - \sin \phi_{max})^3}{(1 + \sin \phi_{max})(1 - \sin \phi_{max})^2} \quad (5.10)$$

A Figura 5.7a mostra algumas secções octaédricas da superfície obtida com o critério Lade-Duncan para um ângulo de atrito igual a  $36.87^\circ$  e tensão média  $p$  constante igual a 196 kPa. Na mesma figura, comparam-se as curvas relativas aos critérios Mohr-Coulomb

e Matsuoka-Nakai. Na Figura 5.8 os critérios Drucker-Prager, Lade-Duncan e Matsuoka-Nakai são ilustrados. Verifica-se que a resistência em extensão prevista pelo critério Lade-Duncan é um pouco superior que as equivalentes resistências previstas pelos critérios Matsuoka-Nakai e Mohr-Coulomb.



**Figura 5.7:** Critérios Mohr-Coulomb, Lade-Duncan e Matsuoka-Nakai. Os números 10, 20 e 30 correspondem aos ângulos de atrito, em graus, usados no cálculo da resistência, sem coesão, segundo o critério Mohr-Coulomb: (a) Curvas envoltórias no plano  $\Pi$ ; (b) Superfícies envoltórias no espaço Haigh-Westergard ( $\phi = 26^\circ$ ).



**Figura 5.8:** Critérios Drucker-Prager (cinza), Lade-Duncan (dourado) e Matsuoka-Nakai (vermelho): (a) Vista do plano  $\Pi$ ; (b) Vista tridimensional.

## 5.6 MATSUOKA-NAKAI

O conceito do Plano Espacialmente Mobilizado (SMP) é bastante simples. Sua demonstração parte da consideração do estado de tensões em uma partícula dentro de um corpo contínuo. Esse estado de tensões é representado matematicamente por um tensor de segunda ordem que possui nove componentes (seis independentes) com valores medidos com relação a um sistema de representação. De acordo com o conceito de decomposição espectral, existe um sistema de coordenadas cujos valores são os autovalores do tensor de tensões e a base é dada pelos autovetores unitários desse tensor (sistema espectral). Os autovalores são as tensões principais, que, geralmente, são apresentadas em forma do gráfico de Mohr (Figura 5.1b).

O critério Matsuoka-Nakai é obtido considerando a existência de um plano paralelo ao SMP, passando pelo corpo contínuo. Com os componentes segundo ao sistema espectral, a normal ao SMP pode ser encontrada segundo a Eq. 5.5. Neste plano, o vetor ( $\underline{\underline{t}}^{smp}$ ) de tensões (“stress vector”) é calculado segundo a fórmula de Cauchy:

$$\underline{\underline{t}}^{smp} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{\underline{n}}}_{smp} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}_{(1-2-3)} \begin{Bmatrix} n_1^{smp} \\ n_2^{smp} \\ n_3^{smp} \end{Bmatrix}_{(1-2-3)} \quad (5.11)$$

As projeções normal e ortogonal do vetor  $\underline{\underline{t}}^{smp}$  ao longo da normal ao SMP terão magnitudes iguais à tensão normal e cisalhante atuando no SMP, respectivamente. Assim, considerando os invariantes característicos  $I_{1\sigma}$ ,  $I_{2\sigma}$  e  $I_{3\sigma}$  do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$ , os seguintes invariantes são obtidos:

$$\sigma_{smp} = \|\underline{\underline{t}}^{smp}\| = \frac{3I_{3\sigma}}{I_{2\sigma}} \quad (5.12)$$

$$\tau_{smp} = \sqrt{\|\underline{\underline{t}}^{smp}\|^2 - \sigma_{smp}^2} = \frac{\sqrt{I_{1\sigma}I_{2\sigma}I_{3\sigma} - 9I_{3\sigma}^2}}{I_{2\sigma}} \quad (5.13)$$

Analogamente ao critério Mohr-Coulomb, que advoga que a resistência máxima ao cisalhamento é dada para uma razão constante entre tensão cisalhante e tensão normal, o critério Matsuoka-Nakai diz que a resistência máxima, tridimensional, será obtida quando a razão  $\tau_{smp}$  e  $\sigma_{smp}$  atingir um certo valor, ou seja,

$$\frac{\tau_{smp}}{\sigma_{smp}} = \frac{I_{1\sigma}I_{2\sigma}}{I_{3\sigma}} = k_{MN} \quad (5.14)$$

em que  $k_{MN}$  é uma constante, função do ângulo de atrito e dada por:

$$k_{MN} = \frac{9\sqrt{2}\eta_{max} + 18}{2 - 2\eta_{max}^2 + \sqrt{2}\eta_{max}} = 9 + 8 \tan^2 \phi_{max} \quad (5.15)$$

A Figura 5.7a mostra algumas secções octaédricas da superfície obtida com o critério Matsuoka-Nakai para um ângulo de atrito igual a  $36.87^\circ$  e tensão média  $p$  constante igual a 196 kPa. A Figura 5.7b mostra a visualização tridimensional das superfícies dos critérios Mohr-Coulomb, Lade-Duncan e Matsuoka-Nakai no espaço Haigh-Westergard.

## 5.7 ARGYRIS-SHENG ET AL.

Argyris et al. (1974) propuseram uma equação que, quando multiplicada à razão  $q/p$  máxima, permite simular a variação da resistência com o ângulo de Lode, para um par de valores constantes de ângulo de atrito e tensão média. Entretanto, tal equação possui uma pequena limitação, na qual o ângulo de atrito máximo, para que a secção curva octaédrica seja convexa, é de  $22^\circ$ . Sheng et al. (2000) propuseram uma alternativa similar à equação de Argyris que fornece curvas convexas para ângulos de atrito de até  $48.59^\circ$ . Essa alternativa é representada pela seguinte equação:

$$M(\theta) = M_{max} \left( \frac{2\omega}{1 + \omega - (1 - \omega) \sin 3\theta} \right)^{1/4} \quad (5.16)$$

em que,

$$M_{max} = \left( \frac{q}{p} \right)_{max} = \frac{6 \sin \phi_{max}}{3 - \sin \phi_{max}} \quad \text{e} \quad \omega = \left( \frac{3 - \sin \phi_{max}}{3 + \sin \phi_{max}} \right)^4 \quad (5.17)$$

O ângulo  $\theta$  que aparece na Eq. (5.16) pode ser obtido a partir da Eq. (5.6). Assim, o critério aqui denominado “Argyris-Sheng et al.” será dado para a razão  $q/p$  constante, com relação ao ângulo de atrito, mas variável com o ângulo de Lode, conforme:

$$\frac{q}{p} = M(\theta) = M_{max} \left( \frac{2\omega}{1 + \omega - (1 - \omega) \sin 3\theta} \right)^{1/4} \quad (5.18)$$

Uma vantagem em se utilizar a formulação acima, em contraposição à adoção do critério Matsuoka-Nakai, é a maior facilidade em se obter as derivadas dos invariantes, com relação ao tensor de tensões. Geralmente, as seguintes derivadas são necessárias ao se implementar modelos elastoplásticos em computadores:

$$\frac{dp}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{I}}{3} \quad , \quad \frac{dq}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\mathbf{s}}{2q} \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1.5}{q^2 \cos 3\theta} \left( \frac{3}{q} \text{dev } \mathbf{s}^2 - \sin 3\theta \mathbf{s} \right) \quad (5.19)$$

em que  $\text{dev } \mathbf{s}^2$  é o tensor desviador do quadrado do tensor desviador de tensões, ou seja,

$$\text{dev } \mathbf{s}^2 = \mathbf{s} \bullet \mathbf{s} - \frac{\text{tr } \mathbf{s} \bullet \mathbf{s}}{3} \mathbf{I}, \quad \text{em que} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{tr } \boldsymbol{\sigma}}{3} \mathbf{I} \quad (5.20)$$

A derivada da razão  $M(\theta)$  com relação ao ângulo  $\theta$  também será necessária. Essa derivada

é igual a

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} = \frac{0.75M(1-\omega)\cos 3\theta}{1+\omega-(1-\omega)\sin 3\theta} \quad (5.21)$$

A Figura 5.9a mostra algumas secções octaédricas da superfície obtida com o critério Argyris-Sheng et al. para um ângulo de atrito igual a  $36.87^\circ$  e tensão média  $p$  constante igual a 196 kPa. Na mesma figura, comparam-se as curvas relativas aos critérios Mohr-Coulomb e Matsuoka-Nakai. Verifica-se que as curvas geradas com o critério Matsuoka-Nakai e com o critério Argyris-Sheng et al. são praticamente coincidentes, para todos os ângulos de atrito apresentados.

## 5.8 DRUCKER-PRAGER

Nesta secção, o critério Drucker-Prager será deduzido de forma diferente daquela comumente utilizada. Para isso, considera-se o conceito de tensores projetores (Brannon, 2003a). Inicialmente, no espaço Haigh-Westergard, definem-se um vetor  $\underline{\sigma}$  com componentes iguais às três tensões principais e outro vetor desviador  $\underline{s}$  com componentes iguais aos três valores principais de tensão desvio, conforme equações a seguir:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}_{(1-2-3)} \quad \text{e} \quad \underline{s} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 \\ 2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1 \\ 2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 \end{Bmatrix}_{(1-2-3)} \quad (5.22)$$

No espaço Haigh-Westergard, a normal ao plano octaédrico possui os seguintes componentes, com relação ao sistema espectral (1-2-3):

$$\hat{\mathbf{n}}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{(1-2-3)}^T \quad (5.23)$$

Do ponto de vista geométrico, um vetor  $\underline{x}$  qualquer neste espaço poderá ser decomposto em parte paralela e perpendicular ao plano octaédrico. Para isso, basta realizar a multiplicação (contração simples) dos seguintes tensores projetores pelo vetor  $\underline{x}$ :

$$\underline{\mathbf{P}}_{oct} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}_{(1-2-3)} \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{Q}}_{oct} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}_{(1-2-3)} \quad (5.24)$$

em que  $\underline{\mathbf{P}}_{oct}$  projeta o vetor paralelamente à normal ao plano octaédrico e  $\underline{\mathbf{Q}}_{oct}$  ao longo deste plano.

Assim, definem-se dois vetores, um ( $\underline{\mathbf{p}}_{oct}$ ) paralelo à normal ao plano octaédrico e outro ( $\underline{\mathbf{q}}_{oct}$ ) ortogonal à esta normal, e que podem ser calculados de acordo com as seguintes

expressões:

$$\underline{\underline{p}}_{oct} = \underline{\underline{P}}_{oct} \bullet \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{q}}_{oct} = \underline{\underline{Q}}_{oct} \bullet \underline{\underline{\sigma}} \quad (5.25)$$

Verifica-se facilmente que:

$$\underline{\underline{p}}_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}_{(1-2-3)} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{q}}_{oct} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_{(1-2-3)} = \underline{\underline{s}} \quad (5.26)$$

É importante lembrar que os vetores  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\underline{\underline{s}}$ ,  $\underline{\underline{p}}_{oct}$  e  $\underline{\underline{q}}_{oct}$  e suas magnitudes são invariantes, dependendo somente do estado de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Uma forma similar para a elaboração de critérios de ruptura foi apresentada por Desai (1980), na qual apenas os invariantes do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  são empregados na construção de um polinômio que representa a função de ruptura.

Em seguida, dois invariantes são definidos: o primeiro ( $P_{oct}$ ) é determinado pela norma Euclidiana do vetor  $\underline{\underline{p}}_{oct}$  e outro, representado por  $Q_{oct}$ , pela norma do vetor  $\underline{\underline{q}}_{oct}$  (Eq. 5.27).

$$P_{oct} = \|\underline{\underline{p}}_{oct}\| = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} = p\sqrt{3} \quad \text{e} \quad Q_{oct} = \|\underline{\underline{q}}_{oct}\| = \sqrt{\underline{\underline{s}} \bullet \underline{\underline{s}}} = q\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (5.27)$$

Assim, o critério Drucker-Prager poderá ser expresso em função dos invariantes  $P_{oct}$  e  $Q_{oct}$ , bastando-se adotar a razão

$$\frac{Q_{oct}}{P_{oct}} = k_{DP}, \quad \text{em que} \quad k_{DP} = \eta_{max} = \frac{2\sqrt{2} \sin \phi_{max}}{3 - \sin \phi_{max}}, \quad (5.28)$$

para os estados correspondentes ao limite de ruptura. A Eq. (5.28) permite uma interpretação geométrica clara, observando-se que a razão  $Q_{oct}/P_{oct}$  define o ângulo de abertura de um cone com raio igual a  $Q_{oct}$  e altura igual a  $P_{oct}$ , traçado no espaço Haigh-Westergard.

O plano formado pelos invariantes  $P_{oct}$  e  $Q_{oct}$  possui isomorfismo com relação ao espaço Haigh-Westergard. Por exemplo, o produto interno  $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}}$  é igual a  $P_{oct}^2 + Q_{oct}^2$  e o vetor normal a uma certa superfície de plastificação desenhada neste plano será normal à mesma; isto não ocorre no plano  $q$  versus  $p$ . Essa característica facilita, por exemplo, tanto o desenvolvimento de superfícies de plastificação e potencial plástico quanto o entendimento de esquemas de integração do tipo retorno radial/oblíquo (Brannon, 2000).

Com os invariantes isomórficos  $P_{oct}$  e  $Q_{oct}$ , o critério “Argyris-Sheng et al.” poderá ser reescrito como a seguir:

$$\frac{Q_{oct}}{P_{oct}} = M(\theta) = M_{max} \left( \frac{2\omega}{1 + \omega - (1 - \omega) \sin 3\theta} \right)^{1/4} \quad (5.29)$$

Entretanto, o valor de  $M_{max}$  para o cálculo de  $M(\theta)$  será agora:

$$M_{max} = \eta_{max} = \frac{2\sqrt{2} \sin \phi_{max}}{3 - \sin \phi_{max}} \quad (5.30)$$

Desta forma, uma interpretação geométrica análoga àquela feita para o critério Drucker-Prager poderá ser feita, notando, entretanto, que a abertura do cone (deformado) no espaço Haigh-Westergard será função do ângulo de Lode.

## 5.9 NOVO CRITÉRIO DE RUPTURA (SMP-BASED)

Com a mesma idéia aplicada à dedução anterior do critério Drucker-Prager, apresenta-se um novo critério de ruptura que fornece resultado similar ao Lade-Duncan, entretanto, com dedução matemática dependendo apenas de propriedades geométricas no espaço Haigh-Westergard e considerando exclusivamente o conceito de Plano Espacialmente Mobilizado (SMP). Este novo critério será chamado de SMP-based.

Inicialmente, define-se um tensor  $\underline{\underline{P}}_{smp}$  projetor de segunda ordem que projeta qualquer vetor presente no espaço Haigh-Westergard segundo a direção da normal  $\hat{\underline{n}}_{smp}$  ao SMP. Este projetor é obtido pela seguinte fórmula:

$$\underline{\underline{P}}_{smp} = \hat{\underline{n}}_{smp} \otimes \hat{\underline{n}}_{smp} = \frac{I_3}{I_2} \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & 1/\sqrt{\sigma_1\sigma_2} & 1/\sqrt{\sigma_1\sigma_3} \\ 1/\sqrt{\sigma_1\sigma_2} & 1/\sigma_2 & 1/\sqrt{\sigma_2\sigma_3} \\ 1/\sqrt{\sigma_1\sigma_3} & 1/\sqrt{\sigma_2\sigma_3} & 1/\sigma_3 \end{pmatrix}_{(1-2-3)} \quad (5.31)$$

O tensor que projeta qualquer vetor perpendicularmente a normal  $\hat{\underline{n}}_{smp}$  é dado por:

$$\underline{\underline{Q}}_{smp} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}_{smp} \quad (5.32)$$

Assim, a partir da decomposição do vetor  $\underline{\sigma}$  em parte normal e paralela ao plano SMP, pode-se obter os seguintes vetores:

$$\underline{\underline{p}}_{smp} = \underline{\underline{P}}_{smp} \bullet \underline{\sigma} = \frac{I_1}{I_3} (\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3}) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\sigma_1} \\ 1/\sqrt{\sigma_2} \\ 1/\sqrt{\sigma_3} \end{pmatrix}_{(1-2-3)} \quad (5.33)$$

$$\underline{\underline{q}}_{smp} = \underline{\underline{Q}}_{smp} \bullet \underline{\sigma} = \underline{\sigma} - \underline{\underline{p}}_{smp} \quad (5.34)$$

As normas euclidianas dos vetores  $\underline{\underline{p}}_{smp}$  e  $\underline{\underline{q}}_{smp}$  permitem definir as seguintes medidas invariantes:

$$P_{smp} = \left\| \underline{\underline{p}}_{smp} \right\| = \sqrt{\frac{I_3}{I_2}} (\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3}) \quad (5.35)$$



e

$$Q_{smp} = \|\underline{\mathbf{q}}_{smp}\| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - P_{smp}^2} \quad (5.36)$$

Analogamente ao critério Drucker-Prager, utiliza-se a seguinte expressão para a representação da resistência máxima:

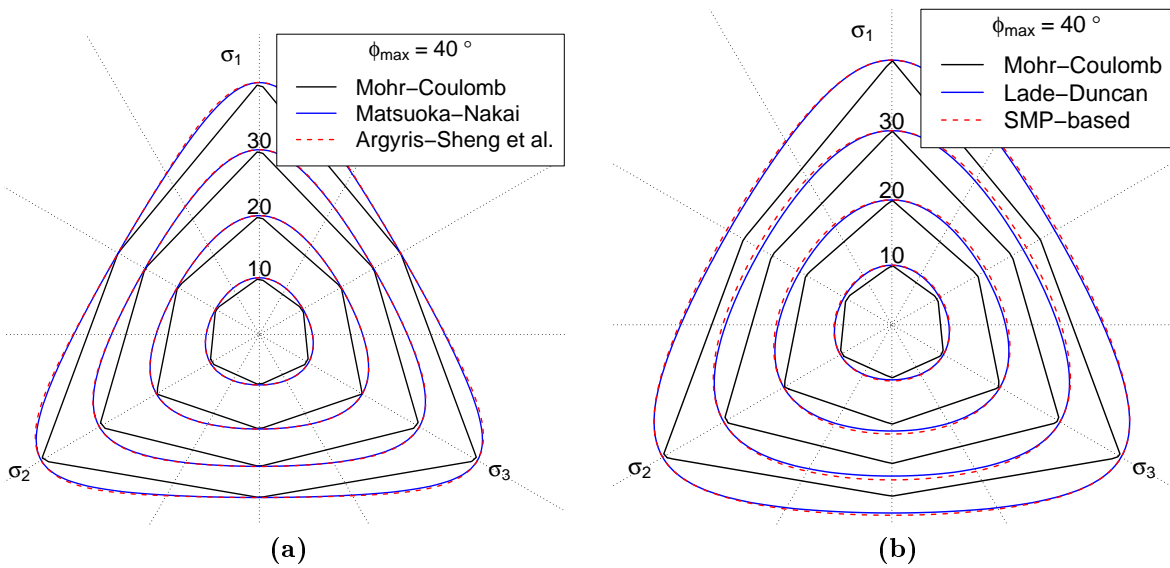
$$\frac{Q_{smp}}{P_{smp}} = k_{novo}, \quad \text{em que} \quad k_{novo} = \sqrt{\frac{\eta_{max}^2 + 1}{(k_1 + 2k_2)^2 k_3^2}} - 1 \quad (5.37)$$

e as seguintes constantes foram definidas em função apenas do ângulo de atrito:

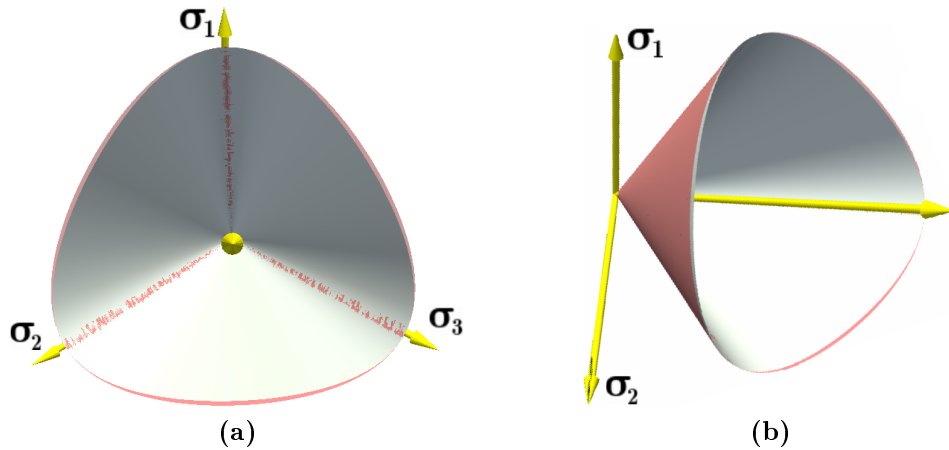
$$k_1 = \sqrt{\frac{2\eta_{max} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - \eta_{max}}{\sqrt{6}}} \quad \text{e} \quad k_3 = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}\eta_{max} - 2\eta_{max}^2}{3\sqrt{3}(\sqrt{2}\eta_{max} + 2)}} \quad (5.38)$$

A definição da Eq. (5.37) possui interpretação similar àquela feita para o critério Drucker-Prager. Qual seja, a razão  $Q_{smp}/P_{smp}$  define o ângulo de abertura de um cone (deformado) com raio igual a  $Q_{smp}$  e altura igual a  $P_{smp}$ , traçado no espaço Haigh-Westergard. Entretanto o raio  $Q_{smp}$  varia com o ângulo de Lode, levando em conta a influência da tensão principal intermediária.

Com o auxílio das Figuras 5.9b e 5.10, verifica-se que este novo critério possui secção octaédrica similar à mesma obtida com o critério Lade-Duncan. No entanto, o novo critério é obtido por uma expressão similar à do critério Drucker-Prager, por meio dos invariantes  $\underline{\mathbf{P}}_{smp}$  e  $\underline{\mathbf{Q}}_{smp}$  que permitem a elaboração de superfícies de plastificação com a mesma forma octaédrica deste critério, como será apresentado a seguir.



**Figura 5.9:** Comparação entre critérios de ruptura. Os números 10, 20 e 30 correspondem aos ângulos de atrito, em graus, usados no cálculo da resistência, sem coesão, segundo o critério Mohr-Coulomb: (a) Comparação entre os critérios Matsuoka-Nakai e Argyris-Sheng et al; (b) Comparação entre os critérios Lade-Duncan e SMP-based.



**Figura 5.10:** Critérios SMP (prata) e Lade-Duncan (vermelho): (a) Vista do plano  $\Pi$ ; (b) Vista tridimensional.

## 5.10 SUPERFÍCIES DE PLASTIFICAÇÃO

A teoria da plasticidade prevê uma superfície fechada (convexa) cujo interior agrupa os estados de tensão correspondentes ao regime elástico. Geralmente essa superfície, denominada de superfície de plastificação, quando seccionada pelo plano octaédrico, possui uma forma similar à secção octaédrica da superfície preconizada pelo critério de ruptura. Em modelos para materiais isotrópicos, apenas as tensões principais são utilizadas na definição da superfície de plastificação. Uma lei de fluxo é considerada para se definir a direção das deformações plásticas. Para isso, uma superfície potencial plástico é introduzida servindo apenas para a determinação dessas direções. Em alguns modelos, a superfície potencial plástico é idêntica à superfície de plastificação.

Inicialmente, considera-se a seguinte equação de uma elipse, num plano de abscissa  $P$  e ordenada  $Q$ :

$$\left(\frac{P - P_C}{L}\right)^2 + \left(\frac{Q}{\mu L}\right)^2 = 1 \quad (5.39)$$

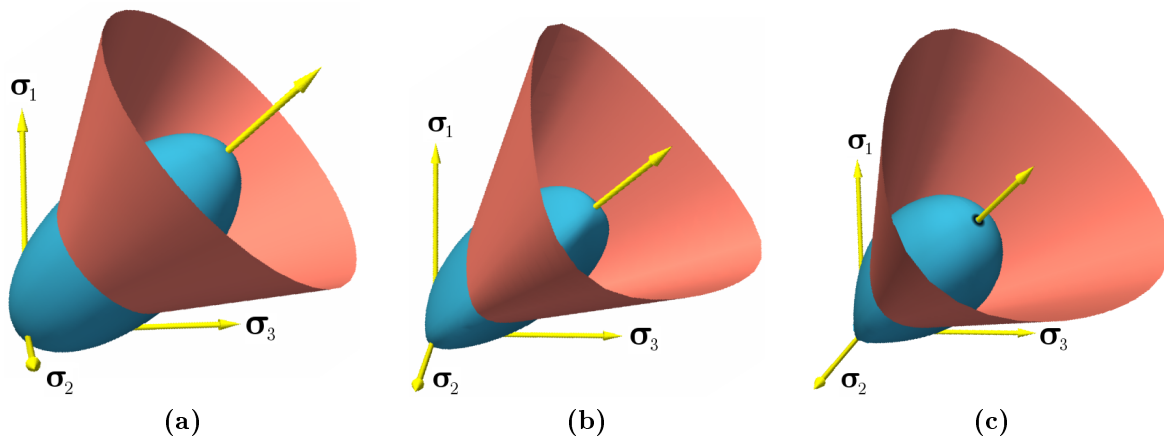
em que  $P_C$  corresponde ao centro da elipse,  $L$  à distância do centro a qualquer extremidade da elipse e  $\mu$  à razão  $Q/P$  no ponto de máxima ordenada  $Q$ .

Nesta seção, mostra-se como uma simples equação de um elipsóide (Eq. 5.39) pode ser utilizada na construção de superfícies de plastificação/potencial plástico com secção octaédrica possuindo forma similar aos critérios Drucker-Prager, Matsuoka-Nakai e Lade-Duncan. Para isto, as coordenadas  $P$  e  $Q$  pertinentes à equação que define tal elipsóide são substituídas pelos invariantes  $P_{oct}$ ,  $Q_{oct}$ ,  $P_{smp}$  e  $Q_{smp}$ , conforme combinações apresentadas na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1:** Substituição das coordenadas  $P$  e  $Q$  e coeficiente  $\mu$  necessária à definição das superfícies com secções octaédrica similares aos critérios de ruptura Drucker-Prager, Matsuoka-Nakai e Lade-Duncan.

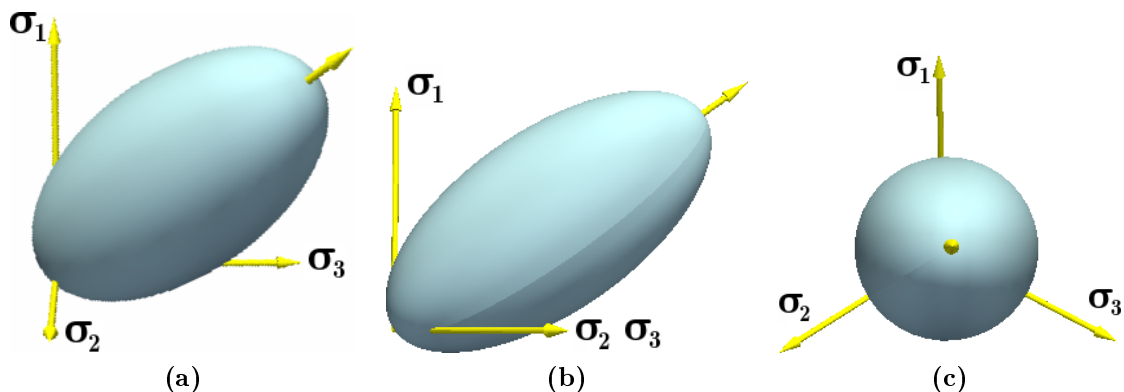
| Secção octaédrica do elipsóide | Critério de ruptura  | $P$       | $Q$       | $\mu$       | Eq.  |
|--------------------------------|----------------------|-----------|-----------|-------------|------|
| Drucker-Prager                 | Drucker-Prager       | $P_{oct}$ | $Q_{oct}$ | $k_{DP}$    | 5.28 |
| Matsuoka-Nakai                 | Argyris-Sheng et al. | $P_{oct}$ | $Q_{oct}$ | $M(\theta)$ | 5.29 |
| Novo critério                  | Novo                 | $P_{smp}$ | $Q_{smp}$ | $k_{novo}$  | 5.37 |

A Figura 5.11 mostra, no espaço das tensões principais, as envoltórias de resistência e superfícies de plastificação obtidas com a Eq. (5.39) e as equações da Tabela 5.1.

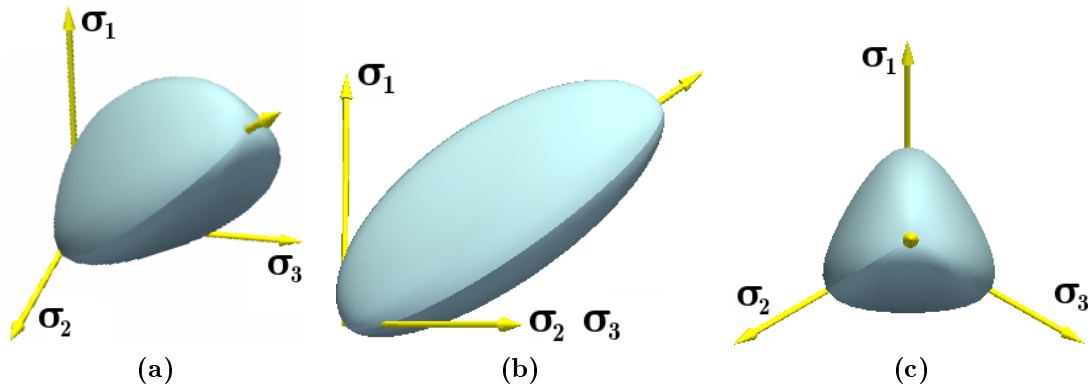


**Figura 5.11:** Superfícies de plastificação com secção de formato similar ao critério de ruptura: (a) Superfície de plastificação com  $\phi = 26^\circ$ ,  $P = P_{oct}$ ,  $Q = Q_{oct}$  e  $\mu = \eta_{max}$  e critério Drucker-Prager; (b) Superfície de plastificação com  $\phi = 26^\circ$ ,  $P = P_{oct}$ ,  $Q = Q_{oct}$  e  $\mu = M(\theta)$  e critério Argyris-Sheng et al.; (c) Superfície de plastificação com  $\phi = 26^\circ$ ,  $P = P_{smp}$ ,  $Q = Q_{smp}$  e  $\mu = k_{novo}$  e o novo critério.

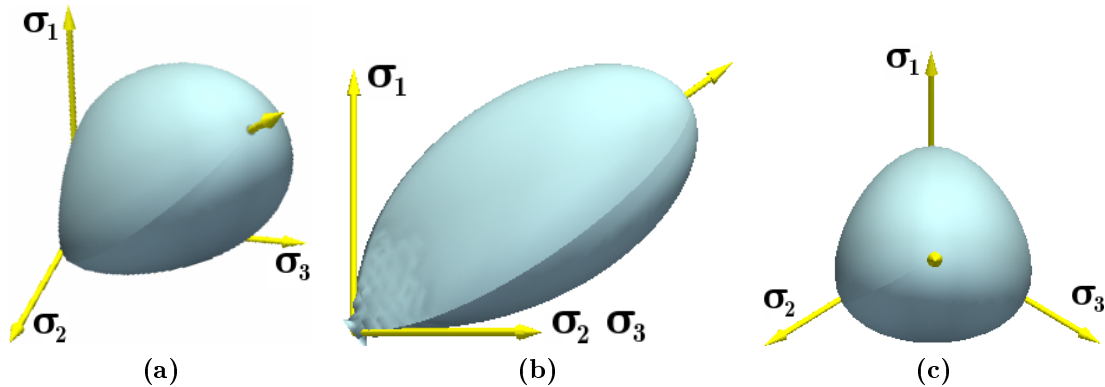
As Figuras 5.12, 5.13 e 5.14 mostram as formas das superfícies obtidas.



**Figura 5.12:** Superfície com secção octaédrica similar ao critério Drucker-Prager (ângulo de atrito:  $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico.

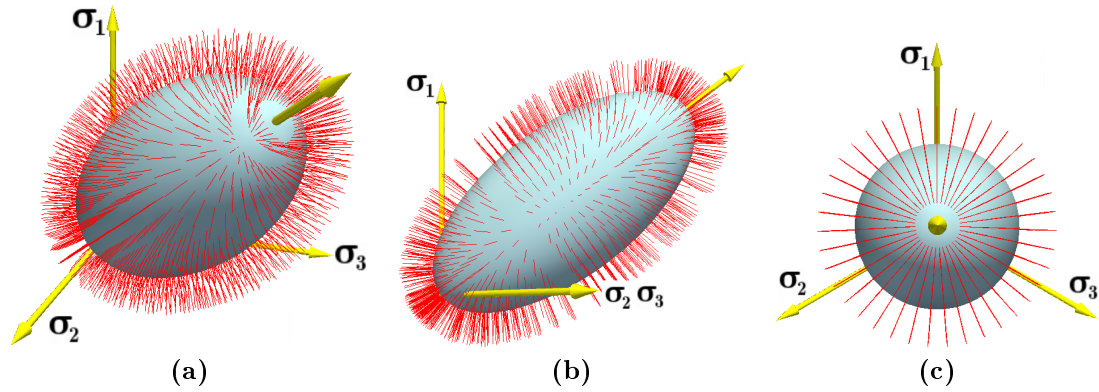


**Figura 5.13:** Superfície com secção octaédrica similar ao critério Argyris-Sheng et al. (ângulo de atrito:  $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico.

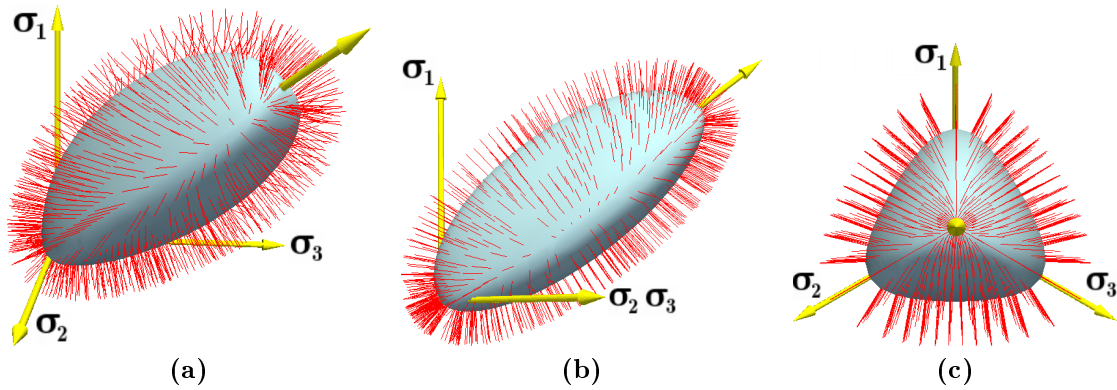


**Figura 5.14:** Superfície com secção octaédrica similar ao critério SMP-based (ângulo de atrito:  $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico.

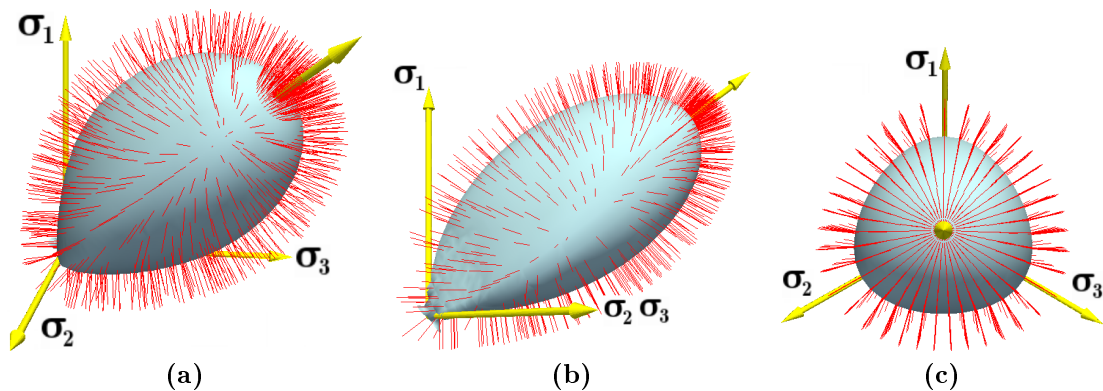
A lei constitutiva introduz a relação entre todos os seis componentes de tensão, ou incrementos, e os seis de deformação, ou incrementos. Os gradientes das superfícies de plastificação e potencial plástico deverão ser referidos aos seis componentes de tensões. Assim, as derivadas de um campo escalar com relação a um tensor de segunda ordem deverão ser encontradas. Essa determinação pode ser facilmente obtida considerando-se a decomposição espectral de tensores de segunda ordem (Eq. 5.3) e o conceito de autoprojetores (Eq. 5.4). As Figuras 5.15, 5.16 e 5.17 ilustram os gradientes unitários, no espaço Haigh-Westergard.



**Figura 5.15:** Vetores normais à superfície com secção octaédrica similar ao critério Drucker-Prager (ângulo de atrito:  $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico.



**Figura 5.16:** Vetores normais à superfície com secção octaédrica similar ao critério Argryris-Sheng et al. (ângulo de atrito:  $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico.



**Figura 5.17:** Vetores normais à superfície com secção octaédrica similar ao novo critério (ângulo de atrito:  $\phi = 26^\circ$ ): (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico.

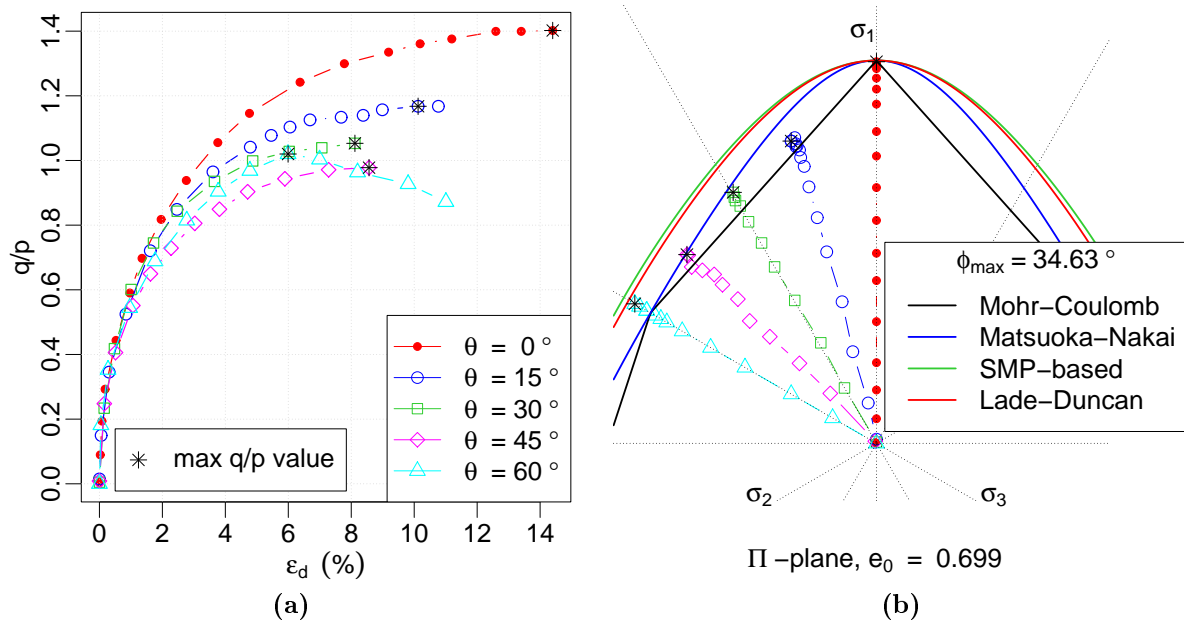
## 5.11 VERIFICAÇÃO

Alguns ensaios triaxiais cúbicos são apresentados em seguida. Estes fornecem resultados que podem evidenciar a resistência do material, considerando a influência dos três invariantes de tensão. Além disso, tenta-se observar a possível variação de resistência segundo diferentes direções. As trajetórias de tensão são elaboradas para alguns valores do ângulo de Lode. Os resultados são descritos em forma de gráficos, nos quais as escalas dos eixos utilizam os invariantes de Cambridge.

Nos gráficos, mostram-se as trajetórias no plano  $\Pi$  para cada ensaio. Eventualmente, indicam-se os pontos de máxima razão  $q/p$  por meio de um asterisco (“\*”). O ângulo de atrito  $\phi_{max}$  que aparece nas figuras foi calculado para a razão  $M_{max} = (q/p)_{max}$  dada de acordo com:

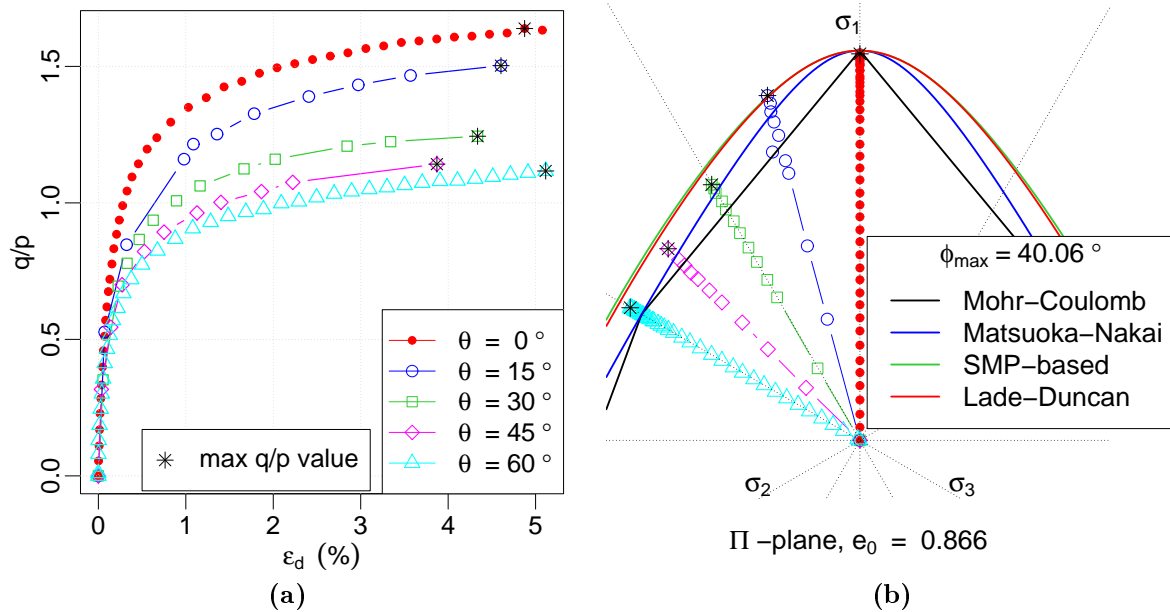
$$\phi_{max} = \sin^{-1} \left( \frac{3M_{max}}{6 + M_{max}} \right) \quad (5.40)$$

A Figura 5.18 apresenta resultados obtidos por ensaios cúbicos na argila Fujinomori do Japão (Chowdhury, 1998). Pode-se verificar que, para os valores máximos de  $q/p$ , a envoltória do critério Matsuoka-Nakai (Figura 5.18b) representa razoavelmente bem a resistência deste material. Entretanto, ressalta-se, novamente, que os resultados possuem um certo nível de erro e que uma faixa de resistência deveria ser considerada.



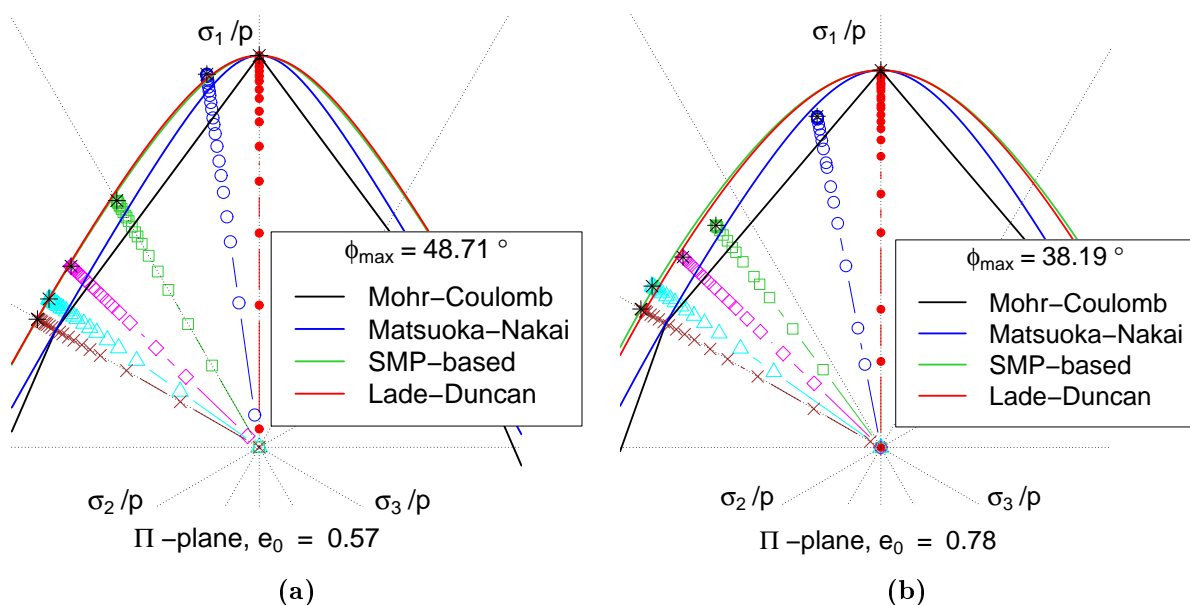
**Figura 5.18:** Ensaios com  $p=196$  kPa constante na argila Fujinomori: (a) Curvas tensão-deformação; (b) Trajetórias de tensão no plano  $\Pi$  e critérios de ruptura.

Para a areia Toyoura (Martínez-Carvajal, 2006), cujos resultados em equipamentos do tipo triaxial-verdadeiro são apresentados na Figura 5.19, seguem-se as mesmas conclusões, feitas anteriormente para a argila Fujinomori.



**Figura 5.19:** Ensaios com  $p=196$  kPa constante na areia Toyoura: (a) Curvas tensão-deformação; (b) Trajetórias de tensão no plano  $\Pi$  e critérios de ruptura.

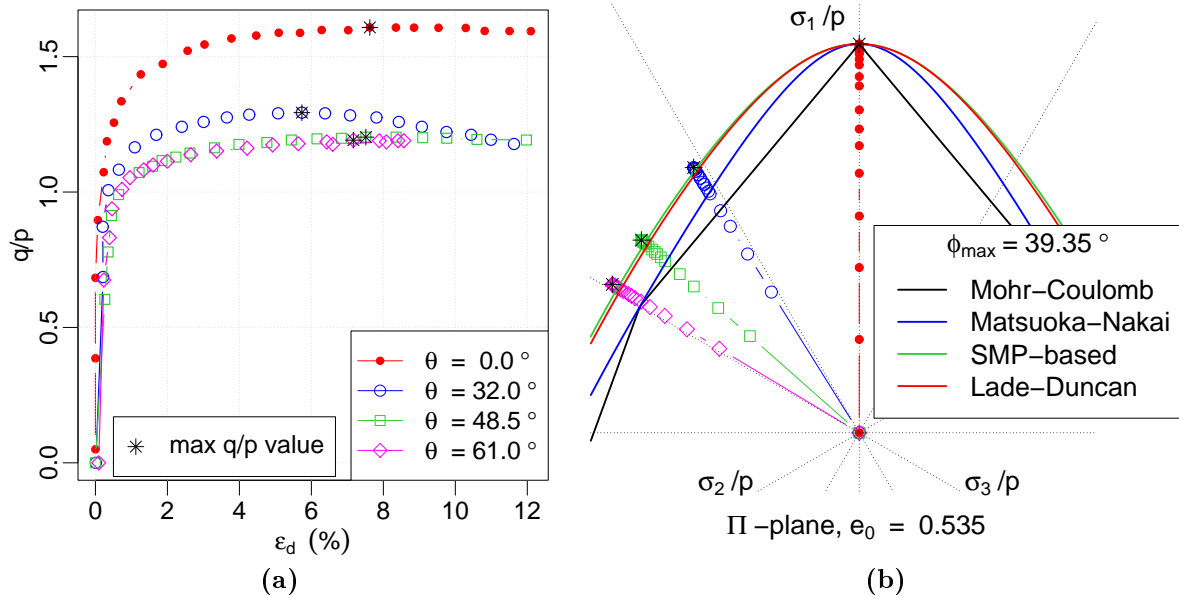
A Figura (5.20) mostra resultados de testes com a areia Monterey em condições iniciais densa e fofa (Lade & Duncan, 1973). Estes permitem concluir que a envoltória devida ao critério Lade-Duncan simula, razoavelmente, a resistência deste material, sob as condições impostas pelo ensaio correspondente. O critério SMP-based fornece praticamente o mesmo resultado que o critério Lade-Duncan.



**Figura 5.20:** Ensaios na areia Monterey (Lade & Duncan, 1973): (a) Amostras preparadas na forma densa; (b) Amostras preparadas na forma fofa.

A Figura 5.21 mostra resultados de testes com amostras de areia Cambria preparadas

com anisotropia transversal. Para esses resultados, verifica-se a adequabilidade do critério Lade-Duncan na representação da resistência (Ochiai & Lade, 1983).



**Figura 5.21:** Ensaio na areia Cambria (Ochiai & Lade, 1983): (a) Curvas tensão-deformação; (b) Trajetórias de tensão no plano  $\Pi$  e critérios de ruptura.

## 5.12 CONCLUSÕES

O critério Argyris-Sheng et al. possui resultado similar ao Matsuoka-Nakai, desde que o ângulo de atrito máximo seja limitado a, no máximo,  $48.59^\circ$ . Este é um limite razoável quando, por exemplo, trabalha-se com a definição da resistência no estado crítico. A ideia do critério Argyris-Sheng et al. é substituir a razão  $M$  por  $M(\theta)$ , segundo a Eq. (5.16), que define a variação de  $M(\theta)$ , com relação ao ângulo de Lode. Uma vantagem deste critério é a de que, durante a definição do fluxo plástico, apenas a derivada de  $M(\theta)$  com relação ao tensor  $\underline{\sigma}$  deverá ser acrescentada, quando em comparação, por exemplo, com a utilização do modelo Cam-clay convencional.

Um novo critério de ruptura com resultado similar ao critério Lade-Duncan foi introduzido. Sua definição parte da definição dos invariantes  $P_{smp}$  e  $Q_{smp}$ , obtidos analogamente aos invariantes  $P_{oct}$  e  $Q_{oct}$ . A diferença entre estes dois pares de invariantes está na escolha do plano no espaço Haigh-Westergard usado como base para a projeção do vetor  $\underline{\sigma}$ . Os dois primeiros são as projeções perpendicular e normal de  $\underline{\sigma}$  no plano SMP enquanto que os dois últimos são as projeções perpendicular e normal de  $\underline{\sigma}$  no plano octaédrico.

Os invariantes  $P_{smp}$ ,  $Q_{smp}$ ,  $P_{oct}$  e  $Q_{oct}$  são úteis na elaboração de superfícies de plastificação e potencial plástico possuindo secções octaédricas similares aos critérios de ruptura Drucker-Prager, Matsuoka-Nakai e Lade-Duncan. Os gradientes de campos escalares, geralmente usados na definição do fluxo plástico, podem ser facilmente obtidos



considerando-se a decomposição espectral do tensor de tensões e a definição de autoprojetores (Apêndice C).

Considerando a resistência máxima apresentada pela argila Fujinomori, areia Toyoura, areia Monterey e areia Cambria, para algumas delas, o critério Matsuoka-Nakai é mais adequado; para outros, os critérios SMP-based e Lade-Duncan parecem ser mais adequados. No entanto, o equipamento e método de ensaio tem influência nos resultados. Portanto, os valores entre os limites inferior dado pelo critério Mohr-Coulomb e superior dado pelo critério SMP-based deveriam ser considerados. Além disso, a resistência pode ser considerada pelo menos de três maneiras: a) para um valor fixo de deformação cisalhante; b) resistência máxima; e c) no estado crítico.

# Capítulo 6

## CRITÉRIO DE RUPTURA ANISOTRÓPICO

Em materiais granulares, a resistência depende da direção da aplicação dos esforços, ou seja, esses materiais exibem, mais ou menos, anisotropia. Este fenômeno é geralmente dividido em anisotropia induzida e inerente. A anisotropia induzida, por exemplo, pode ser observada no efeito Bauschinger, o qual é representado matematicamente, dentro do arcabouço da teoria da elastoplasticidade, pela mudança entre os limites de plastificação durante ciclos de carregamento. Em solos, que são um agrupamento de partículas, com ou sem coesão, a anisotropia inerente é causada principalmente pela orientação das partículas e, portanto, seu efeito muda facilmente com as deformações. Enquanto que a anisotropia inerente é formada pelo processo de sedimentação das partículas do solo, a anisotropia induzida provém da história subsequente de deformação.

Neste trabalho, sugere-se um novo critério de resistência para materiais anisotrópicos, que leva em conta a influência de planos de anisotropia (“bedding-planes”). Esse critério é deduzido sob o conceito de planos mobilizados e utiliza a idealização apresentada por Yoshimine (2005) de um critério de Coulomb tridimensional.

### 6.1 EQUACIONAMENTO

Neste Capítulo, apresenta-se um **Critério de ruptura para materiais granulares isotrópicos, anisotrópicos, com ou sem coesão, considerando o conceito de plano mobilizado**.

Yoshimine (2005) estendeu a equação de Coulomb, geralmente aplicada a um plano de ruptura com a normal paralela à idealização bidimensional do problema, para qualquer plano tridimensional. Esse último plano é visto como aquele que possui grande influência no comportamento mecânico de geomateriais. Para isso, Yoshimine utilizou uma equação similar à de Coulomb,

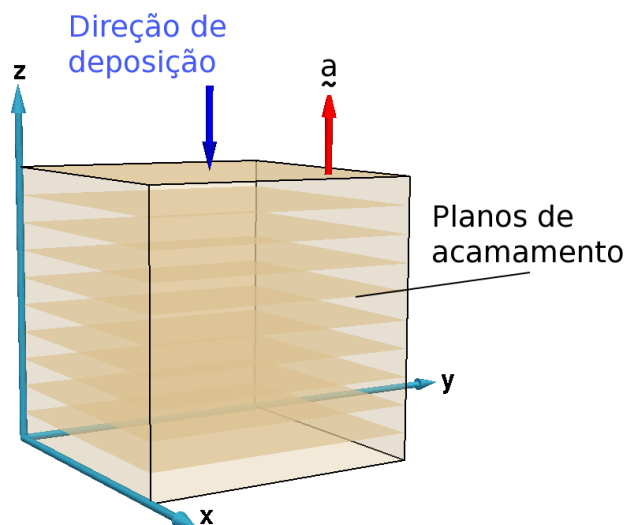
$$\tau = R\sigma + C \quad (6.1)$$

em que as medidas de tensão cisalhante  $\tau$  e normal  $\sigma$  são obtidas nesse plano de mobilização. Sabendo-se os componentes da normal a esse plano, apenas dois parâmetros

de resistência devem ser introduzidos para a definição do critério:  $R$ , equivalente à tangente do ângulo de atrito e  $C$ , equivalente ao valor do intercepto de coesão. Assim, cinco medidas são necessárias, três que identificam a normal e duas diretamente relacionadas com a resistência por atrito. Como a normal é unitária, pode-se reduzir esse número a quatro. Yoshimine (2005) mostra que esse critério resulta em forma análoga a outros critérios mais comuns, como o Drucker-Prager e Matsuoka-Nakai. Para isto, basta escolher adequadamente a normal ao plano de mobilização. Yoshimine (2005) também sugere a utilização do critério para a representação da resistência de materiais anisotrópicos.

A seguir, apresenta-se um critério de ruptura que pode ser aplicado a materiais isotrópicos e anisotrópicos. Num primeiro momento, será derivada uma fórmula para materiais com anisotropia transversal. Entretanto, a formulação pode ser facilmente aplicada a outros tipos de anisotropia, bastando alterar a normal  $\underline{a}$ , introduzida a seguir. Portanto, uma plataforma para se abordar o problema da resistência de um material com anisotropia inerente e induzida é sugerida. A coesão também pode ser considerada e, então, um critério similar ao mostrado por Matsuoka & Sun (1995) poderá ser obtido, desde que as normais ao plano mobilizado e ao plano de anisotropia sejam paralelas ao SMP.

Considera-se, inicialmente, o plano mobilizado (passível de ruptura) similar ao SMP que foi ilustrado na Figura 5.2. A normal unitária  $\hat{n}$  a esse plano deverá ser definida *a priori*. Uma forma é a utilização da mesma normal ao SMP. Outra, é a consideração de alguma combinação entre os componentes principais de tensão. Em seguida, como se observa em materiais anisotrópicos, especificamente com anisotropia transversal, é necessário a introdução da normal aos planos de anisotropia, vistos como uma série de planos nos quais as características do material são diferentes, em relação àquelas consideradas paralelamente à direção da normal destes planos. Por exemplo, a Figura 6.1 ilustra os planos de acamamento. Esses planos de anisotropia são indicados por uma normal unitária  $\underline{a}$  (Figura 6.1).



**Figura 6.1:** Planos de acamamento da areia Shirasu; Vetor normal aos planos de acamamento.

De acordo com a fórmula de Cauchy, o vetor de tensões (“stress vector”) atuando em um ponto situado em um plano de normal  $\hat{\mathbf{n}}$  e que passa pelo material é dado por:

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \bullet \hat{\mathbf{n}} \quad (6.2)$$

As projeções normal e ortogonal desse vetor ao longo da normal do plano terão magnitudes iguais à tensão normal e cisalhante atuando nesse plano, respectivamente. Com o intuito de ilustrar a interpretação física desta derivação, considera-se, temporariamente, o caso de materiais puramente isotrópicos. Nestes, as seguintes medidas são comumente utilizadas:

$$\sigma_n = \left\| \underline{\mathbf{p}}_n \right\| = \left\| \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} : \underline{\mathbf{t}} \right\| \quad \text{e} \quad \tau_n = \left\| \underline{\mathbf{q}}_n \right\| = \left\| (\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) : \underline{\mathbf{t}} \right\| \quad (6.3)$$

em que  $\sigma_n$  e  $\tau_n$  são as tensões normal e cisalhante no plano de normal  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Entretanto, espera-se que a normal  $\underline{\mathbf{a}}$  ao plano de anisotropia influencie os valores de tensão normal e cisalhante no plano  $\hat{\mathbf{n}}$ , que passa por uma partícula do material. Assim, na tentativa de se considerar a anisotropia inerente, faz-se a hipótese de que tal influência ocorrerá mediante a projeção oblíqua do vetor de tensão  $\underline{\mathbf{t}}$  no plano  $\hat{\mathbf{n}}$ , ao longo de uma direção  $\underline{\mathbf{b}}$ , composta pela seguinte soma:

$$\underline{\mathbf{b}} = \alpha \underline{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{n}} \quad (6.4)$$

em que  $\alpha$  é um parâmetro a se determinar,  $\underline{\mathbf{a}}$  é normal (constante) ao plano de anisotropia transversal e  $\hat{\mathbf{n}}$  deve ser definido de acordo com o conceito de plano mobilizado, por exemplo, poderá ser a normal ao plano octaédrico ou ao SMP.

Desta forma, o Plano de Mobilização Anisotrópica (AMP - “Anisotropic Mobilized Plane”), cuja normal é  $\underline{\mathbf{b}}$ , é definido pelo Plano de Anisotropia Inerente (IAP - “Inherent Anisotropic Plane”), com normal  $\underline{\mathbf{a}}$ , e pelo Plano de Anisotropia Induzida pelo Estado de Tensão (SIAP - “Stress-Induced Anisotropic Plane”). Este último, deve ser acrescentado à formulação, observando-se a melhor forma de se representar a anisotropia induzida do material em estudo.

Com  $\alpha = 0$ , a parcela de anisotropia inerente simulada por esta formulação é anulada e o critério torna-se aplicável somente a materiais sem anisotropia inerente. Neste caso, a projeção será do tipo ortogonal e as medidas de tensão normal e cisalhante serão dadas pela Eq. (6.3). Assim, alterando-se o coeficiente  $\alpha$ , pode-se controlar o grau de anisotropia inerente, reproduzido pela idealização matemática apresentada.

Considerando-se o vetor auxiliar

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}} = \frac{\underline{\mathbf{b}}}{\underline{\mathbf{b}} \bullet \hat{\mathbf{n}}} \quad (6.5)$$

e com o auxílio das equações de projeção oblíqua, apresentadas no Apêndice B, encontra-se

$$\underline{\underline{p}}_{bn} = \underline{\underline{\beta}} \hat{\underline{\underline{n}}} \bullet \underline{\underline{t}} = (\underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{n}}} \hat{\underline{\underline{n}}}) \underline{\underline{\beta}} \quad (6.6)$$

que é o vetor projeção oblíqua do vetor  $\underline{\underline{t}}$ , paralelo à normal  $\hat{\underline{\underline{n}}}$ . Assim, a tensão normal (anisotrópica) no AMP será igual a magnitude, dada por uma norma Euclidiana de ordem 2, do vetor  $\underline{\underline{p}}_{bn}$  e igual a

$$\sigma_{amp} = \left\| \underline{\underline{p}}_{bn} \right\| = (\underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{n}}} \hat{\underline{\underline{n}}}) \left\| \underline{\underline{\beta}} \right\| \quad (6.7)$$

Analogamente, considerando-se a soma vetorial  $\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{p}}_{bn} + \underline{\underline{q}}_{bn}$ , o vetor projeção oblíqua do vetor  $\underline{\underline{t}}$ , ao longo do plano de normal  $\hat{\underline{\underline{n}}}$ , é dado segundo a seguinte expressão

$$\underline{\underline{q}}_{bn} = \underline{\underline{t}} - \underline{\underline{p}}_{bn} = \underline{\underline{\sigma}} \bullet \hat{\underline{\underline{n}}} - (\underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{n}}} \hat{\underline{\underline{n}}}) \underline{\underline{\beta}} \quad (6.8)$$

Sua norma permite encontrar a tensão cisalhante (anisotrópica) no AMP, de acordo com

$$\tau_{amp} = \left\| \underline{\underline{q}}_{bn} \right\| = \sqrt{[\underline{\underline{\sigma}} \bullet \hat{\underline{\underline{n}}} - (\underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{n}}} \hat{\underline{\underline{n}}}) \underline{\underline{\beta}}] : [\underline{\underline{\sigma}} \bullet \hat{\underline{\underline{n}}} - (\underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{n}}} \hat{\underline{\underline{n}}}) \underline{\underline{\beta}}]} \quad (6.9)$$

$$= \sqrt{\underline{\underline{\sigma}}^2 : \hat{\underline{\underline{n}}} \hat{\underline{\underline{n}}} - 2(\underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{n}}} \hat{\underline{\underline{n}}})(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\beta}} \hat{\underline{\underline{n}}}) + (\underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{n}}} \hat{\underline{\underline{n}}})^2 \underline{\underline{\beta}} \bullet \underline{\underline{\beta}}} \quad (6.10)$$

O critério de ruptura é obtido com a inserção das Eqs. (6.7) e (6.10) na Eq. (6.1). Para materiais sem coesão, esse critério será

$$\frac{\tau_{amp}}{\sigma_{amp}} = R, \quad (6.11)$$

similar ao de Mohr-Coulomb para materiais isotrópicos.

Caso a normal  $\underline{\underline{b}}$  seja igual a  $\hat{\underline{\underline{n}}}$ , ou seja, para  $\alpha = 0$ , o critério correspondente, que não mais possui a influência da anisotropia inerente, entretanto ainda pode considerar a anisotropia induzida pelo estado de tensões, será dado pela seguinte expressão:

$$\psi(\underline{\underline{\sigma}}) = (\underline{\underline{\sigma}}^2 - 2CR\underline{\underline{\sigma}}) : \hat{\underline{\underline{n}}} \hat{\underline{\underline{n}}} - (1 + R^2)(\underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{n}}} \hat{\underline{\underline{n}}})^2 - C^2 = 0 \quad (6.12)$$

Se, por exemplo, a normal  $\hat{\underline{\underline{n}}}$  for igual a normal  $\hat{\underline{\underline{n}}}_{smp}$  ao SMP, o critério da Eq. (6.12) acima fornecerá um resultado similar ao critério Matsuoka-Nakai (Matsuoka & Nakai, 1974), entretanto com um intercepto de coesão. Neste caso, os invariantes  $\sigma_{amp}$  e  $\tau_{amp}$  serão idênticos aos invariantes  $\sigma_{smp}$  e  $\tau_{smp}$  e poderão ser calculados segundo as expressões:

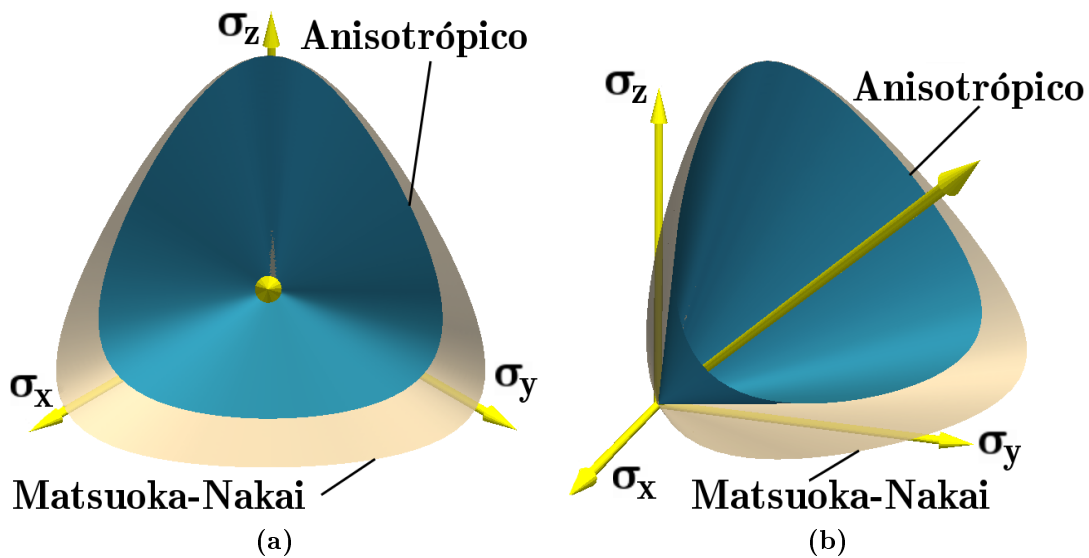
$$\sigma_{amp} = \sigma_{smp} = \frac{3I_{3\sigma}}{I_{2\sigma}} \quad e \quad (6.13)$$

$$\tau_{amp} = \tau_{smp} = \frac{\sqrt{I_{1\sigma} I_{2\sigma} I_{3\sigma} - 9I_{3\sigma}^2}}{I_{2\sigma}} \quad (6.14)$$

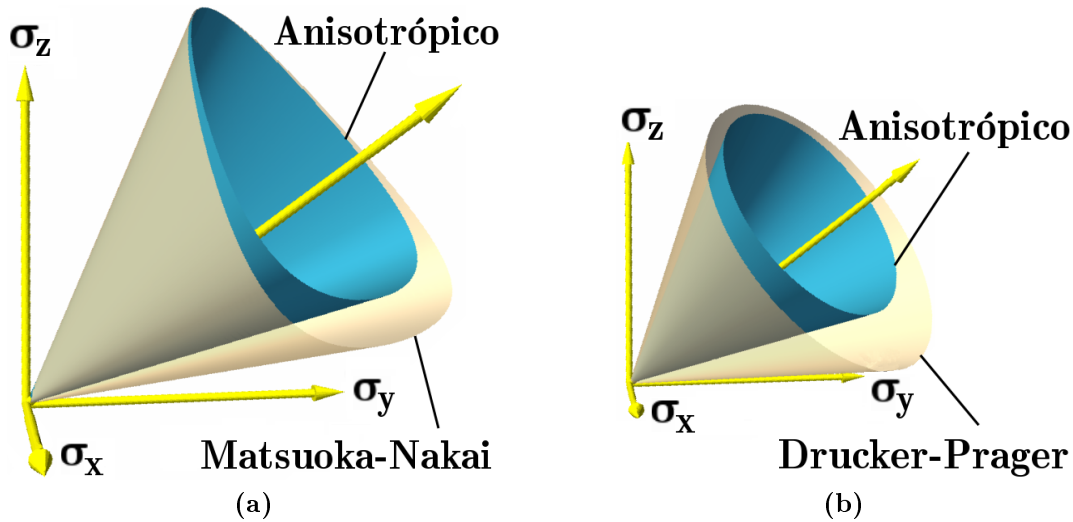
em que  $I_{k\sigma}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) são os invariantes característicos do tensor de tensões ( $\underline{\sigma}$ ).

A Figura 6.2 mostra as superfícies no espaço Haigh-Westergard do critério anisotrópico definido com a normal ( $\hat{n}$ ) ao plano mobilizado igual à normal ( $\hat{n}_{smp}$ ) ao SMP. Na Figura 6.2, foi utilizado um ângulo de atrito  $\phi_{max}$  igual a  $26^\circ$  para o critério Matsuoka-Nakai. Para o critério anisotrópico, foram utilizados:  $\alpha = 0.1$ ,  $C = 0$  e  $R = 0.4$ . Pode-se observar que a anisotropia faz com que a superfície de resistência fique deformada no espaço Haigh-Westergard, com relação ao critério Matsuoka-Nakai. Como a normal  $\underline{a}$  utilizada foi paralela ao eixo vertical, a influência do fator  $\alpha$  fez a superfície diminuir seu tamanho nesta direção. A superfície diminui para valores positivos de  $\alpha$ , segundo a direção de  $\underline{a}$ . Para valores negativos de  $\alpha$ , a superfície cresce segundo a direção de  $\underline{a}$ .

Com a normal  $\hat{n}$  igual a normal ao plano octaédrico  $\hat{n}_{oct}$ , obtém-se um critério de secção octaédrica circular e que prevê resistências diferentes dependendo da direção de aplicação de carregamento. A Figura 6.3 mostra tridimensionalmente a superfície deste critério, assim obtido. Na Figura 6.3 foi utilizado um ângulo de atrito  $\phi_{max}$  igual a  $26^\circ$  para o critério Matsuoka-Nakai. Para o critério anisotrópico, foram utilizados:  $\alpha = 0.1$ ,  $C = 0$  e  $R = 0.4$ . Nota-se que o cone se desloca segundo a normal ao plano de acamamento, fazendo com que algumas combinações de estados de tensão estejam próximas do critério de ruptura diferentemente de outros estados.



**Figura 6.2:** Superfícies no espaço Haigh-Westergard do critério anisotrópico definido com a normal ao plano mobilizado igual à normal ao SMP: (a) Vista do plano  $\Pi$ ; (b) Vista do espaço Haigh-Westergard.



**Figura 6.3:** Superfícies no espaço Haigh-Westergard do critério anisotrópico: (a) Critério definido com a normal ao plano mobilizado igual à normal ao SMP; (b) Critério definido com a normal ao plano mobilizado igual à normal ao plano octaédrico;.

## 6.2 VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL

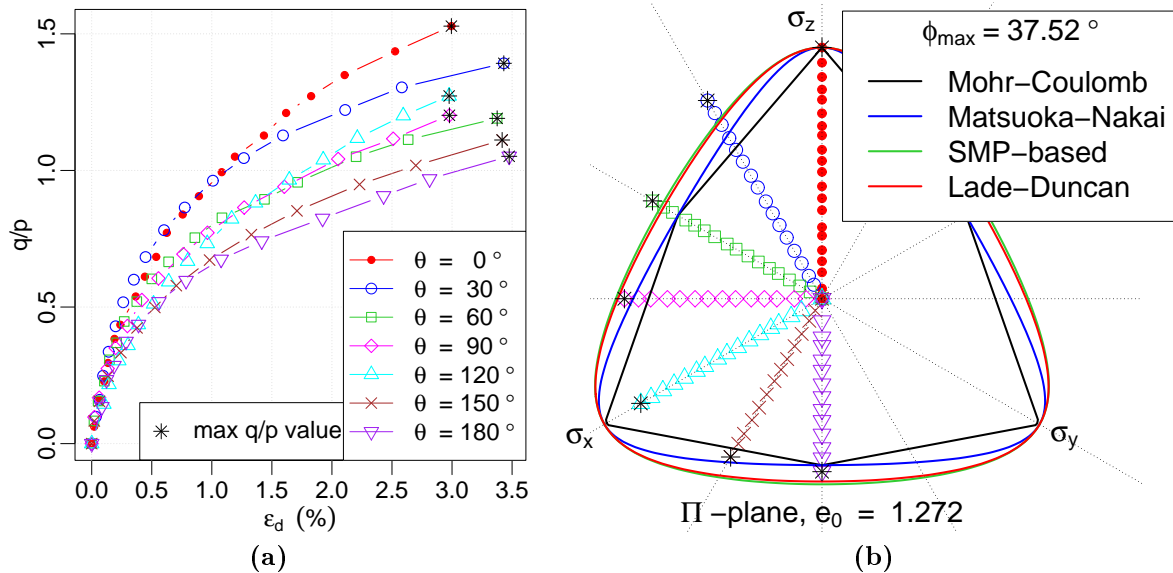
Resultados de ensaios com a areia Shirasu do Japão são apresentados em seguida. Esta areia é encontrada no sudeste de Kyushu, Japão e tem origem a partir de deposição vulcânica. Haruyama (1987) realizou ensaios triaxiais verdadeiros nesta areia. As amostras foram preparadas por pluviação, ocasionando um material com anisotropia (inerente) transversal. Os planos de acamamento são perpendiculares ao eixo  $z$  como ilustrado pela Figura 6.1. O critério anisotrópico introduzido é então calibrado para esta areia.

Para efeito de comparação, definem-se três estados de deformação nos quais os valores da razão  $q/p$  são observados: a) valores de  $\varepsilon_d$  correspondentes aos valores máximos de  $q/p$ ; b) valores de  $\varepsilon_d$  correspondentes ao final dos ensaios; e c) valores de  $\varepsilon_d$  iguais a um certo valor. Dessa forma, a comparação dos critérios de ruptura fica dependente do nível de deformação cisalhante considerado.

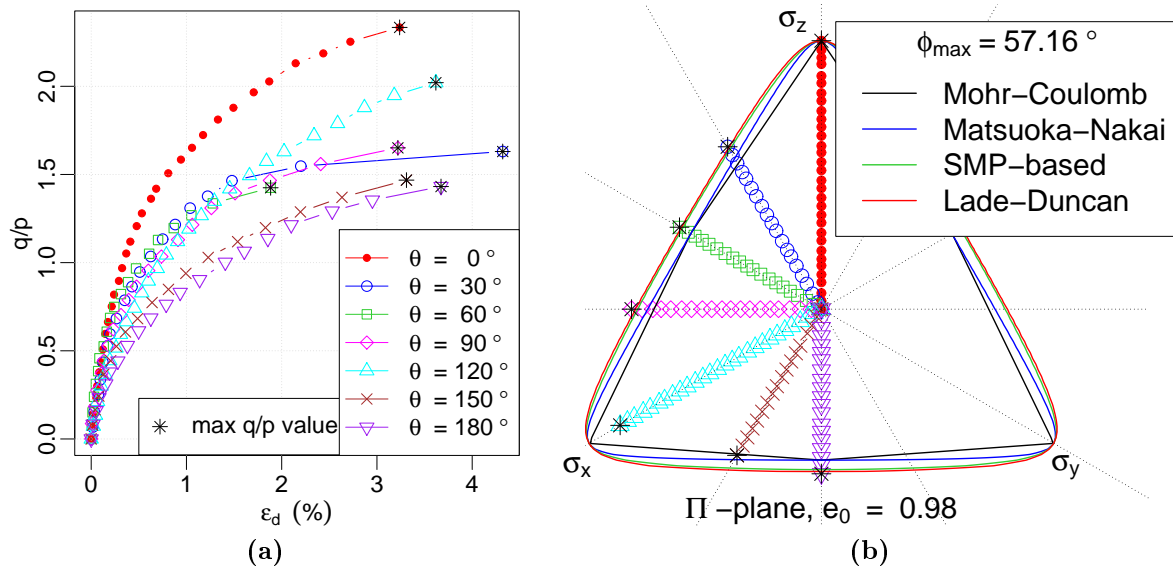
A Figura 6.4 mostra os resultados com a areia Shirasu no estado fofo. Nesta figura observa-se que a resistência em compressão para a trajetória de 120 graus é menor que a mesma para trajetória de 0 graus. Esse comportamento também é notado para a areia no estado denso Figura 6.5. Ou seja, a resistência na direção do plano de acamamento é menor que a mesma na direção de deposição. Entretanto, como afirmado anteriormente, alguns fatores interferem nestes resultados. Assim, procura-se analisar também uma eventual situação na qual a resistência seria medida para  $\varepsilon_d = 2\%$ .

As Figuras 6.6 e 6.7 apresentam os resultados com esta areia, destacando os valores máximos da razão  $q/p$  para a deformação cisalhante de 2 % (uma linha tracejada indica o nível de deformação cisalhante de 2%). No plano II, os pontos correspondentes ao valor de  $\varepsilon_d = 2\%$  são interligados por uma linha tracejada. A curva resultante facilita a observação

de que a resistência para  $\theta = 120^\circ$  (compressão ao longo do plano de acamamento) é menor que a mesma para  $\theta = 0^\circ$  (compressão ao longo da direção de deposição). As envoltórias dos critérios de ruptura (isotrópicos) são traçadas com um ângulo de atrito menor, de forma que a previsão na direção do plano de acamamento seja melhor que na direção de deposição das partículas.

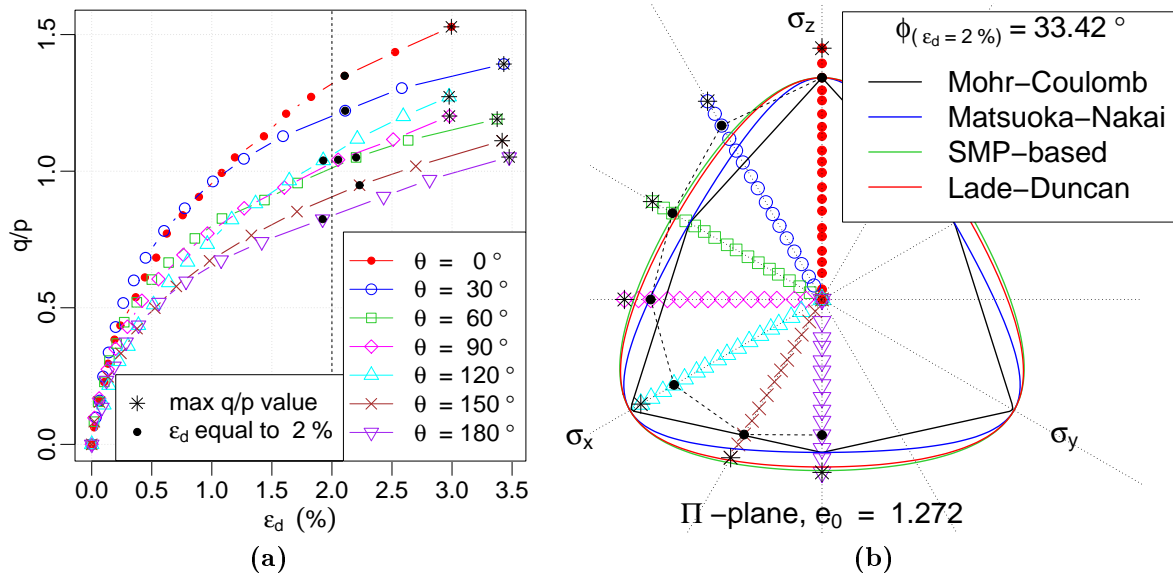


**Figura 6.4:** Ensaios na areia Shirasu preparada na forma fofa (Haruyama, 1987): (a) Curvas tensão-deformação; (b) Trajetórias de tensão no plano  $\Pi$  e critérios de ruptura.

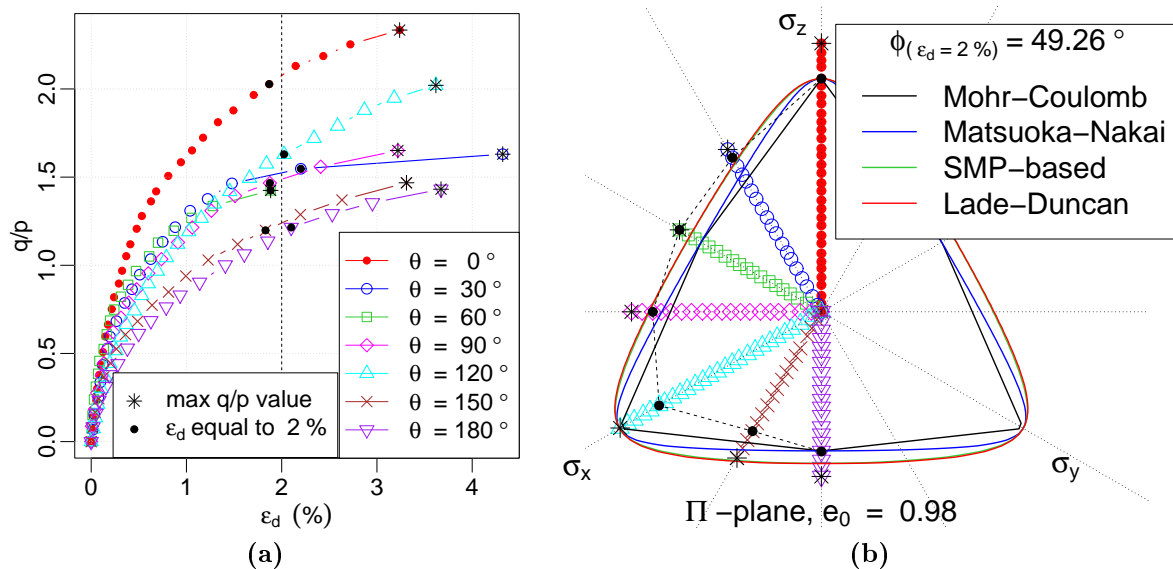


**Figura 6.5:** Ensaios na areia Shirasu preparada na forma densa (Haruyama, 1987): (a) Curvas tensão-deformação; (b) Trajetórias de tensão no plano  $\Pi$  e critérios de ruptura.





**Figura 6.6:** Ensaios na areia Shirasu preparada na forma fofa (Haruyama, 1987): (a) Curvas tensão-deformação com indicação dos pontos com  $\varepsilon_d = 2\%$ ; (b) Trajetórias de tensão no plano  $\Pi$  e critérios de ruptura com indicação dos pontos com  $\varepsilon_d = 2\%$ .



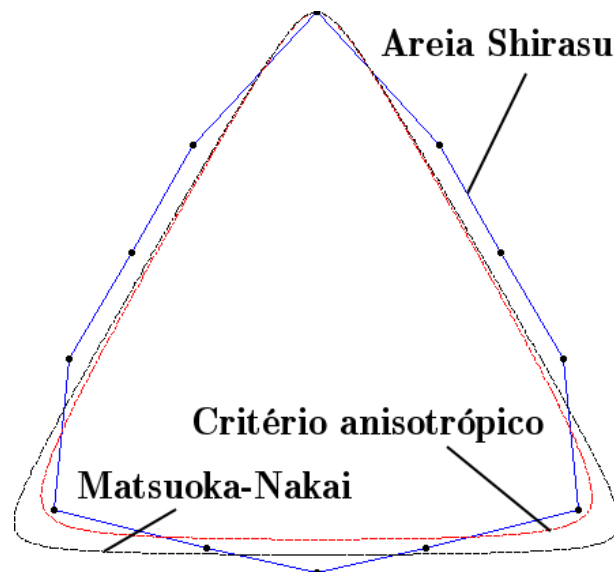
**Figura 6.7:** Ensaios na areia Shirasu preparada na forma densa (Haruyama, 1987): (a) Curvas tensão-deformação com indicação dos pontos com  $\varepsilon_d = 2\%$ ; (b) Trajetórias de tensão no plano  $\Pi$  e critérios de ruptura com indicação dos pontos com  $\varepsilon_d = 2\%$ .

A calibração do critério anisotrópico introduzido, considerando os resultados do comportamento de resistência da areia Shirasu foi realizada. Para isso, as seguintes hipóteses foram consideradas: a) a normal ao plano mobilizado será a mesma ao SMP; b) a parcela de coesão é desconsiderada ( $C = 0$ ); c) a normal paralela à direção de deposição possui componentes iguais a  $n_{aX} = 0$ ,  $n_{aY} = 0$  e  $n_{aZ} = 1$ .

A Figura 6.8 mostra a comparação entre os resultados experimentais com a areia Shirasu no estado denso, o critério anisotrópico e o critério Matsuoka-Nakai. Na figura,

o critério de ruptura anisotrópico foi determinado para  $\alpha = 0.25$  e  $R = 1.18$ . O critério de ruptura Matsuoka-Nakai foi calculado com ângulo de atrito em compressão igual a  $\phi_{max} = 56.87^\circ$ .

Verifica-se que a curva do critério anisotrópico indica valores de resistência na direção dos planos de acamamento inferiores aos correspondentes na direção de deposição das partículas. Ou seja, a formulação acima permite a representação do critério de ruptura para materiais com anisotropia induzida, mediante a escolha da normal ao Plano Espacialmente Mobilizado ( $\hat{n}_{smp}$ ), e com anisotropia inerente, devido a utilização da normal  $\underline{a}$ .



**Figura 6.8:** Comparação entre a resistência simulada pelos critérios Matsuoka-Nakai e anisotrópico e resultados experimentais com a areia Shirasu no estado denso.

### 6.3 CONCLUSÕES

Apresentou-se um critério geral para materiais isotrópicos e anisotrópicos, com coesão ou sem, que considera o conceito de plano mobilizado. Esse critério permite a simulação de resistências diferentes, com relação à direção dos esforços principais. Um exemplo de aplicação foi mostrado comparando com resultados experimentais na areia Shirasu. Nesta aplicação, a resistência em compressão ao longo do plano de acamamento pôde ser simulada com valores inferiores à resistência na direção de deposição das partículas.

A formulação apresentada permite futuras expansões, pois os vetores  $\hat{n}$  e  $\underline{b}$  podem ser definidos de várias formas, ou seja, tal formulação compreende um arcabouço para a definição de vários critérios de ruptura. Certamente ensaios de laboratório adicionais serão necessários para uma melhor avaliação de seu potencial, além de permitir o estudo dos planos mobilizados.

# Capítulo 7

## MODELO SUBLOADING CAM-CLAY

A partir da década de 60, algumas características da mecânica dos solos foram incorporadas aos conceitos da teoria matemática da elastoplasticidade, resultando no bem conhecido modelo Cam-clay (Roscoe et al., 1958; Schofield & Wroth, 1968). Com isso, simulações numéricas de obras geotécnicas puderam ser utilizadas com maior êxito no entendimento de problemas reais. Entretanto, esse modelo e alguns outros baseados em seus conceitos foram desenvolvidos para situações em que duas das tensões principais fossem iguais, não permitindo, portanto, a aplicação a problemas tridimensionais. A importância em considerar os três valores de tensões principais pode ser notada quando o problema em estudo, por exemplo, construção de barragens ou escavações subterrâneas, sofre uma indeterminada série de trajetórias de tensões.

O modelo Cam-clay tem sido largamente utilizado para simular o comportamento de solos e hoje se encontra implementado em muitos programas acadêmicos e comerciais. A grande aceitação do Cam-clay decorre de dois fatos básicos: a) a capacidade de reproduzir, pelo menos de forma qualitativa, alguns aspectos importantes do comportamento tensão-deformação-resistência dos solos, principalmente de argilas; e b) o número reduzido de parâmetros, todos com claro significado físico e de simples obtenção. Entretanto, como dito anteriormente, o modelo Cam-clay foi originalmente concebido a partir de ensaios de compressão triaxial convencionais (axis-simétricos) e sua extensão para casos genéricos de carregamento tridimensional encontra algumas dificuldades.

Apesar de o Cam-clay simular teoricamente situações de pré-adensamento, a resposta quantitativa e qualitativa não é adequada, exibindo um longo trecho elástico até atingir a resistência de pico, para somente então exibir amolecimento e dilatância. Além disso, o modelo Cam-clay, bem como outros modelos elastoplásticos convencionais, não é capaz de representar o comportamento do solo sob carregamentos cíclicos, uma vez que o comportamento é totalmente elástico no interior da superfície de plastificação.

Estes últimos aspectos podem ser melhorados significativamente com a introdução do conceito de subplastificação (subcarregamento). Neste caso, adotam-se duas superfícies de plastificação afastadas entre si de uma certa distância que mede o grau de

pré-adensamento. As superfícies são chamadas de superfície de subcarregamento (“subloading”) e superfície normal de plastificação. O estado de tensão está sempre sobre a superfície de sub-carregamento (interna), a qual avança ou retrocede durante ciclos de carregamento e descarregamento. A superfície normal (externa) serve de memória da história de tensões e permanece estacionária durante descarregamento, enquanto cresce durante carregamentos.

Uma variável interna adicional, com relação ao modelo Cam-clay, relacionada ao pré-adensamento em argilas ou à densidade relativa em areais, relaciona a posição das duas superfícies. A adoção deste conceito possibilita uma transição suave entre estados elásticos e elastoplásticos, permitindo a simulação de ciclos de descarregamento e recarregamento ao custo de um único parâmetro adicional. O conceito é aplicado dentro do arcabouço da teoria de elastoplasticidade com endurecimento isotrópico, apesar de poder ser aplicado a modelos com endurecimento cinemático.

Com base nestes fatos, um modelo elastoplástico para materiais granulares sob carregamentos cíclicos, que sofrem anisotropia induzida e a influência do segundo invariante de tensão, ou seja, dependentes dos valores tridimensionais de tensão, é sugerido. Este modelo, denominado por Subloading Cam-clay (SubCam), apesar de sua capacidade em representar comportamento cíclico, no entanto, não adota o conceito de endurecimento cinemático ou rotacional, obedecendo ao principal objetivo de se manter a simplicidade. Com esse objetivo, a interpretação do modelo se torna clara e suas equações podem ser imediatamente codificadas em computadores. Além disso, os solucionadores de DAS apresentados poderão ser facilmente aplicados.

O modelo SubCam possui apenas cinco parâmetros constitutivos (Tabela 4.2), ou seja, um a mais que o modelo Cam clay. Todos os parâmetros, com exceção da constante  $c$ , podem ser determinados em equipamentos comuns. O parâmetro  $c$ , que controla a evolução do aumento de rigidez com o número de ciclos, é mais facilmente obtido ajustando as curvas simuladas às curvas experimentais.

## 7.1 INVARIANTES DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

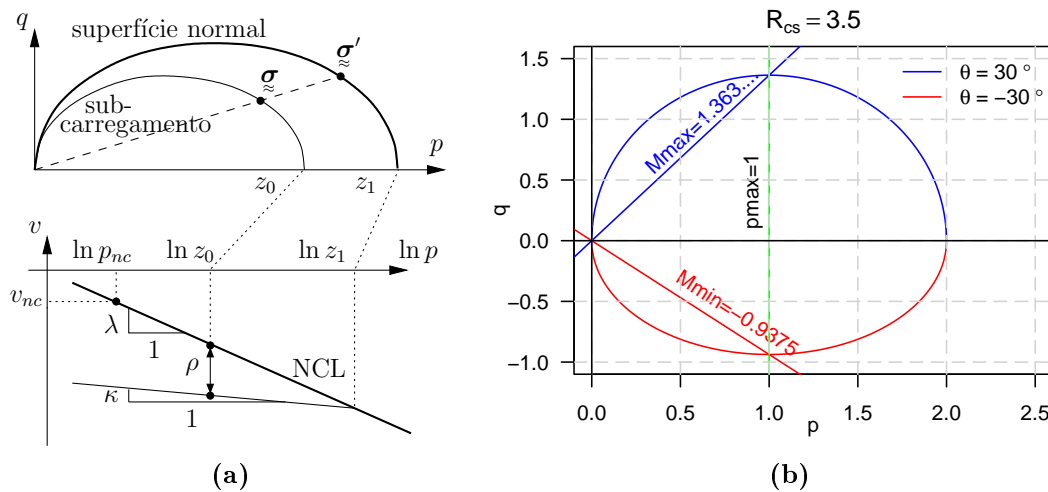
Neste modelo, utilizam-se os invariantes de tensão convencionais de Cambridge (Schofield & Wroth, 1968): tensão normal média  $p$ , tensão desviadora  $q$  e um ângulo análogo ao de Lode  $\theta$ . Este último é mostrado na Figura 5.3. As tensões  $p$  e  $q$  são calculados segundo as equações da Tabela 4.4.

O ângulo  $\theta$  pode ser calculado, para um estado de tensão tridimensional  $\underline{\sigma}$ , segundo a Eq. (5.6). A influência das direções principais não é levada em conta, limitando a abrangência deste modelo a materiais de comportamento isotrópico. Os invariantes de deformação são a deformação volumétrica  $\varepsilon_v$  e deformação cisalhante  $\varepsilon_d$ .

## 7.2 FUNÇÃO DE PLASTIFICAÇÃO

Este modelo possui duas superfícies no espaço das tensões, conforme preconiza o conceito de subcarregamento. A secção axis-simétrica dessas superfícies é idêntica a do modelo Cam-clay (Figura 7.1), na qual a função de plastificação é dada pela Eq. (7.1). As secções octaédricas, entretanto, possuem a forma do critério de ruptura Matsuoka-Nakai (Figura 5.9a), pois adota-se a equação do critério de Argyris-Sheng et al. para a variação de  $M$  com  $\theta$ . Portanto, a semi-elipse desenhada no gráfico  $q$  versus  $p$  para a região em extensão será menor que a equivalente para compressão (Figura 7.1b).

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, z_i) = f(p, q, \theta, z_i) = M(\theta)^2 p(p - z_i) + q^2 \quad (7.1)$$



**Figura 7.1:** Superfícies do modelo SubCam: (a) Cortes das superfícies de carregamento e plastificação, vistos no plano  $q$  versus  $p$ . Definição da variável  $\rho$  mediante relação linear entre  $v = 1 + e$  (“specific volume”) e  $\log p$ ; (b) Corte da superfície de carregamento, isomórfica à superfície de plastificação, no plano  $q$  versus  $p$ , com a parte em extensão desenhada para valores negativos de  $q$ .

Na Eq. (7.1),  $f(\underline{\underline{\sigma}}, z_i)$  fornece o valor da função de plastificação para cada tamanho  $z_i$ .  $i = 0$  indica a superfície de subcarregamento e  $i = 1$  a superfície normal. Porém, a superfície normal não entra na formulação e apenas seu tamanho  $z_1$  é utilizado para vincular a variação da superfície de subcarregamento com o endurecimento da superfície normal.

A forma octaédrica similar ao critério Matsuoka-Nakai é obtida mediante a variação da inclinação da linha de estado crítico  $M$  com o ângulo  $\theta$ . Essa variação foi proposta inicialmente por Argyris et al. (1974) e estendida por Sheng et al. (2000). A equação proposta por Sheng et al. (2000), que resulta em superfícies convexas para ângulos de atrito de até no máximo 48.59, é considerada. No entanto, ao contrário da Eq. (5.16)

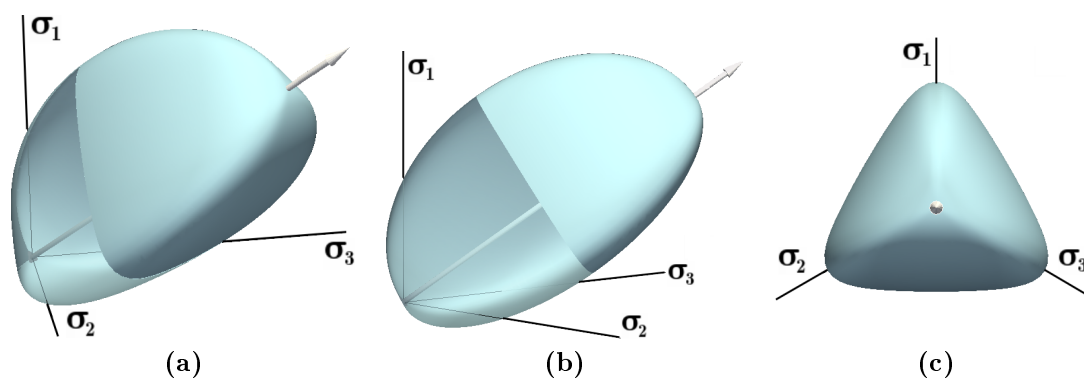
apresentada no Capítulo 5, o valor de  $M_{max}$  é trocado pelo  $M_{CS}$ , assim,

$$M(\theta) = M_{cs} \left( \frac{2\omega}{1 + \omega - (1 - \omega) \sin 3\theta} \right)^{1/4} \quad (7.2)$$

Nesta equação,  $M_{CS}$  e  $\omega$  são calculados em função somente do ângulo de atrito  $\phi_{CS}$  no estado crítico (“cs: critical state”), segundo a Eq. (7.3).

$$M_{CS} = \frac{6 \sin \phi_{CS}}{3 - \sin \phi_{CS}} \quad \text{e} \quad \omega = \left( \frac{3 - \sin \phi_{CS}}{3 + \sin \phi_{CS}} \right)^4 \quad (7.3)$$

A Figura 7.2 mostra a vista tridimensional da superfície de subcarregamento, análoga à superfície normal de plastificação, no espaço das tensões ou de Haigh-Westergard. Nesta, verifica-se a forma deformada da superfície para diferentes direções radiais no plano II.



**Figura 7.2:** Superfície de subcarregamento do modelo SubCam: (a) Vista tridimensional; (b) Vista quase normal ao plano de axis-simetria; (c) Vista normal ao plano octaédrico.

### 7.3 DEFORMAÇÃO DE SUBPLASTIFICAÇÃO

Nakai & Hinokio (2004) elaboraram um modelo com duas superfícies, adicionando o conceito do tensor modificado ao então denominado modelo Subloading tij. Adicionalmente, consideraram uma quantidade  $\rho$  que mede o estado de densificação do solo. No modelo SubCam apresentado aqui, a variável  $\rho$ , mostrada no gráfico da Figura 7.1a, é definida pela diferença entre as tensões médias equivalentes aos tamanhos das duas superfícies de plastificação. A Figura 7.1a auxilia a dedução da seguinte expressão:

$$\varepsilon_v^{p(sy)} = \frac{-\rho}{v} = \chi \ln \left( \frac{z_0}{z_1} \right) \quad \text{em que} \quad \chi = \frac{(\lambda - \kappa)}{v} \quad (7.4)$$

que define também a deformação volumétrica relacionada ao estado de subplastificação  $\varepsilon_v^{p(sy)}$  (Pedroso et al., 2005). Esta última, em contraposição à variável  $\rho$ , é mais conveniente à dedução do modelo. O superscrito  $^{sy}$  indica subplastificação (“subyielding”). Acima,  $v = 1 + e$  é o volume específico.

## 7.4 VARIÁVEIS INTERNAS

A superfície normal de plastificação tem a mesma evolução adotada pelo Cam-clay, ou seja, a taxa de variação de seu tamanho é relacionada à variação da deformação volumétrica plástica pela seguinte equação:

$$\dot{z}_1 = \frac{z_1}{\chi} \dot{\varepsilon}_v^p \quad (7.5)$$

Diferenciando a Eq. (7.4) com relação ao tempo, obtém-se a equação evolutiva da superfície de subcarregamento em função das deformações volumétrica e volumétrica de subplastificação. O resultado é mostrado a seguir:

$$\dot{z}_0 = \frac{z_0}{\chi} (\dot{\varepsilon}_v^p + \dot{\varepsilon}_v^{p(sy)}) \quad (7.6)$$

Assim, duas equações evolutivas, uma para a deformação volumétrica e outra para a de subcarregamento, devem ser introduzidas. A primeira é obtida, considerando a teoria convencional da plasticidade, pelo fluxo plástico (Eq. 7.7). A segunda deve ser elaborada de forma que a distância entre as superfícies seja anulada para grandes deformações plásticas e é relacionada ao processo de plastificação mediante o multiplicador plástico  $\dot{\Lambda}$  (Eq. 7.8). Para isso, a variável auxiliar  $L$ , definida na Eq. (7.9), é introduzida.

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\Lambda} \underline{\underline{\mathbf{r}}}, \quad \dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\Lambda} \text{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \quad (7.7)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^{p(sy)} = \dot{\Lambda} L(\varepsilon_v^{p(sy)}) \quad (7.8)$$

$$L(\varepsilon_v^{p(sy)}) = c \frac{|\varepsilon_v^{p(sy)}|^2}{p} = c \frac{[\chi \ln(z_1/z_0)]^2}{p} \quad (7.9)$$

Na Eq. (7.9),  $c$  é o único parâmetro adicional, com relação ao modelo Cam-clay e tem a função de controlar a taxa de decaimento da flexibilidade do modelo, para qualquer tipo de trajetória que cause ciclos de carregamento e descarregamento.

É possível relacionar diretamente as variáveis internas  $z_0$  e  $z_1$  com as deformações plásticas, obtendo-se os módulos de endurecimento  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$ . Para isso, as equações (7.9), (7.8) e (7.7) devem ser substituídas nas equações (7.6) e (7.5), resultando em:

$$\dot{z}_1 = \dot{\Lambda} \frac{z_1}{\chi} \text{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} = \dot{\Lambda} \mathcal{H}_1 \quad (7.10)$$

$$\dot{z}_0 = \dot{\Lambda} \frac{z_0}{\chi} (\text{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} + L) = \dot{\Lambda} \mathcal{H}_0 \quad (7.11)$$

Nota-se que, quando  $L$  for zero (variável de densificação  $\rho$  nula), as duas superfícies crescem juntas, como se o material não estivesse pré-adensado/densificado. Em trajetórias de descarregamento, a superfície normal permanece estacionária e a superfície de subcar-

regamento diminui de tamanho. Com isso, a variável  $L$  aumenta, alterando a rigidez simulada pelo modelo.

## 7.5 SISTEMA DE EQUAÇÕES (DAS)

A dedução dos tensores elastoplásticos pode ser feita de forma idêntica àquela apresentada no Capítulo Elastoplasticidade e Subcarregamento (Capítulo 3). A seguir, uma breve revisão desta dedução é realizada.

O DAS resultante terá a seguinte forma:

$$\dot{y} = \mathcal{F}(x, y)\dot{x}, \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{e} \quad y(t_0) = y_0 \quad (7.12)$$

na qual  $x$  e  $y$  podem, alternadamente, representar os tensores de tensão ou deformação.

A lei elastoplástica será dada por:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{C}}^{ep} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}^{ep} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \quad (7.13)$$

em que  $\underline{\underline{C}}^{ep}$  e  $\underline{\underline{D}}^{ep}$  são tensores de quarta ordem de flexibilidade e de rigidez, respectivamente.

A hipótese inicial para o desenvolvimento do DAS elastoplástico é a divisão linear da taxa de deformação total entre parte elástica e parte plástica. Ao mesmo tempo, a Lei de Hooke Generalizada (Figura 3.2) é considerada. Com a decomposição aditiva das deformações (Eq. 3.3), a Lei de Hooke Generalizada (Eq. 3.4) e lei de fluxo (Eq. 7.7), encontra-se:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{C}}^e : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \dot{\lambda} \underline{\underline{r}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}^e : (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \dot{\lambda} \underline{\underline{r}}) \quad (7.14)$$

A condição de consistência deve ser determinada para a superfície de subcarregamento, para isso, a variação de  $f$  com as variáveis internas  $z_i$  deve ser limitada à variação com relação ao tamanho da superfície de subcarregamento  $z_0$ . Assim,

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial z_0} \dot{z}_0 = \underline{\underline{V}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + y_0 \dot{z}_0 = 0 \quad (7.15)$$

Este modelo adota fluxo associado, portanto:

$$\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{V}} \quad (7.16)$$

O endurecimento do modelo é devido, primeiramente, ao endurecimento da superfície de subcarregamento. Matematicamente, isso decorre do fato de que a condição de consistência (Eq. 7.15) considera apenas o tamanho da superfície de subcarregamento  $z_0$ . Entretanto, como o tamanho da superfície de subcarregamento é vinculado ao tamanho da superfície normal de plastificação  $z_1$ , esta última também terá influência no endurecimento



do modelo.

Inserindo a lei de fluxo (Eq. 7.7) e a de endurecimento para a superfície de subcarregamento (Eq. 7.11) na Eq. (7.15) (consistência), o multiplicador plástico ou de Lagrange poderá ser expresso em função das taxas de tensão ou deformação:

$$\dot{\Lambda} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}}}{-y_0 \mathcal{H}_0} \quad \text{ou} \quad \dot{\Lambda} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}^e} : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}}}{\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}^e} : \underline{\underline{\mathbf{r}}} - y_0 \mathcal{H}_0} \quad (7.17)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (7.17) nas equações (7.14), os seguintes tensores podem ser encontrados:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{ep} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e + \frac{\underline{\underline{\mathbf{r}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{V}}}}{-y_0 \mathcal{H}_0} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e - \frac{(\underline{\underline{\mathbf{D}}^e} : \underline{\underline{\mathbf{r}}}) \otimes (\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}^e})}{\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}^e} : \underline{\underline{\mathbf{r}}} - y_0 \mathcal{H}_0} \quad (7.18)$$

Similarmente, substituindo as expressões para  $\dot{\Lambda}$  (Eq. 7.17) nas leis de endurecimento para as superfícies de subcarregamento e normal de plastificação (Eqs. 7.11 e 7.10), as seguintes equações são encontradas:

$$\dot{z}_i = \underline{\underline{\mathbf{b}}}_i : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad \text{ou} \quad \dot{z}_i = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_i : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}} \quad \text{em que} \quad i=0,1 \quad (7.19)$$

em que

$$\underline{\underline{\mathbf{b}}}_i = \frac{\mathcal{H}_i}{h^p} \underline{\underline{\mathbf{V}}} \quad \text{em que} \quad i=0,1 \quad (7.20)$$

e

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_i = \frac{\mathcal{H}_i}{\Phi} \underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e \quad \text{em que} \quad i=0,1 \quad (7.21)$$

são tensores de segunda ordem independentes das taxas de tensão ou deformação e as seguintes variáveis foram definidas

$$h^p = -y_i \mathcal{H}_i \quad (\text{no sum on } i) \quad (7.22)$$

e

$$\Phi = \underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{r}}} - y_i \mathcal{H}_i \quad (\text{no sum on } i) \quad (7.23)$$

Verifica-se que o denominador de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{ep}$  e  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep}$  contém apenas o módulo de endurecimento  $\mathcal{H}_0$ . Como este é dado por

$$\mathcal{H}_0 = \frac{z_0}{\chi} (\text{tr } \underline{\underline{\mathbf{r}}} + L), \quad (7.24)$$

que é função de  $L$ , verifica-se facilmente que esta parte da equação é a principal influência do conceito de Subcarregamento no modelo. Quando  $L$  for nulo, o que equivale a dizer que as duas superfícies estão juntas, o modelo funcionará igualmente ao modelo Cam-clay. Para  $L > 0$ , a rigidez simulada pelo modelo será maior. Como  $L$  varia com a

deformação volumétrica de subcarregamento, ou medida  $\rho$  de densificação, é de se esperar que o endurecimento previsto pelo modelo será dependente dos ciclos de carregamento-descarregamento.  $L$  não deverá ser menor que zero, pois considera-se que na situação limite, a superfície normal de plastificação seja reduzida à superfície de subcarregamento.

Em seguida, a mesma representação matricial do Capítulo 3 é considerada. Para trajetórias de tensão impostas:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \\ \dot{z}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}^{ep}(\underline{\underline{\sigma}}, z_0) & 0 \\ \underline{\underline{b}}_i(\underline{\underline{\sigma}}, z_i) & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \dot{y} = \mathcal{F}(x, y)\dot{x} \quad \circ \Rightarrow \{:, \times\} \quad (7.25)$$

Para trajetórias de deformação:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{z}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}^{ep}(\underline{\underline{\sigma}}, z_0) & 0 \\ \underline{\underline{B}}_i(\underline{\underline{\sigma}}, z_i) & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \dot{y} = \mathcal{F}(x, y)\dot{x} \quad \circ \Rightarrow \{:, \times\} \quad (7.26)$$

Note, agora, que  $\underline{\underline{C}}^{ep}$  e  $\underline{\underline{D}}^{ep}$  são funções apenas do tamanho da superfície de subcarregamento  $z_0$ . No entanto, a mesma forma do DAS é obtida, permitindo a aplicação dos mesmos esquemas de solução/integração. Com isso, os algoritmos das Figuras 3.3 e 3.4 poderão ser aplicados, nos quais as rotinas de integração numérica são estudadas no Capítulo 11.

Para montagem dos tensores elastoplásticos  $\underline{\underline{C}}^{ep}$  e  $\underline{\underline{D}}^{ep}$ , os gradientes da função de plastificação e o cálculo das variáveis de endurecimento são necessários. Assim, com o intuito de facilitar a implementação computacional, apresenta-se a Tabela 7.1 com as equações necessárias. Além disso, o algoritmo da Figura 7.3 mostra esquematicamente a rotina para o cálculo de todas variáveis.

**Tabela 7.1:** Gradientes de primeira ordem necessários à implementação computacional do modelo Subloading Cam-clay (SubCam).

| Entidade                                                | Definição                                                      | Expressão                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{V}}$ | $\frac{dM(\theta)}{d\theta}$                                   | $= \frac{0.75M(1-\omega) \cos 3\theta}{1+\omega-(1-\omega) \sin 3\theta}$                                                                                                                                                                                                                                                  |
|                                                         | $\frac{d\theta}{d\underline{\underline{\sigma}}}$              | $= \frac{1.5}{q^2 \cos 3\theta} \left( \frac{3}{q} \text{dev } \underline{\underline{s}}^2 - \sin 3\theta \underline{\underline{s}} \right)$                                                                                                                                                                               |
|                                                         | $= \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$ | $= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$ |
|                                                         |                                                                | $= \frac{M(\theta)^2(2p-z_0)}{3} \underline{\underline{I}} + 3\underline{\underline{s}} + 2M(\theta)p(p-z_0) \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$                                                                                                           |
| $y_0$                                                   | $= \frac{\partial f}{\partial z_0}$                            | $= -M(\theta)^2 p$                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $y_1$                                                   | $= \frac{\partial f}{\partial z_1}$                            | $= 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

Embora não necessários aos esquemas de integração explícita, os gradientes de segunda ordem também são agrupados na Tabela 7.2. Com isso, o esquema de solução implícito do tipo Backward-Euler também poderá ser usado na solução deste modelo. Ressalta-se que na dedução dos gradientes de segunda ordem,  $M$  foi considerado constante.

**Tabela 7.2:** Gradientes de segunda ordem necessários à solução do modelo Subloading Cam-clay (SubCam) com esquemas implícitos, considerando  $M$  constante.

| Entidade                  | Definição                                                                           | Expressão                                                                                                                                            |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\underset{\approx}{M}$   | $= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$    | $= \left( \frac{2M^2}{9} - 1 \right) \underset{\approx}{\mathbf{I}} \otimes \underset{\approx}{\mathbf{I}} + 3 \underset{\approx}{\mathbf{I}}^{sym}$ |
| $\underset{\approx}{N}_0$ | $= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_0}$                                        | $= \frac{-M^2}{3} \underset{\approx}{\mathbf{I}}$                                                                                                    |
| $\underset{\approx}{R}_0$ | $= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$ | $= \frac{p_1}{\chi} \left( \frac{2M^2}{3} - \frac{L}{3p^2} \right) \underset{\approx}{\mathbf{I}}$                                                   |
| $\underset{\approx}{R}_1$ | $= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$ | $= \frac{p_1 \epsilon}{\chi} \frac{2M^2}{3} \underset{\approx}{\mathbf{I}}$                                                                          |
| $S_{00}$                  | $= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial 0}$                                       | $= \frac{tr(\mathbf{r})}{\chi} + \frac{L - 2c(\lambda - \kappa)^2 \log z_1/z_0}{p\chi}$                                                              |
| $S_{01}$                  | $= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial 1}$                                       | $= \frac{z_0 2c(\lambda - \kappa)^2 \log z_1/z_0}{z_1 p \chi}$                                                                                       |
| $S_{10}$                  | $= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial 0}$                                       | $= 0$                                                                                                                                                |
| $S_{11}$                  | $= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial 1}$                                       | $= \frac{tr(\mathbf{r})}{\chi}$                                                                                                                      |

**Entrada** : Volume específico  $v$ , estado de tensão  $\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}$ , variáveis internas  $z_i$

**Saída** : Direção das deformações plásticas  $\mathbf{r}$ , derivada  $\underset{\approx}{\mathbf{V}} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$ , derivadas  $y_i = \frac{\partial f}{\partial z_i}$ ,  
módulos de endurecimento  $\mathcal{H}_i$ , coeficiente plástico  $h^p$

*! Invariantes*

Calcular  $p, q, \underset{\approx}{\mathbf{s}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{tr \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}{3} \underset{\approx}{\mathbf{I}}$  e  $\sin(3\theta)$  *! Eq. (5.6)*

Calcular  $M \leftarrow M(\theta)$  *! Eq. (7.2)*

*! Gradientes*

$\underset{\approx}{\mathbf{V}} \leftarrow M^2(2p - z_0) \underset{\approx}{\mathbf{I}}/3$

**if**  $q > q_{min}$  **then**

$\underset{\approx}{\mathbf{V}} \leftarrow \underset{\approx}{\mathbf{V}} + 3 \underset{\approx}{\mathbf{s}}$

$\cos(3\theta) \leftarrow \sqrt{1 - \sin^2(3\theta)}$

**if**  $\cos(3\theta) > zero_{tol}$  **then**

$\frac{dM(\theta)}{d\theta} \leftarrow \frac{0.75M(1-\omega)\cos 3\theta}{1+\omega-(1-\omega)\sin 3\theta}$  *! Eq. (5.21)*

$\underset{\approx}{\mathbf{s}}^2 \leftarrow \underset{\approx}{\mathbf{s}} \bullet \underset{\approx}{\mathbf{s}}$

$dev \underset{\approx}{\mathbf{s}}^2 \leftarrow \underset{\approx}{\mathbf{s}} \bullet \underset{\approx}{\mathbf{s}} - \frac{tr \underset{\approx}{\mathbf{s}} \bullet \underset{\approx}{\mathbf{s}}}{3} \underset{\approx}{\mathbf{I}}$  *! Eq. (5.20)*

$\frac{d\theta}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} \leftarrow \frac{1.5}{q^2 \cos 3\theta} \left( \frac{3}{q} dev \underset{\approx}{\mathbf{s}}^2 - \sin 3\theta \underset{\approx}{\mathbf{s}} \right)$  *! Eq. (5.19)*

$\underset{\approx}{\mathbf{V}} \leftarrow \underset{\approx}{\mathbf{V}} + 2Mp(p - z_0) \frac{dM(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$

$\underset{\approx}{\mathbf{r}} \leftarrow \underset{\approx}{\mathbf{V}}$

$y_0 \leftarrow -M^2 p$

$y_1 \leftarrow 0$

*! Endurecimento*

$\chi \leftarrow (\lambda - \kappa)/v$

$L \leftarrow c[\chi \log(z_1/z_0)]^2/p$

$\mathcal{H}_0 \leftarrow z_0(tr \underset{\approx}{\mathbf{r}} + L)/\chi$

$\mathcal{H}_1 \leftarrow z_1 tr \underset{\approx}{\mathbf{r}}/\chi$

*! Módulo plástico*

$h^p \leftarrow -y_0 \mathcal{H}_0$

**Figura 7.3:** Rotina para o cálculo dos gradientes e variáveis de endurecimento do modelo SubCam.

## 7.6 VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL

As equações do modelo SubCam podem ser diretamente substituídas no algoritmo da Figura 3.3, permitindo a simulação de ensaios de laboratório. Os resultados das simulações dos seguintes grupos de ensaios são mostrados aqui: a) Ensaios cíclicos com argila Fujinomori (FO1); b) Ensaios monotônicos com a argila Fujinomori (FCH) e c) Ensaios monotônicos com a com a areia Toyoura (TSD). As trajetórias e explicações dos ensaios são omitidas, mas podem ser encontradas no Capítulo 4.

### 7.6.1 ENSAIOS CÍCLICOS COM A ARGILA FUJINOMORI (FO1)

As Figuras 7.4 até 7.13 mostram os resultados apresentados por Chowdhury (1994) com a argila Fujinomori (FO1 - “Fujinomori Old” com OCR=1). Os cinco primeiros resultados, Figuras 7.4 até 7.8, correspondem aos ensaios com tensão média ( $p$ ) constante. Resultados de dois ensaios do tipo triaxial convencional (CTC) são apresentados nas Figuras 7.9 e 7.10. Por último, os resultados dos ensaios triaxiais cúbicos são mostrados nas Figuras 7.11 até 7.13. Os parâmetros e as condições iniciais (OCR) usados nas simulações são apresentados na Tabela 7.3.

**Tabela 7.3:** Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios cíclicos com a argila Fujinomori (FO1) e o modelo SubCam.

| Parâmetro/constante | Valor  | Unidade/tipo |
|---------------------|--------|--------------|
| $\lambda$           | 0.0891 |              |
| $\kappa$            | 0.0196 |              |
| $\phi_{cs}$         | 31.6   | $^{\circ}$   |
| $G$                 | 105    | $kPa$        |
| $c$                 | 14000  |              |
| $OCR$               | 1      |              |

A Figura 7.4, correspondente ao ensaio FO1-CTP-01, permite observar que o modelo SubCam, de certa forma, consegue simular o aumento da rigidez com o número de ciclos. Isso é notado, por exemplo, pelo gráfico de  $q/p$  versus  $\varepsilon_d$  em que se pode observar que a magnitude do incremento de deformação desviadora diminui com os ciclos, ou seja, a representação da relação tensão desviadora-deformação desviadora é razoável. Em contrapartida, considerando as deformações volumétricas (gráfico de  $q/p$  versus  $\varepsilon_v$ ), apesar de as deformações volumétricas diminuírem, os resultados experimentais mostram que o material aumenta a rigidez mais rapidamente do que o que foi simulado. No entanto, de forma geral, o resultado é satisfatório, principalmente quando em comparação com os valores calculados pelo modelo Cam-clay modificado. Estes valores também são apresentados na mesma figura. Como o modelo Cam-clay não considera o subcarregamento, a região elástica aumenta com a primeira trajetória de compressão, fazendo com que todos os ciclos

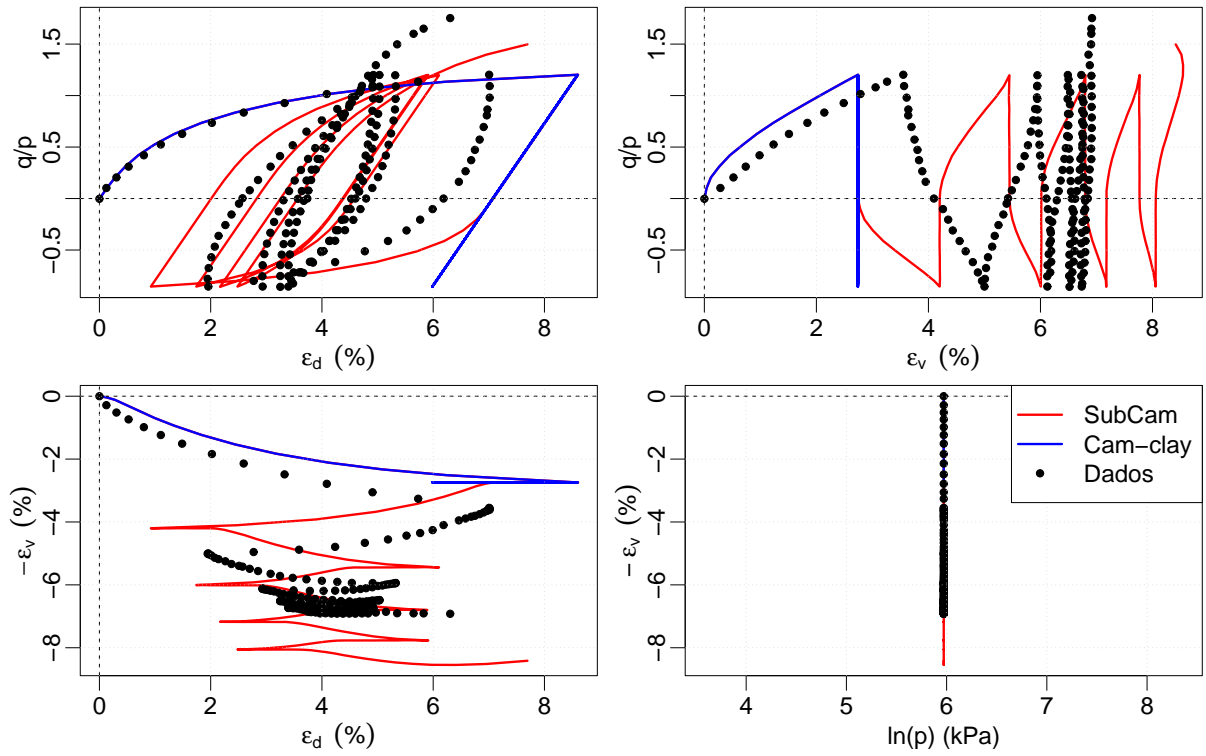
de carregamento em compressão-descarregamento-carregamento em extensão ocorram no regime elástico. Com isso, as deformações desviadoras calculadas com o Cam-clay não correspondem aos ciclos com variação de rigidez e as deformações volumétricas são nulas devido a ausência de deformação volumétrica plástica.

Os resultados das simulações apresentados na Figura 7.5, com ciclos de amplitudes diferentes (ensaio FO1-CTP-02), mostram que o modelo SubCam consegue simular os ciclos das curvas tensão desviadora-deformação desviadora relativamente bem. O comportamento de dilatância e a variação da deformação volumétrica também são bem representados. Ao contrário, o modelo Cam-clay perde a acurácia, pois os ciclos de compressão-descompressão-extensão ficam limitados ao regime elástico. No entanto, aumentando a amplitude do ciclo, o domínio elástico do modelo Cam-clay também é aumentado, após a ocorrência de deformações plásticas. As mesmas conclusões são válidas para os resultados das simulações mostrados na Figura 7.6 (ensaio FO1-CTP-03), entretanto, para o modelo SubCam, a diminuição de deformação desviadora é bem maior que a que ocorre no material. Já a representação da deformação volumétrica com este modelo é relativamente acurada.

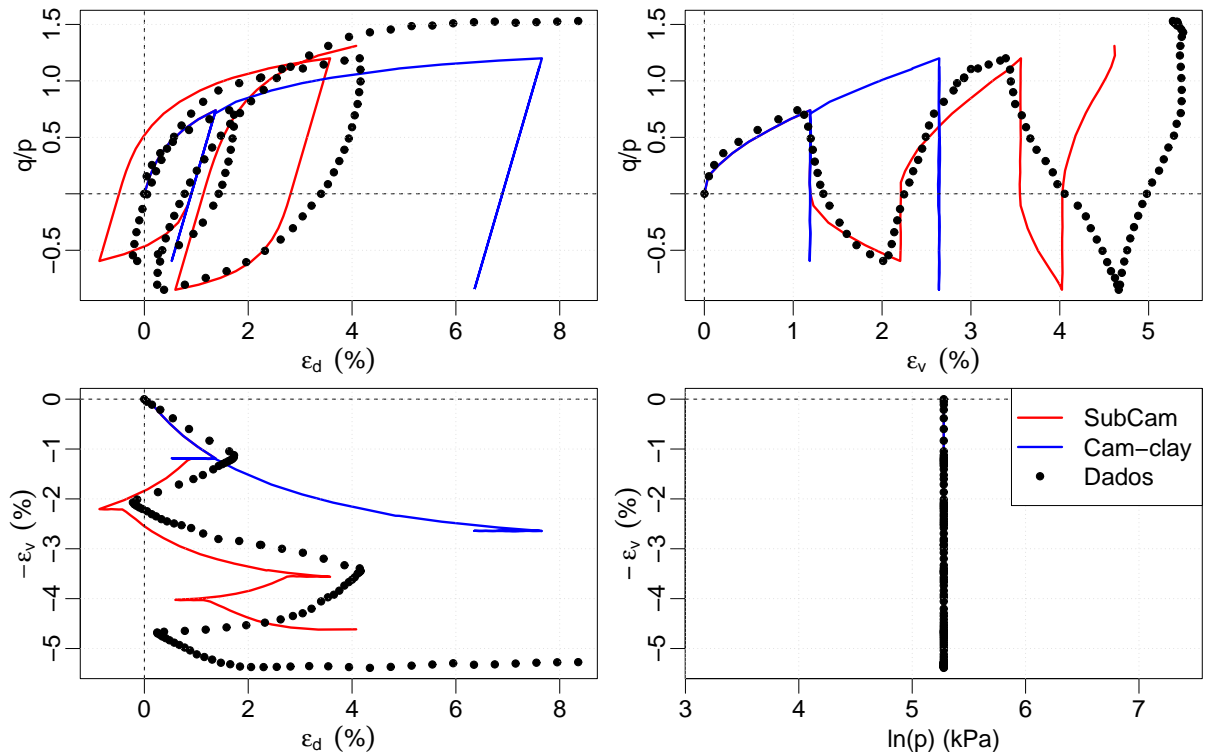
As Figuras 7.7 e 7.8 mostram os resultados dos ensaios FO1-CTP-06 e FO1-CTP-07, respectivamente. Nestas figuras, observa-se que o modelo SubCam simula o aumento de deformação plástica para a compressão e extensão, enquanto que o modelo Cam-clay não representa bem a extensão devido ao regime elástico. Para o ensaio começando com extensão FO1-CTP-07, cujos resultados são mostrados na Figura 7.8, o decréscimo de deformação desviadora é bem maior do que ocorre no material. Nas Figuras 7.7 e 7.8 nota-se um leve aumento de deformação volumétrica durante o descarregamento. Este aumento não é calculado pelo modelo SubCam (e Cam-clay), pois esta trajetória corresponde ao descarregamento elástico.

As Figuras 7.9 e 7.10 apresentam os resultados das simulações dos ensaios triaxiais convencionais FO1-CTR-01 e FO1-CTR-02, respectivamente. Na Figura 7.9 observa-se que o modelo SubCam simula o pequeno ciclo no gráfico tensão desviadora-deformação desviadora devido à compressão-descompressão-extensão. O modelo SubCam também simula o aumento de deformação volumétrica ao longo deste ciclo. No entanto o aumento de deformação volumétrica é um pouco maior que o mesmo apresentado pelo material. A Figura 7.10 corresponde a um ensaio monotônico, no qual observa-se que os valores calculados pelos modelos SubCam e Cam-clay são iguais entre si.

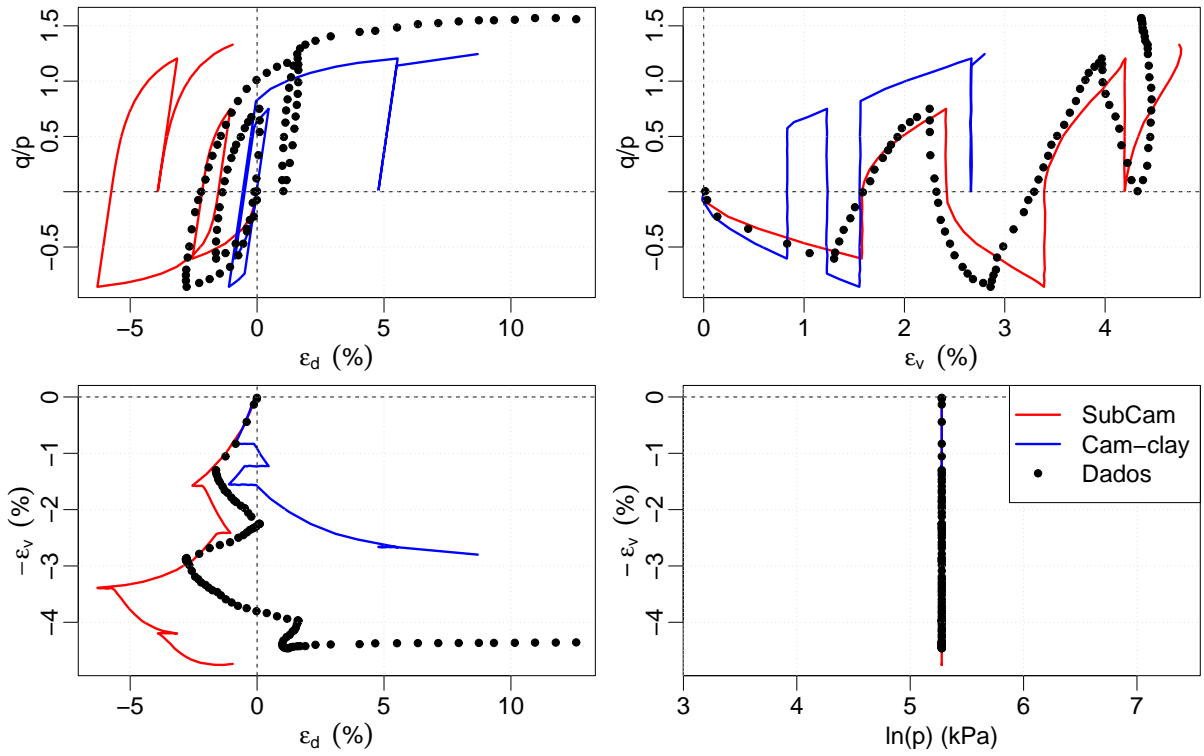
Os valores calculados pelos modelos SubCam e Cam-clay para os ensaios triaxiais cúbicos são mostrados nas Figuras 7.11 a 7.13. Para o modelo SubCam, verifica-se que, apesar de o comportamento geral ser bem representado, principalmente com relação à deformação volumétrica, o modelo tem algumas dificuldades em representar o comportamento para as trajetórias tridimensionais correspondentes. O modelo Cam-clay não consegue capturar todas as características de comportamento cíclico do material.



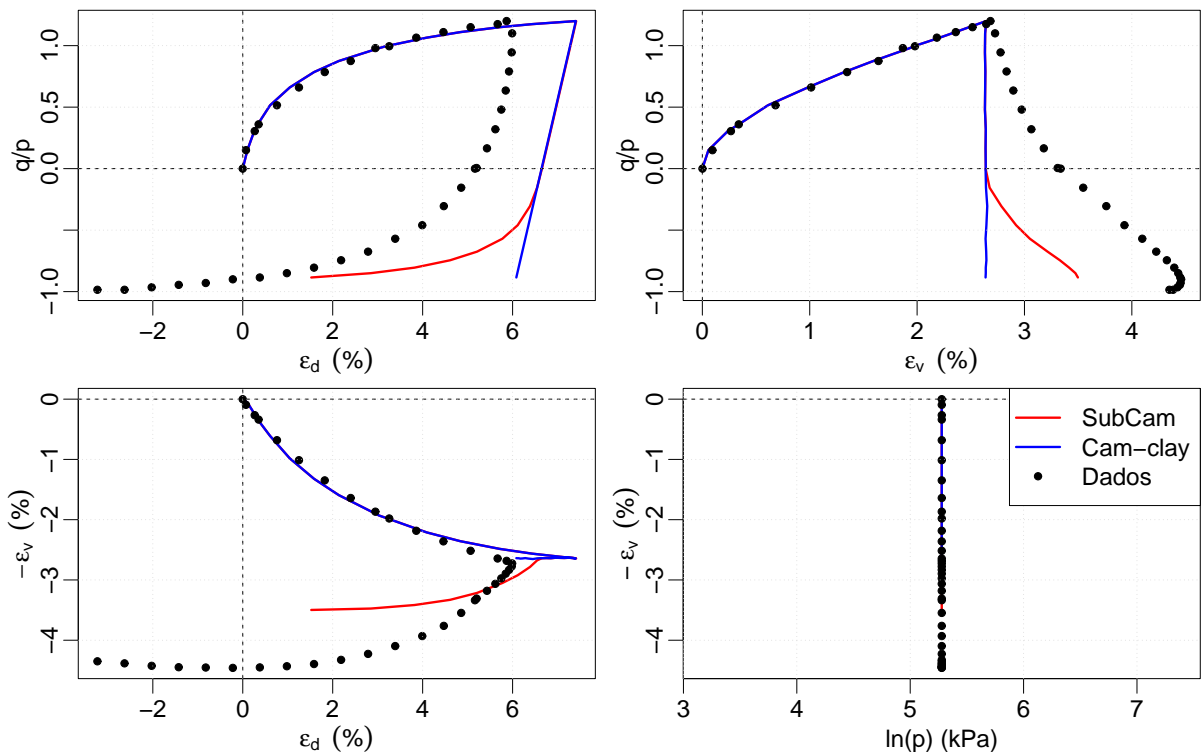
**Figura 7.4:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-01** com a argila Fujinomori e o modelo **SubCam**.



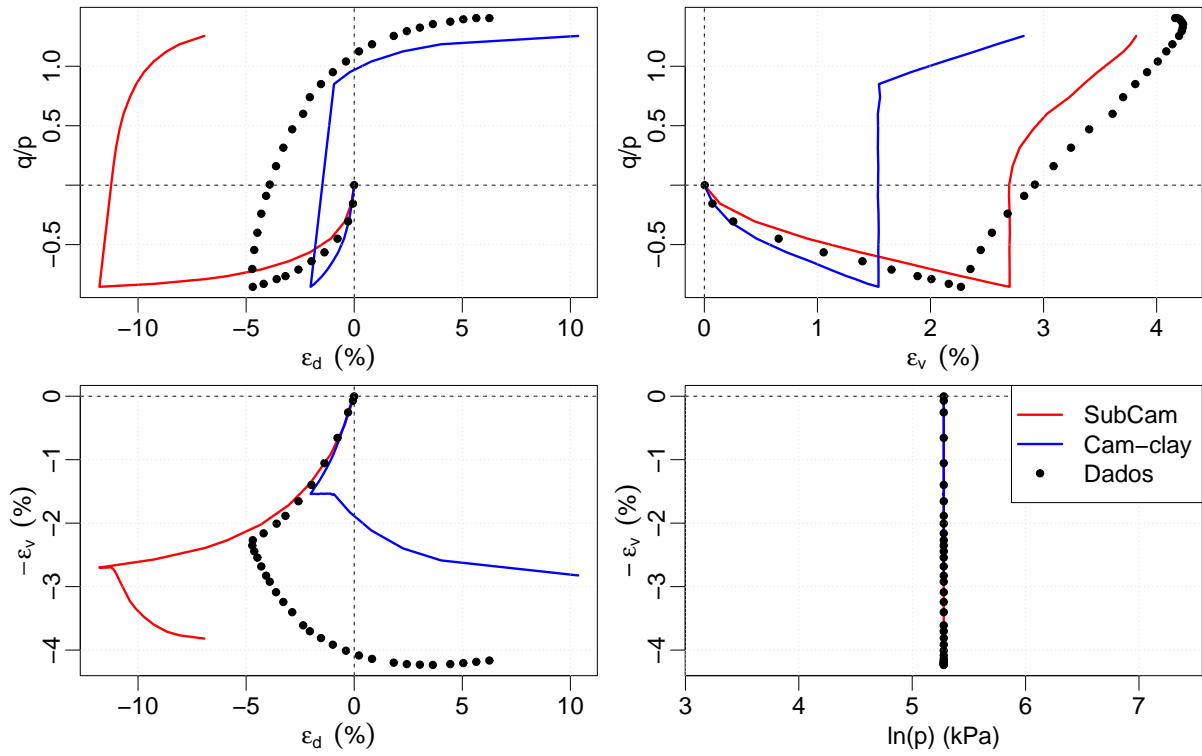
**Figura 7.5:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-02** com a argila Fujinomori e o modelo **SubCam**.



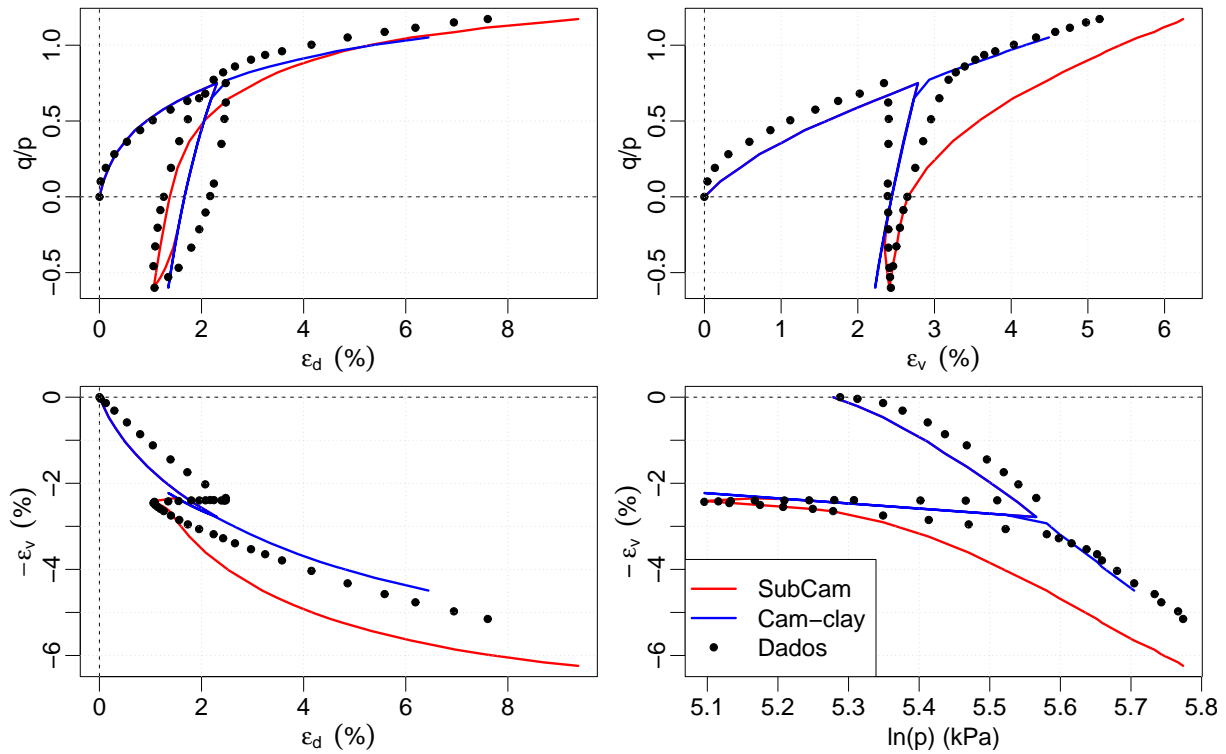
**Figura 7.6:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-03** com a argila Fujinomori e o modelo **SubCam**.



**Figura 7.7:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-06** com a argila Fujinomori e o modelo **SubCam**.

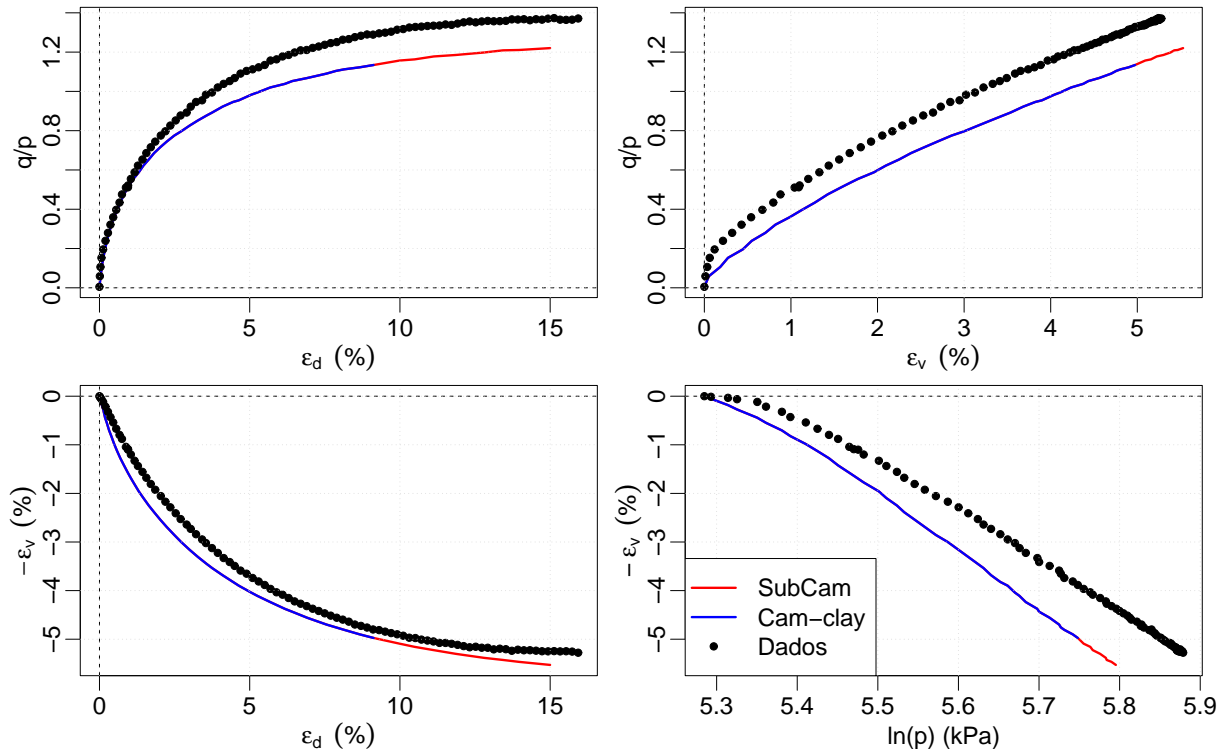


**Figura 7.8:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-07** com a argila Fujinomori e o modelo **SubCam**.

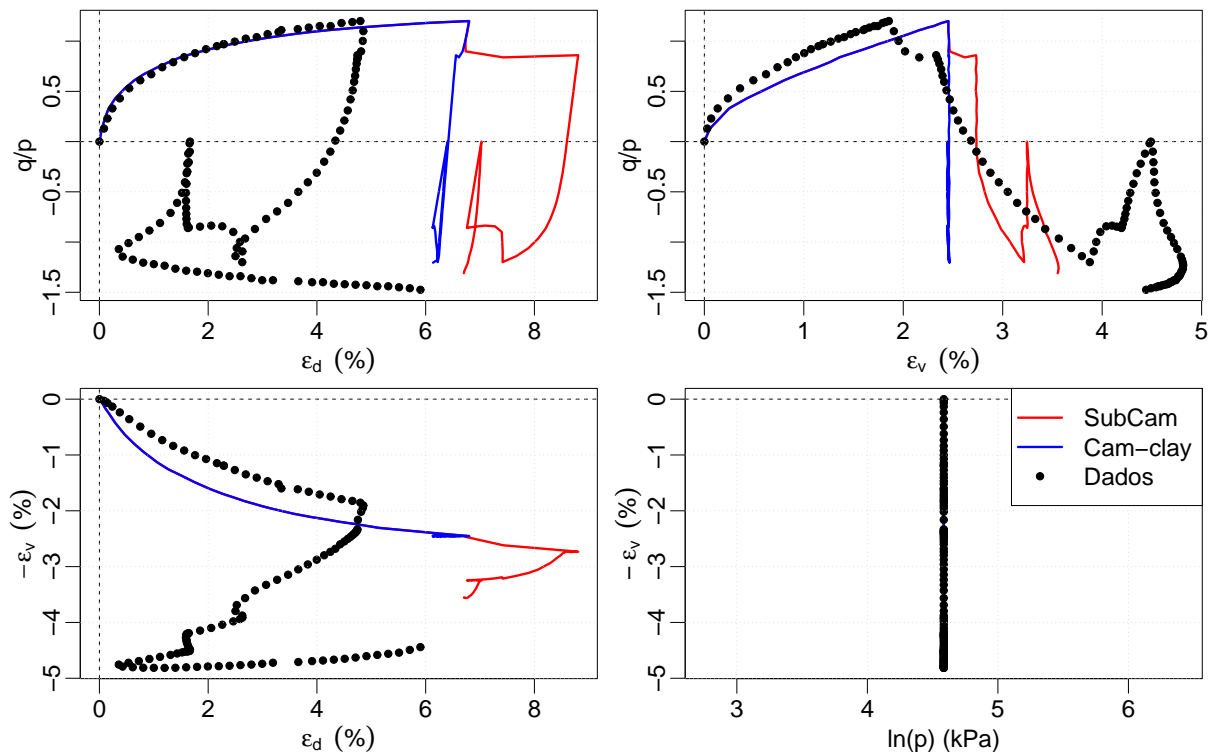


**Figura 7.9:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTR-01** com a argila Fujinomori e o modelo **SubCam**.

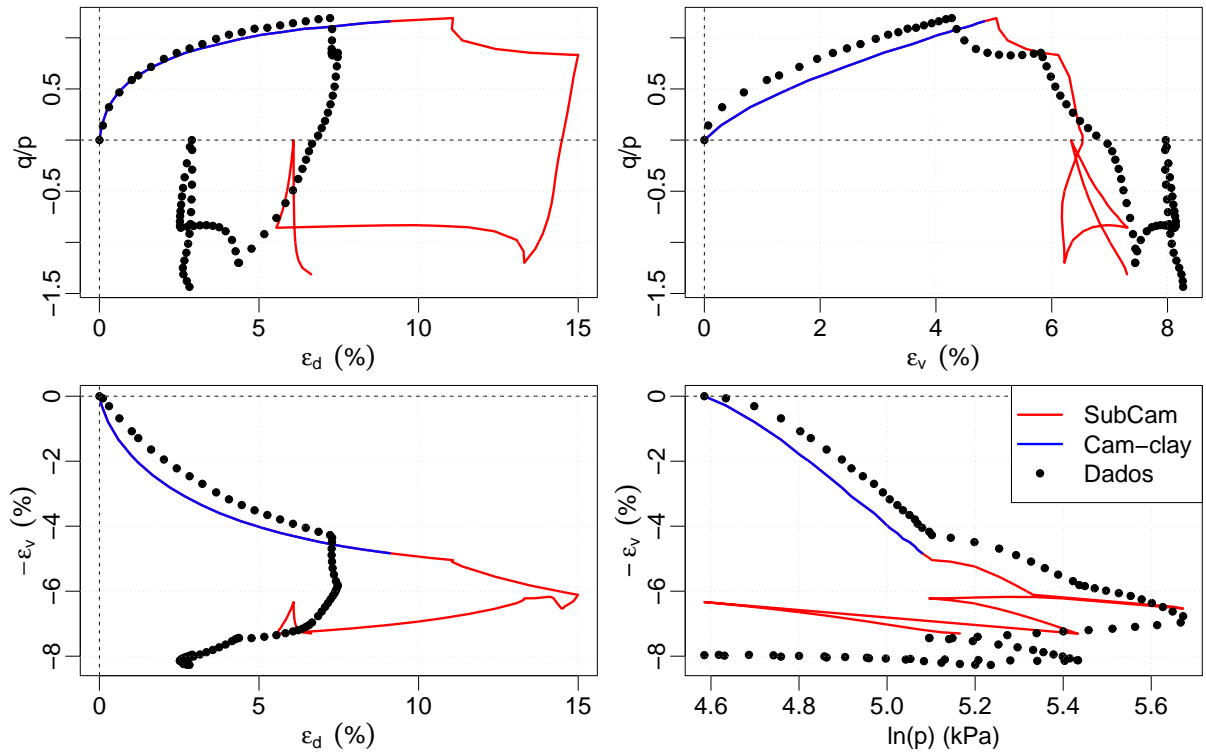




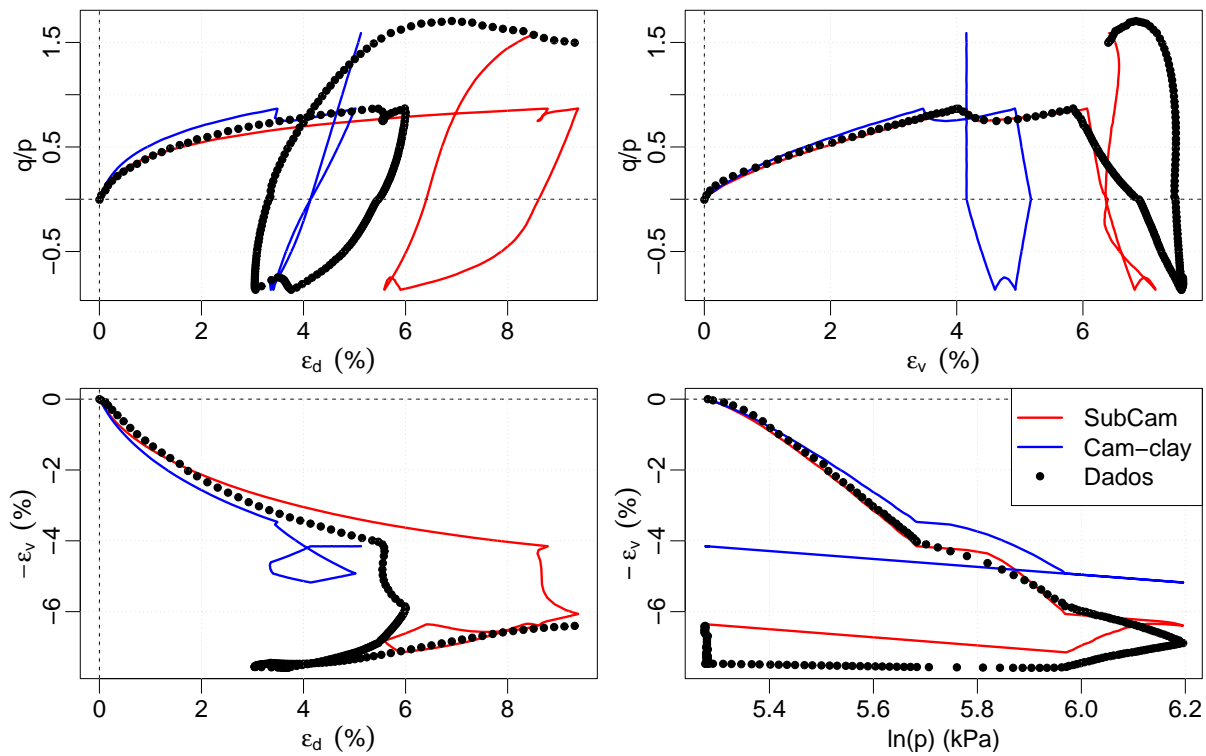
**Figura 7.10:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTR-02** com a argila Fujinori e o modelo **SubCam**.



**Figura 7.11:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-TTX-01** com a argila Fujinori e o modelo **SubCam**.



**Figura 7.12:** Resultados das simulações do ensaio FO1-TTX-02 com a argila Fujinori e o modelo SubCam.



**Figura 7.13:** Resultados das simulações do ensaio FO1-TTX-04 com a argila Fujinori e o modelo SubCam.

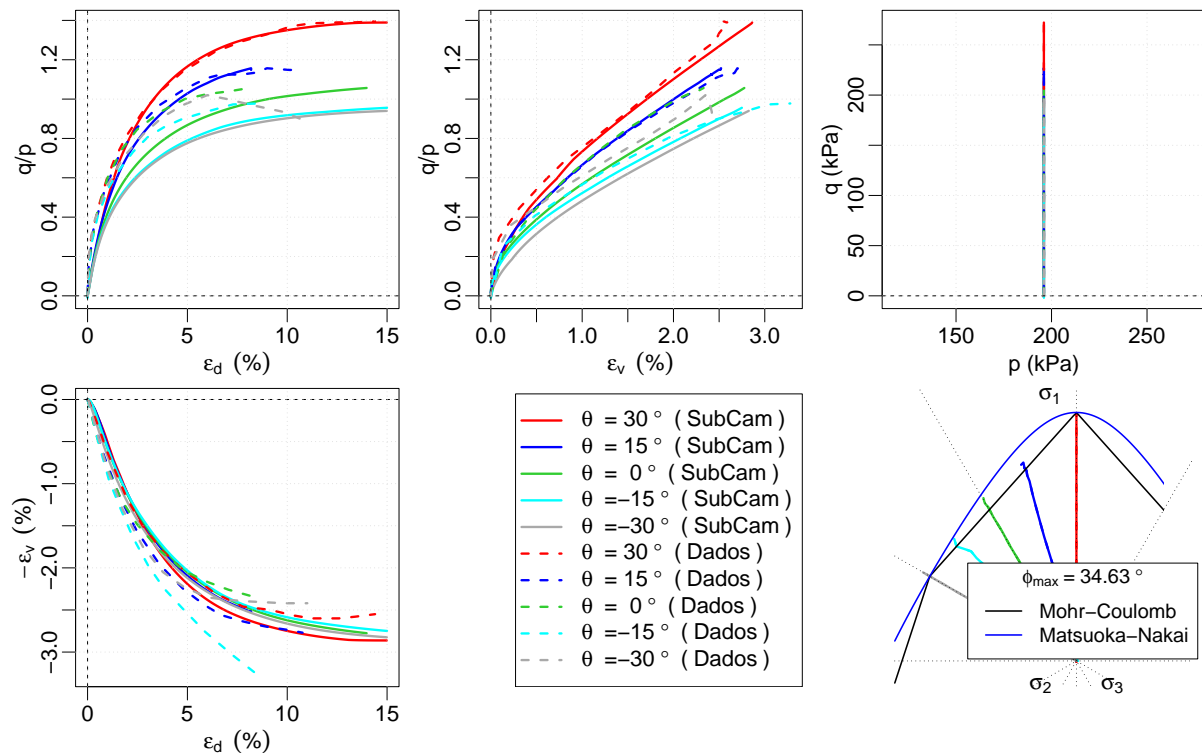
### 7.6.2 ENSAIOS MONOTÔNICOS COM A ARGILA FUJINOMORI (FCH)

Resultados das simulações dos ensaios monotônicos com diferentes valores de ângulo de Lode e com a argila Fujinomori (FCH) são mostrados na Figura 7.14. Os parâmetros usados nas simulações destes ensaios são apresentados na Tabela 7.4, destacando que o OCR usado foi igual a 1, tendo em vista que este material é normalmente adensado.

Com o auxílio da Figura 7.14, pode-se verificar que o modelo SubCam considera a dependência da resistência com relação ao ângulo de Lode. Também se verifica a simulação da dependência entre a deformabilidade e o ângulo de Lode.

**Tabela 7.4:** Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios monotônicos com a argila Fujinomori (FCH) e com o modelo **SubCam**.

| Parâmetro/constante | Valor   | Unidade/tipo |
|---------------------|---------|--------------|
| $\lambda$           | 0.0778  |              |
| $\kappa$            | 0.00824 |              |
| $\phi_{cs}$         | 34.5    | $^{\circ}$   |
| $G$                 | 40      | $kPa$        |
| $c$                 | 0       |              |
| $OCR$               | 1       |              |



**Figura 7.14:** Resultados das simulações dos ensaios FCH-TTP-{01,02,03,04,05} com a argila Fujinomori e o modelo **SubCam**.

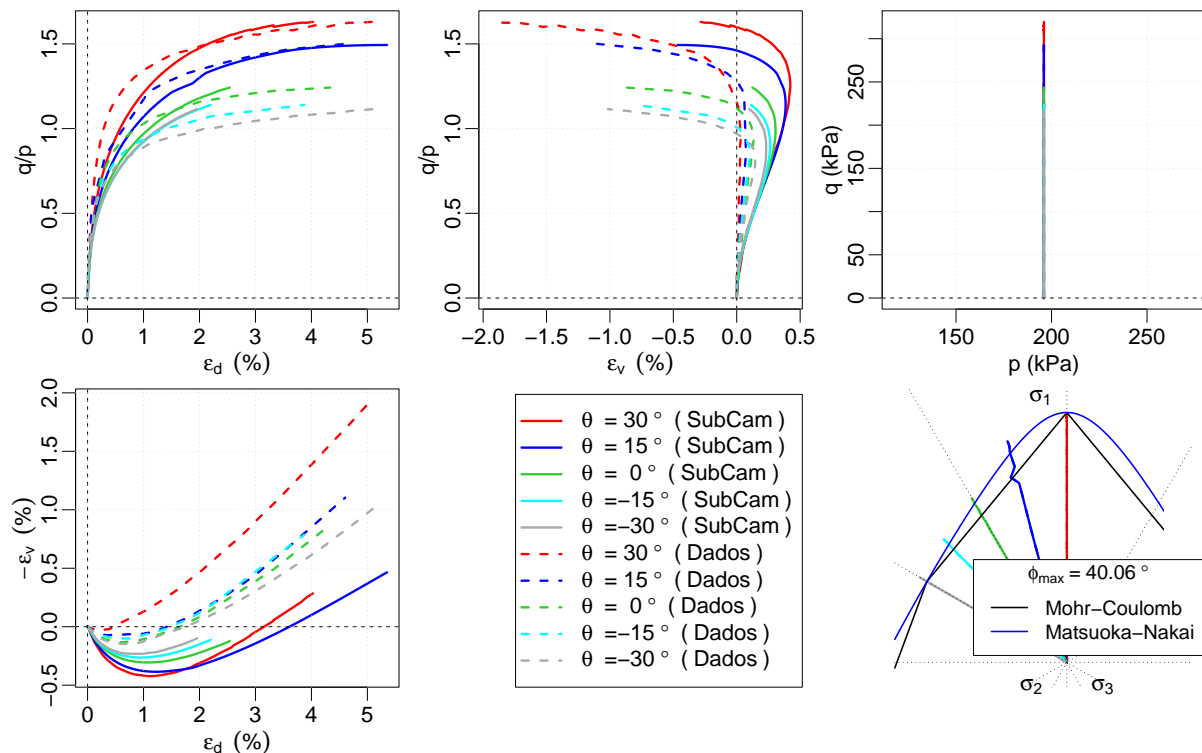
### 7.6.3 ENSAIOS MONOTÔNICOS COM A AREIA TOYOURA (TSD)

Por último, resultados das simulação dos ensaios monotônicos com diferentes valores de ângulo de Lode e com a areia Toyoura (TSD) são mostrados na Figura 7.15. Os parâmetros utilizados são mostrados na Tabela 7.5. Ressalta-se que foi usado um OCR igual a 8 para fazer com que as duas superfícies, de subcarregamento e normal, fossem inicializadas com uma distância entre si. Esta distância permite a simulação da dilatância positiva.

Com o auxílio da Figura 7.15, pode-se verificar a simulação da dependência da resistência com relação ao ângulo de Lode. Também se verifica a simulação da dilatância positiva durante endurecimento, contudo, não tão boa como a representação do comportamento tensão desviadora-deformação desviadora.

**Tabela 7.5:** Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios monotônicos com a areia Toyoura (TSD) e com o modelo **SubCam**.

| Parâmetro/constante | Valor  | Unidade/tipo |
|---------------------|--------|--------------|
| $\lambda$           | 0.0764 |              |
| $\kappa$            | 0.0115 |              |
| $\phi_{cs}$         | 31.1   | $^{\circ}$   |
| $G$                 | 514    | $kPa$        |
| $c$                 | 3500   |              |
| $OCR$               | 8      |              |



**Figura 7.15:** Resultados das simulações dos ensaios TSD-TTP-{01,02,03,04,05} com a areia Toyoura e o modelo **SubCam**.

## 7.7 CONCLUSÕES

O modelo SubCam, além de fornecer um auxílio didático durante a introdução ao conceito de subcarregamento, é uma alternativa simples que pode ser aplicada em simulações com carregamentos cíclicos, com algumas limitações.

As superfícies de plastificação possuem a forma do critério de Matsuoka-Nakai. Para isso o critério Argyris-Sheng et al. foi considerado, mediante a variação da inclinação  $M(\theta)$  em função do ângulo de Lode. Assim, a representação da resistência é melhorada, com relação ao modelo Cam-clay, que usa o critério Drucker-Prager. Por exemplo, verificou-se a boa representatividade de ensaios monotônicos com diferentes ângulos de Lode.

Do ponto de vista de implementação computacional, ressalta-se que a do o modelo SubCam é bastante fácil, pois usa os invariantes convencionais de Cambridge. Além disso, como a superfície de subcarregamento sempre acompanha o estado de tensões, o algoritmo de integração numérica não necessitará a determinação de interseções durante a determinação da condição de carregamento-descarregamento.

O DAS correspondente ao modelo SubCam, dado na forma genérica das Eqs. 7.25 e 7.26, pode ser resolvido com os esquemas do Capítulo 11. Com os gradientes de segunda ordem dados pela Tabela 7.2, esquemas do tipo implícito (Backward-Euler) também poderão ser considerados.

# Capítulo 8

## MODELO SUBLOADING TIJ

O modelo Subloading tij (Subtij), proposto por Nakai & Hinokio (2004), é capaz de representar algumas características do comportamento de materiais granulares sob carregamentos cíclicos. Sua maior novidade, com relação ao modelo tij-clay, anteriormente proposto por Nakai & Matsuoka (1986), é a adoção do conceito de Subcarregamento. A diferença do modelo tij-clay, e, então, do modelo Subtij, com relação ao modelo Cam-clay, é a utilização do tensor modificado tij; na verdade  $t_{ij}$ , em que  $i$  e  $j$  indicam os componentes do tensor  $\underline{\underline{t}}$  com relação a um sistema cartesiano com base ortonormal, no entanto, tij passou a ser um nome conveniente para o tensor  $\underline{\underline{t}}$ .

Com este tensor modificado (tij), o modelo passa a simular a influência do segundo invariante do tensor de tensões no comportamento mecânico do material. A utilidade do tensor  $\underline{\underline{t}}$  está na possibilidade de trabalhar no espaço modificado com equações análogas às mesmas idealizadas no espaço normal do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  e, automaticamente, se obter uma formulação dependente do segundo invariante de tensões, mediante uma anisotropia induzida. Essa anisotropia provém do fato de que o tensor  $\underline{\underline{t}}$  é função de outro tensor de anisotropia induzida ( $\underline{\underline{a}}$ ). O tensor  $\underline{\underline{a}}$  ( $a_{ij}$ ) é uma medida da variação do Plano Espacialmente Mobilizado (SMP), com relação à variação do estado de tensões.

O modelo Subloading tij também tem aplicação genérica a argilas e areias, pois leva em conta a influência do estado de densificação do material. Essa influência é justamente devido à adoção de duas superfícies, ou, equivalentemente, do estado de subplastificação (Hashiguchi & Ueno, 1977). A variação da densidade e, conseqüentemente, da rigidez do modelo é controlada por uma nova lei evolutiva para a distância entre as superfícies de subcarregamento e normal de plastificação. Obviamente, várias equações podem ser adotadas. No entanto, Nakai & Hinokio (2004) escolheram uma que adiciona apenas um parâmetro constitutivo, com relação ao modelo tij-clay.

É importante ressaltar que o modelo Subtij apresentado aqui **não** considera a hipótese da divisão linear das deformações plásticas em parte devida ao fluxo associado (AF) e parte relacionada à compressão isotrópica (IC) (Nakai & Hinokio, 2004). Esta divisão tem certa importância na melhor reprodução da influência da trajetória de tensão na direção das

deformações Nakai & Matsuoka (1986); Nakai & Hoshikawa (2001); Nakai & Hinokio (2004). No entanto, tal divisão só é considerada para incrementos positivos do invariante de tensão normal  $t_N$ . Assim, para trajetórias em que  $t_N$  fica constante ou diminui, o que implica em  $\dot{p}$  constante ou levemente positivo, o modelo Subtij deste trabalho é exatamente igual ao modelo Subloading tij apresentado por Nakai & Hinokio (2004). A dedução das equações do modelo Subtij completo, comparando-o com a formulação convencional da elastoplasticidade, pode ser encontrada em Pedroso et al. (2005).

## 8.1 INVARIANTES DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

A origem do tensor  $\underline{\underline{a}}$  é o conceito de Plano Espacialmente Mobilizado (SMP). Na verdade, seus valores principais são iguais aos componentes da normal ao SMP, referidos a um sistema ortonormal no espaço das tensões principais (Haigh-Westergard). Sua dedução pode ser encontrada em Nakai & Matsuoka (1986); Chowdhury (1994); Pedroso (2002). Neste trabalho, parte-se da seguinte expressão:

$$\underline{\underline{a}} = \sqrt{\frac{I_{3\sigma}}{I_{2\sigma}}} \underline{\underline{\tau}}^{-1} \quad (8.1)$$

em que

$$\underline{\underline{\tau}} = \sqrt{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (8.2)$$

ou seja,  $\underline{\underline{\tau}}$  é a raiz quadrada do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  e  $\underline{\underline{\tau}}^{-1} = \sqrt{\underline{\underline{\sigma}}^{-1}}$  representa o inverso de  $\underline{\underline{\tau}}$ , ou, igualmente, ao inverso da raiz quadrada do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Em seguida, o tensor  $\underline{\underline{t}}$  pode ser definido pela seguinte expressão:

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{a}} \bullet \underline{\underline{\sigma}} \quad (8.3)$$

Com isso, os seguintes invariantes de tensão  $t_N$  e  $t_S$  podem ser obtidos:

$$t_N = \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{a}} \quad \text{e} \quad t_S = \sqrt{(\underline{\underline{t}} - t_N \underline{\underline{a}}) : (\underline{\underline{t}} - t_N \underline{\underline{a}})} \quad (8.4)$$

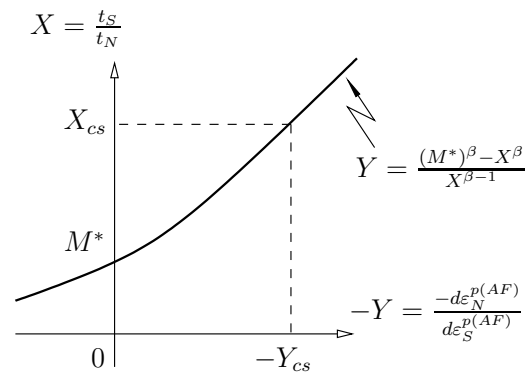
ou, equivalentemente,

$$t_N = \frac{3I_{3\sigma}}{I_{2\sigma}} \quad \text{e} \quad t_S = \frac{\sqrt{I_{1\sigma}I_{2\sigma}I_{3\sigma} - 9I_{3\sigma}^2}}{I_{2\sigma}} \quad (8.5)$$

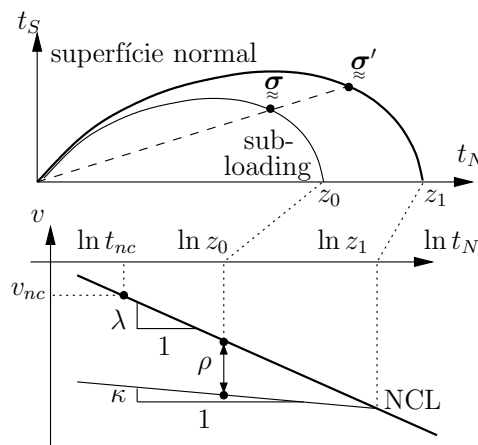
em que  $I_{1\sigma}$ ,  $I_{2\sigma}$ ,  $I_{3\sigma}$  são os invariantes característicos do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Os invariantes  $t_N$  e  $t_S$  são iguais às tensões normal e cisalhante no Plano Espacialmente Mobilizado (SMP), respectivamente (veja Eqs. (5.13) do Capítulo 5).

## 8.2 FUNÇÃO DE PLASTIFICAÇÃO

No modelo Subloading tij as superfícies de plastificação normal e de subcarregamento foram definidas no hiper-espço de tensões modificado. Essas superfícies se reduzem a curvas, quando traçadas num plano cartesiano com coordenadas iguais aos invariantes  $t_N$  e  $t_S$  (Figura 8.2). A superfície externa é igual àquela introduzida por Nakai & Matsuoka (1986) no modelo tij-clay. A superfície interna (subcarregamento) é análoga à superfície normal, mas sempre passa pelo estado de tensões. Na Figura (8.2),  $\underline{\underline{\sigma}}$  indica o estado de tensões e  $\underline{\underline{\sigma}}'$  representa uma imagem deste estado projetada na superfície normal.



**Figura 8.1:** Relação tensão-dilatância considerada pelo modelo Subloading tij.



**Figura 8.2:** Superfícies de carregamento e de plastificação do modelo Subloading tij; Relação  $v$  versus  $\ln t_N$ .

A superfície de plastificação normal é uma das iso-superfícies geradas pela Eq. (8.6) e pode ser medida pela variável interna  $z_1$ , que tem dimensão de tensão, pois é relacionada à tensão média  $t_N$ . O estado de tensões imagem ( $\underline{\underline{\sigma}}'$ ) não entra explicitamente nas formulações e é igual a  $\underline{\underline{\sigma}}$  quando as duas superfícies são coincidentes. A superfície de subcarregamento, com tamanho  $z_0$ , tem forma similar à superfície de plastificação normal



e é determinada pela Eq. (8.6), contudo, calculada para as tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, z_1) = \ln \frac{t_N(\underline{\underline{\sigma}})}{z_1} + \frac{1}{\beta} \left( \frac{t_S(\underline{\underline{\sigma}})}{M^* t_N(\underline{\underline{\sigma}})} \right)^\beta \quad (8.6)$$

Na Eq. (8.6), as constantes  $M^*$  e  $\beta$  são parâmetros do material e são determinadas a partir de resultados experimentais, dispostos na forma de curvas tensão-dilatância (Figura 8.1).  $M^*$  tem função similar ao  $M$  do modelo Cam-clay e  $\beta$ , introduzido por Chowdhury & Nakai (1998), deve ser encontrado por meio de tentativa-e-erro para a ajustar a curva tensão-dilatância aos resultados de ensaios triaxiais convencionais de compressão e extensão.

O cálculo de  $M^*$  depende somente do valor  $R_{cs}$ , razão  $\sigma_1/\sigma_3$  no estado crítico, em compressão. Para isso, as seguintes equações são necessárias:

$$X_{cs} = \frac{\sqrt{2}(R_{cs} - 1)}{3\sqrt{R_{cs}}} \quad (8.7)$$

$$Y_{cs} = \frac{1 - \sqrt{R_{cs}}}{\sqrt{2}(\sqrt{R_{cs}} + 0.5)} \quad (8.8)$$

$$M^* = (X_{cs}^\beta + Y_{cs} X_{cs}^{\beta-1})^{1/\beta} \quad (8.9)$$

Durante a transição elástica-plástica, a lei de fluxo é determinada para a superfície de subcarregamento e, após essa transição, como as duas superfícies passam a se mover juntas, por qualquer uma das duas. Uma lei de endurecimento controla a variação da superfície de plastificação normal e por meio de uma medida da diferença entre as duas superfícies, a qual requisita a introdução de uma nova equação evolutiva, determina-se a variação da superfície de subcarregamento. Esta última acompanha o estado de tensões tanto durante a ocorrência de deformações plásticas quanto durante o regime elástico, ou seja, aumentando ou diminuindo de tamanho.

### 8.3 DEFORMAÇÃO DE SUBPLASTIFICAÇÃO

Nakai & Hinokio (2004) consideraram a quantidade  $\rho$ , que mede o estado de densificação do solo, na ligação entre as duas superfícies. Neste modelo, a variável  $\rho$ , mostrada no gráfico da Figura 8.2, é definida pela diferença entre as tensões (modificadas) médias equivalentes aos tamanhos das duas superfícies de plastificação. A Figura 8.2 auxilia a dedução da seguinte expressão:

$$\varepsilon_v^{p(sy)} = \frac{-\rho}{v} = \chi \ln \left( \frac{z_0}{z_1} \right) \quad \text{em que} \quad \chi = \frac{(\lambda - \kappa)}{v} \quad (8.10)$$

que define também a deformação volumétrica relacionada ao estado de subplastificação  $\varepsilon_v^{p(sy)}$  (Pedroso et al., 2005). Esta última, em contraposição à variável  $\rho$ , é mais conveniente

à dedução do modelo. O superscrito  $^{sy}$  indica subplastificação (“subyielding”). Acima,  $v = 1 + e$  é o volume específico.

## 8.4 VARIÁVEIS INTERNAS

As variáveis internas deste modelo são similares àquelas introduzidas pelo modelo Subloading Cam-clay (SubCam; Capítulo 7). Na verdade, o modelo SubCam foi originado a partir das idéias apresentadas no trabalho de Nakai & Hinokio (2004).

A superfície normal de plastificação tem a mesma evolução adotada pelo Cam-clay, ou seja, a taxa de variação de seu tamanho é relacionada à variação da deformação volumétrica plástica pela seguinte equação:

$$\dot{z}_1 = \frac{z_1}{\chi} \dot{\varepsilon}_v^p \quad (8.11)$$

Diferenciando a Eq. (8.10) com relação ao tempo, obtém-se a equação evolutiva da superfície de subcarregamento em função das deformações volumétrica e volumétrica de subplastificação. O resultado é mostrado a seguir:

$$\dot{z}_0 = \frac{z_0}{\chi} (\dot{\varepsilon}_v^p + \dot{\varepsilon}_v^{p(sy)}) \quad (8.12)$$

Assim, duas equações evolutivas, uma para a deformação volumétrica e outra para a de subcarregamento, devem ser introduzidas. A primeira é obtida, considerando a teoria convencional da plasticidade, pelo fluxo plástico (Eq. 8.13). A segunda deve ser elaborada de forma que a distância entre as superfícies seja anulada para grandes deformações plásticas e é relacionada ao processo de plastificação mediante o multiplicador plástico  $\dot{\Lambda}$  (Eq. 8.14). Para isso, a variável auxiliar  $L$ , definida na Eq. (8.15), é introduzida.

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\Lambda} \underline{\underline{\mathbf{r}}}, \quad \dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\Lambda} \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \quad (8.13)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^{p(sy)} = \dot{\Lambda} L(\varepsilon_v^{p(sy)}) \quad (8.14)$$

$$L(\varepsilon_v^{p(sy)}) = c \frac{(\varepsilon_v^{p(sy)})^2}{t_N} = c \frac{[\chi \ln(z_1/z_0)]^2}{t_N} \quad (8.15)$$

Na Eq. (8.15),  $c$  é o único parâmetro adicional, com relação ao modelo tij-clay e tem a função de controlar a taxa de decaimento da flexibilidade do modelo, para qualquer tipo de trajetória que cause ciclos de carregamento e descarregamento. No trabalho original (Nakai & Hinokio, 2004), a função  $L$  é denotada por  $G$  e o parâmetro  $c$  é apresentado como  $a$ . Note que na Eq. (8.15) a variável de normalização é o invariante modificado  $t_N$ .

É possível relacionar diretamente as variáveis internas  $z_0$  e  $z_1$  com as deformações

plásticas, obtendo-se os módulos de endurecimento  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$ . Para isso, as equações (8.15), (8.14) e (8.13) devem ser substituídas nas equações (8.12) e (8.11), resultando em:

$$\dot{z}_1 = \dot{\Lambda} \frac{z_1}{\chi} \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} = \dot{\Lambda} \mathcal{H}_1 \quad (8.16)$$

$$\dot{z}_0 = \dot{\Lambda} \frac{z_0}{\chi} (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} + L) = \dot{\Lambda} \mathcal{H}_0 \quad (8.17)$$

Como no modelo SubCam, nota-se que, quando  $L$  for zero (variável de densificação  $\rho$  nula), as duas superfícies crescem juntas, como se o material não estivesse pré-adensado/densificado. Em trajetórias de descarregamento, a superfície normal permanece estacionária e a superfície de subcarregamento diminui de tamanho. Com isso, a variável  $L$  aumenta, alterando a rigidez simulada pelo modelo.

## 8.5 SISTEMA DE EQUAÇÕES (DAS)

Como ressaltado anteriormente, o modelo SubCam possui formulação similar que a do modelo Subtij. Por isso, a dedução do DAS do modelo Subtij será idêntica a do modelo SubCam apresentado no Capítulo 7. A única diferença está na escolha do fluxo plástico, que no caso do modelo Subtij é do tipo não associado e dado por:

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\mathbf{t}}}} \neq \frac{df}{d\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad (8.18)$$

Com isso, nesta seção omite-se a dedução do DAS. No entanto, a representação matricial é re-apresentada, com o intuito de servir para referência futura. Assim, para incrementos de tensão fornecidos:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \\ \dot{z}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{ep}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_0) & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{b}}}_i(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_i) & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \dot{\mathbf{y}} = \mathcal{F}(x, y) \dot{\mathbf{x}} \quad \circ \Rightarrow \{:, \times\} \quad (8.19)$$

e para trajetórias de deformação:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \\ \dot{z}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_0) & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_i(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_i) & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \dot{\mathbf{y}} = \mathcal{F}(x, y) \dot{\mathbf{x}} \quad \circ \Rightarrow \{:, \times\} \quad (8.20)$$

Para montagem dos tensores elastoplásticos  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{ep}$  e  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep}$  do modelo Subloading tij, os gradientes da função de plastificação e o cálculo das variáveis de endurecimento são necessários. Assim, com o intuito de facilitar a implementação computacional, apresentam-se na Tabela 8.1 as equações necessárias.

A implementação do modelo Subtij depende do cálculo das derivadas relacionadas ao tensor tij ( $\underline{\underline{\mathbf{t}}}$ ), tendo em vista que  $\underline{\underline{\mathbf{t}}} = \underline{\underline{\mathbf{t}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}})$ . A derivação destas equações é omitida neste trabalho, mas pode ser encontrada em Pedroso (2002).

Os gradientes de segunda ordem relacionados ao tensor  $t_{ij}$  e ao modelo Subloading  $t_{ij}$  são apresentados na Tabela 8.2. Com isso, esquemas implícitos poderão ser aplicados à solução do DAS do modelo Subloading  $t_{ij}$ . As derivadas dos tensores  $\underline{\underline{a}}$  e  $\underline{\underline{t}}$ , com relação ao tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  são deduzidas no Apêndice D.

O algoritmo da Figura 8.3 resume as equações necessárias. Adicionalmente, as derivadas dos invariantes característicos do tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  também serão necessárias. O Apêndice D apresenta estas equações. Finalmente, O Algoritmo 8.4 também poderá ser útil na implementação do modelo Subt $t_{ij}$ .

**Tabela 8.1:** Gradientes de primeira ordem necessários à implementação computacional do modelo Subloading tij (Subtij).

| Entidade                         | Definição                                                                                            | Expressão                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                  | $\frac{dI_{1\sigma}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                      | $= \underset{\approx}{\mathbf{I}}$                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                  | $\frac{dI_{2\sigma}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                      | $= (\text{tr } \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}) \underset{\approx}{\mathbf{I}} - \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}$                                                                                                                                                                               |
|                                  | $\frac{dI_{3\sigma}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                      | $= \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}} - I_{1\sigma} \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}} + I_{2\sigma} \underset{\approx}{\mathbf{I}} = I_{2\sigma} \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}$                                                       |
|                                  | $\frac{dt_N}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                              | $= \frac{-t_N}{I_{2\sigma}} \frac{dI_{2\sigma}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{3}{I_{2\sigma}} \frac{dI_{3\sigma}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                                                                                                                |
|                                  | $\frac{dt_S}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                              | $= \frac{t_N}{6t_S} \frac{dI_{1\sigma}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{t_N(6t_N - I_{1\sigma})}{6t_S I_{2\sigma}} \frac{dI_{2\sigma}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{I_{1\sigma} - 6t_N}{2t_S I_{2\sigma}} \frac{dI_{3\sigma}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$ |
|                                  | $\frac{dt_S}{d\underset{\approx}{\mathbf{t}}}$                                                       | $= \frac{\mathbf{t} - t_N \mathbf{a}}{t_S}$                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|                                  | $\frac{dt_N}{d\underset{\approx}{\mathbf{t}}}$                                                       | $= \mathbf{a}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|                                  | $\frac{\partial f}{\partial t_N}$                                                                    | $= \frac{1}{t_N} \left[ 1 - \left( \frac{t_S}{M^* t_N} \right)^\beta \right]$                                                                                                                                                                                                                                   |
|                                  | $\frac{\partial f}{\partial t_S}$                                                                    | $= \frac{t_S^{\beta-1}}{(M^* t_N)^\beta}$                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| $\underset{\approx}{\mathbf{r}}$ | $= \frac{\partial f}{\partial \underset{\approx}{\mathbf{t}}}$                                       | $= \frac{\partial f}{\partial t_N} \frac{d\underset{\approx}{\mathbf{t}}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial t_S} \frac{d\underset{\approx}{\mathbf{t}}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                                                         |
| $\underset{\approx}{\mathbf{V}}$ | $= \frac{\partial \underset{\approx}{\mathbf{f}}}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$ | $= \frac{\partial f}{\partial t_N} \frac{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial t_S} \frac{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                                       |
| $y_0$                            | $= \frac{\partial \underset{\approx}{\mathbf{f}}}{\partial z_0}$                                     | $= \frac{-1}{z_0}$                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| $y_1$                            | $= \frac{\partial \underset{\approx}{\mathbf{f}}}{\partial z_1}$                                     | $= 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

**Tabela 8.2:** Gradientes de segunda ordem necessários à solução do modelo Subloading tij (Subtij) com esquemas implícitos.

| Entidade                           | Definição                                                                                                                  | Expressão                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\underset{\approx}{\mathbf{M}}$   | $= \frac{\partial \underset{\approx}{\mathbf{r}}}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                       | $= \frac{d\underset{\approx}{\mathbf{r}}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} \otimes \frac{\partial^2 f}{\partial t_N \partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial t_N} \frac{\partial^2 t_N}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}} \partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{d\underset{\approx}{\mathbf{r}}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} \otimes \frac{\partial^2 f}{\partial t_S \partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial t_S} \frac{\partial^2 t_S}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}} \partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$ |
| $\underset{\approx}{\mathbf{N}}_0$ | $= \frac{\partial \underset{\approx}{\mathbf{r}}}{\partial z_0}$                                                           | $= \underset{\approx}{\mathbf{0}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| $\underset{\approx}{\mathbf{R}}_0$ | $= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                        | $= \left( \underset{\approx}{\mathbf{I}}^{sym} : \frac{d\underset{\approx}{\mathbf{r}}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} - \frac{L}{t_N^2} \frac{dt_N}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \frac{z_0}{\chi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| $\underset{\approx}{\mathbf{R}}_1$ | $= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                        | $= \left( \underset{\approx}{\mathbf{I}}^{sym} : \frac{d\underset{\approx}{\mathbf{r}}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \frac{z_1}{\chi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $S_{00}$                           | $= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \theta}$                                                                         | $= \frac{\text{tr}(\underset{\approx}{\mathbf{r}})}{\chi} + \frac{L - 2c(\lambda - \kappa)^2 \log z_1/z_0}{t_N \chi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $S_{01}$                           | $= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \theta}$                                                                         | $= \frac{z_0 2c(\lambda - \kappa)^2 \log z_1/z_0}{z_1 t_N \chi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| $S_{10}$                           | $= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \theta}$                                                                         | $= 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $S_{11}$                           | $= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \theta}$                                                                         | $= \frac{\text{tr}(\underset{\approx}{\mathbf{r}})}{\chi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|                                    | $\frac{\partial^2 f}{\partial t_N \partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                       | $= \frac{(\beta+1)\phi-1}{t_N^2} \frac{dt_N}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{-\beta\phi}{t_N t_S} \frac{dt_S}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|                                    | $\frac{\partial^2 f}{\partial t_S \partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                       | $= \frac{-\beta\phi}{t_N t_S} \frac{dt_N}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{(\beta-1)\phi}{t_S^2} \frac{dt_S}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|                                    | $\frac{\partial^2 t_N}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}} \partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$ | $= \frac{d\mathbf{a}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|                                    | $\frac{\partial^2 t_S}{\partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}} \partial \underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$ | $= \frac{-1}{t_S^2} \mathbf{t} \otimes \frac{dt_S}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{1}{t_S} \frac{d\mathbf{t}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathbf{a} \otimes \left( \frac{1}{t_S} \frac{dt_N}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} - \frac{t_N}{t_S^2} \frac{dt_S}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}} \right) - \frac{t_N}{t_S} \frac{d\mathbf{a}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$                                                                                                                                                                                                                                         |

OBS.: Os tensores de quarta ordem  $\frac{d\mathbf{a}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$  e  $\frac{d\mathbf{t}}{d\underset{\approx}{\boldsymbol{\sigma}}}$  são apresentados no Apêndice D.

**Entrada:** Tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$

**Saída** :  $t_N, t_S, I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}, \underline{\underline{\tau}}, \underline{\underline{\tau}}^{-1}, \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{t}}, \frac{dt_N}{d\underline{\underline{\sigma}}}, \frac{dt_S}{d\underline{\underline{\sigma}}}$  e  $\frac{dt_S}{dt}$

*! Invariantes característicos do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$*

$$I_{1\sigma} \leftarrow \text{tr } \underline{\underline{\sigma}}$$

$$I_{2\sigma} \leftarrow \frac{1}{2} [(\text{tr } \underline{\underline{\sigma}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \bullet \underline{\underline{\sigma}})]$$

$$I_{3\sigma} \leftarrow \det \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{3} [\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \bullet \underline{\underline{\sigma}} \bullet \underline{\underline{\sigma}}) - \frac{3}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \bullet \underline{\underline{\sigma}}) \text{tr } \underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{2} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}})^3]$$

$$t_N \leftarrow \frac{3I_{3\sigma}}{I_{2\sigma}}$$

$$t_S \leftarrow \frac{\sqrt{I_{1\sigma}I_{2\sigma}I_{3\sigma} - 9I_{3\sigma}^2}}{I_{2\sigma}}$$

$$\underline{\underline{\tau}} \leftarrow \sqrt{\underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{! Apêndice D}$$

$$\underline{\underline{\tau}}^{-1} \leftarrow \frac{\underline{\underline{\tau}} \bullet \underline{\underline{\tau}} - I_{1\underline{\underline{\tau}}}\underline{\underline{\tau}} + I_{2\underline{\underline{\tau}}}\underline{\underline{I}}}{I_{3\underline{\underline{\tau}}}}$$

$$\underline{\underline{a}} \leftarrow \sqrt{\frac{I_{3\sigma}}{I_{2\sigma}} \underline{\underline{\tau}}^{-1}}$$

$$\underline{\underline{t}} \leftarrow \underline{\underline{a}} \bullet \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\frac{dt_N}{d\underline{\underline{\sigma}}} \leftarrow \frac{-t_N}{I_{2\sigma}} \frac{dI_{2\sigma}}{d\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{3}{I_{2\sigma}} \frac{dI_{3\sigma}}{d\underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{! Apêndice D } \left( \frac{\partial I_k}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)$$

$$\frac{dt_S}{d\underline{\underline{\sigma}}} \leftarrow \frac{t_N}{6t_S} \frac{dI_{1\sigma}}{d\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{t_N(6t_N - I_{1\sigma})}{6t_S I_{2\sigma}} \frac{dI_{2\sigma}}{d\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{I_{1\sigma} - 6t_N}{2t_S I_{2\sigma}} \frac{dI_{3\sigma}}{d\underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{! Apêndice D } \left( \frac{\partial I_k}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)$$

$$\frac{dt_S}{dt} \leftarrow \frac{\underline{\underline{t}} - t_N \underline{\underline{a}}}{t_S}$$

**Figura 8.3:** Rotina para o cálculo das derivadas relacionadas ao tensor  $t_{ij}$ .

**Entrada:** Volume específico  $v$ , estado de tensão  $\underline{\underline{\sigma}}$ , variáveis internas  $z_i$

**Saída** : Direção das deformações plásticas  $\underline{\underline{r}}$ , derivada  $\underline{\underline{V}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$ , derivadas

$$y_i = \frac{\partial f}{\partial z_i}, \text{ módulos de endurecimento } \mathcal{H}_i, \text{ coeficiente plástico } h^p$$

*! Invariantes e derivadas relacionadas ao tensor  $t_{ij}$*

Calcular  $t_N, t_S, I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}, \underline{\underline{\tau}}, \underline{\underline{\tau}}^{-1}, \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{t}}, \frac{dt_N}{d\underline{\underline{\sigma}}}, \frac{dt_S}{d\underline{\underline{\sigma}}}$  e  $\frac{dt_S}{dt}$  *! Algoritmo 8.3*

*! Gradientes*

$$\frac{\partial f}{\partial t_N} \leftarrow \frac{1}{t_N} \left[ 1 - \left( \frac{t_S}{M^* t_N} \right)^\beta \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_S} \leftarrow \frac{t_S^{\beta-1}}{(M^* t_N)^\beta}$$

$$\underline{\underline{r}} \leftarrow \frac{\partial f}{\partial t_N} \underline{\underline{a}} + \frac{\partial f}{\partial t_S} \frac{dt_S}{dt}$$

$$\underline{\underline{V}} \leftarrow \frac{\partial f}{\partial t_N} \frac{dt_N}{d\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial t_S} \frac{dt_S}{d\underline{\underline{\sigma}}}$$

$$y_0 \leftarrow \frac{-1}{z_0}$$

$$y_1 \leftarrow 0$$

*! Endurecimento*

$$\chi \leftarrow (\lambda - \kappa)/v$$

$$L \leftarrow c [\chi \log(z_1/z_0)]^2 / t_N$$

$$\mathcal{H}_0 \leftarrow z_0 (\text{tr } \underline{\underline{r}} + L) / \chi$$

$$\mathcal{H}_1 \leftarrow z_1 \text{tr } \underline{\underline{r}} / \chi$$

*! Módulo plástico*

$$h^p \leftarrow -y_0 \mathcal{H}_0$$

**Figura 8.4:** Cálculo dos gradientes e variáveis de endurecimento do modelo Subtj.

## 8.6 VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL

As equações do modelo Subtij podem ser diretamente substituídas no algoritmo da Figura 3.3, permitindo a simulação de ensaios de laboratório. Os resultados das simulações dos seguintes grupos de ensaios são mostrados aqui: a) Ensaios cíclicos com argila Fujinomori (FO1); b) Ensaios monotônicos com a argila Fujinomori (FCH) e c) Ensaios monotônicos com a com a areia Toyoura (TSD). As trajetórias e explicações dos ensaios são omitidas, mas podem ser encontradas no Capítulo 4.

### 8.6.1 ENSAIOS CÍCLICOS COM A ARGILA FUJINOMORI (FO1)

As Figuras 8.5 até 8.14 mostram os resultados apresentados por Chowdhury (1994) com a argila Fujinomori (FO1 - “Fujinomori Old” com OCR=1). Os cinco primeiros resultados, Figuras 8.5 até 8.9, correspondem aos ensaios com tensão média ( $p$ ) constante. Resultados de dois ensaios do tipo triaxial convencional (CTC) são apresentados nas Figuras 8.10 e 8.11. Por último, os resultados dos ensaios triaxiais cúbicos são mostrados nas Figuras 8.12 até 8.14. Os parâmetros e as condições iniciais (OCR) usados nas simulações são apresentados na Tabela 8.3.

**Tabela 8.3:** Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios cíclicos com a argila Fujinomori (FO1) e o modelo Subtij.

| Parâmetro/constante | Valor  | Unidade/tipo |
|---------------------|--------|--------------|
| $\lambda$           | 0.0780 |              |
| $\kappa$            | 0.0140 |              |
| $\nu$               | 0.21   |              |
| $R_{CS}$            | 3.5    | $^{\circ}$   |
| $c$                 | 880    |              |
| $\beta$             | 1.43   |              |
| $OCR$               | 1      |              |

A Figura 8.5, correspondente ao ensaio FO1-CTP-01, permite observar que o modelo Subtij consegue simular o aumento da rigidez com o número de ciclos. Isso é notado, por exemplo, pelo gráfico de  $q/p$  versus  $\varepsilon_d$  em que se pode observar que a magnitude do incremento de deformação desviadora diminui com os ciclos. A simulação das deformações volumétricas (gráfico de  $q/p$  versus  $\varepsilon_v$ ) também é razoável, apesar de que os incrementos de deformação volumétrica observados diminuirão mais rapidamente que os calculadas. De forma geral, a simulação do comportamento cíclico com o modelo Subtij é boa.

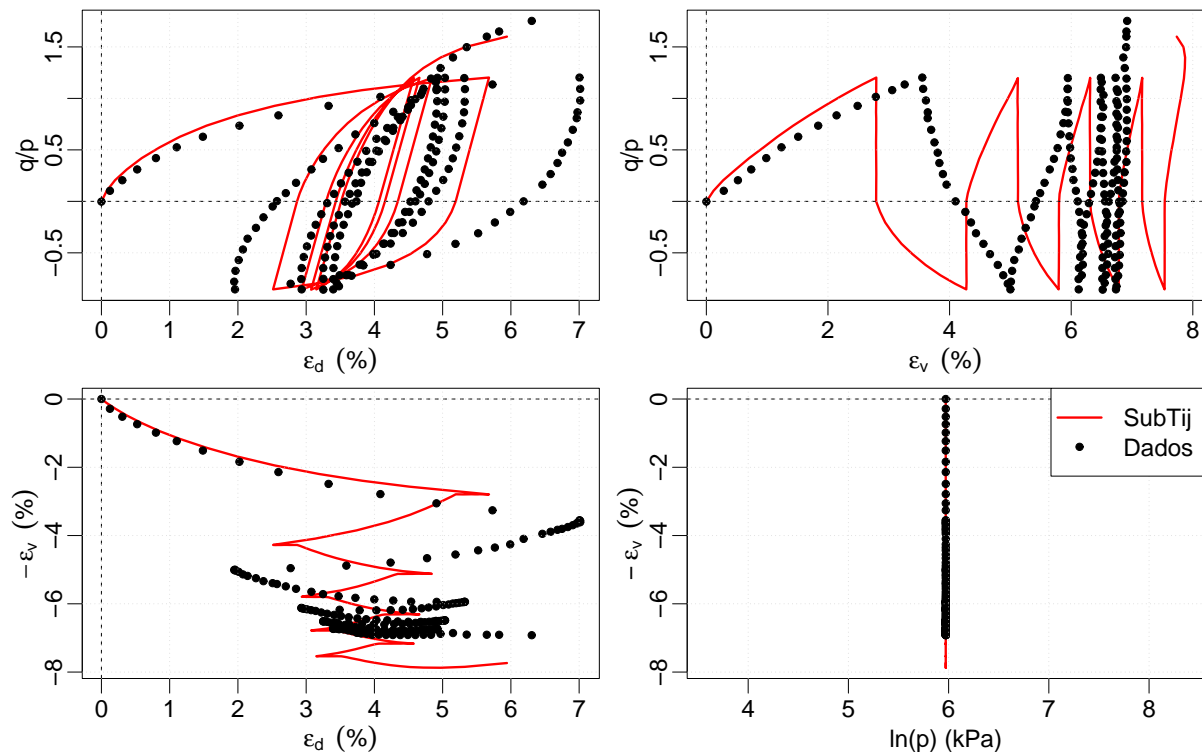
Os resultados das simulações apresentados na Figura 8.6, com ciclos de amplitudes diferentes (ensaio FO1-CTP-02), mostram que o modelo Subtij consegue simular os ciclos das curvas tensão desviadora-deformação desviadora relativamente bem. O comportamento de dilatância e a variação da deformação volumétrica também são bem representados. As

mesmas conclusões são válidas para os resultados das simulações mostrados na Figura 8.7 (ensaio FO1-CTP-03).

As Figuras 8.8 e 8.9 mostram os resultados dos ensaios FO1-CTP-06 e FO1-CTP-07, respectivamente. Nestas figuras, observa-se que o modelo Subtij simula o aumento de deformação plástica para a compressão e extensão. Tanto para o ensaio começando com compressão (FO1-CTP-06) quanto para o ensaio começando com extensão (FO1-CTP-07), a resposta simulada é próxima da mesma apresentada pelo material. Nas Figuras 8.8 e 8.9 nota-se um leve aumento de deformação volumétrica durante o descarregamento. Este aumento não é calculado pelo modelo Subtij, pois esta trajetória corresponde ao descarregamento elástico.

As Figuras 8.10 e 8.11 apresentam os resultados das simulações dos ensaios triaxiais convencionais FO1-CTR-01 e FO1-CTR-02, respectivamente. Na Figura 8.10 observa-se que o modelo Subtij simula o pequeno ciclo no gráfico tensão desviadora-deformação desviadora devido à compressão-descompressão-extensão. O modelo Subtij também simula o aumento de deformação volumétrica ao longo deste ciclo. No entanto o aumento de deformação volumétrica é um pouco maior que o mesmo apresentado pelo material.

Os valores calculados pelo modelo Subtij para os ensaios triaxiais cúbicos são mostrados nas Figuras 8.12 a 8.14. Verifica-se que, apesar de o comportamento geral ser bem representado pelo modelo Subtij, existem algumas dificuldades na representação do comportamento para as trajetórias tridimensionais correspondentes.



**Figura 8.5:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-01** com a argila Fujinomori e o modelo **Subtij**.



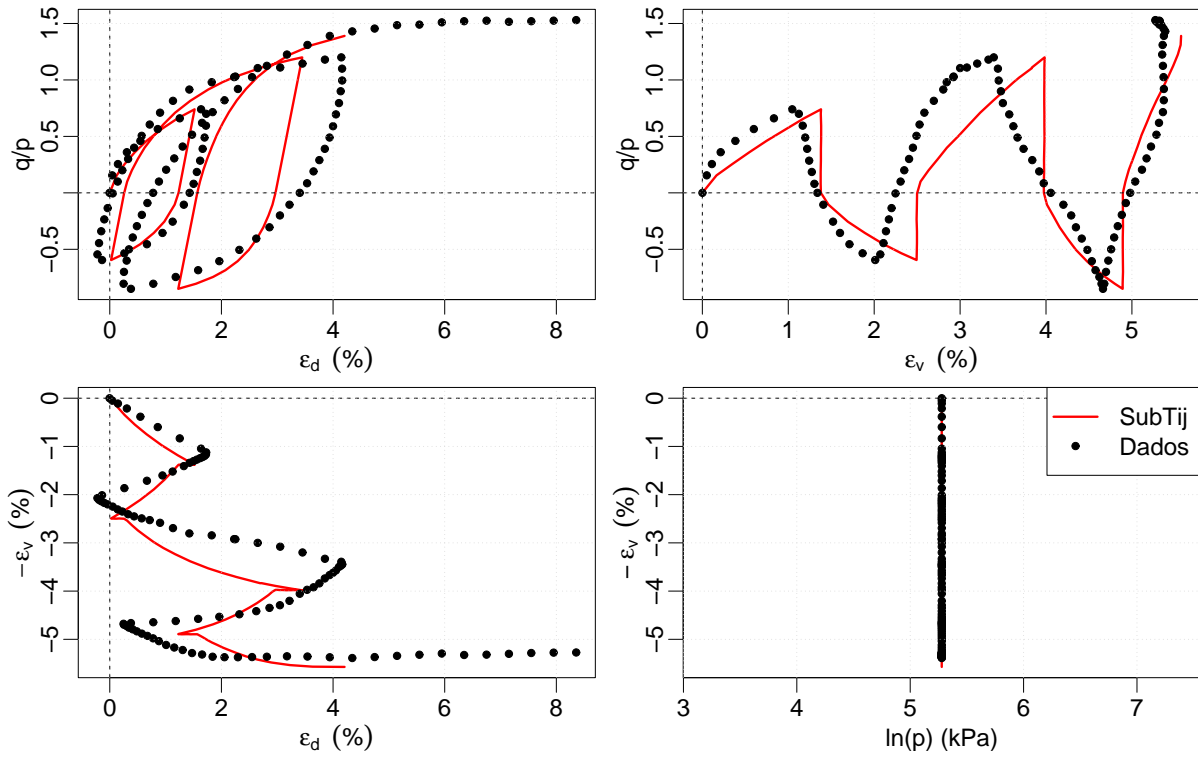


Figura 8.6: Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-02** com a argila Fujinomori e o modelo **Subtij**.

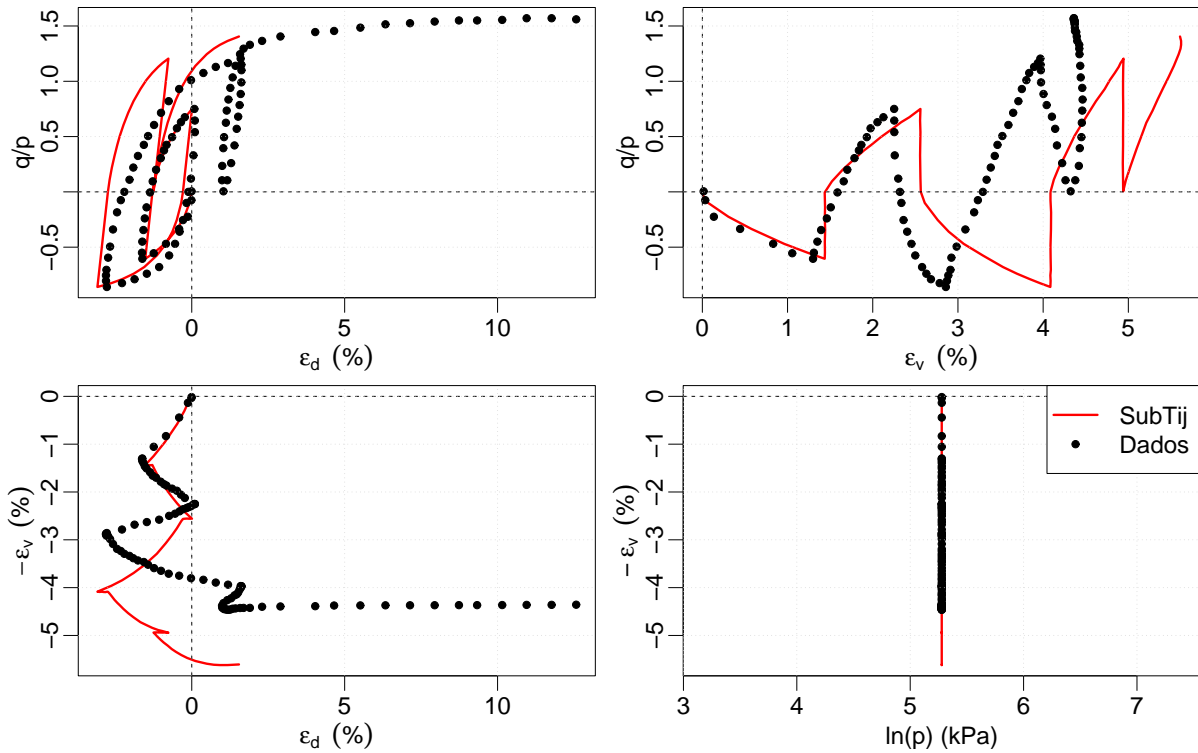
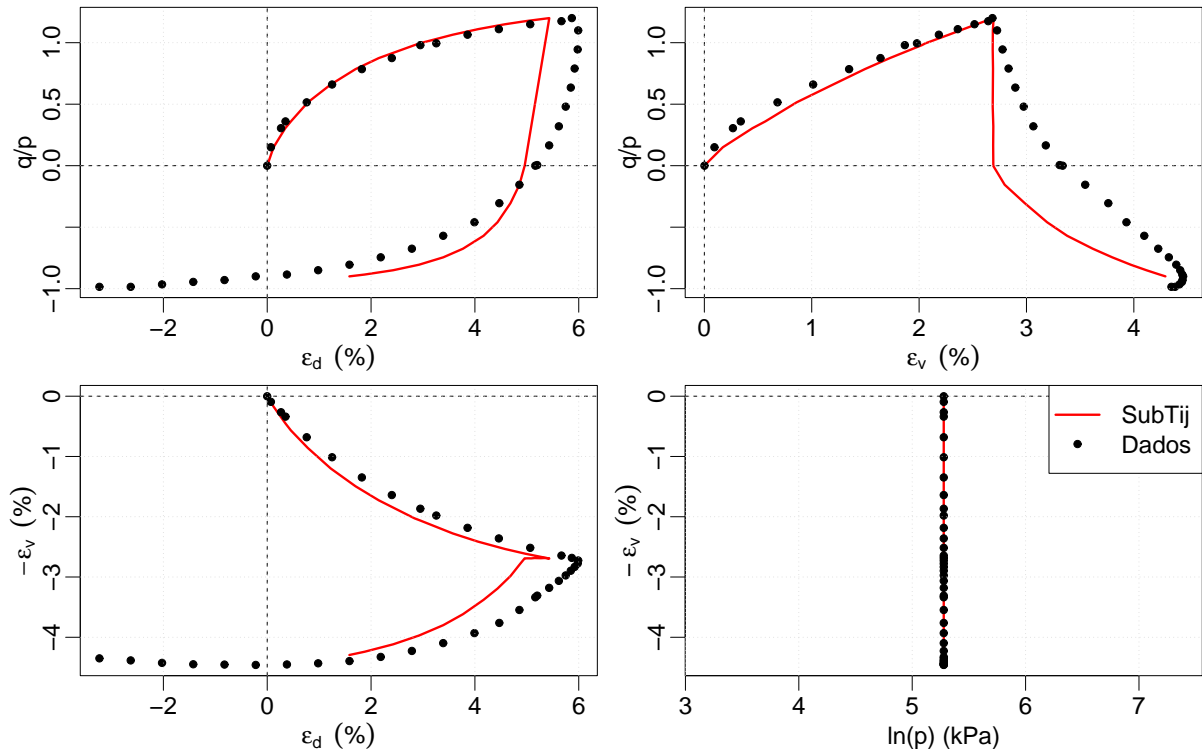
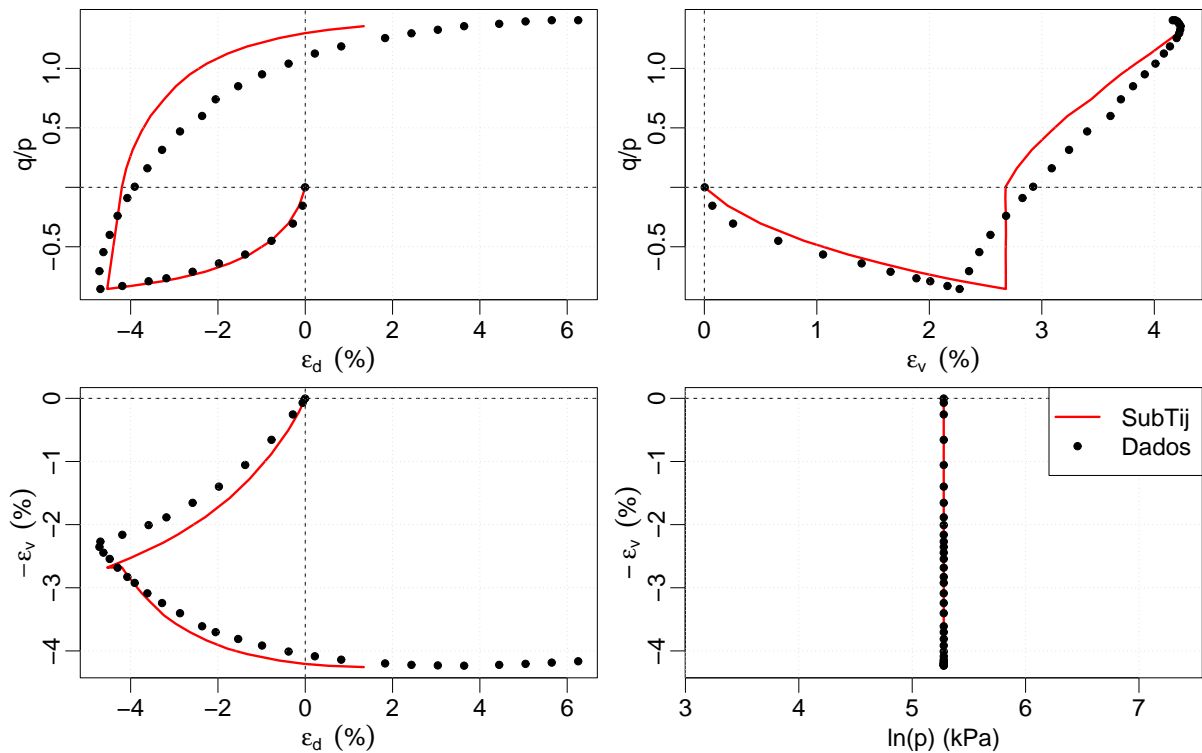


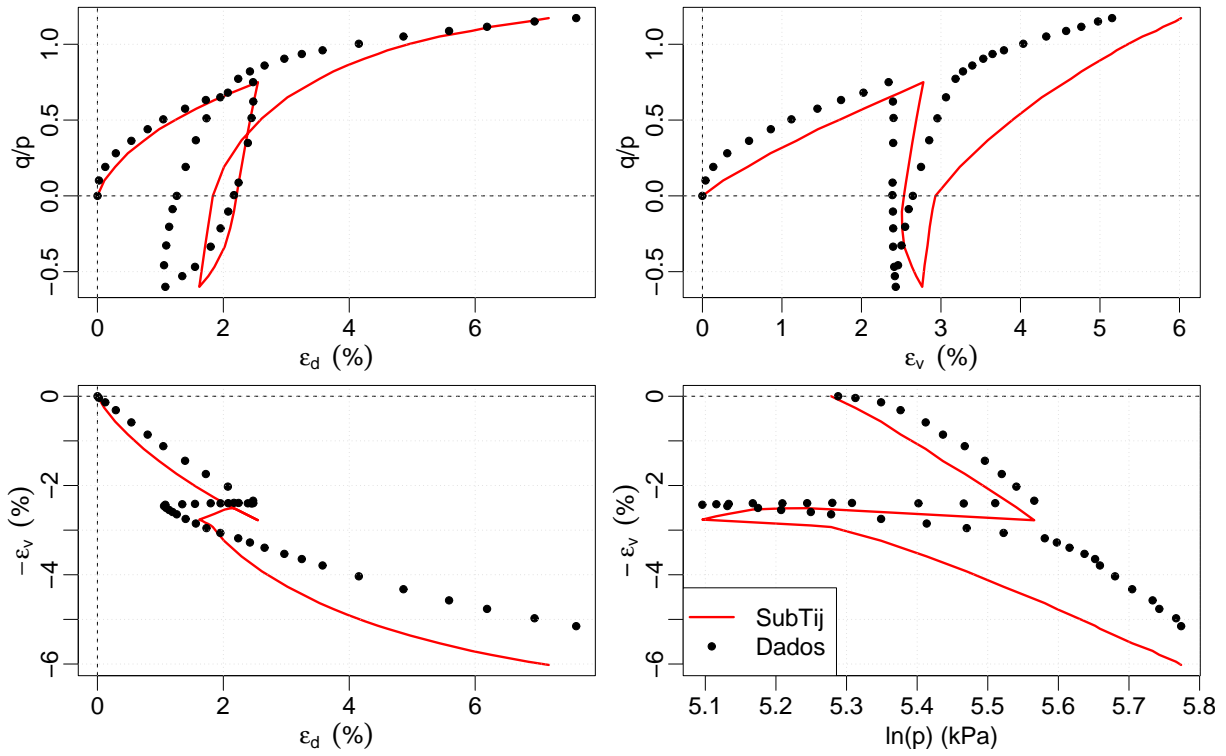
Figura 8.7: Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-03** com a argila Fujinomori e o modelo **Subtij**.



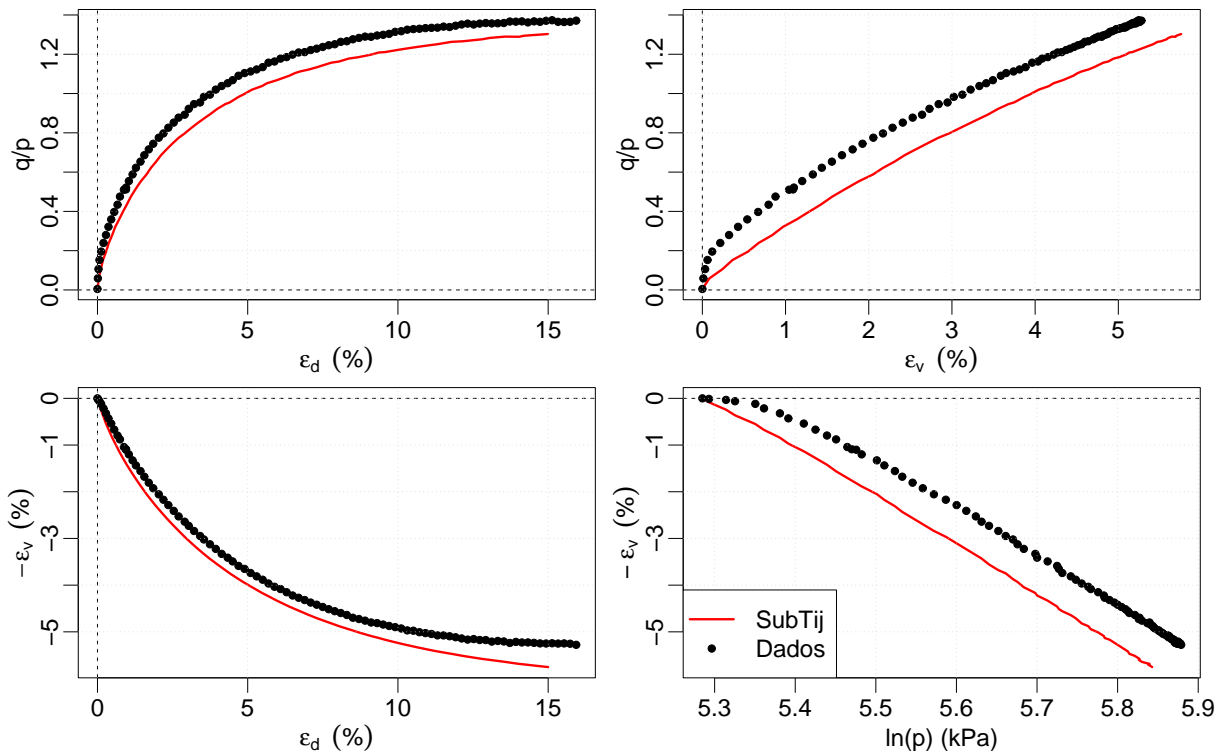
**Figura 8.8:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-06** com a argila Fujinomori e o modelo **Subtij**.



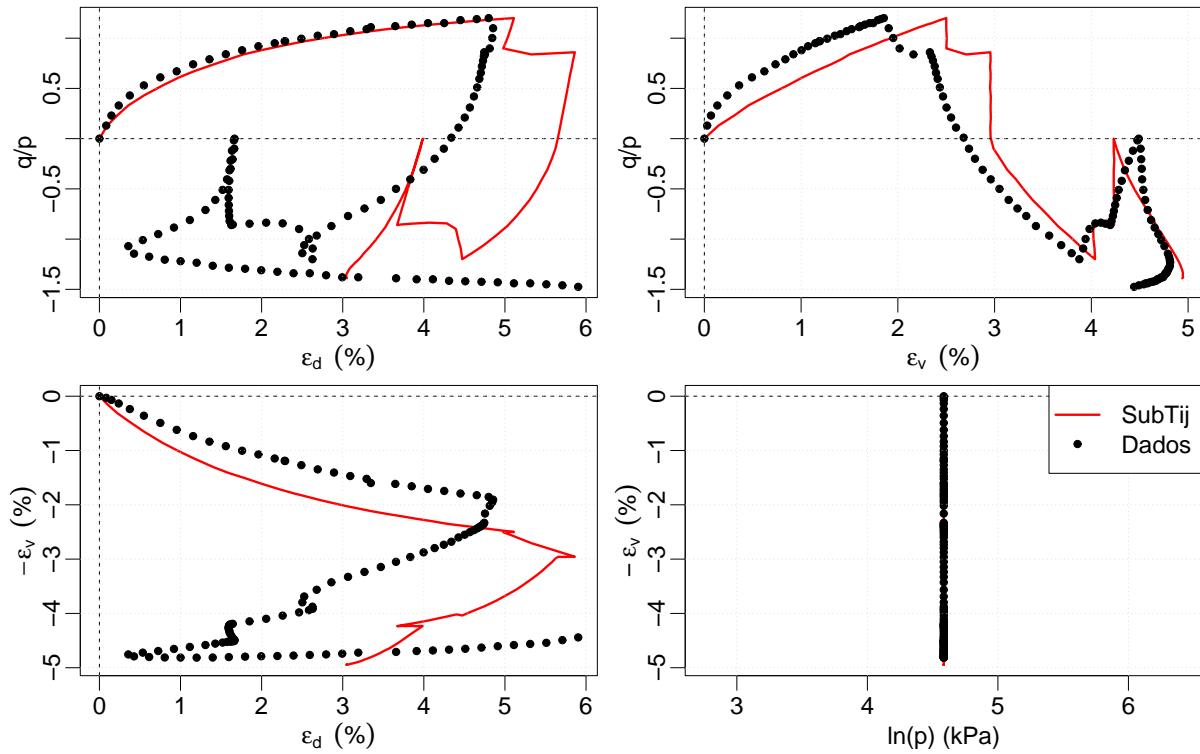
**Figura 8.9:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-07** com a argila Fujinomori e o modelo **Subtij**.



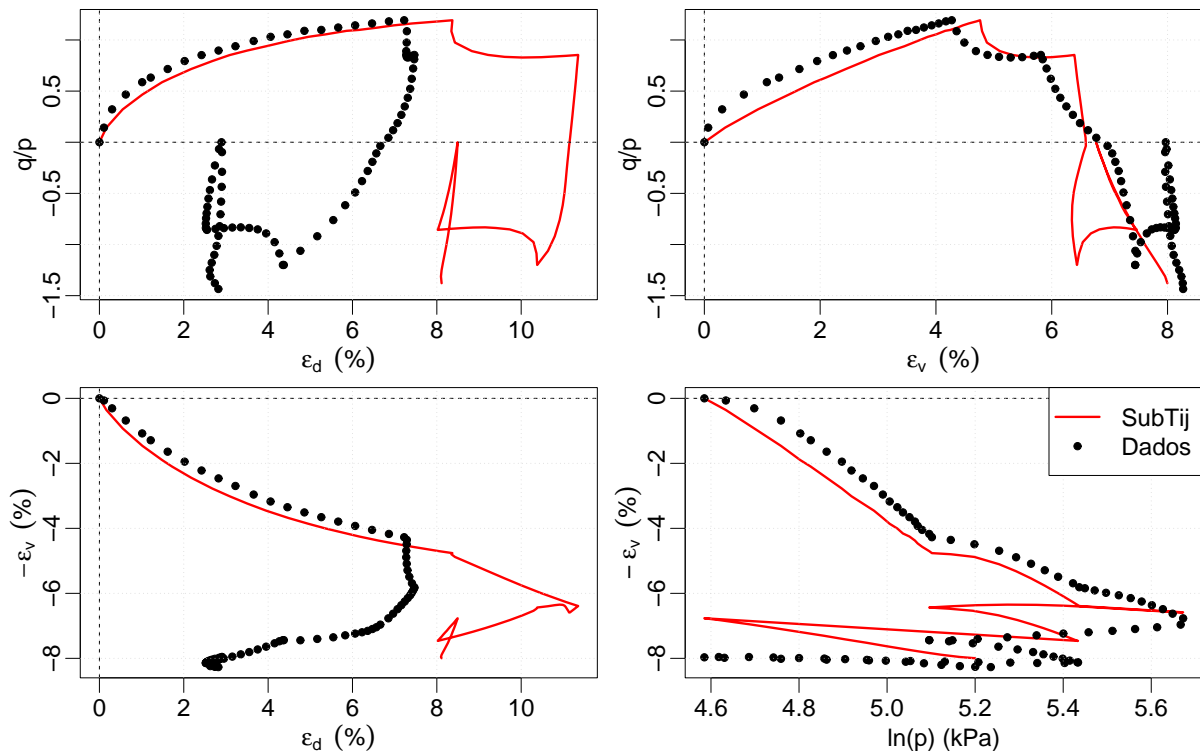
**Figura 8.10:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTR-01** com a argila Fujinomori e o modelo **Subtij**.



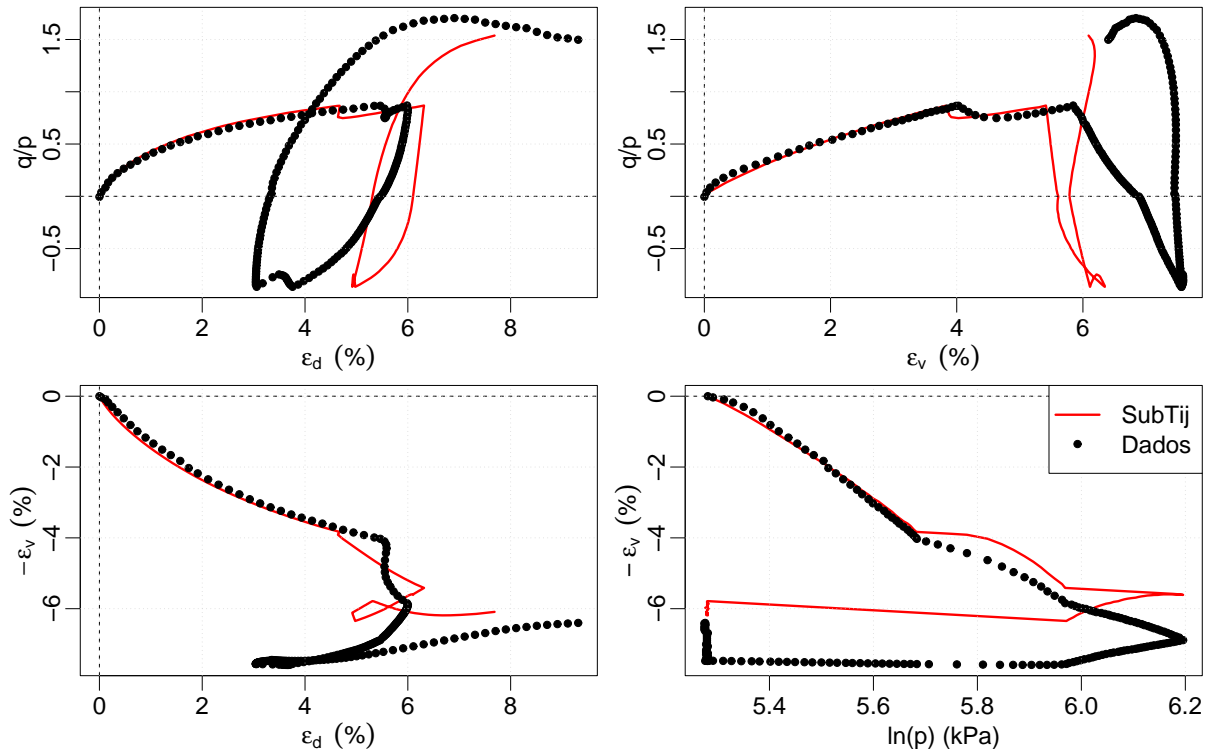
**Figura 8.11:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTR-02** com a argila Fujinomori e o modelo **Subtij**.



**Figura 8.12:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-TTX-01** com a argila Fujinori e o modelo **Subtij**.



**Figura 8.13:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-TTX-02** com a argila Fujinori e o modelo **Subtij**.



**Figura 8.14:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-TTX-04** com a argila Fujinomori e o modelo **Subtij**.

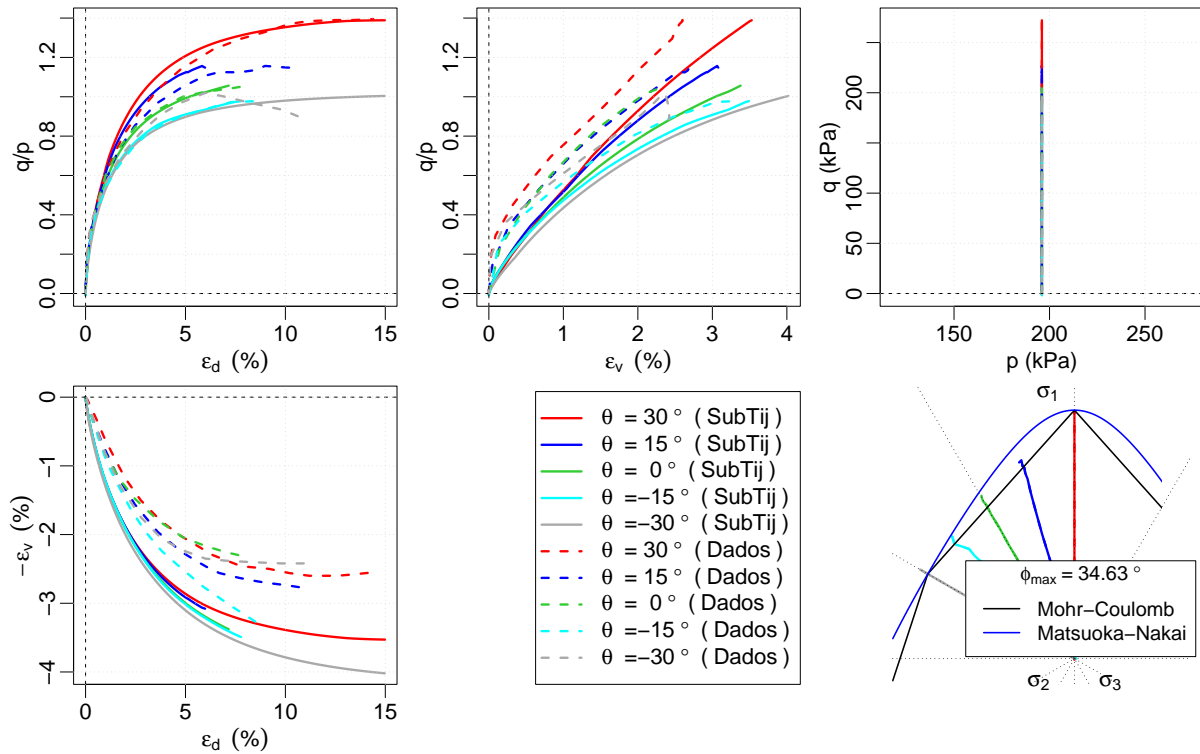
### 8.6.2 ENSAIOS MONOTÔNICOS COM A ARGILA FUJINOMORI (FCH)

Resultados das simulações dos ensaios monotônicos com diferentes valores de ângulo de Lode e com a argila Fujinomori (FCH) são mostrados na Figura 8.15. Os parâmetros usados nas simulações destes ensaios são apresentados na Tabela 8.4, destacando que o OCR usado foi igual a 1, tendo em vista que este material é normalmente adensado.

Com o auxílio da Figura 8.15, pode-se verificar que o modelo Subtij considera a dependência da resistência com relação ao ângulo de Lode. Também se verifica a simulação da dependência entre a deformabilidade e o ângulo de Lode.

**Tabela 8.4:** Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios monotônicos com a argila Fujinomori (**FCH**) e com o modelo **Subtij**.

| Parâmetro/constante | Valor   | Unidade/tipo |
|---------------------|---------|--------------|
| $\lambda$           | 0.0778  |              |
| $\kappa$            | 0.00824 |              |
| $\nu$               | 0.0     | $^{\circ}$   |
| $R_{CS}$            | 3.628   |              |
| $c$                 | 0       |              |
| $\beta$             | 1.4     |              |
| $OCR$               | 1       |              |



**Figura 8.15:** Resultados das simulações dos ensaios **FCH-TTP-{01,02,03,04,05}** com a argila Fujinomori e o modelo **Subtij**.

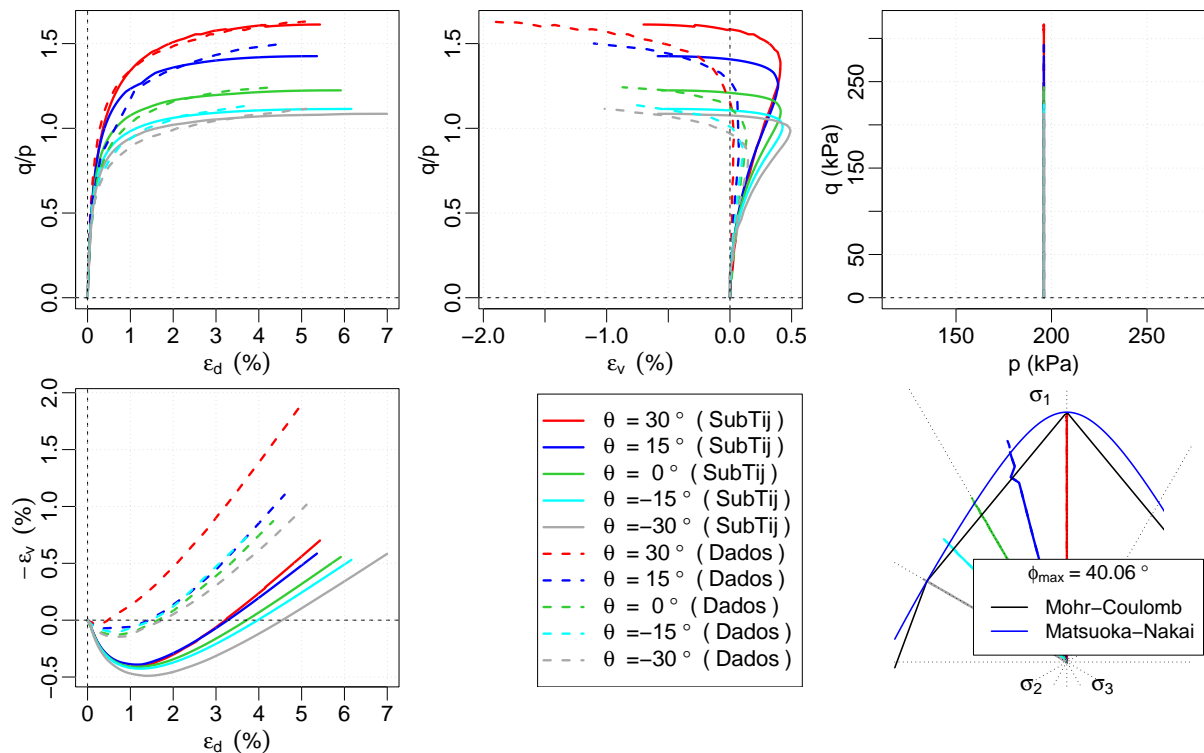
### 8.6.3 ENSAIOS MONOTÔNICOS COM A AREIA TOYOURA (TSD)

Por último, resultados das simulação dos ensaios monotônicos com diferentes valores de ângulo de Lode e com a areia Toyoura (TSD) são mostrados na Figura 8.16. Os parâmetros utilizados são mostrados na Tabela 8.5. Ressalta-se que foi usado um OCR igual a 8 para fazer com que as duas superfícies, de subcarregamento e normal, fossem inicializadas com uma distância entre si. Esta distância permite a simulação da dilatância positiva.

Com o auxílio da Figura 8.16, pode-se verificar a simulação da dependência da resistência com relação ao ângulo de Lode. Também se verifica a simulação da dilatância positiva durante endurecimento, contudo, não tão boa como a representação do comportamento tensão desviadora-deformação desviadora.

**Tabela 8.5:** Parâmetros e condições iniciais para as simulações dos ensaios monotônicos com a areia Toyoura (**TSD**) e com o modelo **Subtij**.

| Parâmetro/constante | Valor  | Unidade/tipo |
|---------------------|--------|--------------|
| $\lambda$           | 0.0764 |              |
| $\kappa$            | 0.0115 |              |
| $\nu$               | 0      |              |
| $R_{CS}$            | 3.5    |              |
| $c$                 | 200    |              |
| $\beta$             | 2.0    |              |
| $OCR$               | 8      |              |



**Figura 8.16:** Resultados das simulações dos ensaios **TSD-TTP-01,02,03,04,05** com a areia Toyoura e o modelo **Subtij**.

## 8.7 CONCLUSÕES

O modelo Subtij pode representar, de forma satisfatória, as características de comportamento cíclico de solos normalmente adensados ou pré-adensados. Uma vantagem única do modelo Subtij é a necessidade da determinação de um número pequeno de parâmetros. As trajetórias tridimensionais de ensaios cúbicos são um pouco difíceis de serem simuladas.

O sistema de equações diferenciais pode ser posto sob a forma do sistema para modelos elastoplásticos com subcarregamento, apresentada no Capítulo 3. Assim, os esquemas do Capítulo 11 poderão ser aplicados na integração numérica da relação constitutiva do

modelo Subtij.

Embora as derivadas dos tensores  $\underline{\underline{a}}$  e  $\underline{\underline{t}}$  com relação ao tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  sejam um pouco complicadas, estas podem ser encontradas de uma forma direta (Apêndice D). As derivadas de segunda ordem da função de plastificação e dos invariantes relacionados ao tensor  $t_{ij}$  também foram apresentados. Com isso, para a solução do DAS, esquemas de integração do tipo Backward-Euler poderão ser empregados. A ferramenta central no desenvolvimento das derivadas relacionadas ao tensor  $t_{ij}$  é o conceito de decomposição espectral e suas conseqüências como a definição dos autoprojetores.



# Capítulo 9

## MODELO PARA SOLOS NÃO SATURADOS

Alonso et al. (1990) apresentaram um modelo simples razoavelmente útil para reproduzir o comportamento hidro-mecânico monotônico de materiais parcialmente saturados. Este modelo foi baseado no modelo Cam-clay e, portanto, tem comportamento similar ao do Cam-clay para grau de saturação de 100%, incluindo a previsão de resistência excessiva durante extensão, devido ao critério de Drucker-Prager. Sua implementação computacional, *vide* Cordão-Neto (2005), requer cuidados adicionais devido à existência de descontinuidades, com relação às duas superfícies, SI (“Suction-Increase”) e LC (“Loading-Collapse”), no espaço das tensões (líquidas) e sucção. Estas limitam um domínio elástico e se encontram em arestas descontínuas.

Neste Capítulo, apresenta-se um novo modelo para solos não saturados, denominado de Barcelona Extendido (BarcelonaX), por ser uma extensão (simples) do modelo Barcelona (BBM). Sua principal característica é a definição de uma superfície única no espaço das tensões e sucção, ao contrário do modelo original que usa duas superfícies: uma para a sucção e outra para as tensões. Além disso, a influência do ângulo de Lode na resistência é considerada, mediante a fórmula de Sheng et al. (2000) para a variação da inclinação  $M$  da reta de estado crítico com o ângulo de Lode (Eq. 5.16). Assim, por exemplo, o modelo BarcelonaX terá resistência em extensão igual a prevista pelo critério de Mohr-Coulomb. Contudo, essa resistência também será função da sucção.

O modelo é apresentado considerando a base para derivação de modelos elastoplásticos introduzida no Capítulo 3. Para isso, as funções de plastificação, variáveis internas e leis de endurecimento e fluxo plástico são definidas. Em seguida o Sistema Algébrico de Equações Diferenciais é determinado. Nesta etapa, considera-se que o incremento de sucção  $s$  faz parte do vetor aumentado de incrementos de tensão ou de deformação, conforme seja o caso de solução para incrementos de tensão ou deformação dados. Essa metodologia segue a sugestão de Sheng et al. (2003a).

A capacidade de reprodução do modelo, para trajetórias isotrópicas ou de compressão, é idêntica a do modelo original. Uma diferença é a implementação computacional que é mais fácil, pois a análise de carregamento-descarregamento poderá ser feita considerando

a superfície única no espaço de tensões/sucção  $p$ ,  $s$  e  $q$ . Além disso, devido sua derivação generalizada, o DAS poderá ser resolvido pelos esquemas do Capítulo 11, que permitem o controle da qualidade das simulações.

Como a maior parte do equacionamento é idêntica a do modelo original Alonso et al. (1990), apenas uma revisão breve será apresentada. Para facilitar, agrupam-se os parâmetros do modelo BarcelonaX na Tabela 9.1. Estes são basicamente os mesmos do modelo Barcelona (BBM), com exceção do parâmetro  $B$  que ajusta a transição entre a parte LC (“Loading-Colapse”) e a parte SI (“Suction-Increase”) da superfície (única). Ressalta-se que o emprego da equação de Sheng et al. (2000) para a variação de  $M$  não requer adição de nenhum parâmetro.

**Tabela 9.1:** Parâmetros constitutivos para comportamento mecânico necessários ao modelo BarcelonaX.

| Parâmetros  | Descrição                                                                                                                                                   |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lambda_0$ | Índice de compressibilidade/rigidez volumétrica para variação das tensões medido à sucção nula ( $\lambda_0 = 0.4343 \cdot C_c$ )                           |
| $\kappa$    | Índice de expansão/rigidez volumétrica elástica para variação das tensões ( $\lambda_0 = 0.4343 \cdot C_s$ )                                                |
| $G$         | Módulo de cisalhamento                                                                                                                                      |
| $\phi_{CS}$ | Ângulo de atrito em compressão no estado crítico                                                                                                            |
| $r$         | Coefficiente de ajuste na equação do $\lambda(s)$ (Eq. 9.1): Parâmetro que define a rigidez máxima do solo (Alonso et al., 1990)                            |
| $\beta$     | Coefficiente de ajuste na Equação do $\lambda(s)$ (Eq. 9.1): Parâmetro que controla a taxa de aumento da rigidez do solo com a sucção (Alonso et al., 1990) |
| $k$         | Parâmetro que descreve o aumento da coesão virtual devido ao aumento da sucção mátrica                                                                      |
| $\lambda_s$ | Parâmetro de rigidez volumétrica para variação da sucção                                                                                                    |
| $\kappa_s$  | Parâmetro de rigidez elástica volumétrica para variação da sucção                                                                                           |
| $B$         | Constante que controla o decaimento da tampa (“cap”) que representa a superfície SI                                                                         |

O modelo requer a definição de algumas constantes e, para sua inicialização, algumas variáveis devem ser fornecidas. Estas estão agrupadas na Tabela 9.2.

**Tabela 9.2:** Constantes e condições iniciais necessários ao modelo BarcelonaX.

| Constante   | Descrição                                                                          |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $OCR_{ini}$ | Razão $z_0/p$ inicial de pré-adensamento                                           |
| $v_{ini}$   | Volume específico inicial                                                          |
| $p_{atm}$   | Pressão atmosférica (1 atm = 101.3 kPa = 0.1013 MPa)                               |
| $p_{ref}$   | Pressão de referência correspondente ao volume específico ( $N(s)$ ) de referência |

## 9.1 INVARIANTES DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

O modelo Barcelona utiliza duas variáveis de tensão, como sugerido por Fredlund & Rahardjo (1993), a tensão líquida  $\underline{\underline{\sigma}}_{net} = \underline{\underline{\sigma}}_{tot} - u_a \underline{\underline{I}}$  e a sucção  $s = u_a - u_w$ , em que  $u_a$  é a pressão no ar e  $u_w$  a na água. Como a relação tensão-deformação é entre tensão líquida e deformação, a notação  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_{net}$  será adotada e o termo tensão indicará tensão líquida. A sucção mátrica  $s$  é a diferença entre a pressão no ar  $u_a$  e a pressão na água  $u_w$ . Os invariantes de tensão considerados são os mesmos de Cambridge  $p$ ,  $q$  e o ângulo de Lode  $\theta$ . Os invariantes de deformação também são os de Cambridge.

## 9.2 INFLUÊNCIA DA SUCÇÃO

Talvez a principal diferença do modelo Barcelona, com relação ao Cam-clay, seja a adoção da variação do índice de compressibilidade com a sucção (Eq. 9.1). Com essa variação o modelo pode simular expansão e/ou colapso.

$$\lambda(s) = \lambda_0 [(1 - r)e^{-\beta s} + r] \quad (9.1)$$

O aumento da resistência devido à sucção é simulado mediante o deslocamento da superfície de plastificação para a região de tensão média  $p$  negativa. Para isso, a seguinte variável é definida:

$$p_s = ks \quad (9.2)$$

em que  $k$  é um parâmetro constitutivo e  $s$  é a sucção mátrica.

Além disso, o tamanho  $p_0$  da superfície de plastificação passa a ser função também da sucção. Isso é feito mediante a seguinte expressão:

$$p_0(z_0, s) = p_{ref} \left( \frac{z_0}{p_{ref}} \right)^{\psi(s)} \quad \text{e} \quad \psi(s) = \frac{\lambda_0 - \kappa}{\lambda(s) - \kappa} \quad (9.3)$$

em que a variável interna  $z_0$  fornece o tamanho saturado da superfície de plastificação e as constantes  $\lambda_0$ ,  $\kappa$  e  $p_{ref}$  são parâmetros constitutivos e valores iniciais, cujas definições são mostradas nas Tabelas 9.1 e 9.2.

## 9.3 FUNÇÃO DE PLASTIFICAÇÃO

Este modelo adota uma superfície de plastificação similar à do modelo Cam-clay. Entretanto, seu tamanho passa a ser função também da sucção. No modelo original, um plano que limita a região elástica de sucção também é proposto. Duas variáveis internas são necessárias para a definição do estado tensão/sucção. A primeira ( $z_0$ ) mede o tamanho da superfície na direção das tensões e a segunda ( $z_1$ ) fornece a posição do plano que limita

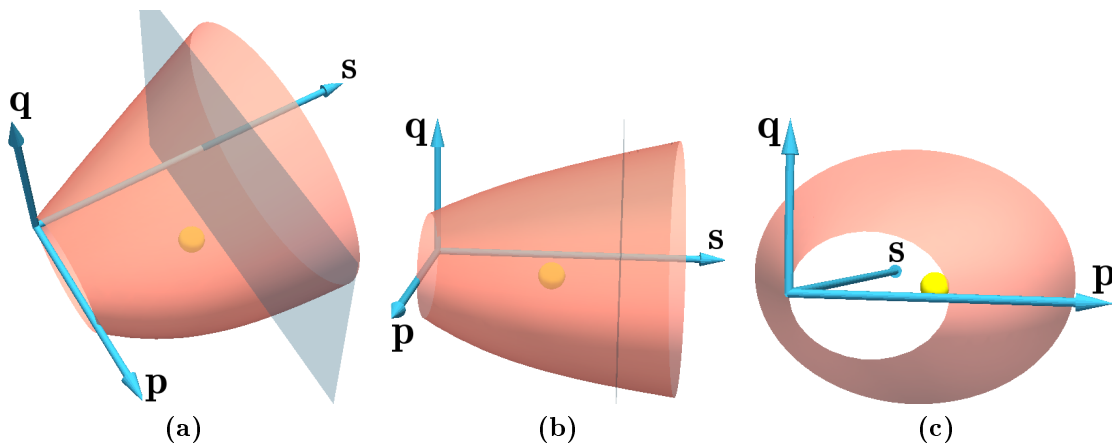
a máxima sucção suportada pelo material. A Figura 9.1 mostra as duas superfícies do modelo Barcelona (BBM) no espaço (p,s,q).

No modelo original, uma superfície (cor avermelhada na Figura 9.1) é formada pela extrusão da elipse do modelo Cam-clay ao longo do eixo da sucção e a outra é um plano vertical (cor azul na Figura 9.1) passando pelo valor de sucção igual a  $s = z_1$ . Essas duas superfícies têm as seguintes funções de plastificação:

$$f_0(\underline{\sigma}, z_0, s) = f_0(p, q, z_0, s) = q^2 - M_{CS}^2(p + p_s)[p_0(z_0, s) - p] \quad (9.4)$$

$$f_1(s, z_1) = s - z_1 \quad (9.5)$$

em que  $M_{CS}$  é a inclinação (constante) da reta de estado crítico.



**Figura 9.1:** Superfície de plastificação do modelo Barcelona (BBM): (a) Superfícies no espaço p,s,q; (b) Vista do plano q,p; (c) Vista do plano q,s.

As superfícies da Figura 9.1 foram geradas com a adoção dos parâmetros da Tabela 9.3. O estado inicial considerado, mostrado por uma esfera amarela na figura, é devido aos valores da Tabela 9.4.

**Tabela 9.3:** Parâmetros usados para gerar as superfícies do modelo Barcelona Basic Model, apresentada na Figura 9.1.

| Parâmetro/constante | Valor | Unidade/tipo |
|---------------------|-------|--------------|
| $\lambda_0$         | 0.25  |              |
| $\kappa$            | 0.05  |              |
| $G$                 | 1000  | <i>kPa</i>   |
| $\phi_{cs}$         | 20.0  | $^\circ$     |
| $r$                 | 0.90  |              |
| $\beta$             | 0.10  | $kPa^{-1}$   |
| $k$                 | 0.5   |              |
| $\lambda_s$         | 0.002 |              |
| $\kappa_s$          | 0.001 |              |
| $p_{atm}$           | 101.3 | <i>kPa</i>   |
| $p_{ref}$           | 1.0   | <i>kPa</i>   |

**Tabela 9.4:** Estado inicial usado para gerar as superfícies do modelo Barcelona Basic Model, apresentada na Figura 9.1.

| Componente de tensão/constante inicial | Valor | Unidade    |
|----------------------------------------|-------|------------|
| $\sigma_x$                             | 15    | <i>kPa</i> |
| $\sigma_y$                             | 15    | <i>kPa</i> |
| $\sigma_z$                             | 15    | <i>kPa</i> |
| $v_{ini}$                              | 1.8   |            |
| <i>OCR</i>                             | 1.4   |            |
| $z_1$                                  | 30    | <i>kPa</i> |
| Sucção                                 | 20    | <i>kPa</i> |

No modelo BarcelonaX, para simplificar a implementação computacional, adota-se uma função de plastificação modificada que define uma superfície única no espaço (p,s,q). Esta é dada pela seguinte fórmula:

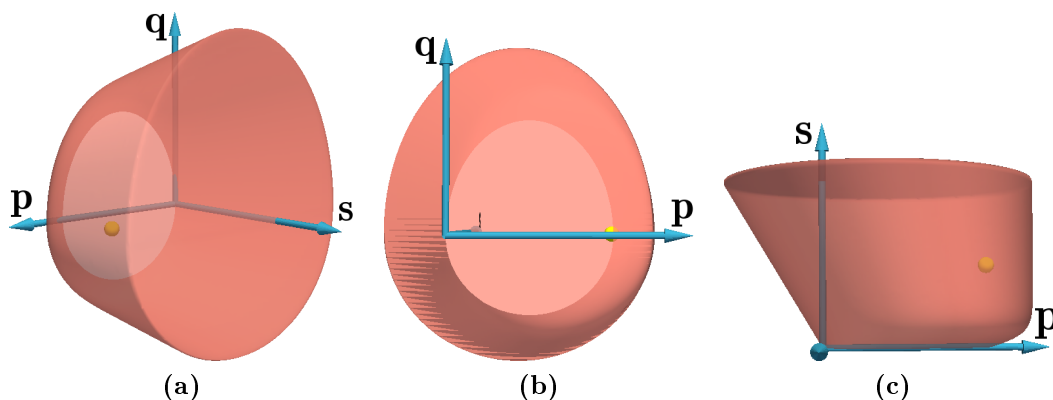
$$F(\underline{\sigma}, z_k, s) = F(p, q, \theta, z_0, z_1, s) = q^2 - M(\theta)^2(p + p_s)[p_0(z_0, s) - p] + C(z_1, s) \quad (9.6)$$

em que

$$C(z_1, s) = p_{ref}^2 \left\{ \exp \left[ \frac{B(s - z_1)}{p_{ref}} \right] - \exp \left( \frac{-Bz_1}{p_{ref}} \right) \right\} \quad (9.7)$$

e *B* é o único parâmetro adicional que permite ajustar a tampa da superfície na direção da sucção.

Com essa fórmula, a superfície terá o aspecto mostrado na Figura 9.2. Nota-se que, devido à variação de *M* com o ângulo de Lode, a porção inferior, simbolizada por valores de *q* negativos para a extensão, tem menor amplitude do que a parte superior. Assim, a resistência em extensão e o comportamento de deformabilidade para essas trajetórias serão diferentes do que para compressão.



**Figura 9.2:** Superfície do modelo Barcelona Estendido (BarcelonaX): (a) Superfície no espaço p,s,q; (b) Vista do plano q,p; (c) Vista do plano s,p.

A variável  $z_{1ini}$  pode ser inicializada de acordo com:

$$z_{1ini} = s + OSI_{ini} \quad (9.8)$$

em que o seguinte Incremento de Máxima Sucção (“Over Suction Increment” - OSI) foi definido:

$$OSI = s_{max} - s = z_1 - s \quad (9.9)$$

A Figura 9.2 foi gerada considerando-se os estados iniciais da Tabela 9.5. Os parâmetros usados são apresentados na Tabela 9.6. Estes parâmetros serão usados posteriormente nas análises do comportamento simulado pelo modelo.

**Tabela 9.5:** Estado inicial apresentado nas Figura 9.2 com a superfície do modelo BarcelonaX.

| Componente de tensão/constante inicial | Valor | Unidade    |
|----------------------------------------|-------|------------|
| $\sigma_x$                             | 196   | <i>kPa</i> |
| $\sigma_y$                             | 196   | <i>kPa</i> |
| $\sigma_z$                             | 196   | <i>kPa</i> |
| $v_{ini}$                              | 1.8   |            |
| <i>OCR</i>                             | 1.4   |            |
| <i>OSI</i>                             | 98    | <i>kPa</i> |
| Sucção                                 | 98    | <i>kPa</i> |

**Tabela 9.6:** Parâmetros para a superfície do modelo BarcelonaX mostrada nas Figuras 9.2.

| Parâmetro/constante | Valor   | Unidade/tipo             |
|---------------------|---------|--------------------------|
| $\lambda_0$         | 0.0778  |                          |
| $\kappa$            | 0.00824 |                          |
| $\phi_{cs}$         | 34.0    | $^\circ$                 |
| <i>G</i>            | 30      | <i>kPa</i>               |
| <i>r</i>            | 0.78    |                          |
| $\beta$             | 10      | <i>kPa</i> <sup>-1</sup> |
| <i>k</i>            | 0.6     |                          |
| $\lambda_s$         | 0.08    |                          |
| $\kappa_s$          | 0.008   |                          |
| $p_{atm}$           | 1.01    | <i>kPa</i>               |
| $p_{ref}$           | 1.01    | <i>kPa</i>               |
| <i>B</i>            | 100     |                          |

A superfície única dada por  $F = 0$  no espaço das tensões/sucção definirá um domínio elástico misto de tensão/sucção. Durante a evolução dessa superfície, a verificação da situação de carregamento-descarregamento poderá ser feita mediante as seguintes expressões

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \frac{\partial F}{\partial s} \dot{s} > 0 \Rightarrow \text{carregamento elastoplástico} \quad (9.10)$$

$$\text{senão} \Rightarrow \text{descarregamento elástico} \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{D}}^e : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \frac{\partial F}{\partial s} \dot{s} > 0 \Rightarrow \text{carregamento elastoplástico} \quad (9.12)$$

$$\text{senão} \Rightarrow \text{descarregamento elástico} \quad (9.13)$$

em que a primeira é útil quando incrementos de tensão e sucção são impostos e a segunda para incrementos de deformação e sucção dados.

Considerando a Eq. (9.6), os gradientes necessários à determinação da situação de carregamento-descarregamento e obtenção do multiplicador plástico  $\dot{\Lambda}$  poderão ser encontrados pelas seguintes equações:

$$\underline{\underline{V}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{M(\theta)^2(2p - p_0 + ks)}{3} \underline{\underline{I}} + 3\underline{\underline{s}} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (9.14)$$

$$S = \frac{\partial F}{\partial s} = M(\theta)^2 \left[ (p - p_0)k - (p + ks) \frac{\partial p_0}{\partial s} \right] + Bp_{ref} \exp \left[ \frac{B(s - z_1)}{p_{ref}} \right] \quad (9.15)$$

$$y_0 = \frac{\partial F}{\partial z_0} = \frac{-M(\theta)^2(p + ks)\psi p_0}{z_0} \quad (9.16)$$

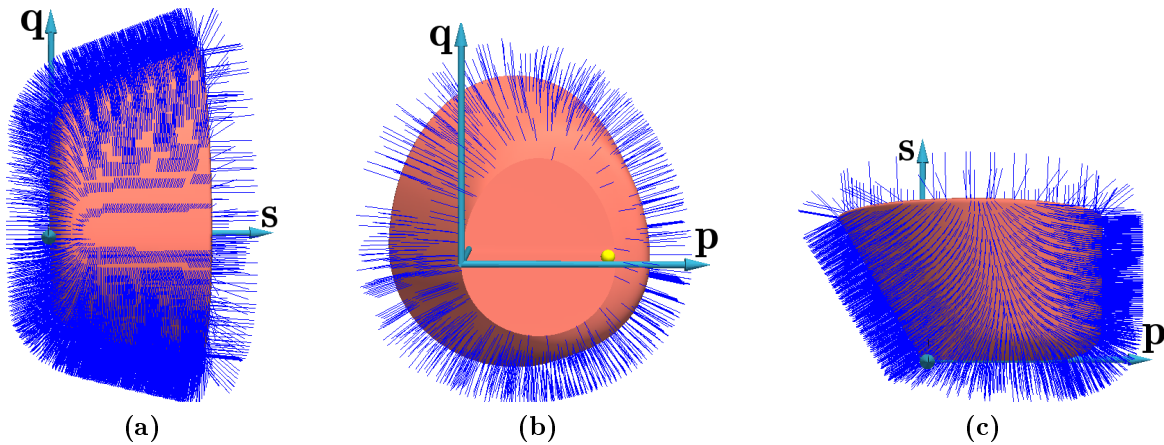
$$y_1 = \frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{-BC}{p_{ref}} \quad (9.17)$$

em que

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{p_0 \ln(z_0/p_{ref})\psi\beta\lambda_0(1-r) \exp(-\beta s)}{\lambda(s) - \kappa}, \quad (9.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial M} = 2M(\theta)(p - p_0)(p + ks) \quad (9.19)$$

e  $\frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$  e  $\frac{\partial M}{\partial \theta}$  já foram apresentados no Capítulo 5 pelas Eqs. (5.19) e (5.21), respectivamente. Com essas equações, os vetores normais à superfície da Eq. (9.6) poderão ser encontrados. Para ilustrar, alguns vetores são mostrados na Figura 9.3.



**Figura 9.3:** Vetores normais à superfície do modelo BarcelonaX: (a) Vista do plano q,s; (b) Vista do plano q,p; (c) Vista do plano s,p.

## 9.4 LEI DE FLUXO PLÁSTICO

Uma lei de fluxo não associada é adotada. Essa lei (Eq. 9.20) não considera a dependência do gradiente da função de plastificação com relação aos incrementos de sucção. Assim, os tensores gradientes estão contidos nos hiperplanos para sucção constante (Figura 9.4).

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\Lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\Lambda} \underline{\underline{r}} \quad (9.20)$$

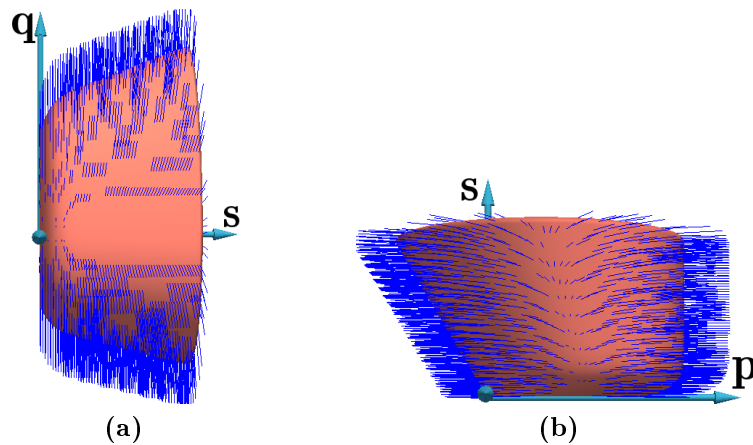
O vetor da direção do fluxo plástico  $\underline{\underline{r}}$  é dado por:

$$\underline{\underline{r}} = \frac{[M(\theta)]^2 (2p + ks - p_0)}{3} \underline{\underline{I}} + 3\alpha \underline{\underline{s}} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (9.21)$$

em que

$$\alpha = \frac{M_{CS}(M_{CS} - 9)(M_{CS} - 3)}{9(6 - M_{CS})(1 - \kappa/\lambda_0)} \quad (9.22)$$

A Figura 9.4 ilustra os vetores usados para a definição da direção das deformações plásticas (lei de fluxo). É importante ressaltar que os vetores estão contidos em planos paralelos ao plano  $q$  versus  $p$ .



**Figura 9.4:** Vetores correspondentes à lei de fluxo plástico do modelo BarcelonaX: (a) Vista do plano  $q,s$ ; (b) Vista do plano  $s,p$ .

## 9.5 VARIÁVEIS INTERNAS

Como no modelo Barcelona original, a primeira variável interna do modelo BarcelonaX ( $z_0$ ) representa o tamanho da superfície de plastificação para valores nulos de sucção ( $s=0$ ). Sua evolução é similar a do Cam-clay e é controlada pela seguinte equação:

$$\dot{z}_0 = \frac{z_0}{\chi_0} \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{z_0}{\chi_0} \text{tr} \underline{\underline{r}} \dot{\Lambda} = \mathcal{H}_0 \dot{\Lambda} \quad (9.23)$$



em que

$$\mathcal{H}_0 = \frac{z_0}{\chi_0} \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \quad \text{e} \quad \chi_0 = \frac{\lambda_0 - \kappa}{v} \quad (9.24)$$

A segunda variável interna ( $z_1$ ) indica a máxima sucção aplicada ao material e serve para diferenciar estados de sucção para os quais acréscimos de sucção irão causar variação de deformação elástica ou elastoplástica. Neste último caso, a variável  $z_1$  acompanha a variação da sucção. Sua evolução, de certa forma acoplada à variação do tamanho da superfície de plastificação, com relação à variação do estado de tensão, é controlada pela seguinte expressão:

$$\dot{z}_1 = \frac{z_1 + p_{atm}}{\chi_s} \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{z_1 + p_{atm}}{\chi_s} \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \dot{\Lambda} = \mathcal{H}_1 \dot{\Lambda} \quad (9.25)$$

em que

$$\mathcal{H}_1 = \frac{z_1 + p_{atm}}{\chi_s} \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \quad \text{e} \quad \chi_s = \frac{\lambda_s - \kappa_s}{v} \quad (9.26)$$

e que é similar à expressão para a evolução de  $z_0$ , contudo definida no plano com coordenadas proporcionais à deformação volumétrica e à sucção.

## 9.6 RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO

O modelo Barcelona original considera que o incremento de deformação volumétrica elástica é dado por duas parcelas, uma devido à variação da tensão média ( $\dot{\varepsilon}_{v\sigma}^e$ ) e outra devido à variação da sucção ( $\dot{\varepsilon}_{vs}^e$ ). Neste modelo, essa divisão também é considerada. Assim,

$$\dot{\varepsilon}_v^e = \dot{\varepsilon}_{v\sigma}^e + \dot{\varepsilon}_{vs}^e \quad (9.27)$$

A evolução de cada parcela é similar à variação do incremento de deformação elástica do modelo Cam-clay, mediante os parâmetros  $\kappa$  e  $\kappa_s$ . A Figura 9.5 ilustra a definição dos módulos  $K$  e  $K_s$ , que são função dos parâmetros  $\kappa$  e  $\kappa_s$ , respectivamente, e que permitem definir as seguintes expressões

$$\dot{\varepsilon}_{v\sigma}^e = \frac{1}{K} \dot{p} = \frac{\kappa}{vp} \dot{p} \quad \text{e} \quad \dot{\varepsilon}_{vs}^e = \frac{1}{K_s} \dot{s} = \frac{\kappa_s}{v(s + p_{atm})} \dot{s} \quad (9.28)$$

Substituindo as Eqs. (9.28) na Eq. (9.27), obtém-se

$$\dot{\varepsilon}_v^e = \frac{1}{K} \dot{p} + \frac{1}{K_s} \dot{s} \quad (9.29)$$

Considerando, agora, a divisão linear do incremento de deformação em parte elástica e parte plástica:

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}} = \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^e + \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^p \quad (9.30)$$

A deformação elástica pode ser decomposta em parte desviadora e parte volumétrica. Assim,

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \text{dev } \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e + \text{iso } \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p \quad (9.31)$$

Em seguida, com a relação apresentada na Figura 9.6, levando em conta as definições dos tensores isotrópicos e desviadores resumidas no Apêndice A, a hipótese da decomposição do incremento de deformação volumétrica (Eq. 9.29) e a lei de fluxo (Eq. 9.20), a Eq. (9.31) poderá ser substituída por:

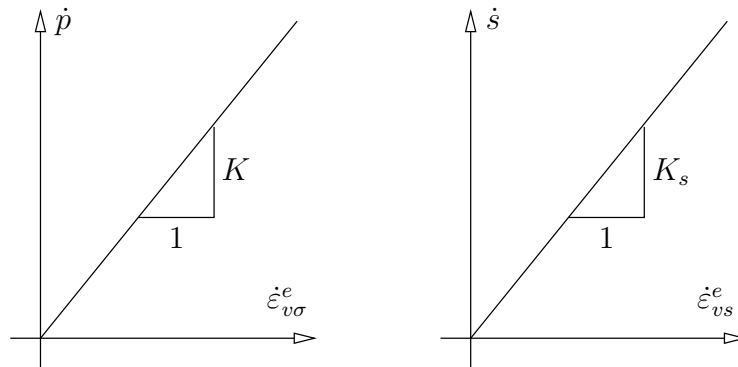
$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2G} \mathbf{P}^{symdev} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \left( \frac{1}{K} \dot{p} + \frac{1}{K_s} \dot{s} \right) \frac{\mathbf{I}}{3} + \dot{\Lambda} \mathbf{r} \quad (9.32)$$

Como

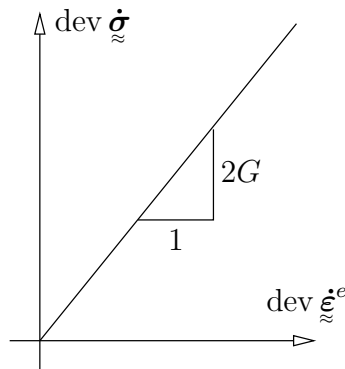
$$\dot{p} = \frac{dp}{d\sigma} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\mathbf{I}}{3} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (9.33)$$

então,

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2G} \mathbf{P}^{symdev} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{1}{9K} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\mathbf{I}}{3K_s} \dot{s} + \dot{\Lambda} \mathbf{r} \quad (9.34)$$



**Figura 9.5:** Variação dos incrementos de deformação elástica com a tensão média e a sucção.



**Figura 9.6:** Relação entre as taxas de deformação elástica desviadora e tensão desviadora.

Com a expressão para o tensor módulo elástico  $\underline{\underline{C}}^e$  (Eq. 3.9) e a definição do seguinte

tensor de segunda ordem:

$$\underline{\underline{\mathbf{c}}}^e = \frac{\underline{\underline{\mathbf{I}}}}{3K_s} \quad (9.35)$$

a Eq. (9.34) poderá ser reescrita de acordo com,

$$\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} + \dot{\underline{\underline{\Lambda}}}\underline{\underline{\mathbf{r}}} + \underline{\underline{\mathbf{c}}}^e \dot{s} \quad (9.36)$$

em que a única diferença, com relação à Eq. (3.8) do Capítulo 3 para modelos elastoplásticos generalizados é o termo  $\underline{\underline{\mathbf{c}}}^e \dot{s}$ , devido à contribuição acoplada da variação da sucção.

Em seguida, para a obtenção do sistema de equações em função do incremento de deformação, multiplica-se o módulo elástico  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^e$  pela a Eq. (9.36), o que permite escrever:

$$\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} - \dot{\underline{\underline{\Lambda}}}\underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{r}}} + \underline{\underline{\mathbf{d}}}^e \dot{s} \quad (9.37)$$

em que

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}}^e = \frac{-K}{K_s} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (9.38)$$

Da mesma forma, o termo  $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^e \dot{s}$  na Eq. (9.37) é a contribuição da sucção que modifica a modelagem, com relação aos modelos convencionais da elastoplasticidade (Eq. 3.8).

## 9.7 ELASTOPLASTICIDADE MATEMÁTICA

De forma análoga à dedução do sistema de equações da elastoplasticidade convencional (Capítulo 3), a determinação do multiplicador plástico  $\dot{\underline{\underline{\Lambda}}}$  é feita por meio da condição de consistência:

$$\dot{F} = \underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} + \sum_{k=0}^1 y_k \dot{z}_k + S \dot{s} = 0 \quad (9.39)$$

em que

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad , \quad y_k = \frac{\partial F}{\partial z_k} \quad \text{e} \quad S = \frac{\partial F}{\partial s} \quad (9.40)$$

Substituindo as lei de endurecimento para  $z_0$  e  $z_1$  (Eqs. 9.23 e 9.25) na Eq. (9.39), o multiplicador plástico  $\dot{\underline{\underline{\Lambda}}}$ , para incrementos de tensão, será

$$\dot{\underline{\underline{\Lambda}}} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} + S \dot{s}}{h^p} \quad \text{em que} \quad h^p = - \sum_k y_k \mathcal{H}_k \quad (9.41)$$

Para incrementos de deformação, substituindo a taxa de variação do tensor de tensões dada pela Eq. (9.37) na Eq. (9.39),

$$\dot{\underline{\underline{\Lambda}}} = \frac{1}{\Phi} \left( \underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} + \underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^e \dot{s} + S \dot{s} \right) \quad \text{em que} \quad \Phi = \underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{r}}} - \sum_k y_k \mathcal{H}_k \quad (9.42)$$

O tensor módulo elastoplástico  $\underline{\underline{C}}^{ep}$  pode ser obtido substituindo a Eq. (9.41) na Eq. (9.36). Desta forma, encontra-se

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{C}}^{ep} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{c}}^{ep} \dot{s} \quad (9.43)$$

em que

$$\underline{\underline{C}}^{ep} = \underline{\underline{C}}^e + \frac{1}{h^p} \underline{\underline{r}} \otimes \underline{\underline{V}} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{c}}^{ep} = \underline{\underline{c}}^e + \frac{S}{h^p} \underline{\underline{r}} \quad (9.44)$$

são os tensores de quarta ordem e segunda ordem, respectivamente, que relacionam os incrementos de tensão e sucção com os incrementos de deformação.

Analogamente, substituindo a Eq. (9.42) na Eq. (9.37), encontra-se

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}^{ep} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \underline{\underline{d}}^{ep} \dot{s} \quad (9.45)$$

em que

$$\underline{\underline{D}}^{ep} = \underline{\underline{D}}^e - \frac{1}{\Phi} (\underline{\underline{D}}^e : \underline{\underline{r}}) \otimes (\underline{\underline{V}} : \underline{\underline{D}}^e) \quad \text{e} \quad \underline{\underline{d}}^{ep} = \underline{\underline{d}}^e - \frac{1}{\Phi} (\underline{\underline{V}} : \underline{\underline{d}}^e + S) \underline{\underline{D}}^e : \underline{\underline{r}} \quad (9.46)$$

são os tensores de quarta ordem e segunda ordem, respectivamente, que relacionam os incrementos de deformação e sucção com os incrementos de tensão.

## 9.8 EVOLUÇÃO DAS VARIÁVEIS INTERNAS

As equações para a evolução das variáveis internas podem ser alternativamente representadas em função dos incrementos de deformação ou tensão, mediante a substituição dos multiplicadores plásticos obtidos pelas Eqs. (9.41) e (9.42). Assim, considerando que,

$$\dot{z}_k = \dot{\Lambda} \mathcal{H}_k \quad k = 0, 1 \quad (9.47)$$

obém-se:

$$\dot{z}_k = \underline{\underline{b}}_k : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + P_k \dot{s}, \quad (9.48)$$

em que

$$\underline{\underline{b}}_k = \frac{\mathcal{H}_k}{h^p} \underline{\underline{V}} \quad \text{e} \quad P_k = \frac{\mathcal{H}_k S}{h^p} \quad (9.49)$$

Para incrementos de deformação (“stress-update”):

$$z_k = \underline{\underline{B}}_k : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + Q_k \dot{s} \quad (9.50)$$

em que

$$\underline{\underline{B}}_k = \frac{\mathcal{H}_k}{\Phi} \underline{\underline{V}} : \underline{\underline{D}}^e \quad \text{e} \quad Q_k = \frac{\mathcal{H}_k}{\Phi} (S - \underline{\underline{V}} : \underline{\underline{D}}^e : \underline{\underline{h}}^e) \quad (9.51)$$

## 9.9 SISTEMA ALGÉBRICO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (DAS)

O sistema algébrico de equações diferenciais (DAS) formado pelas equações do modelo BarcelonaX pode ser representado matricialmente, partindo-se das relações tensão-deformação (Eqs. 9.43 e 9.45) e evolução das variáveis internas (Eqs. 9.48 e 9.50). Assim, Para incrementos de tensão:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{z}_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}^{ep}(\underline{\underline{\sigma}}, z_k) & \underline{\underline{c}}^{ep} \\ \underline{\underline{b}}_k(\underline{\underline{\sigma}}, z_k) & P_k \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} \equiv \dot{y} = \mathcal{F}(x, y)\dot{x} \quad \circ \Rightarrow \{:, \times\} \quad (9.52)$$

e para incrementos de deformação,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{z}_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}^{ep}(\underline{\underline{\sigma}}, z_k) & \underline{\underline{d}}^{ep} \\ \underline{\underline{B}}_k(\underline{\underline{\sigma}}, z_k) & Q_k \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} \equiv \dot{y} = \mathcal{F}(x, y)\dot{x} \quad \circ \Rightarrow \{:, \times\} \quad (9.53)$$

Verifica-se que os sistemas das Eqs. (9.52) e (9.53) são análogos aos mesmos obtidos para modelos elastoplásticos convencionais (Eqs. 3.21 e 3.22). Portanto, os esquemas apresentados no Capítulo 11 também poderão ser aplicados à solução desses sistemas.

## 9.10 CARACTERÍSTICAS TÍPICAS

### 9.10.1 SIMULAÇÕES COM CARREGAMENTOS MONOTÔNICOS

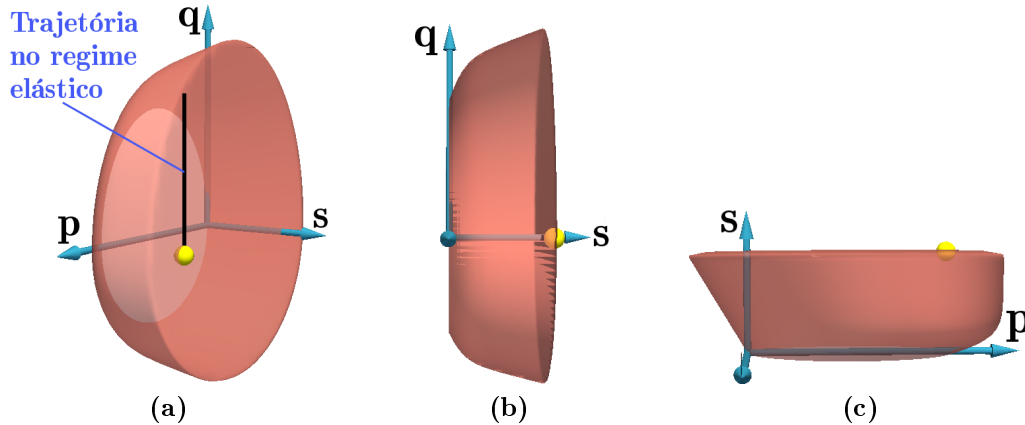
Inicialmente, com os parâmetros da Tabela 9.6, para verificar a representação da resistência, cinco simulações com diferentes ângulos de Lode e carregamentos monotônicos são realizadas. As trajetórias destas simulações são impostas com  $p$  e  $s$  (sucção) constantes. Dois estados iniciais são considerados, um com sucção nula, cujos valores iniciais são dados pela Tabela 9.5, com exceção dos seguintes:  $OSI = 0$  e Sucção=0, e o outro com sucção inicial igual a 98 kPa,  $OSI = 0$  e os demais valores dados pela Tabela 9.5. O estado inicial do segundo caso é ilustrado na Figura 9.7.

Os resultados, com as respectivas trajetórias, são mostrados na Figura 9.8. Nesta figura, verifica-se que a resistência, tanto para o caso com sucção nula, quanto para sucção de 98 kPa, varia com o ângulo de Lode. Isto é devido à Eq. (5.16), que simula uma resistência similar a do critério de Matsuoka-Nakai. Para sucção nula, o comportamento simulado é o mesmo que o calculado com o modelo Subloading Cam-clay (SubCam), quando as duas superfícies daquele modelo estiverem juntas.

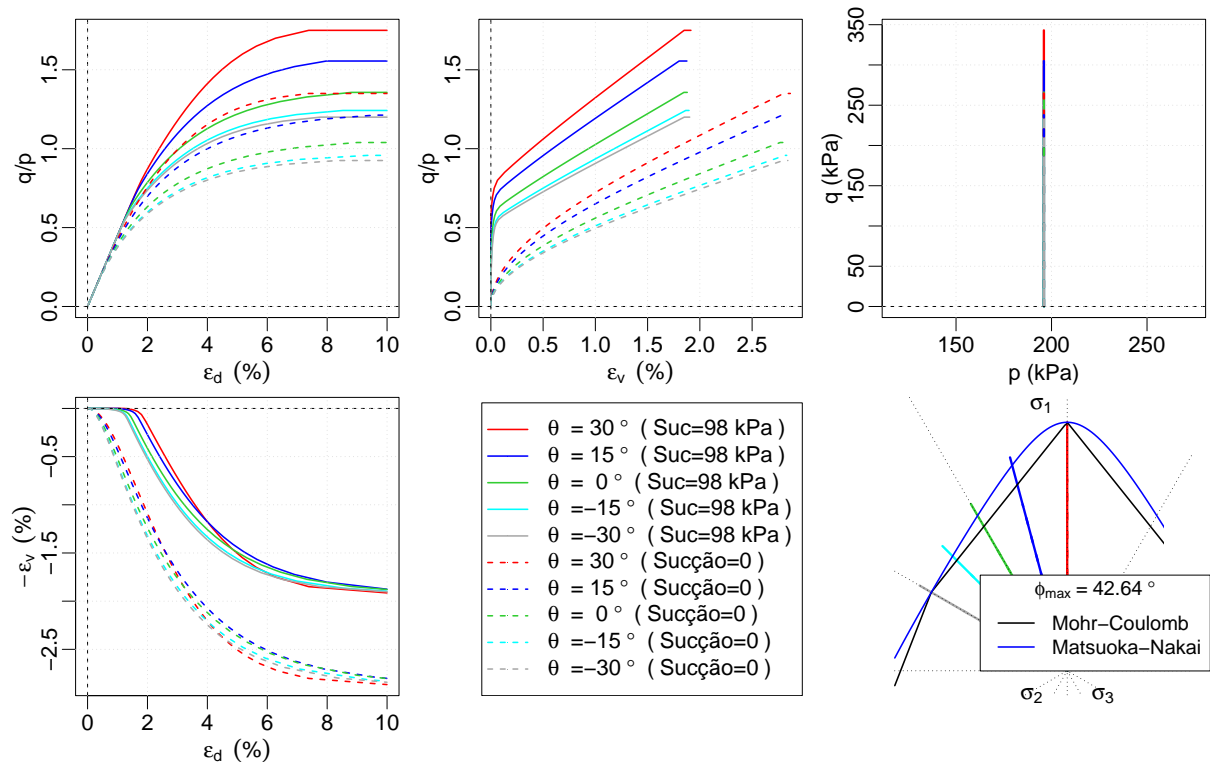
Com a sucção de 98 kPa, a resistência, para todos os valores de ângulo de Lode, é maior que a mesma para sucção nula, como é de se esperar, de acordo com a Mecânica dos Solos não Saturados (Fredlund & Rahardjo, 1993).

Para as simulações com  $s=98$  kPa, o ponto de mudança brusca no gráfico  $q/p$  versus

$\varepsilon_v$  da Figura 9.8 acontece, pois existe uma distância entre o estado inicial de tensões (ponto amarelo) e a superfície. Esta distância é ilustrada na Figura 9.7 por meio de uma linha preta vertical. Como esta distância também depende do ângulo de Lode, os valores  $q/p$  serão diferentes para cada valor deste ângulo. Isto é verificado, por exemplo, para a trajetória de compressão, na qual a razão  $q/p$  correspondente à mudança brusca tem o maior valor (linha vermelha). Para os outros valores do ângulo de Lode, as distâncias induzem a valores menores de  $q/p$ , mas também dependentes do ângulo de Lode.



**Figura 9.7:** Estado inicial da simulação com o modelo BarcelonaX com  $p=196$  kPa e  $s=98$  kPa ctes. e  $OSI=0$ : (a) Espaço  $p,s,q$ ; (b) Vista do plano  $q,s$ ; (c) Vista do plano  $s,p$ .



**Figura 9.8:** Simulações com trajetórias com  $p$  e  $s$  constantes e diferentes valores constantes de  $\theta$  com o modelo **BarcelonaX**; Material hipotético com parâmetros da Tabela 9.6; Estados iniciais com sucção nula e igual a 98 kPa.

### 9.10.2 SIMULAÇÕES DE CASOS HIPOTÉTICOS

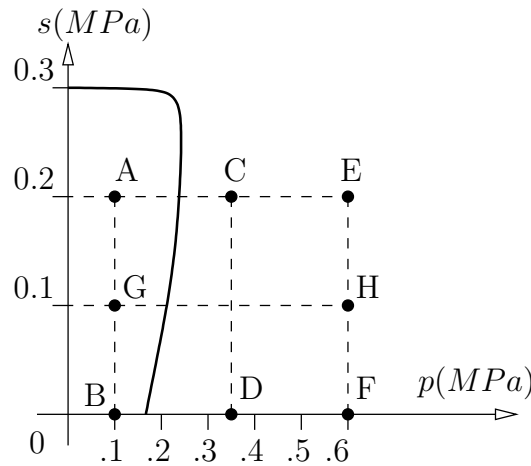
Algumas análises das características típicas representadas pelo modelo BarcelonaX são apresentadas a seguir. Para isso, os casos hipotéticos de Alonso et al. (1990) foram considerados. Os parâmetros para as simulações dos casos hipotéticos são mostrados na Tabela 9.7. Cinco conjuntos de testes são considerados:

1. Trajetórias de molhagem ( $\dot{s} < 0$ ) e aumento de tensão média com tensão desviadora nula, para estados de tensão/sucção que permanecem dentro de um domínio elástico Figura 9.9;
2. Trajetórias de secagem ( $\dot{s} > 0$ ) e aumento de tensão média com tensão desviadora nula, para estados de tensão/sucção que permanecem dentro de um domínio elástico Figura 9.9;
3. Trajetória de secagem seguida de molhagem, com aumento da superfície de plasticização Figura 9.10;
4. Aumento de tensão desviadora mantendo  $p$  constante para diferentes valores iniciais de sucção; e
5. Molhagem causando ruptura para estado de tensão inicializado com aumento de sucção, tensão média e de tensão desviadora, nesta ordem;

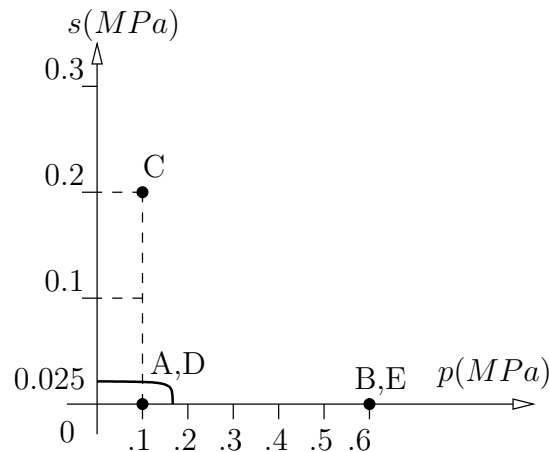
Para os casos hipotéticos do artigo de Alonso et al. (1990), correspondentes a quatro trajetórias sem tensão desviadora ( $q=0$ ) e uma com presença de trajetória do tipo triaxial convencional em compressão, o modelo BarcelonaX simula o mesmo comportamento representado pelo BBM. Portanto, os gráficos com os resultados mostrados a seguir devem mostrar curvas iguais calculadas com os dois modelos.

**Tabela 9.7:** Parâmetros usados nas análises de previsão do modelo BarcelonaX para os casos hipotéticos de Alonso et al. (1990).

| Parâmetro/constante | Valor | Unidade/tipo |
|---------------------|-------|--------------|
| $\lambda_0$         | 0.20  |              |
| $\kappa$            | 0.02  |              |
| $G$                 | 10.0  | <i>MPa</i>   |
| $\phi_{cs}$         | 25.4  | $^\circ$     |
| $r$                 | 0.75  |              |
| $\beta$             | 12.5  | $MPa^{-1}$   |
| $k$                 | 0.6   |              |
| $\lambda_s$         | 0.08  |              |
| $\kappa_s$          | 0.008 |              |
| $p_{atm}$           | 0.101 | <i>MPa</i>   |
| $p_{ref}$           | 0.101 | <i>MPa</i>   |
| $B$                 | 1000  |              |



**Figura 9.9:** Estados iniciais de tensão/sucção e superfícies de plastificação para os testes hipotéticos 1 e 2; Trajetórias de tensão/sucção para os Testes 1 e 2:  $OCR_{ini} = 1.4 \Rightarrow z_{0(ini)} = 0.21 \text{ MPa}$  e  $z_{1(ini)} = 0.3 \text{ MPa}$ .



**Figura 9.10:** Estados iniciais de tensão/sucção e superfícies de plastificação para os testes hipotéticos 3; Trajetórias de tensão/sucção para os Testes 3:  $OCR_{ini} = 1.4 \Rightarrow z_{0(ini)} = 0.21 \text{ MPa}$  e  $z_{1(ini)} = 0.025 \text{ MPa}$ .

Os testes 1 (Figura 9.11) diferenciam-se entre si, basicamente, pela escolha da trajetória inicial de carregamento: diminuição da sucção (ABDF, AGHF) ou aumento da tensão média (ACDF, ACEF). No primeiro caso, ocorre uma leve expansão, devido à molhagem e ao estado de tensão média inicial relativamente baixo. No segundo, com valores mais altos de tensão média  $p$ , poderá ocorrer colapso devido à molhagem. A presença de uma mudança brusca de pré-adensado para normalmente adensado deve-se ao valor inicial de  $OCR_{ini} = 1.4$ . Essa mudança ocorre após o estado de tensão atingir a superfície de plastificação. Neste momento, a determinação da intersecção à superfície deve ser realizada. Como a superfície é única, isso pode ser feito ou pelo método Newton-Raphson, que requer o cálculo dos gradientes (Eqs. 9.14 e 9.15).



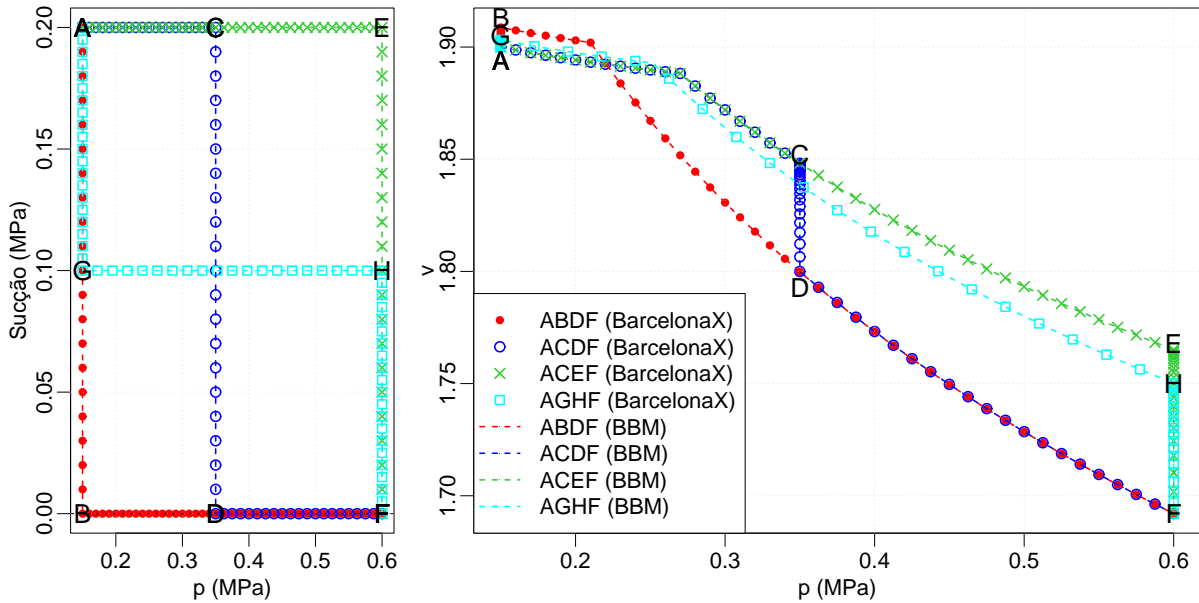


Figura 9.11: Resultados dos Testes 1 (molhagem) com o modelo **BarcelonaX**.

A principal conclusão observada pelas trajetórias de secagem, seguidas de aumento de tensão média (Testes 2 da Figura 9.12) é a de que o comportamento, simulado pelo modelo, neste caso, é dependente da trajetória de tensão/sucção. Essa conclusão provém do fato de que o mesmo estado de tensão/sucção final (E) foi atingido com valores diferentes de volume específico para diferentes trajetórias de tensão/sucção.

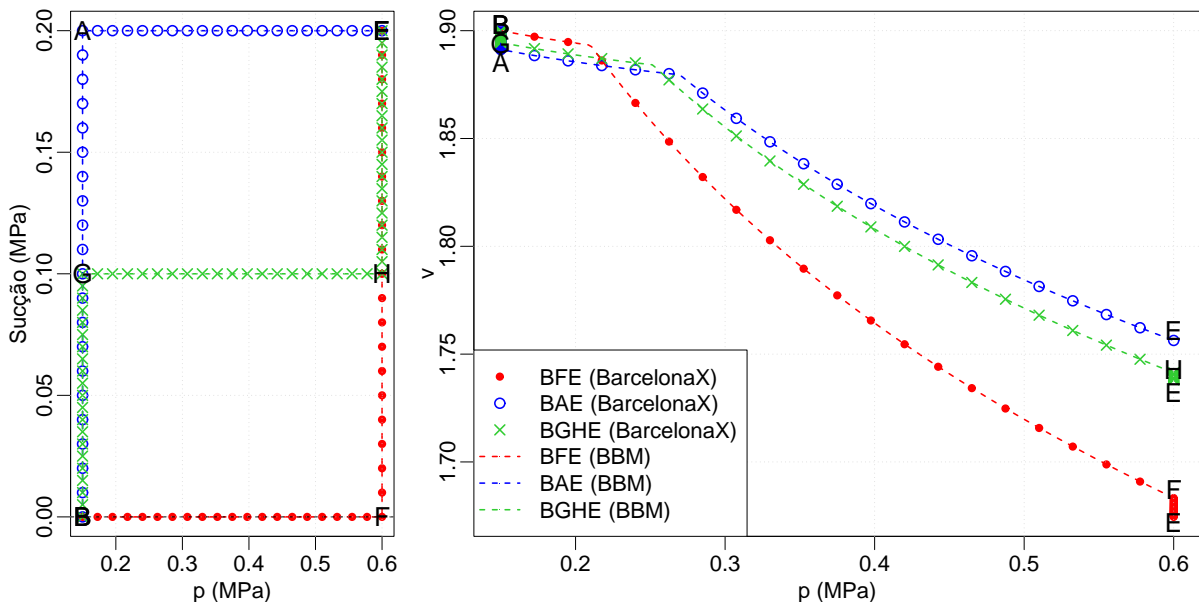
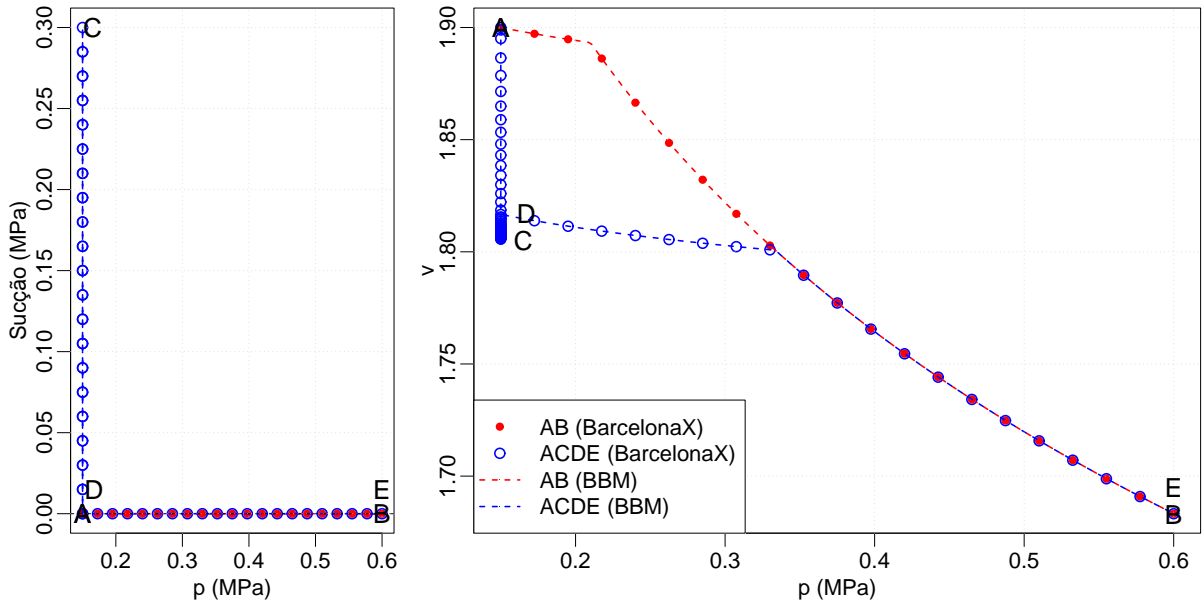


Figura 9.12: Resultados dos Testes 2 (secagem) com o modelo **BarcelonaX**.

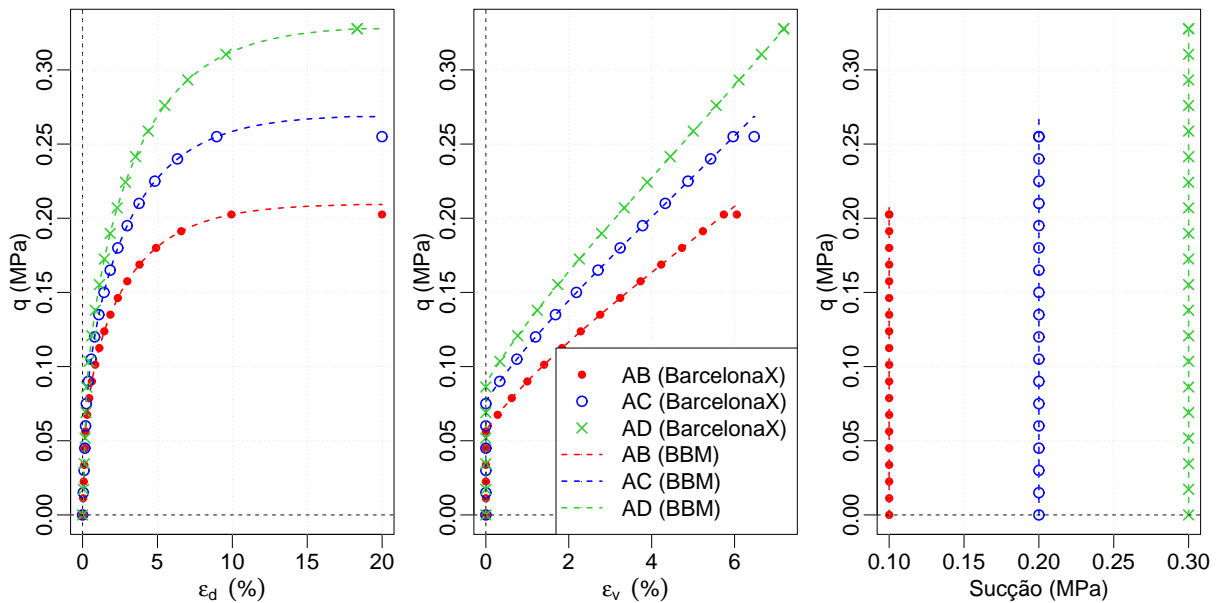
A Figura 9.13 mostra que o ciclo de secagem-molhagem causa uma diminuição de volume. Além disso, a influência da parte SI da superfície na variação da parte LC pode

ser verificada, observando que, no teste ACDE, a superfície (única) cresce mesmo com variação nula de tensão média. Isso fica claro quando, após o ciclo, a trajetória segue o aumento da tensão média, na qual pode-se verificar um aumento do domínio elástico.



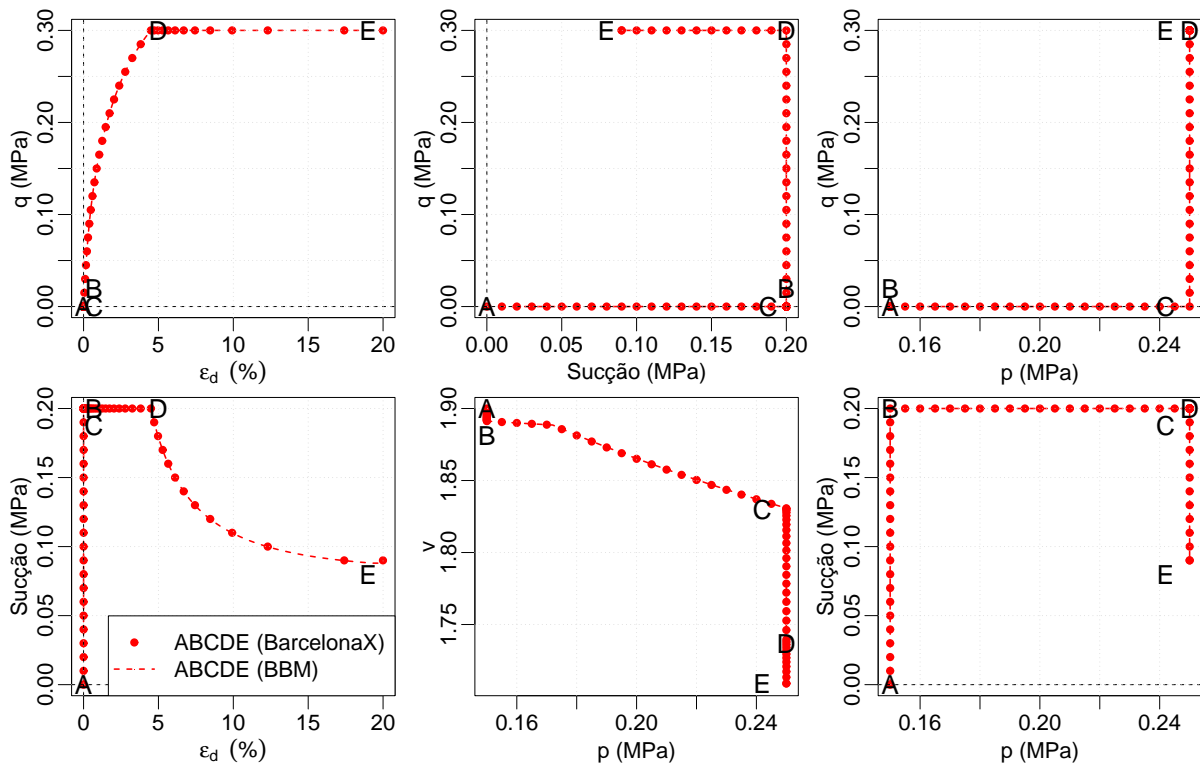
**Figura 9.13:** Resultados dos Testes 3 (secagem-molhagem) com o modelo **BarcelonaX**.

A Figura 9.14 mostra o ganho de resistência (virtual) devido ao aumento da sucção para três valores de sucção. Nestes testes (4), a tensão média  $p$  e a sucção  $s$  permanecem constantes, enquanto que a tensão desviadora é aumentada causando variação volumétrica e deformação cisalhante.



**Figura 9.14:** Resultados dos Testes 4 (aumento de resistência com sucção) com o modelo **BarcelonaX**.

Talvez uma das simulações mais interessantes com o modelo Barcelona (BBM) seja a da ruptura devido a molhagem. Este tipo de ruptura pode acontecer, por exemplo, em taludes de solos não saturados em regiões tropicais, sujeitos a fortes chuvas e conseqüentes infiltrações. Uma simulação pontual deste comportamento é apresentado na Figura 9.15. Nesta simulação, inicialmente, a trajetória segue um aumento da sucção ( $s$ ), da tensão média ( $p$ ) e da tensão cisalhante ( $q$ ), nesta ordem (trajetória ABCD). Em seguida, trajetória (DE), a sucção sofre diminuição (molhagem), causando a ruptura. Isso ocorre pois a resistência virtual da sucção, que compensava o nível de tensão cisalhante  $q$  do ponto (D), é perdida.



**Figura 9.15:** Resultados dos testes 5 (ruptura devido a molhagem) com o modelo **BarcelonaX**.

## 9.11 CONCLUSÕES

O modelo BarcelonaX é uma simples extensão do modelo Barcelona, apresentado por Alonso et al. (1990). Ele possui, basicamente, as mesmas características do modelo original (BBM), no entanto, além de considerar a variação da resistência com o ângulo de Lode, tem uma superfície única no espaço das tensões e sucção ( $p, s, q$ ). Essa superfície permite uma maior facilidade na implementação computacional, principalmente no algoritmo de detecção de carregamento-descarregamento. Um parâmetro adicional, com relação ao modelo BBM é necessário. Este controla a transição da superfície nas proximidades da variável interna  $z_1$ .

Algumas características mecânicas dos solos não-saturados podem ser simuladas com o modelo BarcelonaX (e o modelo Barcelona). Dentre elas, destacam-se a mudança da rigidez devido à variação da sucção, resposta diferenciada dependendo da alternância entre aumento/diminuição de sucção e tensão confinante (aumento do pré-adensamento) e condicionamento da ocorrência de colapso à mudança de rigidez devido a sucção. O modelo BarcelonaX adiciona ainda a dependência da resistência com relação ao ângulo de Lode.

A principal idéia introduzida pelo modelo Barcelona, com relação à influência da sucção, é a variação do coeficiente de compressibilidade com relação à sucção. Além disso, uma medida da máxima sucção que o material já sofreu, representada por uma variável interna  $z_1$ , é definida. Assim, duas variáveis internas controlam a evolução da superfície de plastificação do modelo:  $z_0$  e  $z_1$ . A variável  $z_0$  corresponde à mesma medida de tamanho da superfície do modelo Cam-clay, para sucção nula.

O Incremento de Máxima Sucção (“Over Suction Increment” - OSI) é definido pela diferença entre a máxima sucção aplicada ao material e a sucção atuante no mesmo.

As equações do modelo BarcelonaX podem ser deduzidas segundo a teoria matemática da elastoplasticidade. O sistema algébrico de equações diferenciais resultante, por ter a forma convencional apresentada no Capítulo 3, poderá ser resolvido com os algoritmos do Capítulo 11.

# Capítulo 10

## MODELO SUBLOADING BARCELONA

Considerando os conceitos necessários ao modelo Subloading Cam-clay: resistência dada pelo critério Matsuoka-Nakai, via equação da variação de  $M$  com  $\theta$  (Sheng et al., 2003a), conceito de subcarregamento e as idéias introduzidas pelo modelo Barcelona e BarcelonaX, propõe-se, neste Capítulo, um novo modelo para solos parcialmente saturados (ou não) sujeitos a carregamentos monotônicos e/ou cíclicos. Denomina-se este modelo de Subloading Barcelona Model (SubBar), tendo em vista que é uma extensão, bastante simples, do modelo de Alonso et al. (1990) que considera a teoria de estado de subplastificação de Hashiguchi & Ueno (1977). Para isso, duas novas variáveis internas, uma do tipo sucção (tensão) e outra do tipo tensão, são introduzidas para definir uma superfície de subcarregamento interna à superfície normal de plastificação. Essas superfícies são definidas no espaço das tensões/sucção e utilizam a mesma função de plastificação do modelo BarcelonaX. A superfície normal tem a mesma evolução da superfície do modelo Barcelona. A superfície de subcarregamento é vinculada à superfície normal mediante a introdução de duas deformações de subplastificação,  $\varepsilon_{v(s)}^{p(sy)}$  e  $\varepsilon_v^{p(sy)}$ , uma para mudança de sucção e outra para mudança de tensão. Isso requer a adição de dois parâmetros constitutivos, com relação ao modelo BarcelonaX. O primeiro ( $c_0$ ) controla a variação da rigidez devido aos ciclos de tensão. O segundo ( $c_s$ ) controla essa mesma variação, entretanto, com relação aos ciclos de sucção.

Diferentemente do modelo SubCam e do conceito de subloading proposto por Hashiguchi & Ueno (1977), este modelo considera que as duas superfícies, normal e de subcarregamento, poderão não ser similares, pelo menos considerando as isosuperfícies de nível no espaço (p,s,q). O abandono desta exigência deve-se ao fato de que a forma da superfície (única) no espaço das tensões/sucção varia em função da sucção, conforme equação para a variável  $p_0$  do modelo Barcelona original. Além disso, as superfícies poderão ser convexas. A exigência de similaridade entre as superfícies parece não ser necessária neste modelo, pois a ligação entre as evoluções (endurecimento) entre as superfícies é feita com a introdução *a priori* da deformação de subplastificação devido à variação de sucção ( $\varepsilon_{v(s)}^{p(sy)}$ ).

Este modelo é capaz de simular o ganho de rigidez com ciclos de tensão e/ou sucção.

Para sucção constante, as evoluções das superfícies são similares às mesmas definidas para o modelo SubCam (Capítulo 7). O controle da variação da rigidez com os ciclos é feito com os parâmetros  $c_0$  e  $c_s$ . Para referência futura, estes são agrupados na Tabela 10.1. Os invariantes de tensão e deformação são os mesmos do modelo SubCam e a influência da sucção adotada é idêntica àquela considerada pelo modelo BarcelonaX.

Para sucção nula, o modelo SubBar funciona de forma similar ao modelo SubCam.

**Tabela 10.1:** Parâmetros constitutivos para comportamento mecânico necessários ao modelo Subloading Barcelona (SubBar).

| Parâmetros | Descrição                                                                             |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| ...        | todos parâmetros do modelo BarcelonaX                                                 |
| $c_0$      | Parâmetro que controla o decaimento da flexibilidade com o número de ciclos de tensão |
| $c_s$      | Parâmetro que controla o decaimento da flexibilidade com o número de ciclos de sucção |

O mesmo equacionamento proposto para o modelo BarcelonaX poderá ser usado na construção do DAS deste modelo. Portanto, a derivação dos tensores de quarta ordem elastoplásticos será omitida. A única diferença é a introdução de duas variáveis internas, causando a alteração do coeficiente de endurecimento  $h^p$ .

## 10.1 FUNÇÕES DE PLASTIFICAÇÃO

Como no modelo BarcelonaX, a função para a superfície de subcarregamento no espaço  $(p,s,q)$  é dada por:

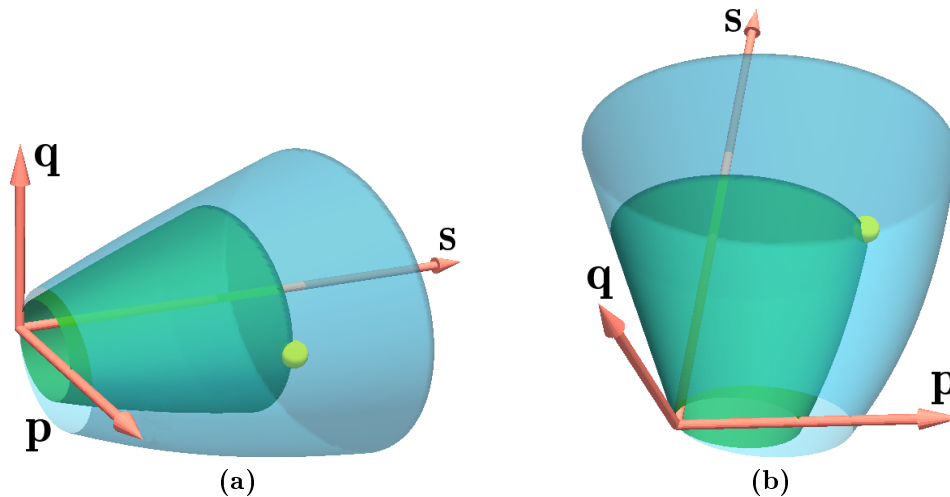
$$F(\underline{\sigma}, z_k, s) = F(p, q, \theta, z_0, z_1, s) = q^2 - M(\theta)^2(p + ps)[p_0(z_0, s) - p] + C(z_1, s) \quad (10.1)$$

em que

$$C(z_1, s) = p_{ref}^2 \left\{ \exp \left[ \frac{B(s - z_1)}{p_{ref}} \right] - \exp \left( \frac{-Bz_1}{p_{ref}} \right) \right\} \quad (10.2)$$

A mesma função vale para superfície normal, entretanto, esta não é necessária à dedução das equações.

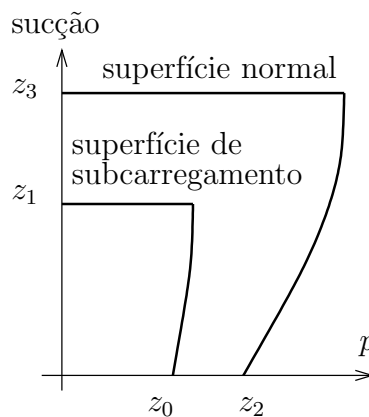
As duas superfícies podem ser vistas com o auxílio da Figura 10.1, na qual a superfície em verde representa a superfície de subcarregamento e a superfície em azul, a superfície normal de plastificação. A esfera em amarelo corresponde ao estado de tensão inicial, que está sempre na superfície de subcarregamento.



**Figura 10.1:** Superfícies de subcarregamento e normal de plastificação do modelo Subloading Barcelona (SubBar): (a) Vista das superfícies de subcarregamento e normal no espaço  $p,s,q$ ; (b) Vista das superfícies de subcarregamento e normal no espaço  $p,s,q$ .

## 10.2 VARIÁVEIS INTERNAS

Como no modelo SubCam, este modelo possui duas superfícies de plastificação. No entanto, estas são definidas no espaço das tensões/sucção, por isso, para controlar o tamanho destas superfícies, duas variáveis internas por superfície são necessárias, uma para a medida ao longo do eixo da tensão média  $p$  e outra para a medida ao longo do eixo da sucção. Assim, a superfície de subcarregamento será dada pelas variáveis  $z_0$  (no eixo  $p$ ) e  $z_1$  (no eixo  $s$ ) (Figura 10.2). Para a definição da superfície normal de plastificação, que terá evolução análoga a (única) superfície do modelo BarcelonaX, mais duas variáveis internas são necessárias:  $z_2$ , correspondente à variável  $z_0$  e que controla o tamanho na direção das tensões e  $z_3$ , correspondente à  $z_1$  para a direção da sucção (Figura 10.2).



**Figura 10.2:** Variáveis internas do modelo Subloading Barcelona (SubBar); Medidas das superfícies de subcarregamento e normal.

O endurecimento da superfície normal é idêntico ao proposto para o modelo Barcelo-

naX, que, por sua vez, é idêntico ao do modelo Cam-clay, para tensões médias, ou seja, tem evolução isotrópica. Com  $z_2$  indicando o tamanho da superfície normal, na direção das tensões, a lei de endurecimento para tensões será:

$$\dot{z}_2 = \frac{z_2}{\chi_0} \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{z_2}{\chi_0} \operatorname{tr} \underline{\mathbf{r}} \dot{\Lambda} = \mathcal{H}_2 \dot{\Lambda} \quad (10.3)$$

em que

$$\mathcal{H}_2 = \frac{z_2}{\chi_0} \operatorname{tr} \underline{\mathbf{r}} \quad \text{e} \quad \chi_0 = \frac{\lambda_0 - \kappa}{\nu} \quad (10.4)$$

foram definidos. O primeiro,  $\mathcal{H}_2$  é um tipo de coeficiente de plastificação que relaciona taxas de variáveis internas com o multiplicador plástico.

Como no modelo BarcelonaX, o endurecimento da superfície normal para variação de sucção é dado por uma equação análoga ao endurecimento isotrópico para tensões. Assim, considerando  $\dot{z}_3$  como a taxa de variação do tamanho da superfície normal ao longo do eixo da sucção (endurecimento para sucção):

$$\dot{z}_3 = \frac{z_3 + p_{atm}}{\chi_s} \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{z_3 + p_{atm}}{\chi_s} \operatorname{tr} \underline{\mathbf{r}} \dot{\Lambda} = \mathcal{H}_3 \dot{\Lambda} \quad (10.5)$$

em que

$$\mathcal{H}_3 = \frac{z_3 + p_{atm}}{\chi_s} \operatorname{tr} \underline{\mathbf{r}} \quad \text{e} \quad \chi_s = \frac{\lambda_s - \kappa_s}{\nu} \quad (10.6)$$

foram definidos e  $\mathcal{H}_3$  e o coeficiente de plastificação correspondente.

Caso as superfícies estejam juntas, ou seja,  $z_2 = z_0$  e  $z_3 = z_1$ , o modelo irá se comportar como o modelo BarcelonaX para materiais normalmente adensados e com máxima sucção aplicada nula. Quando ciclos de sucção e/ou tensão ocorrerem, a superfície de subcarregamento acompanhará o estado de tensão/sucção, diminuindo ou aumentando de tamanho. Sua evolução será dada, considerando-se a introdução de duas deformações de subplastificação, uma devido a ciclos de tensões, que, como no modelo SubCam e definida em Pedroso et al. (2005), é dada por:

$$\dot{\varepsilon}_v^{p(sy)} = \dot{\Lambda} L(\varepsilon_v^{p(sy)}) \quad (10.7)$$

A outra, em analogia, é dada por:

$$\dot{\varepsilon}_{v(s)}^{p(sy)} = \dot{\Lambda} L_s(\varepsilon_{v(s)}^{p(sy)}) \quad (10.8)$$

em que  $L_s(\varepsilon_{v(s)}^{p(sy)})$  é a função equivalente a  $L(\varepsilon_v^{p(sy)})$  que controla a taxa de variação da flexibilidade ao longo de ciclos de sucção. As funções  $L(\varepsilon_v^{p(sy)})$  e  $L_s(\varepsilon_{v(s)}^{p(sy)})$  são análogas entre si e são, em primeira instância, definidas por:

$$L(\varepsilon_v^{p(sy)}) = c_0 \frac{|\varepsilon_v^{p(sy)}|^2}{p} = c_0 \frac{[\chi_0 \ln(z_2/z_0)]^2}{p} \quad (10.9)$$



e

$$L(\varepsilon_{v(s)}^{p(sy)}) = c_s \frac{|\varepsilon_{v(s)}^{p(sy)}|^2}{s + p_{atm}} = c_s \frac{[\chi_s \ln(z_3 + p_{atm}/z_1 + p_{atm})]^2}{s + p_{atm}} \quad (10.10)$$

em que  $c_0$  e  $c_s$  são dois parâmetros; os únicos em adição ao modelo BarcelonaX, que controlam a taxa de variação do decaimento da flexibilidade tanto para ciclos de tensão, quanto para ciclos de sucção.

Com isso, o endurecimento da superfície de subcarregamento poderá ser definido, considerando-se a dependência das deformações plásticas de subplastificação. Para tensões, este será dado por:

$$\dot{z}_0 = \frac{z_0}{\chi_0} (\dot{\varepsilon}_v^p + \dot{\varepsilon}_v^{p(sy)}) \quad (10.11)$$

em que a taxa de variação da deformação volumétrica plástica ( $\dot{\varepsilon}_v^p$ ) segue a lei (convencional) de endurecimento:

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\Lambda} \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \quad (10.12)$$

Assim, a lei de endurecimento (para tensões) poderá ser representada por:

$$\dot{z}_0 = \dot{\Lambda} \frac{z_0}{\chi_0} (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} + L) = \dot{\Lambda} \mathcal{H}_0 \quad \text{em que} \quad \mathcal{H}_0 = \frac{z_0}{\chi_0} (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} + L) \quad (10.13)$$

Para o endurecimento da superfície de subcarregamento devido a variação de sucção, considera-se a dependência da taxa de variação desta superfície, na direção da sucção, tanto das deformações plásticas, quanto da deformação de subplastificação para sucção, de acordo com a seguinte expressão:

$$\dot{z}_1 = \frac{z_1 + p_{atm}}{\chi_s} (\dot{\varepsilon}_v^p + \dot{\varepsilon}_v^{p(sy)}) \quad (10.14)$$

Com isso, o endurecimento poderá ser representado por:

$$\dot{z}_1 = \dot{\Lambda} \frac{z_1 + p_{atm}}{\chi_s} (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} + L_s) = \dot{\Lambda} \mathcal{H}_1 \quad \text{em que} \quad \mathcal{H}_1 = \frac{z_1 + p_{atm}}{\chi_s} (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} + L_s) \quad (10.15)$$

que é bastante similar à equação para o endurecimento para variação de tensão.

Como no modelo SubCam, a única implicação da introdução do conceito de subcarregamento no modelo é a alteração do coeficiente plástico do denominador dos módulos elastoplásticos ( $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{ep}$  e  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep}$ ), segundo:

$$h^p = -y_0 \mathcal{H}_0 - y_1 \mathcal{H}_1 \quad (10.16)$$

Portanto, o equacionamento do modelo Subloading Barcelona será bastante similar ao mesmo desenvolvido no Capítulo 3 para modelos elastoplásticos genéricos, e, então, será omitido deste capítulo. O sistema de equações diferenciais é o mesmo apresentado para o modelo BarcelonaX e poderá ser resolvido com os esquemas do Capítulo 11.

## 10.3 CARACTERÍSTICAS TÍPICAS

### 10.3.1 SIMULAÇÕES COM CARREGAMENTOS MONOTÔNICOS

Inicialmente, resultados de dois conjuntos com cinco simulações de ensaios com  $p$  e  $s$  constantes e para diversos valores do ângulo de Lode são apresentados. Estas simulações auxiliam a verificação do comportamento de resistência simulado pelo modelo SubBar e são similares àquelas apresentadas no Capítulo 9 para o modelo BarcelonaX. Cada uma possui um valor constante para o ângulo de Lode e todas são realizadas com  $p$  e  $s$  constantes. O primeiro conjunto é feito com  $s=0$  e o segundo com  $s=98$  kPa. As trajetórias de tensão ocorrem com aumento de tensão desviadora. Os parâmetros utilizados são apresentados na Tabela 10.2. As constantes  $c_0$  e  $c_s$  são consideradas nulas, pois o ensaio é do tipo monotônico e as superfícies de subcarregamento e normal são inicializadas com o mesmo tamanho, portanto, estas constantes não influenciam a simulação, neste caso.

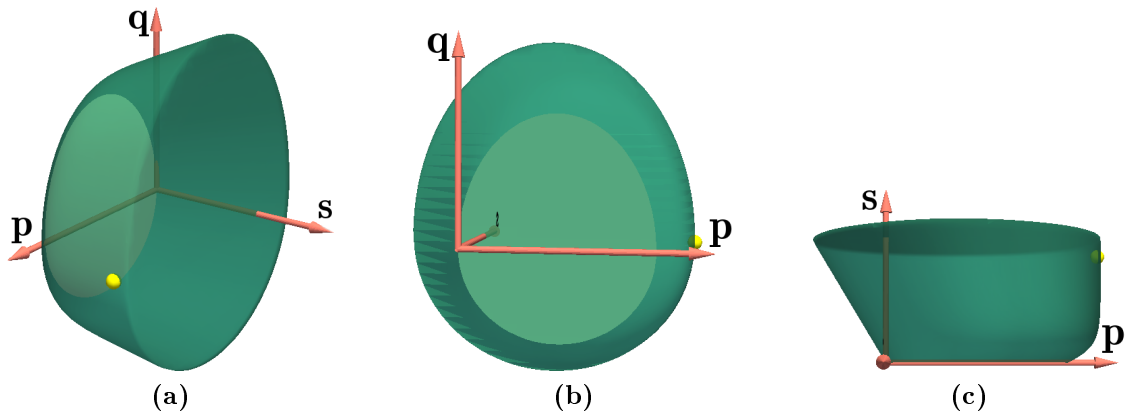
**Tabela 10.2:** Parâmetros para as simulações com  $p$  e  $s$  constante com o modelo **SubBar**, cujos resultados são apresentados na Figura 10.4.

| Parâmetro/constante | Valor   | Unidade/tipo |
|---------------------|---------|--------------|
| $\lambda_0$         | 0.0778  |              |
| $\kappa$            | 0.00824 |              |
| $\phi_{cs}$         | 34.0    | $^\circ$     |
| $G$                 | 30      | kPa          |
| $r$                 | 0.78    |              |
| $\beta$             | 10      | kPa $^{-1}$  |
| $k$                 | 0.6     |              |
| $\lambda_s$         | 0.08    |              |
| $\kappa_s$          | 0.008   |              |
| $p_{atm}$           | 1.01    | kPa          |
| $p_{ref}$           | 1.01    | kPa          |
| $B$                 | 100     |              |
| $c_0$               | 0       |              |
| $c_s$               | 0       |              |

O estado inicial do segundo conjunto é mostrado na Tabela 10.3 e ilustrado na Figura 10.3.

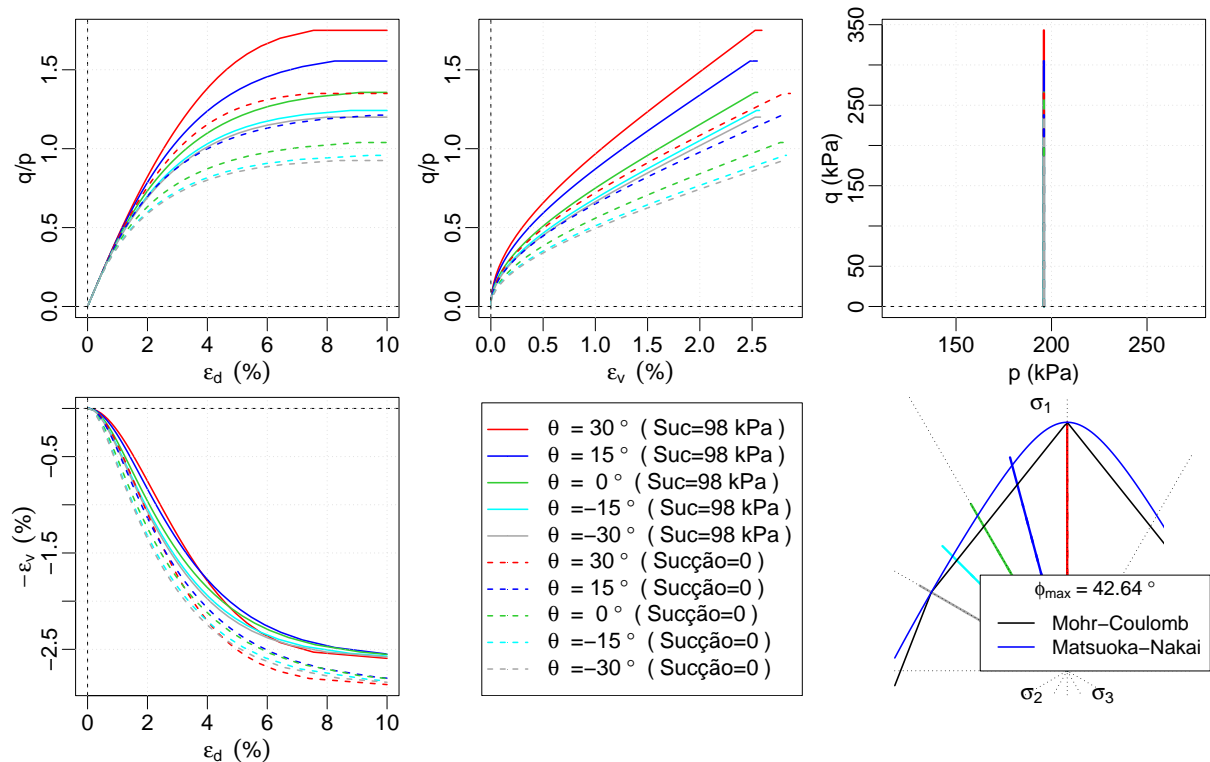
**Tabela 10.3:** Estado inicial da simulação com  $p=198$  kPa e  $s=98$  kPa constantes com o modelo **SubBar**, cujos resultados são apresentados na Figura 10.4.

| Componente de tensão/constante inicial | Valor | Unidade |
|----------------------------------------|-------|---------|
| $\sigma_x$                             | 196   | kPa     |
| $\sigma_y$                             | 196   | kPa     |
| $\sigma_z$                             | 196   | kPa     |
| $v_{ini}$                              | 1.8   |         |
| OCR                                    | 1.4   |         |
| OSI                                    | 0     | kPa     |
| Sucção                                 | 98    | kPa     |



**Figura 10.3:** Estado inicial da simulação com o modelo Subloading Barcelona (SubBar) com  $p=196$  kPa e  $s=98$  kPa constantes e  $OSI=0$ : (a) Espaço  $p,s,q$ ; (b) Vista do plano  $q,s$ ; (c) Vista do plano  $s,p$ .

Os resultados são mostrados na Figura 10.4, na qual verifica-se o ganho de resistência proporcionado pela sucção, no entanto, a resistência máxima (ou no estado crítico) é dependente do ângulo de Lode. Como não existe uma distância entre o estado de tensões/sucção e a superfície de subcarregamento, então, durante o carregamento, uma transição suave entre um possível regime elástico e o estado elastoplástico é simulado, diferentemente do que ocorre, por exemplo, no modelo BarcelonaX (Fig. 9.8), em que uma transição brusca ocorre após o estado de tensão tocar a superfície de plastificação.



**Figura 10.4:** Simulações com trajetórias com  $p$  e  $s$  constantes e diferentes valores constantes de  $\theta$  com o modelo **SubBar**; Material hipotético com parâmetros da Tabela 10.2; Estados iniciais com sucção nula e igual a  $98kPa$ .

### 10.3.2 SIMULAÇÕES DE CASOS HIPOTÉTICOS

A seguir, como no Capítulo 9, algumas características de comportamento simuladas pelo modelo SubBar são apresentadas. Os mesmos testes hipotéticos apresentados por Alonso et al. (1990) e mostrados no Capítulo 9 são considerados, portanto, informações adicionais sobre estes são omitidas neste capítulo. Os parâmetros da Tabela 10.4 são adotados. Os mesmo parâmetros usados nos casos hipotéticos simulados com o modelo BarcelonaX (Tabela 9.7) são adotados, com exceção das constantes  $c_0$  e  $c_s$ , mostradas na Tabela 10.4.

O valor de  $c_0 = 10000$  escolhido objetiva permitir ao modelo SubBar simular uma transição elástica-elastoplástica com uma curvatura de pequeno raio, imitando a transição abrupta simulada pelo modelo BarcelonaX, devido ao valor de  $OCR = 1.4 > 1$ . O valor de  $c_s = 10$ , por ser um tanto baixo, para este modelo, irá causar uma deformação volumétrica maior do que com o modelo BarcelonaX, para ciclos de sucção.

**Tabela 10.4:** Parâmetros usados nas análises de previsão do modelo SubBar para os casos hipotéticos de Alonso et al. (1990).

| Parâmetro/constante | Valor | Unidade/tipo |
|---------------------|-------|--------------|
| $\lambda_0$         | 0.20  |              |
| $\kappa$            | 0.02  |              |
| $G$                 | 10.0  | <i>MPa</i>   |
| $\phi_{cs}$         | 25.4  | $^\circ$     |
| $r$                 | 0.79  |              |
| $\beta$             | 12.5  | $MPa^{-1}$   |
| $k$                 | 0.6   |              |
| $\lambda_s$         | 0.08  |              |
| $\kappa_s$          | 0.008 |              |
| $p_{atm}$           | 0.101 | <i>MPa</i>   |
| $p_{ref}$           | 0.101 | <i>MPa</i>   |
| $B$                 | 1000  |              |
| $c_0$               | 10000 |              |
| $c_s$               | 10    |              |

A Figura 10.5 mostra resultados similares àqueles apresentados para o modelo BarcelonaX. A diferença primordial é a suavização da transição elástica-plástica devido ao subcarregamento. Devido essa suavização, as curvas no gráfico  $v$  versus  $p$  simuladas com o modelo SubBar não apresentam pontos de descontinuidade, como nas curvas obtidas com o modelo BarcelonaX. Devido ao valor  $c_0$  escolhido, a transição elástica-elastoplástica ocorre um pouco antes do que a mesma transição obtida com o modelo BarcelonaX.

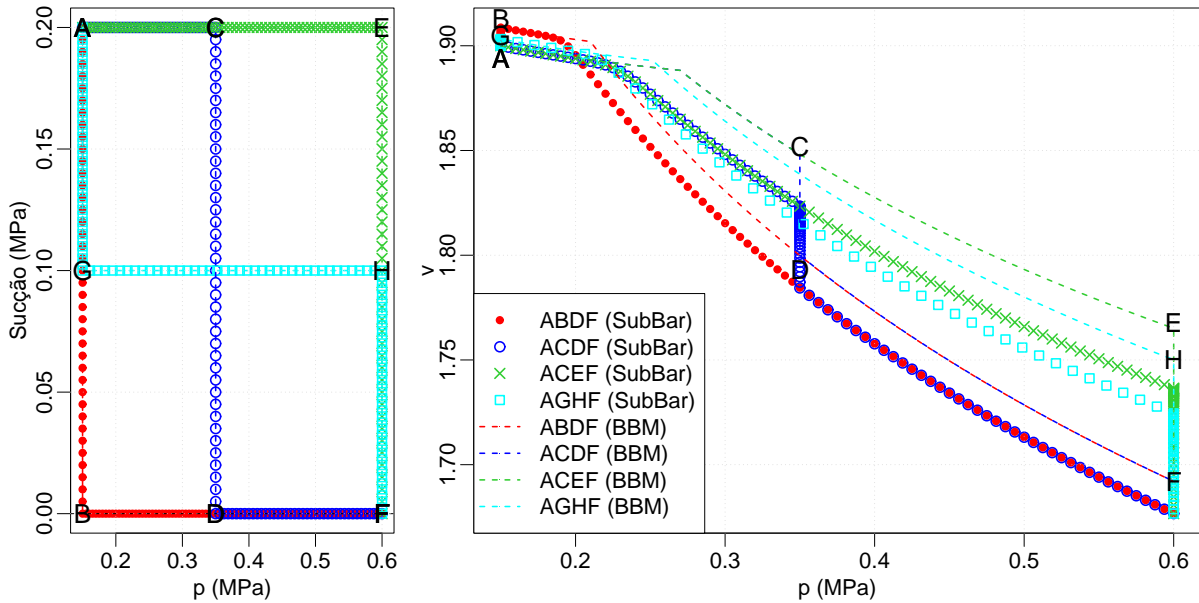


Figura 10.5: Resultados dos Testes 1 (molhagem) com o modelo **SubBar**.

Na Figura 10.6 verifica-se que a variação volumétrica inicial devido ao aumento de sucção (trajetórias BAE ou BGHE) é maior que o correspondente simulado pelo modelo BarcelonaX no Capítulo 9. No entanto, isso se deve ao valor baixo da constante de subcarregamento  $c_s$  escolhida para estes ensaios. Com a alteração de  $c_s$ , é possível controlar esta quantidade de variação volumétrica.

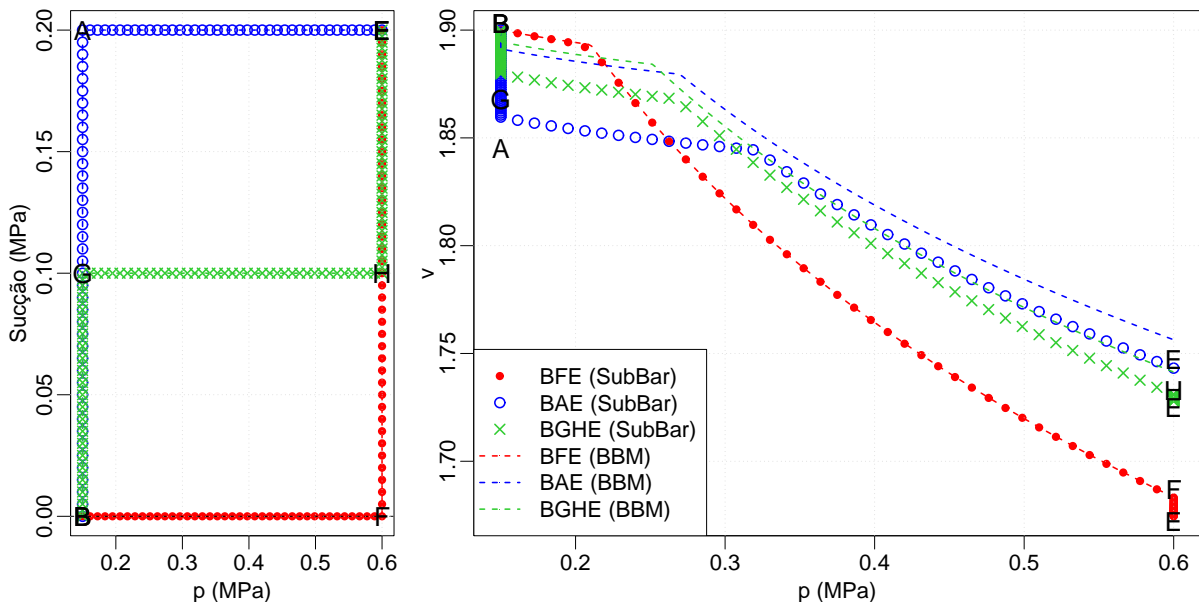


Figura 10.6: Resultados dos Testes 2 (secagem) com o modelo **SubBar**.

A Figura 10.7 permite a elaboração da mesma conclusão anterior: o subcarregamento causa a suavização da transição elástica-plástica.

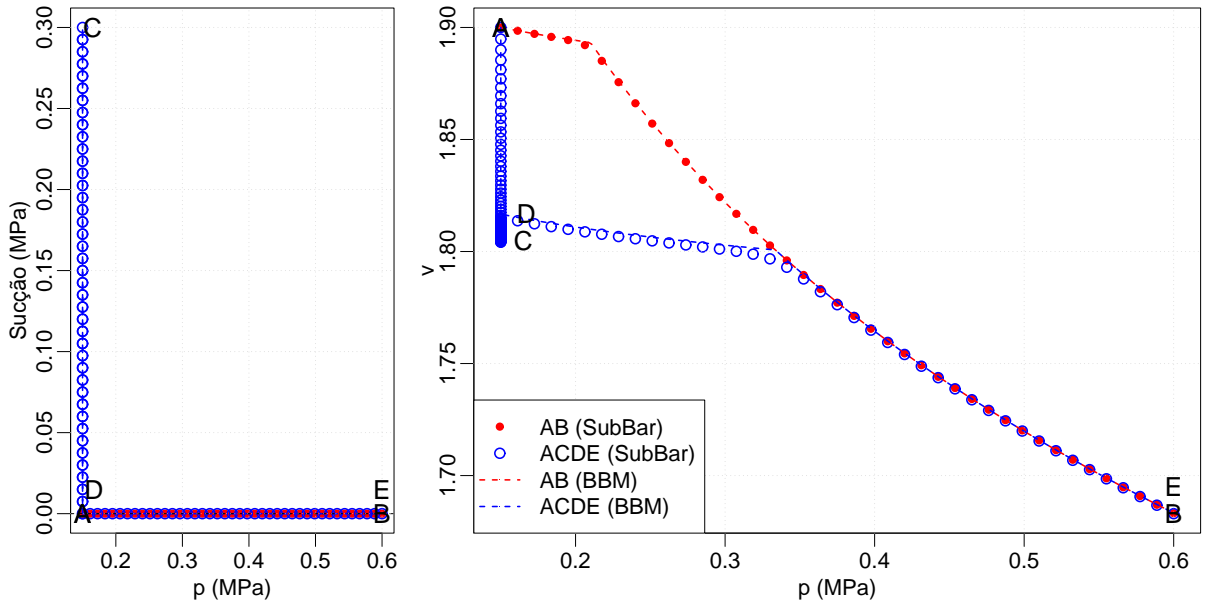


Figura 10.7: Resultados dos Testes 3 (secagem-molhagem) com o modelo **SubBar**.

O comportamento monotônico de resistência é similar ao do modelo BarcelonaX, como mostra a Figura 10.8. Contudo, como é percebido no gráfico de  $q$  versus  $\varepsilon_v$ , não há uma descontinuidade devido à transição elástica-elastoplástica.

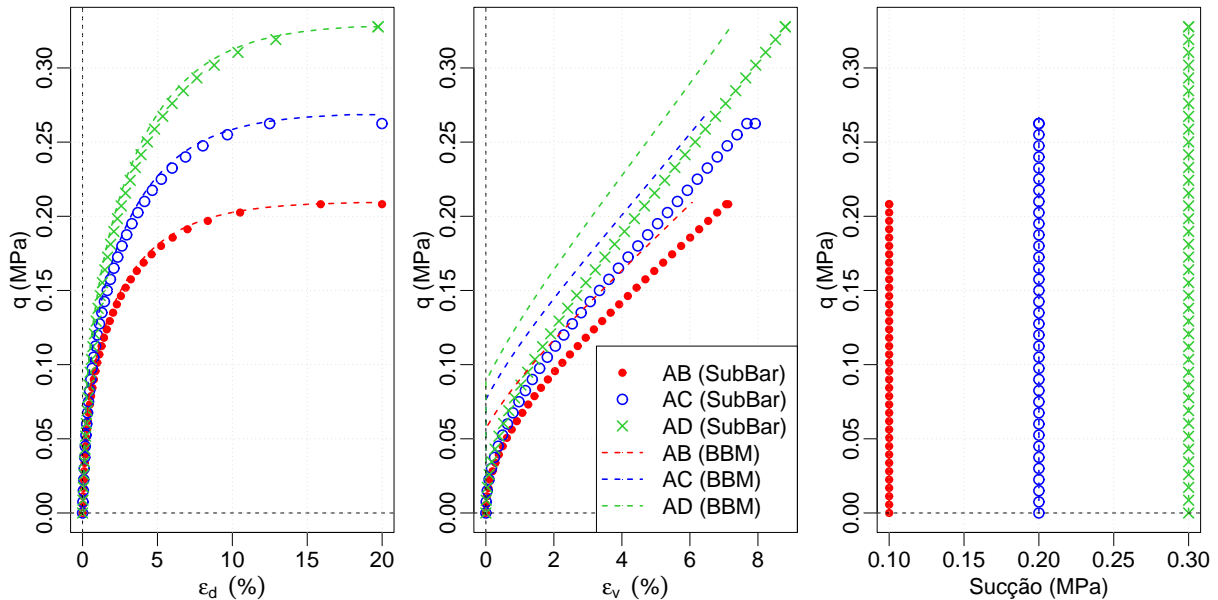
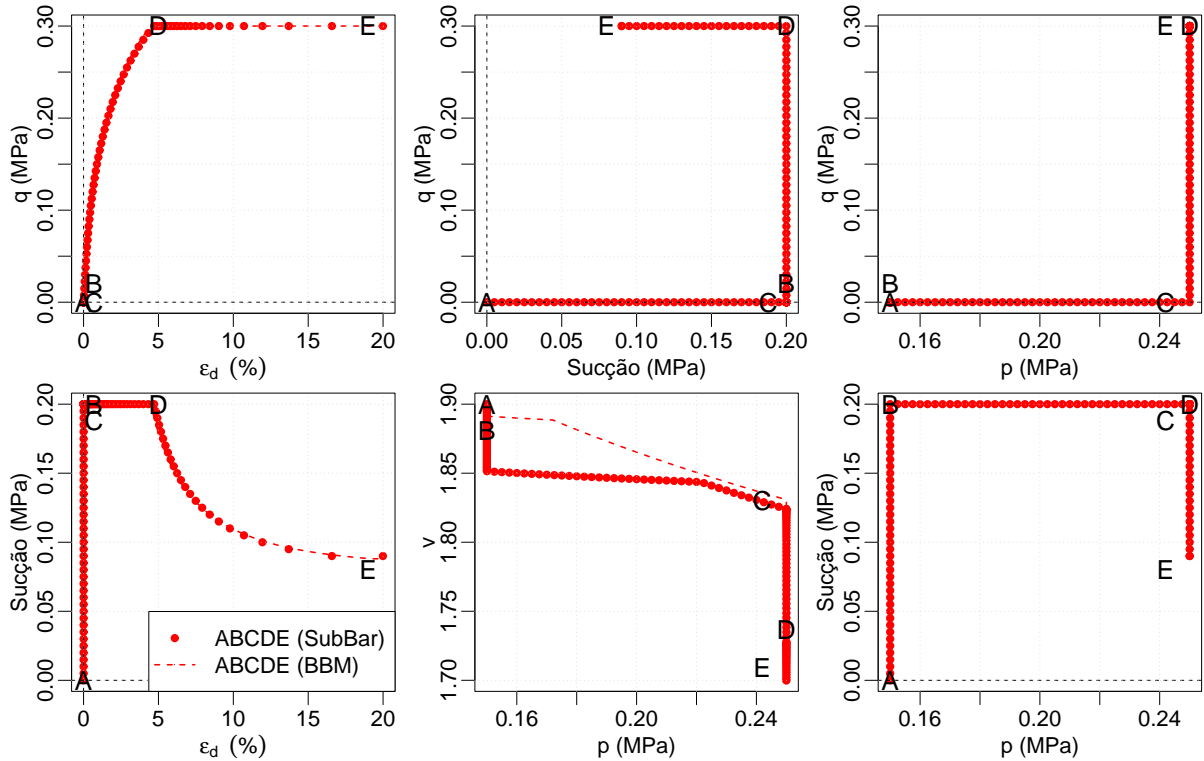


Figura 10.8: Resultados dos Testes 4 (aumento de resistência com sucção) com o modelo **SubBar**.

Na Figura 10.9, também se verifica a variação volumétrica maior para a mudança de sucção (trajetória AB). O motivo é o mesmo: valor baixo de  $c_s$ .



**Figura 10.9:** Resultados dos testes 5 (ruptura devido a molhagem) com o modelo **Sub-Bar**.

### 10.3.3 SIMULAÇÕES COM CARREGAMENTOS CÍCLICOS

A principal diferença do modelo Subloading Barcelona (SubBar) com relação ao modelo BarcelonaX é a simulação do comportamento mecânico durante solicitações cíclicas com variação de rigidez. Assim, três simulações com carregamentos cíclicos são apresentadas a seguir. A Tabela 10.5 mostra os estados iniciais de tensão/sucção e constantes iniciais considerados para as três simulações.

As simulações cíclicas 1 e 3 começam com sucção nula e a simulação 2 com sucção igual a 0.2 MPa. As simulações 1 e 2 são feitas com sucção constante e com trajetória de tensão do tipo triaxial convencional. Esta trajetória possui a razão  $\dot{q}/\dot{p} = 3$  constante e é realizada com tensão desviadora variável com amplitude constante. A simulação 1 possui sucção constante igual a zero e a simulação 2 possui sucção constante igual a 0.2 MPa. A simulação 3 é feita em duas etapas: a) a sucção é variada em três ciclos com amplitude constante; e b) uma trajetória do tipo triaxial convencional é aplicada com sucção constante e igual a zero.

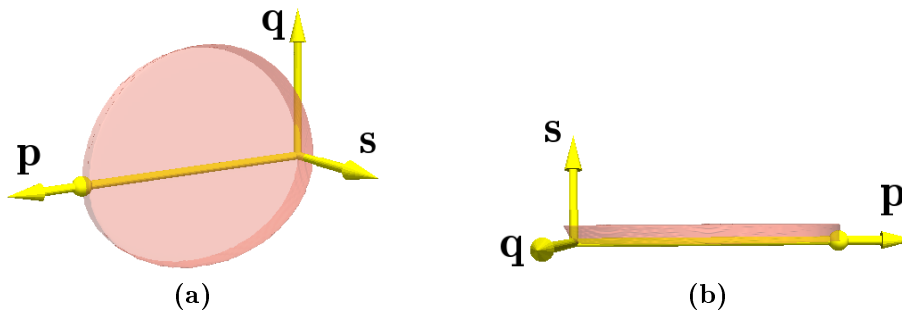
Assim, a verificação da influência dos coeficientes  $c_0$ , para variação da flexibilidade com ciclos de tensão, e  $c_s$ , para variação da flexibilidade com ciclos de sucção, pode ser verificada. As simulações 1 e 2 permitem avaliar a influência do parâmetro  $c_0$  com dois níveis diferentes de sucção e ciclos de tensão e a simulação 3 permitem avaliar a influência do parâmetro  $c_s$  com ciclos de sucção.

**Tabela 10.5:** Estados e constantes iniciais para as simulação cíclicas com os modelos BarcelonaX e SubBar.

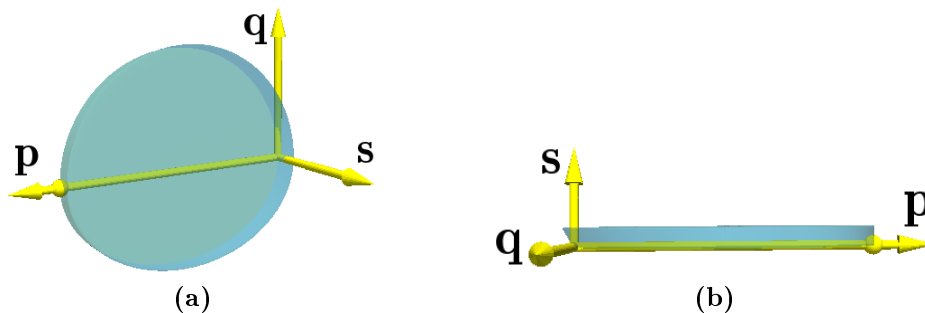
|                  | Cíclico 1 | Cíclico 2 | Cíclico 3 |
|------------------|-----------|-----------|-----------|
| $\sigma_x$ (MPa) | 0.15      | 0.15      | 0.15      |
| $\sigma_y$ (MPa) | 0.15      | 0.15      | 0.15      |
| $\sigma_z$ (MPa) | 0.15      | 0.15      | 0.15      |
| $v_{ini}$        | 1.9       | 1.9       | 1.9       |
| $OCR$            | 1.0       | 1.0       | 1.0       |
| $OSI$            | 0.01      | 0.01      | 0.01      |
| Sucção (MPa)     | 0.0       | 0.2       | 0.0       |

Os parâmetros constitutivos usados são os mesmos para os casos hipotéticos simulados com os modelos BarcelonaX e SubBar. No entanto, o **parâmetro  $r=1.0$  foi considerado**. Além disso, vários parâmetros  $c_0$  e  $c_s$  foram escolhidos e cujos valores são apresentados nos gráficos com os resultados das simulações 1, 2 e 3.

As Figuras 10.10 e 10.11 ilustram os estados e superfícies iniciais dos modelos BarcelonaX e SubBar, respectivamente, para as simulações 1 e 3. As Figura 10.12 e 10.13 ilustram os estados e superfícies iniciais dos modelos BarcelonaX e SubBar, respectivamente, para a simulação 2. Na Figura 10.13, nota-se que para o modelo SubBar, a superfície de subcarregamento é um pouco menor que a superfície normal de plastificação. O estado e tamanho das superfícies iniciais influencia o comportamento mecânico simulado.

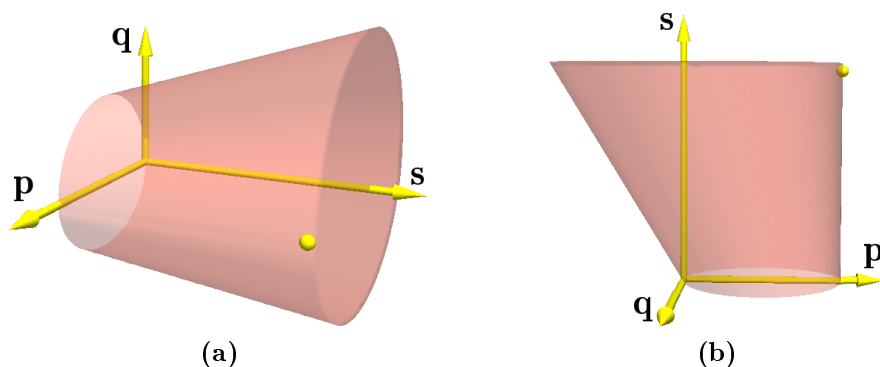


**Figura 10.10:** Estado inicial (esfera amarela) para os testes cíclicos 1 e 3; Superfície do modelo **BarcelonaX**: (a) Superfície no espaço p,s,q; (b) Vista do plano s,p.

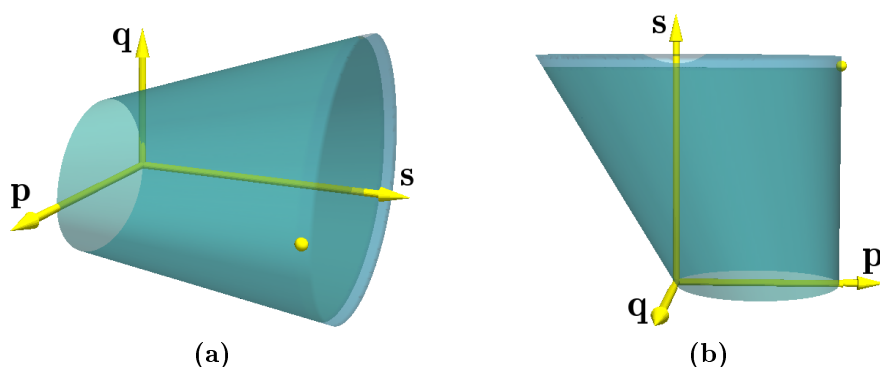


**Figura 10.11:** Estado inicial (esfera amarela) para os testes cíclicos 1 e 3; Superfícies do modelo **SubBar**: (a) Superfícies de subcarregamento e normal no espaço p,s,q; (b) Vista do plano s,p.





**Figura 10.12:** Estado inicial (esfera amarela) para os testes cíclicos 2; Superfície do modelo **BarcelonaX**: (a) Superfície no espaço  $p,s,q$ ; (b) Vista do plano  $s,p$ .

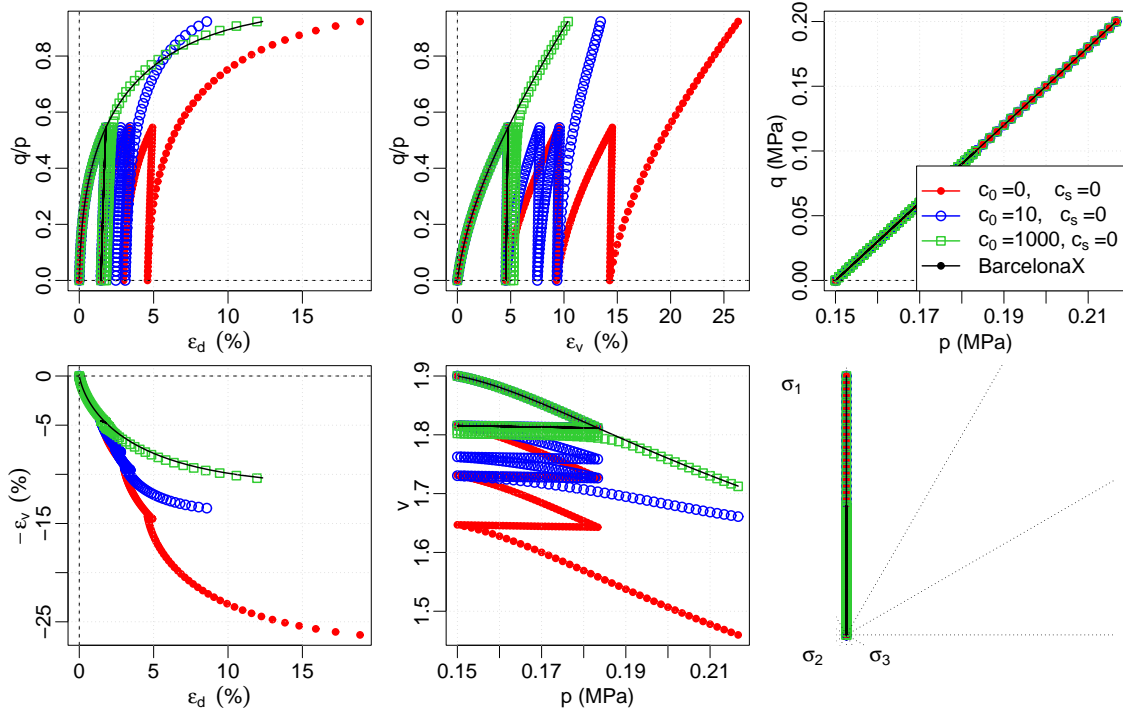


**Figura 10.13:** Estado inicial (esfera amarela) para os testes cíclicos 2; Superfícies do modelo **SubBar**: (a) Superfícies de subcarregamento e normal no espaço  $p,s,q$ ; (b) Vista do plano  $s,p$ .

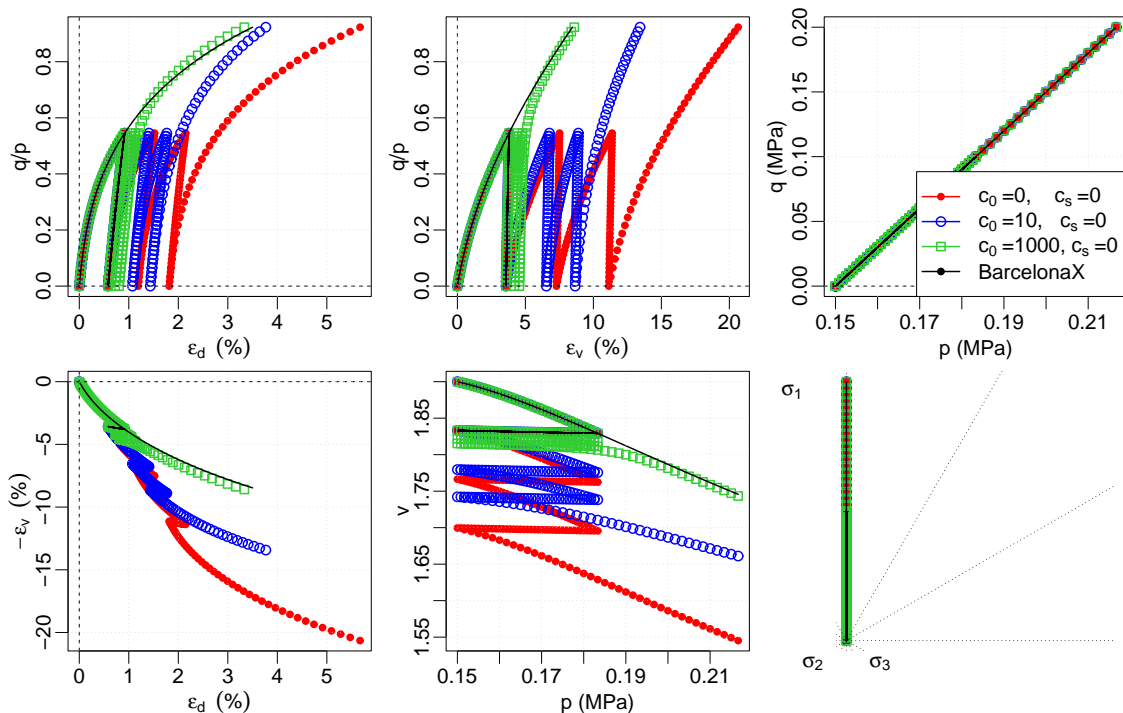
Os resultados da simulação 1 são apresentados na Figura 10.14, correspondente a um ensaio cíclico do tipo triaxial convencional, no qual a tensão cisalhante aumenta e diminui. Observa-se a simulação de deformação cisalhante e volumétrica com o modelo SubBar é maior do que com o modelo BarcelonaX. Este comportamento é similar ao representado pelo modelo SubCam. A quantidade de deformação (rigidez) ao longo dos ciclos pode ser controlada pelo coeficiente  $c_0$ , como no SubCam.

A Figura 10.15 mostra os resultados da simulação 2, na qual, verifica-se que, para sucção constante e maior que zero, o comportamento simulado pelo modelo SubBar é similar ao mesmo para sucção nula (simulação 1), entretanto a resistência é aumentada e as deformações são menores devido ao valor maior de sucção.

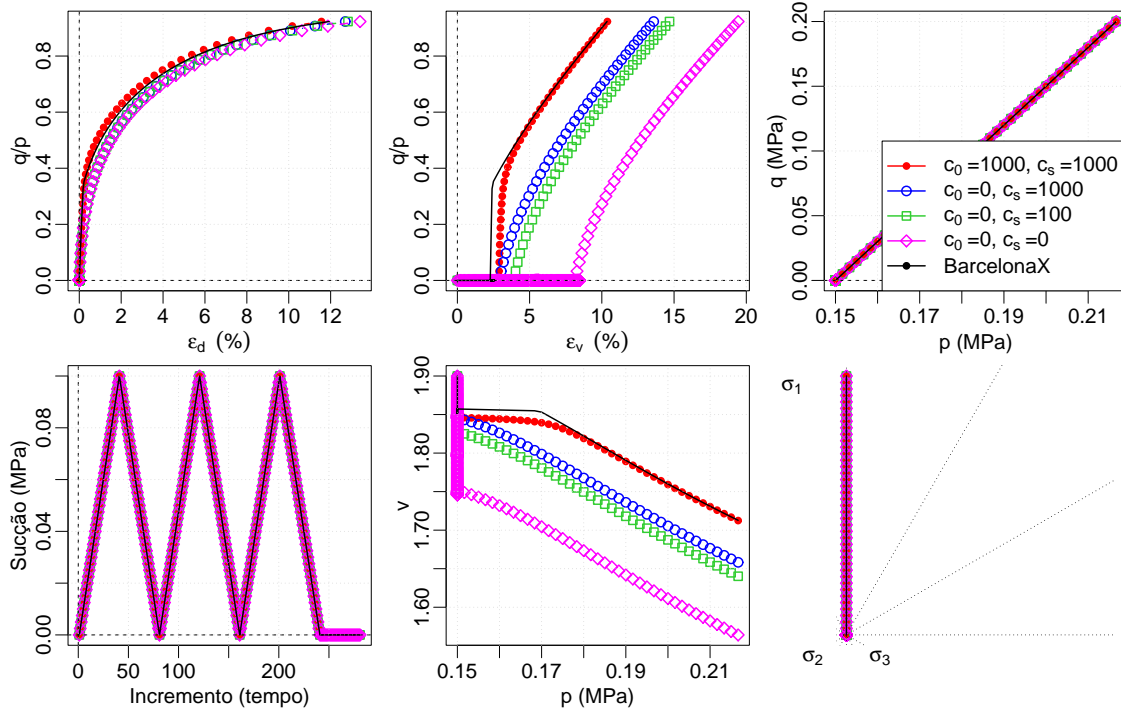
Por último, para verificar a influência do decaimento de flexibilidade devido a ciclos de sucção, mostram-se os resultados de um ensaio no qual, primeiramente, apenas a sucção varia, aumentando e diminuindo, e, em seguida, simula-se a ruptura com trajetória do tipo triaxial convencional ( $\dot{q}/\dot{p} = 3$ ). Neste ensaio (Figura 10.16), nota-se que, em comparação ao modelo BarcelonaX (monotônico), o aumento de deformação volumétrica devido aos ciclos de sucção pode ser controlado pela constante de subcarregamento  $c_s$  para sucção.



**Figura 10.14:** Resultados dos testes cíclicos 1 com os modelos **SubBar** e BarcelonaX; Triaxial convencional de carregamento-descarregamento, sem extensão ( $s=0$  constante,  $\dot{q}/\dot{p} = 3$  constante).



**Figura 10.15:** Resultados dos testes cíclicos 2 com os modelos **SubBar** e BarcelonaX; Triaxial convencional de carregamento-descarregamento, sem extensão ( $s=0.2$  MPa constante,  $\dot{q}/\dot{p} = 3$  constante).



**Figura 10.16:** Resultados dos testes cíclicos 3 com os modelos **SubBar** e BarcelonaX; Sucção aumentando-diminuindo seguido de triaxial convencional de carregamento ( $0 < s < 0.1 \text{ MPa}$ ,  $\dot{q}/\dot{p} = 3$  constante).

## 10.4 CONCLUSÕES

O modelo SubBar tem as mesmas características que o modelo original de Alonso et al. (1990) além de considerar a dependência do comportamento mecânico com relação ao ângulo de Lode e ser aplicável a simulações de carregamentos cíclicos. Esta última característica se deve à adoção do conceito de Subcarregamento, de forma bastante similar à mesma considerada pelos modelos SubCam e Subtij. Com relação ao modelo Barcelona original (BBM), três parâmetros adicionais são necessários:  $B$  que define a superfície única no espaço  $(p,s,q)$ ,  $c_0$  que controla o decaimento da flexibilidade devido a ciclos de tensão e  $c_s$  que controla o decaimento de flexibilidade devido a ciclos de sucção.

Ressalta-se que o equacionamento foi elaborado tendo em vista manter a simplicidade. Portanto, o entendimento do modelo requer apenas o conhecimento do conceito de Subcarregamento, apresentado no Capítulo 3. Além disso, a implementação computacional é facilitada, considerando as mesmas equações propostas para o modelo BarcelonaX. Também, é importante lembrar que o Sistema de Equações Diferenciais do modelo SubBar pode ser resolvido com os esquemas apresentados no Capítulo 11.

# Capítulo 11

## SOLUÇÃO DO SISTEMA ALGÉBRICO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LOCAL

Modelos elastoplásticos definem um conjunto de equações evolutivas para as deformações e variáveis internas. Estas originam um sistema de equações diferenciais (“Differential Algebraic System - DAS”). Esse sistema pode ser obtido a partir das equações não-lineares para os incrementos de tensão e deformação, para a variação da superfície de plastificação e para as leis de fluxo e endurecimento. Em análises numéricas, um passo importante é a solução do DAS por meio de algum esquema numérico, pois, geralmente, soluções analíticas ou não existem, ou são difíceis de serem encontradas.

Esta seção visa mostrar um método de solução para os sistemas das Eqs. (3.21) e (3.22), que são, simbolicamente, representados por:

$$\dot{y} = \mathcal{F}(x, y)\dot{x}, \quad x(t_n) = x_n \quad \text{e} \quad y(t_n) = y_n \quad (11.1)$$

Na solução do DAS elastoplástico (“stress-update”), sob a forma em que a taxa de deformação é variável independente (Eq. 3.22), é comum a consideração de que a taxa ( $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}$ ) permanece constante ao longo dos passos de solução (Sloan, 1987; Sloan & Booker, 1992; Sloan et al., 2001). De maneira análoga, neste trabalho, a taxa de tensão é considerada constante, quando for a variável independente do problema (Eq. 3.21). No caso dos modelos para solos não saturados, também será feita a suposição de que a taxa de sucção é constante (Sheng et al., 2003a). Assim, para as simulações de ensaios de laboratório, DAS do tipo “driver”,

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{d\underline{\underline{\sigma}}}{dt} = \frac{\Delta\underline{\underline{\sigma}}}{\Delta t} \quad (11.2)$$

e, na solução do tipo “stress-update”,

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{d\underline{\underline{\epsilon}}}{dt} = \frac{\Delta\underline{\underline{\epsilon}}}{\Delta t} \quad (11.3)$$

Com a presença da sucção, a seguinte hipótese também é feita:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (11.4)$$

As Eqs. (11.2), (11.3) e (11.4) têm a seguinte forma genérica:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (11.5)$$

que é a principal hipótese para o desenvolvimento da formulação apresentada neste Capítulo.

Substituindo a Eq. (11.5) na Eq. (11.1), a solução do DAS local irá, então, procurar pela solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{F}(x, y)^{\Delta x/\Delta t} \\ \Delta x/\Delta t \end{Bmatrix} \quad (11.6)$$

O sistema da Eq. (11.6) tem a seguinte forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{G}(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{z}(t_n) = \mathbf{z}_n \quad (11.7)$$

em que

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{z}} = \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}(\mathbf{z}, t) = \begin{Bmatrix} \mathcal{F}(x, y)^{\Delta x/\Delta t} \\ \Delta x/\Delta t \end{Bmatrix} \quad (11.8)$$

e, por ser um problema de valor inicial, pode ser resolvido pelos métodos tradicionais de solução de sistemas de equações diferenciais, como o Método Runge-Kutta (Gear, 1971; Hairer et al., 1993).

Novamente, com o intuito de simplificar a notação, o sistema da Eq. (11.7) pode ser representado por:

$$\dot{y} = f(y, t), \quad y(t_n) = y_n \quad (11.9)$$

tendo em vista que os nomes  $y$  e  $z$  podem ser alternativamente substituídos por qualquer outro símbolo e lembrando que a Eq. (11.9) representa um sistema de equações. Esta é a forma mais comumente encontrada em literatura referente à solução dos DAS (Hairer et al., 1993; Hairer & Wanner, 1996; Burden & Faires, 2003; Frank, 2005).

## 11.1 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste trabalho, o sistema algébrico diferencial da elastoplasticidade (Eq. 11.1) é resolvido mediante algoritmos de aproximação, pois sua solução analítica, caso exista, possui dedução bastante complexa. Esquemas numéricos convencionais como aqueles considerados por regra do ponto intermediário (“Mid-point rule”) são considerados, mas suas expressões

são introduzidas partindo de um método mais geral, o Método Runge-Kutta. Este último é comumente aplicado a diversos tipos de equações diferenciais ordinárias (ODE) e foi inicialmente proposto por Carle D. T. Runge em conjunto com M. W. Kutta por volta do ano de 1900 (Hairer et al., 1993).

O DAS estudado, convertido em um problema de valor inicial (Eq. 11.9), pode ser integrado - daí o uso comum do título Esquemas de Integração dado aos métodos de solução de DAS/ODE - resultando em:

$$y(t) = \int_0^t f(y, t) dt \quad (11.10)$$

Mediante o Teorema Fundamental do Cálculo, para um estado atual  $t_n$  e outro futuro  $t_{n+1} = t_n + h$ , a integração equivale a encontrar  $y_{n+1}$  que satisfaça:

$$y_{n+1} = \int_0^{t_n} f(y, t) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt \quad (11.11)$$

Adotando a normalização  $t = t_n + Th$ , em que  $dt = h dT$  e  $T$  (pseudo tempo) está no intervalo  $[0, 1]$ , o seguinte problema de integração numérica é obtido:

$$y_{n+1} = y_n + h \int_0^1 f(y(t_n + Th), t_n + Th) dT \quad (11.12)$$

## 11.2 MÉTODO RUNGE-KUTTA

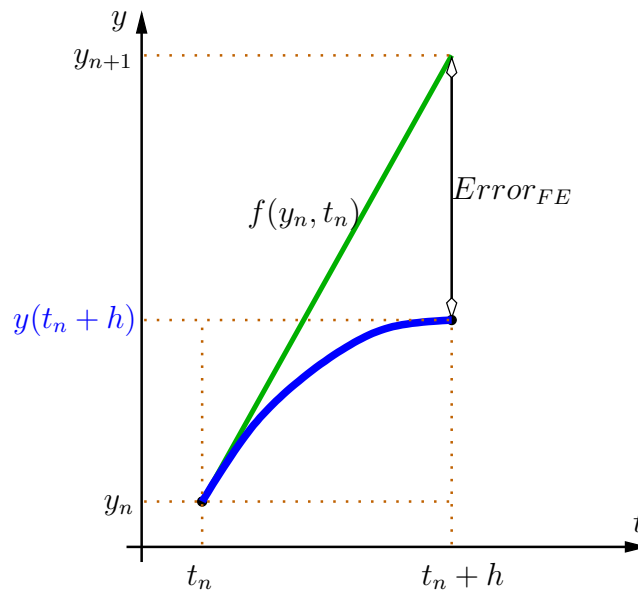
O método Runge-Kutta, que é do tipo multi-estágios (“multi-stages”), possui as seguintes vantagens, quando comparado a outros esquemas de utilização corrente, como os conhecidos por multi-passos (“multi-step”) e fórmula de diferenciação em atraso (“backward differentiation formulae - BDF”):

- Tem fundamentação em uma teoria abrangente e consistente;
- Não depende de tentativas iniciais;
- Permite adaptação dos passos (“adaptativity”);
- É estável, principalmente os implícitos;
- Não necessita a memorização da informação obtida em passos anteriores; e
- Pode alcançar erro local de truncamento de alta ordem sem a necessidade de derivadas de maior ordem.

O método de Euler (1768), apresentado em seu *Institutiones Calculi Integralis* (Hairer et al., 1993), aproxima a solução da Eq. (11.9) mediante o seguinte esquema:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= y_0 + hf(y_0, t_0) \\ y(t_i) &= y_i + hf(y_i, t_i) \\ &\dots \\ y(t_{n+1}) &= y_n + hf(y_n, t_n) \end{aligned} \quad (11.13)$$

no qual  $h = t_{n+1} - t_n$  e a derivada  $f(y, t)$  é calculada no início do passo, como ilustra a Figura 11.1.



**Figura 11.1:** Método (Forward-)Euler.

O método de Euler tem convergência garantida, desde que a função (sistema)  $f(y, t)$  satisfaça a condição de Lipschitz em  $y$  e seja contínua em  $t$  (Gear, 1971). No entanto, como o erro global deste método se comporta como em  $Ch$ , em que  $C$  depende do problema específico, sua execução requer a adoção de muitos passos. **O erro global é o erro na solução calculada para vários passos.** Por exemplo, dependendo do problema, para uma solução com precisão de 6 decimais, a solução por este método deverá ser alcançada com milhões de passos.

Métodos mais acurados poderiam ser aplicados se a função (sistema)  $f(y, t)$  da Eq. (11.9) fosse independente de  $y$ , ou seja, se representasse um problema de quadratura:

$$\dot{y} = f(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (11.14)$$

com solução:

$$y(t_k) = y_0 + \int_{t_0}^{t_k} f(t)dt \quad (11.15)$$

Por exemplo, considerando a regra do ponto intermediário (“midpoint rule”), ou primeira fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned} y(t_0 + h_0) &\approx y_1 = y_0 + h_0 f(t_0 + h_0/2) \\ y(t_1 + h_1) &\approx y_2 = y_1 + h_1 f(t_0 + h_1/2) \\ &\dots \\ y(t_k) &\approx Y = y_n + h_n f(t_n + h_n/2) \end{aligned} \quad (11.16)$$

em que  $t_0, t_1, \dots, t_n$  é uma subdivisão do intervalo de integração e o erro global desta regra é limitado por  $Ch^2$ , ou seja, para uma precisão de 6 dígitos, mil passos seriam necessários.

Com isso, Runge (1895 *apud* Hairer et al. (1993)) pensou se poderia ser possível estender o método da Eq. (11.16) ao problema da Eq. (11.9). Para isso, o primeiro passo  $h = h_0$  seria:

$$y(t_0 + h) \approx y_0 + hf(y(t_0 + \frac{h}{2}), t_0 + \frac{h}{2}) \quad (11.17)$$

Mas a seguinte questão aparece: Qual valor deveria ser adotado para  $y(t_0 + h/2)$ ? Na ausência de uma resposta melhor, é natural escolher uma avaliação com um pequeno passo do tipo Euler, por exemplo,  $h/2$ , obtendo o seguinte método:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_0, t_0) \\ k_2 &= f(y_0 + \frac{h}{2}k_1, t_0 + \frac{h}{2}) \\ y_1 &= y_0 + hk_2 \end{aligned} \quad (11.18)$$

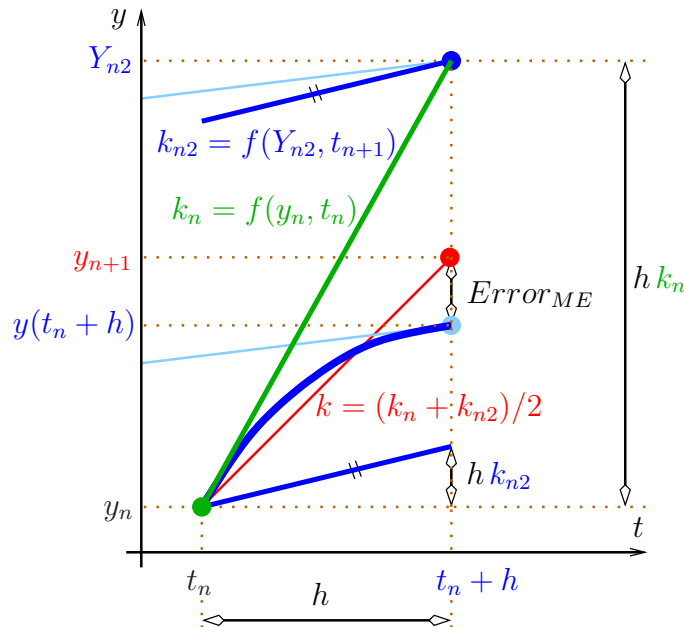
conhecido por Método de Runge de Ordem 2 (R2) ou de Método do Ponto Intermediário. Pode ser mostrado que este método corresponde a uma Série de Taylor de segunda ordem, ou seja, com Erro Local de Truncamento  $LTE = Ch^3$ . Assim, é de se esperar que o erro global do método esteja limitado por  $Ch^2$ , como na regra de quadratura da Eq. (11.16).

Um pouco diferente, mas com a mesma idéia, outra opção seria escolher a avaliação  $f(y_0 + hk_1, t_0 + h)$ , ou seja, para o passo  $h$  no final da primeira avaliação do tipo Forward-Euler, entretanto, atualizar o estado corrente com a metade da soma das duas avaliações. Dessa forma, o seguinte esquema é obtido:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_0, t_0) \\ k_2 &= f(y_0 + hk_1, t_0 + h) \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned} \quad (11.19)$$



resultando no método conhecido por Euler Modificado (Modified-Euler). Como para o método anterior, pode-se mostrar que o erro global na solução deste método é limitado por  $Ch^2$ . A Figura 11.2 ilustra as etapas necessárias ao método Euler Modificado para um passo  $h$  de  $t_n$  até  $t_{n+1}$ .



**Figura 11.2:** Método Modified-Euler.

A principal diferença dos métodos das Eqs. (11.18) e (11.19), que são dois métodos Runge-Kutta explícitos de ordem 2 (RK2), com relação ao método Forward-Euler (Eq. 11.13) é a avaliação da função (sistema)  $f(y, t)$  em um estágio intermediário, para se obter  $(k_2)$ , no entanto, para o mesmo passo ( $h$ ). Esta avaliação não requer conhecimento de passos anteriores (ou posteriores), como nos métodos multi-passos, e provê aos métodos RK2 uma acurácia maior que a do método Forward-Euler.

**Definição 11.1.** Um método Runge-Kutta tem ordem  $p$  se, para problemas (Eq. 11.9) suficientemente suaves,

$$\|y(t_n + h) - y_{n+1}\| \leq Ch^{p+1} \tag{11.20}$$

ou seja, se a série de Taylor para a solução exata  $y(t_n + h)$  e para  $y_{n+1}$  coincidirem até (incluindo) o termo  $h^p$ .

De forma genérica, métodos RK podem ser expressos pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(Y_{ni}, t_n + c_i h) \\ Y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_{nj}, t_n + c_j h) \end{cases} \tag{11.21}$$

em que os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são determinados de forma a proporcionar estabilidade ao método e alcançar certa ordem de erro na solução,  $s$  é o número de estágios do método e  $S$  será igual a  $s$  em esquemas implícitos e igual a  $i - 1$  em esquemas explícitos. Nestes últimos,  $c_1$  deve ser igualado a zero.

Embora não mostrado aqui, o procedimento para o desenvolvimento de métodos do tipo Runge-Kutta considera expansões por séries de Taylor truncadas. A ordem do erro local do método RK desejado é a mesma do erro local de truncamento da série de Taylor. Esta metodologia visa obter o conjunto de coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  que determinam a posição e o tempo das avaliações das derivadas dentro de um passo de solução e os pesos necessários à aproximação resultante do método. Assim, três grupos de coeficientes devem ser encontrados:

- $a_{ij}$  são os pesos que definem cada posição intermediária ( $Y_{ni}$ ) da função  $y$ ;
- $b_i$  são os pesos necessários à solução aproximada do método; e
- $c_i$  são os coeficientes que ajustam o instante (tempo) dentro do passo para calcular as derivadas.

Ressalta-se que o desenvolvimento de métodos RK de maior ordem é bastante tedioso e cresce enormemente com a ordem do método (Hairer et al., 1993). Até o presente (Hairer et al., 1993), sabe-se que a ordem  $p$  do método de solução está relacionada com o número de estágios  $s$  conforme os valores da Tabela (11.1).

**Tabela 11.1:** Ordem  $p$  versus estágios  $s$  para os métodos Runge-Kutta.

| $p$       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9                         | 10                        |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|----|---------------------------|---------------------------|
| $s_{min}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | $12 \leq s_{min} \leq 17$ | $13 \leq s_{min} \leq 17$ |

Note que, para  $p > 4$ , o número de estágios  $s$  deve ser aumentado não linearmente, razão pela qual, provavelmente, o método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) é bem popular, pois, com quatro estágios resulta em quarta ordem numa boa razão custo-benefício. Para ordem maior que 10 ainda não se encontrou os limites para  $s$  (Hairer et al., 1993). Para os métodos implícitos a ordem máxima  $p_{max}$  que pode ser alcançada é igual a  $2s$ .

O método Euler em Avanço (Forward-Euler - FE) é de primeira ordem ( $p = 1$ ). O método Euler em Atraso (Backward-Euler - BE), às vezes chamado de algoritmo de retorno (“return algorithm”) também possui ordem um ( $p = 1$ ). Já o método Euler Modificado (Modified-Euler - ME), que utiliza dois estágios, é de ordem dois ( $p = 2$ ).

Os coeficientes do método Runge-Kutta são tradicionalmente dispostos em tabelas de Butcher (“Butcher tableau”) (Butcher (1963) *apud* Cash (1979)). Estas tabelas têm o

seguinte aspecto:

$$\begin{array}{c|ccc}
 c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\
 \hline
 y_{n+1} & b_1 & \cdots & b_s
 \end{array} \tag{11.22}$$

que separa os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  convenientemente e na qual  $y_{n+1}$  é a solução aproximada do método. Para métodos do tipo RK com estimativas de erro embutidas (“Embedded Runge-Kutta methods”), adiciona-se uma linha horizontal para indicar a estimativa de maior ordem  $\hat{y}_{n+1}$ , como em:

$$\begin{array}{c|ccc}
 c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\
 \hline
 y_{n+1} & b_1 & \cdots & b_s \\
 \hat{y}_{n+1} & \hat{b}_1 & \cdots & \hat{b}_s
 \end{array} \tag{11.23}$$

Os coeficientes do método Runge-Kutta para os esquemas FE, BE, R2 e ME estão reunidos na (Eq. 11.24).

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ y_{FE} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ y_{BE} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ y_{R2} & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline p = 1 & y_{FE} & 1 & 0 \\ p = 2 & \hat{y}_{ME} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \tag{11.24}$$

É interessante que o método RK-embedded tenha o erro da estimativa de maior ordem minimizado e que o erro da estimativa de menor ordem seja calculado apenas para o mecanismo de controle dos sub-passos (apresentado na próxima seção). Isso é feito pela determinação adequada dos coeficientes do método correspondente. Um método explícito (RK-embedded) de quinta ordem com boa aplicação à elastoplasticidade (Sloan & Booker, 1992; Sloan et al., 2001; Pedroso & Farias, 2002b) e que tem essa característica é o conhecido por Runge-Kutta-Dormand-Prince - RKDP (Hairer et al., 1993). Os coeficientes deste método são:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 0 & & & & & & \\
 \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & \\
 \frac{3}{10} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & & & & \\
 \frac{4}{5} & \frac{44}{45} & \frac{-56}{15} & \frac{32}{9} & & & \\
 \frac{8}{9} & \frac{19372}{6561} & \frac{-25360}{2187} & \frac{64448}{6561} & \frac{-212}{729} & & \\
 1 & \frac{9017}{3168} & \frac{-355}{33} & \frac{46732}{5247} & \frac{-49}{176} & \frac{-5103}{18656} & \\
 1 & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & \frac{-2187}{6784} & \frac{11}{84} \\
 \hline
 p = 4 & y_{n+1} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & \frac{-2187}{6784} & \frac{11}{84} & 0 \\
 \hline
 p = 5 & \hat{y}_{RKDP} & 0 & \frac{7571}{16695} & \frac{393}{640} & \frac{-92097}{339200} & \frac{187}{2100} & \frac{1}{40}
 \end{array} \tag{11.25}$$

O método RKDP também satisfaz  $a_{si} = b_i$  o que, então, permite aproveitar o último cálculo das derivadas para o cálculo da primeira estimativa.

### 11.3 ESTIMATIVA DE ERRO

**Estimativas práticas de erro são importantes para assegurar que os tamanhos dos passos  $h_i$  sejam escolhidos suficientemente pequenos para garantir uma certa precisão e grandes o bastante para que o esquema não faça cálculos desnecessários.**

O primeiro dispositivo usado por Runge em seus exemplos numéricos foi repetir os cálculos com tamanhos de passos divididos por dois e comparar os resultados (Hairer et al., 1993). Richardson (1910; 1927) *apud* Hairer et al. (1993) desenvolveu, então, um método cuidadoso para descobrir o comportamento do erro, como função de  $h$ . Esse método será explicado a seguir.

Para o problema de valor inicial ilustrado pela Figura 11.3, primeiramente, dois passos  $h$  são usados para obter as soluções intermediária  $y_1$  e final  $y_2$ , segundo um método RK de ordem  $p$  qualquer. O erro no primeiro passo será:

$$e_1 = y(t_n + h) - y_1 \approx Ch^{p+1} \quad (11.26)$$

Para o segundo passo, o erro será aproximadamente igual a soma do erro no primeiro passo com o erro adicional do segundo:

$$e_2 = y(t_n + 2h) - y_2 \approx Ch^{p+1} + Ch^{p+1} = 2Ch^{p+1} \quad (11.27)$$

Considerando, agora, a solução encontrada com o mesmo método RK de ordem  $p$ , no entanto, com passo de tamanho  $2p$ , o erro será:

$$e_3 = y(t_n + 2h) - y_3 \approx C(2h)^{p+1} = 2Ch^{p+1}2^p \quad (11.28)$$

Assim, com as Eqs. (11.27) e (11.28), a seguinte extrapolação de erro pode ser encontrada:

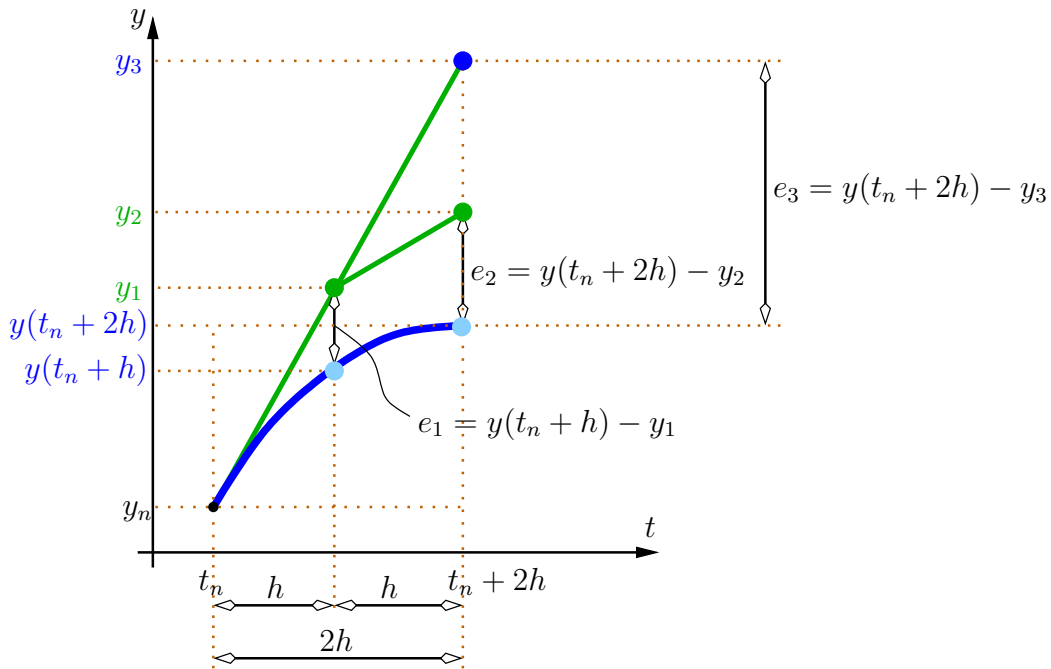
$$e_2 = y(t_n + 2h) - y_2 \approx \frac{y_2 - y_3}{2^p - 1} \quad (11.29)$$

A Eq. (11.29) é um dispositivo simples para a estimativa do erro na solução  $y_2$  que funciona desde que se tenha avaliações com diferentes tamanhos de passos. É importante notar que a solução real  $y(t_n + 2h)$ , obviamente, não é conhecida *a priori*, por isso, apenas estimativas de erro são possíveis.

Em sistemas de equações, o erro pode ser estimado pela seguinte equação:

$$err = \frac{1}{2^p - 1} \frac{\|y_{2i} - y_{3i}\|}{d_i} \quad (11.30)$$

em que  $d_i$  é um fator de escala que pode ser igual a um, para erros absolutos, ou, por exemplo, igual a  $\|y_{2i}\|$  para erros relativos.



**Figura 11.3:** Extrapolação de Richardson.

## 11.4 DIVISÃO DOS PASSOS

Procura-se, agora, partindo da estimativa de erro ( $err$ ), encontrar o melhor tamanho para o próximo passo ( $h_{i+1}$ ) de um método de solução RK de ordem  $p$ . Assim, dado o tamanho do passo atual  $h_i$ , a estimativa de erro local será:

$$err_i \approx C(h_i)^{p+1} \quad (11.31)$$

O próximo passo deverá ser:

$$h_{i+1} = mh_i \quad (11.32)$$

com a seguinte estimativa de erro:

$$err_{i+1} \approx C(mh_i)^{p+1} = C(h_i)^{p+1}m^{p+1} = err_i m^{p+1} \quad (11.33)$$

O controle será feito mediante a tolerância de controle do erro local  $STOL$ , conforme a expressão:

$$err_{i+1} \approx err_i m^{p+1} \leq STOL \quad (11.34)$$

que permite determinar o multiplicador  $m$  que, idealmente, corrija o tamanho do passo de modo a manter a eficiência ( $m > 1$ ) e a precisão ( $m < 1$ ). Este será dado por:

$$m \leq \left( \frac{STOL}{err_i} \right)^{1/p+1} \quad (11.35)$$

Alguns cuidados devem ser considerados na escolha de  $m$ . Assim, como fator de segurança, para uma alta probabilidade de que o próximo passo também seja aceito, escolhe-se a seguinte expressão:

$$m = m_{coef} \left( \frac{STOL}{err_i} \right)^{1/p+1} \quad (11.36)$$

em que  $m_{coef}$  geralmente é igual a 0.8, 0.9, etc. Além disso,  $h$  não deve ser permitido nem crescer nem diminuir tão rapidamente. Para isso, restrições adicionais são consideradas:

$$m_{min} \leq m \leq m_{max} \quad (11.37)$$

Para a integração de modelos elastoplásticos, Sloan (1987); Sloan & Booker (1992); Sloan et al. (2001) sugerem os seguintes valores:

$$m_{coef} = 0.8, \quad m_{min} = 0.1 \quad \text{e} \quad m_{max} = 2.0 \quad (11.38)$$

Na seção anterior, a estimativa  $err$  foi feita com duas avaliações com passos de tamanhos diferentes. No entanto, os esquemas que usam o método RK-embedded podem, vantajosamente, considerar a estimativa de erro mediante duas avaliações de ordens diferentes via método RK. Neste caso, a estimativa de erro local será, simplesmente:

$$err = \frac{\|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\|}{\|\hat{y}_{n+1}\|} \quad (11.39)$$

em que  $y_{n+1}$  e  $\hat{y}_{n+1}$  são as avaliações de ordem  $p$  e de ordem  $p + 1$ , respectivamente. Assim, por exemplo, para o esquema com determinação automática de passos Modified-Euler (AutoStepME),

$$m = m_{coef} \left( \frac{STOL}{err_i} \right)^{1/2} \quad (11.40)$$

pois a primeira avaliação é feita com o método Forward-Euler de primeira ordem ( $p = 1$ ). O método RKDP, com primeira avaliação de quarta ordem ( $p = 4$ ), deverá usar o seguinte multiplicador para os passos:

$$m = m_{coef} \left( \frac{STOL}{err_i} \right)^{1/5} \quad (11.41)$$

## 11.5 ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO COM PASSOS VARIÁVEIS

A seguir, quatro algoritmos são apresentados. Os dois primeiros (Algoritmos 11.4 e 11.5) podem ser utilizados para a integração da relação constitutiva para incrementos de deformação (“stress-update”). O Algoritmo 11.4 pode ser utilizado para resolver o DAS dos modelos SubCam e Subtij. O Algoritmo 11.5 resolve o DAS para incrementos de deformação e sucção e pode ser usado com os modelos BarcelonaX e SubBar.

Os Algoritmos 11.6 e 11.7 podem ser usados para a solução do DAS dado em termos de incrementos de tensão. O segundo também considera os incrementos de sucção. Estes algoritmos são úteis na simulação de ensaios de laboratório (“driver”). O primeiro resolve o DAS dos modelos SubCam e Subtij e o segundo dos modelos BarcelonaX e SubBar.

```

Entrada: Incremento de deformação  $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}$ 
Saída : Incremento de tensão  $\Delta \underline{\underline{\sigma}}$ 
! Inicializar variáveis
NSS  $\leftarrow$  0 ! Número de subpasso (substeps)
T  $\leftarrow$  0 ! Pseudo tempo
 $\Delta T \leftarrow \Delta T_{ini}$  ! Tamanho inicial dos incrementos
while T < 1 do
   $\begin{Bmatrix} T \Delta \underline{\underline{\epsilon}} \\ 0 \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{Bmatrix} \Delta T \Delta \underline{\underline{\epsilon}} \\ 0 \end{Bmatrix}$  ! h
   $\begin{Bmatrix} {}^1 \Delta \underline{\underline{\sigma}} \\ {}^1 \Delta z_k \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}^{ep}(\underline{\underline{\sigma}}, z_k) & 0 \\ \underline{\underline{B}}_k(\underline{\underline{\sigma}}, z_k) & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} T \Delta \underline{\underline{\epsilon}} \\ 0 \end{Bmatrix}$  ! h k_n
   ${}^1 \underline{\underline{\sigma}} \leftarrow \underline{\underline{\sigma}} + {}^1 \Delta \underline{\underline{\sigma}}$  ! y_{n+1} = Y_{n2}
   ${}^1 z_k \leftarrow z_k + {}^1 \Delta z_k$  ! y_{n+1} = Y_{n2}
   $\begin{Bmatrix} {}^2 \Delta \underline{\underline{\sigma}} \\ {}^2 \Delta z_k \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}^{ep}({}^1 \underline{\underline{\sigma}}, {}^1 z_k) & 0 \\ \underline{\underline{B}}_k({}^1 \underline{\underline{\sigma}}, {}^1 z_k) & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} T \Delta \underline{\underline{\epsilon}} \\ 0 \end{Bmatrix}$  ! h k_{n2}
   $\hat{\underline{\underline{\sigma}}} \leftarrow \underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{2}({}^1 \Delta \underline{\underline{\sigma}} + {}^2 \Delta \underline{\underline{\sigma}})$  ! \hat{y}_{n+1}
   $\hat{z}_k \leftarrow z_k + \frac{1}{2}({}^1 \Delta z_k + {}^2 \Delta z_k)$  ! \hat{y}_{n+1}
   $err \leftarrow \max \left( \frac{\|\hat{\underline{\underline{\sigma}}} - {}^1 \underline{\underline{\sigma}}\|}{\|\hat{\underline{\underline{\sigma}}}\|}, \frac{\|\hat{z}_k - {}^1 z_k\|}{\|\hat{z}_k\|} \right)$  ! \frac{\|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\|}{\|\hat{y}_{n+1}\|}
   $m \leftarrow m_{coef} \left( \frac{STOL}{err} \right)^{1/2}$ 
  if err  $\leq$  STOL then ! Passo aceito
    T  $\leftarrow$  T +  $\Delta T$ 
     $\underline{\underline{\epsilon}} \leftarrow \underline{\underline{\epsilon}} + T \Delta \underline{\underline{\epsilon}}$ 
     $\underline{\underline{\sigma}} \leftarrow \hat{\underline{\underline{\sigma}}}$ 
     $z_k \leftarrow \hat{z}_k$ 
    if m > mMax then m  $\leftarrow$  mMax
  else ! Passo rejeitado
    if m < mMin then m  $\leftarrow$  mMin
     $\Delta T \leftarrow m \Delta T$  ! Corrigir tamanho do passo
    if  $\Delta T > 1 - T$  then  $\Delta T \leftarrow 1 - T$  ! Verificar último passo
  NSS  $\leftarrow$  NSS + 1

```

**Figura 11.4:** Esquema Modified-Euler para a integração numérica de relações elasto-plásticas com subcarregamento, para incrementos de deformação (“stress-update”).



```

Entrada: Incrementos de deformação  $\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  e de sucção  $\Delta s$ 
Saída : Incremento de tensão  $\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ 
    ! Inicializar variáveis
    NSS  $\leftarrow$  0      ! Número de subpasso (substeps)
    T  $\leftarrow$  0      ! Pseudo tempo
     $\Delta T \leftarrow \Delta T_{ini}$  ! Tamanho inicial dos incrementos
    while T < 1 do
         $\begin{Bmatrix} T \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ T \Delta s \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{Bmatrix} \Delta T \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ \Delta T \Delta s \end{Bmatrix}$  ! h
         $\begin{Bmatrix} 1 \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \\ 1 \Delta z_k \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_k) & \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{ep}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_k) \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_k(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_k) & Q_k(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_k) \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} T \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ T \Delta s \end{Bmatrix}$  !  $hk_n$ 
         $1 \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \leftarrow \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + 1 \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$  !  $y_{n+1} = Y_{n2}$ 
         $1 z_k \leftarrow z_k + 1 \Delta z_k$  !  $y_{n+1} = Y_{n2}$ 
         $\begin{Bmatrix} 2 \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \\ 2 \Delta z_k \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep}(1 \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, 1 z_k) & \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{ep}(1 \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, 1 z_k) \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_k(1 \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, 1 z_k) & Q_k(1 \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, 1 z_k) \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} T \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ T \Delta s \end{Bmatrix}$  !  $hk_{n2}$ 
         $\hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \leftarrow \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{1}{2}(1 \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + 2 \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}})$  !  $\hat{y}_{n+1}$ 
         $\hat{z}_k \leftarrow z_k + \frac{1}{2}(1 \Delta z_k + 2 \Delta z_k)$  !  $\hat{y}_{n+1}$ 
         $err \leftarrow \max \left( \frac{\|\hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} - 1 \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\|}{\|\hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}\|}, \frac{\|\hat{z}_k - 1 z_k\|}{\|\hat{z}_k\|} \right)$  !  $\frac{\|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\|}{\|\hat{y}_{n+1}\|}$ 
         $m \leftarrow m_{coef} \left( \frac{STOL}{err} \right)^{1/2}$ 
        if err  $\leq$  STOL then ! Passo aceito
            T  $\leftarrow$  T +  $\Delta T$ 
             $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \leftarrow \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + T \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 
             $s \leftarrow s + T \Delta s$ 
             $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \leftarrow \hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}$ 
             $z_k \leftarrow \hat{z}_k$ 
            if m > mMax then m  $\leftarrow$  mMax
        else ! Passo rejeitado
            if m < mMin then m  $\leftarrow$  mMin
             $\Delta T \leftarrow m \Delta T$  ! Corrigir tamanho do passo
            if  $\Delta T > 1 - T$  then  $\Delta T \leftarrow 1 - T$  ! Verificar último passo
        NSS  $\leftarrow$  NSS + 1
    
```

**Figura 11.5:** Esquema Modified-Euler para a integração numérica de relações elasto-plásticas com subcarregamento para solos não saturados, para incrementos de deformação e sucção (“stress-update”).

```

Entrada: Incremento de tensão  $\Delta\underset{\sim}{\sigma}$ 
Saída : Incremento de deformação  $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}$ 
! Inicializar variáveis
NSS  $\leftarrow$  0 ! Número de subpasso (substeps)
T  $\leftarrow$  0 ! Pseudo tempo
 $\Delta T \leftarrow \Delta T_{ini}$  ! Tamanho inicial dos incrementos
while T < 1 do
   $\begin{Bmatrix} T\Delta\underset{\sim}{\sigma} \\ 0 \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{Bmatrix} \Delta T\Delta\underset{\sim}{\sigma} \\ 0 \end{Bmatrix}$  ! h
   $\begin{Bmatrix} {}^1\Delta\underset{\sim}{\varepsilon} \\ {}^1\Delta z_k \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \underset{\sim}{C}^{ep}(\underset{\sim}{\sigma}, z_k) & 0 \\ \underset{\sim}{b}_k(\underset{\sim}{\sigma}, z_k) & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} T\Delta\underset{\sim}{\sigma} \\ 0 \end{Bmatrix}$  ! hkn
   ${}^1\underset{\sim}{\sigma} \leftarrow \underset{\sim}{\sigma} + T\Delta\underset{\sim}{\sigma}$  ! yn+1 = Yn2
   ${}^1z_k \leftarrow z_k + {}^1\Delta z_k$  ! yn+1 = Yn2
   $\begin{Bmatrix} {}^2\Delta\underset{\sim}{\varepsilon} \\ {}^2\Delta z_k \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \underset{\sim}{C}^{ep}({}^1\underset{\sim}{\sigma}, {}^1z_k) & 0 \\ \underset{\sim}{b}_k({}^1\underset{\sim}{\sigma}, {}^1z_k) & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} T\Delta\underset{\sim}{\sigma} \\ 0 \end{Bmatrix}$  ! hkn2
   $\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}} \leftarrow \underset{\sim}{\varepsilon} + \frac{1}{2}({}^1\Delta\underset{\sim}{\varepsilon} + {}^2\Delta\underset{\sim}{\varepsilon})$  ! ŷn+1
   $\hat{z}_k \leftarrow z_k + \frac{1}{2}({}^1\Delta z_k + {}^2\Delta z_k)$  ! ŷn+1
   $err \leftarrow \max\left(\frac{\|\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}} - {}^1\underset{\sim}{\varepsilon}\|}{\|\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}\|}, \frac{\|\hat{z}_k - {}^1z_k\|}{\|\hat{z}_k\|}\right)$  !  $\frac{\|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\|}{\|\hat{y}_{n+1}\|}$ 
   $m \leftarrow m_{coef} \left(\frac{STOL}{err}\right)^{1/2}$ 
  if err ≤ STOL then ! Passo aceito
    T  $\leftarrow$  T + ΔT
     $\underset{\sim}{\sigma} \leftarrow {}^1\underset{\sim}{\sigma}$ 
     $\underset{\sim}{\varepsilon} \leftarrow \hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ 
     $z_k \leftarrow \hat{z}_k$ 
    if m > mMax then m  $\leftarrow$  mMax
  else ! Passo rejeitado
    if m < mMin then m  $\leftarrow$  mMin
    ΔT  $\leftarrow$  mΔT ! Corrigir tamanho do passo
    if ΔT > 1 - T then DT  $\leftarrow$  1 - T ! Verificar último passo
  NSS  $\leftarrow$  NSS + 1

```

**Figura 11.6:** Esquema Modified-Euler para a integração numérica de relações elasto-plásticas com subcarregamento, para incrementos de tensão (“driver”).

```

Entrada: Incrementos de tensão  $\Delta\underset{\approx}{\sigma}$  e de sucção  $\Delta s$ 
Saída : Incremento de deformação  $\Delta\underset{\approx}{\epsilon}$ 
! Inicializar variáveis
NSS  $\leftarrow$  0 ! Número de subpasso (substeps)
T  $\leftarrow$  0 ! Pseudo tempo
 $\Delta T \leftarrow \Delta T_{ini}$  ! Tamanho inicial dos incrementos
while T < 1 do
   $\left\{ \begin{matrix} T\Delta\underset{\approx}{\sigma} \\ T\Delta s \end{matrix} \right\} \leftarrow \left\{ \begin{matrix} \Delta T\Delta\underset{\approx}{\sigma} \\ \Delta T\Delta s \end{matrix} \right\}$  ! h
   $\left\{ \begin{matrix} 1\Delta\underset{\approx}{\epsilon} \\ 1\Delta z_k \end{matrix} \right\} \leftarrow \left[ \begin{matrix} \underset{\approx}{C}^{ep}(\underset{\approx}{\sigma}, z_k) & \underset{\approx}{c}^{ep}(\underset{\approx}{\sigma}, z_k) \\ \underset{\approx}{b}_k(\underset{\approx}{\sigma}, z_k) & P_k(\underset{\approx}{\sigma}, z_k) \end{matrix} \right] \circ \left\{ \begin{matrix} T\Delta\underset{\approx}{\sigma} \\ T\Delta s \end{matrix} \right\}$  ! hkn
   $1\underset{\approx}{\sigma} \leftarrow \underset{\approx}{\sigma} + T\Delta\underset{\approx}{\sigma}$  ! yn+1 = Yn2
   $1z_k \leftarrow z_k + 1\Delta z_k$  ! yn+1 = Yn2
   $\left\{ \begin{matrix} 2\Delta\underset{\approx}{\epsilon} \\ 2\Delta z_k \end{matrix} \right\} \leftarrow \left[ \begin{matrix} \underset{\approx}{C}^{ep}(1\underset{\approx}{\sigma}, 1z_k) & \underset{\approx}{c}^{ep}(1\underset{\approx}{\sigma}, 1z_k) \\ \underset{\approx}{b}_k(1\underset{\approx}{\sigma}, 1z_k) & P_k(1\underset{\approx}{\sigma}, 1z_k) \end{matrix} \right] \circ \left\{ \begin{matrix} T\Delta\underset{\approx}{\sigma} \\ T\Delta s \end{matrix} \right\}$  ! hkn2
   $\hat{\underset{\approx}{\epsilon}} \leftarrow \underset{\approx}{\epsilon} + \frac{1}{2}(1\Delta\underset{\approx}{\epsilon} + 2\Delta\underset{\approx}{\epsilon})$  ! ŷn+1
   $\hat{z}_k \leftarrow z_k + \frac{1}{2}(1\Delta z_k + 2\Delta z_k)$  ! ŷn+1
   $err \leftarrow \max \left( \frac{\|\hat{\underset{\approx}{\epsilon}} - 1\underset{\approx}{\epsilon}\|}{\|\hat{\underset{\approx}{\epsilon}}\|}, \frac{\|\hat{z}_k - 1z_k\|}{\|\hat{z}_k\|} \right)$  !  $\frac{\|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\|}{\|\hat{y}_{n+1}\|}$ 
   $m \leftarrow m_{coef} \left( \frac{STOL}{err} \right)^{1/2}$ 
  if err ≤ STOL then ! Passo aceito
    T  $\leftarrow$  T + ΔT
     $\underset{\approx}{\sigma} \leftarrow 1\underset{\approx}{\sigma}$ 
    s  $\leftarrow$  s + TΔs
     $\underset{\approx}{\epsilon} \leftarrow \hat{\underset{\approx}{\epsilon}}$ 
    zk  $\leftarrow$   $\hat{z}_k$ 
    if m > mMax then m  $\leftarrow$  mMax
  else ! Passo rejeitado
    if m < mMin then m  $\leftarrow$  mMin
    ΔT  $\leftarrow$  mΔT ! Corrigir tamanho do passo
    if ΔT > 1 - T then DT  $\leftarrow$  1 - T ! Verificar último passo
  NSS  $\leftarrow$  NSS + 1

```

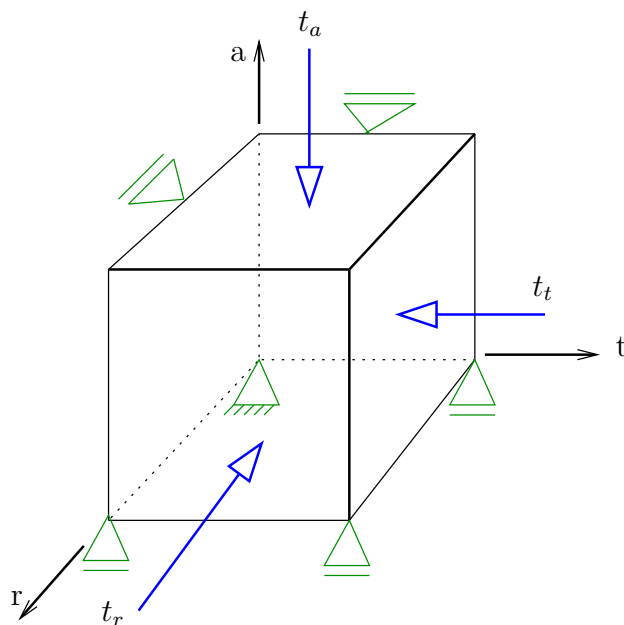
**Figura 11.7:** Esquema Modified-Euler para a integração numérica de relações elasto-plásticas com subcarregamento para solos não saturados, para incrementos de tensão e sucção (“driver”).

### 11.5.1 VERIFICAÇÃO

Os esquemas apresentados aqui foram verificados de duas formas: a primeira, mediante a simulação de ensaios de laboratório, para incrementos de tensão e sucção e a segunda pelo Método dos Elementos Finitos, para incrementos de deformação. Os resultados das simulações de laboratório usando os algoritmos das Figuras 11.6 e 11.7 foram apresentados nos capítulos dos modelos SubCam, Subtij, BarcelonaX e SubBar, por meio de comparações com resultados experimentais, ou, no caso do modelo BarcelonaX, com os casos hipotéticos do artigo de Alonso et al. (1990).

Os resultados das soluções via Método dos Elementos Finitos são apresentados a seguir. A simulação via FEM do problema de equilíbrio de amostras cúbicas de ensaios de laboratório, sem a presença de sucção, é realizada. Ou seja, apenas o algoritmo da Figura 11.4 é utilizado. O ensaio FO1-CTR-01, apresentado no Capítulo 4 é simulado. O modelo usado foi o SubCam, com os parâmetros da Tabela 7.3 do Capítulo 7.

A geometria do problema e as condições de contorno são mostradas na Figura 11.8. Duas malhas de elementos finitos são consideradas: a primeira contém apenas um elemento do tipo hexaedro de oito nós e a segunda contém 27 elementos do tipo hexaedro de oito nós (Figura 11.9).

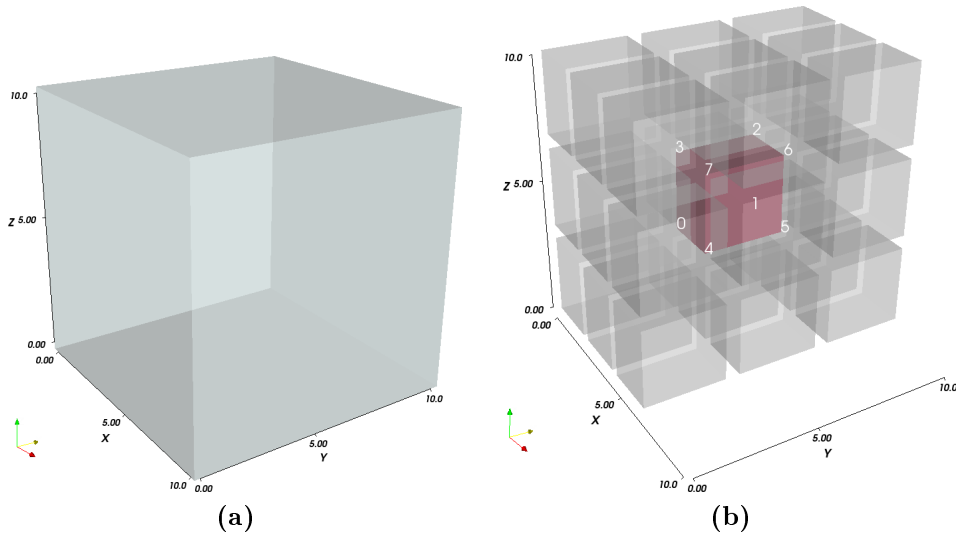


**Figura 11.8:** Condições de contorno consideradas na simulação de amostra de ensaio de laboratório.

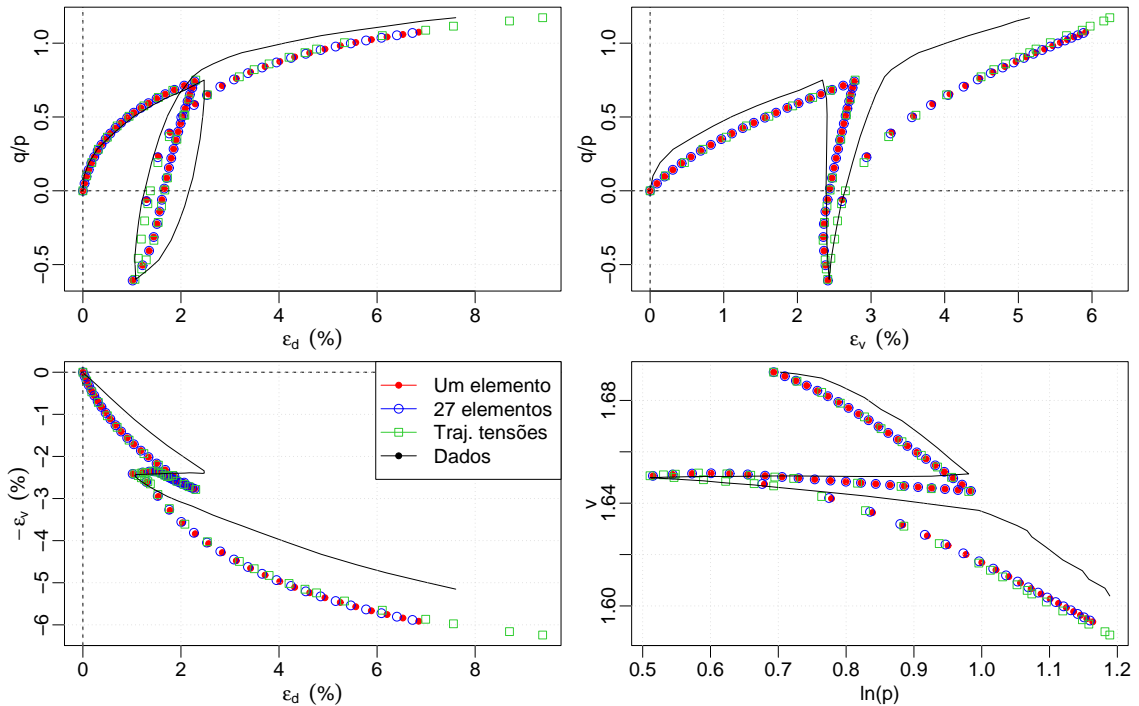
Para a solução do Sistema Algébrico de Equações Diferenciais (DAS) global, utilizou-se o esquema apresentado em Sheng & Sloan (2001). Este esquema determina automaticamente os passos de incrementos de força e/ou deslocamentos necessários à solução pelo Método dos Elementos Finitos.

Os resultados das tensões e deformações no elemento único da primeira malha e no

elemento do centro da segunda malha (hexaedro vermelho na Figura 11.9b) são comparados com os valores obtidos com as simulações pontuais do ensaio, via trajetória de tensão imposta, e os resultados experimentais. A Figura 11.10 mostra esses resultados, na qual verifica-se que a solução via FEM, com o algoritmo da Figura 11.4 e o esquema automático de Sheng & Sloan (2001), tem valores similares à integração local para incrementos de tensão dados.



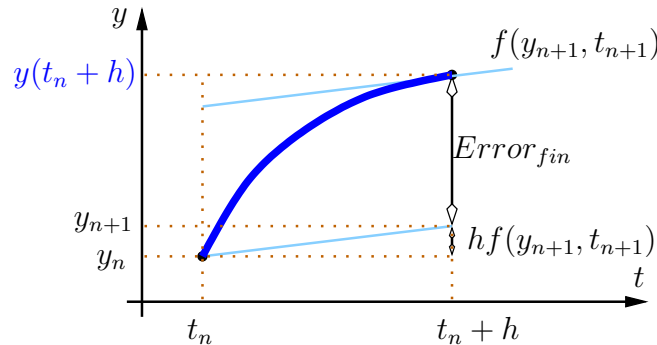
**Figura 11.9:** Malhas para a simulação do ensaio de laboratório: (a) Malha de um elemento; (b) Malha com 27 elementos.



**Figura 11.10:** Resultados de simulações via FEM e por meio de integrações pontuais (trajetória de tensão imposta).

## 11.6 BACKWARD-EULER

Um método RK implícito de primeira ordem bastante conhecido é o Backward-Euler. Este procura atualizar o estado  $y(t_n)$  mediante a função  $f(y(t_n+h), t_n+h)$  avaliada no final do passo (Figura 11.11). Como não se sabe *a priori* esta função, várias iterações devem ser realizadas. A seguir, mostra-se como isso pode ser feito, direcionando o desenvolvimento à teoria matemática da elastoplasticidade.



**Figura 11.11:** Método Backward-Euler.

Nos modelos que consideram duas (ou mais superfícies), uma delas passa pelo estado de tensão e é denominada por superfície de carregamento. Essa superfície é representada aqui por  $f = f(\underline{\sigma}, z_\alpha)$ . O conjunto de variáveis internas (tipo tensão) é composto por dois grupos: um com variáveis relacionadas apenas com a evolução da superfície de carregamento e outro com as demais variáveis. Essas primeiras serão representadas por  $z_\alpha$  e as segundas por  $z_\beta$ . Assim, o seguinte conjunto de variáveis internas é considerado:

$$z_k = \begin{Bmatrix} z_{\alpha=1} \\ \dots \\ z_{\alpha=\alpha} \\ z_{\beta=1} \\ \dots \\ z_{\beta=\beta} \end{Bmatrix} \quad (11.42)$$

em que as  $z_\alpha$  variáveis são relacionadas unicamente com o endurecimento da superfície de carregamento e as  $z_\beta$  com outros fenômenos, como exemplo, o crescimento da superfície normal de plastificação. Essa divisão é importante, pois o estabelecimento da condição de consistência deverá ser feito para a superfície de subcarregamento.

Leis constitutivas elastoplásticas podem ser resumidas pelo seguinte sistema de equa-

ções:

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : (\dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} - \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p}) \\ \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p} = \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{r}}}} \\ \dot{z}_k = \dot{\underline{\underline{\mathcal{H}}}}_k \\ f = f(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_\alpha) \\ \dot{f} = \underline{\underline{\mathbf{V}}} : \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} + \sum_{\alpha} y_{\alpha} \dot{z}_{\alpha} \end{cases} \quad (11.43)$$

em que,

$$\dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}}{\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\boldsymbol{r}}} - \sum_{\alpha} y_{\alpha} \underline{\underline{\mathcal{H}}}}_{\alpha} \quad (11.44)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{r}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{r}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_{\alpha}) \quad (11.45)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_{\alpha}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad (11.46)$$

$$y_k = y_k(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_k) = \frac{\partial f}{\partial z_k} \quad (11.47)$$

$$\underline{\underline{\mathcal{H}}}_k = \underline{\underline{\mathcal{H}}}_k(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_k) \quad (11.48)$$

Esse sistema está, ainda, sujeito às seguintes restrições ou condições de Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}} \geq 0 \\ f(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_{\alpha}) \leq 0 \\ \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}} f(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, z_{\alpha}) = 0 \end{cases} \quad (11.49)$$

O esquema Backward-Euler desenvolvido aqui é baseado na abordagem descrita em Simo (1994); Jeremić & Sture (1997); Simo & Hughes (1998); Belytschko et al. (2000). Este esquema pode ser aplicado a qualquer modelo formulado em termos de uma ou mais superfícies de plastificação e variáveis internas. Esquemas implícitos podem ser desenvolvidos considerando o problema em termos de incrementos de deformação.

O objetivo do método desta seção é: dado o estado  $({}^n \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, {}^n \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p, {}^n z_k)$ , para o incremento de deformação  $\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ , calcular o estado  $({}^{n+1} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, {}^{n+1} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p, {}^{n+1} z_k)$  que satisfaça as condições de carregamento e descarregamento. Assim, para as derivadas calculadas em  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} {}^{n+1} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= {}^n \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ {}^{n+1} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p &= {}^n \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p + {}^{n+1} \Delta \Lambda {}^{n+1} \underline{\underline{\boldsymbol{r}}} \\ {}^{n+1} z_i &= {}^n z_i + {}^{n+1} \Delta \Lambda {}^{n+1} \underline{\underline{\mathcal{H}}}_i \\ {}^{n+1} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} &= \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : ({}^{n+1} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - {}^{n+1} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p) \\ {}^{n+1} f &= {}^{n+1} f({}^{n+1} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, {}^{n+1} z_{\alpha}) \end{aligned} \quad (11.50)$$

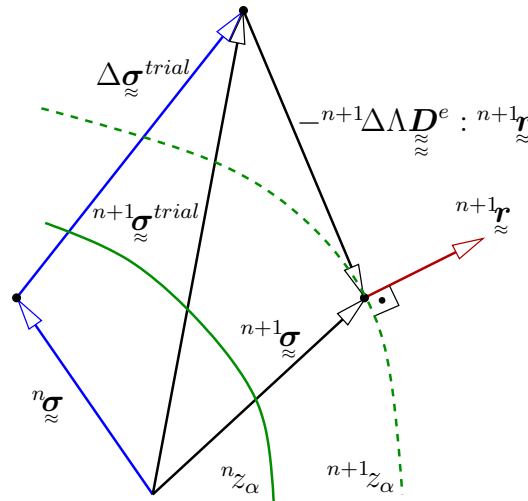
Inicialmente, considera-se a definição do tensor tentativa elástica (“elastic trial”). Para isso, a Eq. (11.50)<sub>4</sub> é re-escrita como:

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1}\underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{D}}^e : ({}^{n+1}\underline{\underline{\varepsilon}} - {}^{n+1}\underline{\underline{\varepsilon}}^p) \\
 &= \underline{\underline{D}}^e : ({}^n\underline{\underline{\varepsilon}} + \Delta\underline{\underline{\varepsilon}} - {}^n\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^p) \\
 &= \underline{\underline{D}}^e : ({}^n\underline{\underline{\varepsilon}} - {}^n\underline{\underline{\varepsilon}}^p) + \underline{\underline{D}}^e : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{D}}^e : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^p \\
 &= \underline{\underline{D}}^e : {}^n\underline{\underline{\varepsilon}}^e + \Delta\underline{\underline{\sigma}}^{trial} - \underline{\underline{D}}^e : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^p \\
 &= \underline{\underline{\sigma}}^{trial} - {}^{n+1}\Delta\Lambda\underline{\underline{D}}^e : {}^{n+1}\underline{\underline{r}}
 \end{aligned} \tag{11.51}$$

em que

$$\underline{\underline{\sigma}}^{trial} = \underline{\underline{D}}^e : {}^n\underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{D}}^e : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}} = {}^n\underline{\underline{\sigma}} + \Delta\underline{\underline{\sigma}}^{trial} \tag{11.52}$$

e que permite a interpretação geométrica do método como um algoritmo de retorno (“return mapping”), no qual o estado tentativa é projetado obliquamente no plano tangente com vetor normal  ${}^{n+1}\underline{\underline{r}}$ , segundo a direção de  $-{}^{n+1}\Delta\Lambda\underline{\underline{D}}^e : {}^{n+1}\underline{\underline{r}}$  (Figura 11.12).



**Figura 11.12:** Esquema de integração implícita Backward-Euler.

Como não se sabe *a priori* os valores de  ${}^{n+1}\underline{\underline{r}}$  e  ${}^{n+1}\mathcal{H}_k$ , e por conseqüência de  ${}^{n+1}\Delta\Lambda$ , deve-se adotar algum valor para  ${}^{n+1}\underline{\underline{\sigma}}$  e realizar algumas iterações até que o sistema de equações seja satisfeito. Esse valor pode até mesmo ser o estado inicial  ${}^n\underline{\underline{\sigma}}$ . A cada iteração  $k$ , o estado de tensão, cujos componentes deverão ser encontrados, será representado por  ${}^{n+1}\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$ . Da mesma forma, a solução desejada para as deformações plásticas e variáveis internas será indicada por  ${}^{n+1}\underline{\underline{\varepsilon}}^p(k)$ ,  ${}^{n+1}z_\alpha(k)$  e  ${}^{n+1}z_\beta(k)$ . Para cada iteração  $k$ , os seguintes



resíduos devem ser minimizados:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\mathbf{R}_{\varepsilon}^{(k)} &= \mathbf{C}_{\varepsilon}^e : {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(k)} - \left( \mathbf{C}_{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\sigma}^{trial} - {}^{n+1}\Delta\Lambda^{(k)} {}^{n+1}\mathbf{r}^{(k)} \right) \\ {}^{n+1}R_{zi}^{(k)} &= {}^{n+1}z_i^{(k)} - \left( {}^{n+1}z_i + {}^{n+1}\Delta\Lambda^{(k)} {}^{n+1}\mathcal{H}_i^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (11.53)$$

em que  $\boldsymbol{\sigma}^{trial} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}^e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  permanece constante durante as iterações.

Os resíduos das Eqs. (11.53) são minimizados pelo método Newton-Rhapson. Para isso, considerando que,

$${}^{n+1}\mathbf{R}_{\varepsilon}^{(k)} = {}^{n+1}\mathbf{R}_{\varepsilon}^{(k)}({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(k)}, {}^{n+1}\mathbf{r}^{(k)}, {}^{n+1}\Delta\Lambda^{(k)}) \quad (11.54)$$

$${}^{n+1}R_{zi}^{(k)} = {}^{n+1}R_{zi}^{(k)}({}^{n+1}z_i^{(k)}, {}^{n+1}\mathcal{H}_i^{(k)}, {}^{n+1}\Delta\Lambda^{(k)}) \quad (11.55)$$

e

$$\Delta\mathbf{r}^{(k)} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z_{\alpha}} \Delta z_{\alpha}^{(k)} \quad (11.56)$$

$$\Delta\mathcal{H}_i^{(k)} = \frac{\partial\mathcal{H}_i}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \sum_j \frac{\partial\mathcal{H}_i}{\partial z_j} \Delta z_j^{(k)} \quad (11.57)$$

ou então,

$$\Delta\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{M} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \sum_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha} \Delta z_{\alpha}^{(k)} \quad (11.58)$$

$$\Delta\mathcal{H}_i^{(k)} = \mathbf{R}_i : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \sum_j S_{ij} \Delta z_j^{(k)} \quad (11.59)$$

em que,

$$\mathbf{M} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{N}_{\alpha} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z_{\alpha}} \quad \mathbf{R}_i = \frac{\partial\mathcal{H}_i}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \quad S_{ij} = \frac{\partial\mathcal{H}_i}{\partial z_j} \quad (11.60)$$

as seguintes expansões por série de Taylor são feitas:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\mathbf{R}_{\varepsilon}^{(k+1)} &= {}^{n+1}\mathbf{R}_{\varepsilon}^{(k)} + \frac{\partial\mathbf{R}_{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \frac{\partial\mathbf{R}_{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}} : \Delta\mathbf{r}^{(k)} + \frac{\partial\mathbf{R}_{\varepsilon}}{\partial\Delta\Lambda} \delta\Delta\Lambda^{(k)} \\ &= {}^{n+1}\mathbf{R}_{\varepsilon}^{(k)} + \mathbf{C}_{\varepsilon}^e : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + {}^{n+1}\Delta\Lambda^{(k)} \Delta\mathbf{r}^{(k)} + {}^{n+1}\mathbf{r}^{(k)} \delta\Delta\Lambda^{(k)} \\ &= {}^{n+1}\mathbf{R}_{\varepsilon}^{(k)} + \left( \mathbf{C}_{\varepsilon}^e + {}^{n+1}\Delta\Lambda^{(k)} \mathbf{M} \right) : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + {}^{n+1}\Delta\Lambda^{(k)} \mathbf{N}_{\alpha} \Delta z_{\alpha} + {}^{n+1}\mathbf{r}^{(k)} \delta\Delta\Lambda^{(k)} \end{aligned} \quad (11.61)$$

e

$$\begin{aligned}
{}^{n+1}R_{zi}^{(k+1)} &= {}^{n+1}R_{zi}^{(k)} + \frac{\partial R_{zi}}{\partial z_j} \Delta z_j^{(k)} + \frac{\partial R_{zi}}{\partial \mathcal{H}_j} \Delta \mathcal{H}_j^{(k)} + \frac{\partial R_{zi}}{\partial \Delta \Lambda} \delta \Delta \Lambda^{(k)} \\
&= {}^{n+1}R_{zi}^{(k)} + \delta_{ij} \Delta z_j^{(k)} - {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} \delta_{ij} \Delta \mathcal{H}_j^{(k)} - {}^{n+1}\mathcal{H}_i^{(k)} \delta \Delta \Lambda^{(k)} \\
&= {}^{n+1}R_{zi}^{(k)} - {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_i : \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(k)} + \left( \delta_{ij} - {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} S_{ij} \right) \Delta z_j^{(k)} - {}^{n+1}\mathcal{H}_i^{(k)} \delta \Delta \Lambda^{(k)}
\end{aligned} \tag{11.62}$$

em que as seguintes expressões foram consideradas:

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{R}}}_\varepsilon}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e \quad \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{R}}}_\varepsilon}{\partial \underline{\underline{\mathbf{r}}}} = {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{sym} \quad \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{R}}}_\varepsilon}{\partial \Delta \Lambda} = {}^{n+1}\underline{\underline{\mathbf{r}}}^{(k)} \tag{11.63}$$

$$\frac{\partial R_{zi}}{\partial z_j} = \delta_{ij} \quad \frac{\partial R_{zi}}{\partial \mathcal{H}_j} = -{}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} \delta_{ij} \quad \frac{\partial R_{zi}}{\partial \Delta \Lambda} = -{}^{n+1}\mathcal{H}_i^{(k)} \tag{11.64}$$

Os resíduos das Eqs. (11.61) e (11.62) são igualados a zero, permitindo obter o seguinte sistema de equações:

$$[A^{(k)}] \{ \Delta \Sigma^{(k)} \} = - \{ R^{(k)} \} - \delta \Delta \Lambda^{(k)} \{ r^{(k)} \} \tag{11.65}$$

ou seja,

$$\{ \Delta \Sigma^{(k)} \} = - [A^{(k)}]^{-1} \{ R^{(k)} \} - \delta \Delta \Lambda^{(k)} [A^{(k)}]^{-1} \{ r^{(k)} \} \tag{11.66}$$

em que:

$$[A^{(k)}] = \begin{bmatrix} \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e + {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} \underline{\underline{\mathbf{M}}} \right) & {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\alpha & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_\alpha & \left( {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} S_{\alpha\alpha} - 1 \right) & {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} S_{\alpha\beta} \\ {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_\beta & {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} S_{\beta\alpha} & \left( {}^{n+1}\Delta \Lambda^{(k)} S_{\beta\beta} - 1 \right) \end{bmatrix} \tag{11.67}$$

e

$$\{ \Delta \Sigma^{(k)} \} = \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(k)} \\ \Delta z_\alpha^{(k)} \\ \Delta z_\beta^{(k)} \end{Bmatrix} \quad \{ R^{(k)} \} = \begin{Bmatrix} {}^{n+1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}_\varepsilon^{(k)} \\ -{}^{n+1}R_{z\alpha}^{(k)} \\ -{}^{n+1}R_{z\beta}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad \{ r^{(k)} \} = \begin{Bmatrix} {}^{n+1}\underline{\underline{\mathbf{r}}}^{(k)} \\ {}^{n+1}\mathcal{H}_\alpha^{(k)} \\ {}^{n+1}\mathcal{H}_\beta^{(k)} \end{Bmatrix} \tag{11.68}$$

O sistema da Eq. (11.65) possui duas incógnitas:  $\{ \Delta \Sigma^{(k)} \}$  e  $\delta \Delta \Lambda^{(k)}$ . Por isso, outro sistema de equações será necessário. Este último parte da condição de consistência, linearizada por séries de Taylor, considerando a Eq. (11.50)<sub>5</sub> e dado de acordo com:

$$\begin{aligned}
{}^{n+1}f^{(k+1)} &= {}^{n+1}f^{(k)} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} : \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(k)} + \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial z_\alpha} \Delta z_\alpha^{(k)} \\
&= {}^{n+1}f^{(k)} + \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{(k)} : \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(k)} + y_\alpha^{(k)} \Delta z_\alpha^{(k)} + 0 \Delta z_\beta^{(k)}
\end{aligned} \tag{11.69}$$

Como o objetivo é  ${}^{n+1}f^{(k+1)} = 0$ ,

$$\begin{Bmatrix} \underline{\underline{V}}^{(k)} \\ y_\alpha^{(k)} \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \\ \Delta z_\alpha^{(k)} \\ \Delta z_\beta^{(k)} \end{Bmatrix} = -{}^{n+1}f^{(k)} \quad (11.70)$$

ou seja,

$$\{V^{(k)}\}^T \{\Delta\Sigma^{(k)}\} = -{}^{n+1}f^{(k)} \quad (11.71)$$

Assim, com as Eqs. (11.66) e (11.71), o incremento  $\delta\Delta\Lambda^{(k)}$  pode ser encontrado, de acordo com:

$$\delta\Delta\Lambda^{(k)} = \frac{{}^{n+1}f^{(k)} - \{V^{(k)}\}^T [A^{(k)}]^{-1} \{R^{(k)}\}}{\{V^{(k)}\}^T [A^{(k)}]^{-1} \{r^{(k)}\}} \quad (11.72)$$

que pode ser usado para calcular  $\{\Delta\Sigma^{(k)}\}$  mediante a Eq. (11.66).

O Algoritmo 11.13 resume as iterações do esquema Backward-Euler (“fully-implicit”) para a integração numérica das equações da elastoplasticidade, considerando o conceito de subcarregamento. A inicialização é feita supondo que os incrementos de deformação plástica e de variáveis internas são nulos. Com isso, os resíduos poderão ser não nulos e serão usados para calcular as tentativas. O processo é continuado até que o erro da Eq. (11.73) seja menor que uma tolerância  $TOL_{BE}$ .

$$Err = \frac{\left\| \begin{Bmatrix} {}^{n+1}R_\varepsilon^{(k)} \\ {}^{n+1}R_{z_i}^{(k)} \end{Bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \\ z_i \end{Bmatrix}^{(k)} \right\|} \quad (11.73)$$

```

Entrada: Incremento de deformação  $\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 
Saída : Incremento de tensão  $\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ 
  ! Inicializar variáveis
   $k \leftarrow 0$ 
   $\Delta \Lambda^{(0)} \leftarrow 0$ 
   $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(0)} \leftarrow \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 
   $z_i^{(0)} \leftarrow z_i$ 
  Calcular função de plastificação  $f^{(k)}$ 
  ! Iterações
repeat
  | ! Calcular gradientes
  | Calcular gradientes  $(\underline{\underline{\mathbf{r}}}, \underline{\underline{\mathbf{V}}}, y_\alpha)$ 
  | Calcular gradientes de maior ordem  $(\underline{\underline{\mathbf{M}}}, \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\alpha, \underline{\underline{\mathbf{R}}}_i, S_{ij})$ 
  | ! Calcular matriz e vetores aumentados
  | Calcular  $([A^{(k)}]^{(-1)})$  ! Eq. (11.67)
  | Calcular  $(\delta \Delta \Lambda^{(k)})$  ! Eq. (11.72)
  | Calcular  $(\{\Delta \Sigma^{(k)}\})$  ! Eq. (11.66)
  | ! Atualizar variáveis
  |  $\Delta \Lambda^{(k+1)} \leftarrow \Delta \Lambda^{(k)} + \delta \Delta \Lambda^{(k)}$ 
  |  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(k+1)} \leftarrow \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(k)} + \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ 
  |  $z_i^{(k+1)} \leftarrow z_i^{(k)} + \Delta z_i$ 
  | Calcular  $(f^{(k+1)})$ 
  | ! Calcular resíduos e erro
  | Calcular  $({}^{n+1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}_\varepsilon^{(k)}, {}^{n+1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{z_i}^{(k)})$  ! Eq. (11.53)
  |  $Err \leftarrow \left\| \left\{ \begin{matrix} {}^{n+1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}_\varepsilon^{(k)} \\ {}^{n+1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{z_i}^{(k)} \end{matrix} \right\} \right\| \div \left\| \left\{ \begin{matrix} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \\ z_i \end{matrix} \right\}^{(k)} \right\|$ 
  | ! Próxima iteração
  |  $k \leftarrow k + 1$ 
until  $Err < TOL_{BE}$ 

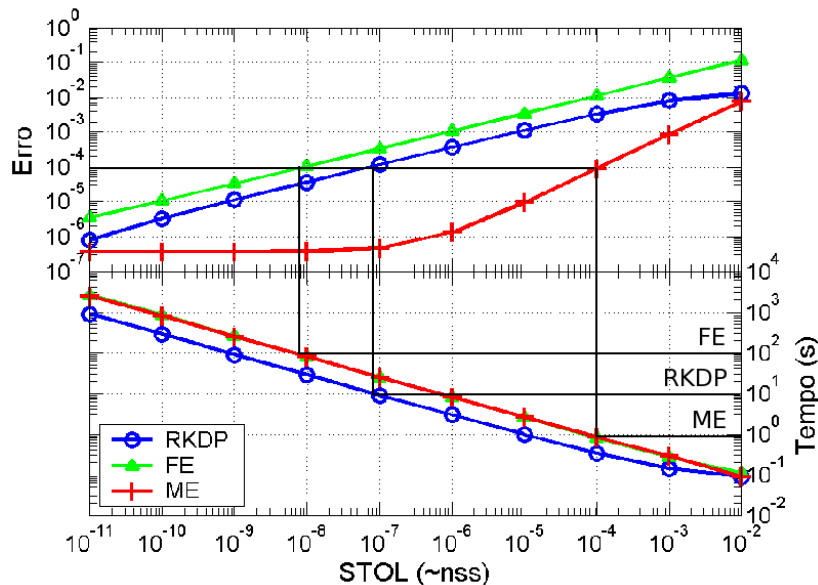
```

**Figura 11.13:** Esquema Backward-Euler (“fully-implicit”) para a integração numérica (“stress-update”) de relações elastoplásticas com subcarregamento

## 11.7 ESTIMATIVAS DE EFICIÊNCIA COM SIMULAÇÕES PONTUAIS

### 11.7.1 COMPARAÇÃO ENTRE (FE), (ME) E (RKDP)

Um estudo entre os esquemas FE, ME e RKDP foi realizado mediante a solução das equações constitutivas do modelo Subtij. Neste estudo, um conjunto de incrementos de deformação foi aplicado e o erro, com relação à solução correta, obtida com um número elevado de sub-divisões do esquema FE, foi calculado. Os resultados são apresentados em forma de gráfico (Figura 11.14), que permite verificar o balanço erro *versus* eficiência. Para isso, considerando o ábaco da Figura 11.14, o seguinte procedimento pode ser realizado: a) escolhe-se um valor de erro global aceitável para a solução do problema; b) no gráfico superior, traça-se uma linha horizontal pelo valor do erro até a curva do esquema desejado; c) partindo desta intersecção, traça-se uma linha vertical até encontrar, no gráfico inferior, a curva do tempo de processamento; e, então, d) traça-se uma linha horizontal encontrando o tempo médio de execução do esquema. Assim, verifica-se que o esquema ME é mais rápido, para uma mesma precisão, que os esquemas FE e RKDP. O esquema FE é o mais lento de todos, para o mesmo erro.



**Figura 11.14:** Ábaco com os resultados de integração para o modelo Subtij e os esquemas FE (Forward-Euler), ME (Modified-Euler) e RKDP (Runge-Kutta-Dormand-Prince).

### 11.7.2 COMPARAÇÃO ENTRE (ME) E (BE)

O objetivo desta seção é verificar qual esquema, entre ME e BE, produz a resposta mais acurada para o menor esforço computacional. As soluções obtidas com cada esquema são comparadas com a solução exata, calculada com o esquema FE com muitos subpassos (100.000). As simulações calculam os valores finais de tensões e variáveis internas

$(\{\Sigma\}(i) = \left\{ \underline{\sigma}(i) \quad z_i(i) \right\}^T)$ , para cada ponto (i) de uma malha de incrementos de deformação (Figura 11.16).

Uma medida de erro normalizada para cada ponto da malha é definida. Estes erros são comparados com a solução exata  $(\{\Sigma\}_c(i) = \left\{ \underline{\sigma}_c(i) \quad z_{ci}(i) \right\}^T)$ , mediante a seguinte expressão:

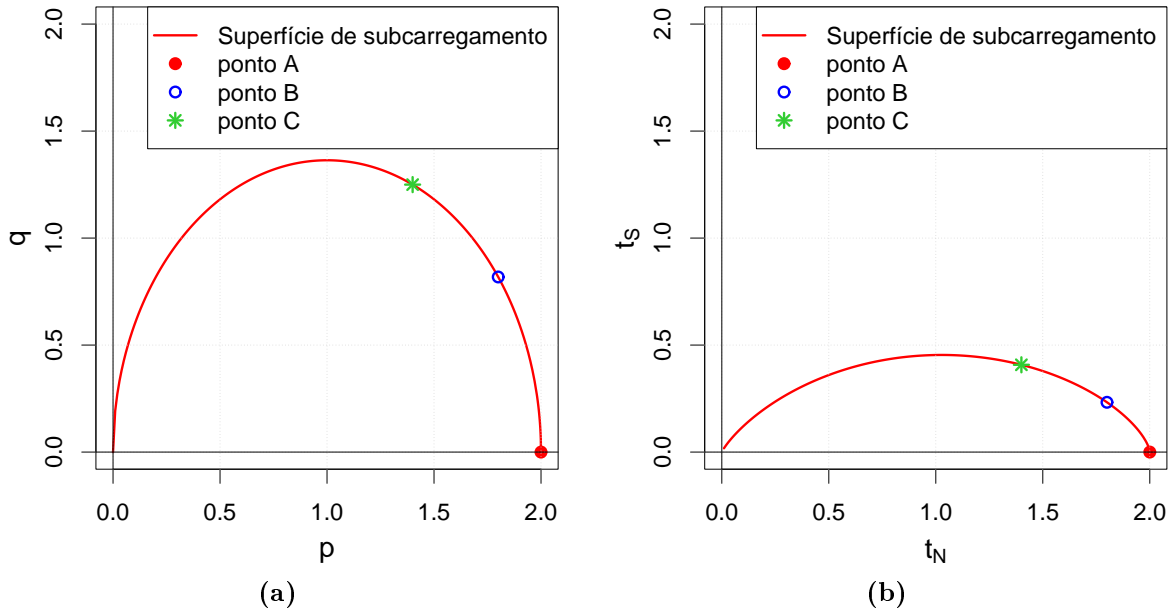
$$Error_{\Sigma}(i) = \frac{\|\Sigma(i) - \Sigma_c(i)\|}{\|\Sigma_c\|} \quad (11.74)$$

Simulações foram realizadas com os modelos SubCam e Subtij, considerando os parâmetros para a argila Fujinomori, apresentados na Tabela 11.2. Para todas simulações, o *OCR* usado foi igual a 2, ou seja, o tamanho inicial da superfície normal foi o dobro do tamanho da superfície de subcarregamento. O valor do parâmetro  $c$  para o modelo SubCam é dado por  $c_{subcam}$  e para o modelo Subtij é  $c_{subtij}$ .

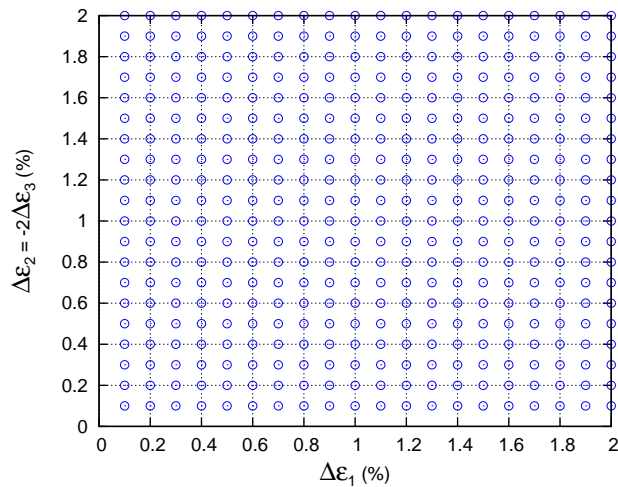
**Tabela 11.2:** Parâmetros dos modelos SubCam e Subtij para a argila Fujinomori usados nas comparações entre os esquemas de integração.

| Parâmetro    | Valor. |
|--------------|--------|
| $\lambda$    | 0.0891 |
| $\kappa$     | 0.0196 |
| $\nu$        | 0.2    |
| $\phi_{CS}$  | 33.7°  |
| $e_{NC}$     | 0.83   |
| $\beta$      | 1.5    |
| $c_{subcam}$ | 500.0  |
| $c_{subtij}$ | 1000.0 |

Diferentes valores iniciais de tensão e várias combinações de incrementos de deformação foram impostos para testar os esquemas de integração. Três estados iniciais de tensão em posições diferentes na superfície de subcarregamento foram considerados para os modelos SubCam (Figura 11.15a) e Subtij (Figura 11.15b). Incrementos tridimensionais de deformação foram impostos:  $\Delta\varepsilon_1$ ,  $\Delta\varepsilon_2$  e  $-0.5\Delta\varepsilon_3$ . Estes foram escolhidos de forma que os estados finais de tensão sejam maiores tanto na parte desviadora quanto isotrópica, ou seja, movendo contra a direção da superfície de subcarregamento. Os valores dos incrementos de deformação são vistos como pertencentes a uma malha de pontos (Figura 11.16). Estes pontos são usados para plotar as curvas de igual-erro (“isoerror contours”) com abcissas iguais a  $\Delta\varepsilon_1$  e ordenadas iguais a  $\Delta\varepsilon_2$ .



**Figura 11.15:** Estados iniciais para os modelos SubCam e Subtij: (a) Estados iniciais e superfície do modelo Subloading Cam-clay; (b) Estados iniciais e superfície do modelo Subloading tij.



**Figura 11.16:** Malha de incrementos de deformação impostos.

Para o esquema Modified-Euler (ME), cinco valores de tolerâncias  $STOL$  foram investigados:  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$ . Para o esquema Backward-Euler (BE), os valores para a tolerância  $TOL_{\Sigma}$  foram:  $10^{-1}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-7}$  e  $10^{-9}$ . Verificou-se que essa última tolerância praticamente não teve efeito no erro de integração com o esquema BE.

Para cada esquema e modelo constitutivo, tabelas foram elaboradas com o resumo dos resultados de integração em termos de eficiência e esforço computacional. As seguintes informações são apresentadas nestas tabelas:  $NSS$  representa o número de sub-passos, determinados automaticamente pelo esquema ME;  $ERR$  representa o erro calculado pela

Eq. (11.74);  $Time$  é o tempo total necessário à solução para todos os incrementos de deformação da malha;  $NDIV$  é o número de divisões impostas aos incrementos de deformação aplicados ao esquema BE, de forma a garantir a convergência e melhorar a acurácia deste esquema; e  $NIT$  representa o número de iterações usadas pelo esquema BE.

### 11.7.3 RESULTADOS PARA O MODELO SUBLOADING CAM-CLAY

Os resultados para o modelo SubCam, usando os esquemas ME e BE, são resumidos nas Tabelas 11.3 e 11.4. Os resultados mostram que os estados iniciais (A, B e C) não influenciam tanto os resultados para ambos esquemas. Os resultados mostram também que o esquema ME foi mais eficiente que o BE.

Para as combinações investigadas, o erro médio com o esquema ME variou da ordem de 1% até 0.0001%, com o tempo de cálculo entre 0.06 segundos, para as tolerâncias maiores ( $STOL = 10^{-1}$ ), e até 1.61 segundos, para as tolerâncias menores ( $STOL = 10^{-5}$ ). Diferentemente, os erros com o esquema BE iniciarem em 4%, consumindo um tempo de 0.18 segundos com  $NDIV = 2$ , enquanto que a resposta mais acurada foi obtida com erro de 0.07% e  $NDIV = 100$ , demandando 6 segundos de processamento. É importante ressaltar que o esquema BE não possui um procedimento de determinação automática dos subpassos para garantir a convergência e controlar a acurácia.

Ressalta-se, também, que o erro obtido com o esquema ME é relacionado com a tolerância  $STOL$ . Em todos os exemplos, o erro médio com o esquema ME ficou em, no máximo, uma ordem de grandeza acima da tolerância  $STOL$ . Com o esquema BE, o erro não diminuiu significativamente mesmo para as pequenas tolerâncias das iterações  $TOL_{\Sigma}$ . A acurácia do esquema BE só pode ser aumentada com a subdivisão (não automática) dos passos.

Para um mesmo erro médio, por exemplo,  $ERR_{med}$  em torno de 0.1%, o esquema ME gastou 0.09 segundos e o número de subpassos foi determinado (automaticamente) entre 5 e 12. Para manter a mesma acurácia, o esquema BE deve dividir o incremento de deformação em, mais ou menos, 100 subpassos. Com isso, 2 ou 3 iterações serão necessárias para a convergência e o processo todo leva 6 segundos. Isto é bem ineficiente, considerando o número total de cálculos de tensões necessários a cada esquema. Este número foi de, até, 24 (12 passos x 2 avaliações) para o esquema ME, contra 300 (100 passos x 3 iterações) para o esquema BE. Portanto, o número de cálculos foi de até 12.5 (300/24) vezes maior para o esquema BE e o tempo de processamento foi de até 66.7 (6/0.9) vezes maior para este mesmo esquema. Possivelmente esta diferença se deve ao cálculo dos gradientes de maior ordem, necessários ao esquema BE. Além disso, o esquema BE requer a inversão da matriz  $[A^{(k)}]$ .



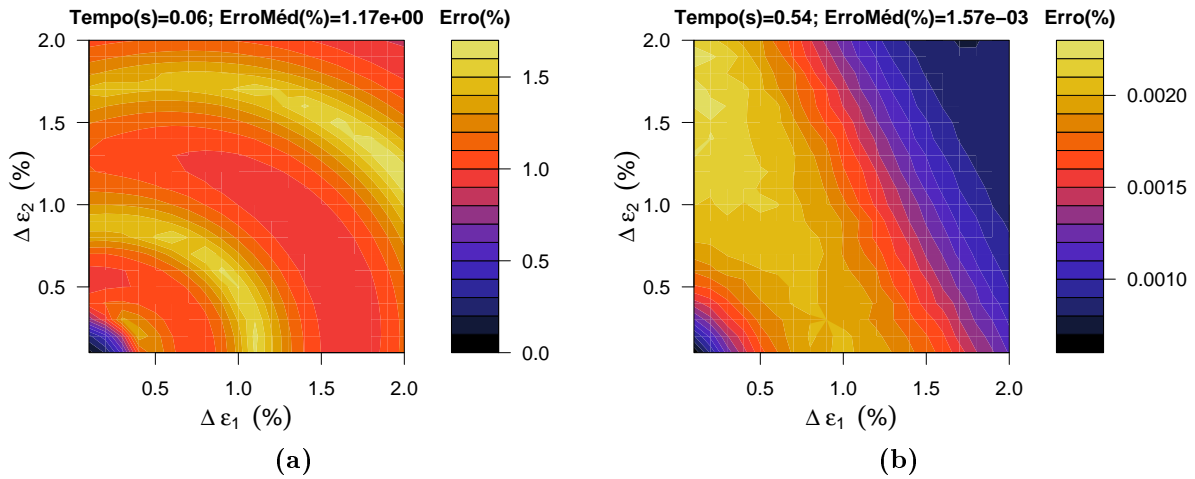
**Tabela 11.3:** Resultados de integração com o esquema Modified-Euler e o modelo Subloading Cam-clay.

| Ponto | STOL    | $NSS_{min}$ | $NSS_{max}$ | $NSS_{med}$ | $ERR_{min}$<br>(%) | $ERR_{max}$<br>(%) | $ERR_{med}$<br>(%) | Time<br>(s) |
|-------|---------|-------------|-------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------|
| A     | 1.0e-01 | 4           | 7           | 6           | 6.36e-02           | 1.68e+00           | 1.17e+00           | 0.06        |
| A     | 1.0e-02 | 5           | 12          | 9           | 5.00e-02           | 1.75e-01           | 1.24e-01           | 0.09        |
| A     | 1.0e-03 | 7           | 28          | 21          | 4.92e-03           | 1.99e-02           | 1.46e-02           | 0.20        |
| A     | 1.0e-04 | 14          | 81          | 60          | 6.07e-04           | 2.26e-03           | 1.57e-03           | 0.54        |
| A     | 1.0e-05 | 37          | 248         | 183         | 6.59e-05           | 3.04e-04           | 1.84e-04           | 1.61        |
| B     | 1.0e-01 | 4           | 7           | 5           | 4.17e-02           | 2.20e+00           | 1.27e+00           | 0.05        |
| B     | 1.0e-02 | 4           | 12          | 8           | 4.17e-02           | 1.75e-01           | 1.18e-01           | 0.08        |
| B     | 1.0e-03 | 6           | 29          | 19          | 4.48e-03           | 2.01e-02           | 1.35e-02           | 0.18        |
| B     | 1.0e-04 | 12          | 82          | 53          | 5.87e-04           | 2.23e-03           | 1.44e-03           | 0.47        |
| B     | 1.0e-05 | 31          | 249         | 160         | 5.05e-05           | 3.23e-04           | 1.63e-04           | 1.40        |
| C     | 1.0e-01 | 4           | 7           | 5           | 2.79e-02           | 2.41e+00           | 1.44e+00           | 0.05        |
| C     | 1.0e-02 | 4           | 12          | 9           | 2.79e-02           | 1.83e-01           | 1.34e-01           | 0.08        |
| C     | 1.0e-03 | 6           | 29          | 20          | 4.85e-03           | 2.05e-02           | 1.54e-02           | 0.18        |
| C     | 1.0e-04 | 11          | 82          | 55          | 5.79e-04           | 2.27e-03           | 1.65e-03           | 0.49        |
| C     | 1.0e-05 | 28          | 251         | 170         | 6.33e-05           | 3.43e-04           | 1.98e-04           | 1.49        |

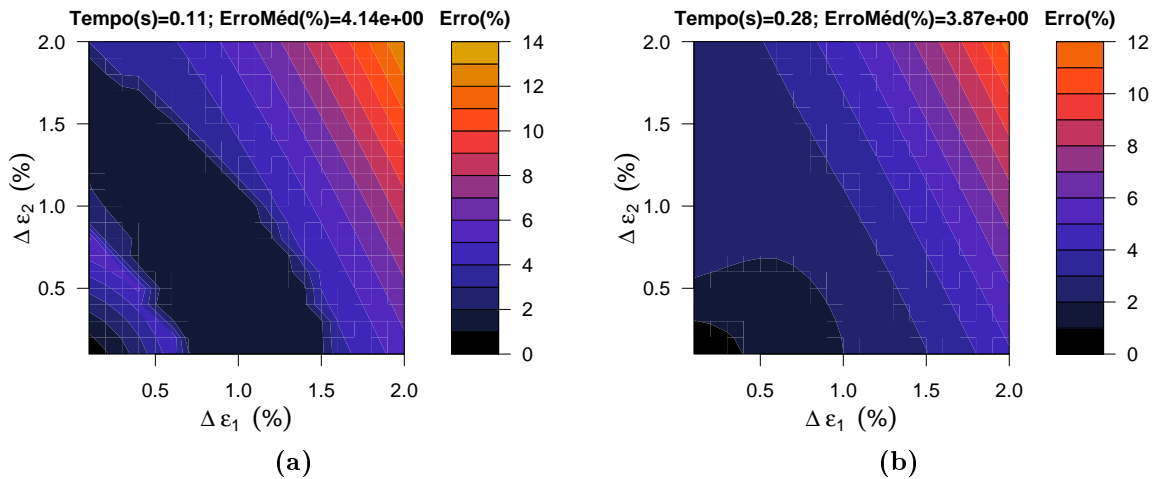
**Tabela 11.4:** Resultados de integração com o esquema Backward-Euler e o modelo Subloading Cam-clay.

| Ponto | NDIV | $TOL_{\Sigma}$ | $NIT_{min}$ | $NIT_{max}$ | $NIT_{med}$ | $ERR_{min}$<br>(%) | $ERR_{max}$<br>(%) | $ERR_{med}$<br>(%) | Time<br>(s) |
|-------|------|----------------|-------------|-------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------|
| A     | 2    | 1.0e-03        | 2           | 8           | 4           | 2.39e-01           | 1.15e+01           | 3.87e+00           | 0.18        |
| A     | 5    | 1.0e-03        | 1           | 4           | 2           | 1.08e-01           | 3.77e+00           | 1.47e+00           | 0.31        |
| A     | 10   | 1.0e-03        | 1           | 3           | 2           | 7.95e-02           | 1.80e+00           | 7.19e-01           | 0.55        |
| A     | 100  | 1.0e-03        | 1           | 2           | 1           | 8.21e-03           | 1.30e+00           | 5.47e-01           | 2.65        |
| A     | 2    | 1.0e-05        | 3           | 18          | 7           | 2.45e-01           | 1.14e+01           | 3.87e+00           | 0.28        |
| A     | 5    | 1.0e-05        | 2           | 6           | 4           | 1.03e-01           | 3.78e+00           | 1.44e+00           | 0.44        |
| A     | 10   | 1.0e-05        | 2           | 4           | 3           | 5.27e-02           | 1.79e+00           | 7.03e-01           | 0.67        |
| A     | 100  | 1.0e-05        | 1           | 2           | 1           | 8.21e-03           | 1.99e-01           | 7.55e-02           | 4.43        |
| A     | 2    | 1.0e-07        | 4           | 28          | 10          | 2.45e-01           | 1.14e+01           | 3.87e+00           | 0.40        |
| A     | 5    | 1.0e-07        | 3           | 8           | 5           | 1.04e-01           | 3.78e+00           | 1.44e+00           | 0.57        |
| A     | 10   | 1.0e-07        | 3           | 6           | 4           | 5.29e-02           | 1.79e+00           | 7.04e-01           | 0.95        |
| A     | 100  | 1.0e-07        | 2           | 3           | 2           | 5.39e-03           | 1.71e-01           | 6.92e-02           | 6.08        |
| B     | 2    | 1.0e-03        | 2           | 8           | 4           | 1.79e-01           | 1.13e+01           | 3.68e+00           | 0.18        |
| B     | 5    | 1.0e-03        | 1           | 4           | 2           | 9.42e-02           | 3.76e+00           | 1.39e+00           | 0.31        |
| B     | 10   | 1.0e-03        | 1           | 3           | 2           | 7.10e-02           | 1.79e+00           | 6.87e-01           | 0.54        |
| B     | 100  | 1.0e-03        | 1           | 2           | 1           | 7.39e-03           | 1.32e+00           | 5.39e-01           | 2.64        |
| B     | 2    | 1.0e-05        | 3           | 19          | 6           | 1.83e-01           | 1.14e+01           | 3.68e+00           | 0.28        |
| B     | 5    | 1.0e-05        | 2           | 6           | 4           | 7.64e-02           | 3.78e+00           | 1.35e+00           | 0.43        |
| B     | 10   | 1.0e-05        | 2           | 4           | 3           | 3.90e-02           | 1.78e+00           | 6.58e-01           | 0.66        |
| B     | 100  | 1.0e-05        | 1           | 2           | 1           | 7.31e-03           | 1.99e-01           | 7.11e-02           | 4.42        |
| B     | 2    | 1.0e-07        | 4           | 30          | 10          | 1.83e-01           | 1.14e+01           | 3.68e+00           | 0.40        |
| B     | 5    | 1.0e-07        | 3           | 8           | 5           | 7.69e-02           | 3.78e+00           | 1.35e+00           | 0.57        |
| B     | 10   | 1.0e-07        | 3           | 5           | 4           | 3.91e-02           | 1.78e+00           | 6.59e-01           | 0.95        |
| B     | 100  | 1.0e-07        | 2           | 3           | 2           | 3.98e-03           | 1.70e-01           | 6.45e-02           | 6.09        |
| C     | 2    | 1.0e-03        | 2           | 9           | 4           | 9.75e-02           | 1.23e+01           | 3.99e+00           | 0.18        |
| C     | 5    | 1.0e-03        | 1           | 4           | 2           | 9.68e-02           | 4.15e+00           | 1.54e+00           | 0.31        |
| C     | 10   | 1.0e-03        | 1           | 3           | 2           | 7.04e-02           | 1.99e+00           | 7.81e-01           | 0.53        |
| C     | 100  | 1.0e-03        | 1           | 2           | 1           | 7.24e-03           | 1.24e+00           | 5.15e-01           | 2.63        |
| C     | 2    | 1.0e-05        | 3           | 20          | 7           | 9.33e-02           | 1.22e+01           | 3.98e+00           | 0.29        |
| C     | 5    | 1.0e-05        | 2           | 6           | 4           | 3.93e-02           | 4.13e+00           | 1.51e+00           | 0.42        |
| C     | 10   | 1.0e-05        | 2           | 4           | 3           | 1.96e-02           | 1.98e+00           | 7.42e-01           | 0.66        |
| C     | 100  | 1.0e-05        | 1           | 2           | 1           | 7.24e-03           | 2.17e-01           | 7.96e-02           | 4.40        |
| C     | 2    | 1.0e-07        | 4           | 31          | 10          | 9.32e-02           | 1.22e+01           | 3.98e+00           | 0.40        |
| C     | 5    | 1.0e-07        | 3           | 8           | 5           | 3.83e-02           | 4.14e+00           | 1.51e+00           | 0.58        |
| C     | 10   | 1.0e-07        | 3           | 5           | 4           | 1.93e-02           | 1.98e+00           | 7.43e-01           | 0.94        |
| C     | 100  | 1.0e-07        | 2           | 3           | 2           | 1.95e-03           | 1.90e-01           | 7.35e-02           | 6.04        |

A diferença entre a acurácia dos dois métodos pode ser melhor visualizada usando as curvas de igual-erro (Figuras 11.17a até 11.18b). Apenas algumas combinações de *STOL* e *NDIV* são apresentadas. Nestas figuras, é possível notar que a magnitude dos erros é maior com o esquema BE. Além disso, o erro médio aumenta com a norma dos incrementos de deformação impostos, especialmente par o esquema BE. Para o esquema ME, o erro é mais ou menos distribuído. Isso se deve ao controle automático dos passos.



**Figura 11.17:** Resultados das simulações pontuais com o modelo **SubCam** e o esquema **Modified-Euler (ME)**: (a) Ponto A - Modified-Euler -  $STOL = 10^{-1}$ ; (b) ponto A - Modified-Euler -  $STOL = 10^{-4}$ .



**Figura 11.18:** Resultados das simulações pontuais com o modelo **SubCam** e o esquema **Backward-Euler (BE)**: (a) Ponto A - Backward-Euler -  $NDIV = 2 - TOL_{\Sigma} = 10^{-1}$ ; (b) Ponto A - Backward-Euler -  $NDIV = 2 - TOL_{\Sigma} = 10^{-5}$ .

#### 11.7.4 RESULTADOS PARA O MODELO SUBLOADING TIJ

Os resultados da integração da relação constitutiva do modelo Subtij, com os esquemas ME e BE, são apresentados nas Tabelas 11.5 e 11.5. Nos dois casos, a ordem do erro e o

esforço computacional não diferiram muito para os estados iniciais A, B e C. Novamente, observa-se que o esquema ME é bem mais eficiente (acurado e veloz) que o esquema BE. Os erros com o esquema ME ficaram entre 1% e  $10^{-4}$ , enquanto que para o esquema BE os erros ficaram entre 4% e  $10^{-2}$ . Além disso, o esquema BE gastou mais tempo para resolver a malha toda. O tempo de processamento gasto pelo esquema ME ficou entre 0.19 e 5.05 segundos e para o esquema BE, entre 8.79 e 245 segundos.

A distribuição do erro é apresentada por meio de curvas de igual-erro (Figuras 11.19a até 11.20b). Apenas as curvas para o ponto A e para alguns valores de *STOL* e *NDIV* são mostrados. Novamente, verifica-se que a magnitude do erro com o esquema BE foi bem maior, alcançando valores de até 20%. Além disso, os erros com o esquema BE aumentam excessivamente com a norma dos incrementos de deformação. O esquema ME controla o erro indiretamente ao controlar o erro local de truncamento via *STOL*.

É interessante comparar a performance dos esquemas ME e BE na solução do DAS dos modelos SubCam e Subtij. Com o auxílio das Tabelas 11.3 e 11.5, verifica-se que a solução do DAS para o modelo Subtij com o esquema ME é mais demorada. Com o esquema BE, a diferença é bem maior (Tabela 11.4 e 11.5). Isto ocorre, pois os gradientes necessários ao esquema BE para o modelo Subtij são bem mais complexos que os mesmos para o modelo SubCam. Além disso, os gradientes do modelo Subtij requerem a determinação dos autovalores e autoprojetores do tensor de tensão.

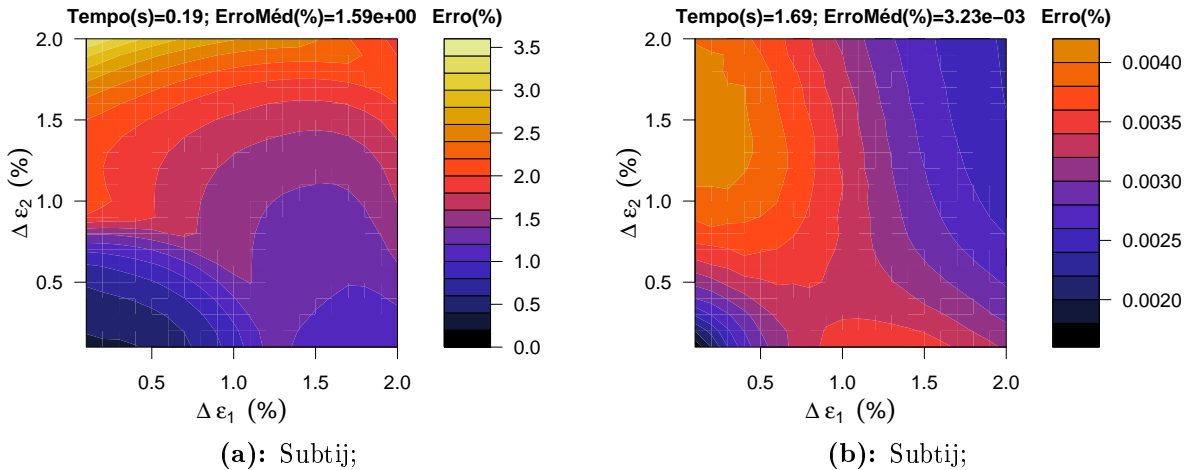
Comparando as curvas de igual-erro para os dois modelos, nota-se que os erros na solução do DAS são maiores para o modelo Subtij. A diferença é maior para o esquema BE. Possivelmente esta diferença é devido às restrições, com relação a valores negativos de tensões, impostas pelo modelo Subtij.

**Tabela 11.5:** Resultados de integração com o esquema Modified-Euler e o modelo Subloading tij.

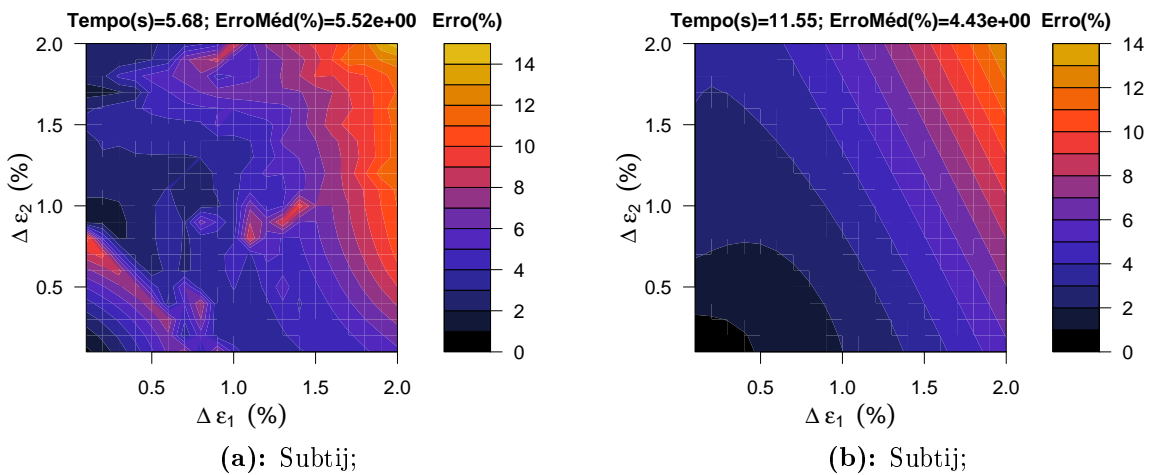
| Ponto | STOL    | $NSS_{min}$ | $NSS_{max}$ | $NSS_{med}$ | $ERR_{min}$<br>(%) | $ERR_{max}$<br>(%) | $ERR_{med}$<br>(%) | Time<br>(s) |
|-------|---------|-------------|-------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------|
| A     | 1.0e-01 | 4           | 7           | 5           | $1.84e-01$         | $3.40e+00$         | $1.59e+00$         | 0.19        |
| A     | 1.0e-02 | 5           | 12          | 9           | $4.53e-02$         | $3.05e-01$         | $2.03e-01$         | 0.30        |
| A     | 1.0e-03 | 8           | 28          | 20          | $1.17e-02$         | $3.77e-02$         | $2.82e-02$         | 0.63        |
| A     | 1.0e-04 | 17          | 79          | 57          | $1.65e-03$         | $4.12e-03$         | $3.23e-03$         | 1.69        |
| A     | 1.0e-05 | 44          | 242         | 172         | $8.81e-05$         | $3.84e-04$         | $2.52e-04$         | 5.05        |
| B     | 1.0e-01 | 4           | 7           | 6           | $2.54e-01$         | $5.43e+00$         | $2.81e+00$         | 0.20        |
| B     | 1.0e-02 | 6           | 15          | 11          | $8.91e-02$         | $3.04e-01$         | $2.13e-01$         | 0.36        |
| B     | 1.0e-03 | 9           | 32          | 25          | $1.07e-02$         | $2.88e-02$         | $1.78e-02$         | 0.78        |
| B     | 1.0e-04 | 18          | 91          | 67          | $7.85e-04$         | $2.78e-03$         | $1.57e-03$         | 2.03        |
| B     | 1.0e-05 | 53          | 281         | 207         | $1.42e-04$         | $6.69e-04$         | $3.15e-04$         | 6.17        |
| C     | 1.0e-01 | 4           | 7           | 6           | $8.17e-02$         | $7.49e+00$         | $5.31e+00$         | 0.30        |
| C     | 1.0e-02 | 5           | 15          | 12          | $7.90e-02$         | $6.19e-01$         | $3.27e-01$         | 0.38        |
| C     | 1.0e-03 | 7           | 36          | 26          | $8.24e-03$         | $3.66e-02$         | $2.93e-02$         | 0.80        |
| C     | 1.0e-04 | 14          | 100         | 75          | $9.34e-04$         | $3.49e-03$         | $2.52e-03$         | 2.22        |
| C     | 1.0e-05 | 41          | 310         | 230         | $8.29e-05$         | $8.90e-04$         | $3.81e-04$         | 6.87        |

**Tabela 11.6:** Resultados de integração com o esquema Backward-Euler e o modelo Subloading tij.

| Ponto | NDIV | $TOL_{\Sigma}$ | $NIT_{min}$ | $NIT_{max}$ | $NIT_{med}$ | $ERR_{min}$<br>(%) | $ERR_{max}$<br>(%) | $ERR_{med}$<br>(%) | Time<br>(s) |
|-------|------|----------------|-------------|-------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------|
| A     | 2    | 1.0e-03        | 2           | 6           | 4           | $3.31e-01$         | $1.31e+01$         | $4.44e+00$         | 8.79        |
| A     | 5    | 1.0e-03        | 1           | 5           | 2           | $2.39e-01$         | $4.31e+00$         | $1.67e+00$         | 13.87       |
| A     | 10   | 1.0e-03        | 1           | 3           | 2           | $1.71e-01$         | $2.07e+00$         | $8.29e-01$         | 21.29       |
| A     | 100  | 1.0e-03        | 1           | 1           | 1           | $1.80e-02$         | $1.65e+00$         | $7.05e-01$         | 94.27       |
| A     | 2    | 1.0e-05        | 2           | 8           | 6           | $3.29e-01$         | $1.31e+01$         | $4.43e+00$         | 11.55       |
| A     | 5    | 1.0e-05        | 2           | 6           | 4           | $1.53e-01$         | $4.35e+00$         | $1.66e+00$         | 19.65       |
| A     | 10   | 1.0e-05        | 2           | 4           | 3           | $8.18e-02$         | $2.06e+00$         | $8.16e-01$         | 30.83       |
| A     | 100  | 1.0e-05        | 1           | 2           | 1           | $1.80e-02$         | $2.03e-01$         | $8.30e-02$         | 183.75      |
| A     | 2    | 1.0e-07        | 4           | 10          | 7           | $3.28e-01$         | $1.31e+01$         | $4.43e+00$         | 14.45       |
| A     | 5    | 1.0e-07        | 2           | 7           | 5           | $1.52e-01$         | $4.35e+00$         | $1.66e+00$         | 25.07       |
| A     | 10   | 1.0e-07        | 2           | 5           | 4           | $8.17e-02$         | $2.06e+00$         | $8.15e-01$         | 40.25       |
| A     | 100  | 1.0e-07        | 2           | 3           | 2           | $8.96e-03$         | $1.96e-01$         | $8.09e-02$         | 245.62      |
| B     | 2    | 1.0e-03        | 2           | 6           | 4           | $2.80e-01$         | $1.34e+01$         | $4.55e+00$         | 8.76        |
| B     | 5    | 1.0e-03        | 1           | 4           | 2           | $1.94e-01$         | $4.42e+00$         | $1.73e+00$         | 13.62       |
| B     | 10   | 1.0e-03        | 1           | 3           | 2           | $9.90e-02$         | $2.12e+00$         | $8.53e-01$         | 21.23       |
| B     | 100  | 1.0e-03        | 1           | 1           | 1           | $1.01e-02$         | $1.63e+00$         | $6.95e-01$         | 94.90       |
| B     | 2    | 1.0e-05        | 2           | 9           | 6           | $2.77e-01$         | $1.34e+01$         | $4.54e+00$         | 11.69       |
| B     | 5    | 1.0e-05        | 2           | 6           | 4           | $1.22e-01$         | $4.44e+00$         | $1.71e+00$         | 19.53       |
| B     | 10   | 1.0e-05        | 2           | 5           | 3           | $6.26e-02$         | $2.11e+00$         | $8.50e-01$         | 30.74       |
| B     | 100  | 1.0e-05        | 1           | 2           | 1           | $1.01e-02$         | $2.10e-01$         | $8.60e-02$         | 184.59      |
| B     | 2    | 1.0e-07        | 4           | 11          | 7           | $2.77e-01$         | $1.34e+01$         | $4.54e+00$         | 14.53       |
| B     | 5    | 1.0e-07        | 3           | 7           | 5           | $1.21e-01$         | $4.44e+00$         | $1.71e+00$         | 24.99       |
| B     | 10   | 1.0e-07        | 2           | 6           | 4           | $6.24e-02$         | $2.11e+00$         | $8.50e-01$         | 40.41       |
| B     | 100  | 1.0e-07        | 2           | 3           | 2           | $6.43e-03$         | $2.03e-01$         | $8.43e-02$         | 252.30      |
| C     | 2    | 1.0e-03        | 2           | 7           | 4           | $1.69e-01$         | $1.45e+01$         | $4.90e+00$         | 10.26       |
| C     | 5    | 1.0e-03        | 1           | 4           | 2           | $1.22e-01$         | $4.92e+00$         | $1.97e+00$         | 20.01       |
| C     | 10   | 1.0e-03        | 1           | 3           | 2           | $6.20e-02$         | $2.46e+00$         | $1.00e+00$         | 25.16       |
| C     | 100  | 1.0e-03        | 1           | 1           | 1           | $6.29e-03$         | $1.62e+00$         | $6.77e-01$         | 93.74       |
| C     | 2    | 1.0e-05        | 3           | 9           | 6           | $1.65e-01$         | $1.44e+01$         | $4.88e+00$         | 11.44       |
| C     | 5    | 1.0e-05        | 2           | 6           | 4           | $7.20e-02$         | $4.96e+00$         | $1.96e+00$         | 19.75       |
| C     | 10   | 1.0e-05        | 2           | 6           | 3           | $3.74e-02$         | $2.46e+00$         | $1.00e-00$         | 31.73       |
| C     | 100  | 1.0e-05        | 1           | 3           | 1           | $6.29e-03$         | $2.44e-01$         | $9.93e-02$         | 186.76      |
| C     | 2    | 1.0e-07        | 4           | 12          | 7           | $1.65e-01$         | $1.44e+01$         | $4.88e+00$         | 16.70       |
| C     | 5    | 1.0e-07        | 3           | 8           | 5           | $7.18e-02$         | $4.96e+00$         | $1.96e+00$         | 27.92       |
| C     | 10   | 1.0e-07        | 3           | 8           | 4           | $3.69e-02$         | $2.46e+00$         | $1.00e-00$         | 42.30       |
| C     | 100  | 1.0e-07        | 2           | 4           | 2           | $3.79e-03$         | $2.37e-01$         | $9.82e-02$         | 257.52      |



**Figura 11.19:** Resultados das simulações pontuais com o modelo **Subtij** e o esquema **Modified-Euler (ME)**: (a) Ponto A - Modified-Euler -  $STOL = 1E - 1$ ; (b) Ponto A - Modified-Euler -  $STOL = 1E - 4$ .



**Figura 11.20:** Resultados das simulações pontuais com o modelo **Subtij** e o esquema **Backward-Euler (BE)**: (a) Ponto A - Backward-Euler -  $NDIV = 2 - TOL_{\Sigma} = 10^{-1}$ ; (b) Ponto A - Backward-Euler -  $NDIV = 2 - TOL_{\Sigma} = 10^{-5}$ .

## 11.8 CONCLUSÕES

Métodos Runge-Kutta são úteis na solução do sistema algébrico de equações diferenciais. Estes métodos podem ser explícitos ou implícitos. Os métodos implícitos necessitam de iterações para alcançar a solução, podendo não convergir, dependendo do tamanho dos passos de tempo. Tanto os métodos explícitos quanto os implícitos podem ser de primeira ou maiores ordens. Quanto maior a ordem do método, maior é a acurácia. Os métodos de maior ordem são obtidos considerando o cálculo das derivadas em posições e tempos intermediários dentro de um mesmo passo. Essas posições e tempos são conhecidos por estágios, portanto o método Runge-Kutta é do tipo multi-estágio.

Parece que a primeira aplicação do método Runge-Kutta à solução do DAS de modelos elastoplásticos foi apresentada por Sloan (1987). Métodos de maior ordem também foram estudados por Sloan & Booker (1992). O método Runge-Kutta pode ser aplicado a modelos para solos como o Cam-clay (Sloan et al., 2001; Pedroso, 2002).

Quatro esquemas baseados no método Runge-Kutta foram estudados: Forward-Euler (FE), Modified-Euler (ME), Runge-Kutta-Dormand-Prince (RKDP) e Backward-Euler (BE). Os esquemas FE, ME e RKDP são explícitos, pois calculam as derivadas no início dos (sub)passos. O esquema BE é implícito e requer um algoritmo com iterações. Os esquemas FE e BE são de primeira ordem, ou seja, o erro global se comporta como  $Ch$ , em que  $C$  depende do problema e  $h$  é o tamanho do passo. O esquema ME é de segunda ordem e o esquema RKDP é de quinta ordem. Este último é mais adequado para tolerâncias bastante pequenas.

Os esquemas FE e BE, por serem de primeira ordem, necessitam que os passos sejam menores que os mesmos para os esquemas ME e RKDP. No entanto, a determinação do tamanho do passo é difícil e pode ser auxiliada pelo procedimento que realiza duas avaliações com erros de ordens diferentes. Essas avaliações podem ser feitas com passos divididos por dois (extrapolação de Richardson) ou com métodos de diferentes ordens. Os esquemas RK-embedded possuem internamente avaliações de ordens diferentes, permitindo a elaboração de um algoritmo com determinação automática do tamanho dos passos.

Os esquemas ME e RKDP são do tipo “embedded”. O esquema ME faz duas avaliações: uma do tipo Forward-Euler e outra do tipo Modified-Euler. Este esquema foi implementado com um algoritmo de determinação automática dos passos. O erro entre as duas avaliações permite a correção dos passos, levando a rejeição ou aceitação da solução correntemente encontrada. Este esquema pode ser aplicado a modelos construídos com a teoria matemática da elastoplasticidade, com ou sem o subcarregamento. Além disso, este esquema pode ser usado na solução do DAS de modelos para solos parcialmente saturados, como os modelos BarcelonaX e SubBar, no qual a relação constitutiva considera a taxa de variação da sucção.

Igualmente para simulações com trajetórias de tensão/sucção, como as simulações de ensaios de laboratório, e simulações de problemas de contorno, como as análises pelo Método dos Elementos Finitos, o DAS local das relações constitutivas pode ser resolvido com o método Runge-Kutta. Os algoritmos com o método de determinação automática de passos Modified-Euler para ambos casos foram apresentados, com ou sem sucção.

A solução via Método dos Elementos Finitos de um problema de contorno e valor inicial, relacionado com o equilíbrio de amostras de ensaios de laboratórios, foi comparada com as simulações pontuais para trajetórias de tensão impostas. Com isso, os algoritmos das Figuras 11.6 e 11.4 puderam ser verificados. Os resultados pelos dois métodos foram similares.

Uma comparação entre os esquemas ME e BE, em termos do balanço erro *versus* tempo de processamento, foi realizada com os modelos SubCam e Subtij. O esquema ME foi bastante versátil e fácil de usar e implementar. Além disso, forneceu resultados mais acurados e no menor intervalo de tempo possível. A ineficiência do esquema BE, dentre outros fatores, também é devida ao fato de ser um esquema de primeira ordem, enquanto que o esquema ME é de segunda. O tempo adicional necessário à solução pelo esquema Backward-Euler parece ser devido ao cálculo dos gradientes de maior ordem. No caso do modelo Subtij, estes gradientes são determinados com equações um tanto complexas e que utilizam os autovalores e autoprojetores do tensor de tensão.

# Capítulo 12

## DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS

*“As far as I can judge of myself I worked to the utmost during the voyage from the mere pleasure of investigation, and from my strong desire to add a few facts to the great mass of facts in natural science.” – Charles Darwin*

Em modelos elastoplásticos, existem alguns parâmetros que não são facilmente obtidos pela observação de resultados laboratoriais. Em modelos que objetivam a simulação de ensaios cíclicos, como os modelos Subloading Cam-clay e Subloading tij, algumas funções de evolução para as superfícies de carregamento e de plastificação possuem coeficientes que devem, geralmente, ser obtidos fazendo a retro-análise de ensaios de triaxiais cilíndricos e cúbicos. Assim, antes de uma análise numérica, por exemplo, pelo Método dos Elementos Finitos, os parâmetros constitutivos devem ser descobertos e otimizados para um conjunto de ensaios. Este devem representar, preferencialmente, todas as possíveis trajetórias de tensão/deformação em problemas de contorno.

A otimização e procura por parâmetros constitutivos de leis elastoplásticas pode ser auxiliada pelo algoritmo genético-evolutivo (AGE). Este fornece os melhores parâmetros que minimizam o erro entre as curvas simuladas e os resultados de um conjunto de ensaios de laboratório de comportamento mecânico. Neste trabalho, o algoritmo genético-evolutivo é aplicado à determinação dos melhores parâmetros para os modelos SubCam, SubCamX e Subtij. Este procedimento permitiu a obtenção de parâmetros para os quais a qualidade de simulação foi aumentada. O código usado é similar ao apresentado por Goldberg (1989), conhecido por Simple Algorithm Genético (SGA). No entanto, diferentemente do algoritmo original, foi adotado o conceito de ilhas de indivíduos, por permitirem uma melhor convergência. Além disso, a seleção por “rank” e o conceito de elitismo foram adicionados ao programa de otimização, melhorando a eficiência do mesmo.

Um algoritmo genético-evolutivo (AGE) é, em princípio, uma simples e genérica estrutura contendo regras e operações capazes de simular a evolução de indivíduos, imitando a evolução dos indivíduos na natureza. Os algoritmos genéticos funcionam de uma forma bastante interessante e diferente dos algoritmos convencionais. O AGE tem utilização em



problemas de otimização e procura pelos indivíduos mais adaptados à solução do problema. Esses indivíduos devem ser representados por números e/ou caracteres para que possam ser introduzidos em um código computacional. Os indivíduos são classificados segundo uma função objetiva ou de adequabilidade (“fitness”) que influencia o processo de seleção. A seleção procura obter os melhores indivíduos, indicados por valores máximos ou mínimos da função objetiva, para que, em seguida, se possa realizar as operações genéticas de reprodução, mutação e crossover.

A maior vantagem do AGE é sua total independência do tipo de problema a ser resolvido, além de realizar uma procura num espaço de, praticamente, infinitas dimensões. Outro aspecto valioso do AGE é a sua capacidade de passar livremente pelos pontos de sela de um determinado problema. Sua desvantagem é a necessidade de alta capacidade de processamento da máquina computadora. Contudo, devido à sua simplicidade, sua extensão à programação paralela é relativamente fácil. Essa extensão pode ser feita, por exemplo, com a utilização de ilhas de indivíduos, nas quais, de tempo em tempo, faz-se a migração de indivíduos entre as ilhas. A migração é indispensável para que se possa chegar à convergência do AGE. Entretanto, o conceito de convergência para o AGE não é bem definido, pois a **evolução não tem fim**.

## 12.1 BREVE REVISÃO DA BIOLOGIA

O princípio básico do AGE é a sobrevivência do mais adequado (“Survival of the fittest”, Darwin, 1859). Entretanto, o procedimento programacional do AGE tem fundamento na Genética. Por isso, uma breve revisão dos conceitos biológicos necessários ao entendimento do AGE será feita.

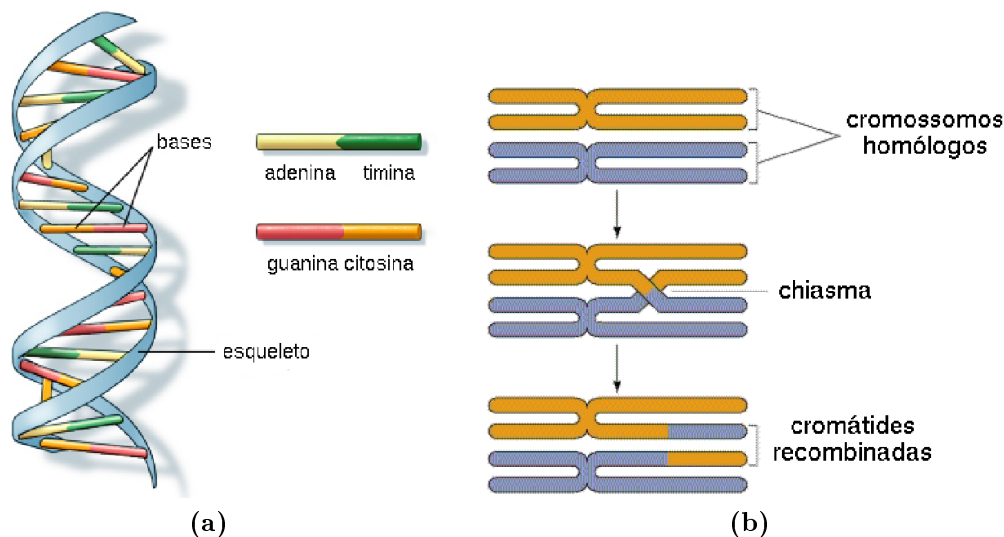
As teorias descobertas por Darwin relevantes ao AGE proposto são: a) a evolução ocorre; b) as mudanças evolucionárias acontecem gradualmente, requisitando milhares e milhões de anos; e c) o mecanismo primário da evolução é um processo chamado de seleção natural. O quarto preceito de Darwin será fundamentado/substituído pela teoria da Genética.

Quase todos os seres vivos possuem uma estrutura com material hereditário, o DNA (ácido desoxy-ribonucleico) (Figura 12.1a). Essa estrutura é composta por bases químicas. A ordem em que essas bases aparecem no DNA determinam a informação disponível para a construção e manutenção do organismo. O DNA parece uma escada em forma de hélice que é contorcida sobre si mesma até originar uma massa. Na verdade, existem momentos em que pode estar mais contorcida ou, simplesmente, sob uma forma linear. É importante saber que essa tira de material genético será o conteúdo dos cromossomos. Os cromossomos são, de fato, o material que é transmitido durante a reprodução. Nos seres humanos, os cromossomos ficam alojados nos gametas.

Existem pedaços de DNA (que ficam nos cromossomos) que têm a importante tarefa de

definir os traços (“traits”) dos seres vivos. Em células diplóides, as que possuem pares de cromossomos provenientes do pai e da mãe, as diferentes combinações de genes das díadas homólogas (“Homologous Dyads”) são quem determina a variedade de traços existentes nos seres vivos (diversidade de espécies, Darwin, 1859). Indivíduos podem possuir vários cromossomos nos núcleos das células.

Cada indivíduo humano recebe a metade dos cromossomos do pai e outra da mãe. Esses cromossomos se misturam durante a geração de gametas. Na geração de gametas podem acontecer o crossing-over e mutações. Isso ocorre durante a meiose logo após os cromossomos ficarem dispostos aos pares em estruturas tetrádicas em que cada perna é denominada por cromátide-irmã (Figura 12.1b). O cross-over ocorre quando uma perna de uma cromátide-irmã atravessa a outra no ponto conhecido por chiasma. As mutações ocorrem devido a alterações no material genético, como, por exemplo, a troca entre bases do DNA.



**Figura 12.1:** DNA e Cromossomo: (a) DNA; (b) cromossomo.

## 12.2 ANALOGIA COM A NATUREZA

Nesta seção, uma breve introdução ao Algoritmo Genético-Evolucionário (AGE) é feita. Para isso, uma analogia com a Natureza é realizada. Inicialmente, o seguinte exemplo é apresentado: Dado um conjunto de números (indivíduos), por exemplo,

|            |            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1001010011 | 0110010000 | 0100000010 | 0010101010 | 0000010000 | 0101010111 |
| 5          | 3          | 2          | 4          | 1          | 6          |

em que cada agrupamento de 1’s e 0’s pode ser a representação binária de alguma quantidade e os números abaixo das seqüências binárias são o total de 1’s em cada seqüência (valor objetivo). Procura-se encontrar, computacionalmente, a melhor combinação

de seqüências contendo o maior número de 1's (melhor indivíduo). Para isso, pares de seqüências com maior número de 1's são escolhidos (seleção):

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| 0010101010 | 0101010111 | 1001010011 | 0110010000 |
| 4          | 6          | 5          | 3          |

Em seguida (reprodução), para misturar os números de cada seqüência (misturar o material genético), uma posição dentro da seqüência de números (DNA), para cada par de seqüências (casais), é escolhida, aleatoriamente,

|             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 001010101)0 | 010101011)1 | 100)1010011 | 011)0010000 |
| 4           | 6           | 5           | 3           |

Para cada par, a parte da esquerda da primeira seqüência (pai) é concatenada (crossover) com a parte da direita da segunda seqüência (mãe), resultando numa nova seqüência (filho), e vice-versa, resultando noutra nova seqüência (filha),

|             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 001010101)1 | 010101011)0 | 100)0010000 | 011)1010011 |
| 5           | 5           | 2           | 6           |

De vez em quando, troca-se um "bit" da seqüência (mutação),

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| 1010101011 | 0101010110 | 1000000000 | 0111010011 |
| 6          | 5          | 1          | 6          |

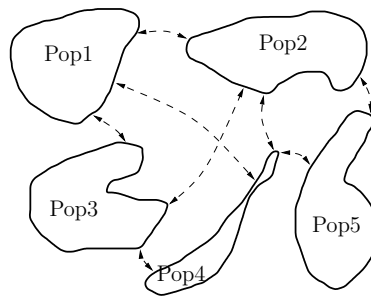
O processo é repetido, indefinidamente (gerações),

|            |             |             |             |             |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| seleção:   | 1010101011  | 0111010011  | 0101010110  | 0111010011  |
|            | 6           | 6           | 5           | 6           |
| crossover: | 1)010101011 | 0)111010011 | 0101010110) | 0111010011) |
|            | 6           | 6           | 5           | 6           |
|            | 1)111010011 | 0)010101011 | 0111010011) | 0101010110) |
|            | 7           | 5           | 6           | 5           |
| ...        |             |             |             |             |
|            | 1111111111  | 1111011111  | 0011111111  | 1111111101  |
|            | 10          | 9           | 8           | 9           |

O exemplo anterior ilustra os seguintes operadores e termos genético-evolucionários, para os quais a analogia com o problema de determinação de parâmetros constitutivos é feita:

- **Indivíduos:** Cada grupo de parâmetros, codificados (representados) geneticamente, por meio de seqüências binárias ou de números reais. Cada parâmetro será um Traço do indivíduo (“Trait”) devido a um gene específico;
- **Valor objetivo:** Medida da qualidade de representação do comportamento mecânico de um modelo constitutivo, para um conjunto de resultados de ensaios;
- **Melhor indivíduo:** Grupo de parâmetros com melhor valor objetivo, máximo ou mínimo, dependendo de como o erro entre os valores calculados e resultados experimentais é calculado;
- **Seleção:** Etapa na qual pares de indivíduos são selecionados. A seleção é influenciada (“bias”) pela categoria (“rank”) do indivíduo. Os indivíduos com maior rank têm maior probabilidade de serem selecionados;
- **Reprodução:** Engloba as rotinas de escolha dos gametas e mistura do material genético. Nesta etapa pode ocorrer crossover e mutação;
- **Elitismo:** Após a reprodução, alguns indivíduos mais bem adaptados (melhor “fitness”) são copiados para a população resultante;
- **DNA:** Seqüência de todas as bases necessárias à representação (codificação) dos parâmetros. Cada parâmetro corresponde a um gene, que, por sua vez, corresponde a um conjunto de bases do DNA (Figura 12.4);
- **Crossover:** Pode acontecer durante a geração dos gametas, na qual partes do material genético proveniente do pai se misturam com partes do material genético proveniente da mãe;
- **Mutação:** Pode acontecer durante a geração dos gametas, por meio de alterações do material genético (DNA);
- **Gerações:** Acontecem indefinidamente, causando uma **evolução** dos indivíduos. Vários critérios de parada podem ser definidos, apesar de ser difícil saber quando a convergência foi atingida. Por exemplo, mesmo com uma seqüência de resultados iguais, a qualquer momento, pode ocorrer uma mutação que cause a melhora dos indivíduos.
- **População/Ilha:** Um grupo de indivíduos com tamanho constante. Em algoritmos com mais de um grupo de indivíduos, separados entre si, cada grupo formará uma **ilha de indivíduos** (Figura 12.2).
- **Migração:** A cada certo número de gerações, alguns indivíduos (melhores ou não) são transportados de uma ilha a outra (Figura 12.2). Este processo aumenta a

dimensão do espaço de procura e melhora as características de convergência do algoritmo como um todo, evitando, por exemplo, a estagnação dos pontos-de-cela.

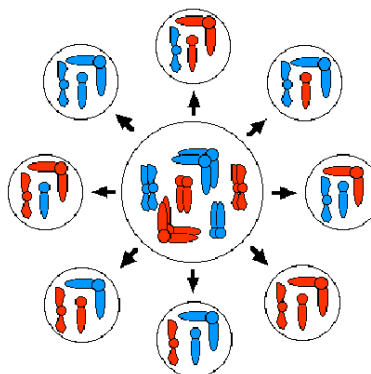


**Figura 12.2:** Ilhas de indivíduos; Cada ilha possui uma população de indivíduos. Em intervalos de tempo, alguns indivíduos migram para outras ilhas.

Alguns AGEs, como o Simple Algoritmo Genético do primeiro tutorial de Goldberg (1989), utilizam apenas um cromossomo para armazenar todas as informações do indivíduo. Neste trabalho, uma forma de representação um pouco diferente é desenvolvida. Esta forma procura imitar a natureza, considerando a proveniência dos cromossomos, células diplóides, etapa de geração de gametas, dentre outras características. O objetivo é permitir ao código a possibilidade de ser expandido para problemas mais complexos, como, por exemplo, com população variável e dependente do sexo dos indivíduos.

A geração de gametas permite obter cromossomos compostos de várias maneiras (Figura 12.3), dependendo de como as pernas das cromátides irmãs sofram crossover. Isso é simulado mediante a geração de números aleatórios e escolha de qual cromossomo resultante será usado na fecundação, gerando o indivíduo filho.

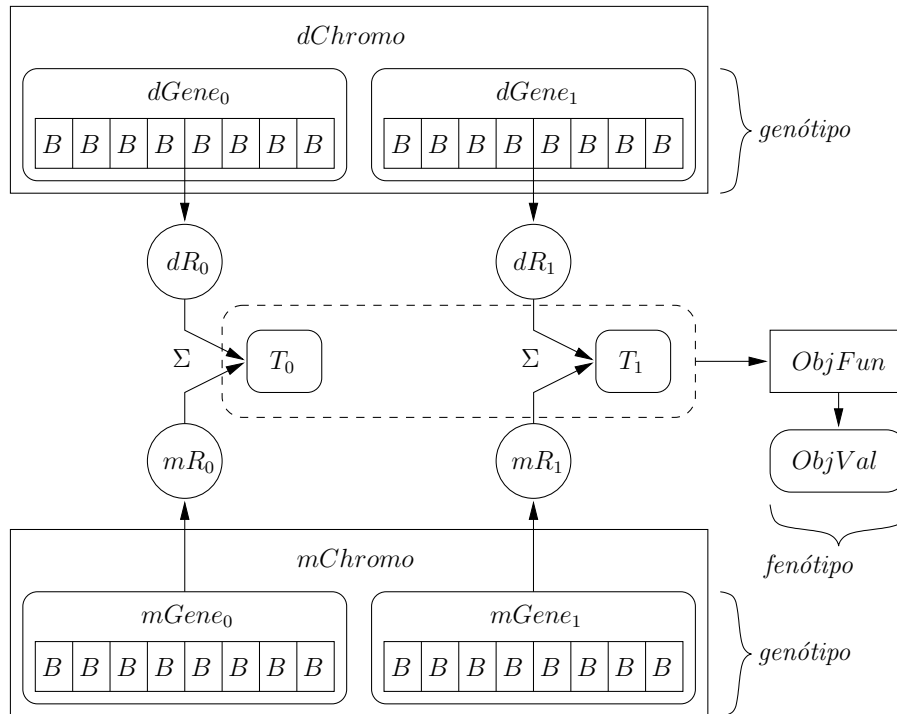
O par de cromossomos, díadas-homólogas, foi considerado, da mesma forma em que a célula dos seres vivos, diplóides, armazena a informação genética. Os dois cromossomos são denominados por dChromo e mChromo em que (d) indica o cromossomo proveniente do pai (“dad”) e (m) indica aquele proveniente da mãe (“mom”) (Figura 12.4).



**Figura 12.3:** Geração de gametas.

Um passo importante é a definição do esquema de representação das variáveis a serem otimizadas. Essas variáveis, denominadas por Valores-Traço (TV, “Trait Values”) são

codificadas em genes mediante uma função de representação (Figura 12.4). Por exemplo, o valor 15.4 poderá ser dividido em  $nBases$  (número de bases), em que cada uma irá guardar  $15.4/nBases$ . Então, neste caso, a função de representação será simplesmente a soma das bases (B). Outras codificações poderão ser adotadas, como por exemplo, a representação binária ou por meio de cadeias de caracteres (“strings”).



**Figura 12.4:** Representação Computacional do DNA.

Cada “Trait Value” (TV) corresponde a um parâmetro do material e cada TV é devido a dois pedaços de genes: dGene, devido ao pai e mGene devido à mãe (Figura 12.4). Ou seja, o gene é influenciado pelo pai e pela mãe. Duas funções de representação ( $dR_k$  e  $mR_k$ ) são necessárias para a conversão de bases em genes. Essas podem ser iguais. Outra função ( $\Sigma$ ) é necessária ao somatório das parcelas de traço proveniente da mãe com as do pai.

Todos os valores-traço ( $T_i$ ) (parâmetros ou variáveis a serem otimizadas) são agora introduzidos numa função objetiva que converte essa informação (armazenada no genótipo do indivíduo) em um único valor ( $ObjVal$ ). Este último representa o fenótipo do indivíduo e é usado para categorizar os indivíduos via um sistema de “ranking”.

Na otimização de parâmetros, a função objetiva  $ObjFun$  se encarrega de chamar um outro programa que realiza a simulação (pontual) de ensaios de laboratório. Os resultados deste último são comparados aos resultados experimentais (Objetivos ou “Targets”) para

se obter a seguinte medida de erro, para cada indivíduo:

$$Err = \sum_i^{nEns.} w_i \sum_j^{nTraj.} \sqrt{\left(\frac{ijq^{cal}}{ijp^{cal}} - \frac{ijq^{exp}}{ijp^{exp}}\right)^2 + (ij\varepsilon_v^{cal} - ij\varepsilon_v^{exp})^2 + (ij\varepsilon_d^{cal} - ij\varepsilon_d^{exp})^2} \quad (12.1)$$

em que  $Err$  é o erro devido às simulações, uma para cada ensaio (cíclico), realizadas com certo modelo constitutivo, configurado com o conjunto de parâmetros representado (fenótipo) por um indivíduo.  $nEns.$  é o número de ensaios.  $nTraj.$  é o número de trajetórias (estados de tensão) para cada ensaio.  $w_i$  é o peso dado a cada ensaio para influenciar o conjunto de parâmetros. Assim, os ensaios com  $w_i > 1$  serão mais bem representados pelos parâmetros de um certo indivíduo.  $p^{cal}$ ,  $q^{cal}$ ,  $\varepsilon_v^{cal}(\%)$  e  $\varepsilon_d^{cal}(\%)$  são os invariantes de tensão e deformação, respectivamente, obtidos para cada simulação e para cada estado.  $p^{exp}$ ,  $q^{exp}$ ,  $\varepsilon_v^{exp}(\%)$  e  $\varepsilon_d^{exp}(\%)$  são os resultados experimentais, para cada ensaio e para cada estado. O valor objetivo é, então, obtido pela seguinte fórmula:

$$ObjVal = \frac{1}{1 + Err} \quad (12.2)$$

Assim, para  $Err = 0$ , o indivíduo estará bem adaptado (“high fitness”) com  $ObjVal = 1$  e as simulações deverão ser executadas com o intuito de maximizar o valor objetivo.

Em seguida, os indivíduos são ordenados segundo seus valores objetivos, permitindo a categorização via “ranking” e a subsequente seleção via método estocástico universal. Outro método comum de seleção é o da Roleta (“roulette wheel”), que tem a desvantagem de funilar os indivíduos, tornando a população homogênea. No entanto, o método estocástico universal é mais robusto e permite uma seleção mais heterogênea.

Os indivíduos selecionados são colocados em reprodução. De toda a população, que deve ter tamanho par, são escolhidos  $(nIndiv - nElite)/2$  casais, em que  $nIndiv$  é o número de indivíduos e  $nElite$ , o número de indivíduos da elite (que serão copiados fielmente na geração futura). A fecundação, então, irá requisitar pelos gametas de cada par. Estes poderão sofrer crossover e mutações. Os cromossomos (d) e (m) do pai e os cromossomos (d) e (m) da mãe são duplicados (teoricamente) e várias combinações entre as pernas (cromátides) do cromossomo são feitas (Figura 12.3). Estas formarão os cromossomos dos novos indivíduos (filhos).

Cada par de indivíduos gera um par de filhos e, assim, a população é renovada. O ciclo inteiro se repete  $nGens$  (número de gerações) vezes. Com mais de uma população, ou seja, com ilhas de indivíduos, o procedimento é o mesmo, no qual os indivíduos das ilhas são evoluídos, independentemente. A cada  $iMig$  (intervalo para migração), alguns indivíduos de cada ilha são transportados (copiados) para outras ilhas. Esta cópia pode ser sequencial ou aleatória. A utilização de ilhas parece garantir a convergência do algoritmo.

## 12.3 ALGORITMO PARA A OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS

O Algoritmo genético-evolucionário usado para a determinação/otimização de parâmetros está resumido na Figura 12.5.

```

Entrada :
  nDat           ! Número de resultados experimentais
  nDatp, nDatq, nDatεv, nDatεd ! Resultados experimentais
  wnDat        ! Pesos para cada resultado experimental
  modelName     ! Modelo constitutivo
  nBases        ! Número de bases
  nGenes        ! Número de genes (=Número de parâmetros do modelo)
  minVals      ! Valores mínimos para cada parâmetro
  maxVals      ! Valores máximos para cada parâmetro
  nIndiv       ! Número (par) de indivíduos
  nElite       ! Número (par) de indivíduos da “elite”
  nGens        ! Número de gerações
  nIsls        ! Número de ilhas
  iMig         ! Intervalo entre migrações
  nIndMig      ! Número de indivíduos que migram
  selPress.    ! Coeficiente de “Pressão” para a seleção
  pMut         ! Probabilidade de mutação
  ! Gerar ilhas de indivíduos
Para cada Ilha Faça
  | Gerar uma população aleatória com nInd indivíduos.
  | Cada cromossomo deverá ter o tamanho  $DNA_{length} = nBases \times nGenes$ 
  ! Evolução
Enquanto iGen < nGens Faça ! Para cada geração
  | Para cada Ilha Faça
  | | ! Calcular valor objetivo
  | | Para cada Indivíduo Faça
  | | | Para cada Ensaio Faça
  | | | | Realizar a simulação do ensaio
  | | | | Calcular o erro Err ! Eq. 12.1
  | | | | Calcular o valor objetivo ObjVal ! Eq. 12.2
  | | | ! Seleção via “ranking” e método estocástico universal
  | | | Ordenar a população segundo valores ascendentes de ObjVal, atribuindo “ranks”
  | | | Selecionar  $(nIndiv - nElite)/2$  indivíduos como “Pais”, considerando os “ranks”
  | | | Selecionar  $(nIndiv - nElite)/2$  indivíduos como “Mães”, considerando os “ranks”
  | | | ! Fecundação
  | | | Para cada Casal Faça
  | | | | ! Gerar um par de gametas (crossover e mutação)
  | | | | dCromo do Filho ← gameta1 do Pai
  | | | | mCromo do Filho ← gameta1 da Mãe
  | | | | dCromo do Filha ← gameta2 do Pai
  | | | | mCromo do Filha ← gameta2 da Mãe
  | | | | ! Elitismo
  | | | | Copiar nElite (melhores indivíduos) para a nova população
  | | | | ! Migração
  | | | | se Estiver no momento de migração então
  | | | | | Descobrir para qual ilha os indivíduos desta ilha irão
  | | | | | Copiar nIndMig para a outra ilha;
  | | iGen ← iGen + 1

```

**Figura 12.5:** Simple algoritmo genético para a otimização de parâmetros.



## 12.4 APLICAÇÃO

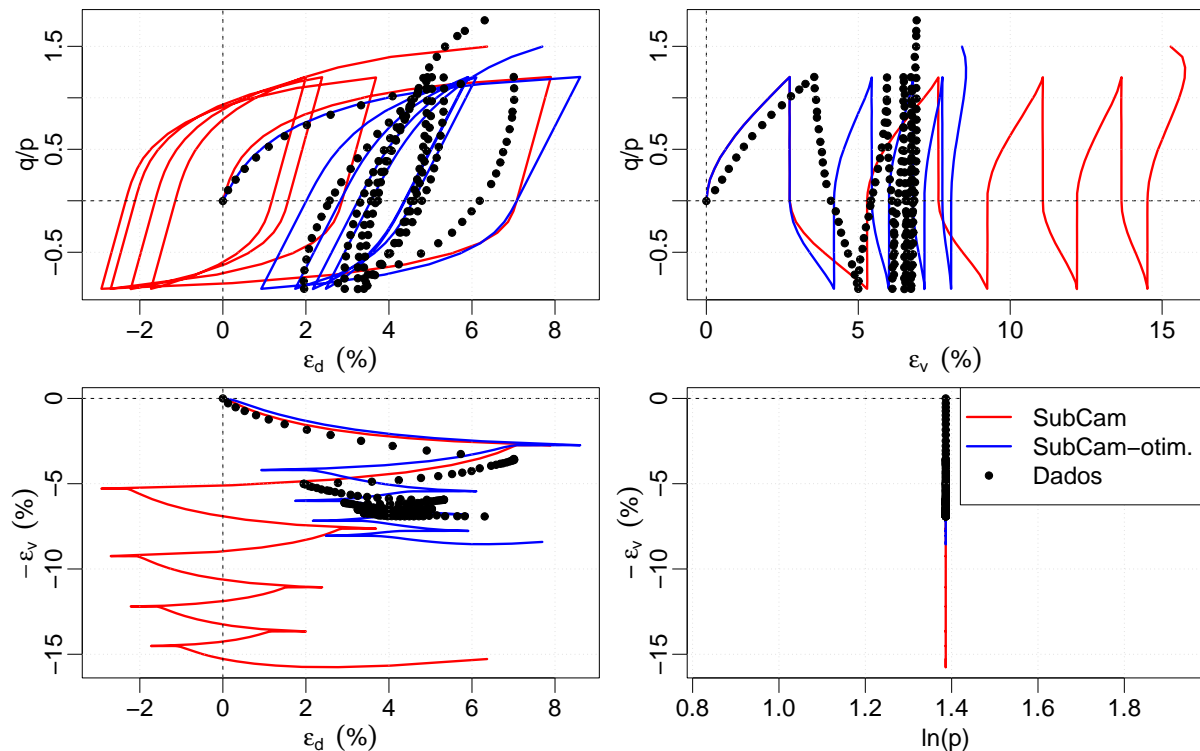
### 12.4.1 SUBLOADING CAM-CLAY

Os parâmetros do modelo Subloading Cam-clay (SubCam) foram otimizados com o AGE. Os valores iniciais são iguais aos determinados para o modelo Subloading tij (Subtij), com exceção do parâmetro  $c$ , que, geralmente, é determinado por retro-análise de ensaios cíclicos. A Tabela 12.1 mostra os valores iniciais e otimizados para o modelo SubCam e para a argila Fujinomori. Os únicos parâmetros modificados foram o módulo cisalhante  $G$  e o coeficiente de controle do decaimento da flexibilidade  $c$ .

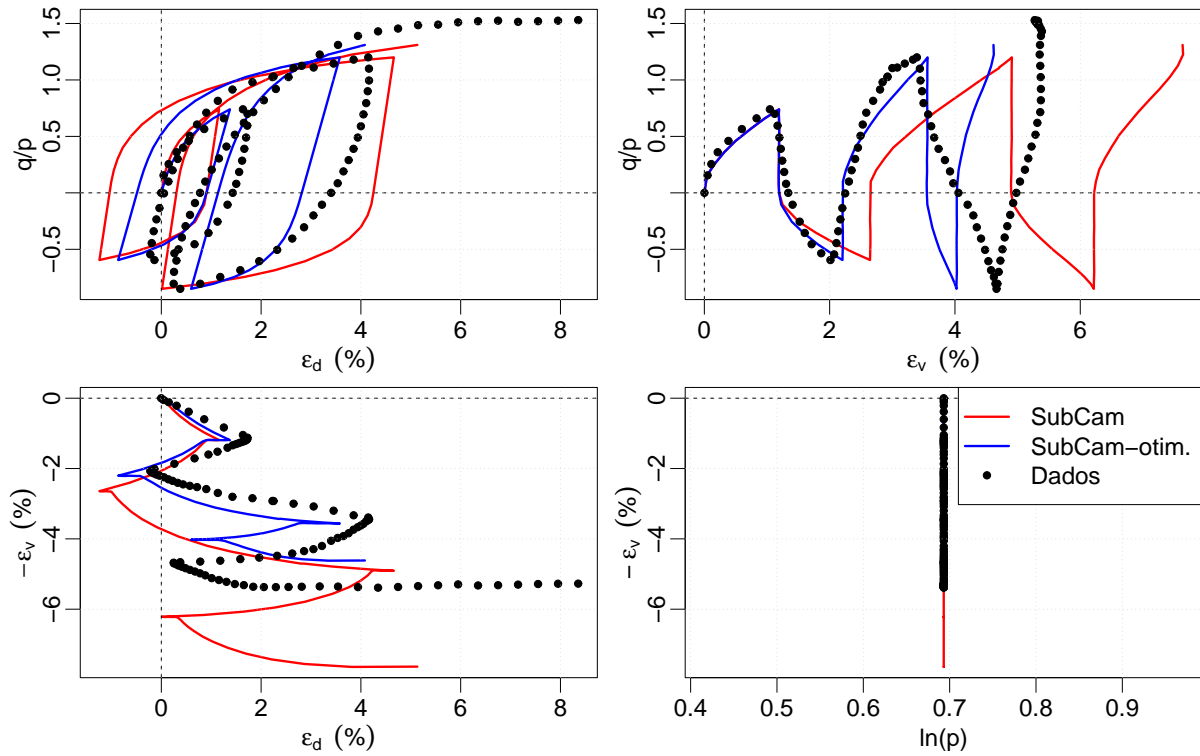
As Figuras 12.6 até 12.15 mostram os gráficos com os resultados. As curvas na cor azul correspondem às simulações com os parâmetros otimizados. As trajetórias de tensão são omitidas, pois foram apresentadas no Capítulo 4. Para todos os ensaios, a resposta simulada melhorou. Para os ensaios do tipo triaxial cúbico, praticamente não houve melhora, devido, provavelmente, a limitações do próprio modelo.

**Tabela 12.1:** Parâmetros originais e otimizados para a argila Fujinomori e o modelo SubCam.

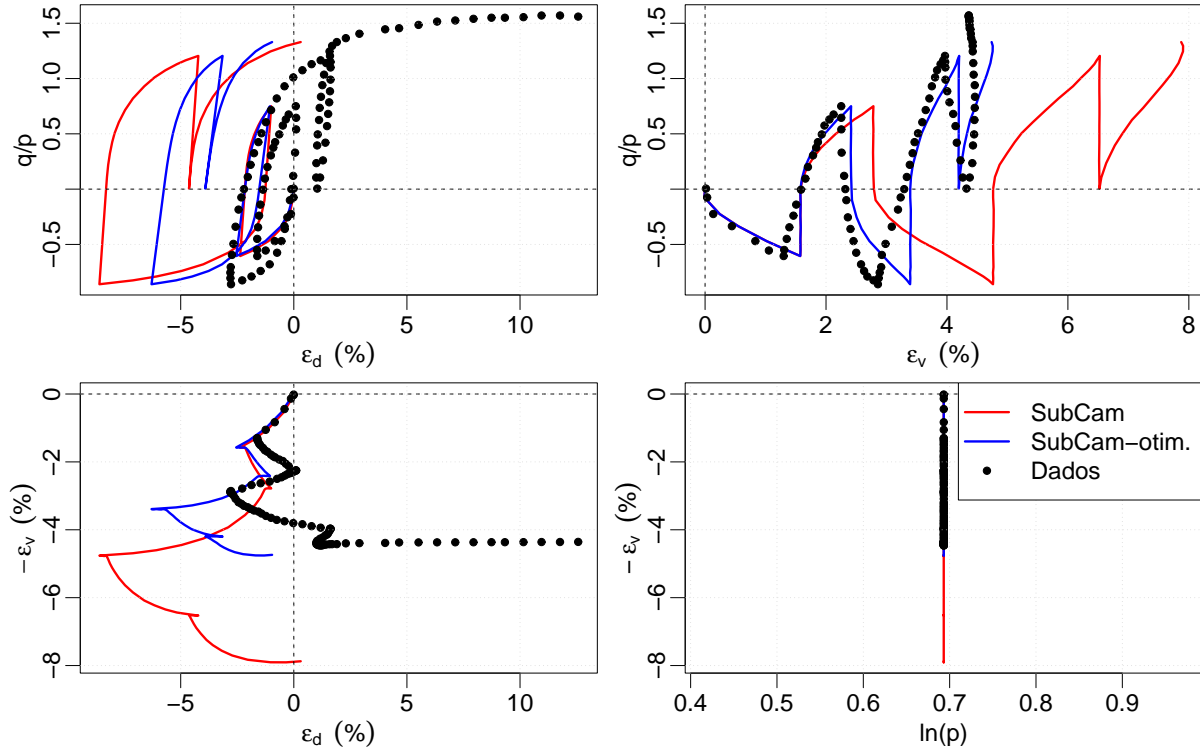
|                       | $\lambda$ | $\kappa$ | $\phi_{CS}$ | $G(kPa)$ | $c$   |
|-----------------------|-----------|----------|-------------|----------|-------|
| Parâmetros iniciais   | 0.0891    | 0.0196   | 31.6        | 19110    | 1000  |
| Parâmetros otimizados | 0.0891    | 0.0196   | 31.6        | 10290    | 14000 |



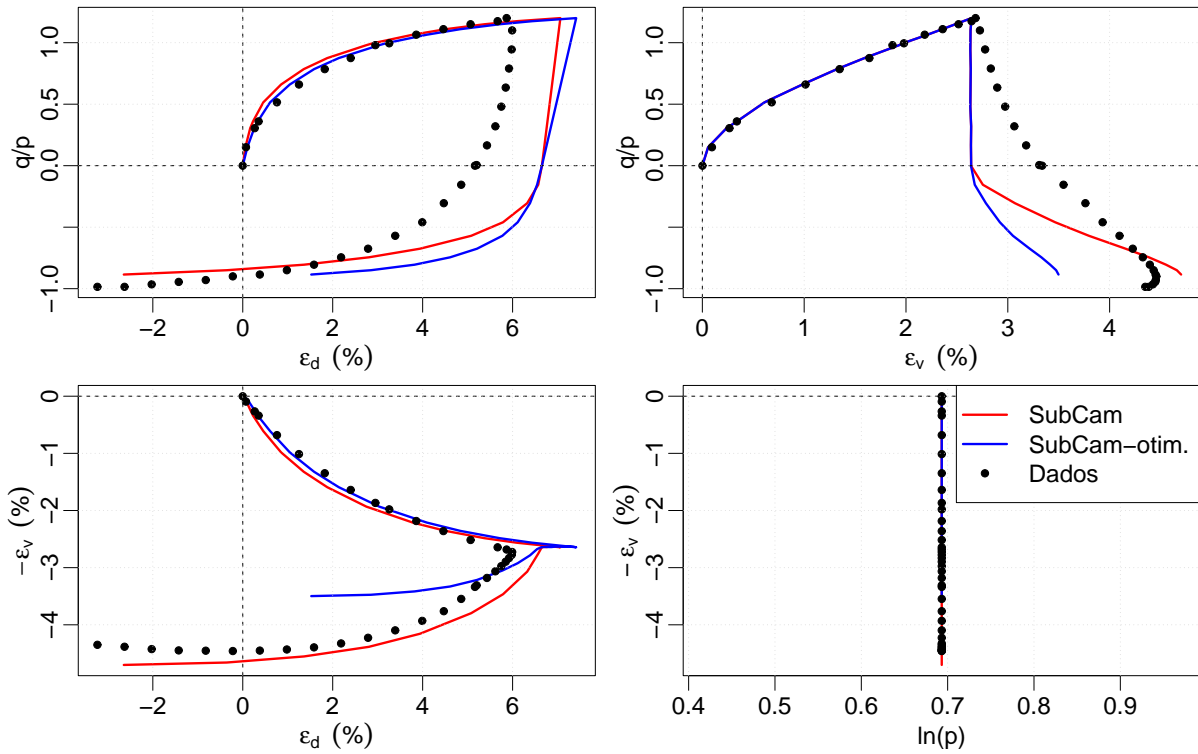
**Figura 12.6:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-01** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubCam**.



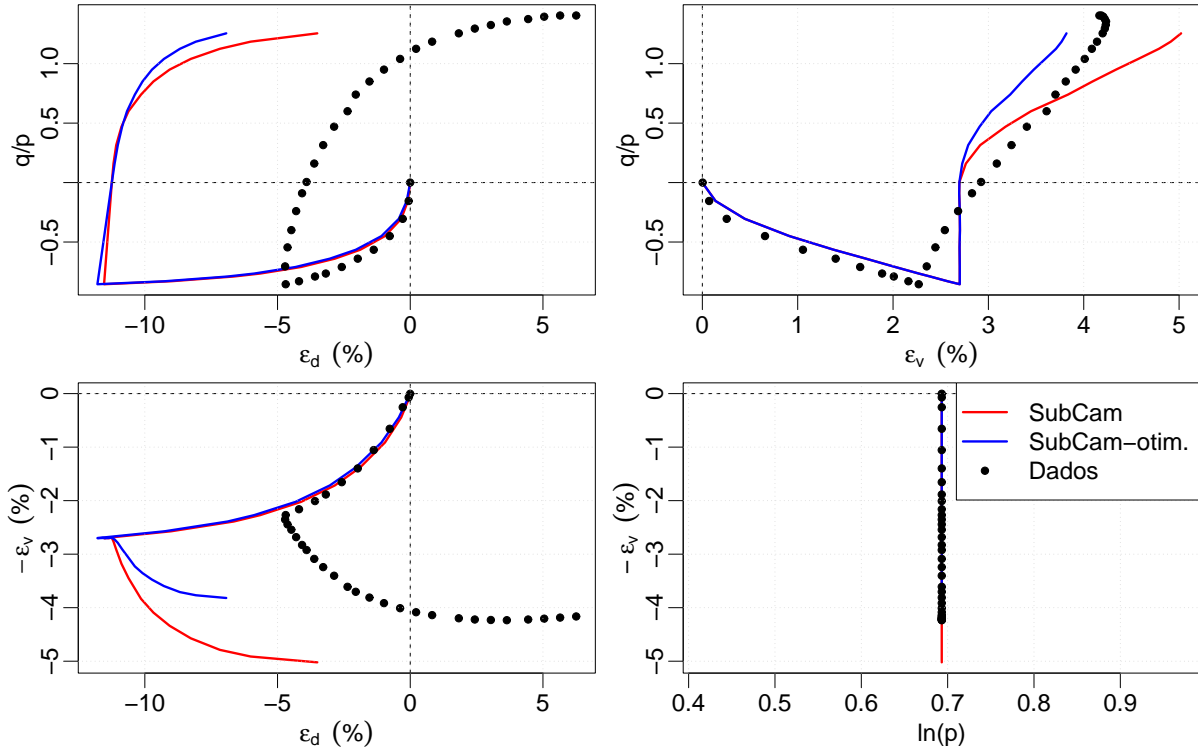
**Figura 12.7:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-02** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubCam**.



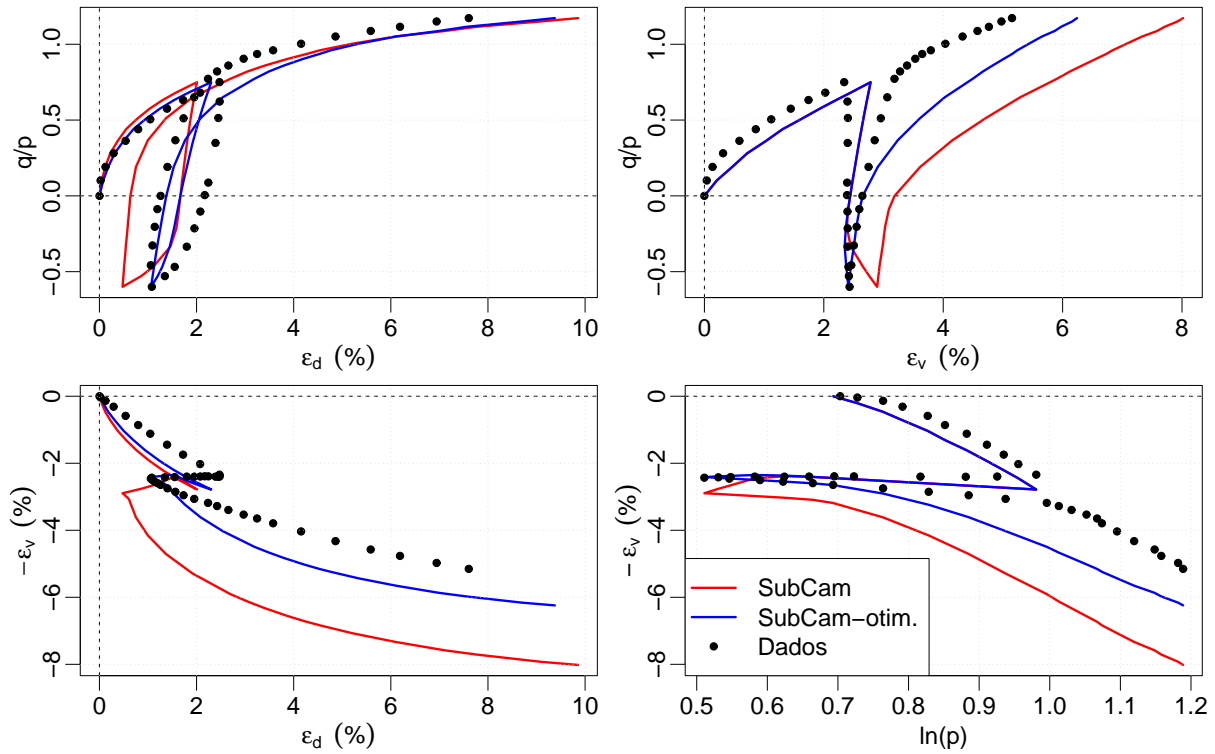
**Figura 12.8:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-03** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubCam**.



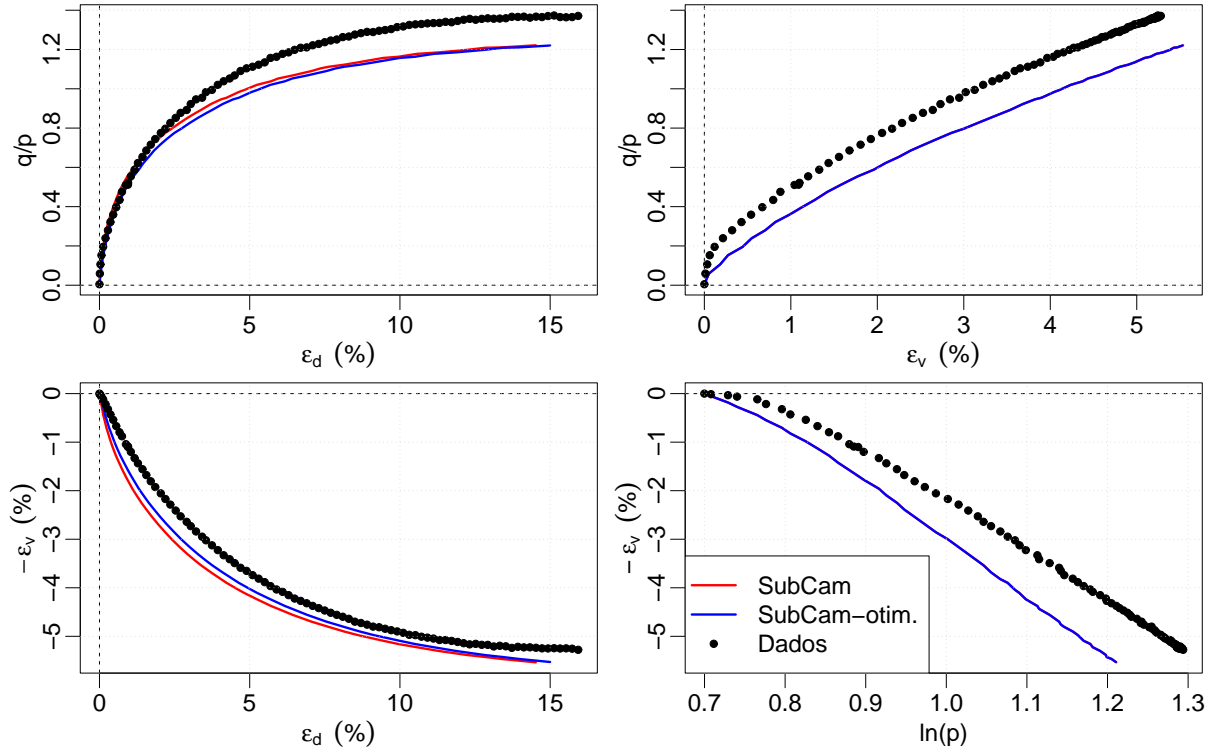
**Figura 12.9:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-06** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubCam**.



**Figura 12.10:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-07** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubCam**.



**Figura 12.11:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTR-01** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubCam**.



**Figura 12.12:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTR-02** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubCam**.

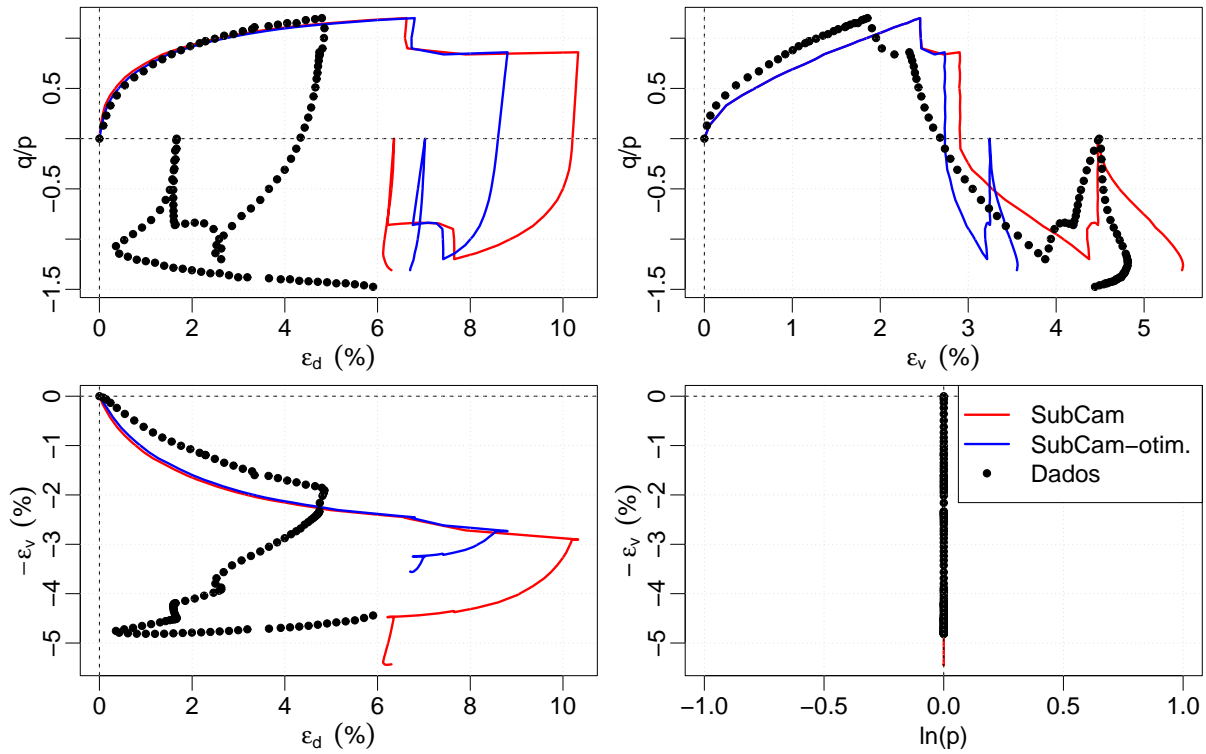


Figura 12.13: Resultados das simulações do ensaio FO1-TTX-01 com os parâmetros otimizados e o modelo SubCam.

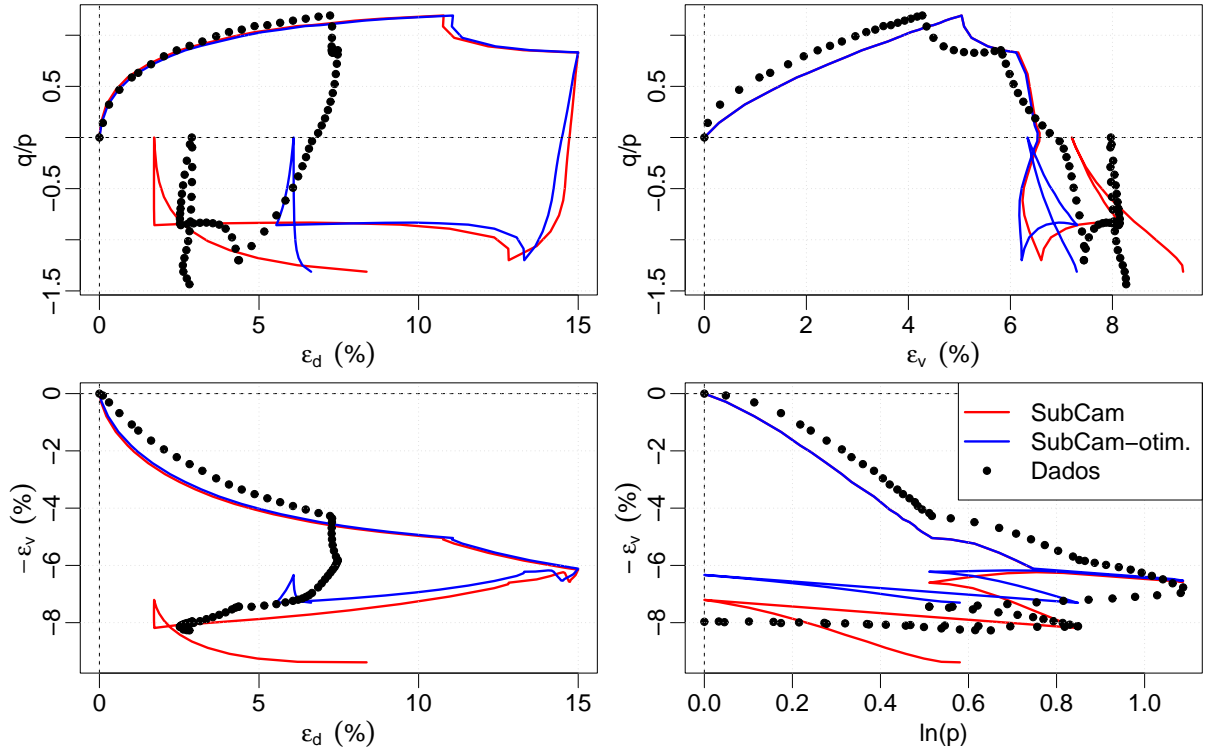
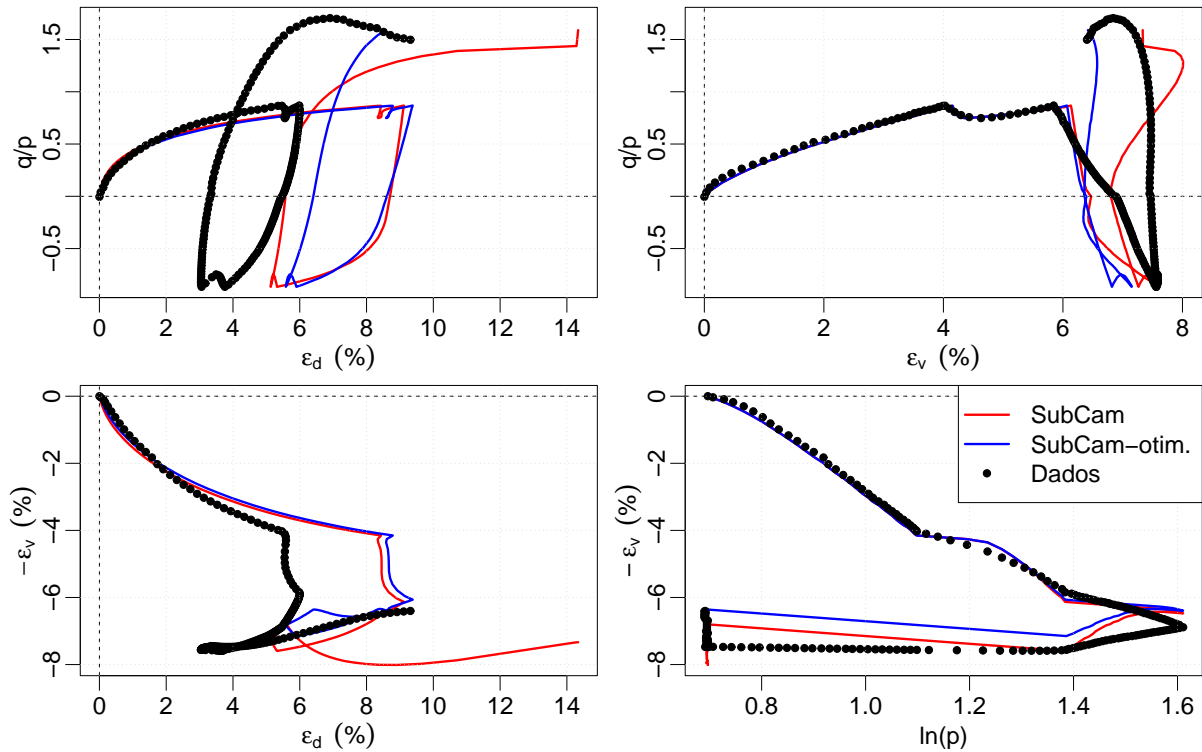


Figura 12.14: Resultados das simulações do ensaio FO1-TTX-02 com os parâmetros otimizados e o modelo SubCam.



**Figura 12.15:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-TTX-04** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubCam**.

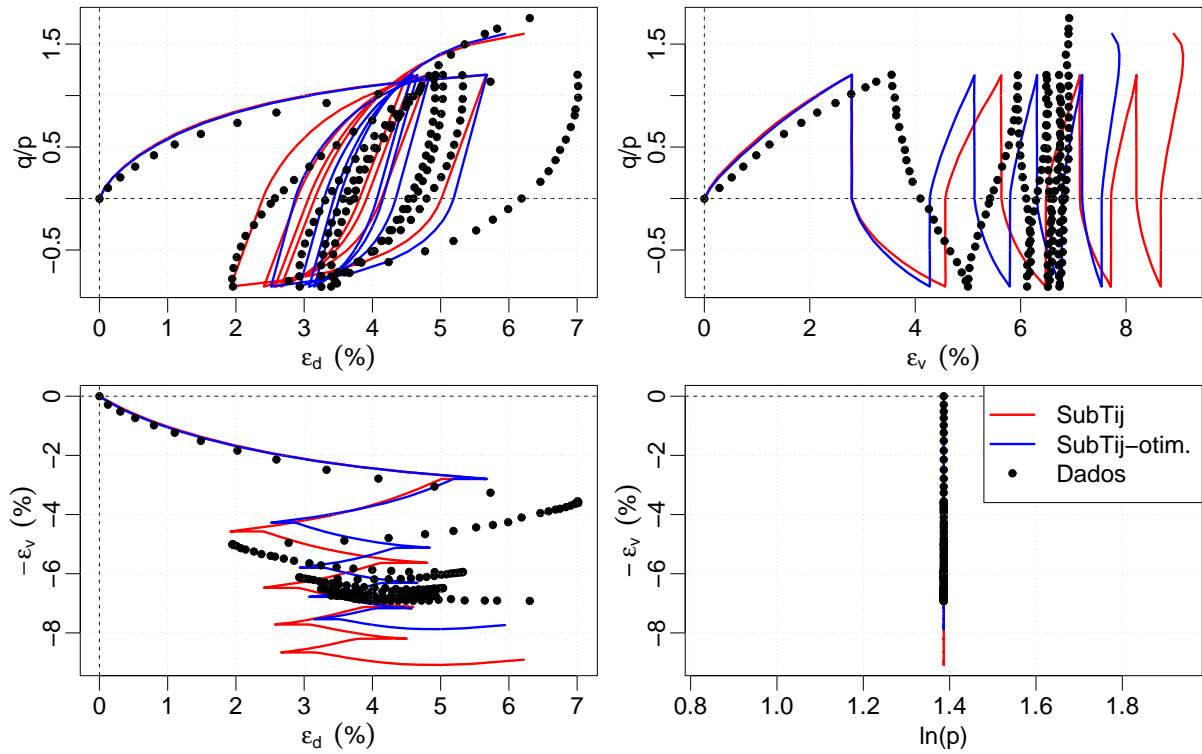
#### 12.4.2 SUBLOADING TIJ

Os parâmetros do modelo Subtij foram otimizados com o AGE. Os valores encontrados estão relacionados na Tabela 12.2, em que os parâmetros iniciais (Nakai & Hinokio, 2004) também são relacionados.

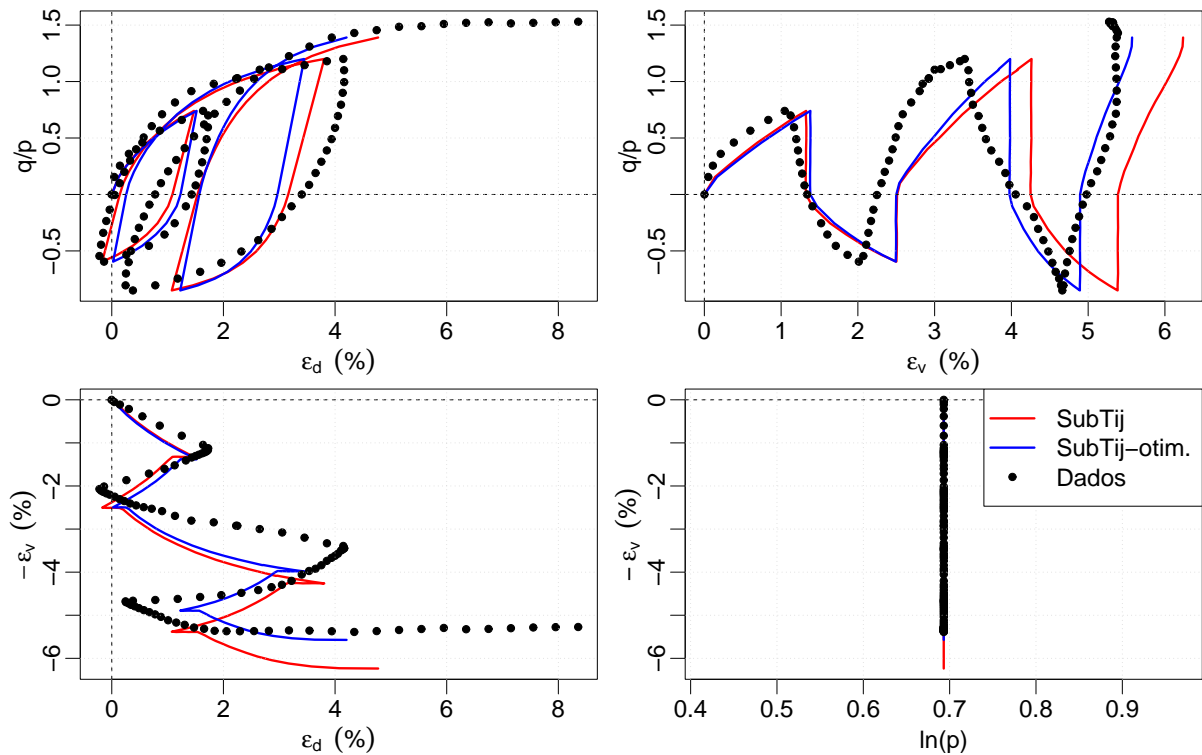
As Figuras 12.16 até 12.25 apresentam os resultados com simulações dos ensaios do Capítulo 4. As curvas na cor azul correspondem às simulações com os parâmetros otimizados. Verifica-se, em todos os gráficos, que a resposta do modelo Subtij, utilizando os parâmetros otimizados, é um pouco melhor do que a mesma obtida com os iniciais. Isso ocorre principalmente na representação do comportamento volumétrico.

**Tabela 12.2:** Parâmetros originais e otimizados para a argila Fujinomori e o modelo **Subtij**.

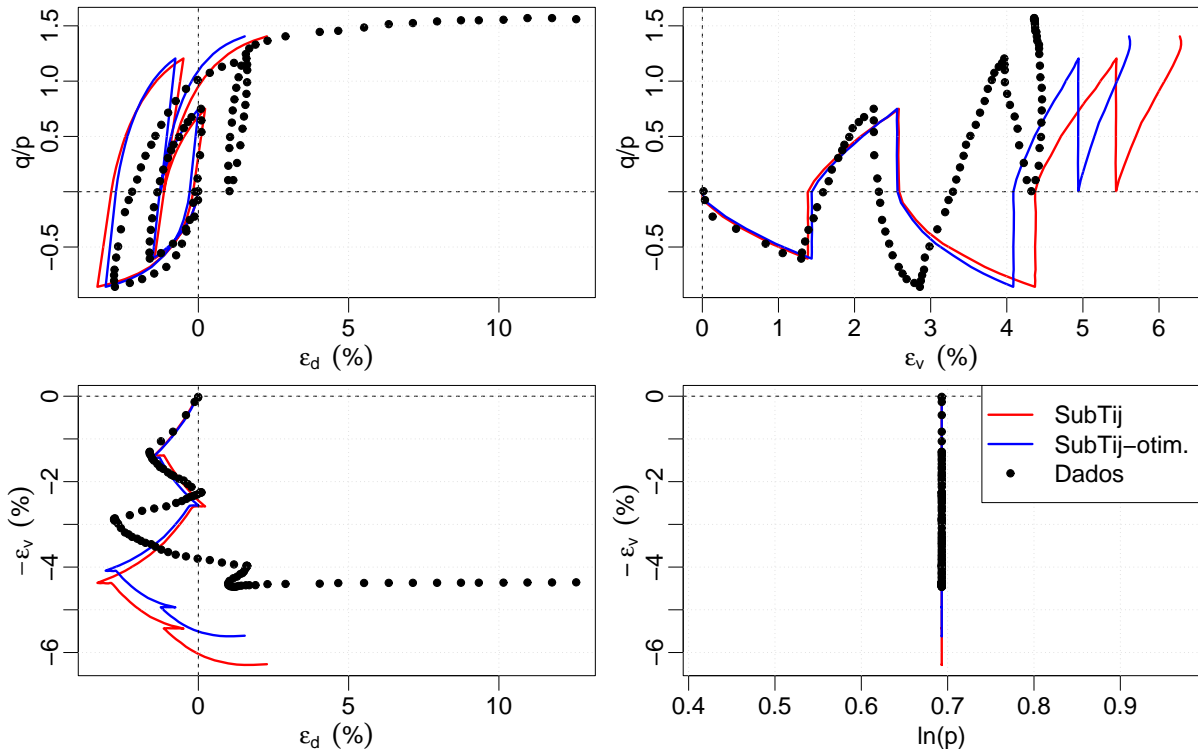
|                       | $\lambda$ | $\kappa$ | $\nu$ | $R_{CS}$ | $\beta$ | $c$ |
|-----------------------|-----------|----------|-------|----------|---------|-----|
| Parâmetros iniciais   | 0.0891    | 0.0196   | 0.20  | 3.50     | 1.50    | 500 |
| Parâmetros otimizados | 0.0780    | 0.0140   | 0.21  | 3.50     | 1.43    | 880 |



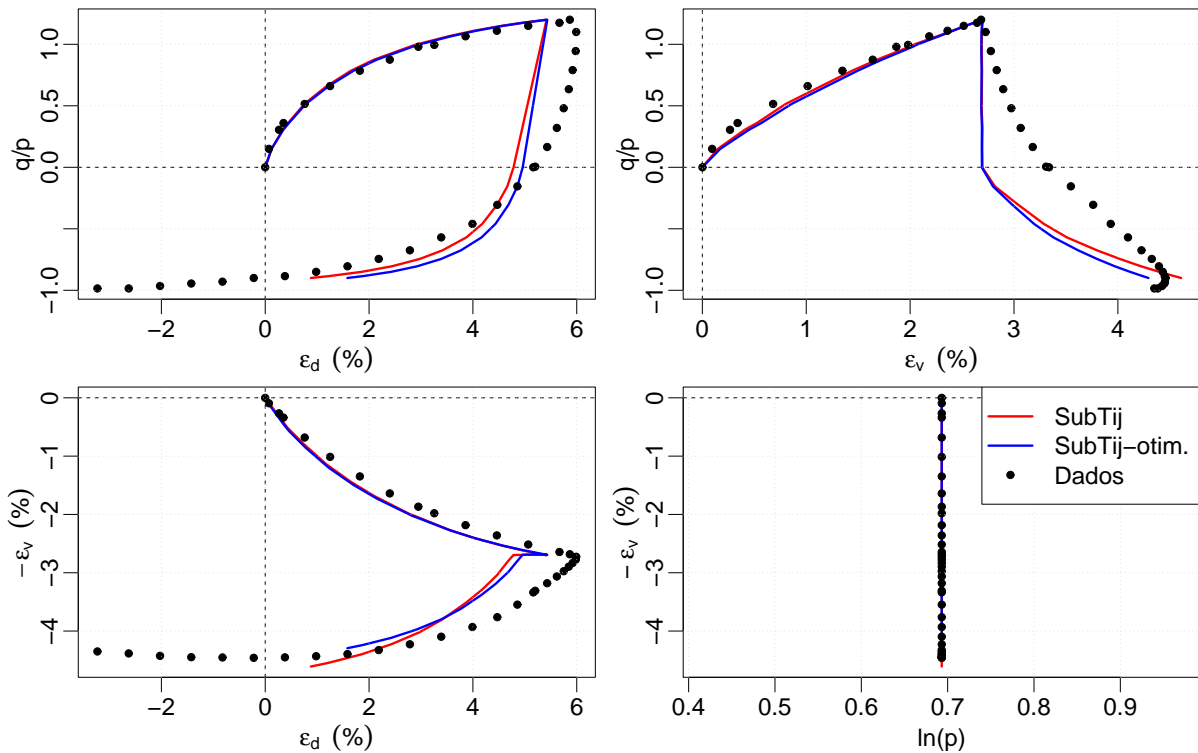
**Figura 12.16:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-01** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubTij**.



**Figura 12.17:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTP-02** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubTij**.

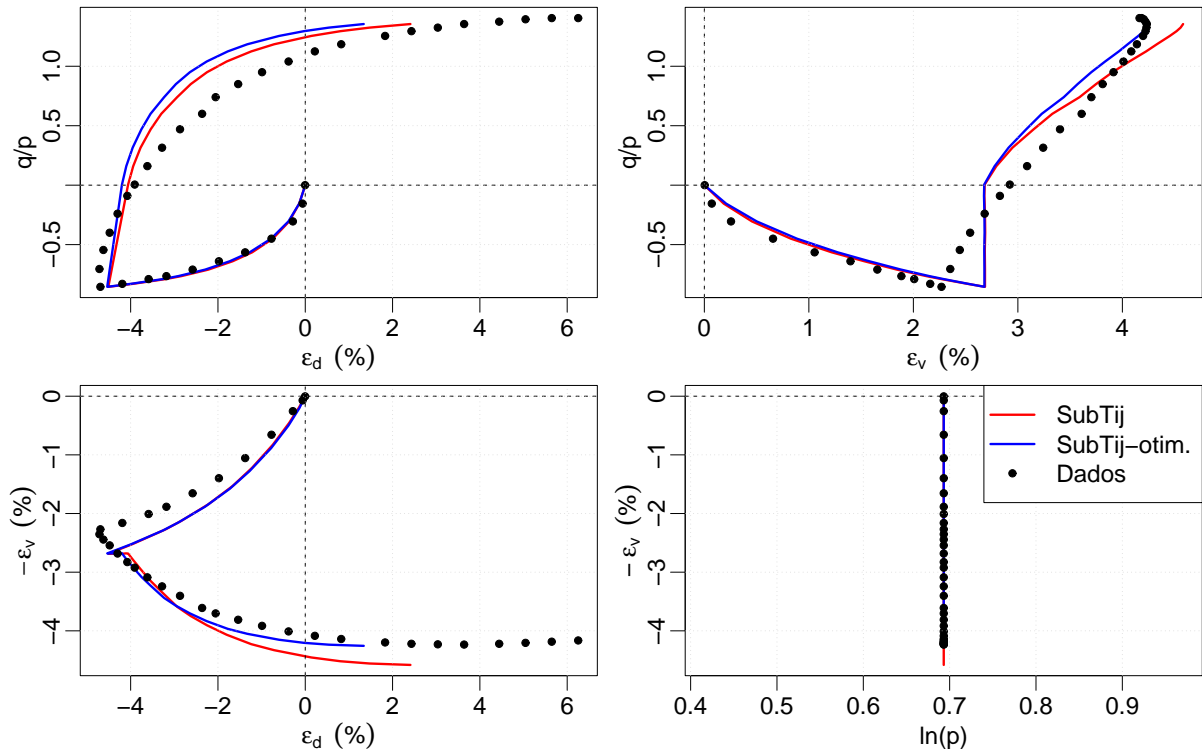


**Figura 12.18:** Resultados das simulações do ensaio FO1-CTP-03 com os parâmetros otimizados e o modelo SubTij.

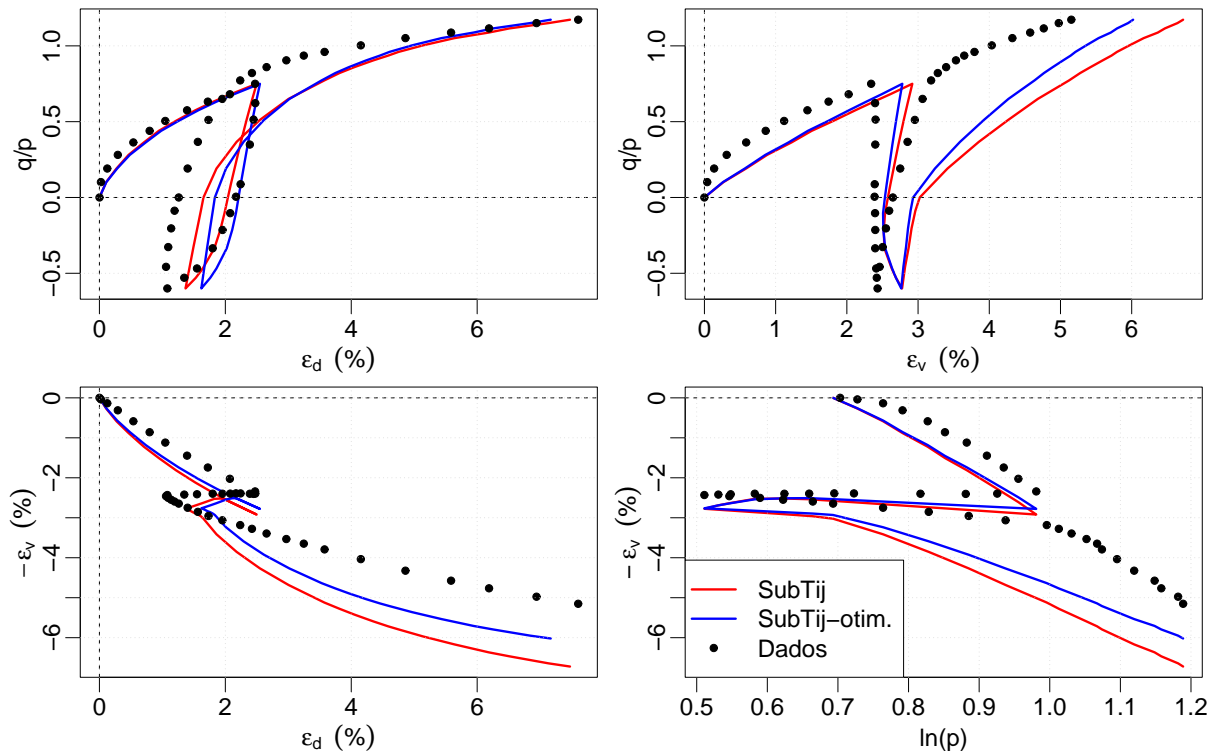


**Figura 12.19:** Resultados das simulações do ensaio FO1-CTP-06 com os parâmetros otimizados e o modelo SubTij.

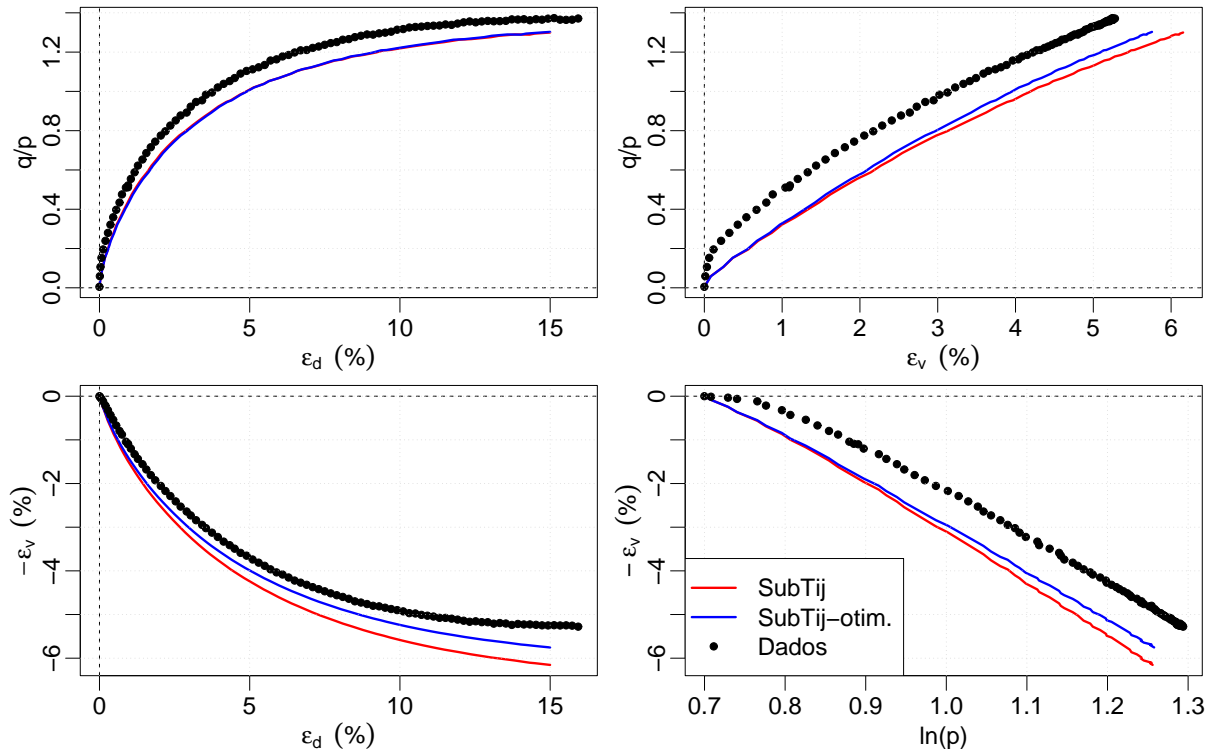




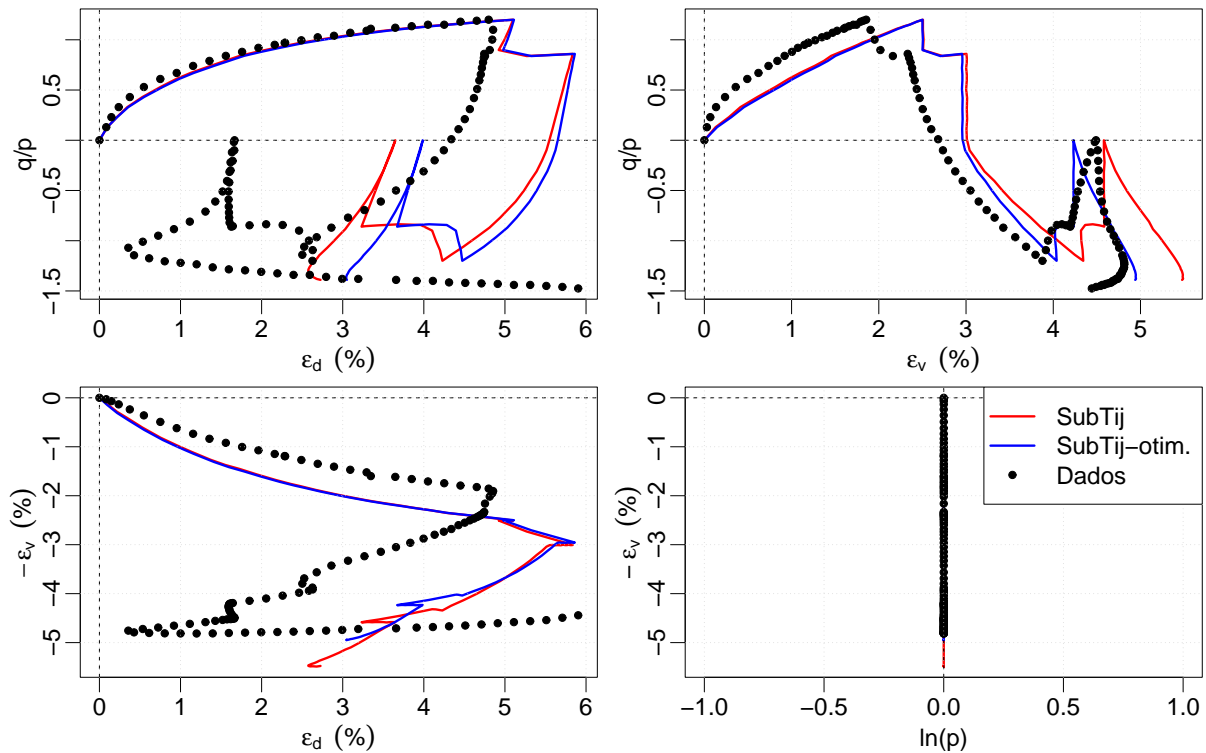
**Figura 12.20:** Resultados das simulações do ensaio FO1-CTP-07 com os parâmetros otimizados e o modelo SubTij.



**Figura 12.21:** Resultados das simulações do ensaio FO1-CTR-01 com os parâmetros otimizados e o modelo SubTij.



**Figura 12.22:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-CTR-02** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubTij**.



**Figura 12.23:** Resultados das simulações do ensaio **FO1-TTX-01** com os parâmetros otimizados e o modelo **SubTij**.

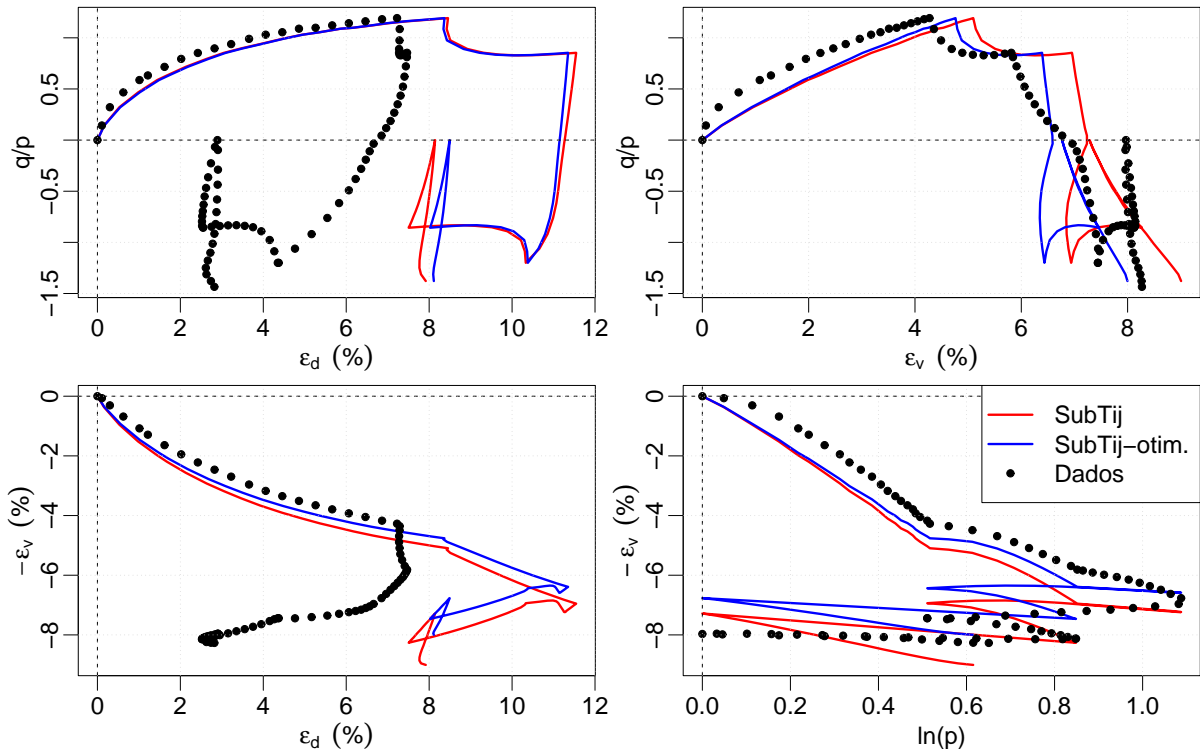


Figura 12.24: Resultados das simulações do ensaio FO1-TTX-02 com os parâmetros otimizados e o modelo SubTij.

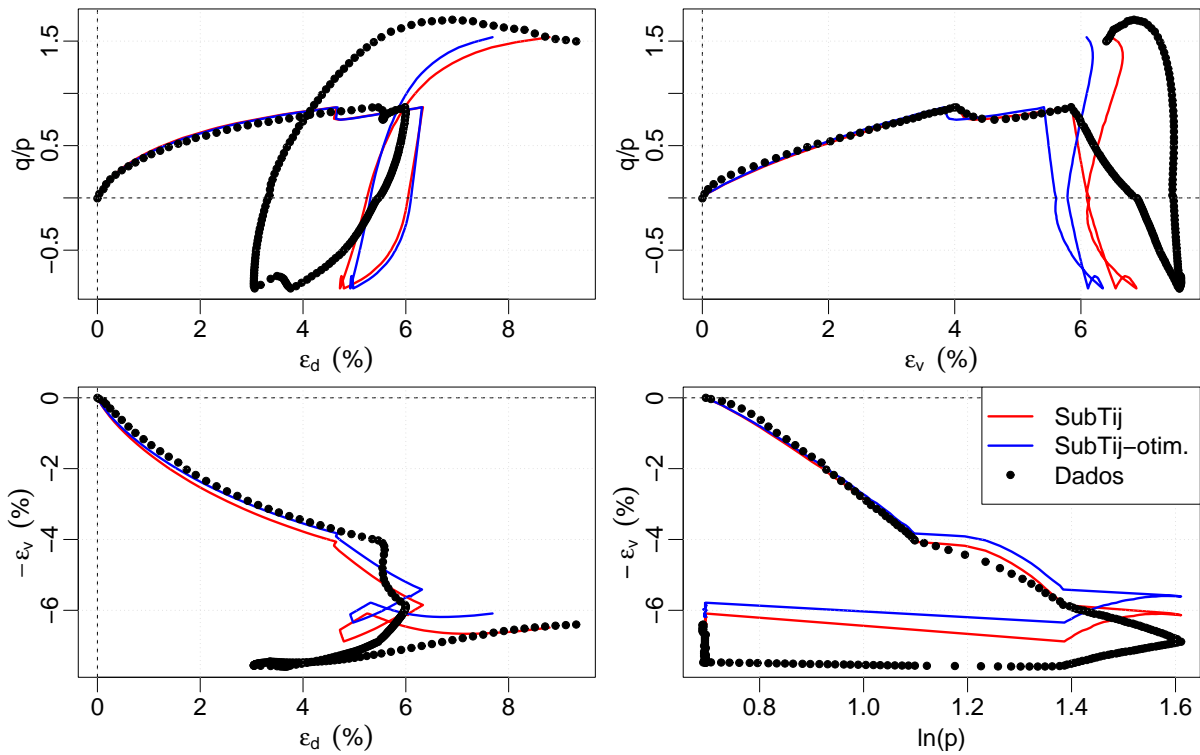


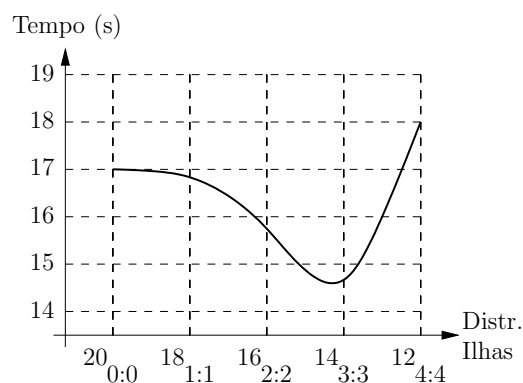
Figura 12.25: Resultados das simulações do ensaio FO1-TTX-04 com os parâmetros otimizados e o modelo SubTij.

## 12.5 CONCLUSÕES

O AGE é bastante robusto; procura em um espaço teoricamente infinito e, além disso, naturalmente em paralelo. Como exemplo, cita-se um problema típico proposto aos AGEs: encontrar uma fila (string) de 35 caracteres com apenas letras minúsculas e espaços. Como existem 27 caracteres, a solução terá  $27^{35}$  possibilidades, o que levaria muito tempo para ser resolvido tradicionalmente (sequencialmente).

Com o intuito de aumentar a diversidade de indivíduos e, então, aumentar a dimensão do espaço de procura, foi aplicado o conceito de ilhas. Estas servem para separar populações que evoluem isoladamente, umas das outras, e a cada intervalo de migração, alguns indivíduos são escolhidos aleatoriamente para migrarem de uma ilha a outra. Este procedimento amplia o espaço de procura e possibilita o aumento da convergência das simulações. Em primeira análise, a adoção de ilhas é vista como uma condição necessária para a convergência. A migração poderá ser ordenada, por exemplo, da ilha 1 para 2, da ilha 2 para 3 e assim sucessivamente, ou poderá acontecer de forma aleatória. Nos testes realizados, essa última foi mais adequada.

O AGE pode ser melhorado, tanto em eficiência quanto em quantidade de memória disponível às simulações, por meio da distribuição das ilhas a diferentes processadores, pertencentes a um agrupamento (“cluster”) de máquinas, de acordo com o conceito de programação em paralelo. Esse método foi aplicado ao problema da determinação de parâmetros, utilizando três computadores com um processador, cada. Por exemplo, num dos testes realizados: um computador (Intel PIV 2.4GHz) recebeu 14 ilhas, outro (Intel PIV 1.6GHz) 3 ilhas e, finalmente, outro (AMD Athlon 2000+) recebeu 3 ilhas. Essa distribuição desigual deve-se ao fato de cada máquina possui capacidade de processamento diferente (“cluster” heterogêneo). Com esta distribuição, a velocidade aumentou um pouco (Figura 12.26). A defasagem relativamente alta entre as máquinas obriga a definição diferencial da distribuição de ilhas, geralmente por tentativa-e-erro. Talvez com equipamentos mais homogêneos esse estudo poderia ser facilitado.



**Figura 12.26:** Distribuição de ilhas para três processadores. Os abcissas representam a distribuição de ilhas, por exemplo,  $14_{3:3}$  indica 14 ilhas para o processador mais rápido (PIV 2.4GHz) e 3 ilhas para os demais.

# Capítulo 13

## CONCLUSÕES

Modelos elastoplásticos podem ser úteis na simulação do comportamento monotônico e cíclico de materiais granulares saturados ou parcialmente saturados, mesmo com as limitações adotadas, como a teoria do contínuo e pequenas deformações. A metodologia empregada para isso é a observação fenomenológica macroscópica dos fenômenos e formulação matemática de relações entre medidas de estado e variáveis internas. As medidas de estado devem ser invariantes, com relação ao observador, e as variáveis internas são controles internos de cada modelo matemático que visam, simplificada, representar aspectos microscópicos dos materiais.

Para a definição da resistência ao cisalhamento de materiais granulares vários critérios de ruptura existem. Aqueles que consideram a influência da tensão principal intermediária parecem ser mais adequados. Dentre estes destacam-se o critério de Matsuoka-Nakai e Lade-Duncan. O primeiro pode ser simplificada considerando nas formulações mediante a equação de variação da inclinação  $M$  em função ao ângulo de Lode. Um novo critério cujo resultado é próximo ao do critério Lade-Duncan foi proposto. Um novo critério para materiais com anisotropia induzida e inerente também foi introduzido. O conceito de tensores projetores foi essencial para a derivação destes critérios.

O modelo Subloading Cam clay é útil em análises simplificadas de solos ou outros materiais granulares sujeitos a carregamentos cíclicos. Esse modelo também permite facilitar o entendimento do conceito de subcarregamento, mediante a análise das variáveis internas  $z_0$  e  $z_1$  que controlam, respectivamente, os tamanhos das superfícies de subplastificação e normal. A apresentação explícita dessas variáveis facilita a adoção de métodos de integração numérica. Por exemplo, cita-se o emprego dos esquemas explícitos que auto-detectam o tamanho das divisões dos passos. A principal característica do modelo SubCam é a simulação do ganho de rigidez após ciclos de carregamento-descarregamento. Essa característica permite, assim, a simulação da variação do estado de densificação e/ou pré-adensamento.

As equações para o modelo Subloading  $t_{ij}$  (Sub $t_{ij}$ ), que formam o DAS correspondente, podem ser colocadas no mesmo arcabouço usado para o desenvolvimento de modelos

---

elastoplásticos convencionais. Para isso, as variáveis internas devem ser explicitamente indicadas, em termos de variáveis do tipo tensão e tipo deformação. A definição da deformação de subplastificação, correspondente a medida de densificação  $\rho$  de Nakai & Hinokio (2004), é bastante útil no entendimento e derivação das equações. O sistema DAS pode ser resolvido por esquemas explícitos e/ou implícitos. Estes últimos são mais lentos devido ao cálculo, um tanto quanto complicado, dos gradientes de segunda ordem.

O modelo Barcelona Basic Model (BBM) é bastante simples e capaz de simular certas características dos solos parcialmente saturados. A desvantagem, do ponto de vista de implementação computacional, da formulação apresentada por Alonso et al. (1990) é a definição de duas superfícies de plastificação no espaço das tensões/sucção. No entanto estas devem ter evolução acoplada e podem ser transformadas numa única superfície como apresentado pelo modelo BarcelonaX. Para isso a definição de um parâmetro ( $B$ ) adicional é realizada. O modelo BarcelonaX tem as mesmas características do modelo Barcelona original, entretanto, com relação a resistência, possui uma melhor reprodutividade do comportamento mecânico, devido a consideração do critério de Matsuoka-Nakai, por meio da equação de Argyris-Sheng.

Para solos parcialmente saturados sujeitos a carregamentos cíclicos, um novo modelo, denominado Subloading Barcelona (SubBar) foi proposto. Este considera as mesmas equações do modelo BarcelonaX e o conceito de Subcarregamento de Hashiguchi & Ueno (1977), como foi aplicado na criação do modelo Subloading Cam-clay (SubCam). Seu equacionamento é bastante simples e pode ser usado na definição do mesmo DAS genérico da teoria matemática da elastoplasticidade. Portanto, a integração numérica da relação constitutiva pode ser facilmente realizada com os esquemas de integração de passos automáticos. A principal adição deste modelo, com relação ao modelo BarcelonaX, é a capacidade de reprodução do aumento da flexibilidade devido a ciclos de aumento-diminuição de sucção e tensões. Para isso, dois parâmetros constitutivos devem ser obtidos:  $c_0$ , que controla o decaimento da flexibilidade para ciclos de tensão e  $c_s$ , que controla o decaimento da flexibilidade para ciclos de sucção. O modelo SubBar é capaz de representar a transição suave entre regime elástico e elastoplástico e tem potencial aplicação a simulações cíclicas de materiais parcialmente saturados.

Os esquemas de integração estudados podem ser aplicados para modelos com uma, duas, ou mais superfícies de plastificação. Para isso, é essencial a definição das variáveis internas. Ressalta-se que estas devem ser integradas ao mesmo tempo que a relação tensão-deformação-sucção. O esquema automático Modified-Euler é extremamente versátil e fácil de implementação, tanto para modelos para solos saturados quanto para modelos para solos não saturados. Além disso, o controle de erro local, mediante a definição da constante *STOL* simplifica bastante o procedimento de simulação, evitando as tentativas-e-erro, livrando o usuário da difícil tarefa de determinação do número de passos necessários à integração numérica. Para o modelo Subloading tij, o tamanho do passo inicial, controlado

por  $\Delta T_{ini}$ , deve ser menor que 1, pois este modelo não aceita tentativas que causem estados de tensão longe da condição estável (isotrópica de compressão). Isso se deve ao fato de que as equações do modelo Subtij contêm termos com divisão pelas raízes quadradas das tensões principais. Assim, tensões próximas de zero ou negativas causam instabilidades nos programas de cálculo. A integração das equações de todos modelos, incluindo os modelos BarcelonaX e SubBar para solos não saturados foi apresentada. Novamente, os mesmos esquemas de passos variáveis podem ser usados.

A determinação dos parâmetros constitutivos de modelos mais elaborados pode ser um tanto complicada. Por exemplo, os modelos com subcarregamento necessitam a definição das constantes  $c$ ,  $c_0$  e  $c_s$  que controlam a taxa de variação da flexibilidade com relação aos ciclos. Para isso, métodos de tentativa-e-erro, comparando a reposta global das simulações com resultados de laboratório, para várias trajetórias e ensaios, geralmente são realizados. Com o intuito de facilitar o procedimento de obtenção e otimização destes parâmetros, de forma automática, desenvolveu-se uma método que usa o Algoritmo Genético Evolucionário (AGE). Este AGE deve ser configurado com resultados de vários resultados de laboratório, para que os parâmetros obtidos/otimizados sejam válidos para simulações nas quais indeterminadas trajetórias de tensão-deformação-sucção possam ocorrer. Cada conjunto de parâmetros corresponde a um fenótipo, que, por sua vez, corresponde a uma medida da qualidade de reprodução do modelo matemático (função objetiva - “fitness”). Assim, no cálculo desta qualidade, para cada conjunto de trajetórias, cíclicas ou não, para cada indivíduo e para cada ilha de indivíduos, inúmeras simulações numéricas devem ser realizadas. Com isso, o programa de otimização pode demandar grande capacidade de processamento, tendo em vista a grande quantidade de conjunto de parâmetros, ou indivíduos, que devem ser processados. Portanto, para aumentar a eficiência desta metodologia, pode-se adotar a programação em paralelo, que permite a distribuição de ilhas para processadores diferentes num agrupamento (cluster) de máquinas. Desta forma, a eficiência é aumentada enormemente, permitindo a procura por parâmetros em espaços de infinitas dimensões, em paralelo. Os parâmetros para os modelos apresentados neste trabalho foram otimizados, resultando em valores que permitem uma reprodução do comportamento mecânico de materiais granulares com qualidade.

## 13.1 SUGESTÕES

Embora os modelos apresentados consideram a teoria das pequenas deformações, eles permitem simulações de certas características não-lineares de materiais granulares. Provavelmente, a consideração das grandes deformações permitirá aos modelos uma linearização de suas equações evolutivas, compensando a não-linearidade geométrica introduzida pela teoria cinemática. Assim, para pesquisa futura, sugere-se o estudo por modelos que considerem a teoria das grandes deformações e que possam ser acoplados ao conceito de

subcarregamento e variáveis internas.

Materiais granulares consistem de grãos e vazios, portanto seu comportamento micromecânico é inerentemente descontínuo e heterogêneo. Para ser possível entender o comportamento microscópico dos materiais granulares, deve-se especificar tanto a distribuição espacial como a orientação dos grãos além de ser necessário avaliar as condições dos contatos entre as partículas. Com isso, outra extensão que se pode fazer aos modelos estudados é a adoção dos conceitos da Mecânica dos Materiais Granulares (Oda & Iwashita, 1999). Esta teoria permite formular o comportamento macroscópico em função de micro-quantidades. A teoria de média de campo e de homogenização são fundamentais na ligação dos campos macro e microscópicos. A Mecânica dos Materiais Granulares também considera alguns conceitos da Mecânica do Contínuo, como tensões e deformações, para que se possa formular, matematicamente, a representação dos materiais de forma consistente.

Com relação à solução do DAS da elastoplasticidade com subcarregamento, métodos Runge-Kutta de maior ordem poderão ser estudados. Dentre eles, os implícitos de segunda ordem poderiam ser pesquisados. Assim, métodos de detecção automática de passos com esquemas implícitos poderiam ser empregados. Sugere-se também a pesquisa pelas matrizes consistentes relativas aos esquemas de integração, para que, caso a solução global for feita pelo método Newton-Raphson, se possa obter melhor convergência. O desenvolvimento do método de integração implícita para os modelos BarcelonaX e SubBar também poderá ser pesquisado.

A solução de problemas de contorno e valor inicial pode ser feita pelo Método dos Elementos Finitos. Durante o processo de solução do sistema algébrico de equações diferenciais global, pode-se adotar vários esquemas de solução, como o Newton-Raphson e os algoritmos com determinação automática de passos. Assim, como pesquisa futura, sugere-se o estudo dos algoritmos de solução global aplicados a problemas de contorno com modelos constitutivos desta tese.



# Referências Bibliográficas

- Ahadi, A. & Krenk, S. (2003). Implicit integration of plasticity models for granular materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192:3471–3488.
- Alonso, E. E., Gens, A., & Josa, A. (1990). A constitutive model for partially saturated soils. *Géotechnique*, 40(3):405–430.
- Argyris, J. H., Faust, G., Szimmat, J., Warnke, E. P., & Willam, K. J. (1974). Recent developments in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 28:42–75.
- Başar, Y. & Weichert, D. (2000). *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids: Fundamental Mathematical and Physical Concepts*. Springer, Berlin, Germany, 193 p.
- Belytschko, T., Liu, W. K., & Moran, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons, Chichester, England, 650 p.
- Borja, R. I. (1990). Cam-clay plasticity, part I: Implicit integration of elastoplastic constitutive relations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 78:49–72.
- Brannon, R. M. (2000). Geometrical interpretation of radial and oblique return methods. In *Plasticity 2000: The Eighth International Symposium on Plasticity and its Current Applications*. p. 30.
- Brannon, R. M. (2002a). *Curvilinear Coordinates in a Euclidean Space*. Internet: <http://www.me.unm.edu/~rbrannon/gobag.html>, Albuquerque, USA, 88 p.
- Brannon, R. M. (2002b). *Geometric Insight into Return Mapping Plasticity Algorithms*. Internet: <http://www.me.unm.edu/~rbrannon/gobag.html>, Albuquerque, USA, 59 p.
- Brannon, R. M. (2003a). *Functional and Structured Tensor Analysis for Engineers*. Internet: <http://www.me.unm.edu/~rbrannon/gobag.html>, Albuquerque, USA, 300 p.
- Brannon, R. M. (2003b). *Mohr's Circle and more circles*. Internet: <http://www.me.unm.edu/~rbrannon/gobag.html>, Albuquerque, USA, 76 p.
- Burden, R. L. & Faires, J. D. (2003). *Análise Numérica*. Pioneira Thomson Learning, São Paulo, SP, 736 p.
- Butcher, J. C. (1963). Coefficients for the study of runge–kutta integration processes. *J. Aust. Math. Soc.*, 3:185–201.
- Buttner, J. & Simeon, B. (2002). Runge-kutta methods in elastoplasticity. *Applied Numerical Mathematics*, 41:443–458.
- Cash, J. R. (1979). Diagonally implicit runge-kutta formulae with error estimates. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 24:293–301.
- Chowdhury, E. Q. (1994). *Shear Behavior of Clay under Monotonic and Cyclic Loading*. Master's thesis, Nagoya Institute of Technology, Nagoya, Japan, 157 p.
- Chowdhury, E. Q. (1998). *Elastoplastic Models for Clays Under Monotonic and Cyclic Loading Using Conventional and Modified Stresses*. Ph.D. thesis, Nagoya Institute of Technology, Nagoya, Japan, 190 p.
- Chowdhury, E. Q. & Nakai, T. (1998). Consequences of the tij-concept and a new modeling approach. *Computer and Geotechnics*, 23:131–164.

- Collins, I. F. & Houlsby, G. T. (1997). Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials. *Proc. Royal Society London*, 453:1975–2001.
- Cordão-Neto, M. P. (2005). *Análise hidro-mecânica de barragens de terra construídas com materiais colapsíveis*. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 152 p.
- Dafalias, Y. F. & Popov, E. P. (1975). A model of nonlinearly hardening materials for complex loading. *Acta Mechanica*, 21:173–192.
- Desai, C. S. (1980). A general basis for yield, failure and potential functions in plasticity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 4:361–375.
- Ellsiepen, P. & Hartmann, S. (2001). Remarks on the interpretation of current non-linear finite element analyses as differential-algebraic equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:679–707.
- Farias, M. M. (1993). *Numerical Analysis of Clay Core Dams*. Ph.D. thesis, University College of Swansea, Swansea, United Kingdom, 159 p.
- Farias, M. M. (1997). Integração da relação tensão-deformação para modelos elastoplásticos. In *XVII CILAMCE - Congresso Íbero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*. Brasília, DF, p. 1393–1400.
- Farias, M. M., Nakai, T., Hinokio, M., Shahin, H., & Pedroso, D. M. (2003). Prediction of the densification process of compacted sandpiles using sub-loading tij model. In *International Workshop on Prediction and Simulation Methods in Geomechanics*. Athens, Greece, p. 14–15.
- Farias, M. M., Nakai, T., Shahin, H. M., Pedroso, D. M., Passos, P. G. O., & Hinokio, M. (2005). Ground densification due to sand compaction piles. *Soils and Foundations*, 45(2):167–180.
- Farias, M. M., Pinheiro, M., & Cordão-Neto, M. P. (2006). An elastoplastic model for unsaturated soils under three-dimensional conditions. *Soils and Foundations*, 46(5).
- Frank, J. (2005). *Numerical Methods for Initial Value Problems*. Internet site: <http://www.cwi.nl/~jason/numwisk/>, National Research Institute, Amsterdam, Holland.
- Fredlund, D. G. & Rahardjo, H. (1993). *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*. John Wiley and Sons, New York, USA, 517 p.
- Gear, C. W. (1971). *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 253 p.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Professional, USA, 432 p.
- Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 8, Berlin, Germany, 523 p.
- Hairer, E. & Wanner, G. (1996). *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 14, Berlin, Germany, 614 p.
- Hartmann, S. (2001). Runge-kutta-type integration schemes for inelastic constitutive equations. *COMMAS Summer School 2001 textbook: Computational Mechanics of Materials and Structures*, p. 39.
- Hartmann, S. (2003). Computational aspects of the symmetric eigenvalue problem of second order tensors. *Technische Mechanik*, p. 283–294.
- Haruyama, M. (1987). Effect of density on the drained deformation behavior of shirasu (volcanic sandy soil) under three-dimensional stresses. *Soils and Foundations*, 27(1):1–

- 13.
- Hashiguchi, K. (1989). Subloading surface model in unconventional plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 25(8):917–945.
- Hashiguchi, K. (2001). Description of inherent/induced anisotropy of soils: rotational hardening rule with objectivity. *Soils and Foundations*, 41(6):139–145.
- Hashiguchi, K. & Ueno, M. (1977). Elastoplastic constitutive laws of soils. In *Proc. 9th ICSMFE, Special Session 9*. Tokyo, p. 73–82.
- Hill, R. (1971). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, London, England, 355 p.
- Jeremić, B. & Sture, S. (1997). Implicit integrations in elasto-plastic geotechnics. *International Journal for Mechanics of Cohesive-Frictional Materials and Structures*, 2:165–183.
- Krieg, R. D. (1975). A practical two surface plasticity theory. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 42:641.
- Lade, P. V. & Duncan, J. M. (1973). Cubical triaxial tests on cohesionless soil. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division - ASCE*, 99(SM10):793–812.
- Macari, E. J., Hoyos, L. R., & Arduino, P. (2003). Constitutive modeling of unsaturated soil behavior under axisymmetric stress states using a stress/suction-controlled cubical test cell. *International Journal of Plasticity*, 19:1481–1515.
- Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 713 p.
- Martinez-Carvajal, H. E., Farias, M. M., & Pedroso, D. M. (2005). An artificial neural network model for the stress-strain relation of sands. In *IWS-Fortaleza - 2nd International Workshop in Computational Geotechnics*. Fortaleza, Brasil, p. 8.
- Martínez-Carvajal, H. E. (2006). *Modelagem Constitutiva de Areias Usando Redes Neurais Artificiais*. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 247 p.
- Matsuoka, H. (1974). Stress-strain relationships of clays based on the mobilized plane. *Soils and Foundations*, 14(2):77–87.
- Matsuoka, H. & Nakai, T. (1974). Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. In *Proc. JSCE*. p. 59–70.
- Matsuoka, H. & Nakai, T. (1977). Stress strain relationship of soil based on the smp. In *Proc. speciality session 9, 9th ICSMFE*. p. 153–162.
- Matsuoka, H. & Nakai, T. (1982). A new failure criterion of soils in three-dimensional stresses. In *Conference on deformation and failure of granular materials - IUTAM*. Delft, USA, p. 253–263.
- Matsuoka, H. & Nakai, T. (1985). Relationship among tresca, mises, mohr-coulomb and matsuoka-nakai failure criteria. *Soil and Foundations*, 25(4):123–128.
- Matsuoka, H. & Sun, D. (1995). Extension of spatially mobilized plane (smp) to frictional and cohesive materials and its application to cemented sands. *Soils and Foundations*, 35(4):63–72.
- Miehe, C. (1997). Comparison of two algorithms for the computation of fourth-order isotropic tensor functions. *Computers and Structures*, 66(1):37–43.
- Mróz, Z. (1967). On the description of anisotropic workhardening. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 15:163.
- Muir Wood, D. (1990). *Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*. Cambridge University Press, 486 p.
- Nakai, T. (1980). *Deformation and strength characteristics of soils and its application to deformation analysis of ground*. Ph.D. thesis, Kyoto University. In Japanese.

- Nakai, T. (1989). An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the stress path dependency in three-dimensional stresses. *Soils and Foundations*, 29(1):119–137.
- Nakai, T. & Hinokio, M. (2004). A simple elastoplastic model for normally and over consolidated soils with unified material parameters. *Soil and Foundations*, 44(2):12–30.
- Nakai, T. & Hoshikawa, T. (2001). Formulation of the influence of the density and the stress path dependency of plastic flow in sand. *Powders and Grains*, p. 217–221.
- Nakai, T. & Matsuoka, H. (1983). Shear behaviors of sand and clay under three dimensional stress condition. *Soil and Foundations*, 23(2):26–41.
- Nakai, T. & Matsuoka, H. (1986). A generalized elastoplastic constitutive model for clay in three-dimensional stresses. *Soil and Foundations*, 26(3):81–98.
- Nakai, T. & Mihara, Y. (1984). A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models. *Soil and Foundations*, 24(2):82–94.
- Ochiai, H. & Lade, P. V. (1983). Three-dimensional behavior of sand with anisotropic fabric. *Journal of Geotechnical Engineering - ASCE*, 109(10):1313–1328.
- Oda, M. & Iwashita, K. (1999). *Mechanics of Granular Materials: An Introduction*. A. A. Balkema, Rotterdam, Netherlands, 383 p.
- Pedroso, D. M. (2002). *Modelos Elastoplásticos para Solos Argilosos: Capacidade de Previsão de Comportamento e Integração da Relação Constitutiva*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 171 p.
- Pedroso, D. M. & Farias, M. M. (2002a). Comparação entre esquemas de integração numérica implícitos com explícitos de passos variáveis aplicados ao modelo cam-clay. In *Geotecnia Patagônia 2002. XVI Congreso Argentino de Mecánica de Suelos e Ingenieria Geotécnica*. Chubut, Argentina.
- Pedroso, D. M. & Farias, M. M. (2002b). Direct determination and numerical integration of the elastoplastic constitutive relation for tij-clay model. In *New Fontiers in Computational Geomechanics, IWS Calgary*. Calgary, Canada, p. 17–26.
- Pedroso, D. M. & Farias, M. M. (2003). Comparison between cam-clay and tij-clay elastoplastic models for the simulation of the mechanical behavior of clays under three-dimensional stress states. In *Proc. of 12th Panamerican Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*. Cambridge, USA.
- Pedroso, D. M. & Farias, M. M. (2005). Implicit and explicit numerical integration schemes applied to elastoplastic constitutive laws for soils. In *IWS-Fortaleza - 2nd International Workshop in Computational Geotechnics*. Fortaleza, Brasil, p. 13.
- Pedroso, D. M., Farias, M. M., & Nakai, T. (2005). An interpretation of subloading tij model in the context of conventional elastoplasticity theory. *Soils and Foundations*, 45(4):61–78.
- Pinheiro, M. S. (2004). *Tij-unsat: Um Novo Modelo Elastoplástico para Solos não-Saturados*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 191 p.
- Roscoe, K. H., Schofield, A., & Wroth, C. P. (1958). On the yielding of soils. *Géotechnique*, 8:22–53.
- Schofield, A. & Wroth, P. (1968). *Critical State Soil Mechanics*. McGraw Hill, 218 p.
- Sheng, D. & Sloan, S. W. (2001). Load stepping schemes for critical state models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:67–93.
- Sheng, D., Sloan, S. W., Gens, A., & Smith, D. W. (2003a). Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. part i: Theory. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 27:745–765.
- Sheng, D., Sloan, S. W., & Yu, H. S. (2000). Aspects of finite element implementation of

- critical state models. *Computational Mechanics*, 26:185–196.
- Sheng, D., Smith, D. W., Sloan, S. W., & Gens, A. (2003b). Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. part ii: Verification and application. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 27:767–790.
- Simo, J. C. (1994). *Topics on the Numerical Analysis and Simulation of Plasticity*. Elsevier, USA, 315 p.
- Simo, J. C. & Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer, USA, 392 p.
- Sloan, S. W. (1987). Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:893–911.
- Sloan, S. W., Abbo, A. J., & Sheng, D. (2001). Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control. *Engineering Computations*, 18:121–154.
- Sloan, S. W. & Booker, J. R. (1992). Integration of tresca and mohr-coulomb constitutive relations in plane strain elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:163–196.
- Yoshimine, M. (2005). 3-d coulomb's failure criterion for various geomaterials. In *Second Japan-U.S. Workshop, Geomechanics II: Testing, Modeling and Simulation*. Kyoto, Japan.

# Apêndice A

## NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES

Utiliza-se a notação direta ou tensorial (ou de Gibbs) para facilitar o entendimento físico das equações. Para ajudar na procura pela ordem das entidades, utiliza-se um empilhamento de tils sob-posto aos símbolos das mesmas. O número de tils indica a ordem da entidade. As seguintes operações são definidas:

|                             |                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Vetor                       | $\underline{\underline{a}} = a_i \underline{\underline{e}}_i$                                                                                                                                                           |
| Vetor: produto interno      | $\underline{\underline{a}} \bullet \underline{\underline{b}} = a_i b_i = s$                                                                                                                                             |
| Vetor: norma Euclidiana     | $\ \underline{\underline{a}}\ _2 = \sqrt{\underline{\underline{a}} \bullet \underline{\underline{a}}}$                                                                                                                  |
| Produto Diádico (tensorial) | $(\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}}) \bullet \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}}(\underline{\underline{b}} \bullet \underline{\underline{c}})$                              |
| Produto Diádico (tensorial) | $\underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} = a_i b_j \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j$                           |
| Tensor de segunda ordem     | $\underline{\underline{A}} = A_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j$                                                                                                                    |
| 2ª ord.: produto interno    | $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = A_{ij} B_{ij} = S$                                                                                                                                             |
| 2ª ord.: norma Euclidiana   | $\ \underline{\underline{A}}\ _2 = \sqrt{\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}}$                                                                                                                        |
| Tensor de terceira ordem    | $\underline{\underline{M}} = M_{ijk} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k$                                                                               |
| Produto Diádico (tensorial) | $\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{A}} = a_i A_{jk} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k$                                          |
| Produto Diádico (tensorial) | $\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{a}} = A_{ij} a_k \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k$                                          |
| Tensor de quarta ordem      | $\underline{\underline{T}} = T_{ijkl} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k \otimes \underline{\underline{e}}_l$                                          |
| Produto Diádico (tensorial) | $(\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{C}})$                                          |
| Produto Diádico (tensorial) | $\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}} = A_{ij} B_{kl} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k \otimes \underline{\underline{e}}_l$   |
| Multiplicação de tensores   | $\underline{\underline{A}} \bullet \underline{\underline{B}} = A_{im} B_{mj} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j$                                                                           |
| Contração simples           | $\underline{\underline{A}} \bullet \underline{\underline{a}} = A_{im} a_m \underline{\underline{e}}_i$                                                                                                                  |
| Contração simples           | $\underline{\underline{a}} \bullet \underline{\underline{T}} = a_m T_{mijk} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k$                                        |
| Contração simples           | $\underline{\underline{M}} \bullet \underline{\underline{A}} = M_{ijm} A_{mk} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k$                                      |
| Contração simples           | $\underline{\underline{T}} \bullet \underline{\underline{A}} = T_{ijkm} A_{ml} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k \otimes \underline{\underline{e}}_l$ |
| Produto Diádico tipo-folha  | $\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}} = A_{ik} B_{jl} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k \otimes \underline{\underline{e}}_l$   |
| Produto Diádico tipo-palma  | $\underline{\underline{A}} \boxtimes \underline{\underline{B}} = A_{il} B_{jk} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k \otimes \underline{\underline{e}}_l$ |

Com essa notação, é fácil descobrir a ordem do resultado; para os produtos “dot” e “double-dot”: o número de tils de cada tensor (operando) é adicionado e cada ponto (“dot”)

reduz dois tils no resultado final. Assim, um ponto ( $\bullet$ ) reduz dois tils e dois pontos ( $\doteq$ ) reduzem quatro tils. Nos produtos diádicos, simbolizados por um (x) ou ( $\ast$ ) dentro de um círculo ou quadrado, a ordem final é simplesmente a soma do número de tils dos operandos.

É importante notar que no caso do produto diádico entre dois vetores, às vezes pode-se omitir o símbolo de diádico, resultando na forma compacta como por exemplo em:  $\underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}}$ .

A notação tensorial (ou de Gibbs) não apenas pode facilitar o entendimento das equações, mediante atribuição de conceitos mais físicos às entidades, mas também é independente do sistema de coordenadas, sendo válida até mesmo com coordenadas curvilíneas. Ao contrário, a notação indicial automaticamente considera um sistema de coordenadas Cartesianas com base ortonormal, e, portanto, não tem validade generalizada. Enquanto que a notação indicial trabalha com os componentes (Cartesianos) das entidades, a notação tensorial trabalha com a própria entidade. Por exemplo, a derivada dos componentes dos tensores com relação a outros componentes de outros tensores nem sempre é igual a derivada do primeiro tensor, com relação ao segundo.

## A.1 TENSORES DE QUARTA ORDEM ISOTRÓPICOS

Em um espaço tridimensional, a forma mais geral de um tensor de quarta ordem isotrópico é (em coordenadas cartesianas)

$$C_{ijkl} = \alpha(\delta_{ij}\delta_{kl}) + \beta(\delta_{ik}\delta_{jl}) + \gamma(\delta_{il}\delta_{jk}) \quad (\text{A.1})$$

que pode ser representado independentemente do sistema de coordenadas por

$$\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + \beta \underline{\underline{I}} \circledast \underline{\underline{I}} + \gamma \underline{\underline{I}} \boxtimes \underline{\underline{I}} \quad (\text{A.2})$$

Considerando as três combinações entres os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , os seguintes tensores podem ser definidos:

$$\underline{\underline{P}}^{iso} = 1/3 \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \quad (\text{A.3})$$

$$\underline{\underline{P}}^{symdev} = 1/2(\underline{\underline{I}} \circledast \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}} \boxtimes \underline{\underline{I}}) - 1/3 \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \quad (\text{A.4})$$

$$\underline{\underline{P}}^{skew} = 1/2(\underline{\underline{I}} \circledast \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{I}} \boxtimes \underline{\underline{I}}) \quad (\text{A.5})$$

em que os nomes *iso*, *symdev* e *skew* indicam o formato do tensor de segunda ordem, resultante de uma contração dupla entre um tensor de quarta ordem isotrópico e um tensor de segunda ordem. Por exemplo, dado um tensor qualquer, simétrico ou não,  $\underline{\underline{a}}$ , os seguintes tensores podem ser obtidos:

$$\begin{aligned} \text{iso } \underline{\underline{a}} &= \underline{\underline{P}}^{iso} : \underline{\underline{a}} &= \underline{\underline{a}}^{iso} &= \frac{\text{tr } \underline{\underline{a}}}{3} \underline{\underline{I}} \\ \text{dev } \underline{\underline{a}} &= \underline{\underline{P}}^{symdev} : \underline{\underline{a}} &= \underline{\underline{a}}^{sym} - \underline{\underline{a}}^{iso} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{a}}^T) - \frac{\text{tr } \underline{\underline{a}}}{3} \underline{\underline{I}} \\ \text{skw } \underline{\underline{a}} &= \underline{\underline{P}}^{skew} : \underline{\underline{a}} &= \underline{\underline{a}}^{skew} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{a}} - \underline{\underline{a}}^T) \end{aligned}$$

# Apêndice B

## PROJEÇÃO E PROJETORES

Matematicamente, a operação de projeção é qualquer função  $P(\mathbf{x})$  para a qual

$$P(P(\mathbf{x})) = P(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1})$$

Ou seja, desde que a função  $P$  tenha sido aplicada, então aplicando-a novamente sobre o resultado não irá alterar esse resultado. Existem projeções de nível-1 que retornam o componente de um vetor  $\mathbf{x}$  na direção de outro vetor e de nível-2 que retornam o componente de um vetor  $\mathbf{x}$  em um plano dado. Esta última projeção é como achar a sombra de um vetor no plano; se o vetor já está no plano, sua sombra será ela mesmo.

Projeções podem ser lineares-ortogonais, lineares-obliquas ou não-lineares, entretanto aqui só será discutido projeções lineares-ortogonais.

Projeções lineares ortogonais (daqui em diante, projeções) fornecem os componentes de um vetor dado  $\mathbf{x}$  na direção paralela a outro vetor  $\mathbf{n}$  (projeção de nível-1) e no plano perpendicular a este último vetor (projeção de nível-2). A seguinte notação é considerada:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= P_n(\mathbf{x}) && \text{projeção (componente vetorial) de } \mathbf{x} \text{ paralela a } \mathbf{n} \\ \mathbf{q} &= Q_n(\mathbf{x}) && \text{projeção (componente vetorial) de } \mathbf{x} \text{ ortogonal a } \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Em duas dimensões, os vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , provenientes de uma projeção ortogonal, podem ser vistos com o auxílio da Figura B.1. Com auxílio daquela figura, facilmente se verifica que o vetor  $\mathbf{p}$  tem magnitude igual a  $\|\mathbf{x}\| \cos \theta_{xn}$ , em que  $\theta_{xn}$  é o ângulo formado entre os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  (ou  $\mathbf{n}$ ). Como  $\mathbf{p}$  é paralelo a  $\hat{\mathbf{n}}$ ,

$$\mathbf{p} = \|\mathbf{x}\| \cos \theta_{xn} \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{B.3})$$

em que  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n} / \|\mathbf{n}\|$ . Além disso, como,

$$\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \|\mathbf{x}\| \cos \theta_{xn} \quad (\text{B.4})$$

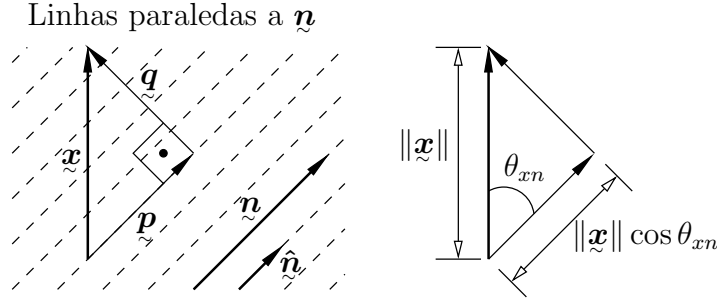
então,

$$\mathbf{p} = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{B.5})$$

e, considerando a adição de vetores  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ ,

$$\mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{p} = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{B.6})$$





**Figura B.1:** Projeção normal e ortogonal no plano (bidimensional)

Apesar de as Eqs. (B.5) e (B.6) terem sido deduzidas para a situação bidimensional, as mesmas são válidas no caso tridimensional (Figura B.2a). As funções de projeção de qualquer vetor na direção de outro vetor unitário  $\hat{\underline{n}}$  (ou  $\underline{n}$ ) será dada de acordo com:

$$\begin{aligned} P_n(\underline{x}) &= (\underline{x} \bullet \hat{\underline{n}})\hat{\underline{n}} = \underline{\underline{P}} \bullet \underline{x} \\ Q_n(\underline{x}) &= \underline{x} - (\underline{x} \bullet \hat{\underline{n}})\hat{\underline{n}} = \underline{\underline{Q}} \bullet \underline{x} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

que permite definir os seguintes tensores projetores:

$$\underline{\underline{P}} = \underline{n} \otimes \underline{n} \quad (\text{B.8})$$

e

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}} - \underline{n} \otimes \underline{n} \quad (\text{B.9})$$

Com isso, as projeções ortogonais  $\underline{p}$  e  $\underline{q}$  de  $\underline{x}$  poderão ser vistas como resultado das seguintes operações lineares:

$$\underline{p} = \underline{\underline{P}} \bullet \underline{x} \quad (\text{B.10})$$

e

$$\underline{q} = \underline{\underline{Q}} \bullet \underline{x} \quad (\text{B.11})$$

Considerando, agora, a projeção ortogonal segundo um vetor qualquer  $\underline{n}$ , não necessariamente unitário, como mostra a Figura B.2a, as seguintes expressões fornecem os vetores  $\underline{p}$  e  $\underline{q}$ :

$$\underline{p} = \left( \frac{\underline{x} \bullet \underline{n}}{\underline{n} \bullet \underline{n}} \right) \underline{n} = \frac{\underline{n} \otimes \underline{n}}{\underline{n} \bullet \underline{n}} \bullet \underline{x} = \underline{\underline{P}}_{nn} \bullet \underline{x} \quad (\text{B.12})$$

em que

$$\underline{\underline{P}}_{nn} = \frac{\underline{n} \otimes \underline{n}}{\underline{n} \bullet \underline{n}} \quad (\text{B.13})$$

e

$$\underline{q} = \underline{x} - \underline{p} = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}) \bullet \underline{x} = \underline{\underline{Q}}_{nn} \bullet \underline{x} \quad (\text{B.14})$$

em que

$$\underline{\underline{Q}}_{nn} = \underline{\underline{I}} - \frac{\underline{n} \otimes \underline{n}}{\underline{n} \bullet \underline{n}} \quad (\text{B.15})$$

nas quais o subscrito  $nn$  dos tensores  $\underline{\underline{P}}_{nn}$  e  $\underline{\underline{Q}}_{nn}$  indicam que a projeção é ortogonal segundo o vetor  $\underline{n}$ .

A projeção oblíqua  $\underline{q}$  de um vetor  $\underline{x}$  no plano de normal  $\underline{n}$ , segundo a direção de um vetor  $\underline{b}$  (Figura B.2b) é encontrada considerando que o resultado deverá satisfazer a

seguinte expressão:

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{q}} + \eta \underline{\boldsymbol{b}} \quad (\text{B.16})$$

em que  $\eta$  é um coeficiente que pode ser determinado com a condição de que os vetores  $\underline{\boldsymbol{n}}$  e  $\underline{\boldsymbol{q}}$  são perpendiculares entre si, ou seja,  $\underline{\boldsymbol{n}} \bullet \underline{\boldsymbol{q}} = 0$ . Assim, multiplicando escalarmente a Eq. (B.16) por  $\underline{\boldsymbol{n}}$ ,

$$\underline{\boldsymbol{x}} \bullet \underline{\boldsymbol{n}} = 0 + \eta \underline{\boldsymbol{b}} \bullet \underline{\boldsymbol{n}} \quad (\text{B.17})$$

que permite determinar  $\eta$ :

$$\eta = \frac{\underline{\boldsymbol{x}} \bullet \underline{\boldsymbol{n}}}{\underline{\boldsymbol{b}} \bullet \underline{\boldsymbol{n}}} \quad (\text{B.18})$$

Com isso,  $\underline{\boldsymbol{q}}$  será dado por:

$$\underline{\boldsymbol{q}} = \underline{\boldsymbol{x}} - \left( \frac{\underline{\boldsymbol{x}} \bullet \underline{\boldsymbol{n}}}{\underline{\boldsymbol{b}} \bullet \underline{\boldsymbol{n}}} \right) \underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{I}} - \frac{\underline{\boldsymbol{b}} \otimes \underline{\boldsymbol{n}}}{\underline{\boldsymbol{b}} \bullet \underline{\boldsymbol{n}}} \bullet \underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{Q}}_{bn} \bullet \underline{\boldsymbol{x}} \quad (\text{B.19})$$

em que

$$\underline{\boldsymbol{Q}}_{bn} = \underline{\boldsymbol{I}} - \frac{\underline{\boldsymbol{b}} \otimes \underline{\boldsymbol{n}}}{\underline{\boldsymbol{b}} \bullet \underline{\boldsymbol{n}}} \quad (\text{B.20})$$

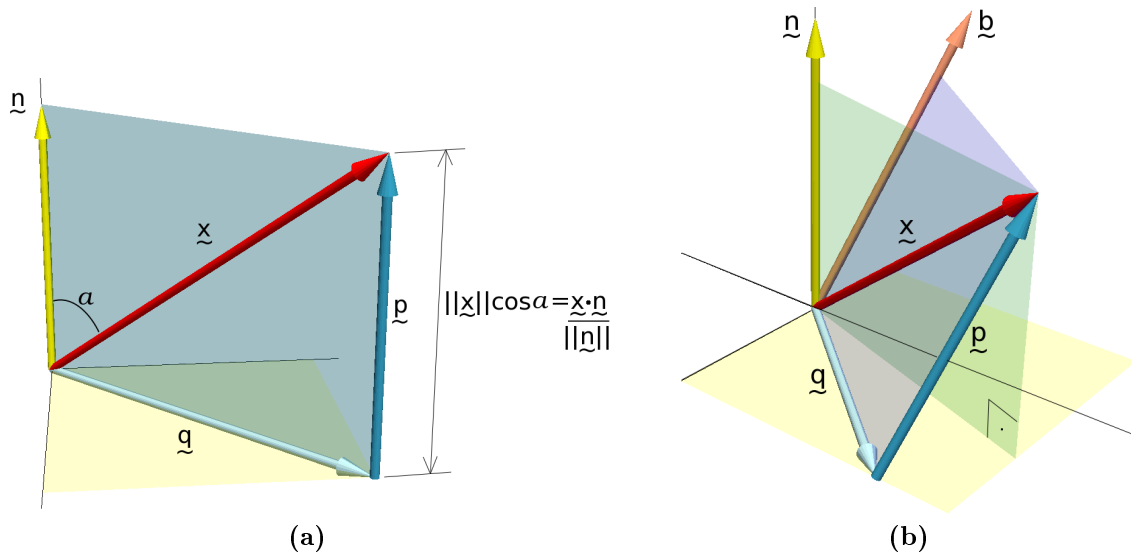
Com a diferença entre  $\underline{\boldsymbol{x}}$  e  $\underline{\boldsymbol{q}}$ , o vetor  $\underline{\boldsymbol{p}}$  poderá ser encontrado pela seguinte expressão:

$$\underline{\boldsymbol{p}} = \underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{q}} = \frac{\underline{\boldsymbol{b}} \otimes \underline{\boldsymbol{n}}}{\underline{\boldsymbol{b}} \bullet \underline{\boldsymbol{n}}} \bullet \underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{P}}_{bn} \bullet \underline{\boldsymbol{x}} \quad (\text{B.21})$$

em que

$$\underline{\boldsymbol{P}}_{bn} = \frac{\underline{\boldsymbol{b}} \otimes \underline{\boldsymbol{n}}}{\underline{\boldsymbol{b}} \bullet \underline{\boldsymbol{n}}} \quad (\text{B.22})$$

Nas Eqs. (B.21) e (B.19), o subscrito  $bn$  dos tensores  $\underline{\boldsymbol{P}}_{bn}$  e  $\underline{\boldsymbol{Q}}_{bn}$  indicam que a projeção oblíqua é segundo a direção do vetor  $\underline{\boldsymbol{b}}$ , no plano de normal  $\underline{\boldsymbol{n}}$ .



**Figura B.2:** Projeções ortogonal e oblíqua: (a) Projeção ortogonal; (b) Projeção oblíqua.

# Apêndice C

## AUTOTENSORES

Qualquer tensor de segunda ordem simétrico, por exemplo,  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , pode ser representado pela seguinte expressão:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_1 \hat{\mathbf{n}}_1 \otimes \hat{\mathbf{n}}_1 + \lambda_2 \hat{\mathbf{n}}_2 \otimes \hat{\mathbf{n}}_2 + \lambda_3 \hat{\mathbf{n}}_3 \otimes \hat{\mathbf{n}}_3 \quad (\text{C.1})$$

em que  $\lambda_k$  são os autovalores do tensor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}_k$  são os autovetores unitários de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ .

A Eq. (C.1) é conhecida por representação espectral de tensores de segunda ordem simétricos.

É possível definir o seguinte tensor de segunda ordem:

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_k = \hat{\mathbf{n}}_{(k)} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{(k)} \quad k: \text{ não somar} \quad (\text{C.2})$$

em que  $(k)$  indica que não se deve realizar o somatório para o índice  $k$ . Os três tensores  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_k$  são conhecidos por autoprojetores, autodiádes ou autobases (Brannon, 2003a, 2002b; Miehe, 1997). Neste documento, dá-se preferência ao termo autoprojetores, pois este ressalta as características de projetores dos tensores  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_k$  (Eq. C.3 e C.4).

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_i \bullet \underline{\underline{\mathbf{P}}}_j = \begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{P}}}_i & \text{se } i = j \\ \mathbf{0} & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{P}}}_2 + \underline{\underline{\mathbf{P}}}_3 = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (\text{C.4})$$

Com isso, a representação espectral pode ser re-escrita conforme:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{P}}}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{P}}}_2 + \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{P}}}_3 \quad (\text{C.5})$$

que, considerando a regra do somatório de Einstein,

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_k \underline{\underline{\mathbf{P}}}_k \quad (\text{C.6})$$

Os autoprojetores auxiliam bastante na modelagem constitutiva, pois possuem determinação analítica, útil na obtenção de derivadas relacionadas a tensores de segunda ordem simétricos. Além disso, funções isotrópicas, como a raiz quadrada de um tensor de segunda ordem simétrico, podem ser encontradas facilmente com a ajuda dos autoprojetores. Em contrapartida, os autovetores são calculados numericamente e, portanto, não possuem as mesmas vantagens que os autoprojetores.

## C.1 DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DOS AUTOVALORES E AUTOPROJETORES

Os autovalores podem ser obtidos analiticamente por intermédio da seguinte expressão (Başar & Weichert, 2000):

$$\lambda_k = \frac{1}{3} \left[ I_1 + \alpha \cos \left( \frac{\theta + 2\pi k}{3} \right) \right] \quad k=1,2 \text{ ou } 3 \quad (\text{C.7})$$

em que  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  é um tensor de segunda ordem simétrico qualquer,  $\lambda_k$  são os três autovalores do tensor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os invariantes característicos de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  e  $\alpha$  e  $\theta$  são dados pelas Eqs. (C.8) e (C.9), respectivamente.

$$\alpha = 2\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \quad (\text{C.8})$$

$$\theta = \arccos \left[ \frac{2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3}{2(I_1^2 - 3I_2)^{3/2}} \right] \quad (\text{C.9})$$

Considerando a existência de três autovalores distintos, os três autoprojetores  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_k$  podem ser calculados segundo a expressão:

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_k = \frac{\lambda_k}{2\lambda_k^2 - \lambda_k I_1 + \lambda_k^{-1} I_3} \left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} + (\lambda_k - I_1) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \lambda_k^{-1} I_3 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \right] \quad (\text{C.10})$$

No caso da existência de autovalores repetidos, a Eq. (C.10) permanece válida, entretanto, por motivos de instabilidade numérica, sugere-se a determinação dos três autoprojetores diferentes, entre si, por intermédio de uma perturbação do tensor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ .

## C.2 DERIVADAS DOS AUTOVALORES

Dado um tensor de segunda ordem simétrico  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  qualquer, com autovalores  $\lambda_k$ , as equações características relacionadas ao tensor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , para cada autovalor  $\lambda_k$ , podem ser expressas segundo:

$$\lambda_k^3 - I_1 \lambda_k^2 + I_2 \lambda_k - I_3 = 0 \quad (\text{C.11})$$

em que  $I_k$  são os invariantes característicos de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ .

Diferenciando-se as Eqs. (C.11), com relação ao tensor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , obtém-se:

$$3\lambda^2 \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \left( \lambda^2 \frac{dI_1}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} + 2I_1 \lambda \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right) + \left( \lambda \frac{dI_2}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} + I_2 \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right) - \frac{dI_3}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = 0 \quad (\text{C.12})$$

$$(3\lambda^2 - 2I_1 \lambda + I_2) \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \lambda^2 \frac{dI_1}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} + \lambda \frac{dI_2}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \frac{dI_3}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = 0 \quad (\text{C.13})$$

em que o índice  $k$  foi omitido por simplicidade.

Com isso,

$$\frac{d\lambda}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} = \frac{1}{3\lambda^2 - 2I_1\lambda + I_2} \left( \lambda^2 \frac{dI_1}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} - \lambda \frac{dI_2}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} + \frac{dI_3}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} \right) \quad (\text{C.14})$$

$$= \frac{\lambda^2 \underset{\approx}{\mathbf{I}} - \lambda I_1 \underset{\approx}{\mathbf{I}} + \lambda \underset{\approx}{\mathbf{A}} + I_3 \underset{\approx}{\mathbf{A}}^{-1}}{3\lambda^2 - 2I_1\lambda + I_2} \quad (\text{C.15})$$

$$= \frac{\lambda [(\lambda - I_1) \underset{\approx}{\mathbf{I}} + \underset{\approx}{\mathbf{A}} + I_3 \lambda^{-1} \underset{\approx}{\mathbf{A}}^{-1}]}{3\lambda^2 - 2I_1\lambda + I_2} \quad (\text{C.16})$$

$$= \frac{\lambda}{2\lambda^2 - \lambda I_1 + \lambda^{-1} I_3} [\underset{\approx}{\mathbf{A}} + (\lambda - I_1) \underset{\approx}{\mathbf{I}} + I_3 \lambda^{-1} \underset{\approx}{\mathbf{A}}^{-1}] \quad (\text{C.17})$$

$$= \underset{\approx}{\mathbf{P}} \quad (\text{C.18})$$

ou seja, as derivadas dos autovalores de um tensor de segunda ordem simétrico  $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$  são iguais aos autoprojetores correspondentes aos autovalores.

### C.3 DERIVADAS DOS AUTOPROJETORES

Dado um tensor de segunda ordem simétrico  $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$  qualquer, com autovalores  $\lambda_k$ , seus autoprojetores podem ser determinados analiticamente segundo a Eq. (C.10), que é reescrita abaixo, desconsiderando os índices  $k$ , com o intuito de simplicidade:

$$\underset{\approx}{\mathbf{P}} = \frac{\lambda}{\alpha} \left[ \underset{\approx}{\mathbf{A}} - (I_1 - \lambda) \underset{\approx}{\mathbf{I}} + \frac{I_3}{\lambda} \underset{\approx}{\mathbf{A}}^{-1} \right] \quad (\text{C.19})$$

em que

$$\alpha = 2\lambda^2 - I_1\lambda + \frac{I_3}{\lambda} \quad (\text{C.20})$$

Diferenciando a Eq. (C.19) com relação ao tensor  $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ ,

$$\frac{d\underset{\approx}{\mathbf{P}}}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} = \frac{d}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} \left\{ \frac{\lambda}{\alpha} \left[ \underset{\approx}{\mathbf{A}} - (I_1 - \lambda) \underset{\approx}{\mathbf{I}} + \frac{I_3}{\lambda} \underset{\approx}{\mathbf{A}}^{-1} \right] \right\} = \frac{d\beta \underset{\approx}{\mathbf{B}}}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} \quad (\text{C.21})$$

em que

$$\beta = \beta(\underset{\approx}{\mathbf{A}}) = \frac{\lambda}{\alpha} \quad (\text{C.22})$$

$$\underset{\approx}{\mathbf{B}} = \underset{\approx}{\mathbf{B}}(\underset{\approx}{\mathbf{A}}) = \left[ \underset{\approx}{\mathbf{A}} - (I_1 - \lambda) \underset{\approx}{\mathbf{I}} + \frac{I_3}{\lambda} \underset{\approx}{\mathbf{A}}^{-1} \right] \quad (\text{C.23})$$

Com isso,

$$\frac{d\underset{\approx}{\mathbf{P}}}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} = \frac{d\beta \underset{\approx}{\mathbf{B}}}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} = \underset{\approx}{\mathbf{B}} \otimes \frac{d\beta}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} + \beta \frac{d\underset{\approx}{\mathbf{B}}}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} \quad (\text{C.24})$$

A derivada de  $\beta$  com relação ao tensor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  é deduzida a seguir:

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} &= \frac{d}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \left( \frac{\lambda}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} + \lambda \frac{d\alpha^{-1}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \frac{\lambda}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}}\end{aligned}\quad (\text{C.25})$$

em que

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} &= \frac{d}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \left( 2\lambda^2 - I_1\lambda + \frac{I_3}{\lambda} \right) \\ &= 4\lambda \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \left( \lambda \frac{dI_1}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} + I_1 \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right) + \left( \frac{1}{\lambda} \frac{dI_3}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} + I_3 \frac{d\lambda^{-1}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right) \\ &= \left( 4\lambda - I_1 - \frac{I_3}{\lambda^2} \right) \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \lambda \frac{dI_1}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} + \frac{1}{\lambda} \frac{dI_3}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}}\end{aligned}\quad (\text{C.26})$$

A derivada de  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  com relação ao tensor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  pode ser obtida conforme:

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{\underline{\mathbf{B}}}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} &= \frac{d}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} - (I_1 - \lambda) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \frac{I_3}{\lambda} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \right] \\ &= \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \left( \frac{dI_1}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right) + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \otimes \frac{d}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \left( \frac{I_3}{\lambda} \right) + \frac{I_3}{\lambda} \frac{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \left( \frac{dI_1}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right) + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \otimes \left( \frac{1}{\lambda} \frac{dI_3}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \frac{I_3}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right) + \frac{I_3}{\lambda} \frac{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}}\end{aligned}\quad (\text{C.27})$$

Considerando a derivada do tensor inverso  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$  de um tensor de segunda ordem simétrico  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , dada pela Eq. (D.12), então, a derivada do tensor  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  com relação ao tensor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$\frac{d\underline{\underline{\mathbf{B}}}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \otimes \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 + \underline{\underline{\mathbf{B}}}_3 \quad (\text{C.28})$$

em que

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 &= \frac{dI_1}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 &= \frac{1}{\lambda} \frac{dI_3}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \frac{I_3}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_3 &= -\frac{I_3}{2\lambda} \left( \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \boxtimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \right)\end{aligned}\quad (\text{C.29})$$

Substituindo as Eqs. (C.29) na Eq. (C.27) e, então, substituindo o resultado e a Eq. (C.25) na Eq. (C.24), obtém-se a derivada dos autoprojetores do tensor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , com

relação a ele mesmo, segundo a expressão:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\approx k}}{d\mathbf{\sigma}_{\approx}} = \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \left( \mathbf{I}_{\approx}^{sym} - \frac{I_{3\sigma}}{\lambda_k} \mathbf{I}_{\approx\sigma^{-1}}^{sym} \right) + \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_j \left( \frac{I_{3\sigma}}{\lambda_k \lambda_j^2} - 1 \right) \mathbf{P}_j \otimes \mathbf{P}_j \quad (C.30)$$

em que  $\mathbf{I}_{\approx}^{sym}$  e  $\mathbf{I}_{\approx\sigma^{-1}}^{sym}$  são dados por

$$\mathbf{I}_{\approx}^{sym} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{\approx} \otimes \mathbf{I}_{\approx} + \mathbf{I}_{\approx} \boxtimes \mathbf{I}_{\approx}) \quad (C.31)$$

e

$$\mathbf{I}_{\approx\sigma^{-1}}^{sym} = \frac{1}{2} (\mathbf{\sigma}^{-1} \otimes \mathbf{\sigma}^{-1} + \mathbf{\sigma}^{-1} \boxtimes \mathbf{\sigma}^{-1}) \quad (C.32)$$

respectivamente.

# Apêndice D

## CÁLCULO TENSORIAL

### D.1 DERIVADAS DOS INVARIANTES CARACTERÍSTICOS

Dado um tensor de segunda ordem  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , as derivadas dos seus invariantes característicos, com relação a si próprio são dadas por:

$$\frac{dI_1}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \frac{d \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \frac{d\underline{\underline{\mathbf{I}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} : \frac{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} : \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{dI_2}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \frac{d}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \left[ \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}})^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \right] = (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_3}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} &= \frac{d}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{tr} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}}) - \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \operatorname{tr} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}}) + \frac{1}{6} (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}})^3 \right] \\ &= (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}})^T - \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}}) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}})^2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ &= (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}})^T - I_1 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T + I_2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

em que as seguintes igualdades foram consideradas:

$$\frac{d \operatorname{tr} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}})}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = 2 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \quad (\text{D.4})$$

e

$$\frac{d \operatorname{tr} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}})}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = 3 (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}})^T \quad (\text{D.5})$$

### D.2 DERIVADA DO TENSOR INVERSO DE UM TENSOR DE SEGUNDA ORDEM SIMÉTRICO COM RELAÇÃO A ELE MESMO

A derivada do tensor inverso de um tensor de segunda ordem simétrico  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  com relação a ele mesmo pode ser deduzida, considerando a definição de tensor de segunda ordem inverso  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$ . Assim,

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \bullet \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (\text{D.6})$$



que, considerando um sistema de coordenadas Cartesiano ortonormal, pode ser escrita conforme:

$$A_{im}^{-1}A_{mn} = \delta_{in} \quad (D.7)$$

Derivando a Eq. (D.7) com relação a  $A_{kl}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{im}^{-1}A_{mn}}{\partial A_{kl}} &= 0 \\ \frac{\partial A_{im}^{-1}}{\partial A_{kl}}A_{mn} + A_{im}^{-1}\frac{\partial A_{mn}}{\partial A_{kl}} &= 0 \quad (\cdot A_{nj}^{-1}) \\ \frac{\partial A_{im}^{-1}}{\partial A_{kl}}A_{mn}A_{nj}^{-1} + A_{im}^{-1}\frac{\partial A_{mn}}{\partial A_{kl}}A_{nj}^{-1} &= 0 \\ \frac{\partial A_{im}^{-1}}{\partial A_{kl}}\delta_{mj} &= -A_{im}^{-1}\frac{\partial A_{mn}}{\partial A_{kl}}A_{nj}^{-1} \end{aligned} \quad (D.8)$$

Como  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  é simétrico, então,

$$\frac{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{sym} \quad (D.9)$$

ou, em termos dos componentes Cartesianos,

$$\frac{\partial A_{mn}}{\partial A_{kl}} = \frac{1}{2}(\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{nk}) \quad (D.10)$$

Assim, a Eq. (D.8) poderá ser expandida conforme a seguir

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{im}^{-1}}{\partial A_{kl}}\delta_{mj} &= -A_{im}^{-1}\frac{1}{2}(\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{nk})A_{nj}^{-1} \\ \frac{\partial A_{ij}^{-1}}{\partial A_{kl}} &= -\frac{1}{2}(A_{ik}^{-1}A_{jl}^{-1} + A_{il}^{-1}A_{kj}^{-1}) \end{aligned} \quad (D.11)$$

perminindo obter a derivada do tensor inverso de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , com relação a ele mesmo, segundo a equação:

$$\frac{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}}{d\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = -\frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \circledast \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \boxtimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}) \quad (D.12)$$

### D.3 RAIZ QUADRADA DE TENSORES DE SEGUNDA ORDEM SIMÉTRICOS

Dado um tensor de segunda ordem simétrico qualquer  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , em que  $\lambda_k$  e  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_k$  são os autovaleores e autoprojetores de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , respectivamente, define-se o tensor de segunda ordem simétrico  $\sqrt{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$ , denominado por raiz quadrada de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , segundo a expressão:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \sqrt{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \bullet \sqrt{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \quad (D.13)$$

A partir da definição de autoprojetores, pode-se mostrar que:

$$\sqrt{\underset{\approx}{\mathbf{A}}} = \sqrt{\lambda_1} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_1 + \sqrt{\lambda_2} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_2 + \sqrt{\lambda_3} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_3 = \sqrt{\lambda_k} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_k \quad (\text{D.14})$$

A Eq. (D.14) pode ser facilmente verificada, como ilustra a seguinte dedução:

$$\begin{aligned} \sqrt{\underset{\approx}{\mathbf{A}}} \bullet \sqrt{\underset{\approx}{\mathbf{A}}} &= \left( \sqrt{\lambda_1} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_1 + \sqrt{\lambda_2} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_2 + \sqrt{\lambda_3} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_3 \right) \bullet \left( \sqrt{\lambda_1} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_1 + \sqrt{\lambda_2} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_2 + \sqrt{\lambda_3} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_3 \right) \\ &= \lambda_1 \underset{\approx}{\mathbf{P}}_1 \bullet \underset{\approx}{\mathbf{P}}_1 + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_1 \bullet \underset{\approx}{\mathbf{P}}_2 + \dots \\ &\quad + \lambda_2 \underset{\approx}{\mathbf{P}}_2 \bullet \underset{\approx}{\mathbf{P}}_2 + \sqrt{\lambda_2 \lambda_3} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_2 \bullet \underset{\approx}{\mathbf{P}}_3 + \dots \\ &\quad + \lambda_3 \underset{\approx}{\mathbf{P}}_3 \bullet \underset{\approx}{\mathbf{P}}_3 + \sqrt{\lambda_3 \lambda_1} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_3 \bullet \underset{\approx}{\mathbf{P}}_1 + \dots \\ &= \lambda_1 \underset{\approx}{\mathbf{P}}_1 + \lambda_2 \underset{\approx}{\mathbf{P}}_2 + \lambda_3 \underset{\approx}{\mathbf{P}}_3 \\ &= \underset{\approx}{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

em que a propriedade de projeção dos autoprojetores, dada pela Eq. (C.3), foi levada em consideração.

## D.4 DERIVADA DA RAIZ QUADRADA DE UM TENSOR DE SEGUNDA ORDEM SIMÉTRICO COM RELAÇÃO A ELE MESMO

Dado um tensor de segunda ordem simétrico  $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$  qualquer, com autovalores  $\lambda_k$  e autoprojetores  $\underset{\approx}{\mathbf{P}}_k$ , a derivada da raiz quadrada  $\sqrt{\underset{\approx}{\mathbf{A}}}$  com relação ao tensor  $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$  pode ser deduzida, considerando a Eq. (D.14), de acordo com:

$$\begin{aligned} \frac{d\sqrt{\underset{\approx}{\mathbf{A}}}}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} &= \sum_{k=1}^3 \frac{d\sqrt{\lambda_k} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_k}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} \\ &= \sum_{k=1}^3 \left( \underset{\approx}{\mathbf{P}}_k \otimes \frac{d\sqrt{\lambda_k}}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} + \sqrt{\lambda_k} \frac{d\underset{\approx}{\mathbf{P}}_k}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_k \otimes \frac{d\lambda_k}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} + \sqrt{\lambda_k} \frac{d\underset{\approx}{\mathbf{P}}_k}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

ou seja, é função dos autovalores e autoprojetores de  $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$  e das derivadas dos autovalores e autoprojetores com relação ao tensor  $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ . Estas últimas derivadas são apresentadas no Apêndice C, pelas Eq. (C.18) e (C.30).

Substituindo as derivadas dos autovalores de  $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ , com relação ao tensor  $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ , que no caso são os próprios autoprojetores  $\underset{\approx}{\mathbf{P}}_k$  de  $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$  (Eq. C.18) na Eq. (D.16) acima, obtém-se:

$$\frac{d\sqrt{\underset{\approx}{\mathbf{A}}}}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \underset{\approx}{\mathbf{P}}_k \otimes \underset{\approx}{\mathbf{P}}_k + \sqrt{\lambda_k} \frac{d\underset{\approx}{\mathbf{P}}_k}{d\underset{\approx}{\mathbf{A}}} \right) \quad (\text{D.17})$$

## D.5 DERIVADA DO TENSOR $a_{ij}$ COM RELAÇÃO AO TENSOR DE TENSÕES

O tensor  $\underline{\underline{a}}$ , ou  $a_{ij}$  do modelo Subtij, definido em Nakai (1989), é dado por:

$$\underline{\underline{a}} = \sqrt{\frac{I_{3\sigma}}{I_{2\sigma}}} \underline{\underline{\tau}}^{-1} \quad \text{em que} \quad \underline{\underline{\tau}} = \sqrt{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{D.18})$$

Considerando a definição:

$$r_z = r_z(I_{2\sigma}, I_{3\sigma}) = r_z(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{I_{3\sigma}}{I_{2\sigma}}} \quad (\text{D.19})$$

então, o tensor  $\underline{\underline{a}}$  poderá ser dado por:

$$\underline{\underline{a}} = r_z \underline{\underline{\tau}}^{-1} \quad (\text{D.20})$$

A derivada de  $\underline{\underline{a}}$  com relação ao tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  pode ser encontrada, diretamente, mediante a seguinte expansão:

$$\frac{d\underline{\underline{a}}}{d\underline{\underline{\sigma}}} = r_z \frac{d\underline{\underline{\tau}}^{-1}}{d\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\tau}}^{-1} \otimes \frac{dr_z}{d\underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{D.21})$$

em que,

$$\frac{d\underline{\underline{\tau}}^{-1}}{d\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{d\underline{\underline{\tau}}^{-1}}{d\underline{\underline{\tau}}} : \frac{d\underline{\underline{\tau}}}{d\underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{D.22})$$

e

$$\frac{dr_z}{d\underline{\underline{\sigma}}} = \left( \frac{1}{2r_z I_{2\sigma}} \frac{dI_{3\sigma}}{d\underline{\underline{\sigma}}} - \frac{I_{3\sigma}}{2r_z I_{2\sigma}^2} \frac{dI_{2\sigma}}{d\underline{\underline{\sigma}}} \right) \quad (\text{D.23})$$

$\frac{d\underline{\underline{\tau}}^{-1}}{d\underline{\underline{\tau}}}$  pode ser calculado segundo a Eq. (D.12), assim,

$$\frac{d\underline{\underline{\tau}}^{-1}}{d\underline{\underline{\tau}}} = -\frac{1}{2} (\underline{\underline{\tau}}^{-1} \otimes \underline{\underline{\tau}}^{-1} + \underline{\underline{\tau}}^{-1} \boxtimes \underline{\underline{\tau}}^{-1}) \quad (\text{D.24})$$

e  $\frac{d\underline{\underline{\tau}}}{d\underline{\underline{\sigma}}}$  é calculado segundo a Eq. (D.17), ou seja,

$$\frac{d\underline{\underline{\tau}}}{d\underline{\underline{\sigma}}} = \sum_k \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \underline{\underline{P}}_k \otimes \underline{\underline{P}}_k + \sqrt{\lambda_k} \frac{d\underline{\underline{P}}_k}{d\underline{\underline{\sigma}}} \right) \quad (\text{D.25})$$

em que  $\lambda_k$  são os autovalores do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  e  $\underline{\underline{P}}_k$  são os autoprojetores do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

## D.6 DERIVADA DO TENSOR $t_{ij}$ COM RELAÇÃO AO TENSOR DE TENSÕES

O tensor  $\underline{\underline{t}}$  é definido conforme a equação:

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{a}} \bullet \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{D.26})$$

A derivada do tensor  $\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{t}}(\underline{\underline{\sigma}})$ , com relação ao tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  será:

$$\frac{d\underline{\underline{t}}}{d\underline{\underline{\sigma}}} = \left( \sum_k \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \underline{\underline{P}}_k \bullet \underline{\underline{\sigma}} \right) \otimes \frac{dr_z}{d\underline{\underline{\sigma}}} + r_z \sum_k \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \frac{d\underline{\underline{C}}_k}{d\underline{\underline{\sigma}}} - \frac{1}{2\lambda_k^{\frac{3}{2}}} \underline{\underline{C}}_k \otimes \underline{\underline{P}}_k \right) \quad (\text{D.27})$$

em que,

$$\underline{\underline{C}}_k = \underline{\underline{P}}_k \bullet \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{D.28})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\underline{C}}_k}{d\underline{\underline{\sigma}}} = & \left[ \underline{\underline{\sigma}} \bullet \underline{\underline{\sigma}} + (\lambda_k - I_{1\sigma}) \underline{\underline{\sigma}} + \frac{I_{3\sigma}}{\lambda_k} \underline{\underline{I}} \right] \\ & \otimes \left\{ \frac{1}{\alpha_k} \underline{\underline{P}}_k - \frac{\lambda_k}{\alpha_k^2} \left[ (6\lambda_k - 2I_{1\sigma}) \underline{\underline{P}}_k + (I_{1\sigma} - 2\lambda_k) \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\sigma}} \right] \right\} \quad (\text{D.29}) \end{aligned}$$