UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Uso de geometria não euclidiana no ensino médio: o exemplo do plano de Minkowski

Gabrielle Carvalho Alves

BRASÍLIA
2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Gabrielle Carvalho Alves

Uso de geometria não euclidiana no ensino médio: o exemplo do plano de Minkowski

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Guy Grebot

Brasília
Setembro de 2020

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cu
Carvalho, GABRIELLE
Uso de geometria não euclidiana no ensino médio: o exemplo do plano de Minkowski / GABRIELLE Carvalho; orientador Guy Grebot. -- Brasília, 2020.
44 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. A geometria do plano de Minkowski. 2. Números Hiperbólicos. 3. Atividades para sala de aula. I. Grebot, Guy, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uso de geometria não euclidiana no ensino médio: o exemplo do plano de Minkowski

por

Gabrielle Carvalho Alves

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 26 de setembro de 2020.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Guy Grebot - MAT/UnB - Orientador

Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva - MAT/UnB - Membro

Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB - Membro

Dedico esse trabalho aos meus pais, Maria Inez e Francisco Agenor Alves, à minha irmã Danielle e ao meu melhor amigo Euclides.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por sempre me dar forças e não me deixar desanimar diante dos obstáculos. Com ele à minha frente tudo sempre dará certo.

Aos meus pais por me ensinarem a nunca desistir e que a maior herança é o conhecimento.

Em especial à minha mãe, Maria Inez Ferreira de Carvalho, por ser minha maior encorajadora, por apoiar e sempre acreditar no meu potencial. Obrigada por ser essa mãe guerreira e inspiração para a minha vida.

À minha irmã amada e ao meu sobrinho pelas palavras de incentivo, sem elas essa conquista não seria possível.

Ao professor Guy Grebot, por aceitar o convite para me orientar, pela paciência e cuidado durante todo o processo sendo para mim uma referência.

Aos professores e coordenadores do Curso na Universidade de Brasilia.

Resumo

O presente trabalho propõe a inclusão do estudo das geometrias não euclidianas, em específico a geometria de Minkowski, no currículo de geometria do ensino médio com o intuito de reforçar e aprimorar os conceitos e teoremas da geometria euclidiana.

Mostraremos que os números hiperbólicos são representados pela geometria do plano de Minkowski e como esse tipo de geometria não euclidiana pode proporcionar um aprendizado significativo dos conceitos geométricos. Desenvolvemos uma atividade que envolve a comparação de conceitos dessas duas geometrias, com o objetivo de reforçar os conceitos e teoremas da geometria euclidiana. Destacamos neste trabalho o estudo analítico da reta e da circunferência mostrando uma visão diferente da tradicional usada em sala de aula atualmente. A proposta de uma atividade usando o software Geogebra como recurso traz uma visão prática para complementar e reforçar a visualização do conteúdo exposto.

Palavras-chave: Hipérbole, Números Hiperbólicos, plano de Minkowski

Abstract

The present work proposes the inclusion of the study of non-Euclidean geometries, specifically the Minkowski geometry, in the geometry curriculum of high school in order to reinforce and improve the concepts and theorems of Euclidean geometry.

We will show that hyperbolic numbers are represented by the geometry of the Minkowski plane and how this type of non-Euclidean geometry can provide a significant learning of geometric concepts. We developed an activity that involves the comparison of concepts of these two geometries, with the objective of reinforcing the concepts and theorems of Euclidean geometry. In this work, we highlight the analytical study of the line and the circumference showing a different view from the traditional one used in the classroom today. The proposal of an activity using the Geogebra software as a resource brings a practical vision to complement and reinforce the visualization of the exposed content.

Keywords: Hyperbole, Hyperbolic Numbers, Minkowski plane

Sumário

Introdução

Essa dissertação é inspirada nos estudos de Hermann Minkowski que nasceu em 22 de junho de 1864 em Alexotas, Império Russo, e faleceu em 12 de janeiro de 1909, na Alemanha. Ele estudou na Universidade de Königsberg e tornou-se doutor em 1885 nesta mesma Universidade [3].

Minkowski lecionou na Universidade de Bonn de 1887 até 1892, foi professor e influenciador de Einstein, com a sua visão e seu trabalho sobre espaço-tempo. Ele construiu os fundamentos matemáticos da teoria da relatividade quando em 1907 verificou que o trabalho de Lorentz e Einstein poderia ser melhor compreendido em um espaço não euclidiano. Ele considerou espaço e tempo, antes pensados independentes, em um contínuo espaço-tempo quadridimensional. Essas ideias foram usadas por Einstein para desenvolver a teoria geral da relatividade [4].

De acordo com a leitura dos trabalhos de Vollrath [8] e Felsager [7], é possível afirmar que o ensino da matemática ainda não prioriza um currículo individualizado para atender as necessidades de cada aluno. Segundo Vollrath [8], o ensino da geometria como um produto pronto também não estimula o interesse dos alunos pela busca do conhecimento geométrico. Ele ainda afirma que a sobreposição dos interesses dos professores por determinados assuntos não pode ser um obstáculo ao desenvolvimento das habilidades dos estudantes e à adequação de um currículo individualizado. É importante investir em diferentes formas de ensinar, buscar por atividades integradas e que despertem o desejo pelo aprendizado da geometria.

Defendemos aqui que o ensino investigativo e o uso de uma geometria não euclidiana proporcionam uma visão diferenciada do ensino da geometria.

Os alunos terão a oportunidade de questionar as propriedades geométricas construídas por eles mesmos através de uma atividade que analisa e contrapõe propriedades das duas geometrias.

A dissertação está organizada da seguinte forma. No capítulo 1 definimos, através de um conjunto de axiomas, o espaço $\mathcal{M}$ e o modelo para essa geometria, finalizando, com o estudo da reta e da circunferência. No capítulo 2 é definido o conjunto dos números hiperbólicos a partir do estudo dos números hipercomplexos. Por fim, no capítulo 3, apresentamos um conjunto de atividades para aplicação no ensino médio.

Capítulo 1

A geometria do plano de Minkowski

1.1 Introdução

A geometria não euclidiana apresentada neste capítulo, foi investigada em 1907 pelo matemático alemão H. Minkowski. A nossa axiomatização para o plano de Minkowski, denominado de $\mathcal{M}$, é vetorial e admite os termos indefinidos "ponto"e "vetor". Tal qual descrito por Yaglom em [1], a lista de axiomas abaixo determina um sistema completo para a geometria plana de Minkowski e envolve 5 grupos de axiomas.

I Axiomas relativos à soma de vetores.

A adição entre dois vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{M}$ resulta em outro vetor $\mathbf{s} \in \mathcal{M}$, chamado de vetor soma de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e denotado por $\mathbf{s} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$. Para quaisquer vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c} \in \mathcal{M}$ valem as seguintes propriedades:

(a) Comutatividade: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$;

(b) Associatividade: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$;

(c) Existência do vetor zero: Existe $\mathbf{0} \in \mathcal{M}$ tal que, $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$;

(d) Existência do inverso aditivo : Para todo $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ existe $\mathbf{a}' \in \mathcal{M}$, de tal forma que $\mathbf{a}+\mathbf{a}' = \mathbf{a}'+\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

II Axiomas relativos à multiplicação de um vetor por um número real.

Dado um vetor $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a multiplicação de $\mathbf{a}$ por α é um vetor $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ denotado por $\mathbf{m} = \alpha.\mathbf{a}$. Para quaisquer vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{M}$ e α e β números reais, valem as seguintes propriedades:

(a) $1.\mathbf{a} = \mathbf{a}$;

(b) $0.\mathbf{a} = \mathbf{0}$;

(c) Associatividade: $\alpha.(\beta.\mathbf{a}) = (\alpha.\beta).\mathbf{a}$;

(d) Distributividade em relação à adição de números reais: $(\alpha+\beta).\mathbf{a} = \alpha.\mathbf{a}+\beta.\mathbf{a}$;

(e) Distributividade em relação à adição de vetores: $\alpha.(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha.\mathbf{a}+\alpha.\mathbf{b}$.

III Axiomas de dimensão.

(a) Para quaisquer três vetores $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c} \in \mathcal{M}$ existem três números reais α, β, γ, nem todos zero, tais que

$$\alpha.\mathbf{a} + \beta.\mathbf{b} + \gamma.\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

(b) Existem dois vetores linearmente independentes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{M}$ isto é: $\alpha.\mathbf{a}+\beta.\mathbf{b} = \mathbf{0}$ somente se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, em que α e $\beta \in \mathbb{R}$.

IV Axiomas referentes à forma bilinear simétrica.

Está definida em $\mathcal{M}$ uma forma bilinear simétrica $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ que, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{M}$ e $c \in \mathbb{R}$, satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v} + \mathbf{w}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$;

(b) $f(c\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$;

(c) $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$;

(d) f é não degenerada:

  i. Para cada $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, existe $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$ tal que $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$;

  ii. Para cada $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, existe $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$ tal que $f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \neq 0$.

(e) f é indefinida: existe um vetor $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ tal que $f(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^2 > 0$; existe um vetor $\mathbf{b} \in \mathcal{M}$ tal que $f(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}^2 < 0$.

V Axiomas de relação entre pontos e vetores.

(a) Dado um ponto $A \in \mathcal{M}$ e um vetor $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ existe um único ponto $B \in \mathcal{M}$ tal que $\overrightarrow{AB}= \mathbf{u}$;

(b) Para quaisquer três pontos A, B, C temos $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Os axiomas de dimensão nos qualificam a introduzir dois importantes conceitos, a saber: bases de vetores e componentes de um vetor na base dada.

Chamamos de base um conjunto de vetores linearmente independentes. Sendo $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ uma base, temos que para cada vetor $\mathbf{c}$ existe um único par de números reais (x, y) tal que,[1]

$$\mathbf{c} = x\mathbf{e} + y\mathbf{f}. \tag{1.1}$$

Os números x e y são chamados de componentes de $\mathbf{c}$ na base $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$.

Para provar a existência da decomposição de (1.1), usamos o axioma III(a), que nos garante a existência de números reais α, ϵ, δ , não todos iguais a zero tais que

$$\alpha\mathbf{c} + \epsilon\mathbf{e} + \delta\mathbf{f} = \mathbf{0}. \tag{1.2}$$

O número α em (1.2) não é igual a zero. De fato, se α fosse nulo, teríamos $\epsilon\mathbf{e}+\delta\mathbf{f} = \mathbf{0}$, que implica ϵ e δ iguais a zero, já que $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ é uma base. Isso contradiz a hipótese de que α, ϵ e δ não são simultaneamente nulos.

Ao somarmos em ambos os lados de (1.2) $(-\epsilon\mathbf{e}) + (-\delta\mathbf{f})$, obtemos

$$\alpha\mathbf{c} = (-\epsilon)\mathbf{e} + (-\delta)\mathbf{f}$$

[1]Usaremos a notação sem o ponto para representar o produto entre vetor e número real.

e multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $\dfrac{1}{\alpha}$ temos,

$$\mathbf{c} = \frac{-\epsilon}{\alpha}\mathbf{e} + \frac{-\delta}{\alpha}\mathbf{f}$$

que equivale a (1.1) em que $x = \dfrac{-\epsilon}{\alpha}$ e $y = \dfrac{-\delta}{\alpha}$.

Para provar a unicidade de (1.1) considere outro par de coordenadas (x_1, y_1) tal que $\mathbf{c} = x_1\mathbf{e} + y_1\mathbf{f}$. Usando os axiomas de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um número real, segue de $\mathbf{c} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$ que

$$(x - x_1)\mathbf{e} + (y - y_1)\mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Tendo em mente que $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ é uma base podemos concluir que

$$x - x_1 = 0, y - y_1 = 0$$

isto é

$$x = x_1, y = y_1.$$

Na geometria de Minkowski dizemos que dois vetores $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ são ortogonais, ou normais, se $f(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = 0$. No que segue, usaremos a notação $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{u}^2$.

Podemos definir uma base ortonormal a partir de vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ com $\mathbf{a}^2 = \alpha > 0$ e $\mathbf{b}^2 = -\beta < 0$, de acordo com o axioma IV(e), como segue. Defina $\mathbf{i} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathbf{a}$, de tal forma que $\mathbf{i}^2 = 1$.

Considere agora o vetor $\mathbf{b_1} = \mathbf{b} - \gamma \cdot \mathbf{i}$, onde $\gamma = \mathbf{i} \cdot \mathbf{b}$. Segue que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{b_1} = 0$ e que ${\mathbf{b_1}}^2 = (\mathbf{b} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{b}\mathbf{i}))^2 = -\beta - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{b})^2 < 0$.

Definindo-se $\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{\beta+\gamma^2}}\mathbf{b_1}$ temos

$$\mathbf{i}^2 = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{m}^2 = -1. \tag{1.3}$$

Uma base do plano de Minkowski que satisfaz (1.3) é chamada de base ortonormal. Podemos concluir que, se $\{\mathbf{i}, \mathbf{m}\}$ é uma base ortonormal do plano $\mathcal{M}$ e $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ são vetores de coordenadas respectivas (x, y) e (x_1, y_1) nessa base, então

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = xx_1 - yy_1. \tag{1.4}$$

A forma

$$\begin{array}{rcl} q_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{u} & \mapsto & f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \end{array}$$

é denominada forma quadrática associada à forma bilinear f. Mostraremos que vale para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$ a igualdade:

$$4f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u} - \mathbf{v}).$$

Temos:

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= f(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{u},\mathbf{u})+f(\mathbf{v},\mathbf{u})+f(\mathbf{u},\mathbf{v})+f(\mathbf{v},\mathbf{v}) \\ &= q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u})+2f(\mathbf{v},\mathbf{u})+q_{\mathcal{M}}(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= f(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{u},\mathbf{u})-f(\mathbf{v},\mathbf{u})-f(\mathbf{u},\mathbf{v})+f(\mathbf{v},\mathbf{v}) \\ &= q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u})-2f(\mathbf{u},\mathbf{v})+q_{\mathcal{M}}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Logo,

$$q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}+\mathbf{v})-q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = 4f(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

O comprimento de um vetor $\mathbf{u}$ é representado por $|\mathbf{u}|$ e é dado por

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{|q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u})|}. \tag{1.5}$$

No plano $\mathcal{M}$ distinguimos para um vetor $\mathbf{u}$ as seguintes classificações: vetor tipo espaço se $\mathbf{u}^2>0$, vetor tipo tempo de $\mathbf{u}^2<0$ e nulo ou isotrópico, se $\mathbf{u}^2=0$.

Dados dois pontos A e B, a distância entre eles é definida como

$$d_{AB} = \sqrt{|q_{\mathcal{M}}(\overrightarrow{AB})|}. \tag{1.6}$$

Vamos mostrar abaixo que a distância entre os pontos A e B é igual a

$$d_{AB} = \sqrt{|(x_1-x)^2-(y_1-y)^2|} \tag{1.7}$$

em que (x_1,y_1) e (x,y) são as coordenadas respectivas de B e A, e são também as componentes respectivas dos vetores $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA}$, no referencial ortonormal de centro no ponto $O\in\mathcal{M}$ e base ortonormal $\{\mathbf{i},\mathbf{m}\}$.

Com base no axioma V(b) podemos escrever que $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$. Se $B=A$ temos

$$\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AA}\ .$$

Por outro lado, fazendo $O=A$ em $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$, temos

$$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$$

e somando $(-\overrightarrow{AB})$ aos dois lados da equação vem

$$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AA}+\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

Logo $\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}$ e segue que $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AO}$.

Podemos então concluir que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_1-x)\mathbf{i}+(y_1-y)\mathbf{m}$ de onde obtemos que a distância d_{AB} é dada por (1.7).

1.2 Isometrias do plano de Minkowski

Uma isometria de $\mathcal{M}$ é uma aplicação $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ tal que para todo $X, Y \in \mathcal{M}$, $d(X,Y) = d(F(X), F(Y))$, em que $d(X,Y) = d_{XY}$ é a distância entre os pontos X e Y de $\mathcal{M}$.

Se $G, F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ são isometrias, então a composta $G \circ F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é também uma isometria.

De fato,

$$d(X,Y) = d(F(X), F(Y)) = d(G(F(X)), G(F(Y))).$$

Considere a transformação $T_{\mathbf{u}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ definida por $T_{\mathbf{u}}(X) = X' = X + \mathbf{u}$, para todo $X \in \mathcal{M}$, em que $\mathbf{u}$ é um vetor constante. De acordo com os axiomas que estabelecem a relação entre ponto e vetor em $\mathcal{M}$, segue que $T_{\mathbf{u}}(X) = X' \Leftrightarrow \overrightarrow{XX'} = \mathbf{u}$. Tal transformação é chamada de translação segundo o vetor $\mathbf{u}$.

A função $T_{\mathbf{u}}$ é uma isometria de $\mathcal{M}$. Sendo X e $Y \in \mathcal{M}$, sejam $X^{'} = T_{\mathbf{u}}(X)$ e $Y^{'} = T_{\mathbf{u}}(Y)$. Logo, por definição temos que:

$$X^{'} = X + \mathbf{u}$$

$$Y^{'} = Y + \mathbf{u}.$$

Segue que,

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'} \Longrightarrow \overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX'} = \overrightarrow{YY'} = \overrightarrow{YX'} + \overrightarrow{X'Y'} \Longrightarrow \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}\ .$$

Portanto,

$$d(X,Y) = d(X', Y') = d(T_{\mathbf{u}}(X), T_{\mathbf{u}}(Y)).$$

Seja $H : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ uma isometria de $\mathcal{M}$, tal que $H(O) = O'$ para algum ponto $O \in \mathcal{M}$. A aplicação H' dada por $H' = T_{\mathbf{u}} \circ H$, em que $\mathbf{u} = \overrightarrow{O'O}$, é uma isometria de $\mathcal{M}$ e é tal que $H'(O) = O$.

Portanto, qualquer isometria de $\mathcal{M}$ nele mesmo é dada pela composta de uma isometria que fixa algum ponto de $\mathcal{M}$ com uma translação de $\mathcal{M}$.

Assim, podemos considerar apenas isometrias que admitem um ponto fixo em $\mathcal{M}$.

Como a distância entre dois pontos $A, B \in \mathcal{M}$ foi definida como sendo

$$d_{AB} = \sqrt{|q_{\mathcal{M}}(\overrightarrow{AB})|},$$

segue que uma isometria de $\mathcal{M}$ deve preservar a forma quadrática $q_{\mathcal{M}}$.

No que segue, nosso estudo se restringe às transformações lineares que preservam a forma quadrática em $\mathcal{M}$.

Proposição 1.1 *Uma transformação linear T de $\mathcal{M}$ preserva $q_{\mathcal{M}}$ se, e somente se, ela preserva f.*

Demonstração: *Por definição, se T preserva f, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{M}$, $f(T\mathbf{u}, T\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.*

Portanto,

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}) &= f(\mathbf{u},\mathbf{u}) \\ &= f(T\mathbf{u},T\mathbf{u}) \\ &= q_{\mathcal{M}}(T\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Isto é, T preserva $q_{\mathcal{M}}$.

Suponha que, para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$, $q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}) = q_{\mathcal{M}}(T\mathbf{u})$. Então para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= q_{\mathcal{M}}(T(\mathbf{u}+\mathbf{v})) \quad e \\ q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= q_{\mathcal{M}}(T(\mathbf{u}-\mathbf{v})). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 4f(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= q_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q_{\mathcal{M}}((\mathbf{u}-\mathbf{v})) \\ &= q_{\mathcal{M}}(T\mathbf{u}+T\mathbf{v}) - q_{\mathcal{M}}(T\mathbf{u}-T\mathbf{v}) \\ &= 4f(T\mathbf{u},T\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Ou seja, T preserva f.

□

Proposição 1.2 *O conjunto $\mathcal{G}$ das transformações lineares de $\mathcal{M}$ que preservam f é um grupo sob composição.*

Demonstração: *Dados F e $G \in \mathcal{G}$, transformações lineares de $\mathcal{M}$ que preservam f, então*

$$f(F(G\mathbf{u}),F(G\mathbf{v})) = f(G\mathbf{u},G\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Portanto, a composta de duas transformações de $\mathcal{G}$ é uma transformação de $\mathcal{G}$.

A transformação identidade pertence a $\mathcal{G}$. Seja $I_d(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$. Temos $f(I_d\mathbf{u}, I_d\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

Seja $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ e $T \in \mathcal{G}$ tal que $T\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Segue que para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$

$$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(T\mathbf{u},T\mathbf{v}) = f(0,T\mathbf{v}) = 0.$$

Como f é não degenerada, isso implica que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Portanto, o núcleo de T está restrito ao vetor $\mathbf{0}$ e, assim, T é invertível. Seja T^{-1} a inversa de T. Temos, para todo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{M}$,

$$f(T^{-1}\mathbf{u},T^{-1}\mathbf{v}) = f(TT^{-1}\mathbf{u},TT^{-1}\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

o que prova que $T^{-1} \in \mathcal{G}$.

□

Seja T uma aplicação linear que preserva f, dada por $\overrightarrow{OX'} = T\,\overrightarrow{OX}$ em que $X' = (x', y')$ e $X = (x, y)$ na base $\{\mathbf{i},\mathbf{m}\}$. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a matriz de T na base $\{\mathbf{i},\mathbf{m}\}$, a relação entre (x', y') e (x, y) é dada por

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= a\,x + b\,y \\ y' &= c\,x + d\,y. \end{aligned} \right. \tag{1.8}$$

Dizer que T preserva f equivale então a dizer que $x'^2 - y'^2 = x^2 - y^2$, ou seja

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (a\,x + b\,y)^2 - (c\,x + d\,y)^2 \\ &= x^2(a^2 - c^2) + 2xy(ab - cd) + y^2(b^2 - d^2) \end{aligned}$$

que fornece três equações para os coeficientes a, b, c, d:

$$\begin{cases} a^2 - c^2 &= 1 \\ ab - cd &= 0 \\ b^2 - d^2 &= -1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Segue que

$$\begin{cases} a^2 &= 1 + c^2 \\ a^2\,b^2 &= c^2\,d^2 \\ b^2 &= d^2 - 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Ao resolver esse sistema, chegamos nas equações $a^2 = d^2$ e $c^2 = b^2$. De onde obtemos quatro possibilidades de resultados para a e b, são eles:

1. Caso $a = d$ e $c = \pm b$. Quando $c = -b$, temos $db + bd = 2bd = 0$. Se $d = 0$ temos que $a = 0$ e $-c^2 = 1$ o que é um absurdo porque $c \in \mathbb{R}$. Portanto $d \neq 0$ e segue que $b = c = 0$;

2. Caso $a = -d$ e $c = \pm b$. Quando $c = b$ temos $-db - db = -2bd = 0$. Para $d = 0$ temos $a = 0$ e $-c^2 = 1$ o que é um absurdo porque $c \in \mathbb{R}$. Portanto $d \neq 0$ e segue que $b = c = 0$;

Portanto, obtemos dois tipos de transformações, que descrevemos abaixo. O primeiro é dado pelas equações

$$\begin{cases} x' &= a\,x + b\,y \\ y' &= b\,x + a\,y, \end{cases} \tag{1.11}$$

em que $a^2 - b^2 = 1$. Neste caso, podemos considerar $a = \cosh(\theta)$ e $b = \operatorname{senh}(\theta)$. Esse conjunto forma um grupo sob composição chamado de grupo das transformações de Lorentz.

O segundo conjunto de transformações é dado pelas equações

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= -bx - ay, \end{cases} \tag{1.12}$$

em que $-a^2 + b^2 = -1$.

Para obter a expressão das transformações de Lorentz geralmente dadas em textos de física, considere $b = -av$, em que $v = -\tanh(\theta)$. Segue que $-1 < v < 1$, $a^2 = \dfrac{1}{1 - v^2}$. Com isso as expressões de (1.11) tornam-se

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{x - vy}{\sqrt{(1 - v^2)}} \\ y' &= \dfrac{y - vx}{\sqrt{(1 - v^2)}}. \end{cases} \tag{1.13}$$

1.3 Um modelo para a geometria plana de Minkowski

Como $\mathcal{M}$ é um espaço vetorial real de dimensão 2, ele é isomorfo a $\mathbb{R}^2$. Logo, o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ é um modelo para $\mathcal{M}$.

Identificamos os vetores da base ortonormal $\{\mathbf{i}, \mathbf{m}\}$ com as direções dos eixos coordenados do sistema cartesiano de origem O: $\mathbf{i}$ é o vetor diretor do eixo das abscissas e $\mathbf{m}$, o vetor diretor do eixo das ordenadas.

1.3.1 A reta do plano $\mathcal{M}$

Sejam um ponto $A = (x_0, y_0)$ e um vetor $\mathbf{v} = (a, b)$, diferente do vetor zero em $\mathcal{M}$. A reta r que passa pelo ponto A e tem como direção o vetor $\mathbf{v}$ é dada pelo conjunto de pontos $P(x, y)$ de $\mathcal{M}$ tais que $\overrightarrow{AP} = t\mathbf{v}$, para qualquer t pertencente a $\mathbb{R}$.

Dessa forma obtemos a equação paramétrica da reta

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$$

equivalente ao sistema

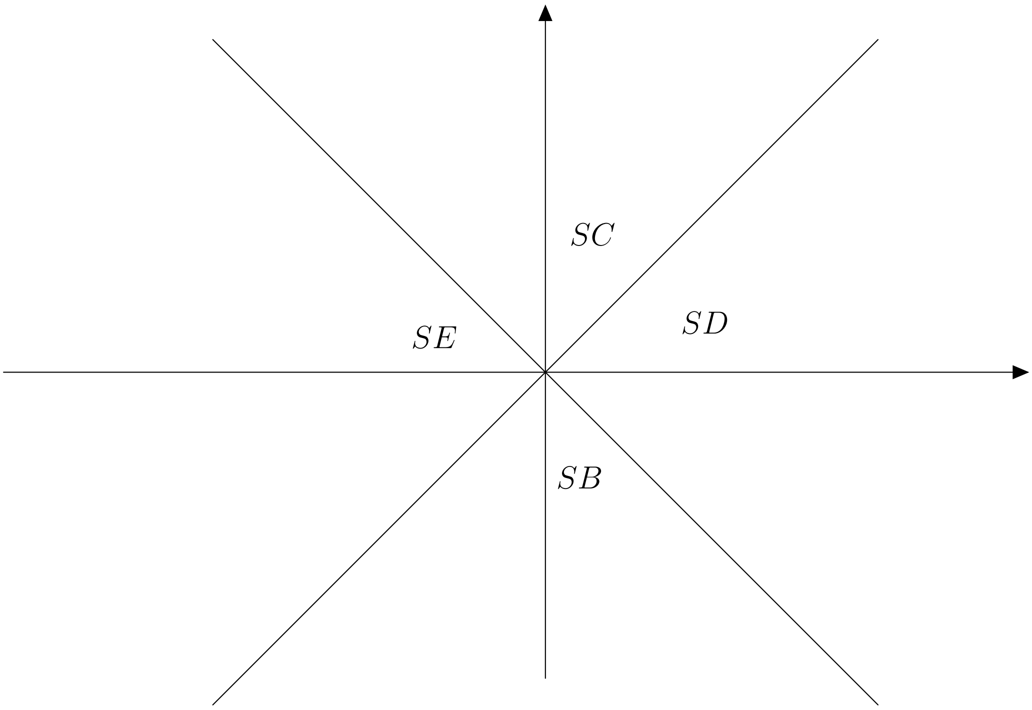
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \end{cases} \tag{1.14}$$

Obtemos a equação cartesiana dessa reta subtraindo-se o produto da primeira equação de (1.14) por b, do produto da segunda equação de (1.14) por a:

$$a(y_0 - y) + b(x - x_0) = 0. \tag{1.15}$$

O plano de Minkowski possui duas retas especiais, chamadas de eixos bissetores, que são determinados pelas duas direções nulas (ou isotrópicas) $\omega_1 = \mathbf{i} + \mathbf{m}$ e $\omega_2 = \mathbf{i} - \mathbf{m}$. Essas retas dividem o plano em quatro regiões (Como ilustrado na Figura 1.1.): Setor Direito (SD), Setor Esquerdo (SE), Setor de Cima (SC) e Setor de Baixo (SB).

Figura 1.1: Eixos bissetores



Dado o vetor $\mathbf{v} = (a, b)$ distinto de $(0, 0)$, um vetor perpendicular a ele é um vetor $\mathbf{u} = (c, d)$ tal que $f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = ac - bd = 0$.

Proposição 1.3 *Dado $\mathbf{v} = (a, b)$, $f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \alpha(b, a)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

1. *Dados $\mathbf{v} = (b, a)$ e $\mathbf{u} = \alpha(b, a)$, temos $f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = f((a, b), \alpha(b, a)) = a\alpha b - b\alpha a = \alpha(ab - ba) = 0$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$.*

2. *Dado o vetor $\mathbf{v} = (a, b)$ distinto de $(0, 0)$, queremos determinar quais vetores (c, d) são tais que $ac - bd = 0$.*

   (a) *Para $a = 0$: neste caso $bd = 0$, o que implica $d = 0$. Portanto $(c, 0)$ é perpendicular a $(0, b)$;*

   (b) *Para $a \neq 0$: de $ac - bd = 0$ vem $c = \dfrac{bd}{a}$. Logo o vetor $(c, d) = \left(\dfrac{bd}{a}, d\right) = \dfrac{d}{a}(b, a)$ é perpendicular a (a, b).*

   Segue desses dois itens que dado $\mathbf{v} = (a, b)$ não zero, a direção perpendicular a esse vetor é $\mathbf{u} = (b, a)$.

$\square$

Dizemos que duas retas são perpendiculares se suas direções o forem. Segue então da Proposição 1.3 que duas retas perpendiculares são simétricas em relação a uma paralela a um dos eixos bissetores.

Uma reta é classificada em tipo tempo ou tipo espaço, de acordo com a classificação do vetor diretor dada na página 12. Dessa forma, podemos afirmar:

1. Se $q_{\mathcal{M}}(\mathbf{v}) > 0$, a reta é classificada como tipo espaço;
2. Se $q_{\mathcal{M}}(\mathbf{v}) < 0$ a reta é classificada como tipo tempo.

Logo, uma reta do tipo tempo será perpendicular a uma reta do tipo espaço e vice-versa.

1.3.2 A circunferência no plano $\mathcal{M}$

A circunferência de centro em C e raio $r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$, é o conjunto de pontos X de $\mathcal{M}$ tais que

$$d_{OX} = r.$$

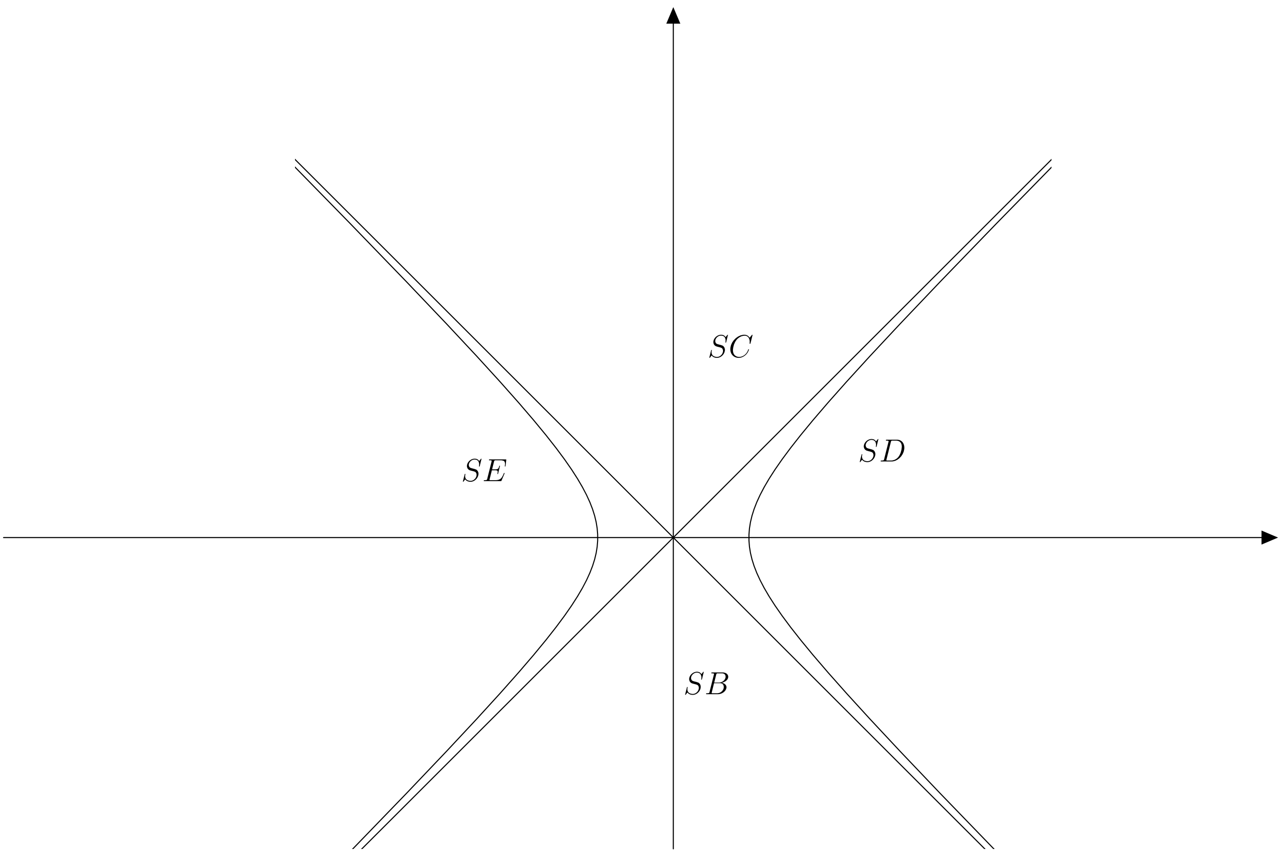
Pela definição de distância entre dois pontos temos que a equação dessa circunferência é dada por

$$(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = \pm r^2, \tag{1.16}$$

em que $X = (x, y)$ e $C = (x_0, y_0)$.

Sendo $r \neq 0$, a equação da circunferência do plano de Minkowski representa uma hipérbole equilátera no modelo considerado aqui. (Ver Figura 1.2 abaixo).

Figura 1.2: Circunferência



Vamos listar duas propriedades da circunferência do plano $\mathcal{M}$ em relação a uma reta dada. Para isso, definimos uma reta secante como sendo uma reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos.

Definimos reta tangente à circunferência como sendo uma reta que a intercepta em um único ponto.

Proposição 1.4 *Uma reta tangente à uma circunferência, num ponto T, é perpendicular ao seu raio por esse ponto.*

Demonstração: *Dado um ponto $T = (x_0, y_0)$, com $y_0 \neq 0$, sobre a circunferência de equação $x^2 - y^2 = r^2$, o coeficiente angular da reta t tangente à curva no ponto T é dado pela solução de*

$$\left(2x - 2y\frac{dy}{dx}\right)|_{x=x_0} = 0$$

para $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$. Ou seja $\frac{x_0}{y_0}$ é o coeficiente angular da tangente à circunferência em T.

A equação da reta tangente à circunferência no ponto T é, portanto,

$$y_0(y - y_0) = x_0(x - x_0)$$

com vetor diretor (y_0, x_0).

Sendo OT o raio dessa circunferência com $O = (0, 0)$ e $T = (x_0, y_0)$ a equação da reta que passa por O e T é

$$yx_0 = xy_0.$$

Temos que $f((y_0, x_0), (x_0, y_0)) = y_0x_0 - x_0y_0 = 0$. Portanto as retas OP e t são ortogonais.

Se $T = (x_0, 0)$ a tangente à circunferência no ponto T é a reta $x = x_0$, de direção **m**. *Como o raio em T tem direção* **i**, *segue que a tangente é perpendicular ao raio em T.*

$\square$

O segmento determinado pelas duas interseções de uma secante a uma circunferência, é chamado de corda.

Proposição 1.5 *Um raio de uma circunferência é perpendicular a uma secante se, e somente se, ele intercepta a corda que ela determina no seu ponto médio.*

Demonstração: *Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pontos distintos sobre a circunferência $x^2 - y^2 = r^2$. A reta definida por PQ tem equação*

$$a(y - y_2) = b(x - x_2)$$

em que $a = x_1 - x_2$ e $b = y_1 - y_2$ são as componentes do seu vetor diretor.

O ponto médio do segmento PQ é dado por $M = (M_x, M_y)$ onde

$$M_x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e

$$M_y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

A reta OM tem equação

$$yM_x = xM_y$$

e vetor diretor (M_x, M_y).

$$\begin{aligned} f((a,b),(M_x,M_y)) &= (x_1-x_2).M_x-(y_1-y_2).M_y \\ &= (x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-(y_1-y_2)\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= -\frac{x_2^2-y_2^2-(x_1^2-y_1^2)}{2} \\ &= \frac{r^2-r^2}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, OM *e* PQ *são perpendiculares.*

Suponha que a reta PQ *seja perpendicular a uma reta de direção* (c,d) *que passa por* O*. A equação dessa reta é dada por* $cy = dx$*.* $f((a,b),(c,d)) = 0$ *leva a* $d = \lambda(x_1 - x_2)$ *e* $c = \lambda(y_1 - y_2)$*. Segue que a reta perpendicular a* PQ *tem equação*

$$x(x_1-x_2) = y(y_1-y_2).$$

Para $M_x = x$ *temos*

$$\begin{aligned} x(x_1-x_2) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)(x_1-x2) \\ &= \left(\frac{x_1^2-x_2^2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{r^2+y_1^2-(r^2+y_2^2)}{2}\right) \\ &= \frac{y_1^2-y_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Para $M_y = y$ *temos*

$$\begin{aligned} y(y_1-y_2) &= \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)(y_1-y2) \\ &= \frac{y_1^2-y_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, quando $x = M_x$ *e* $y = M_y$ *temos que*

$$M_x(x_1-x_2) = M_y(y_1-y_2).$$

Logo, o ponto $M(M_x, M_y)$ *pertence a essa reta.*

$\square$

Capítulo 2

Números Hiperbólicos

2.1 Números hipercomplexos - Introdução

De acordo com [5], número hipercomplexo é um elemento do seguinte conjunto de números com duas componentes

$$\mathcal{Z} = \{x + \mathbf{u}y; \mathbf{u}^2 = \alpha + \mathbf{u}\beta; x, y, \alpha, \beta, \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \notin \mathbb{R}\} \tag{2.1}$$

em que α e β são chamados de constantes de estrutura. Dois elementos desse conjunto $z_1 = x_1 + \mathbf{u}y_1$ e $z_2 = x_2 + \mathbf{u}y_2$ são iguais se, e somente se, suas respectivas componentes são iguais: $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Dados dois números quaisquer z_1 e $z_2 \in \mathcal{Z}$, a soma entre esses números é dada da seguinte forma:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + \mathbf{u}(y_1 + y_2).$$

Com a operação soma o conjunto $\mathcal{Z}$ forma um grupo comutativo e temos:

1. existência de um elemento $0 \in \mathcal{Z}$ em que $0 + z = z + 0 = z$ tal que $0 = 0 + 0\mathbf{u} \in \mathcal{Z}$;
2. para cada $z = x + \mathbf{u}y \in \mathcal{Z}$ existe $-z \in \mathcal{Z}$ tal que $z + (-z) = 0$; $-z = -x - \mathbf{u}y$.

Para a multiplicação, impomos as seguintes propriedades:

1. distributividade em relação à adição: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{Z}$, $z_1.(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$;
2. associatividade: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{Z}$, $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$;
3. comutatividade: $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{Z}$, $z_1.z_2 = z_2.z_1$.

De acordo com Catoni et al. [5], sistemas numéricos distintos dos números reais e complexos não podem ter uma multiplicação comutativa e, simultaneamente, não admitirem divisores de zero. No entanto, como veremos neste capítulo, a geometria associada ao conjunto dos números hiperbólicos é a geometria de Minkowski, subjacente à teoria da Relatividade restrita de Einstein. Portanto, ao impor a comutatividade da multiplicação, seguimos a referência [5] e justificamos esta imposição em função do seguinte teorema.

Teorema 1 *Para sistemas distributivos com unidade, o cálculo diferencial e integral existe apenas se os sistemas forem comutativos.*

Veremos abaixo quais sistemas numéricos, caracterizados pelas constantes de estrutura α e β, admitem divisores de zero. A existência de divisores de zero está ligada à existência e unicidade de um inverso multiplicativo.

Dado um número $z_0 = a + \mathbf{u}b$, com $a^2 + b^2 \neq 0$, a existência de um único número $z = x + \mathbf{u}y$ tal que $z_0.z = 1$, depende do determinante do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by\alpha & = & 1 \\ bx + y(a + b\beta) & = & 0, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

que é equivalente à equação

$$(a + \mathbf{u}b)(x + \mathbf{u}y) = 1$$

e que corresponde à sua decomposição em componentes relativas aos versores 1 e $\mathbf{u}$.

O determinante de (2.2) é dado por

$$D = a^2 + ab\beta - \alpha b^2 \tag{2.3}$$

e (2.2) possui uma única solução quando $D \neq 0$.

Por outro lado, para que o sistema de números admita divisores de zero, é necessário que a equação $z_0.z = 0$ admita solução não nula. Isso equivale a dizer que o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by\alpha & = & 0 \\ bx + y(a + b\beta) & = & 0, \end{array} \right. \tag{2.4}$$

que é equivalente à equação

$$(a + \mathbf{u}b)(x + \mathbf{u}y) = 0,$$

tenha determinante $D = a^2 + ab\beta - \alpha b^2 = 0$. Portanto, a determinação dos divisores de zero do sistema numérico nos permitirá determinar quais números admitem um único inverso multiplicativo.

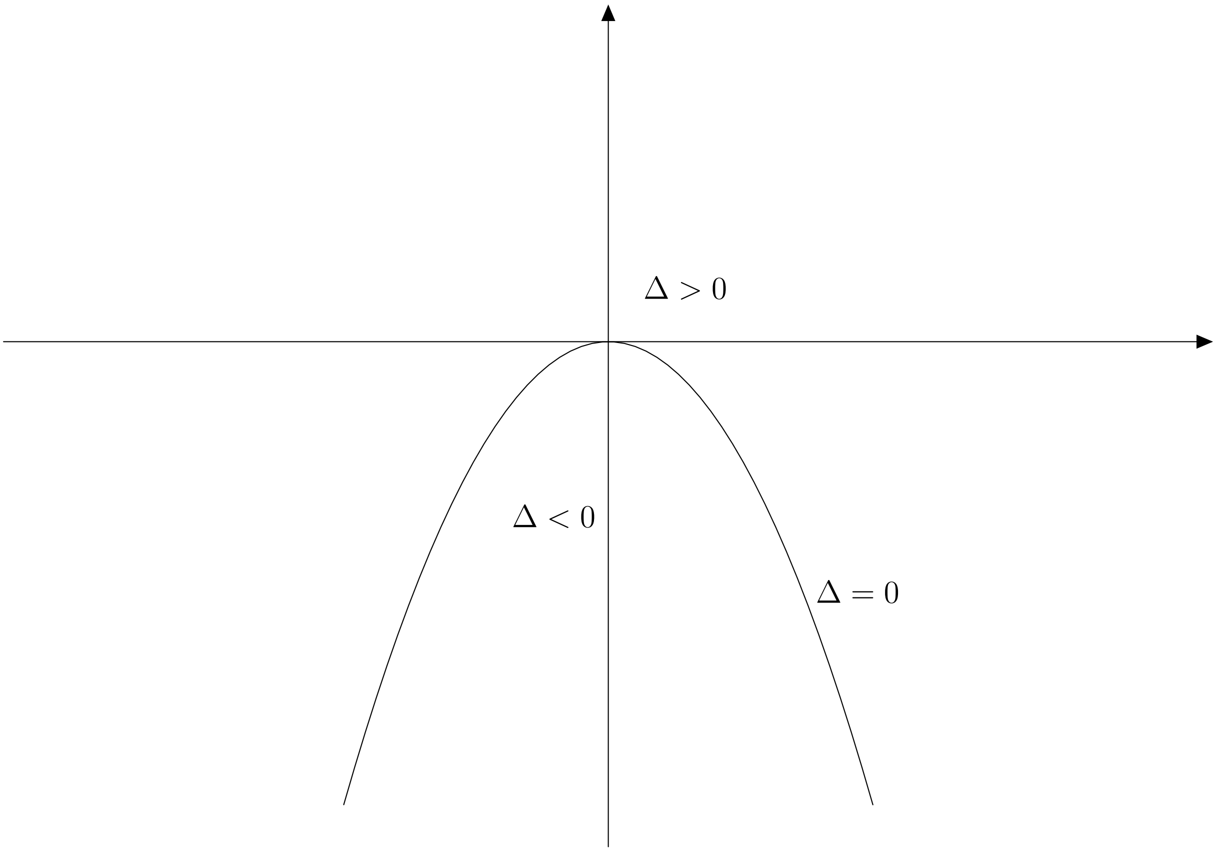
O determinante (2.3) pode ser escrito como

$$D = \left(a + \frac{\beta}{2} b \right)^2 - \frac{b^2}{4} \Delta \tag{2.5}$$

em que $\Delta = \beta^2 + 4\alpha$.

Como Δ só depende das constantes de estrutura do conjunto $\mathcal{Z}$, obtemos três classes de números dependendo de Δ ser positivo, negativo ou nulo. Esses casos determinam, no plano cartesiano (β, α), três regiões tal como ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Regiões do plano (β, α) de acordo com o sinal de Δ.



A seguir, analisaremos a possibilidade de existência de divisores de zero em cada classe de números de acordo com o valor de Δ.

1- $\Delta = \beta^2 + 4\alpha = 0$**:** Os números tais que $\Delta = 0$ são chamados de parabólicos. Neste caso, o determinante D assume a expressão

$$D = \left(a + \frac{\beta}{2}b\right)^2$$

e $D = 0$ leva aos divisores de zero dados por $a = -\dfrac{\beta}{2}b$. As soluções do sistema (2.4) são da forma $z = \dfrac{(-\beta y)}{2} + y\mathbf{u}$.

2- $\Delta = \beta^2 + 4\alpha < 0$**:** Os números tais que $\Delta < 0$ são chamados de elípticos. Neste caso,

$$\begin{aligned} D &= \left(a + \frac{\beta}{2}b\right)^2 - \left(\alpha + \frac{\beta^2}{4}\right)b^2 \\ &= a^2 + a\beta b - b^2\alpha. \end{aligned}$$

A equação $D = 0$ admite soluções se $\Delta' = b^2.(\beta^2 + 4\alpha) \geq 0$. Como, por hipótese, $\Delta = \beta^2 + 4\alpha < 0$, segue neste caso que não há divisores de zero. Sendo assim, a única solução da equação $z_0 z = 0$ é $z = 0$. Da mesma forma, a única solução de

$z_0 z = 1$ é expressa por $z = \dfrac{1}{z_0}$, e é dada pela solução do sistema (2.2) em função de a e b por:

$$x = \frac{-a - b\beta}{b^2\alpha - a^2 - ba\beta} \;\text{ e }\; y = \frac{b}{b^2\alpha - a^2 - ba\beta}.$$

3- $\Delta = \beta^2 + 4\alpha > 0$: Os números tais que $\Delta > 0$ são chamados de hiperbólicos. Neste caso,

$$\begin{aligned} D &= \left(a + \frac{\beta}{2}b\right)^2 - \left(\alpha + \frac{\beta^2}{4}\right)b^2 \\ &= a^2 + a\beta b - b^2\alpha. \end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$, segue que a equação $D = 0$ admite duas soluções reais para a, já que seu discriminante é $\Delta' = b^2.(\beta^2 + 4\alpha) \geq 0$.

Os divisores de zero são dados por $a = \dfrac{-b\beta \pm |b|\sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}{2}$.

Para cada um dos 3 casos podemos definir sistemas canônicos para o conjunto $\mathcal{Z}$:

1. Para $\Delta < 0$ o sistema canônico é dado por: $u^2 = -1$, $(\alpha = -1, \beta = 0)$. Este é o caso dos números complexos.
2. Para $\Delta = 0$ o sistema canônico é dado por: $u^2 = 0$, $(\alpha = 0, \beta = 0)$.
3. Pra $\Delta > 0$ o sistema canônico é dado por $u^2 = 1$ $(\alpha = 1, \beta = 0)$. Esse sistema está relacionado com a geometria pseudo-euclidiana (espaço-tempo).

É possível verificar que os sistemas determinados de acordo com o sinal de Δ são isomórficos ao sistema canônico correspondente [6].

Define-se o conjugado de um número hipercomplexo $z = x + \mathbf{u}y$ no conjunto $\mathcal{Z}$ como sendo $\overline{z} = x + \beta y - \mathbf{u}y$. No caso do sistema canônico, $\beta = 0$ o conjugado é definido como: $\overline{z} = x - \mathbf{u}y$. O produto $z.\overline{z} = x^2 - \alpha y^2 + \beta xy \in \mathbb{R}$ é definido como o quadrado do módulo de z.

2.2 Números Hiperbólicos

O conjunto dos números hiperbólicos é uma derivação do conjunto dos números hipercomplexos $\mathcal{Z}$ e é obtido quando $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ isto é:

$$\mathcal{H} = \{z = x + \mathbf{u}y; \mathbf{u}^2 = 1; x, y \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \notin \mathbb{R}\}. \tag{2.6}$$

Assim como no conjunto dos hipercomplexos e dos números complexos, chamamos de $\overline{z} = x - \mathbf{u}y$, o conjugado hiperbólico e definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{|z.\overline{z}|} = \sqrt{|x^2 - y^2|}$.

A um ponto $P = (x, y)$ do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, associamos o número hiperbólico $z = x + \mathbf{u}y$.

Podemos definir o quadrado da distância de um ponto P à origem como

$$D = z.\overline{z} = x^2 - y^2.$$

A distância do ponto à origem do plano cartesiano é dada por

$$\rho = \sqrt{|z.\overline{z}|} = \sqrt{|D|}$$

em que

$$D = x^2 - y^2.$$

Nesse plano cartesiano hiperbólico o inverso multiplicativo de um número $z \neq 0$, quando existir, é dado por $\dfrac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z.\overline{z}}$. Se $z.\overline{z} = x^2 - y^2 = 0$, temos $y = \pm x$ e o ponto P de coordenadas (x, y) é um ponto dos eixos bissetores do plano cartesiano. Esses eixos representam os divisores de zero de $\mathcal{H}$. Se $z\overline{z} = x^2 - y^2 \neq 0$, o ponto $P = (x, y)$ se encontra em um dos setores definidos na Sessão 1.3 do capítulo anterior.

Vemos claramente que o plano de Minkowski representa a geometria associada aos números hiperbólicos, assim como o plano euclidiano representa a geometria dos números complexos.

Capítulo 3

Atividades para sala de aula

3.1 Atividades

3.1.1 Atividade 1 – Construção da hipérbole equilátera

Em uma janela do programa Geogebra [2], execute os seguintes comandos:

1. Trace um círculo de centro F_1, sobre o eixo Ox do plano cartesiano, usando a opção criar circunferência a partir de seu centro e um de seus pontos. Em seguida, clique no ponto da circunferência que foi criado e selecione a opção exibir objeto para esconder esse ponto.

2. Crie um ponto A sobre a circunferência traçada anteriormente.

3. Crie um ponto F_2 sobre o eixo Ox exterior à circunferência traçada, de tal forma que a mediatriz do segmento F_1F_2 intercepte a circunferência traçada no ponto B, tal que o ângulo $\sphericalangle F_1BF_2$ seja reto.

4. Crie a reta r que passa por A e F_1.

5. Crie o segmento AF_2 e, em seguida trace a sua mediatriz t.

6. Nomeie por P, o ponto de interseção entre r e t .

7. Use o comando de "lugar geométrico"para construir o lugar geométrico do ponto P quando A percorre a circunferência.

3.1.2 Atividade 2

Siga as instruções abaixo, a fim de caracterizar a curva traçada no fim da atividade anterior.

1. Usando a caixa de entrada do Geogebra, digite: distância(P, F_1) e distância(P, F_2) para determinar a medida dos segmentos PF_1 e PF_2.

2. Qual é o valor da diferença $|PF_1–PF_2|$?

3. Ao movimentar o ponto A, o que se observa a respeito da diferença calculada no item anterior?

4. De acordo com a observação feita, qual é a característica da curva construída?

5. Em função do que foi observado, determine a equação dessa curva.

3.1.3 Atividade 3: A circunferência da geometria de Minkowski

1. Crie os pontos de coordenadas $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, para c de sua escolha.

2. A partir do que foi determinado na atividade anterior, determine a abscissa do ponto $P = (x_0, 0)$, $(x_0 > 0)$ da hipérbole equilátera de foco F_1 e F_2.

3. Use o comando para traçar a hipérbole dados seus focos e um de seus pontos.

4. Essa hipérbole é uma circunferência da geometria de Minkowski. Sendo assim, ela é o conjunto dos pontos que equidistam da origem $O = (0, 0)$.

5. Determine a distância de um ponto qualquer (x_0, y_0) dessa circunferência até a origem.

6. Crie um ponto Q qualquer sobre essa circunferência e construa o ponto Q' diametralmente oposto a ele.

7. Crie dois pontos T e V quaisquer sobre essa circunferência. Trace a corda TV. Movimente esses pontos para analisar as possíveis posições dessa corda.

8. As retas $x = y$ e $x = -y$ são chamadas de assíntotas dessa hipérbole. Arraste o ponto Q, criado no item 6, afastando-o da origem. Observe que ele se aproxima dessas retas.

9. Como se movimenta o ponto Q'? Como se comporta a distância de Q a Q' nessa geometria?

3.1.4 Atividade 4: Equação da reta tangente

1. Definição: a reta que intercepta a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, somente no ponto $P = (x_0, y_0)$ dessa curva, é chamada de reta tangente à hipérbole no ponto P.

2. Usando seus conhecimentos de geometria analítica e a definição acima, determine a equação da reta tangente à curva $x^2 - y^2 = 1$ que passa pelo ponto $P = (\sqrt{2}, 1)$.

3. Usando seus conhecimentos de geometria analítica e a definição acima, determine a equação da reta tangente à curva $x^2 - y^2 = 1$ que passa por um ponto $P = (x_0, y_0)$ qualquer dessa curva.

4. O que pode ser dito a respeito dos coeficientes angulares (em relação ao eixo Ox) da tangente à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ no ponto $P = (x_0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, e da reta que une esse ponto à origem?

3.1.5 Atividade 5: Perpendicularismo no plano de Minkowski

1. Tomando-se o coeficiente angular de uma reta em relação à reta $y = x$, repita o que foi feito no item 4 da atividade anterior. (suponha que as coordenadas do ponto $P = (x_0, y_0)$ seja tais que $x_0 y_0 > 0$)
2. Use a propriedade obtida no item anterior para definir a condição de perpendicularismo entre duas retas. Essa será a condição de perpendicularismo para a geometria de Minkowski.

3.1.6 Atividade 6

1. Construa no Geogebra uma circunferência euclidiana de centro O e raio r e trace uma corda AB. Selecione a opção ponto médio e crie o ponto médio do segmento AB. Trace a reta que passa pelo ponto médio criado e a origem da circunferência. Movimente a corda AB.
2. No âmbito de geometria euclidiana, mostre que se a reta suporte a um raio de uma circunferência intercepta uma corda no seu ponto médio, essa reta é perpendicular à corda.
3. Crie no Geogebra a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, trace uma corda AB em um dos braços da hipérbole. Selecione a opção ponto médio para criar o ponto médio M do segmento AB, em seguida trace a reta OM. Movimente a corda AB.
4. Mostre que o mesmo resultado do item 2 vale no âmbito da geometria de Minkowski.
5. Mostre que no âmbito da geometria de Minkowski, também vale a volta, i.e. se a reta suporte a um raio é perpendicular a uma corda de uma circunferência, ela passa pelo seu ponto médio.

3.1.7 Atividade 7 - Números Hiperbólicos

Considere o conjunto de números $z = x + \mathbf{u}y$ em que $x, y \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \notin \mathbb{R}$. Definimos o quadrado da distância de z até a origem como $z\overline{z} = (x + \mathbf{u}y)(x - \mathbf{u}y)$.

1. Para os números complexos, temos $\mathbf{u}^2 = -1$. Determine o conjunto dos números complexos que distam R de 0 ($0 = 0 + 0i$).
2. Para os números hiperbólicos, temos $\mathbf{u}^2 = 1$. Determine o conjunto de números hiperbólicos que distam R de 0 ($0 = 0 + 0\mathbf{u}$).
3. Encontre as soluções $z = x + yi$, da equação $z_0 z = 1$, no conjunto dos números complexos, em que $z_0 = x_0 + y_0 i$, com $z_0 \neq 0$.
4. Encontre as soluções $z = x + \mathbf{u}y$, da equação $z_0 z = 1$ no conjunto dos números hiperbólicos, em que $z_0 = x_0 + \mathbf{u}y_0$, com $z_0 \neq 0$.
5. Represente no plano cartesiano, os conjuntos dos pontos obtidos nos itens 2 e 4.
6. Faça uma tabela com duas colunas, uma para cada tipo de número (complexo e hiperbólico); analise as diferenças entre as operações (uma operação por linha) de soma/subtração e multiplicação/divisão nesses dois conjuntos.

3.2 Atividade 8

1. Dado um ponto $P = (x, y)$ do plano cartesiano, correspondente ao número hiperbólico $z = x + \mathbf{u}y$, qual é o ponto do plano correspondente a $\mathbf{u}z$?

2. Represente este ponto para várias escolhas de P (pelo menos um ponto em cada quadrante).

3. O que se conclui a respeito da multiplicação de um número hiperbólico por $a\mathbf{u}$ em que a é real?

4. Repita os itens 2 e 3 no caso dos números complexos (i.e. trocando $\mathbf{u}$ por i).

5. Repita os itens 1-4 no caso da multiplicação por k, em que k é real.

6. Analise agora a decomposição do produto de $z = x + \mathbf{u}y$ por $w = k + a\mathbf{u}$, i.e. dado o ponto $P = (x, y)$, determine o ponto correspondente a $wz = kz + a\mathbf{u}z$ usando as observações acima.

3.3 Explicação das atividades

3.3.1 Atividade 1

Para começar esta atividade os alunos precisam ter um conhecimento prévio de geometria analítica e sobre a hipérbole euclidiana. Será explanado aos alunos que o plano cartesiano estudado na geometria analítica é o mesmo plano que usaremos na nova geometria, a qual possui semelhanças e diferenças com os conceitos que eles já conhecem. A explicação feita a seguir envolve conceitos desenvolvidos durante a construção da Atividade 1 e que pode ser utilizada caso algum aluno questione.

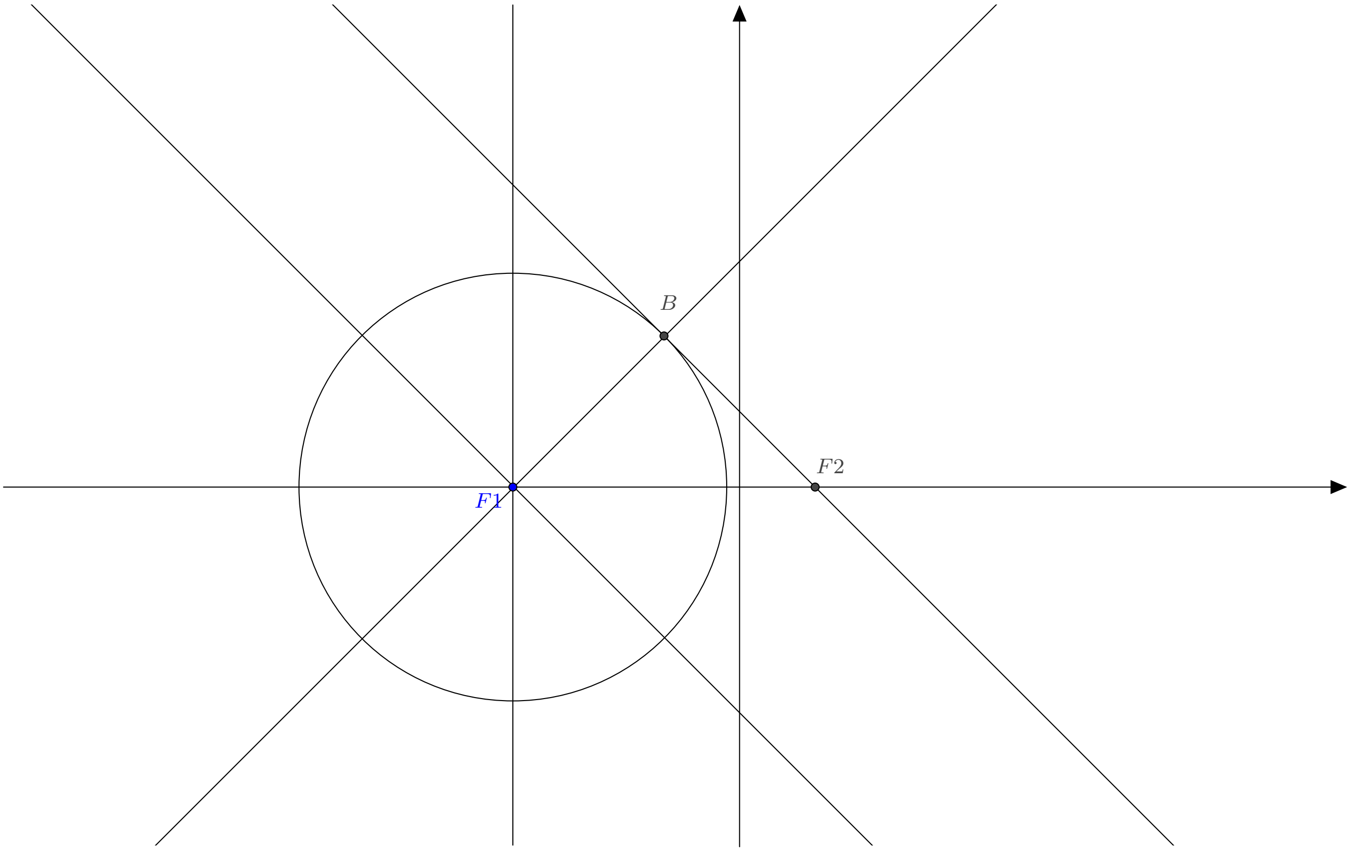
1. Estudo da circunferência e raio : a circunferência é definida como sendo o conjunto de pontos equidistantes do seu centro. É uma boa oportunidade para questionar os alunos como se calcula a distância entre dois pontos. Acredito que a maioria dos alunos irá responder que a distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ é dada por:
$$d_(AB) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}.$$

2. Ao pedir que os alunos escolham F_2, externo à circunferância, tal que seja formado um ângulo reto, o ideal é deixar que os alunos busquem essa construção com base no conhecimento adquirido até então. Uma forma de ajudar nessa construção é:

   (a) Na circunferência traçada escolhemos o segmento F_1B tal que ele forme um ângulo de 45° com o eixo x. Para isso, basta traçar a perpendicular ao eixo Ox passando por F_1 e em seguida traçar a bissetriz do ângulo formado.

   (b) Em seguida crie a reta perpendicular à bissetriz traçada no item anterior que passa por B. Marque como sendo F_2 o ponto da perpendicular que intercepta o eixo Ox (Ver Figura 3.1).

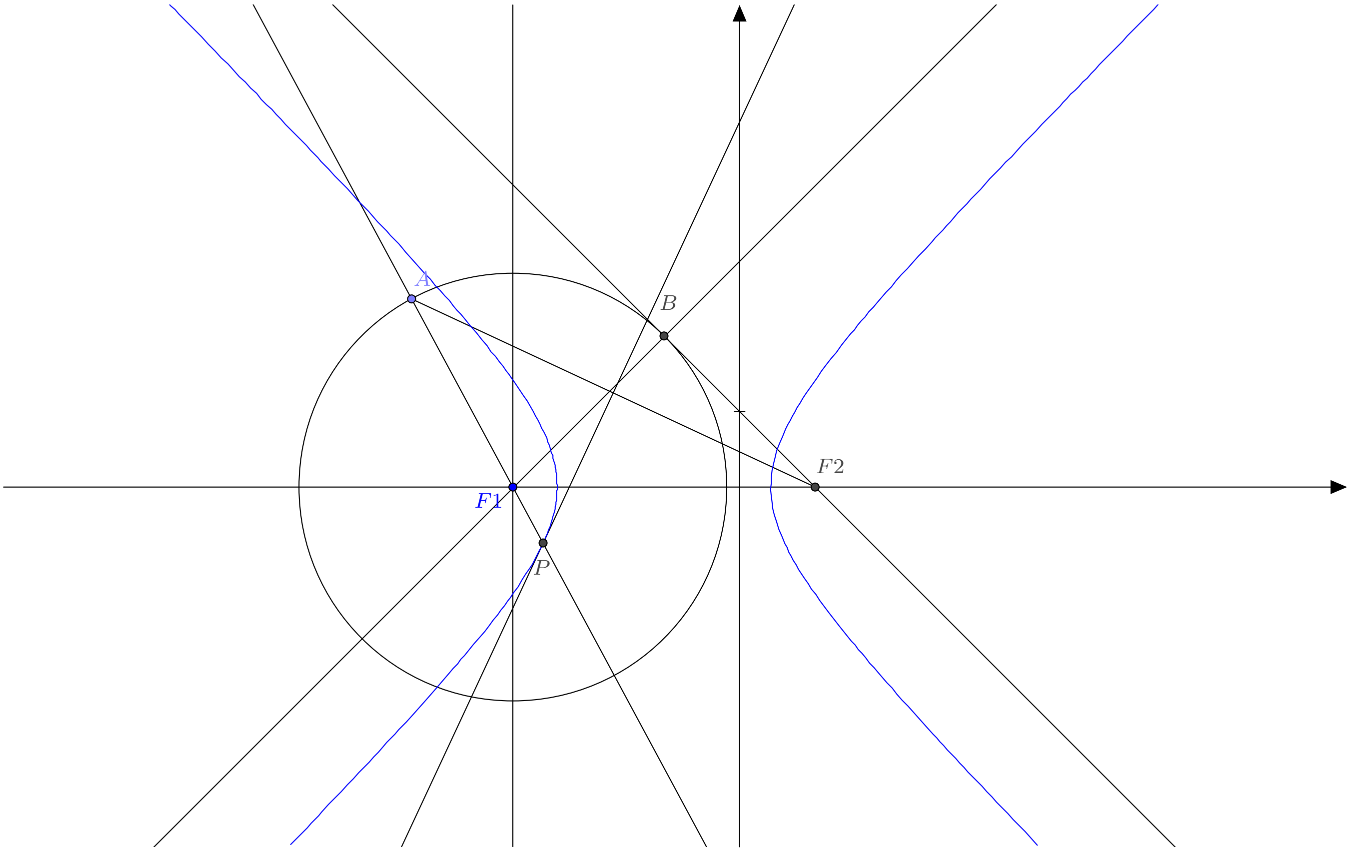
Figura 3.1: Construção da Hipérbole - passo 3



Afirmamos ainda que o segmento BF_2 é tangente à circunferência.

Ao chegar no passo 7 da construção (Figura 3.2), o aluno deverá perceber que é o ponto P que irá descrever a hipérbole quando o ponto A completar uma volta na circunferência criada no passo 1. Podemos mostrar aos alunos que a hipérbole construída é classificada como equilátera pois é possível verificar que os pontos sobre a curva obedecem à relação $x^2 - y^2 = a^2$, onde a é uma constante (Será demonstrado no item 5 da Atividade 2).

Figura 3.2: Construção da Hipérbole -passo 7



3.3.2 Atividade 2: Questionário

Para responder a essas perguntas os alunos vão usar a construção feita na Atividade 1.

1. Os alunos vão anotar os valores de PF_1 e $PF2$ que são as medidas dos segmentos mostrados na janela de álgebra. Podemos também calcular esses valores usando a fórmula mencionada na explicação da Atividade 1.

2. O valor da diferença $|d(F_1, P)–d(F_2, P)|$ será obtido pela leitura da janela de álgebra do Geogebra.

3. Ao movimentar o ponto A sobre a circunferância e observar as alterações presentes na janela de álgebra, vamos deixar os alunos chegarem à conclusão de que o valor encontrado no item 2 é uma constante k. Ou seja o valor de $|d(F_1, P)–d(F_2, P)|$ não se altera.

4. Durante a construção da hipérbole equilátera da Atividade 1, foi observado que o ponto P ao percorrer a mediatriz t, descreve a curva que forma a hipérbole e, de acordo com o item anterior, temos que $|d(F_1, P)–d(F_2, P)| = k$.

   De fato, observamos que, sendo P um ponto da mediatriz t podemos afirmar que $d_{PA} = d_{PF_2}$ e podemos ainda escrever que $d_{PF_1} = r + d_{PA}$. Logo, para o ponto P sobre a hipérbole temos:

$$d_{PF_1} - d_{PF_2} = r + d_{PA} - d_{PF_2} = r.$$

Dessa forma, podemos afirmar que a constante k do item anterior é igual ao raio r da circunferência traçada na atividade 1. Movimentando o ponto A pela circunferência é possível constatar que a diferença se mantêm constante para qualquer P que descreve a hipérbole.

Podemos afirmar que essa curva é formada pelo conjunto de pontos que obedecem a

$$|d(F_1, P) – d(F_2, P)| = r.$$

Sendo assim, os alunos devem chegar à conclusão de que chamamos de hipérbole a curva caracterizada como sendo o conjunto de pontos que obedecem a essa relação.

5. De acordo com o que foi feito nos itens anteriores, tomaremos $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (x_2, 0)$, $A = (x_a, 0)$ e $P = (x_p, 0)$; nesse caso em que F_1, A e F_2 são coilineares, P é ponto médio de AF_2. Para determinar a equação dessa curva temos:

   (a) Distância F_1F_2 é dada por:

   $$\begin{aligned} (x_2 - c)^2 &= 2r^2 \\ x_2^2 - 2cx_2 + c^2 - 2r^2 &= 0. \end{aligned}$$

   De onde concluímos que $x_2 = -c \pm r\sqrt{2}$, usaremos aqui todas as distâncias em módulo e tomaremos $x_2 = -c + r\sqrt{2}$.

   (b) Distância do ponto A até F_1 é igual ao raio da circunferência, então:

   $$(x_a - c)^2 = r^2.$$

   Portanto, $x_a = c + r$.

   (c) Podemos agora calcular a coordenada do ponto P:

   $$\frac{x_a + x_2}{2} = \frac{c + r + (-c + r\sqrt{2})}{2} = \frac{r + r\sqrt{2}}{2}.$$

Então,

$$d_{PF2} = \frac{r\sqrt{2} - r - 2c}{2}$$

$$d_{PF_1} = \frac{r + r\sqrt{2} - 2c}{2}$$

o que nos permite escrever que:

$$d_{PF_1} - d_{PF_2} = r.$$

Como $\overline{F_1F_2} = 2c$ e como o triângulo F_1BF_2 é isósceles, segue que $r = c\sqrt{2}$.

Usando as coordenadas de $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ e um ponto $P = (x, y)$ da hipérbole, podemos escrever a equação da curva

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = r.$$

Temos

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= r+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\ (x+c)^2-(x-c)^2-r^2 &= 2r\sqrt{(x-c)^2+y^2}.\end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação acima vamos obter

$$x^2(4c^2-r^2)-r^2y^2 = \frac{r^2}{4}(4c^2-r^2).$$

Como $r=c\sqrt{2}$ podemos escrever a equação acima como

$$x^2-y^2 = \frac{r^2}{4}.$$

3.3.3 Atividade 3: A circunferência da geometria de Minkowski

1. Usando o Geogebra os alunos vão criar os focos de uma hipérbole equilátera de acordo com o que foi feito na Atividade 1.
2. Para determinar x_0 em $P=(x_0,0)$ vamos usar o conceito de distância entre dois pontos segundo a geometria de Minkowski que é calculada da seguinte forma

   $$d_{AB}=\sqrt{|(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2|}.$$

   Sabendo que $|PF_1-PF_2|=k$, temos

   $$\begin{aligned}d_{PF_1} &= \sqrt{(x_0+c)^2}\\ &= |x_0+c|\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}d_{F_2P} &= \sqrt{(c-x_0)^2}\\ &= |c-x_0|.\end{aligned}$$

   Logo, $|PF_1-PF_2|=|2x_0|=k$. Dessa forma obtemos os seguintes resultados para x_0

   $$x_0 = \frac{k}{2}$$

   ou

   $$x_0 = -\frac{k}{2}.$$

3. Construção no Geogebra usando o comando "traçar a hipérbole conhecendo seus focos e um de seus pontos". Para os focos tome os pontos F_1 e F_2 sobre o eixo Ox e para o ponto sobre a hipérbole escolha o ponto $P(x_0, 0)$ de acordo com o que foi feito no item anterior dessa Atividade.

4. Usando o Geogebra, o professor pode mostrar aos alunos que a hipérbole construída possui todos os pontos da curva equidistantes do centro. Sabendo que uma circunferência, com centro na origem, no plano de Minkowski é o lugar geométrico que possui todos os pontos da curva equidistantes da origem, concluímos que essa hipérbole é uma circunferência de Minkowski.

5. Sendo $O = (0, 0)$ a origem do plano e o ponto $P(x_0, y_0)$, a distância de O à P é dada por
$$d_{OP} = \sqrt{|(x_0 - 0)^2 - (y_0 - 0)^2|}$$
$$d_{OP} = \sqrt{|x_0^2 - y_0^2|}.$$
Vimos no item 2 que quando $P = (x_0, 0)$ temos $x_0 = \dfrac{k}{2}$ e a distância de P a origem é igual a $|x_0|$, portanto:
$$x_0^2 - y_0^2 = \frac{k^2}{4}.$$

6. Construção do segmento QQ' que passa pela origem do plano cartesiano. O professor pode mostrar que esse segmento é o diâmetro da circunferência, uma vez que observamos no item anterior que a distância entre O e P é o raio dessa circunferência.

7. Ao criar a corda que passa pelos pontos T e V da hipérbole e movimentar esses pontos os alunos vão experimentar os diferentes tipos de cordas na hipérbole e observar que as coordenadas dos pontos T e V aumentam ou diminuem conforme o tamanho euclidiano do segmento VT.

8. Quando o ponto Q se afasta da origem do sistema podemos perceber que ele se aproxima das retas chamadas de assíntotas. Observamos que, conforme aumentamos (ou diminuímos) simultaneamente os valores da abscissa e da ordenada do ponto Q, ele se aproxima cada vez mais da reta $y = x$. E quando aumentamos (ou diminuímos) o valor da abscissa e diminuímos (ou aumentamos) o valor da ordenada o ponto Q se aproxima da reta $y = -x$. Podemos formular essa afirmação da seguinte forma: considere a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$. Podemos escrever
$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$
ou
$$y = -\sqrt{x^2 - 1}.$$
Após simplificar a expressão do radicando relembre o conceito de módulo e então podemos escrever
$$y = |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$
Quando x for muito grande a expressão do radicando tende a 1 e y tende a $|x|$.

Sendo assim, podemos pensar que a hipérbole está muito próxima do par de retas $y = \pm x$.

9. Ao movimentar o ponto Q sobre a curva, percebemos que Q' se movimenta simetricamente e as distâncias d_{OQ} e $d_{OQ'}$ se mantêm constantes independentemente da movimentação dos pontos.

3.3.4 Atividade 4

1. O professor pode conferir se os alunos compreenderam a definição descrita pedindo que eles ilustrem essa definição.

2. Para determinar a equação da reta tangente à hipérbole no ponto dado, procedemos da seguinte forma: a equação da reta tangente à hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, por $P = (\sqrt{2}, 1)$ é dada por $y = ax + b$ já que o ponto P não está sobre o eixo Ox. Temos
$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & ax + b \\ x^2 - y^2 & = & 1. \end{array}\right. \tag{3.1}$$
Sabemos que a reta intercepta a curva no ponto P, o que nos permite escrever
$$\begin{array}{rcl} x^2 - (ax+b)^2 & = & 1 \\ (1-a^2)x^2 - 2abx - (b^2+1) & = & 0. \end{array}$$
Sabemos que essa reta intercepta a curva em um único ponto, portanto o discriminante da equação encontrada será nulo:
$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & 4b^2 + 4 - 4a^2 = 0 \\ b^2 & = & a^2 - 1. \end{array}$$
Não podemos ter $a^2 < 1$ pois, do contrário teríamos $b^2 < 0$ com b real. Portanto, $a^2 \geq 1$ e $b \geq 0$.

Dessa forma, sabendo que $a^2 \geq 1$ e que a reta passa por P, podemos afirmar que $1 = a\sqrt{2} + b$, então $b = 1 - a\sqrt{2}$.
$$\begin{array}{rcl} (1 - a\sqrt{2})^2 & = & a^2 - 1 \\ a^2 - 2a\sqrt{2} + 2 & = & 0 \\ (a - \sqrt{2})^2 & = & 0. \end{array}$$
Portanto, $a = \sqrt{2}$ e $b = -1$. Portanto a equação da reta tangente que passa por $P = (\sqrt{2}, 1)$ é $y = \sqrt{2}x - 1$.

3. Dado um ponto $P = (x_0, y_0)$ qualquer, sobre a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, para determinar a equação da reta tangente a essa hipérbole pelo ponto P vamos proceder de forma análoga ao item anterior, supondo-se que $y_0 \neq 0$. Vamos obter o mesmo sistema com as equações da reta tangente e a da hipérbole
$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & ax + b \\ x^2 - y^2 & = & 1. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Efetuando a substituição feita na questão anterior, vamos obter a mesma relação $b^2 = a^2 - 1$, e como já foi analisado, o valor de a^2 não pode ser menor que 1 pois, b^2 menor que zero é uma contradição pois $b \in \mathbb{R}$. Usando $P = (x_0, y_0)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} a^2 - 1 &= (y_0 - ax_0)^2 \\ (1 - x_0^2)a^2 + 2y_0x_0a - (y_0^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Da equação do segundo grau encontrada temos que

$$\Delta = 4(y_0^2 + 1 - x_0^2).$$

Como $x_0^2 - y_0^2 = 1$, obtemos que $\Delta = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} a &= \frac{-y_0x_0}{1 - x_0^2} \\ a &= \frac{x_0}{y_0}. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos que $b = \dfrac{-1}{y_0}$ e concluimos que a equação da reta tangente é dada por

$$y = \frac{x_0}{y_0}x - \frac{1}{y_0}.$$

Caso $y_0 = 0$, temos o ponto $P = (x_0, 0)$ e pela equação da hipérbole obtemos que $x_0 = \pm 1$ e a equação da reta que tangencia a hipérbole em P intercepta o eixo Ox no ponto x_0 paralelamente ao eixo Oy, logo a equação da reta é $x = x_0 = \pm 1$.

4. Vimos que a equação da reta tangente à hipérbole pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ é dada por $y = \dfrac{x_0}{y_0}x - \dfrac{1}{y_0}$ quando $y_0 \neq 0$. Determinamos a equação da reta que une esse ponto P à origem $(0, 0)$ por

$$y = mx \tag{3.3}$$

com $m = \dfrac{y_0}{x_0}$. Sobre os coeficientes angulares dessas retas podemos afirmar que o produto entre eles é igual a 1. Ou seja um é o inverso do outro.

$$\frac{y_0}{x_0}.\frac{x_0}{y_0} = 1.$$

3.3.5 Atividade 5: Perpendicularismo no plano de Minkowski

1. Seja θ o ângulo formado entre a reta tangente e a reta $y = x$ e γ o ângulo formado entre a reta $y = x$ e a reta t, que passa por P e a origem, no caso $x_0.y_0 > 0$. Temos:

   (a) $\tan(\theta)$ é o coeficiente angular da reta tangente à hipérbole em relação à reta $y = x$;

   (b) $\tan(\gamma)$ é o coeficiente angular da reta t em relação à reta $y = x$.

Seja $\tan(\beta) = \dfrac{x_0}{y_0}$ o coeficiente angular da reta tangente em relação ao eixo Ox e $\tan(\alpha) = \dfrac{y_0}{x_0}$ o coeficiente angular da reta t em relação ao eixo Ox. Temos

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \tan(\beta - \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{\tan(\beta) - \tan(\frac{\pi}{4})}{1 + \tan(\beta)\tan(\frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{x_0 - y_0}{y_0 + x_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -tan(\gamma) &= \frac{x_0 - y_0}{x_0 + y_0} \\ tan(\gamma) &= -\frac{x_0 - y_0}{x_0 + y_0}. \end{aligned}$$

Observamos que o quociente entre esses coeficientes é igual a -1. Ao concluir essa demonstração, o professor pode questionar os alunos o que aconteceria se a reta referência fosse $y = -x$. Sugira que os alunos façam um desenho e percebam que em relação à reta $y = -x$ os coeficientes angulares vão se comportar de forma análoga.

2. No plano de Minkowski definimos que duas retas são perpendiculares sempre que o quociente entre seus coeficientes angulares, em relação às retas $y = \pm x$, for igual a -1.

3.3.6 Atividade 6

1. Construção da circunferência euclidiana, de uma corda AB e da reta s que passa pelo ponto médio de AB e o centro da circunferência. Ao movimentar os pontos A e B os alunos podem observar que a reta r se movimenta de acordo com as mudanças no comprimento da corda.

2. Para mostrar que a reta suporte ao raio da circunferência é perpendicular a uma corda passando pelo seu ponto médio, vamos usar a congruência de triângulos (caso LLL) para concluir que o ângulo formado entre esses segmentos é reto.

   Dada a corda AB da circunferência interceptada pelo raio OP no ponto M, temos que o segmento AM é congruente ao segmento MB. Traçamos os segmentos OB e OA para obtermos os triângulos MAO e BMO congruentes pelo critério LLL. Sendo M o ponto médio de AB, temos que

$$\sphericalangle AMO + \sphericalangle OMB = 180.$$

   Concluimos que $\sphericalangle OMB$ é reto e portanto, essas retas são perpendiculares.

3. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ os vetores diretores dessas retas, mostramos o mesmo resultado na geometria de Minkowski provando que $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Como foi explicado no Capítulo 1 Proposição 1.5.

4. Sejam **u** e **v** os vetores diretores dessas retas, mostramos o mesmo resultado na geometria de Minkowski usando que $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Como foi explicado no Capítulo 1 Proposição 1.5.

3.3.7 Atividade 7: Números Hiperbólicos

De posse das informações dadas temos:

1. Dado $z = x + yi$ e sabendo que R é a distância de z até a origem, vamos analisar o comportamento do conjunto de pontos P que obedecem a essa característica. Sabendo que
$$R^2 = z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$
o aluno vai perceber que esse conjunto de pontos é uma circunferência euclidiana.

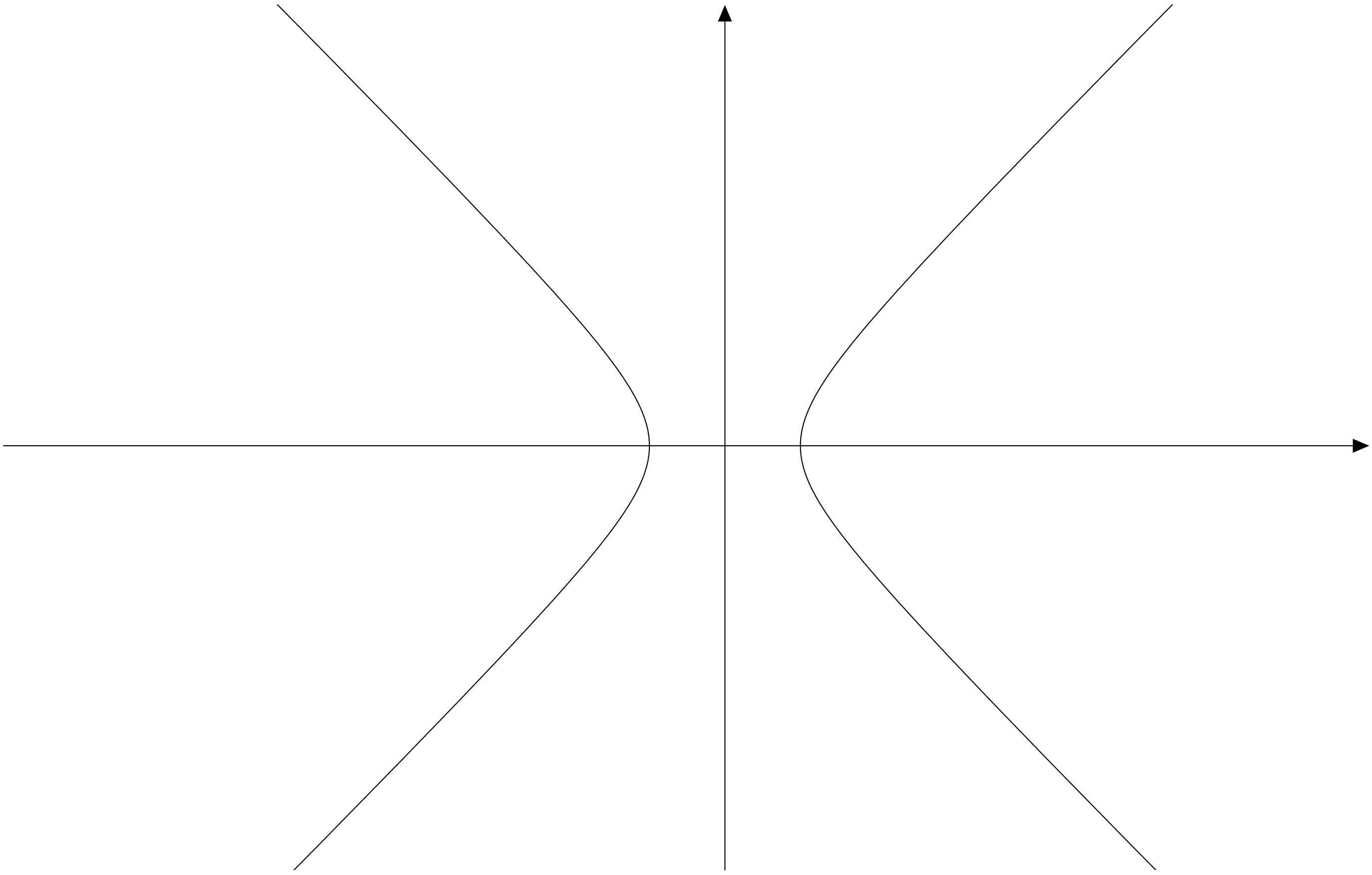
2. De forma análoga ao observado no item anterior, temos que
$$R^2 = z\overline{z} = (x + \mathbf{u}y)(x - \mathbf{u}y) = x^2 - y^2$$
e esse conjunto de pontos é uma circunferência no plano de Minkowski.

3. Para encontrar as soluções do tipo $z = x + iy$, segue:
$$\begin{array}{rcl} 1 & = & z_0 z \\ 1 & = & (x_0 + iy_0)(x + yi) \\ 1 & = & x_0 x - yy_0 + i(x_0 y + y_0 x). \end{array}$$
Ao resolver o sistema correspondente vamos obter que as soluções z são do tipo:
$$z = \frac{x_0 - y_0 i}{x_0^2 + y_0^2}.$$
Podemos chamar a atenção dos alunos para o fato de que essa expressão é igual a $\dfrac{\overline{z_0}}{z_0\overline{z_0}}$.

4. Procedendo de forma análoga ao item anterior, vamos obter que as soluções são do tipo
$$\frac{x_0 - y_0\mathbf{u}}{x_0^2 - y_0^2};$$
aqui também temos que essa solução corresponde à $\dfrac{\overline{z_0}}{z_0\overline{z_0}}$

5. Ao representar graficamente os itens 2 e 4 vamos obter uma circunferência no plano de Minkowski. Ver Figura 3.3.

Figura 3.3: Hipérbole equilátera



6. Ao construir uma tabela, com as quatro operações, comparativa dos números complexos com os hiperbólicos o aluno será capaz de perceber as características que diferenciam as duas classes de números. Segue a tabela comparativa.

Operação	Operações no complexos	Operações nos hiperbólicos
$z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$	$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathbf{u}$
$z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$	$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathbf{u}$
$z_1 z_2$	$(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i$	$(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\mathbf{u}$
$\dfrac{z_1}{z_2}$	$\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + (y_1x_2 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}$	$\dfrac{x_1x_2 - y_1y_2 + (x_2y_1 - x_1y_2)\mathbf{u}}{x_2^2 - y_2^2}$

3.4 Atividade 8

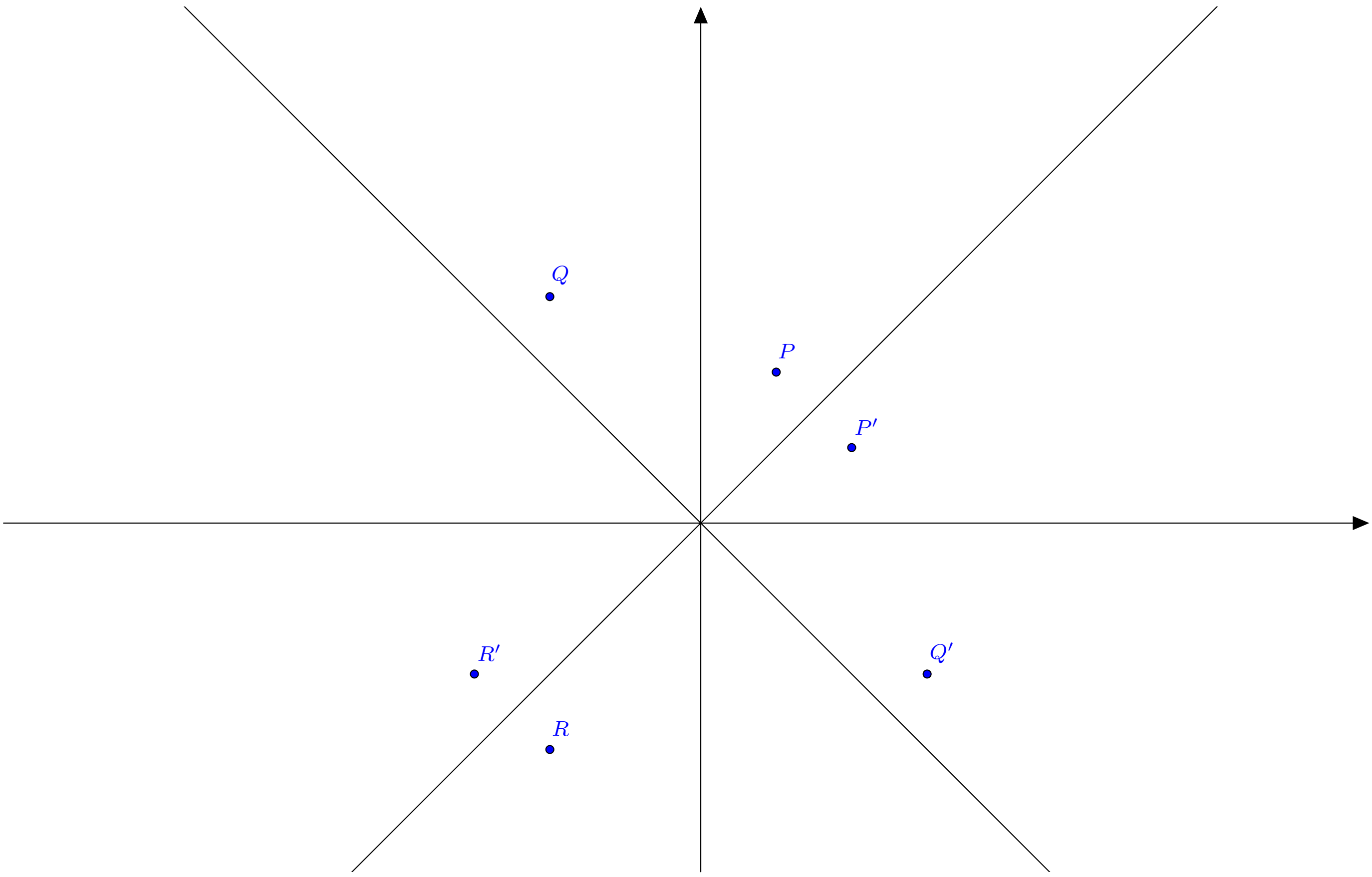
1. Dado o ponto $P = (x, y), z = x + \mathbf{u}y$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}z &= \mathbf{u}(x + \mathbf{u}y) \\ &= \mathbf{u}x + \mathbf{u}^2 y \\ &= \mathbf{u}x + y. \end{aligned}$$

O ponto do plano correspondente a $\mathbf{u}z$ é $P' = (y, x)$.

2. Usando o software Geogebra o aluno fará a escolha de pontos para cada um dos quadrantes e constatará que esses pontos são simétricos em relação ao eixo $y = x$. Ver Figura 3.4.

Figura 3.4: Eixos bissetores



3. Ao multiplicarmos um número hiperbólico $z = x + y\mathbf{u}$ por $a\mathbf{u}$ com $a \in \mathbb{R}$ vamos obter

$$\begin{aligned} z.a\mathbf{u} &= a\mathbf{u}(x + y\mathbf{u}) \\ &= ay + ax\mathbf{u}. \end{aligned}$$

   Podemos concluir que as coordenadas do ponto obtido são equivalentes às coordenadas opostas de z multiplicadas por a, ou seja, vamos obter um ponto $P' = a.(y, x)$ quando $P = (x, y)$.

4. Ao repetir os passos dos itens 3 e 4 com os números complexos $z = x + yi$, vamos obter $z' = -y + xi$, que representam no plano cartesiano pontos simétricos aos pontos dados em relação ao eixo Ox.

5. Ao efetuarmos a multiplicação de z por k, vamos obter $kz = kx + ky\mathbf{u}$, o ponto do plano que corresponde a esse produto é $P = (kx, ky)$. Neste caso, se $P = (x, y)$, $P' = (kx, ky)$ está na reta que liga a origem a P.

   Ao considerar os mesmos cálculos para z complexo, percebemos que o processo ocorre de forma análoga.

6. Sendo $z = x + \mathbf{u}y$ e $w = k + a\mathbf{u}$, temos que $zw = kx + ay + \mathbf{u}(ax + ky)$. Dado um ponto $P = (x, y)$, o ponto correspondente a wz seria da forma $P'(kx + ay, ax + ky)$.

   P' pode ser construído usando as observações anteriores como soma de dois números: $(kx, ky) + (ay, ax)$, que são o ponto (kx, ky) e o simétrico, em relação ao eixo $y = x$, de (x, y) vezes a real.

Considerações finais

O estudo da geometria é um campo vasto e rico em possibilidades, o qual proporciona a compreensão do espaço em que vivemos. Através da geometria é possível relacionar o pensamento abstrato com o concreto e proporcionar um aprendizado da matemática utilizando uma abordagem que seja atraente para os alunos; podemos usar um problema para fins de motivação e aplicação de conceitos importantes como é descrito por Vollrath [8].

Ao longo desta dissertação, mostramos que o plano cartesiano de Minkowski possui as mesmas propriedades que o utilizado para o estudo da geometria euclidiana, relacionando pontos e vetores na construção dos conceitos e propriedades geométricas. Analisamos a equação e a condição de perpendicularidade de retas no plano de Minkowski e suas propriedades ao interceptar uma circunferência, que aqui demonstramos ser representada graficamente por uma hipérbole equilátera.

Mostramos que no plano de Minkowski um vetor pode ser classificado como tipo tempo, tipo espaço ou isotrópico de acordo com o quadrado do seu comprimento. Não podemos deixar de falar dos números hiperbólicos que possuem sua representação na geometria de Minkowski.

O presente trabalho tem a intenção de mostrar a aplicação de uma geometria não euclidiana no ensino médio como forma de melhorar as habilidades matemáticas e o raciocínio geométrico dos alunos. Com o intuito de aprimorar tais habilidades foi desenvolvida uma atividade que, usando o software Geogebra, interliga os conceitos algébricos já conhecidos pelos alunos com resultados da geometria euclidiana.

Com o objetivo de estimular o pensamento matemático, o aluno é instigado a confrontar os conceitos euclidianos com a geometria não euclidiana e, dessa forma, gerar significado aos conceitos e teoremas estudados.

As atividades apresentadas aqui serão testadas em ambiente escolar com alunos de ensino médio. Espera-se que os resultados dessa aplicação comprovem a eficácia da introdução de propriedades de geometrias não euclidianas no reforço ao ensino de geometria euclidiana.

Devemos ter em mente que o importante é desenvolver em nossos alunos uma sólida construção das habilidades necessárias para se compreender a geometria. O uso de diferentes métodos de ensino, como a introdução da geometria de Minkowski ou outra geometria não euclidiana, possibilitam a mobilização dessas habilidades por parte dos alunos e permitem que eles tenham um novo olhar sobre a geometria euclidiana.

Bibliografia

[1] Yaglom, I.M., Shenitzer, A., Gordon, B. A simple non-euclidean geometry and its physical basis. Ed. Springer, 1979.

[2] GeoGebra-aplicativos matemáticos. Disponível em <geogebra.org>.

[3] Mac Tutor.Hermamm Minkowski, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. 2015. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Minkowski/> Acesso em 15 de setembro de 2020.

[4] O´Connor, J.J.;Robertson, E.F.Herman Mikowski, School of Mathematics and Statics. Scotland: University of St Andrews 2015. Disponível em:<http://www.britannica.com/biography/Hermann-Minkowski> Acesso em 15 de setembro de 2020.

[5] Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E. and Zampetti, P. The mathematics of Minkowski space-time: with an introduction to commutative hypercomplex numbers. Ed. Springer, 2008.

[6] Catono, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Zampetti, P. Geometry of Minkowski Space-Time. Ed. Springer, 2011.

[7] Felsager, B. (2004). Introducing Minkowski geometry using dynamic geometry programs, a short paper for the Topic 10 Study Group at ICME-10, Copenhagen, July 2004.

[8] Vollrath, H. J. (1976).The Place of Geometry in Mathematics Teaching: An Analysis of Recent Developments. Educational Studies in Mathematics 7(4), 431-442.