



**EXPANSÃO ASSINTÓTICA DA DERIVADA
TOPOLÓGICA PARA PROBLEMAS DE AUTOVALOR**

Dirlei Ruscheinsky

**Tese de Doutorado
Ciências Mecânicas**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**EXPANSÃO ASSINTÓTICA DA DERIVADA TOPOLÓGICA PARA
PROBLEMAS DE AUTOVALOR**

Dirlei Ruscheinsky

Orientadora: Carla Tatiana Mota Anflor, Dra. Univ (FGA/ UnB)

Co-Orientador: Antonio André Novotny, Dr. Univ (LNCC)

TESE DE DOUTORADO

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - XXX.XXX

BRASÍLIA/DF: 1 de dezembro de 2020

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Expansão Assintótica da Derivada Topológica para Problemas de Autovalor

Dirlei Ruscheinsky

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARCIAIS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

**Carla Tatiana Mota Anflor, Dra. Univ (FGA/ UnB)
(Orientadora)**

**Antonio André Novotny, Dr. Univ (LNCC)
(Co-orientador)**

**Eder Lima de Albuquerque, Dr. Univ (ENM/ UnB)
(Examinador Interno)**

**Ariosto Bretanha Jorge, Dr. Univ (PGINTEGRIDADE/ UnB)
(Examinador Externo)**

**Thiago José Machado, Dr. Univ (MAT/UFPB)
(Examinador Externo)**

BRASÍLIA/DF, 1 DE DEZEMBRO DE 2020.

FICHA CATALOGRÁFICA

Ruscheinsky, D.
Expansão Assintótica da Derivada Topológica para Problemas de Autovalor
[Distrito Federal] 2020.
xvii, 130 p. (ENM/FT/UnB, Doutor, Ciências Mecânicas, 2020.
Tese de Doutorado - Universidade de Brasília.
Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Mecânica.

Palavras-chave:

- | | |
|------------------------------------|--------------------|
| 1. Derivada Topológica | 2. Otimização |
| 3. Métodos Numéricos I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Ruscheinsky, D.(2020). Expansão Assintótica da Derivada Topológica para Problemas de Autovalor. Tese de Doutorado, Publicação ENM.DM - XXX.XXX, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, xvii, 130 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Dirlei Ruscheinsky.

TÍTULO DA TESE DE DOUTORADO: Expansão Assintótica da Derivada Topológica para Problemas de Autovalor.

GRAU / ANO: DOUTOR / 2020

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta Tese de Doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Dirlei Ruscheinsky

Pergunta: o que é PI?
Matemático: π
Engenheiro : 3.14159...
Físico : 3 dá.

A Deus.
Aos meus pais Pio (in memoriam) e Ione,
À minha esposa Joseneide,
meus filhos Miguel e Gabriela e enteado Matheus.
Aos meus irmãos Dirceu, Nirse, Nelise e Neize.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me ter dado forças para chegar até aqui.

Aos professores Carla Anflor e Antonio André Novotny pela orientação, paciência e, principalmente, pela generosidade em compartilhar seus conhecimentos.

Aos professores Adriano Todorovic Fabro, Ariosto Bretanha Jorge, Éder Lima de Albuquerque e Thiago José Machado por participarem da banca de defesa, por seus comentários e sugestões que só enriqueceram este trabalho.

À minha esposa Neide, aos filhos Miguel e Gabriela e ao enteado Matheus por me apoiarem neste momento tão importante.

Aos meus pais Pio Ruscheinsky (in memoriam) e Ione Teresa Ruscheinsky por me incentivarem a estudar desde criança.

Aos meus irmãos Dirceu, Nirse, Nelise e Neize pelo incentivo em continuar os estudos.

Ao Colegiado de Matemática da UFT por permitir meu afastamento para qualificação e em especial ao meu colega de trabalho e doutorado Fernando Soares de Carvalho, pelas valorosas discussões e contribuições sobre esta tese.

Aos professores e colegas do GMEC, pelo apoio e incentivo de sempre. Em especial ao Davi pela ajuda com o MEC

A FAPDF pelo apoio financeiro para realizar as visitas técnicas no LNCC.

Resumo

Expansão Assintótica da Derivada Topológica para Problemas de Autovalor

Autor: Dirlei Ruscheinsky

Orientador: Carla Tatiana Mota Anflor, Dra. Univ (FGA/ UnB)

Co-Orientador: Antonio André Novotny, Dr. Univ (LNCC)

Programa de Pós Graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, 1 de dezembro de 2020

Muitas estruturas e componentes mecânicos estão expostos a problemas causados pela vibração natural e o controle das frequências e seus respectivos autovalores torna-se crucial para evitar o colapso. Essa classe de problema está frequentemente presente em estruturas como aeronaves, satélites, embarcações, reatores nucleares, entre outros. Neste trabalho são consideradas as análises topológicas assintóticas na norma L^2 e na seminorma H^1 para a solução da equação de Helmholtz Modificada e Problema Estrutural de Suporte Elástico. A derivada topológica mede a sensibilidade de um funcional de forma em relação a uma perturbação de domínio singular infinitesimal. Em particular, a derivada topológica para o problema de difusão, autovalor de membrana e autovalor de vibração em estruturas livres são obtidos em sua forma fechada. A fim de demonstrar a aplicabilidade das fórmulas fechadas da derivada topológica obtidas, vários exemplos numéricos foram apresentados.

Palavras-chaves: Derivada Topológica; Otimização; Métodos Numéricos.

Abstract

THE FULL TITLE OF YOUR DISSERTATION IN ENGLISH

Author: Dirlei Ruscheinsky

Supervisor: Carla Tatiana Mota Anflor, Dra. Univ (FGA/ UnB)

Supervisor: Antonio André Novotny, Dr. Univ (LNCC)

PhD in Mechanical Sciences

Brasília, 2020

Many structures and mechanical components are exposed to problems caused by natural vibration and the control of frequencies and their respective eigenvalues becomes crucial in order to avoid collapse. This class of problem is often present in structures such as aircrafts, satellites, vessels, nuclear reactors, among others. In this work the asymptotic topological analysis in the L^2 norm and H^1 semi-norm for the solution of the Modified Helmholtz equation and Structural Problem on Elastic Support are considered. The topological derivative measures the sensitivity of a shape functional with respect to an infinitesimal singular domain perturbation. In particular, the topological derivative for the diffusion problem, membrane eigenvalue and vibration eigenvalue in free structures are obtained in its closed form. Several numerical examples were presented in order to demonstrate the applicability of the obtained topological derivative closed formulae.

Key-words: Topological Derivative; Optimization; Numerical methods.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Originalidade da Tese	3
1.2	Objetivos do Trabalho	4
1.2.1	Objetivo Geral	4
1.2.2	Objetivos Específicos	4
1.3	Metodologia	5
1.4	Revisão da Literatura	5
1.5	Proposta do Trabalho	10
2	CONCEITOS PRELIMINARES	11
2.1	Autovalor do Problema de Laplace	11
2.1.1	Motivação para o Estudo dos Autovalores do Laplaciano	12
2.1.2	Existência e Unicidade do Menor Autovalor Positivo	12
2.2	Derivada Topológica	14
2.3	Métodos Numéricos	17
2.3.1	Método de Elementos Finitos	17
2.3.1.1	Características do Elemento Finito	17
2.3.1.2	Malha Utilizada	18
2.3.1.3	Algoritmo de otimização topológica para o MEF	19
2.3.2	Método dos Elementos de Contorno	23
2.3.2.1	Equação Governante	23
2.3.2.2	Método de Reciprocidade Dual	25
2.3.2.3	Resíduos Ponderados	26
2.3.2.4	Solução Fundamental	27
2.3.2.5	Discretização do Domínio	27
2.3.2.6	Solução particular	30
2.3.2.7	A equação de Helmholtz	30
2.3.2.8	Autovalores e autovetores	31
2.3.2.9	Algoritmo de otimização topológica para o MEC	31

3	EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ MODIFICADA	35
3.1	Formulação do Problema	35
3.2	Existência da Derivada Topológica	36
3.3	Cálculo da Derivada Topológica	38
3.4	Estimativas dos Termos Remanescentes	46
3.5	Aplicações da Equação de Helmholtz Modificada	51
3.5.1	Autovalor de Laplace	51
3.5.1.1	Cálculo da Derivada Topológica	52
3.5.2	Problema de Difusão Para o Transferência de Calor	53
3.5.2.1	Cálculo da Derivada Topológica	54
4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	55
4.1	Autovalor da membrana	55
4.1.1	Dependência de malha	55
4.2	Problema de Difusão	80
5	PROBLEMA DE ESTRUTURAS SOBRE APOIO ELÁSTICO	86
5.1	Formulação do Problema	86
5.2	Existência da Derivada Topológica	87
5.3	Cálculo da Derivada Topológica	89
5.4	Estimativas dos Termos Remanescentes	97
5.5	Problema de Estruturas em Vibração Livre	101
5.5.1	Formulação do Problema	101
5.5.2	Cálculo da Derivada Topológica	102
6	EXEMPLOS NUMÉRICOS	104
7	CONCLUSÃO	119
7.1	Contribuição do Trabalho	120
7.2	Trabalhos Futuros	121
7.3	Trabalhos Realizados Durante a Execução Desta Tese	121
	REFERÊNCIAS	123

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Representação da Derivada Topológica	14
Figura 2.2 – Elemento finito CST com 6 graus de liberdade.	18
Figura 2.3 – Exemplo de malha inicial e após 1 refinamento.	18
Figura 2.4 – Esquema da metodologia numérica para MEF.	22
Figura 2.5 – Condição de contorno	24
Figura 2.6 – Nós do contorno e nós internos	25
Figura 2.7 – Elemento constante	28
Figura 2.8 – Elemento constante.	29
Figura 2.9 – Exemplo de malha inicial	32
Figura 2.10–Esquema da metodologia numérica para MEC.	33
Figura 2.11–Estratégias adotadas para retirada de material.	34
Figura 3.1 – Domínio com as possíveis trocas de materiais.	36
Figura 4.1 – Geometria Inicial	55
Figura 4.2 – Geometria final otimizada para algumas malhas.	56
Figura 4.3 – Análise de Convergência do Autovalor	57
Figura 4.4 – Dois primeiros autovalores	59
Figura 4.5 – Variação do volume e ângulo θ para $\xi = 0,4$	59
Figura 4.6 – Evolução da geometria para $\xi = 0,4$	60
Figura 4.7 – Três primeiros modos de vibração e Derivada Topológica para λ_0	60
Figura 4.8 – Geometria otimizada para alguns valores de ξ	61
Figura 4.9 – Geometria inicial e otimizada para o MEC.	62
Figura 4.10–Geometria Inicial	63
Figura 4.11–(a) 1º modo de vibração; (b) Derivada Topológica para λ_0	63
Figura 4.12–Variação do ângulo θ para $\xi = 0,15$	64
Figura 4.13–Variação da fração de volume para $\xi = 0,15$	64
Figura 4.14–Variação de λ_1/λ_1^0 para $\xi = 0,15$	65
Figura 4.15–Variação de λ_1/λ_2 para $\xi = 0,15$	65
Figura 4.16–Variação do ângulo θ , volume e κ para $\xi = 0,15$ e $k = 0,003$	66
Figura 4.17–Geometria inicial otimizada para alguns valores de k e $\xi = 0,15$	67
Figura 4.18–Variação do ângulo θ para $k = 0,03$	68

Figura 4.19–Variação da fração de volume para $k = 0,03$	68
Figura 4.20–Variação de λ_1/λ_1^0 para $k = 0,03$	69
Figura 4.21–Variação de λ_1/λ_2 para $k = 0,03$	69
Figura 4.22–Geometria inicial otimizada para alguns valores de ξ e $k = 0,03$	70
Figura 4.23–(a) 1° modo de vibração; (b) Derivada Topológica para λ_0	71
Figura 4.24–Variação do ângulo θ para alguns valores de k e ξ	72
Figura 4.25–Variação da fração de volume para $k = 0,03$	72
Figura 4.26–Variação de λ_1/λ_1^0 para $k = 0,03$	73
Figura 4.27–Variação de λ_1/λ_2 para $k = 0,03$	73
Figura 4.28–Variação do ângulo θ , volume e κ para $\xi = 0,1$ e $k = 0,003$	74
Figura 4.29–Geometria inicial e evolução da topologia para $\xi = 0,4$ e $k = 0,02$	74
Figura 4.30–Evolução da topologia e geometria otimizada para $\xi = 0,4$ e $k = 0,02$	75
Figura 4.31–Geometria final para alguns valores de ξ e k	75
Figura 4.32–(a) 1° modo de vibração; (b) Derivada Topológica para λ_0	76
Figura 4.33–Variação do ângulo θ para alguns valores de k e ξ	76
Figura 4.34–Variação da fração de volume para $k = 0,03$	77
Figura 4.35–Variação de λ_1/λ_1^0 para $k = 0,03$	77
Figura 4.36–Variação de λ_1/λ_2 para $k = 0,03$	78
Figura 4.37–Variação do ângulo θ , volume e κ para $\xi = 0,1$ e $k = 0,003$	79
Figura 4.38–Geometria inicial e evolução da topologia para $\xi = 0,1$ e $k = 0,01$	79
Figura 4.39–Evolução da topologia e geometria final para $\xi = 0,1$ e $k = 0,01$	80
Figura 4.40–Geometria otimizada para alguns valores de ξ e k	80
Figura 4.41–Temperatura máxima na placa	82
Figura 4.42–Temperatura inicial e final	82
Figura 4.43–Geometria inicial e Evolução da topologia	83
Figura 4.44–Temperatura máxima na placa	84
Figura 4.45–Temperatura inicial e final.	84
Figura 4.46–Evolução da topologia	85
Figura 6.1 – Geometria inicial.	104
Figura 6.2 – Deslocamento inicial para o estado plano de tensão e Modulo de Young $E = 210GPa$	106
Figura 6.3 – Variação do ângulo θ para os casos A, B e C.	106
Figura 6.4 – Variação da função de forma para os casos A, B e C.	107
Figura 6.5 – Variação do volume para os casos A, B e C.	107
Figura 6.6 – Variação dos valores de λ_1/λ_1^0 para os casos A, B e C.	108
Figura 6.7 – Variação dos valores de λ_1/λ_2 para os casos A, B e C.	108
Figura 6.8 – Geometria otimizada, após 88 iterações, para o estado plano de tensão e Modulo de Young $E = 210GPa$	109
Figura 6.9 – Geometria obtida por Perreira e Bittencourt, (2008).	109
Figura 6.10–Geometria inicial.	110
Figura 6.11–Deslocamento inicial da geometria.	111

Figura 6.12–Variação do ângulo θ para os casos A, B e C.	111
Figura 6.13–Variação da função de forma para os casos A, B e C.	112
Figura 6.14–Variação do volume para os casos A, B e C.	112
Figura 6.15–Variação dos valores de λ_1/λ_1^0 para os casos A, B e C.	113
Figura 6.16–Variação dos valores de λ_1/λ_2 para os casos A, B e C.	113
Figura 6.17–Geometria otimizada para o estado plano de tensão e Modulo de Young $E = 210GPa$	114
Figura 6.18–Geometria inicial e deslocamento inicial.	115
Figura 6.19–Variação do ângulo θ para os casos A, B, C e D.	116
Figura 6.20–Variação da função de forma para os casos A, B, C e D.	116
Figura 6.21–Variação do volume para os casos A, B, C e D.	117
Figura 6.22–Variação dos valores de λ_1/λ_1^0 para os casos A, B, C e D.	117
Figura 6.23–Variação dos valores de λ_1/λ_2 para os casos A, B, C e D.	118
Figura 6.24–Geometria otimizada para os casos considerados.	118

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Valor de $\alpha(x)$, $\rho(x)$ e $f(x)$ em Ω	35
Tabela 3.2 – Valor de α_ε , ρ_ε e f_ε em Ω	36
Tabela 3.3 – Valor de γ_α , γ_ρ e γ_f em Ω	36
Tabela 4.1 – Análise de dependência da malha	56
Tabela 4.2 – Análise de convergência da malha	57
Tabela 4.3 – Quantidade de elementos da malha	58
Tabela 4.4 – Valores em cada iteração para $\xi = 0, 4$	58
Tabela 4.5 – Variação do Penalty.	61
Tabela 4.6 – Valores finais do Volume, λ_1 e λ_2 considerando MEF e MEC	62
Tabela 4.7 – Casos considerados para $\xi = 0, 15$	62
Tabela 4.8 – Valores finais para alguns valores de massa concentrada e $\xi = 0, 1$	66
Tabela 4.9 – Casos considerados para $k = 0, 03$	67
Tabela 4.10–Valores finais para alguns valores de ξ e massa concentrada $k = 0, 03$	70
Tabela 4.11–Casos considerados para $k = 0, 03$	71
Tabela 4.12–Valores finais para alguns valores de ξ e massa concentrada $k = 0, 03$	71
Tabela 4.13–Casos considerados para $k = 0, 03$	75
Tabela 4.14–Valores finais para alguns valores de ξ e massa concentrada $k = 0, 03$	78
Tabela 4.15–Quantidade de elementos da malha	81
Tabela 4.16–Volume não retirado, Temperatura na placa e Tempo Gasto	81
Tabela 4.17–Volume não retirado, Temperatura na placa e Tempo Gasto	84
Tabela 6.1 – Quantidade de elementos da malha	105
Tabela 6.2 – Casos considerados no Exemplo 6.1.	105
Tabela 6.3 – Valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 e λ_1^f/λ_2^f , volume final mantido na geometria e número de iterações para o estado plano de tensão.	105
Tabela 6.4 – Valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 e λ_1^f/λ_2^f , volume final mantido na geometria e número de iterações para o estado plano de deformação.	105
Tabela 6.5 – Casos considerados no Exemplo 6.1.	106
Tabela 6.6 – Quantidade de elementos da malha	110
Tabela 6.7 – Casos considerados no Exemplo 6.	110

Tabela 6.8 – Valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 e λ_1^f/λ_2^f , volume final mantido na geometria e número de iterações para o estado plano de tensão.	110
Tabela 6.9 – Casos considerados no Exemplo 6.	111
Tabela 6.10–Casos considerados.	114
Tabela 6.11–Quantidade de elementos da malha	114
Tabela 6.12–Valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 , λ_1^f/λ_2^f , volume final mantido na geometria e número de iterações para o estado plano de tensão e $k = 1, 0$	114
Tabela 6.13–Casos considerados no Exemplo 6.	115

Lista de Abreviaturas e Siglas

<i>GMEC</i>	Grupo de Mecânica Experimental e Computacional
<i>LNCC</i>	Laboratório Nacional de Computação Científica
<i>MEF</i>	Método de Elementos Finitos
<i>MDF</i>	Método das Diferenças Finitas
<i>MEC</i>	Método dos Elementos de Contorno
<i>SIMP</i>	Solid Isotropic Microstructure with Penalization
<i>ESO</i>	Evolutionary Structural Optimization
<i>BESO</i>	Bidirectional Evolutionary Structural Optimization
<i>MLS</i>	Método Level Set
<i>CST</i>	Constant Strain Triangle
<i>DRM</i>	Dual Reciprocity Method
<i>DT</i>	Derivada Topológica
<i>VF</i>	Volume Final
<i>NI</i>	Número de Iterações
<i>MC</i>	Massa concentrada
<i>VOM</i>	Volume do material bom condutor mantido
<i>TMG</i>	Temperatura Máxima na placa com os 2 materiais
<i>TMBC</i>	Temperatura Máxima na placa considerando apenas o material bom condutor
<i>TG</i>	Tempo Gasto
<i>CPU</i>	Unidade central de processamento (<i>Central Processing Unit</i>)
<i>RAM</i>	Memória de acesso aleatório (<i>Random Access Memory</i>)

Lista de Símbolos

\mathbb{N}	Conjunto dos números Naturais
\mathbb{R}^d	Espaço euclidiano de dimensão d
D_T	Derivada topológica
Ω	Domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω
$ \Omega $	Função que associa a cada subconjunto Ω de \mathbb{R}^d a um número real não negativo que está relacionado com o <i>volume</i> ocupado por ele.
$o(f(\varepsilon))$	$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)} = 0$ com $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0$
$O(f(\varepsilon))$	$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{O(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)} = C$ (constante) com $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0$
$\operatorname{div}(\mathbf{u})$	Operador divergência $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i}$
$\nabla \mathbf{u}$	$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$
L^p	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} u ^p < \infty\}; p \in [0, \infty)$
ω	Subconjunto aberto de Ω ; $\bar{\omega} \Subset \Omega$ (ω está contido no interior de Ω)
n	Vetor normal unitário e externo a $\partial\Omega$
Γ	Uma parte da fronteira de $\partial\Omega$
$\ \cdot\ _{U(\Omega)}$	Norma em um espaço de Banach $U(\Omega)$
κ_j	Tamanho do passo determinado por uma busca linear a fim de minimizar o valor da função objetivo D_T .
λ	Autovalor associado a um problema.
$[[\phi]]$	Salto da função $[[\phi]] := \phi _{\Omega \setminus B_\varepsilon} - \phi _{B_\varepsilon}$
μ_l, λ_l	Constantes de Lamé
$\frac{\partial u}{\partial n}$	Derivada parcial de u na direção n

1 Introdução

Na atualidade, as metodologias de otimização de forma e de topologia tem um papel central em projetos estruturais e dentre as inúmeras variáveis que podem ser otimizadas em um projeto, a otimização topológica (otimização da geometria) é um dos mais importantes. Neste sentido, no último meio século tem-se desenvolvido vários métodos para a otimização topológica e, talvez, o método SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization) (Bendsøe e Kikuchi, (1988)) seja um dos métodos mais populares empregados para otimização de topologia e pode ter sido o ponto de partida para o lançamento de novas ideias de muitas pesquisas dedicadas a esse campo. Estes métodos têm por objetivo modificar a forma e topologia da estrutura inicial, sujeita a certas condições de contorno, de maneira que seja possível reduzir os custos ou melhorar a funcionalidade de uma estrutura. Uma revisão detalha sobre alguns destes métodos pode ser encontrada em (Dijk et al., (2013); Munk et al., (2015); Sigmund e Maute, (2013); Deaton e Grandhi, (2014)).

Assim, uma maneira de analisar os problemas de otimização topológica consiste em verificar o quão sensível é o problema quando se introduz uma perturbação na geometria do mesmo. Essa análise pode ser realizada observando-se a influência da criação de perturbações no domínio geométrico, como furos, inclusões, termos fonte e trincas, através de uma expansão assintótica da solução da equação de estado no domínio perturbado (Ammari e Kang, (2004); Kozlov et al., (1999)). Dessa forma, foi utilizado o conceito de análise de sensibilidade topológica, também conhecido como derivada topológica, que consiste em obter a sensibilidade considerando não apenas a equação de estado, mas uma função custo que representa uma medida de desempenho do problema em estudo (Sokołowski e Źochowski, (1999); C ea et al., (2000); Eschenauer et al., (1994); Novotny et al., (2003)).

Ao longo da última década, a análise de sensibilidade topológica tornou-se uma área de pesquisa rica e fascinante, além de bastante ampla dos pontos de vista teórico e numérico, possuindo aplica es em diversos campos de interesse, em especial na otimiza o de forma e topológica, problemas inversos, processamento de imagens, síntese e/ou projeto ótimo de microestruturas e modelagem de fen menos dissipativos, incluindo mecânica da fratura e do dano.

Atualmente, o uso dos métodos numéricos para resolver equa es diferenciais tais como Método de Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF) ou Método dos Elementos de Contorno (MEC) são muito empregados e segundo Cheng e Cheng (2005)

considerando como base o número de artigos publicados, o MEF é o método mais utilizado seguido do MDF e MEC. Neste trabalho iremos fazer a programação numérica utilizando tanto o MEF quanto o MEC.

Por outro lado, o controle da vibração natural desempenha um papel importante em muitas estruturas de engenharia, tais como, aviões, satélites, navios, viadutos, edifícios entre outros. Algumas considerações, como resposta dinâmica e cargas, são importantes para a compreensão do comportamento e projeto de estruturas. Estruturas sob análise dinâmica são governadas por equações diferenciais lineares que consistem na solução de um problema de autovalores, onde o autovalor representa a frequência da vibração e o autovetor a forma modal.

Portanto, os conceitos centrais deste trabalho são o estudo de vibrações naturais utilizando a derivada topológica, derivada esta que foi introduzida no trabalho de Sokołowski e Żochowski, (1999). Este conceito tem sido utilizado com sucesso na otimização topológica, como pode ser visto nos trabalhos de Eschenauer e Olhoff, (2001); Novotny et al., (2019a, 2019b, 2019c), que apresentam uma revisão detalhada.

Nesse sentido, foi utilizado o conceito de derivada topológica nos problemas estudados neste trabalho: problema de autovalor de Laplace, problema de dissipador de calor e problema de autovalor em estruturas em vibração livre.

Estes problemas são modelados por operadores diferenciais que são conhecidos em problemas de engenharia: equação de Helmholtz Modificada e o problema de estruturas sobre apoio elástico. Assim, foi realizada a análise assintótica desses operadores diferenciais, com intuito de obter a forma fechada da derivada topológica. Essa análise possibilitará a geração de projetos de geometrias otimizadas, em problemas de condução de calor e vibrações de membrana e elasticidade.

Embora a expansão topológica assintótica para a equação Helmholtz modificada esteja disponível na literatura, ela ainda não foi aplicada a esses dois problemas propostos. De fato, algumas estruturas da natureza apresentam formas ramificadas de árvores ou dendríticas. Essa classe de problemas foi introduzida pela primeira vez como lei construtiva com a proposta de reconhecer que existe um fenômeno universal que gera uma configuração ideal do design na natureza (Bejan et al., (1995); Bejan, (1997)). Esse fenômeno pode ser observado pela otimização da topologia na resolução de problemas de condução de calor em estado estacionário, onde a maioria dos estudos também confirma que as estruturas dendríticas representam uma classe de projeto ideal (Bendsøe e Sigmund, (2003); Gersborg-Hansen et al., (2006); Lohan et al., (2017); Dbouk (2017)) apresenta uma revisão de pesquisa sobre os métodos de topologia desenvolvidos nos últimos 15 anos para a otimização de problemas considerando transferência de calor.

Assim neste trabalho serão discutidos alguns aspectos relacionados às metodologias numéricas desenvolvidas para resultar em um projeto ideal com geometrias complexas e sua desvantagem natural na fabricação industrial. O projeto ideal dos trocadores de calor ainda está sendo considerado na literatura, bem como o desenvolvimento de abordagens numéricas para obter a geometria final otimizada com projetos de ajuste fino.

Por outro lado, o problema de autovalor na otimização estrutural desempenha um papel importante na integridade estrutural. Quando a frequência de excitação é sintonizada em uma das frequências naturais de vibração, a estrutura pode ser danificada ou até colapsar. O comportamento estrutural é afetado quando variações são impostas nos parâmetros do sistema, levando a mudanças nos autovalores e autovetores e, portanto, nas características de resposta final do sistema. A magnitude dessas variações está contida nas derivadas dos autovalores e autovetores do sistema. Nesse sentido, problemas de otimização são formulados como a maximização do menor autovalor sujeito a uma restrição global. De acordo com a literatura, as estruturas podem apresentar autovalores simples ou múltiplos.

Os métodos para lidar com um autovalor simples estão bem estabelecidos e são bastante simples de serem implementados em uma rotina de otimização de topologia. O principal problema em uma otimização de topologia é que, nas iterações iniciais, apenas autovalores simples estão presentes, mas à medida que o processo iterativo evolui, a geometria se torna complexa e vários autovalores múltiplos podem surgir. Masur e Mróz (1979) e Haug e Rousset (1980) demonstraram que autovalores múltiplos não são diferenciáveis no senso comum, criando sérios problemas para derivação de condições de otimização e análise numérica na solução de problemas de otimização.

Geometrias complexas requerem métodos específicos para lidar com o projeto estrutural ideal em relação a vários autovalores, devido ao grande número de parâmetros de projeto e a vários graus de liberdade. Seyranian et al., (1994) apresentou uma metodologia numérica para calcular a sensibilidade do projeto alterando todos os parâmetros do projeto simultaneamente. Desde então, vários trabalhos numéricos e analíticos têm sido sugeridos para solucionar problemas envolvendo autovalores simples e múltiplos por: (Ammari e Khelifi, (2003); Jensen e Pedersen, (2006); Huang et al., (2010); Gravesen et al., (2011); Li et al., (2016); Torii e Faria, (2017)). Em particular, a derivada topológica para autovalores simples do Laplaciano foi considerada por Ammari e Khelifi, (2003) e para múltiplos autovalores no contexto do sistema de elasticidade por Nazarov e Sokołowski, (2008).

1.1 Originalidade da Tese

Embora existam poucos trabalhos na literatura relacionando os modelos propostos com o conceito de derivada topológica, para cada um desses problemas a derivada topológica já foi determinada, considerando como função custo, a energia potencial total. Nesse contexto, Giusti et al., (2010), determinam a derivada topológica para o problema de difusão de calor para materiais ortotrópicos, Novotny e Sales, (2015), determinaram a derivada topológica para equação de convecção-difusão, porém, não é feita a parte numérica, Amstutz, (2006a) determina a derivada topológica para o funcional da Energia Poencial Total associada à equação de Helmholtz modificada e Rosa (2015) reinterpreta a derivada topológica para o funcional da energia potencial total associada a um problema de elasticidade.

Nesse sentido, podemos destacar as seguintes contribuições desta tese:

- Análise de sensibilidade topológica para o problema do primeiro autovalor do problema de Laplace;
- Cálculo da análise de sensibilidade do funcional de forma $\int_{\Omega} u^2$ no caso do problema de estruturas sobre apoio elástico;
- Análise de sensibilidade topológica para o problema do primeiro autovalor no problema de estruturas em vibração livre;
- Implementação numérica, via Método de Elementos Finitos (MEF) do problema de dissipação de calor.
- Implementação numérica, via Método de Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC), para a otimização de estrutura com o objetivo de maximizar o autovalor.

1.2 Objetivos do Trabalho

Com base nas contribuições desta tese, apresentamos os seguintes objetivos: Geral e Específicos.

1.2.1 Objetivo Geral

Calcular a derivada topológica, assumindo como função custo a energia para um operador diferencial de segunda ordem, a forma variacional do primeiro autovalor para um operador de segunda ordem.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Calcular a derivada topológica do funcional (função custo) modificado da energia em um problema que envolve difusão;
- Calcular a derivada topológica do primeiro autovalor do operador diferencial que representa o modelo de uma membrana;
- Calcular a derivada topológica do primeiro autovalor do operador diferencial que representa o problema de elasticidade;
- Implementar o algoritmo para Otimização Topológica, baseado na derivada topológica, utilizando métodos do elementos finitos e de contorno;

- Comparar e analisar os resultados numéricos obtidos utilizando Métodos dos elementos finitos e de contorno;
- Obter geometrias otimizadas.

1.3 Metodologia

A análise de sensibilidade topológica é o método utilizado para a expansão assintótica das funções custo. A perturbação topológica considerada é a nucleação de uma inclusão infinitesimal circular no domínio, com propriedades materiais diferentes do domínio original.

Primeiramente será apresentado o modelo matemático do problema proposto, que será representado por um operador diferencial, em sua forma forte, em seguida é definida uma função custo, que será expandida assintoticamente, com auxílio da forma fraca do problema proposto e de uma equação adjunta ¹, específica para cada problema.

Com essa expansão, será possível determinar a derivada topológica da função custo, que é o funcional a ser otimizado.

Para implementação do algoritmo baseado na derivada topológica, será utilizado o método de penalização linear com restrição de volume para obter a topologia ótima do projeto considerado. No modelo de placas, por exemplo, podemos obter geometrias com maior frequência natural de vibração.

Para a obtenção dos resultados numéricos, serão empregados os Métodos dos elementos finitos e de contorno. As estruturas (geometrias) otimizadas, apresentam o maior valor possível para as funções custo analisadas, considerando uma restrição de volume.

1.4 Revisão da Literatura

O estudo de otimização e a relação com autovalores é antigo, remonta ao século *XVIII*, mais precisamente em 1773, Lagrange apresentou o seguinte problema: determinar a forma da coluna simétrica axialmente mais forte com as condições prescritas de comprimento, volume e limite. A afirmação matemática deste problema baseia-se no trabalho anterior de J. Bernoulli e Euler. Este último, em 1744, estabeleceu a carga de flambagem de tal coluna como o menor autovalor de um operador diferencial de quarta ordem auto-adjunto. Consequentemente, o problema de Lagrange requer a maximização desse menor autovalor, sobre todas as funções possíveis que definem a área da seção transversal da coluna.

Nas décadas de 60 e 70 aparecem os primeiros trabalhos que tratam de encontrar os autovalores do operador laplaciano, como por exemplo Roberts, (1967) e Uhlenbeck, (1972).

¹ Para montar a equação adjunta, é feita a adição da equação de estado com a forma bilinear, em seguida é calculada a derivada e igualado a zero. Maiores detalhes em Novotny e Sokolowski (2020).

Já Kutler e Sigillito, (1984) apresentam a forma analítica dos autovalores e autovetores para o problema do operador laplaciano e Zhao et al., (1998) apresenta a otimização para os primeiros autovalores usando o método evolutivo generalizado. Também nessa época aparecem os primeiros trabalhos sobre o conceito de análise de sensibilidade à mudança de forma, na qual o objetivo é determinar a sensibilidade de um problema quando o domínio sofre perturbações suaves em sua fronteira, não havendo mudanças em sua topologia, enquanto que a análise de sensibilidade topológica estendeu estes conceitos (Sokołowski e Zolésio, (1992)).

Desde então, surgiram e foram aprimorados vários métodos e técnicas de otimização topológica onde podemos destacar: Métodos de homogeneização; Método SIMP; Método ESO/-BESO; Método level set; Método da derivada Topológica.

Métodos de homogeneização são talvez as técnicas mais comumente usadas para otimização da topologia (Bendsøe e Kikuchi, (1988)). Segundo Anflor et al., (2018) nestes métodos, um modelo de material com vazios em micro escala é introduzido, e o problema de otimização de topologia é definido buscando a porosidade ótima de tal meio poroso usando um dos critérios de otimalidade. Desta forma, a técnica de homogeneização é capaz de produzir furos internos sem o conhecimento prévio de sua existência. Apesar de bem estabelecidos, alguns inconvenientes, como em outros métodos, também estão presentes. Essas desvantagens são conhecidas como *instabilidade do tabuleiro de xadrez* e alguns procedimentos para evitar esse problema são amplamente utilizados. De acordo com Sigmund e Petersson, (1998), muitos métodos diferentes são usados para suprimir o problema do tabuleiro de xadrez, como elementos finitos de ordem superior, filtros, controle de inclinação de densidade e discretização diferente do modelo de elementos finitos e variáveis de projeto.

O método SIMP (*solid isotropic material with penalisation*) inicialmente foi entendido como uma maneira fácil, mas artificial, de reduzir a complexidade da abordagem de homogeneização e melhorar a convergência para soluções 0-1. Esta abordagem considera a existência de apenas uma variável de projeto, uma densidade fictícia constante em cada elemento finito. Posteriormente, para aprimorar o método SIMP, foram desenvolvidos métodos de restrição para problemas SIMP cuja abordagem pode ser dividida em um, dois e três campos, (Bendsøe e Kikuchi, (1988); Bendsøe, (1989); Zhou e Rozvany, (1991); Sigmund e Peterson, (1998)).

Uma outra tentativa para resolver problemas de otimização foi através de abordagem discretas, sendo que um ramo importante das abordagens discretas para a otimização da topologia é a abordagem da otimização estrutural evolutiva unidirecional, Método ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) (Xie e Steven, (1993) ou bidirecional, Método BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*) (Huang e Xie, (2007). Embora Huang e Xie, (2010) defenda que a abordagem BESO, como é atualmente definida, não deva ser categorizada como uma abordagem separada, mas sim como uma versão de atualização discreta do esquema SIMP padrão. Esta afirmação é ainda apoiada pelo fato de que as abordagens BESO mais recentes usam uma parametrização de interpolação de lei de potência (SIMP) (com $p = 3$) para o cálculo dos gradientes discretos. Uma revisão detalha sobre os artigos publicados utilizando métodos evolutivos pode ser encontrada em Munk et al., (2015).

Outra técnica de otimização de sucesso é o método level set (MLS), que foi introduzido pela primeira vez por Osher e Sethian (1988). A ideia principal deste método é encontrar uma função cujo nível zero definido é a superfície de interpolação, que muda de sinal conforme se vai de dentro para fora da superfície. Como todos os métodos, o MLS tem uma desvantagem: requer considerável reflexão para construir velocidades apropriadas para avançar a função de ajuste de nível. O MLS é capaz de fundir furos, resultando em uma única cavidade, ou dividi-los (processo reverso), utilizando curvas e superfícies sem ter que parametrizar esses objetos (Osher e Fedkiw (2001), tornando este método adequado para otimização topológica. Na última década, surgiram várias técnicas do método level-set, por exemplo, a abordagem para discretizar a função level-set, a abordagem para mapear a função level-set no modelo mecânico e a abordagem para atualizar a função level-set no processo de otimização. Uma revisão detalhada sobre os artigos publicados utilizando métodos evolutivos pode ser encontrada em Dijk et al., (2013).

Inicialmente chamado de método da bolha, o método da derivada topológica começou a ser desenvolvido por Eschenauer et al., (1994). É importante ressaltar as vantagens da utilização da derivada topológica com relação aos métodos citados acima: A derivada topológica é dada por uma fórmula fechada, que depende da solução do problema original não perturbado; fornece uma direção de descida mais íngreme no processo de minimização da função de forma, não utiliza densidades intermediárias de materiais no processo de otimização e possui uma grande quantidade de aplicações no mais diversos problemas da engenharia. Motivos estes pelos quais o método tem ganhado destaque.

Dentre os métodos de otimização topológica citados acima, iremos trabalhar com o método da derivada topológica e por isso iremos apresentar uma resenha histórica com alguns dos principais trabalhos publicados utilizando este conceito.

O conceito matemático formal foi introduzido por Sokołowski e Żochowski, ((1997), (1999)). Nestes trabalhos conclui-se que a derivada topológica é uma ferramenta aplicável em problemas de otimização de estruturas mecânicas. No ano seguinte, Cea et al., (2000) estendem esse conceito para domínios perturbados por furos com condição de Dirichlet prescrita em sua fronteira.

Já Garreau et al., (2001) propõe uma técnica para o cálculo da derivada topológica denominada *domain truncation method*, com aplicação ao problema de elasticidade, considerando funcionais gerais, furos de forma arbitrária e condições de contorno de Neumann ou Dirichlet homogêneas na fronteira do furo. Posteriormente, Guillaume e Idris (2002) propõe uma extensão do *domain truncation method*, considerando-se funcionais custos associados ao problema de Poisson com condições de Neumann e Dirichlet homogênea na fronteira do furo.

Um dos trabalhos mais importantes da área é apresentado por Novotny et al., (2003). Neste trabalho é introduzida uma definição alternativa para a derivada topológica que estabelece a relação estrita entre os conceitos de análise de sensibilidade topológica e análise de sensibilidade à mudança de forma. Deste conceito surgiu uma metodologia denominada *topological-shape sensitivity method* para o cálculo da derivada topológica. Feijó et al., (2003) faz um análise

comparativa entre o *topological-shape sensitivity method* e o *domain truncation method*.

Em sua tese, Novotny, (2003) é apresentada a sensibilidade topológica para diversos problemas de engenharia: condução estacionária de calor em sólidos rígidos considerando condições de contorno de Neumann, Robin e Dirichlet na fronteira do furo; elasticidade linear em estado plano de tensão e deformação; flexão elástica linear de placas de Kirchhoff.

No mesmo ano Amstutz, (2003), também em sua tese, apresenta a derivada topológica para vários problemas. Em particular, aplicam-se os resultados obtidos em: (i) localização de trincas considerando o problema de Laplace 2D; (ii) no problema de Helmholtz 2D com condição de Dirichlet no furo circular, condição de Neumann no furo de forma arbitrária e inserção de inclusões; (iii) sensibilidade para uma classe de problemas não lineares com condição de Dirichlet e furo de forma arbitrária.

Em 2004, Nazarov e Sokołowski (2004) calculam a expansão assintótica do funcional de energia correspondente ao problema de Poisson para uma perturbação associada à formação de um ligamento. Já Feijóo, (2004) estuda a derivada topológica para o problema de Helmholtz em um meio infinito, sendo o resultado empregado na resolução do problema inverso do espalhamento. Nesse mesmo ano Guillaume e Idris, (2004) aplicam a análise de sensibilidade nas equações de Stokes considerando funcionais custos gerais e furos de forma arbitrária.

No trabalho de Amstutz, (2006b) é apresentado o primeiro resultado em análise de sensibilidade topológica para o caso não linear, onde a derivada topológica é determinada para equações de Navier-Stokes no regime estacionário num fluido incompressível e uma condição de não deslizamento no contorno de um obstáculo de forma arbitrária. Em particular, da equação de Navier Stokes e da versão não-linear da equação de Helmholtz. Já em Amstutz, (2006a) a noção de sensibilidade topológica é estendida para o caso de uma perturbação local das propriedades do material constitutivo do domínio.

Mostrando que o conceito de derivada topológica tem uma ampla gama de aplicações, no ano 2007, Auroux et al., (2007) calcula a expansão assintótica topológica para um problema associado à restauração e classificação de imagens. Em Larrabide, (2007), estuda-se a restauração e segmentação de imagens e sua aplicação na modelagem do sistema cardiovascular humano, apresenta-se, também, a forma discreta da derivada topológica que resulta um menor custo computacional que os algoritmos baseados nos métodos clássicos. Novotny et al., (2007) apresenta o cálculo da derivada topológica no problema de elasticidade linear tridimensional, e sua aplicação na otimização topológica de estruturas tridimensionais. Faria, (2007) estuda a derivada topológica de segunda ordem para inclusões considerando um problema de condução de calor (Laplace).

Vale ressaltar que todos os trabalhos listados aqui utilizam métodos de elementos finitos em sua formulação numérica, nesse sentido vale destacar que um dos primeiros trabalhos a utilizar métodos de elementos de contorno foi Anflor, (2007) que em sua tese apresenta o desenvolvimento e implementação computacional de técnicas de otimização topológica para problemas governados pela equação de Poisson, utilizando o método dos elementos de contorno

e derivada topológica adotando a energia potencial como função custo. Também utilizando o MEC, Neches e Cislino, (2008) e Marczak, (2008) apresentam otimizações topológicas para alguns problemas clássicos de elasticidade linear bidimensional.

Em 2009 Giusti, (2009) propõe um método de otimização topológica associado ao problema de elasticidade linear bidimensional, destacando a possibilidade de pôr e retirar material simultaneamente em cada passo do algoritmo de otimização topológica.

Até 2010, a derivada topológica para resolver os problemas difusivos estava disponível apenas para sólidos isotrópicos. Uma metodologia alternativa para aplicar a derivada topológica a meios não isotrópicos usando um mapeamento foi proposta por Anflor e Marczak, (2009). Ainda em 2010, Amstutz e Novotny, (2010) estudam a análise de sensibilidade topológica do problema de elasticidade linear, sujeita a uma restrição de tensão do tipo Von Mises. Amstutz et al., (2010) propõe um algoritmo de otimização de microestruturas baseado na derivada topológica de um modelo constitutivo multi-escala em elasticidade linear. Novotny et al., (2010) fazem a análise de sensibilidade para o modelo constitutivo multi-escala considerando microestruturas fraturadas. Van Goethem e Novotny (2010) determinam a direção de crescimento de uma fissura, com base no gradiente topológico associado à energia potencial e à energia de *Griffith* de um corpo elástico.

Amstutz e Novotny, (2011) calculam a derivada topológica para uma classe de funcionais de forma associada a um problema de placas de Kirchhoff, onde uma inclusão circular é introduzida arbitrariamente num ponto do domínio, e no mesmo ano Canelas et al., (2011) estudam o problema inverso de eletromagnetismo usando a derivada topológica. Este trabalho propõe uma metodologia para desenhar indutores magnéticos, tais que uma massa de metal líquido adquira uma forma predefinida.

Em Giusti e Novotny, (2012), é apresentada a derivada topológica da energia potencial total associada a um problema de difusão de calor num meio anisotrópico e heterogêneo, quando é introduzida uma pequena inclusão circular num ponto arbitrário do domínio. Em Amstutz et al., (2012), é desenvolvida a análise de sensibilidade topológica do problema de estruturas elásticas sujeitas a uma restrição de tensão de tipo Drucker-Prager. Em Hintermuller et al., (2012) é apresentada a expansão topológica de segunda ordem para o problema de tomografia por impedância elétrica; neste trabalho na expansão de segunda ordem aparecem termos não locais, os quais têm um maior custo computacional. Nesse estudo objetiva-se determinar a relevância desses termos não locais e a interação desde um ponto de vista computacional.

O livro *Topological derivatives in shape optimization* é o primeiro a ser publicado sobre derivada topológica (Novotny e Sokołowski (2013)).

Em Amstutz et al., (2014a) apresentam um novo método matemático para o particionamento ótimo de domínios, com aplicações para a classificação de imagens em escala de cinza e coloridas, que não envolve o gradiente de funções características aproximadas e Amstutz et al., (2014b) é apresentada a análise de sensibilidade topológica para operadores diferenciais elípticos de ordem de $2m$ com $m \leq 1$.

Em Sales et al., (2015) é apresentada a derivada topológica para o problema de placas de Reissner-Mindlin. Amigo et al., (2016) apresentam a derivada topológica para atuadores piezoelétricos. Este método de análise de sensibilidade é geral e pode ser usado para otimização topológica de forma em uma ampla classe de modelos multifísicos. Já Sá et al., (2016) apresentam a derivada topológica aplicada a problemas de otimização de projeto de canal de fluxo de fluido.

Já em Ferreira e Novotny (2017) é apresentado um novo método de reconstrução não iterativo para o problema da tomografia por impedância elétrica. Machado et al., (2017) apresentam a derivada topológica de um problema de fundição inversa eletromagnética, que consiste em projetar um conjunto de indutores de tal forma que um metal líquido atinja uma determinada forma.

Em Anflor 2018, é apresentado a otimização de uma estrutura de suspensão de carro usando a derivada topológica e o MEC. Já em Novotny et al., (2019a, 2019b, 2019c) é feita uma revisão bem ampla sobre os conceitos e principais aplicações da derivada topológica usando o MEF.

1.5 Proposta do Trabalho

No Capítulo 2, são apresentados alguns conceitos preliminares como: Motivação e existência do menor autovalor do laplaciano; Derivada Topológica; Métodos Numéricos; Algoritmo de otimização topológica.

No Capítulo 3, é apresentado o cálculo da derivada topológica para a equação de Helmholtz modificada e fazemos a estimativa dos termos remanescentes e apresentamos as aplicações para a equação: autovalor de Laplace e o problema de Difusão-Reação.

Em seguida, no Capítulo 4, são apresentados os resultados numéricos para os dois problemas apresentados no capítulo anterior.

Na sequência, no Capítulo 5, são apresentados a derivada topológica correspondente ao problema de estruturas sobre apoio elástico e posterior cálculo da derivada do primeiro autovalor, usando as propriedades de derivada e os resultados numéricos para o Problema de Estruturas em Vibração Livre (estruturas planas).

2 Conceitos Preliminares

Neste capítulo vamos falar dos conceitos de derivada topológica e dos métodos numéricos utilizados neste trabalho.

2.1 Autovalor do Problema de Laplace

Nesta seção e na próxima, apresentamos duas aplicações para a equação de Helmholtz modificada: problema de autovalor para o laplaciano e o problema de difusão para a transferência de calor.

Segundo Biezuner (2006), estudos envolvendo o operador Laplaciano com condições de Dirichlet homogêneas na fronteira de um domínio Ω são recorrentes em Matemática. Tal recorrência se deve ao fato das várias aplicações na Física e Engenharia. O operador Laplaciano é definido por

$$\operatorname{div}(\alpha \nabla u). \quad (2.1)$$

O problema típico de autovalor para o operador Laplaciano, com condição de Dirichlet homogênea na fronteira é:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = \lambda \rho k u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio conexo limitado. Os valores de α , ρ e k serão definidos no Capítulo 3.

Também existe o problema de autovalor do laplaciano com condição de Neumann.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = \lambda \rho k u & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

O problema é tradicionalmente escrito nesta forma, com o sinal negativo multiplicando o laplaciano, porque assim todos os autovalores são não-negativos. No caso do problema de Dirichlet, este fato segue imediatamente do princípio do máximo. De fato, este implica que todos os autovalores, se existirem, devem ser positivos. Por outro lado, zero é um autovalor no problema de Neumann, pois as funções constantes são autofunções associadas a este.

Como veremos a seguir quando estudarmos o conceito de derivada topológica, queremos maximizar o menor autovalor, e como na condição de Neumann esse autovalor é zero, vamos considerar somente a condição de Dirichlet.

2.1.1 Motivação para o Estudo dos Autovalores do Laplaciano

Considere o seguinte problema de Dirichlet para a equação da onda em um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \operatorname{div}(\alpha \nabla u) & \text{se } x \in \Omega \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \overline{\Omega}, \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{se } x \in \overline{\Omega}, \\ u(x, y) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega \text{ e } t > 0., \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $c \in \mathbb{R}$, $f \in C^2(\overline{\Omega})$ e $g \in C^1(\overline{\Omega})$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, então este problema modela as vibrações transversais de baixa amplitude de uma membrana em domínio com o formato de Ω .

Este problema pode ser resolvido pelo método de separação de variáveis: supomos que a solução do problema pode ser escrita na forma

$$u_{tt} = F(x)G(t), \quad x \in \Omega \text{ e } t > 0, \quad (2.5)$$

substituindo esta expressão na equação da onda, obtemos

$$F(x)G''(t) = c^2 \operatorname{div}(\alpha \nabla F(x))G(t), \quad (2.6)$$

separando as variáveis, segue que

$$\frac{-\operatorname{div}(\alpha \nabla F(x))}{F(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{G''(t)}{G(t)} = \lambda. \quad (2.7)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é alguma constante a ser determinada. Como em geral $G(t)$ não é a função identicamente nula, a condição de fronteira implica que $F(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$. Portanto, função F satisfaz o problema de Dirichlet para a equação de Laplace

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla F(x)) = \lambda F(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

ou seja, λ é um autovalor do laplaciano em Ω .

2.1.2 Existência e Unicidade do Menor Autovalor Positivo

Para definir o conceito de derivada topológica devemos inicialmente garantir a positividade e a unicidade do primeiro autovalor, o que é comprovado pelos dois teoremas a seguir:

Teorema 2.1 Positividade do menor autovalor. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado conexo. Então o problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = \lambda \rho k u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.9)$$

possui uma quantidade infinita e enumerável de autovalores $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfazem $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ tais que $\lambda_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e autofunções $\{u_k\}$ que constituem um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i \quad (2.10)$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Em particular,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.11)$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Biezuner (2006) onde o mesmo está enunciado no Teorema 1.14.

Teorema 2.2 Unicidade do menor autovalor. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto limitado conexo. Então o problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = \lambda \rho k u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.12)$$

possui uma solução positiva $u_1 > 0$ em Ω . Além disso, qualquer outra autofunção associada a λ_1 é múltipla de u_1 .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Biezuner (2006), onde o mesmo está enunciado no Teorema 1.21.

Além disso é possível definir analiticamente o valor dos autovalores e autofunções para alguns casos do problema de Laplace.

Teorema 2.3 *Os autovalores do problema do operador laplaciano para a condição de contorno de Dirichlet, apresentado em (2.2), resolvido no retângulo $R = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$ são dados por:*

$$\lambda_{nm} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

e as autofunções correspondentes são

$$u_{nm}(x, y) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \quad (2.14)$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrado em Kutler (1984).

Nosso interesse no problema (2.2) se deve ao fato de que o mesmo modela vibrações transversais de baixa amplitude de uma membrana fina fixada em um aro com o formato de

$\partial\Omega$. No caso bidimensional, os autovalores do laplaciano correspondem às frequências naturais de vibração de uma membrana, enquanto que as autofunções associadas correspondem aos modos naturais de vibração da membrana. Neste trabalho, nosso interesse será a maximização do autovalor principal de (2.2), buscando uma primeira frequência natural que possa otimizar a rigidez da estrutura considerada, evitando assim o efeito de ressonância que pode ser causado pela vibração da estrutura. Assim, para atingir esse objetivo, será utilizado o conceito de derivada topológica.

2.2 Derivada Topológica

A derivada topológica (\mathcal{D}_T) é uma função que fornece a sensibilidade de um problema definido em um certo domínio quando um pequeno furo é criado em uma dada posição deste. Assim ela é uma poderosa ferramenta na obtenção de topologia ótima para uma vasta classe de problemas da Física e da Engenharia como é apresentado em Novotny et al., (2019). Ela é o termo mais importante da expansão assintótica topológica e depende somente da solução do problema definido no domínio não perturbado.

O conceito de derivada topológica foi rigorosamente introduzido por Sokołowski e Żochowski, (1999) .

De acordo com Novotny e Sokołowski, (2014), considera-se um domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 2$ (neste trabalho vamos considerar $d = 2$), que está sujeito a uma perturbação não suave confinada em uma pequena região $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = \hat{x} + \varepsilon\omega$, de tamanho ε , com $\bar{\omega} \Subset \Omega$ como mostrado na Figura 2.1. Aqui, \hat{x} é um ponto arbitrário de Ω e ω é um domínio fixo de \mathbb{R}^2 .

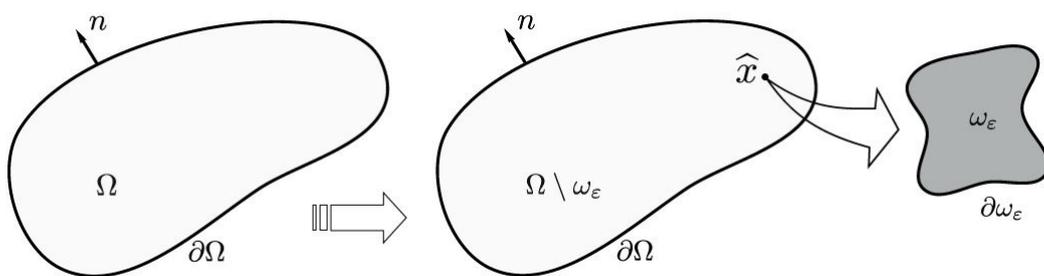


Figura 2.1 – Representação da Derivada Topológica

Seja ainda uma *função característica* $x \mapsto \chi(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, associada ao domínio não perturbado,

$$\mathbb{1}_\Omega = \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega. \end{cases} \quad \text{com } |\Omega| = \int_{\mathbb{R}^2} \chi \quad (2.15)$$

onde $|\Omega|$ é a *medida de Lebesgue* de Ω . Definindo também a função característica associada ao domínio topologicamente perturbado $x \mapsto \chi_\varepsilon(\hat{x}, x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Outra forma de escrevê-la é

apresentado a seguir:

$$\mathbb{1}_{\Omega_\varepsilon(\hat{x})} = \chi_\varepsilon(\hat{x}, x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon} \\ \gamma & \text{se } x \in \omega_\varepsilon \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega. \end{cases} \quad (2.16)$$

Além disso, vamos considerar:

- $|\Omega|$ a medida de Lebesgue¹ de Ω ;
- $|\omega|$ a medida de Lebesgue de ω ;
- $\partial\Omega$ a fronteira de Ω ;
- $\partial\omega$ a fronteira de ω ;
- Ω_ε o domínio perturbado.

Em seguida assume-se que um dado funcional de forma $\psi(\Omega_\varepsilon)$, associado ao domínio topologicamente perturbado, admite a expansão assintótica topológica

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \psi(\Omega) + f(\varepsilon)D_T(\hat{x}) + o(f(\varepsilon)), \quad (2.17)$$

em que $\psi(\Omega)$ é o funcional de forma associado ao domínio de referência (não perturbado), $f(\varepsilon)$ é uma *função de correção de primeira ordem* positiva, que decresce monotonicamente tal que $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ com $\varepsilon \rightarrow 0$, e $o(f(\varepsilon))$ é o termo remanescente (resíduo).

A função $\hat{x} \mapsto D_T(\hat{x})$ é chamada de **Derivada Topológica** de ψ em \hat{x} . Assim, esta derivada pode ser vista como uma correção de primeira ordem sobre $\psi(\Omega)$ para aproximar $\psi(\Omega_\varepsilon)$. De (2.17), podemos obter

$$\frac{\psi(\Omega_\varepsilon) - \psi(\Omega)}{f(\varepsilon)} = D_T(\hat{x}) + \frac{o(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)}. \quad (2.18)$$

A passagem do limite com $\varepsilon \rightarrow 0$ em (2.18), nos conduz à definição geral da *Derivada Topológica*, dada por

$$D_T(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\psi(\Omega_\varepsilon) - \psi(\Omega)}{f(\varepsilon)}. \quad (2.19)$$

Para que um funcional de forma definido em um domínio Ω aceite a expansão assintótica topológica (2.17), as seguintes propriedades devem ser verificadas:

1. Para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, com $\varepsilon_0 > 0$, o funcional $\omega_\varepsilon \mapsto J(\Omega_\varepsilon) := \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$ deve ser diferenciável em relação à forma em $\hat{x} \in \Omega$. A *diferenciabilidade em relação à forma* significa que existe o gradiente de forma $\omega_\varepsilon \mapsto J(\Omega_\varepsilon)$ concentrado na fronteira ou interface $\partial\omega_\varepsilon$ para um dado $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

¹ O conceito da medida de Lebesgue é difícil de se definir em poucas palavras. Para uma definição formal do conceito de medida de Lebesgue seria necessário um capítulo inteiro dedicado ao tema, que foge do objetivo deste trabalho. Assim para quem tem interesse sobre o tema sugerimos a leitura do livro (CASTRO, 2008)

2. O funcional de forma $\varepsilon \mapsto j(\varepsilon) := \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$ é contínuo em relação à *perturbação topológica* em 0^+ , isto é, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} j(\varepsilon) = 0$;
3. A função $\varepsilon \mapsto f(\varepsilon)$ é continuamente diferenciável em $(0, \varepsilon_0)$;
4. A passagem ao limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{o(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)} = 0$ é verdadeira.

Segundo Novotny e Sokołowski, (2014) ao se trabalhar com perturbações singulares associadas a furos ($\gamma = 0$), os funcionais de forma $\psi(\Omega_\varepsilon)$ e $\psi(\Omega)$ são associados a domínios topologicamente distintos. Neste trabalho não será estudado esse caso ($\gamma = 0$), uma vez que a abordagem para resolver o problema é diferente. A perturbação topológica neste trabalho é caracterizada pela nucleação de uma inclusão com propriedades físicas diferentes do material inicial, geralmente com um densidade muito menor do material original ($\gamma \ll 1$).

Estuda-se a sensibilidade do funcional de forma em relação a essa perturbação por meio do uso da definição de derivada topológica expressa por (2.19).

Uma outra abordagem, presente na literatura, que foi desenvolvida para obter a derivada topológica é proposta por Amstutz, (2006a), a qual descreve de maneira abstrata a primeira variação para o funcional de forma adotado através do seguinte teorema.

Teorema 2.4 *Seja \mathcal{V} um espaço linear e $\varepsilon_0 > 0$. Para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, considere que os vetores u , $u_\varepsilon \in \mathcal{V}$ são as respectivas soluções de:*

$$a(u, \eta) = l(\eta) \quad (2.20)$$

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, \eta) = l_\varepsilon(\eta) \quad (2.21)$$

para todo $\eta \in \mathcal{V}$, sendo $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_\varepsilon : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ formas bilineares e $l : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ e $l : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ formas lineares. Considere os funcionais $\mathcal{J} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{J}_\varepsilon : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ e assuma que existem números δa , δl , $\delta \mathcal{J}_1$ e $\delta \mathcal{J}_2$ e uma função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$(a_\varepsilon - a)(u, v_\varepsilon) = f(\varepsilon)\delta a + \mathcal{R}_1(\varepsilon), \quad (2.22)$$

$$(l_\varepsilon - l)(v_\varepsilon) = f(\varepsilon)\delta l + \mathcal{R}_2(\varepsilon), \quad (2.23)$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathcal{J}_\varepsilon(u) + \langle D_u \mathcal{J}_\varepsilon(u), u_\varepsilon - u \rangle + f(\varepsilon)\delta \mathcal{J}_1 + \mathcal{R}_3(\varepsilon), \quad (2.24)$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) = \mathcal{J}(u) + f(\varepsilon)\delta \mathcal{J}_2 + \mathcal{R}_4(\varepsilon), \quad (2.25)$$

onde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0, \quad \mathcal{R}_i = o(f(\varepsilon)), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (2.26)$$

$D_u \mathcal{J}_\varepsilon$ é a derivada de Gâteaux de \mathcal{J}_ε em relação a u e $v_\varepsilon \in \mathcal{V}$ é o estado adjunto associado a (2.21), solução do seguinte problema auxiliar:

$$a_\varepsilon(\eta, v_\varepsilon) = -\langle D_u \mathcal{J}_\varepsilon(u), \eta \rangle \quad \forall \eta \in \mathcal{V}. \quad (2.27)$$

Então,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) = f(\varepsilon)(\delta a - \delta l + \delta \mathcal{J}_1 + \delta \mathcal{J}_2) + o(f(\varepsilon)). \quad (2.28)$$

Demonstração.

Substituindo (2.25) em (2.24), temos

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathcal{J}(u) + \langle D_u \mathcal{J}_\varepsilon(u), u_\varepsilon - u \rangle + f(\varepsilon)(\delta \mathcal{J}_1 + \delta \mathcal{J}_2) + o(f(\varepsilon)). \quad (2.29)$$

Além disso, desde que $u_\varepsilon - u \in \mathcal{V}$, de (2.27) segue

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) = a_\varepsilon(u_\varepsilon - u, v_\varepsilon) + f(\varepsilon)(\delta \mathcal{J}_1 + \delta \mathcal{J}_2) + o(f(\varepsilon)). \quad (2.30)$$

E ainda,

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u_\varepsilon - u, v_\varepsilon) &= a_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - a(u, v_\varepsilon) + a(u, v_\varepsilon) - a_\varepsilon(u, v_\varepsilon) \\ &= l_\varepsilon(v_\varepsilon) - l(v_\varepsilon) + a(u, v_\varepsilon) - a_\varepsilon(u, v_\varepsilon) \\ &= (l_\varepsilon - l)(v_\varepsilon) - (a_\varepsilon - a)(u, v_\varepsilon) \\ &= f(\varepsilon)(\delta l - \delta a) + o(f(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.3 Métodos Numéricos

Neste trabalho, foram utilizados dois métodos numéricos, o método de elemento finito (MEF) e o método de elemento de contorno (MEC). No MEF é discretizado o domínio todo, com a vantagem de a matriz resultante ser uma matriz esparsa², além disso, é possível considerar fontes de massa concentrada no interior do domínio. Já no MEC como somente o contorno do domínio do problema é dividido em elementos, a análise fica reduzida em uma dimensão. Isto diminui o custo computacional envolvido na resolução de equações e geração de malha, além de simplificar o armazenamento de dados. Nesse sentido é possível afirmar que os dois métodos são complementares em relação a sua utilização, dependendo o problema a ser resolvido.

2.3.1 Método de Elementos Finitos

Nesta seção, propomos uma abordagem para o problema de otimização topológica de vibração natural via MEF. Esta abordagem consiste em introduzir uma restrição no domínio do problema com o intuito de obter uma frequência com o maior valor possível.

Antes de apresentarmos os resultados, vamos apresentar a formulação do problema a ser otimizado via MEF.

2.3.1.1 Características do Elemento Finito

Em geral, o elemento finito *Constant Strain Triangle* (CST) é apresentado com 6 graus de liberdade (dois graus em cada vértice, conforme pode ser visto na Figura 2.2), mas no nosso

² Uma matriz é dita esparsa quando possui uma grande quantidade de elementos com valor zero.

caso consideramos apenas um grau de liberdade em cada vértice (no problema de autovalor de Laplace, representa o deslocamento transversal e, no caso de trocador de calor, a temperatura). Além disso após conhecer os valores no vértice, é feita a média no baricentro e é considerado este valor. Com isso temos apenas um grau de liberdade por elemento da nossa malha.

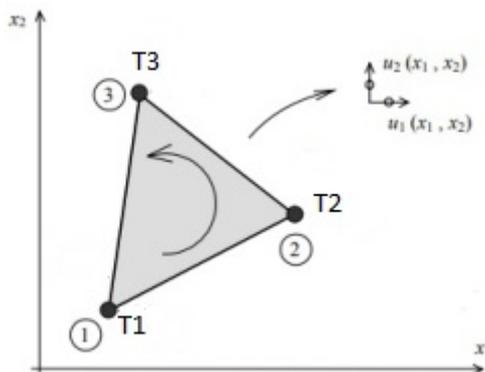
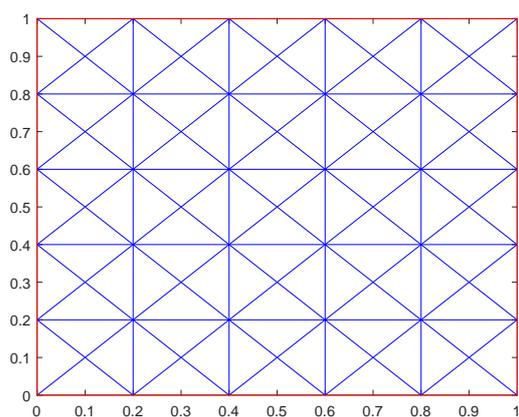


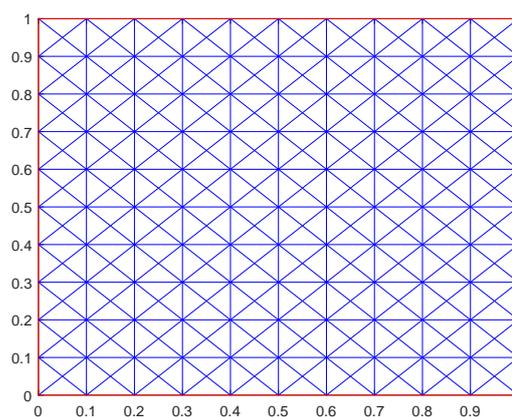
Figura 2.2 – Elemento finito CST com 6 graus de liberdade.

2.3.1.2 Malha Utilizada

A malha utilizada é composta por elementos triangulares e a análise das informações é obtida no baricentro de cada triângulo. Um exemplo de malha é apresentado na figura 2.3a. A rotina também permite um refinamento de malha, onde cada elemento da malha antiga é transformado em 4 elementos na malha nova, como pode ser visto na figura 2.3b. Esse refinamento da malha pode ser feito várias vezes, dependendo unicamente da capacidade de processamento da máquina utilizada.



(a) Malha Inicial.



(b) Malha após 1 refinamento.

Figura 2.3 – Exemplo de malha inicial e após 1 refinamento.

A malha inicial a ser utilizada depende unicamente do interesse na qualidade dos resultados que queremos ter. Na Figura 2.3a apresentamos a malha que a rotina produz considerando 5 divisões por lado, o que produz um total de 100 elementos triangulares e 61 nós. Já na Figura

2.3b apresentamos o refinamento que a rotina faz, passando de 5 para 10 divisões por lado, totalizando 400 elementos triangulares e 231 nós.

Com relação à enumeração dos nós da malha, a rotina procede da seguinte maneira:

1. Enumera os nós da base da esquerda para a direita;
2. Enumera os nós sobre os segmentos de reta paralelos à base da esquerda para a direita e de baixo para cima;
3. Enumera os nós que não estão sobre os segmentos de reta, paralelos à base, da esquerda para direita e de baixo para cima.

A enumeração dos nós é feita dessa forma, pois ao gerar a malha, primeiro são gerados os segmentos de reta para formar os quadrados e depois são gerados os segmentos de reta para formar os triângulos.

O software utilizado para fazer a implementação numérica foi o MATLAB 2018a, e o computador utilizado foi uma workstation com processador Intel Core i7-4820 CPU @ 3.7GHz com memória RAM de 64 GB para rodar os problemas de trocador de calor e um notebook DELL com processador Intel Core i5-5200 CPU @ 2.2GHz com memória RAM de 16 GB para rodar os demais problemas.

As principais vantagens de se fazer a programação no software MATLAB, em relação a outras linguagens, são:

1. existência de inúmeras funções pré programadas, o que facilita muito o trabalho de implementação, principalmente em elementos finitos;
2. visualização dos gráficos em relação a algumas outras linguagens;
3. Domínio do software por parte da grande maioria da comunidade acadêmica.

Sabemos que, na engenharia, o tempo computacional sempre é um fator muito importante a ser considerado, mas de um modo geral os exemplos apresentados sempre tiveram por objetivo principal explorar toda a capacidade da workstation, sendo que em alguns exemplos apresentamos as geometrias obtidas durante o processo de otimização e o tempo gasto até esta iteração.

2.3.1.3 Algoritmo de otimização topológica para o MEF

Nesta seção é apresentado o algoritmo utilizando elementos finitos para obter a otimização topológica.

Penalização Linear

Para resolver os problemas numéricos é considerado um domínio inicial $D \subset \mathbb{R}^2$, tal que $\Omega \subset D$. Utilizando o método de penalidade linear para controle de volume, o problema de otimização que deseja-se resolver é escrito da seguinte forma:

$$\underset{\Omega \subset D}{\text{Minimizar}} \quad \mathcal{F}_\Omega(u) = \mathcal{F}(u) + \xi|\Omega| \quad (2.32)$$

sujeito a (3.120) ou (3.140), onde $\xi > 0$ é um penalty definido pelo usuário. Em particular, o funcional de forma $\mathcal{F}(u)$ é definida por meio da Equação (3.123) ou (3.145) de acordo com a aplicação com a qual esta-se trabalhando, enquanto o termo $\xi|\Omega|$ é usado para impor uma restrição ao volume de material elástico, ou seja, quanto maior for ξ , menor será o volume final $|\Omega|$. Como o problema é linear, a derivada topológica apresentada em (2.32) é dado por

$$D_T \mathcal{F}_\Omega = D_T \mathcal{F} + \xi \quad (2.33)$$

Para estes problemas, a derivada topológica fornece a direção de descida do funcional de forma e, conseqüentemente, conduz à solução do problema. Um algoritmo de otimização de topologia baseado na derivada topológica e um método de representação de domínio level-set é aplicado. Este método foi proposto por Amstutz e Andrä (2006) e consiste basicamente em buscar uma condição de otimalidade local para o problema de otimização (2.32), escrito em termos da derivada topológica e uma função level-set (Amstutz, (2011)). Para obter mais detalhes, consulte o artigo de revisão de Novotny et al., (2019b). Vale ressaltar que o método de penalização utilizado não fornece um controle direto sobre a fração de volume requerida, isto significa que não conseguimos fixar a priori a fração de volume de material a ser retirado.

Como a derivada topológica é linear (Novotny e Sokołowski, (2014)), a derivada topológica de \mathcal{F}_Ω pode ser escrita como a soma das derivadas topológicas de cada um de seus termos. Mas, como a derivada topológica do volume $D_T|\Omega|$ é facilmente calculada e dada por (veja Exemplo 1.1 em Novotny e Sokołowski, (2020)):

$$D_T|\Omega| = \begin{cases} -1, & \text{se } \hat{x} \in \Omega \\ 1, & \text{se } \hat{x} \in \mathcal{D} \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad (2.34)$$

necessitamos apenas calcular a derivada topológica de $\mathcal{F}_\chi(u)$, a qual já está calculada em (3.139) e (3.152) para os problemas de autovalor e trocador (dissipador) de calor, respectivamente. Com isso o problema de minimização proposto pode ser resolvido.

Segundo Lopes, (2017), baseado na derivada topológica e na representação do domínio por função level-set, propõe-se um algoritmo de otimização topológica. Apresentado em Amstutz e Andrä, (2006), ele consiste em procurar uma condição de otimalidade para o problema de minimização (??), escrita em termos da derivada topológica e da função level-set. Este algoritmo é muito eficaz em várias áreas, como por exemplo: fluxo através de meios porosos (Amstutz e Andrä, (2006)); otimização estrutural com restrição de tensão (Amstutz e Novotny, (2010), Amstutz et al., (2012)); otimização de microestruturas elásticas (Amstutz et al., (2012)). Podemos observar que, a grande vantagem da derivada topológica em relação a outros métodos de

otimização topológica encontrados na literatura, a derivada topológica não requer um modelo material baseado em densidade intermediárias. Desta forma, as dificuldades decorrentes dos procedimentos baseados em densidades intermediárias são naturalmente evitados. Outra vantagem da derivada topológica é que ela oferece uma fórmula analítica para a sensibilidade topológica que permite obter a topologia ótima, na maioria dos casos, em poucas iterações. Além disso, a derivada topológica tem a vantagem de fornecer uma fórmula analítica para a sensibilidade topológica. Assim, o algoritmo de otimização topológica é consideravelmente eficiente, de simples implementação computacional e necessita de poucos parâmetros algorítmicos definidos pelo usuário.

Com a representação de domínio por uma função level-set, o material duro é caracterizado por uma função $\Psi \in L^2(\Omega)$ de forma que

$$\Omega^s = \{x \in \Omega; \Psi(x) < 0\}, \quad (2.35)$$

o domínio de material mole é definido por

$$\Omega^\omega = \{x \in \Omega; \Psi(x) > 0\} \quad (2.36)$$

e Ψ se anula sobre a interface.

Considerando a derivada topológica do funcional de forma $\mathcal{F}_\Omega(u)$ temos que uma condição suficiente de otimalidade local do problema (??) para a classe de problemas que consideram como perturbação topológica uma inclusão circular é

$$D_T \mathcal{F}_\Omega^\alpha(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.37)$$

condição essa que foi rigorosamente tratada por Amstutz (2011).

Com a finalidade de escrever a condição acima em termos da função level-set Ψ , definimos a quantidade

$$g(x) := \begin{cases} -D_T \mathcal{F}_\Omega^\alpha(x) & \text{se } \Psi(x) < 0 \\ D_T \mathcal{F}_\Omega^\alpha(x) & \text{se } \Psi(x) > 0, \end{cases} \quad (2.38)$$

assim o critério de otimalidade (2.37) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} g(x) < 0 & \text{se } \Psi(x) < 0 \\ g(x) > 0 & \text{se } \Psi(x) > 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Podemos verificar que (2.39) é verdadeira quando a quantidade g é tal que

$$\exists \tau > 0 : g = \tau \Psi, \quad (2.40)$$

ou, equivalentemente,

$$\theta := \arccos \left[\frac{\langle g, \Psi \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|g\|_{L^2(\Omega)} \|\Psi\|_{L^2(\Omega)}} \right] = 0, \quad (2.41)$$

onde θ é o ângulo entre as funções g e Ψ em $L^2(\Omega)$.

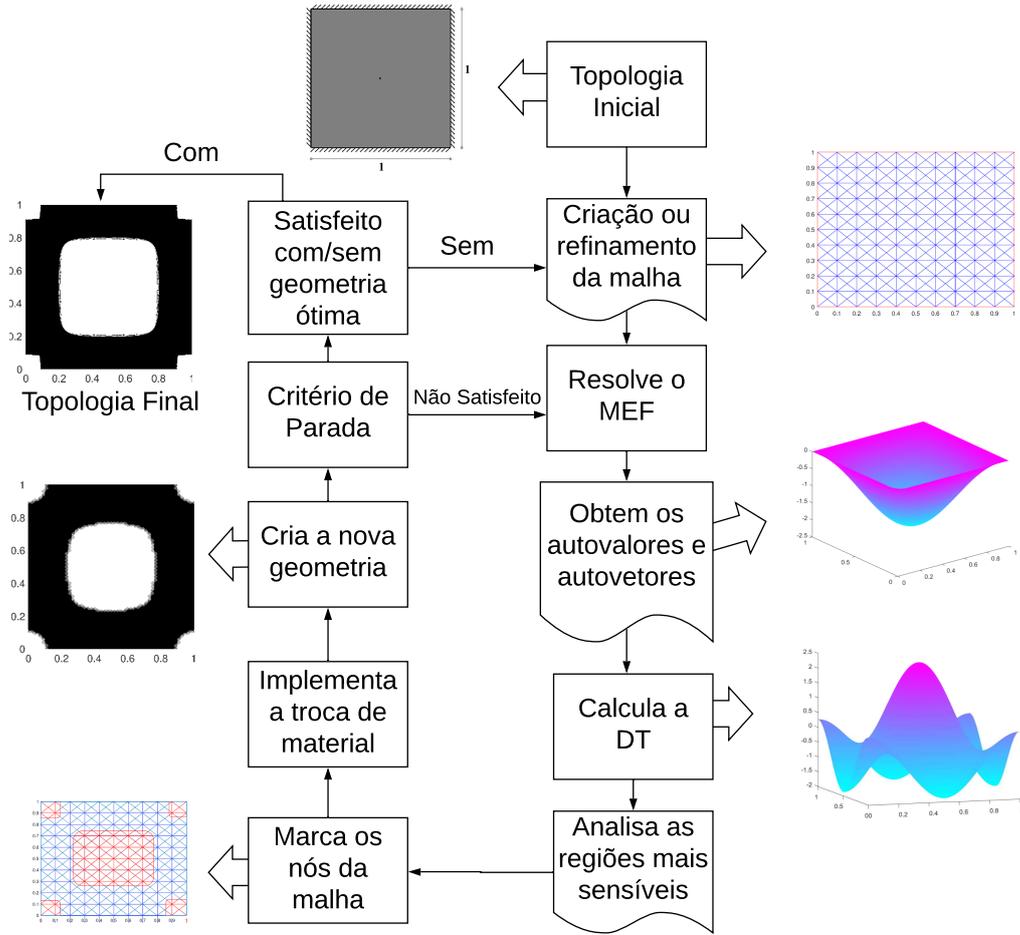


Figura 2.4 – Esquema da metodologia numérica para MEF.

Tanto (2.40) quanto (2.41) são condições de otimalidade local correspondentes à condição (2.37). Em particular, o algoritmo de otimização topológica descrito a seguir, utiliza como critério de otimalidade a condição (2.41).

Começamos por escolher uma função level-set inicial $\Psi_0 \in L^2(\Omega)$, que define o domínio inicial para a topologia ótima. O algoritmo proposto, produz uma sequência $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de funções level-set que fornecem sucessivas aproximações para a condição suficiente de otimalidade (2.41).

Neste trabalho o domínio inicial Ψ_0 é normalizado. Considerando \mathcal{S} a esfera unitária em $L^2(\Omega)$, o algoritmo é explicitamente dado por

$$\Psi_0 \in \mathcal{S}$$

$$\Psi_{i+1} = \frac{1}{\text{sen } \theta_1} \left\{ \text{sen}[(1 - \kappa_j)\theta_i] \Psi_i + \text{sen}(\kappa_j \theta_i) \frac{g_i}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} \right\} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, \quad (2.42)$$

onde θ_i é o ângulo entre g_i e Ψ_i e $\kappa_j \in [0, 1]$ é o tamanho do passo determinado por uma busca linear a fim de minimizar o valor da função objetivo $\mathcal{F}_\Omega^\alpha(x) = \mathcal{F}$.

Inicialmente, para todo $i \in \mathbb{N}$ consideramos $\kappa_1 = 1$ e assim, se $\mathcal{F}_n < \mathcal{F}_{n-1}$, a rotina atualiza todos os valores das variáveis. Caso $\mathcal{F}_n \geq \mathcal{F}_{n-1}$ atualizamos a valor de $\kappa_j = \frac{\kappa_{j-1}}{2}$ e verificamos novamente se a condição $\mathcal{F}_n < \mathcal{F}_{n-1}$ é satisfeita. Se em alguma iteração j o tamanho do passo na busca linear κ_j for menor que uma dada tolerância numérica ε_κ e a condição de

otimalidade não for satisfeita, então um refinamento uniforme em todo domínio Ω é realizado e o processo de otimização continua.

O processo de otimização é interrompido quando a condição de otimalidade $\theta_i \leq \varepsilon_\theta$ é satisfeita em alguma iteração, sendo ε_θ uma dada tolerância numérica.

2.3.2 Método dos Elementos de Contorno

O método dos elementos de contorno (boundary element method ou BEM, em inglês) é um método computacional para a solução de sistemas de equações diferenciais formuladas em forma integral. É aplicado em diversas áreas da engenharia, como em mecânica dos fluidos, mecânica dos sólidos, mecânica dos solos, acústica, eletromagnetismo e mecânica da fratura, dentre outras. A principal diferença entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos (método numérico mais tradicional e utilizado) é que no primeiro somente o contorno do problema é discretizado (dividido em elementos). Isto, em muitos casos, reduz drasticamente o tamanho do problema, além de simplificar a implementação de pré-processadores (geradores de geometria e de malha).

O método dos elementos de contorno possui melhor desempenho que o método dos elementos finitos em certas circunstâncias, como por exemplo, quando o domínio de estudo for infinito ou semi-infinito, como em problemas de acústica e mecânica dos solos, a representação mais simples do problema de contato e em problemas onde o contorno muda constantemente, como é o caso de propagação de trincas.

Atualmente, o desenvolvimento de formulações rápidas do método dos elementos de contorno, tais como o método dos elementos de contorno com expansão em multipolos (fast multipole boundary element method (Liu, (2010))) ou o método dos elementos de contorno com aproximação cruzada adaptativa (adaptive cross approximation boundary element method (Bebendorf, (2008))), tem aumentado muito a performance das formulações do método dos elementos de contorno no que diz respeito ao custo computacional e ao armazenamento de dados, tornando-o um método bastante vantajoso na grande maioria dos problemas de engenharia.

2.3.2.1 Equação Governante

Nesta seção, o problema de autovalor e autovetor será considerado. A solução da equação de Helmholtz fornece as frequências naturais ou fundamentais e os modos de vibração de um sistema.

Segundo Partridge et al., (1992), o problema de autovalor é um caso particular do problema mais geral. Este problema mais geral pode ser formulado da seguinte forma: Seja um domínio Ω , com uma fronteira Γ , como mostra a Figura 2.5 sujeito a uma equação governante do tipo:

$$\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = b(x, y, u). \quad (2.43)$$

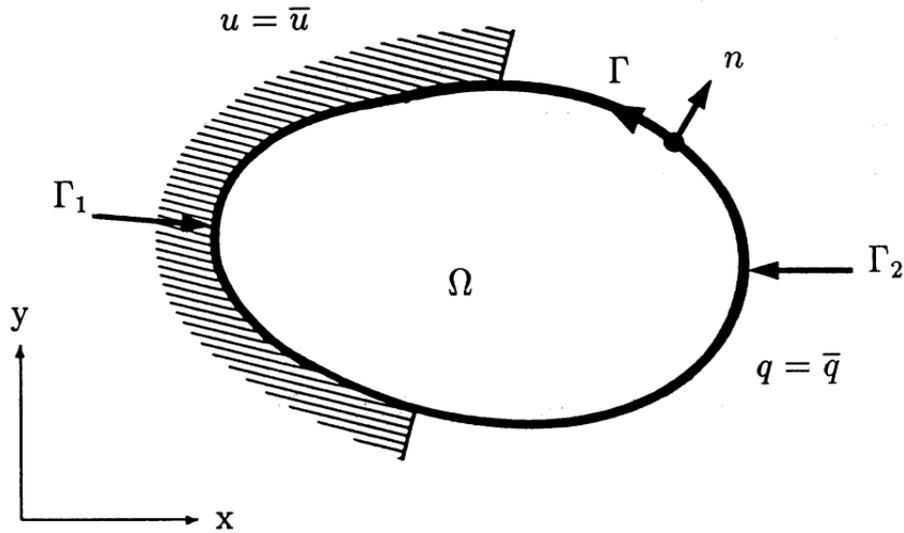


Figura 2.5 – Condição de contorno

Um problema pode ter várias condições de contorno e com isso o contorno pode ser dividido em várias partes $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$, onde cada parte tem uma condição de contorno. As condições de contorno mais utilizadas são do tipo Dirichlet, Neumann e Robin. Um exemplo de condição de contorno para o problema pode ser do tipo Dirichlet (2.44) ou Neumann (2.45) são apresentados.

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (2.44)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (2.45)$$

onde n é o vetor normal ao contorno Γ .

Condições de contorno mais complexas como, por exemplo, a de Robin, podem ser incluídas, porém, como não são usadas neste trabalho, não serão consideradas no desenvolvimento da formulação.

O termo b pode ser função da posição (x, y) e também de u . Considerando $b = -\mu^2 u$ em (2.43) temos a equação em sua forma usual, que é dada por

$$\text{div}(\alpha \nabla u) + \mu^2 u = 0. \quad (2.46)$$

Considerando a vibração da membrana mostrada na Figura 2.5, podemos observar que u representa deslocamento transversal e $\mu^2 = \rho \lambda^2 / E$ onde ρ e E são propriedades materiais e λ são as frequências naturais ou autovalores.

No nosso caso, devido ao problema ser autoadjunto, temos que todos os autovalores do problema são maiores que zero, e neste caso não precisamos considerar o quadrado do autovalor. Além disso, se considerarmos, sem perda de generalidade, $\alpha = 1$ então

$$\text{div}(\alpha \nabla u) = \nabla^2 u \quad (2.47)$$

2.3.2.2 Método de Reciprocidade Dual

Segundo Dias, (2020), a solução de (2.43) é dada pela soma de uma solução homogênea ($\nabla^2 u_h = 0$) com uma solução particular ($\nabla^2 u^p = b$).

$$u = u_h + u^p \quad (2.48)$$

Em geral é difícil encontrar u^p principalmente para problemas transientes e problemas não lineares. Assim, o Método de Reciprocidade Dual propõe o uso de uma série de soluções particulares u_j^p em vez de uma única função u^p . O número de soluções depende da quantidade de nós do problema. A ideia do método consiste em aproximar o termo b por:

$$b \approx \sum_{j=1}^{N+L} a_j f_j \quad (2.49)$$

onde N é a quantidade de nós do contorno e L é a quantidade de nós internos (Figura 2.6), a_j são coeficientes desconhecidos e f_j são as funções de aproximação.

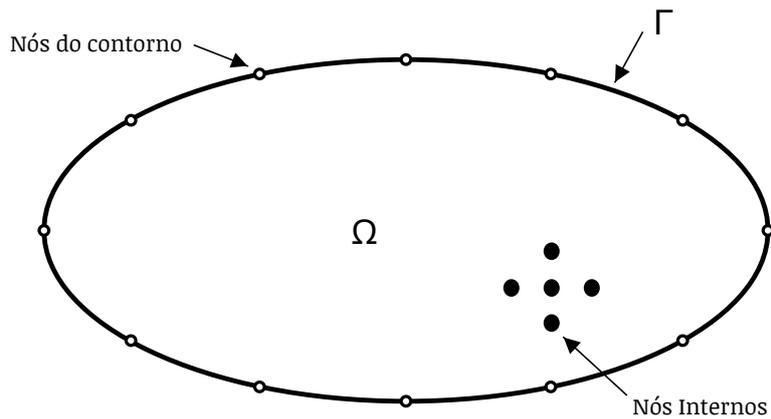


Figura 2.6 – Nós do contorno e nós internos

As funções de aproximação e a solução particular são conectadas por:

$$\nabla^2 u_j^p = f_j \quad (2.50)$$

Substituindo (2.50) em (2.49) tem-se

$$b \approx \sum_{j=1}^{N+L} a_j \nabla^2 u_j^p \quad (2.51)$$

e finalmente, substituindo (2.51) em (2.43)

$$\nabla^2 u \approx \sum_{j=1}^{N+L} a_j \nabla^2 u_j^p \quad (2.52)$$

2.3.2.3 Resíduos Ponderados

Pode-se afirmar que o MEC transforma um modelo formulado por equações diferenciais parciais, que descreve matematicamente o problema físico num domínio espacial e temporal, em equações integrais envolvendo somente valores do contorno e/ou condições iniciais.

A teoria das Equações Integrais mostra que é possível realizar essa transformação através do emprego do teorema de divergência, dentro de um contexto matemático no qual as características dos operadores diferenciais viabilizem tais procedimentos. É necessário ainda que haja o apoio de funções de auxiliares denominadas soluções fundamentais. É também possível chegar a um equacionamento integral através de uma sentença consistente de resíduos ponderados, na qual as soluções fundamentais fazem o papel de funções de ponderação. Assim, o conceito central deste método consiste em substituir os valores exatos de u e p por soluções aproximadas. Além disso, os erros introduzidos em (2.52), podem ser minimizados se forem ortogonalizados por uma função peso u^* , conhecida como solução fundamental, e sua derivada q^*

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}. \quad (2.53)$$

Com isso, multiplicando os termos de cada da equação (2.52) lado por u^* e integrando ao longo do domínio, u e q passam a ser os valores aproximados e forçando o erro induzido pela aproximação a ser zero no sentido médio. Logo (2.52) pode ser reescrito como:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} a_j \int_{\Omega} (\nabla^2 u_j^p) u^* d\Omega \quad (2.54)$$

Aplicando a integração por partes obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega - \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma + \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad (2.55)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u_j^p) u^* d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u_j^p d\Omega - \int_{\Gamma} q^* u_j^p d\Gamma + \int_{\Gamma} u^* q_j^p d\Gamma \quad (2.56)$$

onde q_j^p é dado por:

$$q_j^p = \frac{\partial u_j^p}{\partial n}. \quad (2.57)$$

Substituindo (2.55) e (2.56) em (2.54)

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega - \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma + \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} a_j \left(\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u_j^p d\Omega - \int_{\Gamma} q^* u_j^p d\Gamma + \int_{\Gamma} u^* q_j^p d\Gamma \right). \quad (2.58)$$

Embora tenham aparecido integrais cujo domínio de integração é o contorno, ainda existem integrais no domínio em (2.58), e por isso é necessário lidar com a solução fundamental (u^*) para eliminar as integrais no domínio.

2.3.2.4 Solução Fundamental

A forma de como escolhemos a solução fundamental influencia diretamente na representação de (2.58), assim a escolha da solução fundamental é feita por conveniência, de modo que seja a melhor possível. Dessa forma, a solução fundamental é escolhida como sendo a solução da seguinte equação:

$$\nabla^2 u^* + \delta_i = 0 \quad (2.59)$$

onde δ_i é a função delta de Dirac. A solução fundamental representa o campo gerado por uma fonte concentrada unitária atuando no ponto i . O efeito da fonte é propagado do ponto i até o infinito, o meio de propagação tem as mesmas propriedades elásticas que o meio que se deseja analisar. A vantagem da escolha da função delta de Dirac é que ela reduz o número das integrais de domínio através da propriedade do Teorema de Gauss-Green.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u \, d\Omega = \int_{\Omega} (-\delta_i) u \, d\Omega = -u_i \quad (2.60)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u_j^p \, d\Omega = \int_{\Omega} (-\delta_i) u_j^p \, d\Omega = -u_{ij}^p \quad (2.61)$$

substituindo (2.60) e (2.61) em (2.58)

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} q^* u \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} a_j \left(c_i u_j^p - \int_{\Gamma} q^* u_j^p \, d\Gamma + \int_{\Gamma} u^* q_j^p \, d\Gamma \right). \quad (2.62)$$

onde c_i é uma constante que depende da suavidade da geometria em que está o ponto fonte. Caso seja uma geometria suave c_i assume o valor de $\frac{1}{2}$. Com isso, temos que as integrais presentes na Equação (2.62) tem como domínios de integração, o contorno. Além do que, o termo fonte foi substituído por integrais no contorno. O desenvolvimento da equação (2.62) foi feito considerando uma fonte concentrada atuando no ponto i , conseqüentemente os valores de u^* e q^* mudam de acordo com o ponto i . Com isso, para cada posição de i no domínio uma nova equação integral é obtida.

Em um meio isotrópico bidimensional a solução de (2.59) é dada por:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (2.63)$$

onde r é a distancia entre o ponto de aplicação da fonte concentrada e o ponto sobre consideração. A prova que (2.63) é solução de (2.59) é apresentada detalhadamente por Brebbia et al., (1992).

2.3.2.5 Discretização do Domínio

Uma vez que todas as integrais de (2.62) estão com o domínio de integração no contorno, é necessário criar uma malha para discretizar o contorno Γ . Existem vários tipos de elementos para discretizar o contorno, como por exemplo: constante, lineares, quadrático. Segundo Dias (2020), a forma do elemento é definida pela quantidade de nós que ele possui, elementos com 1 nó são chamados de elementos constantes, 2 nós são elementos lineares e 3 nós são elementos quadráticos. Os valores de u e q ao longo de cada elemento serão aproximado por

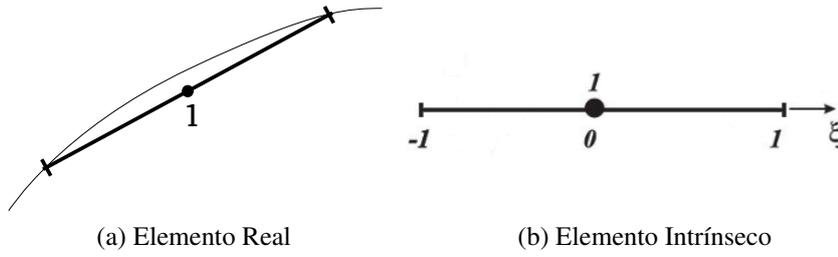


Figura 2.7 – Elemento constante

funções polinomiais de acordo com a quantidade de nós. Neste trabalho são utilizados elementos constantes.

Os pontos iniciais e finais de cada elemento são chamados nós geométricos, pois definem a geometria do elemento, elementos constantes possuem geometria retilínea e tanto u quanto q são assumidos constantes ao longo do elemento. Os nós físicos, também chamados de pontos de colocação ou simplesmente nós, é onde as grandezas físicas são calculadas e se localizam no ponto médio do elemento.

O elemento constante tem apenas um nó, que está localizado na posição central do elemento, como mostra a Figura 2.3.2.5, a coordenada intrínseca e a coordenada real são coincidentes, logo não há necessidade do uso de funções de forma, o valor encontrado no nó é assumido constante ao longo de todo o elemento. O uso de elementos constantes simplifica a formulação e facilita a implementação numérica, porém, aumenta o custo computacional pois necessitam de uma maior quantidade de elementos para conseguir resultados precisos. Como o nó está localizado na metade do elemento ele sempre está em uma região suave do contorno e portanto $c_i = \frac{1}{2}$.

Uma vez escolhido o elemento, dividimos o contorno em N elementos. Esse procedimento permite montar um sistema de equações lineares, aplicar as condições de contornos conhecidas e obter uma solução aproximada para o problema.

As variáveis são interpoladas ao longo dos elementos. A soma de todos os elementos forma a fronteira Γ é dado por:

$$\Gamma = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \quad (2.64)$$

Discretizando (2.62), onde o sub-índice i representam o ponto fonte e k o ponto campo, obtém-se:

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* u \, d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* q \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} a_j \left(c_i u_j^p - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* u_j^p \, d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* q_j^p \, d\Gamma \right). \quad (2.65)$$

Como estamos trabalhando com elementos constantes, tem-se que os valores de u e q são constantes em cada nó. Assim, eles podem ser retirados das integrais. Já f é definida e, u^p e q^p são funções conhecidas que dependem apenas da geometria, portanto, também podem ser

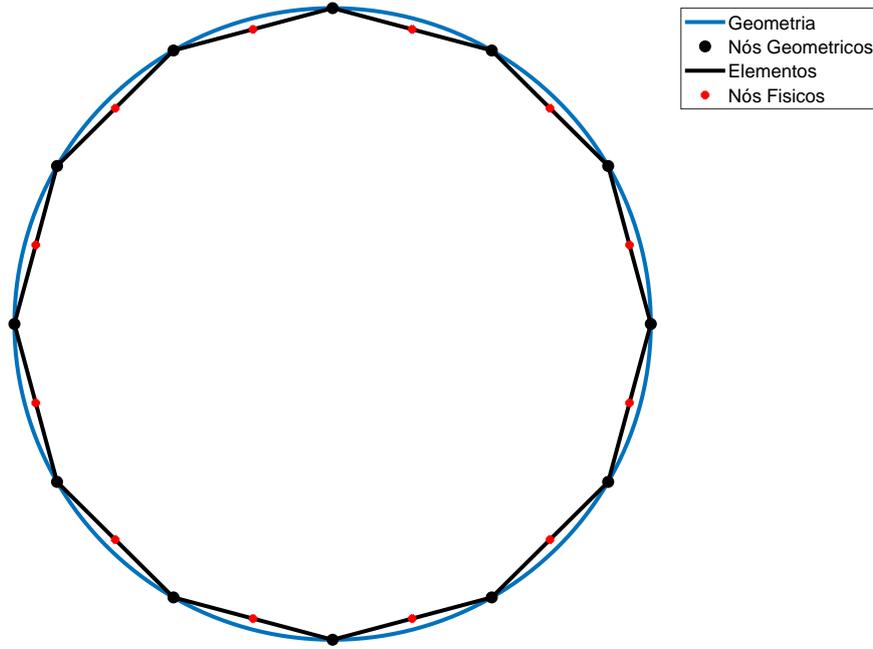


Figura 2.8 – Elemento constante.

retiradas das integrais e dos somatórios em k .

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N u \int_{\Gamma_k} q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N q \int_{\Gamma_k} u^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} a_j \left(c_i u_j^p + u_j^p \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* d\Gamma - q_j^p \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* d\Gamma \right). \quad (2.66)$$

Portanto, existem apenas duas integrais para serem calculadas em (2.66):

$$\int_{\Gamma_k} q^* d\Gamma \quad \int_{\Gamma_k} u^* d\Gamma \quad (2.67)$$

As integrais de (2.67) são chamadas de coeficientes de influência. Para simplificar a equação e escreve-las na forma matricial são feitas as seguintes definições:

$$H_{ik} = c_i \delta_{ik} + \int_{\Gamma_k} q^* d\Gamma \quad G_{ik} = \int_{\Gamma_k} u^* d\Gamma \quad (2.68)$$

onde δ_{ik} é o delta de Kronecker e possui valor 1 quando $i = k$ e valor 0 para as demais combinações de i e k . Substituindo (2.68) em (2.66) tem-se:

$$\sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{N+L} a_j \left(u_j^p \sum_{k=1}^N H_{ik} - q_j^p \sum_{k=1}^N G_{ik} \right). \quad (2.69)$$

Ao escrever os somatórios em k na forma matricial e agrupar os vetores u_j^p e q_j^p como colunas das matrizes U^p e Q^p pode-se escrever (2.69) na forma matricial

$$HU - Gq = (HU^p - GQ^p)a. \quad (2.70)$$

Por fim, para determinar a é necessário escrever (2.49) na forma matricial

$$b = Fa \quad (2.71)$$

onde cada coluna da matriz F contém os valores de f_i nos pontos da malha. Portanto, isolando a tem-se os coeficientes:

$$a = f^{-1}b \quad (2.72)$$

2.3.2.6 Solução particular

A solução particular u^p , sua derivada q^p e a função de aproximação correspondente usada no Método de Reciprocidade Dual não são limitadas pela formulação, contudo, a matriz resultante F não pode ser uma matriz singular. O procedimento consiste em propor uma função f e então usar a (2.50) para encontrar u^p e q^p .

Neste trabalho foi adotado f como uma função de base radial: $f = 1 + r$, onde r é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo. Para esse caso u^p e q^p ficam

$$u^p = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \quad (2.73)$$

$$q^p = \left(r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3} \right) \quad (2.74)$$

onde r_x e r_y são os componentes de r na direção x e y respectivamente.

2.3.2.7 A equação de Helmholtz

Para que se tenha o problema de autovalor e autovetor, basta considerar $b = -\lambda u$ em (2.46), onde u é o deslocamento transversal da membrana. Assim, (2.46) pode ser reescrito como:

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0 \quad (2.75)$$

A Equação (2.75) é conhecida como equação de Helmholtz. Além disso, substituindo b em (2.72) obtém-se:

$$a = -\lambda F^{-1}u \quad (2.76)$$

e, substituindo (2.76) em (2.70)

$$HU - Gq = \lambda(HU^p - GQ^p)F^{-1}u. \quad (2.77)$$

Considerando $S = (HU^p - GQ^p)F^{-1}$, isto é possível pois f é conhecida, pode-se reescrever (2.77) como:

$$(H + \lambda S)u = Gq \quad (2.78)$$

que é a formulação final da equação de Helmholtz para o MEC.

2.3.2.8 Autovalores e autovetores

A Equação (2.78) foi estudada por Nardini e Brebbia (1983) que particionaram as matrizes como mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = -\mu^2 \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Considerando o problema da barra vibratória mostrada na Figura 2.5, a barra é fixada na parte AD da fronteira, então $u_1 = 0$. Na fronteira livre $ABCD$ na figura a condição prescrita é $q_2 = 0$, tal que a Equação (2.79) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mu^2 \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

donde

$$H_{12}u_2 - G_{11}q_1 = -\mu^2 S_{12}u_2 \quad (2.81)$$

$$H_{22}u_2 - G_{21}q_1 = -\mu^2 S_{22}u_2 \quad (2.82)$$

De (2.81) temos

$$\begin{aligned} G_{11}q_1 &= H_{12}u_2 + \mu^2 S_{12}u_2 \\ q_1 &= G_{11}^{-1}H_{12}u_2 + \mu^2 G_{11}^{-1}S_{12}u_2 \end{aligned} \quad (2.83)$$

substituindo (2.83) em (2.82)

$$\begin{aligned} H_{22}u_2 - G_{21}(G_{11}^{-1}H_{12}u_2 + \mu^2 G_{11}^{-1}S_{12}u_2) &= -\mu^2 S_{22}u_2 \\ \underbrace{(H_{22} - G_{21}G_{11}^{-1}H_{12})}_{K}u_2 &= -\mu^2 \underbrace{(S_{22} - G_{21}G_{11}^{-1}S_{12})}_{M}u_2, \end{aligned} \quad (2.84)$$

portanto,

$$Ku = \mu^2 Mu \quad (2.85)$$

onde K e M representam as matrizes de rigidez e massa, respectivamente. Além disso, a Equação (2.85) é uma equação típica de autovalor e autovetor, dela é possível obter os autovalores e autovetores utilizando procedimentos numéricos padrões.

2.3.2.9 Algoritmo de otimização topológica para o MEC

Para resolver os problemas de autovalor em uma membrana, uma rotina foi escrita em MATLAB usando elementos de contorno constantes. O processo de otimização é realizado dentro de um programa principal, onde uma nova topologia é gerada a cada iteração. Inicialmente são fornecidos os dados de entrada com a geometria inicial, condições de contorno, critérios de parada. Uma malha regularmente espaçada de pontos internos e uma malha do contorno são geradas automaticamente na iteração inicial para o domínio completo.

O processo de otimização é controlado por parâmetros definidos pelo usuário e que determinam o caminho da otimização. Além disso podemos dividir o algoritmo em três etapas principais: Solução do MEC, Análise de sensibilidade via Derivada Topológica e Otimização da topologia.

Na primeira etapa são montadas as malhas, organizadas todas as informações pertinentes para o cálculo numérico fornecendo como saída os autovalores e autovetores da geometria.

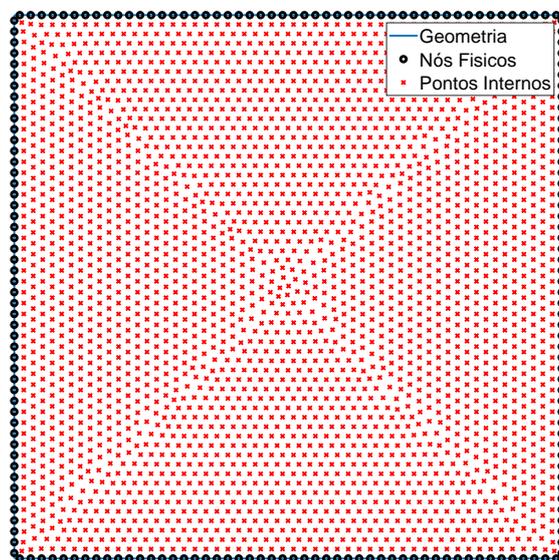


Figura 2.9 – Exemplo de malha inicial

Em seguida é avaliada a sensibilidade do domínio, que consiste em utilizar os autovalores e autovetores para calcular a distribuição da derivada topológica na geometria. Por último, nesta etapa são identificados os pontos de maior sensibilidade na malha interna e marcados para que se possa implementar os furos de acordo com o tipo de selo escolhido. Já na última etapa é feita a otimização da geometria inicial removendo as zonas de maior sensibilidade e gerando uma nova geometria.

Caso o critério de parada seja atingido para essa nova geometria, termina a execução da rotina, do contrário o código utiliza a nova geometria como entrada para a próxima iteração e repete o processo.

A Figura 2.10 mostra um esquema do procedimento de rotina. As principais etapas realizadas durante o processo de otimização são resumidas como:

1. Um domínio inicial e um critério de parada são fornecidos.
2. Resolva o problema BEM calculando os campos de tensão e deformação para todos os pontos internos.
3. Avalie a derivada topológica para todos os pontos internos usando o funcional a ser otimizado.
4. Selecione os pontos internos com a menor/maior derivada topológica e crie furos removendo os pontos selecionados.

5. Construa a nova geometria e remodele o modelo BEM.
6. Verifique o critério de parada. Retorne à Etapa 2 ou termine o programa se o critério for satisfeito.

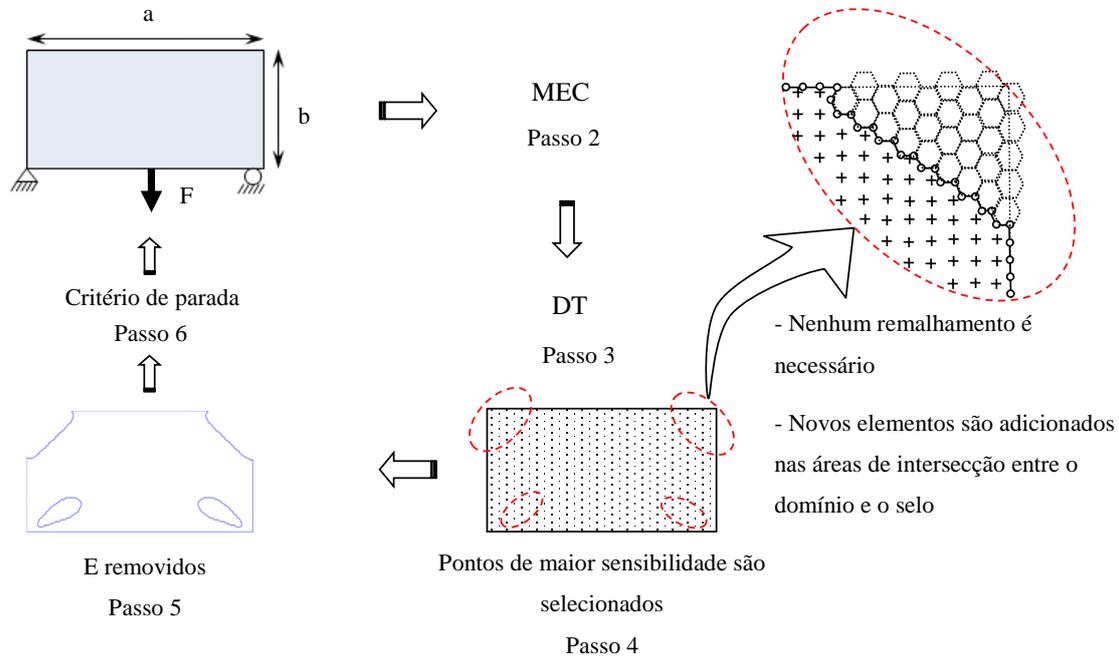


Figura 2.10 – Esquema da metodologia numérica para MEC.

Assim uma estratégia de remoção de material é implementada com base em uma geometria predefinida que chamamos de *Tipo de selo*. A ideia consiste em selecionar uma forma geométrica do furo que será colocado nas áreas com baixa eficiência, conforme mostrado na Figura 2.11. A qualidade geométrica da topologia final dependerá fortemente da forma e do tamanho do carimbo geométrico. Os diferentes tipos e tamanhos de *Tipo de selo* e seus efeitos na topologia final também são mostrados na Figura 2.11.

Para evitar um aspecto geometricamente recortado, recomenda-se uma grade mais refinada de pontos internos, o que faz com que os raios dos furos diminuam. Porém, é importante notar que, ao aumentar o número de pontos internos, o custo computacional também aumenta significativamente. Esse problema pode ser superado gerando um deslocamento de uma grade de pontos internos durante as iterações intermediárias.

O uso de um deslocamento de grades internas também pode resultar na perda de algumas informações do domínio ao realizar a análise de sensibilidade topológica, mesmo ao usá-la em algumas iterações intermediárias. O uso de um deslocamento de pontos internos é adequado para ampliar furos, para minimizar o aspecto denteado da geometria final ou quando apenas a otimização da forma está em análise.

Outra alternativa é definir uma malha grosseira das grades internas para as iterações iniciais (acelerando a otimização) e refiná-la gradualmente conforme o critério de parada é quase

alcançado (reduzindo as irregularidades na geometria). Finalmente, um processo de alisamento pode ser aplicado na topologia final como uma etapa de pós-processamento, eliminando completamente qualquer aparência de "dente de serra". O uso de todas essas estratégias é possível devido aos recursos fornecidos pelo BEM.

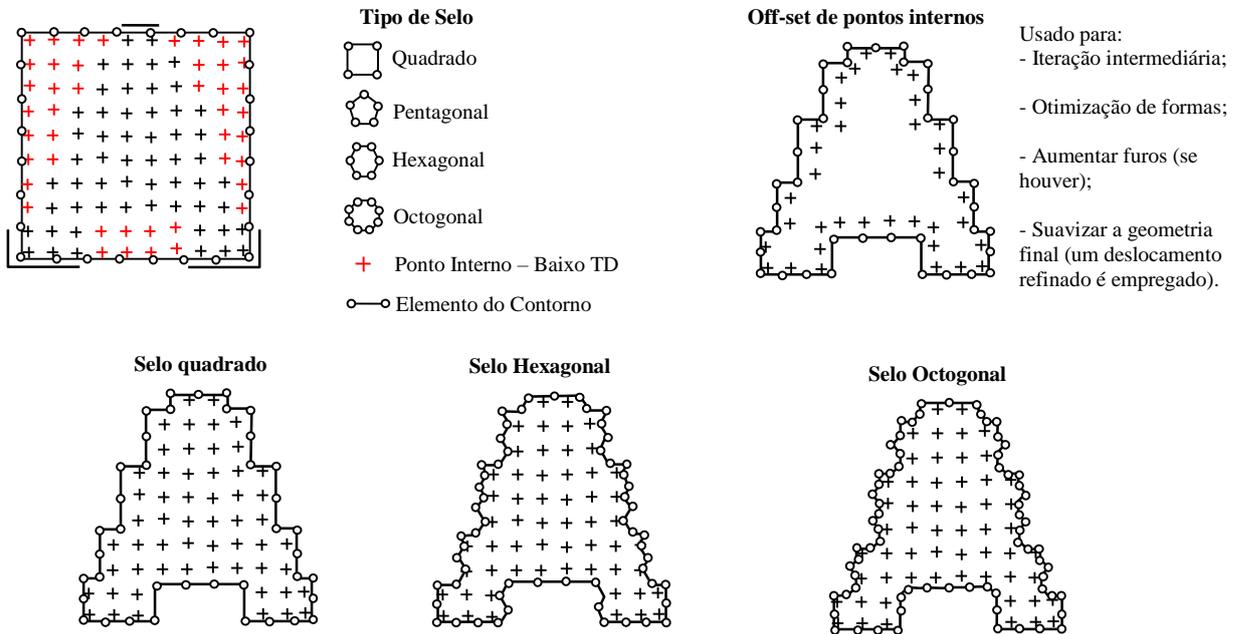


Figura 2.11 – Estratégias adotadas para retirada de material.

3 Equação de Helmholtz Modificada

Neste capítulo será apresentada a formulação matemática para a derivada topológica da equação de Helmholtz modificada e também a derivada para as duas aplicações estudadas neste trabalho: problema de autovalor e problema de difusão.

3.1 Formulação do Problema

Para fazer o estudo teórico da derivada topológica é considerada a equação de Helmholtz modificada, cuja formulação forte é dada por:

$$\begin{cases} \text{Encontre } u \text{ tal que} \\ -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) + \rho k u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

onde k é uma função estritamente positiva e os valores de $\alpha(x)$, $\rho(x)$ e $f(x)$ são definidos na tabela a seguir.

Tabela 3.1 – Valor de $\alpha(x)$, $\rho(x)$ e $f(x)$ em Ω

	$\alpha(x)$	$\rho(x)$	$f(x)$
$\Omega \setminus \omega$	β_0	ρ_0	f_0
ω	α_1	ρ_1	f_1

Observação 3.1 *O significado físico das variáveis u , α , ρ e f serão apresentadas em cada um dos problemas analisados no Capítulo 4.*

Com isso a formulação fraca é dada por,

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \rho k u \eta = \int_{\Omega} f \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (3.2)$$

Para que a notação não fique muito carregada, comete-se um abuso de notação e não indica-se em quais variáveis está-se integrando. Mas em geral, é calculada uma integral de área ou integral no contorno quando o domínio de integração for o contorno.

É considerada uma perturbação não suave confinada em uma pequena região B_ε , então são definidos os parâmetros de perturbação:

Tabela 3.2 – Valor de α_ε , ρ_ε e f_ε em Ω

	α_ε	ρ_ε	f_ε
$\Omega \setminus B_\varepsilon$	α	ρ	f
B_ε	$\gamma_\alpha \alpha$	$\gamma_\rho \rho$	$\gamma_f f$

Tabela 3.3 – Valor de γ_α , γ_ρ e γ_f em Ω

	γ_α	γ_ρ	γ_f
$\Omega \setminus \omega$	$\alpha_1 \alpha_0^{-1}$	$\rho_1 \rho_0^{-1}$	$f_1 f_0^{-1}$
ω	$\alpha_0 \alpha_1^{-1}$	$\rho_0 \rho_1^{-1}$	$f_0 f_1^{-1}$

Na Figura 3.1 apresenta-se um esquema no qual é possível retirar material aonde ainda não foi retirado e recolocar material aonde o mesmo já havia sido retirado. Além disso \mathbf{n} é a direção normal na fronteira e a mesma é sempre considerada na direção externa a fronteira de Ω_ε .

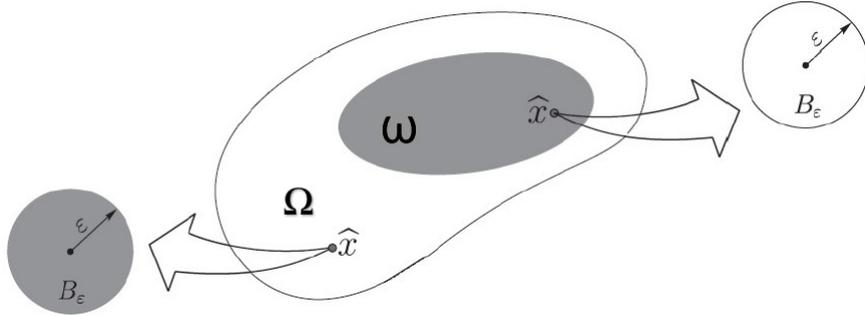


Figura 3.1 – Domínio com as possíveis trocas de materiais.

Com isso é possível definir o problema perturbado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\text{div}(\alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) + \rho_\varepsilon k u_\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{em } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\ \left. \begin{array}{l} \llbracket u_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \right\} \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

cuja formulação fraca é dada por

$$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta + \int_\Omega \rho_\varepsilon k u_\varepsilon \eta = \int_\Omega f_\varepsilon \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (3.4)$$

3.2 Existência da Derivada Topológica

Uma vez definidos o problema não perturbado (3.1) e o problema perturbado (3.3), é possível mostrar a existência da derivada topológica. Ao demonstrar o lema a seguir, garantimos que os funcionais de forma considerados são contínuos em relação ao pequeno parâmetro ε , e, portanto, diferenciável no sentido de (2.17).

Lema 3.1 *Seja u solução do Problema (3.1) e u_ε solução do Problema (3.3). Então:*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)} = O(\varepsilon). \quad (3.5)$$

Demonstração. Ao fazer diferença entre (3.4) e (3.2), tem-se:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta}_{L_1} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} \rho k u \eta}_{L_2} = \underbrace{\int_{\Omega} f_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} f \eta}_{L_3}. \quad (3.6)$$

Ao desenvolver L_1 , L_2 e L_3 , obtém-se:

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \\ &\quad - \int_{B_{\varepsilon}} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \pm \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\alpha} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha_{\varepsilon} \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \alpha_{\varepsilon} \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \\ &= \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} \rho k u \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \rho_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho k u \eta - \int_{B_{\varepsilon}} \rho k u \eta \pm \int_{B_{\varepsilon}} \gamma_{\rho} \rho k u \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho_{\varepsilon} k (u_{\varepsilon} - u) \eta + \int_{B_{\varepsilon}} \rho_{\varepsilon} k (u_{\varepsilon} - u) \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k u \eta \\ &= \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k (u_{\varepsilon} - u) \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k u \eta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$L_3 = \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \eta - \int_{\Omega} f \eta = - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f \eta. \quad (3.9)$$

Em seguida são substituídos os valores de L_1 , L_2 e L_3 em (3.6)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k (u_{\varepsilon} - u) \eta = \\ + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k u \eta - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f \eta \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ao considerar $\eta = u_{\varepsilon} - u$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \|\nabla (u_{\varepsilon} - u)\|^2 + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k (u_{\varepsilon} - u)^2 = \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \nabla u \cdot \nabla (u_{\varepsilon} - u) \\ + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k u (u_{\varepsilon} - u) - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f (u_{\varepsilon} - u). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ao utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de u ser Lipschitz contínua, tem-se

$$\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \nabla u \cdot \nabla (u_{\varepsilon} - u) \leq c_1 \|\nabla u\|_{L^2(B_{\varepsilon})} \|\nabla (u_{\varepsilon} - u)\|_{L^2(B_{\varepsilon})} \leq c_1 \varepsilon \|u_{\varepsilon} - u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.12)$$

$$\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k u (u_{\varepsilon} - u) \leq c_2 \|u\|_{L^2(B_{\varepsilon})} \|u_{\varepsilon} - u\|_{L^2(B_{\varepsilon})} \leq c_2 \varepsilon \|u_{\varepsilon} - u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.13)$$

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f(u_\varepsilon - u) \leq c_3 \|f\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq c_3 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.14)$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \|\nabla(u_\varepsilon - u)\|^2 + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k(u_\varepsilon - u)^2 \leq c_4 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.15)$$

Por outro lado, pela coercividade, obtém-se a seguinte desigualdade:

$$\tau \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \|\nabla(u_\varepsilon - u)\|^2 + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k(u_\varepsilon - u)^2. \quad (3.16)$$

Com isso, ao substituir (3.15) em (3.16), tem-se:

$$\tau \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_4 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.17)$$

que conduz ao resultado

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} = C\varepsilon. \quad (3.18)$$

□

3.3 Cálculo da Derivada Topológica

A partir dos problemas apresentados em (3.1) e (3.3) pode-se calcular a derivada topológica para os seguinte funcionais de forma:

$$\mathcal{G}(u) = \int_{\Omega} \rho k(u)^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{J}(u) = \int_{\Omega} \alpha \|\nabla u\|^2 \quad (3.19)$$

onde serão formulados dois teoremas a respeito dessas derivadas topológicas.

Teorema 3.1 *Considerando os funcionais de forma*

$$\mathcal{G}(u) = \int_{\Omega} \rho k(u)^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k(u_\varepsilon)^2, \quad (3.20)$$

onde u é solução de (3.1) e u_ε é solução de (3.3), então a derivada topológica de \mathcal{G} é dada por:

$$\mathcal{D}_T \mathcal{G} = -2\alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla q - k(1 - \gamma_\rho) \rho u [u + q] + (1 - \gamma_f) q f, \quad (3.21)$$

onde q solução do problema adjunto

$$q \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha \nabla q \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \rho k q \eta = -2 \int_{\Omega} \rho k u \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \quad (3.22)$$

e o tensor de polarização \mathbf{P} é

$$\mathbf{P} = \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \gamma_\alpha} \mathbf{I}. \quad (3.23)$$

Demonstração. Antes de iniciar a demonstração do teorema é apresentada uma igualdade auxiliar:

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon^2 - u^2 &= (u_\varepsilon - u)u + u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon u \pm (u_\varepsilon - u)u \\
&= 2(u_\varepsilon - u)u + u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon u - u_\varepsilon u + u^2 \\
&= 2(u_\varepsilon - u)u + (u_\varepsilon - u)^2.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

assim, quando é considerada a diferença entre os funcionais apresentados em (3.20) tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{G}(u) &= \int_\Omega \rho_\varepsilon k(u_\varepsilon)^2 - \int_\Omega \rho k(u)^2 \\
&= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \rho k(u_\varepsilon)^2 + \int_{B_\varepsilon} \rho k \gamma(u_\varepsilon)^2 - \int_\Omega \rho k(u)^2 \pm \int_{B_\varepsilon} \rho k(u_\varepsilon)^2 \\
&= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \rho k(u_\varepsilon)^2 + \int_{B_\varepsilon} \rho k(u_\varepsilon)^2 - \int_\Omega \rho k(u)^2 + \int_{B_\varepsilon} \rho k \gamma_\alpha(u_\varepsilon)^2 - \int_{B_\varepsilon} \rho k(u_\varepsilon)^2 \\
&= \int_\Omega \rho k(u_\varepsilon)^2 - \int_\Omega \rho k(u)^2 + \int_{B_\varepsilon} \rho k \gamma_\rho(u_\varepsilon)^2 - \int_{B_\varepsilon} \rho k(u_\varepsilon)^2 \\
&= \int_\Omega \rho k((u_\varepsilon)^2 - (u)^2) - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon)^2 \\
&= \underbrace{2 \int_\Omega \rho k(u_\varepsilon - u)u}_{A_1} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon)^2}_{A_2} + \underbrace{\int_\Omega \rho k(u_\varepsilon - u)^2}_{\mathcal{E}_1(\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Para A_2 , tem-se:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon)^2 \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u + u)^2 \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u)^2 + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u)^2}_{\mathcal{E}_2(\varepsilon)} + \underbrace{2 \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u)u}_{\mathcal{E}_3(\varepsilon)} \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u)^2(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u)^2 - (1 - \gamma_\rho) \rho k(u)^2(\hat{x})}_{\mathcal{E}_4(\varepsilon)} + \mathcal{E}_2(\varepsilon) + \mathcal{E}_3(\varepsilon) \\
&= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\rho) \rho k(u)^2(\hat{x}) + \sum_2^4 \mathcal{E}_i(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Observa-se que (3.10) é igual a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \alpha \nabla(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla \eta + \int_\Omega \rho k(u_\varepsilon - u) \eta &= \\
&= - \int_{B_\varepsilon} \gamma \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon \eta - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f \eta,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

e ao fazer $\eta = q$ em (3.27) resulta em:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \alpha \nabla(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla q + \int_\Omega \rho k(u_\varepsilon - u) q &= \\
&= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \rho \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla q - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon q - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ao considerar $\eta = u_\varepsilon - u$ em (3.22), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla q + \int_{\Omega} \rho k(u_\varepsilon - u)q = -2 \int_{\Omega} \rho k u(u_\varepsilon - u), \quad (3.29)$$

além disso, é possível observar que o lado esquerdo de (3.28) e (3.29) são iguais, e o lado direito de (3.29) é igual a $-A_1$, assim

$$-A_1 = \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla q}_{A_3} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon q}_{A_4} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q}_{A_5}. \quad (3.30)$$

Para A_5 e A_4 tem-se:

$$\begin{aligned} A_5 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f q \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) (f q)(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) [f q - (f q)(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_5(\varepsilon)} \\ &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_f) (f q)(\hat{x}) + \mathcal{E}_5(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon q \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon - u + u) q \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u q + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon - u) q}_{\mathcal{E}_6(\varepsilon)} \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u q)(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k [u q - (u q)(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_7(\varepsilon)} + \mathcal{E}_6(\varepsilon) \\ &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\rho) \rho k (u q)(\hat{x}) + \mathcal{E}_6(\varepsilon) + \mathcal{E}_7(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ao se adicionar e restar $(f q)(\hat{x})$ e $(u q)(\hat{x})$ nas Equações (3.31) e (3.32) respectivamente, estamos comsiderando na realidade $f(\hat{x})q(\hat{x})$ e $u(\hat{x})q(\hat{x})$, mas para que a notação não fique muita extensão optamos por escreve-la na forma mais compacta. Dessa forma as funções são avaliadas no ponto (\hat{x}) e por isso as respectivas integrais nas equações tem como resultado a medida da região de integração. Essa notação continuará a ser usada nas próximas vezes que for usado o truque de somar e restar os termos integrados na bola.

Para calcular A_3 é utilizado um *ansatz* para a expansão de u_ε ,

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + w_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x), \quad (3.33)$$

onde u é solução de (3.1), w_ε é solução do problema exterior e \tilde{u}_ε é um resíduo.

Com isso pode-se escrever A_3 da seguinte forma,

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla q \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla (u + w_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla q \\ &= \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla q}_{A_6} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla q}_{A_7} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla q}_{\mathcal{E}_8(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dai,

$$\begin{aligned}
A_6 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla q \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla q \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha (\nabla u \cdot \nabla q)(\hat{x}) \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha (\nabla u \cdot \nabla q)(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot \nabla q - (\nabla u \cdot \nabla q)(\hat{x})}_{\mathcal{E}_9(\varepsilon)} \\
&= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\alpha) \alpha (\nabla u \cdot \nabla q)(\hat{x}) + \mathcal{E}_9(\varepsilon). \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Para determinar A_7 substituí-se (3.33) em (3.4),

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}\{\alpha_\varepsilon \nabla [u(x) + w_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x)]\} + \rho_\varepsilon k [u(x) + w_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x)] - f_\varepsilon = \\
-\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) - \operatorname{div}[\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon(x)] + \rho_\varepsilon k w_\varepsilon + \rho_\varepsilon k \tilde{u}_\varepsilon(x) \\
\underbrace{-\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla u) + \rho_\varepsilon k u - f_\varepsilon}_{A_8} = 0. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Ao reescrever os termos de A_8 , tem-se:

$$A_8 = \begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) + \rho k u - f & \text{se } x \in \Omega \setminus B_\varepsilon \\ -\gamma_\alpha \operatorname{div}(\alpha \nabla u) + \gamma_\rho \rho k u - \gamma_f f & \text{se } x \in B_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.37}$$

Logo $A_8 = 0$ por (3.1).

Assim (3.36) pode ser escrito como:

$$-\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) - \operatorname{div}[\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon(x)] + \rho_\varepsilon k w_\varepsilon + \rho_\varepsilon k \tilde{u}_\varepsilon(x) = 0. \tag{3.38}$$

Também pode-se calcular o salto do gradiente no problema perturbado,

$$\begin{aligned}
0 = \llbracket \alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= -(1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u(x) \cdot \mathbf{n} + \llbracket \alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n} + \llbracket \alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n} \\
&= -(1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot \mathbf{n} - (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla^2 u(y)(x - \hat{x}) \cdot \mathbf{n} \big|_{\partial B_\varepsilon} \\
&\quad + \llbracket \alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n} + \llbracket \alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n} \\
&= -(1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot \mathbf{n} - \varepsilon (1 - \gamma) \alpha \nabla^2 u(y) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \\
&\quad + \llbracket \alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n} + \llbracket \alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n}. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Agora, ao utilizar (3.38) e (3.39), é possível montar o problema exterior quando $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$P_1 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } w_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ w_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando } \|x\| \rightarrow \infty, \\ \llbracket w_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \hat{u} \end{array} \right\} \text{ sobre } \partial B_\varepsilon. \tag{3.40}$$

onde $\hat{u} = (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot \mathbf{n}$.

Além disso, também é possível construir $\nabla \tilde{u}_\varepsilon$ de tal forma que ficam compensadas as discrepâncias introduzidas por termos de ordem superior em ε , bem como pela camada limite ∇w_ε na fronteira exterior Ω_ε . Isto significa que o *resíduo* \tilde{u}_ε deve ser solução para o seguinte problema de valor de contorno:

$$P_2 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } \tilde{u}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon) + \rho_\varepsilon k \tilde{u}_\varepsilon = \rho_\varepsilon k w_\varepsilon \quad \text{em } \Omega, \\ \tilde{u}_\varepsilon = -w_\varepsilon \quad \text{em } \partial\Omega, \\ \llbracket \tilde{u}_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \varepsilon g \end{array} \right\} \text{ sobre } \partial B_\varepsilon. \quad (3.41)$$

onde $g = (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla^2 u(y) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$.

É demonstrado no Lema 3.3 que o resíduo, apresentado no problema acima, possui uma estimativa na forma $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$.

Sabe-se que a solução de P_1 , conforme Novotny e Sokolowski (2014, pag. 88) em coordenadas polares é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\varepsilon^i(r, \theta) = r(t_1 \cos \theta + t_2 \operatorname{sen} \theta), \\ w_\varepsilon^e(r, \theta) = \frac{1}{r}(T_1 \cos \theta + T_2 \operatorname{sen} \theta). \end{array} \right. \quad (3.42)$$

onde w_ε^i é a solução de w_ε em B_ε e w_ε^e é a solução de w_ε em $\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon$.

Da condição de continuidade,

$$\varepsilon^2 t_1 \cos \theta + \varepsilon^2 t_2 \operatorname{sen} \theta = T_1 \cos \theta + T_2 \operatorname{sen} \theta. \quad (3.43)$$

Da condição do salto da derivada e ao considerar $\nabla u(\hat{x}) = (a, b)$, tem-se

$$\gamma_\alpha t_1 \cos \theta + \gamma_\alpha t_2 \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{\varepsilon^2} T_1 \cos \theta + \frac{1}{\varepsilon^2} T_2 \operatorname{sen} \theta = (1 - \gamma)(a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta). \quad (3.44)$$

Assim, obtém-se o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 t_1 = T_1 \\ \gamma_\alpha t_1 + \frac{1}{\varepsilon^2} T_1 = (1 - \gamma_\alpha) a. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Ao considerar $P_\alpha = \frac{1 - \gamma_\alpha}{1 + \gamma_\alpha}$, tem-se que a solução do sistema (3.45) é dada por

$$t_1 = P_\alpha a \quad \text{e} \quad T_1 = \varepsilon^2 P_\alpha a. \quad (3.46)$$

De forma análoga,

$$t_2 = P_\alpha b \quad \text{e} \quad T_2 = \varepsilon^2 P_\alpha b. \quad (3.47)$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\varepsilon^i(r, \theta) = P_\alpha r(a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta), \\ w_\varepsilon^e(r, \theta) = P_\alpha \frac{\varepsilon^2}{r}(a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta). \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Portanto,

$$w_\varepsilon(x) = \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \quad \text{em } B_\varepsilon, \quad (3.49)$$

$$w_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon. \quad (3.50)$$

Em B_ε , pode-se escrever

$$\nabla w_\varepsilon(x) = \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}), \quad (3.51)$$

de forma que $\nabla w_\varepsilon(x)$ é uniforme na bola B_ε .

Agora ao substituir (3.51) em A_7 , obtém-se

$$\begin{aligned} A_7 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla q \cdot \nabla w_\varepsilon \\ &= (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla q(\hat{x}) \cdot \int_{B_\varepsilon} \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}) + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot [\nabla q - \nabla q(\hat{x})] \\ &= (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla q(\hat{x}) \cdot \int_{B_\varepsilon} \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}) + \mathcal{E}_{10}(\varepsilon) \\ &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla q(\hat{x}) + \mathcal{E}_{10}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde

$$\mathcal{E}_{10}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot [\nabla q - \nabla q(\hat{x})]. \quad (3.53)$$

Dando continuidade, substituí-se (3.35) e (3.52) na equação (3.34),

$$\begin{aligned} A_3 &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla q(\hat{x}) + \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\alpha) \alpha \mathbf{P}_\alpha \alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla q(\hat{x}) + \sum_{i=8}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon) \\ &= 2\pi \varepsilon^2 \alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla q(\hat{x}) + \sum_{i=8}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Mais uma vez, ao substituir (3.31), (3.32) e (3.54) em (3.30), tem-se:

$$A_1 = \pi \varepsilon^2 [-2\alpha \mathbf{P}_\alpha (\nabla u \cdot \nabla q)(\hat{x}) - (1 - \gamma_\rho) \rho k(uq)(\hat{x}) + (1 - \gamma_f)(fq)(\hat{x})] + \sum_{i=5}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \quad (3.55)$$

Finalmente, substituindo-se (3.26) e (3.55) em (3.25) obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{G}(u) &= \pi \varepsilon^2 [-2\alpha \mathbf{P}_\alpha (\nabla u \cdot \nabla q)(\hat{x}) \\ &\quad - (1 - \gamma_\rho) \rho k(u^2 + uq)(\hat{x}) + (1 - \gamma_f)(fq)(\hat{x})] + \sum_{i=1}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Por último, ao considerar que $f(\varepsilon) = \pi \varepsilon^2$, pode-se concluir que a derivada topológica de \mathcal{G} é dada por:

$$D_T \mathcal{G} = -2\alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla q - (1 - \gamma_\rho) \rho k u(u + q) + (1 - \gamma_f) f q. \quad (3.57)$$

Teorema 3.2 Considerando os funcionais de forma

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\Omega} \alpha \|\nabla u\|^2 \quad e \quad \mathcal{J}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \|\nabla u_{\varepsilon}\|^2, \quad (3.58)$$

onde u é solução de (3.1), u_{ε} é solução de (3.3) então a derivada topológica de \mathcal{J} é dado por:

$$\mathcal{D}_T(\mathcal{J}) = -2\alpha \mathbf{P}_{\alpha} \nabla u \cdot [\nabla u + \nabla p] - k(1 - \gamma_{\rho}) \rho u p + (1 - \gamma_f) p f, \quad (3.59)$$

onde p solução do problema adjunto

$$p \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha \nabla p \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \rho k p \eta = -2 \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \quad (3.60)$$

e o tensor de polarização \mathbf{P}_{α} é o mesmo definido em (3.23).

Demonstração. Ao considerar $\eta = u$ em (3.2) e $\eta = u_{\varepsilon}$ em (3.4) tem-se:

$$\mathcal{J}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) - \mathcal{J}(u) = \underbrace{\int_{\Omega} f_{\varepsilon} u_{\varepsilon} - \int_{\Omega} f u}_{B_1} - \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k(u_{\varepsilon})^2 + \int_{\Omega} \rho k(u)^2}_{B_2}. \quad (3.61)$$

Assim é possível determinar B_1 ,

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_{\Omega} f_{\varepsilon} u_{\varepsilon} - \int_{\Omega} f u \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} f u_{\varepsilon} + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f u_{\varepsilon} - \int_{\Omega} f u \pm \int_{B_{\varepsilon}} f u_{\varepsilon} \\ &= \int_{\Omega} f u_{\varepsilon} - \int_{\Omega} f u - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f u_{\varepsilon} \pm \int_{\Omega} f (u_{\varepsilon} - u) \\ &= 2 \int_{\Omega} f (u_{\varepsilon} - u) - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f u_{\varepsilon} - \int_{\Omega} f (u_{\varepsilon} - u). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Ao observar que $B_2 = \mathcal{G}(u) - \mathcal{G}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})$, pode-se reescrever B_2 como:

$$B_2 = -2 \int_{\Omega} \rho k (u_{\varepsilon} - u) u + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k (u_{\varepsilon})^2 - \underbrace{\int_{\Omega} \rho k (u_{\varepsilon} - u)^2}_{\mathcal{E}_{11}(\varepsilon)}. \quad (3.63)$$

Logo, ao substituir (3.62) e (3.63) em (3.61) tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) - \mathcal{J}(u) &= \underbrace{2 \int_{\Omega} f (u_{\varepsilon} - u) - 2 \int_{\Omega} \rho k (u_{\varepsilon} - u) u}_{B_3} - \underbrace{\int_{\Omega} f (u_{\varepsilon} - u)}_{B_4} \\ &\quad + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k (u_{\varepsilon})^2 - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f u_{\varepsilon} + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Para reescrever (3.60) é utilizado a Equação (3.2) e é considerado $\eta = u_{\varepsilon} - u$,

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla p \cdot \nabla (u_{\varepsilon} - u) + \int_{\Omega} \rho k p (u_{\varepsilon} - u) = -2 \int_{\Omega} f (u_{\varepsilon} - u) + 2 \int_{\Omega} \rho k u (u_{\varepsilon} - u). \quad (3.65)$$

Já ao fazer $\eta = p$ em (3.27) obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha \nabla (u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla p + \int_{\Omega} \rho k (u_{\varepsilon} - u) p &= \\ \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\alpha}) \alpha \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla p + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_{\rho}) \rho k u_{\varepsilon} p - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma_f) f p. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Dando continuidade, observa-se que o lado esquerdo das Equações (3.65) e (3.66) são iguais, e que o lado direito da equação (3.65) é igual a $(-B_3)$, logo B_3 pode ser escrito da seguinte forma,

$$B_3 = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla p - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon p + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p. \quad (3.67)$$

Para determinar B_4 , considera-se $\eta = u_\varepsilon$ em (3.2) e $\eta = u$ em (3.4)

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla u_\varepsilon + \int_{\Omega} \rho k u u_\varepsilon = \int_{\Omega} f u_\varepsilon, \quad (3.68)$$

$$\int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k u_\varepsilon u = \int_{\Omega} f_\varepsilon u. \quad (3.69)$$

Ao fazer a diferença entre (3.69) e (3.68) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon u &= \int_{\Omega} f u_\varepsilon - \int_{\Omega} f_\varepsilon u \pm \int_{B_\varepsilon} f u \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon u &= \int_{\Omega} f (u_\varepsilon - u) + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Assim,

$$B_4 = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u. \quad (3.71)$$

Logo, ao substituir (3.66) e (3.71) em (3.63), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla p - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho u_\varepsilon p + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p \\ &\quad - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho u_\varepsilon u + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u \\ &\quad + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho (u_\varepsilon)^2 - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f u_\varepsilon + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon) \\ &= - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla p}_{B_8} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho u_\varepsilon p}_{B_9} \\ &\quad + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f p}_{B_{10}} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u}_{B_{11}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho u_\varepsilon (u_\varepsilon - u)}_{\mathcal{E}_{12}(\varepsilon)} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f (u_\varepsilon - u)}_{\mathcal{E}_{13}(\varepsilon)} + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} B_9 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u_\varepsilon p \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u p \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u p + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon - u) p \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u p)(\hat{x}) \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u p)(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k [u p - (u p)(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_{14}(\varepsilon)} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon - u) p}_{\mathcal{E}_{15}(\varepsilon)} \\ &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma_\rho) \rho k (u p)(\hat{x}) + \mathcal{E}_{14}(\varepsilon) + \mathcal{E}_{15}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned}
B_{10} &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f)fp \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f)(fp)(\hat{x}) \\
&= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f)(fp)(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f)fp - (1 - \gamma_f)(fp)(\hat{x})}_{\mathcal{E}_{16}(\varepsilon)} \\
&= \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_f)(fp)(\hat{x}) + \mathcal{E}_{16}(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Agora, para calcular B_8 e B_{11} , é necessário definir um *ansatz* para a expansão de u_ε , cujas contas são análogas ao que foi feito de (3.33) a (3.48).

Dessa forma,

$$B_8 = 2\pi\varepsilon^2\alpha\mathbf{P}_\alpha(\nabla u \cdot \nabla p)(\hat{x}) + \sum_{i=17}^{19} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \tag{3.75}$$

$$B_{11} = 2\pi\varepsilon^2\alpha\mathbf{P}_\alpha(\nabla u \cdot \nabla u)(\hat{x}) + \sum_{i=20}^{22} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \tag{3.76}$$

onde

$$\mathcal{E}_{17}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha\nabla\tilde{u}_\varepsilon(x) \cdot \nabla p. \tag{3.77}$$

$$\mathcal{E}_{18}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha[\nabla u \cdot \nabla p - (\nabla u \cdot \nabla p)(\hat{x})]. \tag{3.78}$$

$$\mathcal{E}_{19}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha\nabla w_\varepsilon \cdot [\nabla p - \nabla p(\hat{x})]. \tag{3.79}$$

$$\mathcal{E}_{20}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha\nabla\tilde{u}_\varepsilon(x) \cdot \nabla u. \tag{3.80}$$

$$\mathcal{E}_{21}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha[\nabla u \cdot \nabla u - (\nabla u \cdot \nabla u)(\hat{x})]. \tag{3.81}$$

$$\mathcal{E}_{22}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha)\alpha\nabla w_\varepsilon \cdot [\nabla u - \nabla u(\hat{x})]. \tag{3.82}$$

Finalmente, substituí-se (3.73), (3.74), (3.75) e (3.76) em (3.72),

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) &= -2\pi\varepsilon^2\alpha\mathbf{P}_\alpha(\nabla u \cdot \nabla u)(\hat{x}) - 2\pi\varepsilon^2\alpha\mathbf{P}_\alpha(\nabla u \cdot \nabla p)(\hat{x}) \\
&\quad - \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_\rho)\rho k(Up)(\hat{x}) + \pi\varepsilon^2(1 - \gamma_f)(fp)(\hat{x}) + \sum_{i=11}^{22} \mathcal{E}_i(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Por último, considera-se que $f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$, e assim pode-se concluir que a derivada topológica de \mathcal{J} é dado por:

$$D_T(\mathcal{J}) = -2\alpha\mathbf{P}_\alpha\nabla u \cdot (\nabla u + \nabla q) - (1 - \gamma_\rho)\rho k u q + (1 - \gamma_f)fq. \tag{3.84}$$

3.4 Estimativas dos Termos Remanescentes

Nesta seção serão calculadas as estimativas dos termos remanescentes do cálculo da derivada topológica do problema coercivo apresentadas nas Seção 3.3.

Antes de calcular a estimativa dos resíduos será necessária a demonstração dos resultados a seguir.

Lema 3.2 Seja w_ε definido em (3.33) e solução de (3.40), então

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|} = o(\varepsilon). \quad (3.85)$$

Demonstração. Ao considerar $R > 0$ tal que $\Omega \subset B_R$ onde B_R é a bola centrada em \hat{x} e raio R , então tem-se:

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |w_\varepsilon|^2 \leq \int_{B_R} \rho_\varepsilon k |w_\varepsilon|^2 = \int_{B_\varepsilon} |w_\varepsilon|^2 + \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} |w_\varepsilon|^2. \quad (3.86)$$

Para calcular essas integrais é considerada a solução de w_ε apresentada em (3.49) e também são utilizadas coordenadas polares, assim obtém-se:

$$\int_{B_\varepsilon} c |w_\varepsilon|^2 = \int_{B_\varepsilon} c [P_\alpha \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})]^2 = c_2 \int_0^\varepsilon r^2 r dr = c_3 \varepsilon^4, \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} c |w_\varepsilon|^2 &= \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} c \left[P_\alpha \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \right]^2 \\ &= c_4 \int_\varepsilon^R \frac{\varepsilon^4}{r^4} r^2 r dr = c_5 \varepsilon^4 \int_\varepsilon^R \frac{dr}{r} = c_5 \varepsilon^4 (\ln R - \ln \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Portanto,

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{c_3 \varepsilon^4 + c_5 \varepsilon^4 |\ln \varepsilon|} \leq C\varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|}. \quad (3.89)$$

□

Lema 3.3 Seja $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ definido em (3.33) e solução de (3.41), então

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{1+\delta} = o(\varepsilon). \quad (3.90)$$

Demonstração. A forma fraca do problema definido em (3.41) é dada por:

$$\tilde{u}_\varepsilon \in \tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon : \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k \tilde{u}_\varepsilon \eta = - \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k w_\varepsilon \eta + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} g \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \quad (3.91)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon := \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\partial\Omega} = -w_\varepsilon\}, \quad (3.92)$$

Seja $\varphi_\varepsilon \in \tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$ logo $\eta = \tilde{u}_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ e ao substituir η em (3.91), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|^2 + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k |\tilde{u}_\varepsilon|^2 - \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon - \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k \tilde{u}_\varepsilon \varphi_\varepsilon = \\ - \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k w_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k w_\varepsilon \varphi_\varepsilon + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} g \tilde{u}_\varepsilon - \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} g \varphi_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.93)$$

Pelo Teorema da divergência tem-se:

$$- \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \varphi_\varepsilon - \int_{\partial\Omega} \rho_\varepsilon \varphi_\varepsilon \partial_n \tilde{u}_\varepsilon - \int_{\partial B_\varepsilon} [[\alpha_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon]] \cdot n \varphi_\varepsilon \quad (3.94)$$

e ao substituir (3.94) em (3.93), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \|\nabla \tilde{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k(\tilde{u}_{\varepsilon})^2 + \underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_{\varepsilon} \nabla \tilde{u}_{\varepsilon}) \varphi_{\varepsilon}}_{E_1} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon} \partial_n \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_2} - \underbrace{\int_{\partial B_{\varepsilon}} [\alpha_{\varepsilon} \nabla \tilde{u}_{\varepsilon}] \cdot n \varphi_{\varepsilon}}_{E_3} \\ - \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \tilde{u}_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}}_{E_4} = - \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k w_{\varepsilon} \tilde{u}_{\varepsilon} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k w_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}}_{E_5} + \varepsilon \int_{\partial B_{\varepsilon}} g \tilde{u}_{\varepsilon} - \varepsilon \underbrace{\int_{\partial B_{\varepsilon}} g \varphi_{\varepsilon}}_{E_6} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Juntando E_1 , E_4 e E_5 em uma única integral tem-se:

$$E_7 = \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\alpha_{\varepsilon} \nabla \tilde{u}_{\varepsilon}) - \rho_{\varepsilon} k \tilde{u}_{\varepsilon} - \rho_{\varepsilon} k w_{\varepsilon}] \varphi_{\varepsilon} \quad (3.96)$$

assim, por (3.41) tem-se que $E_7 = 0$. Além disso tem-se que $E_3 = E_6$.

Como $\varphi_{\varepsilon} \in \tilde{u}_{\varepsilon}$ segue que $\varphi_{\varepsilon}|_{\partial\Omega} = -w_{\varepsilon}$, e com isso

$$E_2 = \int_{\partial\Omega} \rho_{\varepsilon} w_{\varepsilon} \partial_n \tilde{u}_{\varepsilon} \quad (3.97)$$

Logo (3.95) pode ser reescrito como:

$$\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \|\nabla \tilde{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k(\tilde{u}_{\varepsilon})^2 = \underbrace{- \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k w_{\varepsilon} \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_8} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho_{\varepsilon} w_{\varepsilon} \partial_n \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_9} + \underbrace{\varepsilon \int_{\partial B_{\varepsilon}} g \tilde{u}_{\varepsilon}}_{E_{10}} \quad (3.98)$$

Calculando E_8

$$|E_8| = \left| \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k w_{\varepsilon} \tilde{u}_{\varepsilon} \right| \leq \|w_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon^2 \sqrt{|ln\varepsilon|} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.99)$$

Como $w_{\varepsilon}|_{\partial\Omega} = h\varepsilon^2$ onde $h = \frac{P_{\alpha}}{\|x-\hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})$ logo

$$\begin{aligned} |E_9| &= \left| \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \rho_{\varepsilon} h \partial_n \tilde{u}_{\varepsilon} \right| \leq \varepsilon^2 \|h\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|\partial_n \tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \\ &\leq \varepsilon^2 \|\nabla \tilde{u}_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon^2 \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.100)$$

Por último

$$\begin{aligned} |E_{10}| &= \left| \varepsilon \int_{\partial B_{\varepsilon}} g \tilde{u}_{\varepsilon} \right| \leq \varepsilon \|g\|_{H^{-1/2}(\partial B_{\varepsilon})} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^{1/2}(\partial B_{\varepsilon})} \\ &\leq \varepsilon \|g\|_{L^2(B_{\varepsilon})} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{B_{\varepsilon}} \leq \varepsilon^2 \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Assim, pode-se substituir (3.99), (3.100) e (3.101) em (3.98)

$$\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \|\nabla \tilde{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k |\tilde{u}_{\varepsilon}|^2 \leq (\varepsilon^2 \sqrt{|ln\varepsilon|} + 2\varepsilon^2) \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon^2 \sqrt{|ln\varepsilon|} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.102)$$

Por outro lado, ao usar a coercividade, tem-se

$$\tau \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \|\nabla \tilde{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k |\tilde{u}_{\varepsilon}|^2 \quad (3.103)$$

Assim pode-se substituir (3.102) em (3.103), e obtém-se:

$$\tau \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.104)$$

que conduz ao seguinte resultado

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = C\varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|} = o(\varepsilon) \quad (3.105)$$

□

Lema 3.4 *Seja u solução do Problema (3.1) e u_ε solução do Problema (3.3). Então*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{1+\delta} = o(\varepsilon). \quad (3.106)$$

Demonstração. Para fazer a demonstração deste Lema considera-se a expansão de u_ε apresentada em (3.33) e usando (3.105), temos

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} = \|w_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = o(\varepsilon). \quad (3.107)$$

□

De posse dos resultado apresentados, pode-se estimar os termos remanescentes.

Ao utilizar o Lema 3.4, tem-se:

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon) = \int_{\Omega} \rho k (u_\varepsilon - u)^2 \leq C_1 \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2 \varepsilon^{2(1+\delta)} = o(\varepsilon^2). \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k |u_\varepsilon - u|^2 \leq C \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)}^2 \\ &\leq C_1 \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2 \varepsilon^{2(1+\delta)} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Para estimar $\mathcal{E}_3(\varepsilon)$ utiliza-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema 3.4,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3(\varepsilon) &= 2 \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u_\varepsilon - u) u \leq C_1 \|u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C_2 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Ao usar o fato de u ser Lipschitz contínua e fazer a mudança para coordenadas polares, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k (u)^2 - (1 - \gamma) \rho k (u)^2(\hat{x}) \\ &\leq C_1 \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| \leq C_2 \varepsilon \int_0^\varepsilon r dr \leq C_3 \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Para determinar os próximos resíduos é considerado uma função auxiliar $\phi \in H_0^1(\Omega)$, assim tem-se:

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f[\phi - \phi(\hat{x})] \leq C_1 \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| \leq C_2 \varepsilon \int_0^\varepsilon r dr \leq C_3 \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \quad (3.112)$$

Com isso, ao considerar $\phi = q$ e $\phi = p$, tem-se que $\mathcal{E}_5(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{16}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$.

Para os resíduos $\mathcal{E}_6(\varepsilon)$ e $\mathcal{E}_{15}(\varepsilon)$, pode-se calcular:

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u) \phi \leq C_1 \|\phi\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq C_3 \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \quad (3.113)$$

Novamente, ao considerar $\phi = q$ e $\phi = p$, tem-se $\mathcal{E}_6(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{15}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$.

Para determinar os próximos resíduos, considera-se fato de que ϕ e u são Lipschitz contínuas e ao fazer a mudança para coordenadas polares, tem-se:

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k u [\phi - \phi(\hat{x})] \leq C_1 \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| \leq C_2 \varepsilon \int_0^\varepsilon r dr \leq C_3 \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \quad (3.114)$$

Na equação acima, considera-se $\phi = q$ e obtém-se $\mathcal{E}_7(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$. E para $\phi = p$, obtém-se $\mathcal{E}_{14}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$

Para o cálculo dos resíduos $\mathcal{E}_8(\varepsilon)$, $\mathcal{E}_{17}(\varepsilon)$ e $\mathcal{E}_{20}(\varepsilon)$, usa-se também a imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla \tilde{u}_\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi &\leq C \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|\nabla \phi\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C \|\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Portanto, ao considerar $\phi = q$, $\phi = p$ e $\phi = u$, obtém-se $\mathcal{E}_8(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$, $\mathcal{E}_{17}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{20}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ respectivamente.

Para determinar os resíduos $\mathcal{E}_9(\varepsilon)$, $\mathcal{E}_{18}(\varepsilon)$ e $\mathcal{E}_{21}(\varepsilon)$ utiliza-se a desigualdade

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla u \cdot [\nabla \phi - \nabla \phi(\hat{x})] \leq C \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon \int_0^\varepsilon r dr \leq C \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \quad (3.116)$$

Com isso, ao considerar $\phi = q$, $\phi = p$ e $\phi = u$, resulta em $\mathcal{E}_9(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$, $\mathcal{E}_{18}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{21}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ respectivamente.

Para os resíduos $\mathcal{E}_{10}(\varepsilon)$, $\mathcal{E}_{19}(\varepsilon)$ e $\mathcal{E}_{22}(\varepsilon)$ é usado o fato de ϕ ser Lipschitz contínua, logo

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\alpha) \alpha \nabla w_\varepsilon \cdot [\nabla \phi - \nabla \phi(\hat{x})] &\leq C \int_{B_\varepsilon} (x - \hat{x}) \cdot \nabla w_\varepsilon \leq C \int_{B_\varepsilon} \varepsilon n \cdot \nabla w_\varepsilon \\ &\leq C \varepsilon \|n\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \varepsilon^2 \|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Assim, ao considerar $\phi = q$, $\phi = p$ e $\phi = u$, resulta em $\mathcal{E}_{10}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$, $\mathcal{E}_{19}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{22}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ respectivamente.

O resíduo $\mathcal{E}_{12}(\varepsilon)$ é calculado usando a Lema 3.3

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12}(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) \rho k(u_\varepsilon - u)(u_\varepsilon - u + u) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_\rho) [\rho k(u_\varepsilon - u)^2 + (u_\varepsilon - u)u] \\ &\leq C_1 \|1\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)}^2 + C_2 \|u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq C_5 \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Para o resíduo $\mathcal{E}_{13}(\varepsilon)$ é usado o fato de q ser Lipschitz contínua e é considera-se a mudança para coordenadas polares.

$$\mathcal{E}_{13}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma_f) f(u_\varepsilon - u) \leq C \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| \leq C \varepsilon \int_0^\varepsilon r dr \leq C \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \quad (3.119)$$

3.5 Aplicações da Equação de Helmholtz Modificada

Nas duas próximas seções apresentaremos duas aplicações para a Equação de Helmholtz Modificada: Autovalor do Problema de Laplace e o Problema de Difusão-Reação para o fluxo de calor.

3.5.1 Autovalor de Laplace

A construção do problema do Autovalor de Laplace é obtido a partir do problema (3.1) pode ser reescrito ao considerar $f = 0$ e $k = -\lambda k$ no termo fonte e agora $k = 1 + \delta(x - x_i) = 1 + \delta_i$ é uma fonte de massa concentrada.

Assim o problema de autovalor é formulado da seguinte forma: Encontre u , tal que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = \lambda \rho k u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.120)$$

A formulação fraca deste problema é dada por

$$u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta = \int_{\Omega} \lambda \rho k u \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (3.121)$$

Segundo Evans (1998) o menor autovalor do problema de Laplace é dado pela fórmula de Rayleigh's

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \alpha \|\nabla u\|^2}{\int_{\Omega} \rho k (u)^2}. \quad (3.122)$$

Para simplificar a notação é considerado $\lambda_1 = \lambda$ e a autofunção u_1 de modo que o ínfimo em (3.122) é atingido, será chamada de u .

Assim o objetivo é calcular a derivada topológica para o funcional do autovalor, associado ao domínio não perturbado, dado por

$$\psi(\chi) := \mathcal{F}_{\chi}(u) = \frac{\int_{\Omega} \alpha \|\nabla u\|^2}{\int_{\Omega} \rho k (u)^2} = \frac{\mathcal{J}(u)}{\mathcal{G}(u)}. \quad (3.123)$$

Ao considerando a mesma perturbação apresentada nas Tabelas 3.2 e 3.3, é possível definir o problema perturbado: Encontre u_{ε} , tal que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon}) = \lambda_{\varepsilon} \rho_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} & \text{em } \Omega, \\ u_{\varepsilon} = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \begin{cases} \llbracket u_{\varepsilon} \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \rrbracket \cdot n = 0 \end{cases} & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon}. \end{cases} \quad (3.124)$$

cuja formulação fraca é dada por

$$u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \eta = \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon} \rho_{\varepsilon} k u_{\varepsilon} \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (3.125)$$

Com isso é possível enunciar um corolário a respeito da derivada topológica do problema de autovalor.

3.5.1.1 Cálculo da Derivada Topológica

Corolário 3.1 *Sejam λ e u solução de (3.120), então a derivada topológica de ψ é dado por:*

$$D_T(\psi) = \frac{-2\alpha P_\alpha \|\nabla u\|^2 + \rho(1 - \gamma_\rho)\lambda(u)^2}{\mathcal{G}(u)}. \quad (3.126)$$

Demonstração. Se considerarmos $\eta = u$ em (3.121) teremos

$$\lambda = \frac{\int_\Omega \alpha \|\nabla u\|^2}{\int_\Omega \rho k(u)^2} = \frac{\mathcal{J}(u)}{\mathcal{G}(u)}, \quad (3.127)$$

ou seja,

$$\mathcal{J}(u) = \lambda \mathcal{G}(u). \quad (3.128)$$

Agora para calcular a derivada topológica $D_T(\psi)$ pode-se, aplicar a regra do quociente em (3.127) (Novotny e Sokolowski (2014)), isto é.

$$D_T(\psi) = \frac{(D_T \mathcal{J})\mathcal{G}(u) - (D_T \mathcal{G})\mathcal{J}(u)}{[\mathcal{G}(u)]^2}. \quad (3.129)$$

Assim, ao substituir (3.128) em (3.129), tem-se

$$D_T(\psi) = \frac{(D_T \mathcal{J})\mathcal{G}(u) - \lambda(D_T \mathcal{G})\mathcal{G}(u)}{[\mathcal{G}(u)]^2} = \frac{D_T \mathcal{J} - \lambda D_T \mathcal{G}}{\mathcal{G}(u)}. \quad (3.130)$$

É possível constatar que os funcionais $\mathcal{J}(u)$ e $\mathcal{G}(u)$ são os mesmos do problema da Equação de Helmholtz Modificada apresentado no Capítulo 3, as diferenças estão nos problemas adjuntos considerados para $\mathcal{J}(u)$ e $\mathcal{G}(u)$, que são apresentados a seguir:

Ao considerar as seguintes equações adjuntas para $\mathcal{J}(u)$ e para $\mathcal{G}(u)$ respectivamente

$$p \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \alpha \nabla p \cdot \nabla \eta - \int_\Omega \lambda \rho k p \eta = -2 \int_\Omega \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta = -2\lambda \int_\Omega \rho k u \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (3.131)$$

$$q \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \alpha \nabla q \cdot \nabla \eta - \int_\Omega \lambda \rho k q \eta = -2 \int_\Omega \rho k u \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (3.132)$$

e considerando-se os resultados obtidos para Equação de Helmholtz Modificada no Capítulo 3, tem-se as seguintes derivadas para $\mathcal{J}(u)$ e $\mathcal{G}(u)$

$$D_T \mathcal{J} = -2\alpha P_\alpha \|\nabla u\|^2 - 2\alpha P_\alpha \nabla u \cdot \nabla p + \rho(1 - \gamma)\lambda k u p. \quad (3.133)$$

$$D_T \mathcal{G} = -2\alpha P_\alpha \nabla u \cdot \nabla q + \rho(1 - \gamma)\lambda k u q - \rho(1 - \gamma)k(u)^2. \quad (3.134)$$

Observação 3.2 *Devido ao fato do último termo de $D_T \mathcal{J}$ e o segundo termo de $D_T \mathcal{G}$ serem resultantes do forma bilinear, quando é calculada a derivada topológica dos mesmos aparece o termo $-\lambda$, algo que não acontece na derivada do problema coercivo. Já o último termo de $D_T \mathcal{G}$ é resultado da função custo e neste caso ela é a mesmo do problema de Helmholtz modificado e por isso não muda a derivada topológica deste termo.*

Agora, ao considerar $\eta = q$ em (3.131) e $\eta = p$ em (3.132),

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla p \cdot \nabla q - \int_{\Omega} \lambda \rho k p q = -2\lambda \int_{\Omega} \rho k u q, \quad (3.135)$$

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla q \cdot \nabla p - \int_{\Omega} \lambda \rho k q p = -2 \int_{\Omega} \rho k u p, \quad (3.136)$$

ou seja,

$$-2\lambda \int_{\Omega} \rho k u q = -2 \int_{\Omega} \rho k u p \Rightarrow -2 \int_{\Omega} \rho k u (\lambda q - p) = 0 \Rightarrow p = \lambda q. \quad (3.137)$$

Dando prosseguimento, utiliza-se (3.130), (3.137) e as derivadas (3.133) e (3.134) e com isso obtém-se:

$$\begin{aligned} D_T \mathcal{J} - \lambda D_T \mathcal{G} &= -2\alpha P_{\alpha} \|\nabla u\|^2 - 2\alpha P_{\alpha} \lambda \nabla u \cdot \nabla q + (1 - \gamma_{\rho}) \rho \lambda^2 k u q \\ &\quad + 2\alpha P_{\alpha} \lambda \nabla u \cdot \nabla q - (1 - \gamma_{\rho}) \rho \lambda^2 k u q + \rho (1 - \gamma) \lambda k (u)^2 \\ &= -2\alpha P_{\alpha} \|\nabla u\|^2 + (1 - \gamma_{\rho}) \rho \lambda k (u)^2. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Portanto,

$$D_T(\psi) = \frac{-2\alpha P_{\alpha} \|\nabla u\|^2 + (1 - \gamma_{\rho}) \rho \lambda k (u)^2}{\mathcal{G}(u)}. \quad (3.139)$$

3.5.2 Problema de Difusão Para o Transferência de Calor

A segunda aplicação da Equação de Helmholtz Modificada consiste em considerar um processo de condução de calor em estado estacionário, que envolve difusão e ainda uma perturbação nos respectivos termos. Para isso, reescreve-se o problema (5.1) com $k = 0$. Assim o modelo matemático, no domínio não perturbado, é dado por: Encontre $u \in \mathcal{U}$, tal que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{sobre } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.140)$$

onde u é a temperatura, f é uma fonte de temperatura, $\operatorname{div}(\alpha \nabla u)$ modela a difusão. O termo α é o coeficiente de difusão e

$$\mathcal{U} := \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0, \partial_{\mathbf{n}} \varphi|_{\Gamma_N} = 0\}. \quad (3.141)$$

Com isso a formulação fraca é dada por

$$u \in \mathcal{U} : \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta = \int_{\Omega} f \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (3.142)$$

Para formular o problema perturbado considera-se a mesma perturbação apresentada nas Tabelas 3.2 e 3.3, Assim o problema perturbado é definido da seguinte maneira: Encontre u_{ε} , tal que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon}) = f & \text{em } \Omega, \\ u_{\varepsilon} = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} u_{\varepsilon} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N \\ \begin{cases} \llbracket u_{\varepsilon} \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon}. \end{cases} \quad (3.143)$$

cuja formulação fraca é dada por

$$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta = \int_{\Omega} f \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (3.144)$$

Vale ressaltar que no trabalho de Novotny e Sales, (2015), a derivada topológica da energia potencial associada a um problema de condução de calor em estado estacionário difusivo / convectivo foi calculada, porém não há uma implementação numérica para o problema. Assim nosso objetivo é calcular a derivada topológica para o funcional energia modificado, associado ao domínio não perturbado, dado por

$$\psi(\chi) := \mathcal{F}_\chi(u) = t \int_{\Omega} \alpha \|\nabla u\|^2 + (1-t) \int_{\Omega} \rho u^2; \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.145)$$

e posteriormente fazer a implementação numérica do mesmo.

Com isso, pode-se enunciar um corolário a respeito da derivada topológica do problema de transferência de calor.

3.5.2.1 Cálculo da Derivada Topológica

Corolário 3.2 *Seja u solução de (3.140), então a derivada topológica de ψ é dado por:*

$$D_T(\psi) = -2\mathbb{P}_\alpha \nabla u \cdot (t\nabla u + \nabla p + \nabla q) - (1-t)(1-\gamma_\rho)\rho k|u|^2. \quad (3.146)$$

onde p e q são soluções dos seguintes problemas adjuntos para $\mathcal{J}(u)$ e $\mathcal{G}(u)$ respectivamente:

$$p \in \mathcal{U}(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha \nabla p \cdot \nabla \eta = -2t \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{U}(\Omega), \quad (3.147)$$

$$q \in \mathcal{U}(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha \nabla q \cdot \nabla \eta = -2(1-t) \int_{\Omega} \rho u \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{U}(\Omega), \quad (3.148)$$

Demonstração. Para determinar $D_T(\psi)$, considera-se os seguintes funcionais

$$\mathcal{J}(u) = t \int_{\Omega} \alpha \|\nabla u\|^2 \quad \mathcal{G}(u) = (1-t) \int_{\Omega} \rho u^2. \quad (3.149)$$

Considerando os resultados obtidos para Equação de Helmholtz Modificada no Capítulo 3, tem-se as seguintes derivadas para $\mathcal{J}(u)$ e $\mathcal{G}(u)$

$$D_T \mathcal{G} = -2\alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot \nabla q - (1-t)(1-\gamma_\rho)\rho k|u|^2. \quad (3.150)$$

$$D_T \mathcal{J} = -2\alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot (t\nabla u + \nabla p) \quad (3.151)$$

Portanto, a derivada topológica de $D_T(\psi)$ é

$$D_T(\psi) = -2\alpha \mathbf{P}_\alpha \nabla u \cdot (t\nabla u + \nabla p + \nabla q) - (1-t)(1-\gamma_\rho)\rho k|u|^2. \quad (3.152)$$

4 Exemplos Numéricos

Neste capítulo são apresentados os experimentos numéricos que são: autovalor da membrana e trocador de calor.

4.1 Autovalor da membrana

Existem alguns trabalhos que estudam a otimização de autovalores pelo método de level-set, como por exemplo: Haber, (2004); Oudet, (2004); Antunes e Freitas (2012, 2016)); Torii e Rocha de Faria (2017).

Neste problema considera-se dois casos: sem fonte de massa concentrada e com fonte e massa concentrada.

Nos exemplos da Seção 4.1 foi utilizada a Equação (3.139) para o cálculo da análise de sensibilidade topológica.

Exemplo 4.1 Neste exemplo foi considerada a placa apresentada na Figura 4.1, que possui condições de Dirichlet no contorno, tem as dimensões unitárias e $\xi = 0,4$.

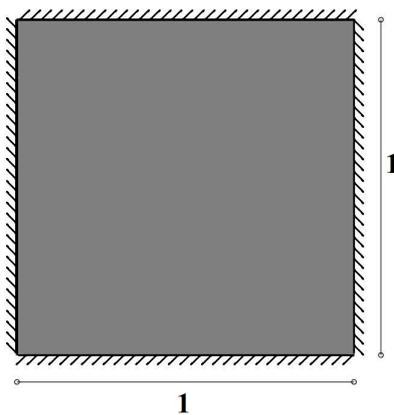


Figura 4.1 – Geometria Inicial

4.1.1 Dependência de malha

Inicialmente, é feita a análise de dependência de malha. Na tabela 4.1 são apresentados os valores do primeiro autovalor otimizado e o volume final mantido para alguns valores de

malha. No caso em que foi considerada inicialmente uma malha com 50 divisões do lado, foram feitos 4 refinamentos de malha. Para os casos com 100 e 150 divisões do lado foram feitos 3 refinamentos de malha e para os casos com 200, 250 e 300 foram feitos 2 refinamentos de malha.

Tabela 4.1 – Análise de dependência da malha

n° de divisões no lado	Primeiro autovalor otimizado	VFM (%)
50	57,7200	63,3339
100	57,7979	63,3370
150	57,7178	62,9862
200	58,1897	63,1935
250	57,9963	62,8554
300	57,4884	62,7804

A partir dos dados apresentados na Tabela 4.1 e na Figura 4.2, é possível observar que há pouca variação no autovalor, no volume final mantido e na variação da geometria final otimizada e, neste caso não temos uma dependência da malha para este problema.

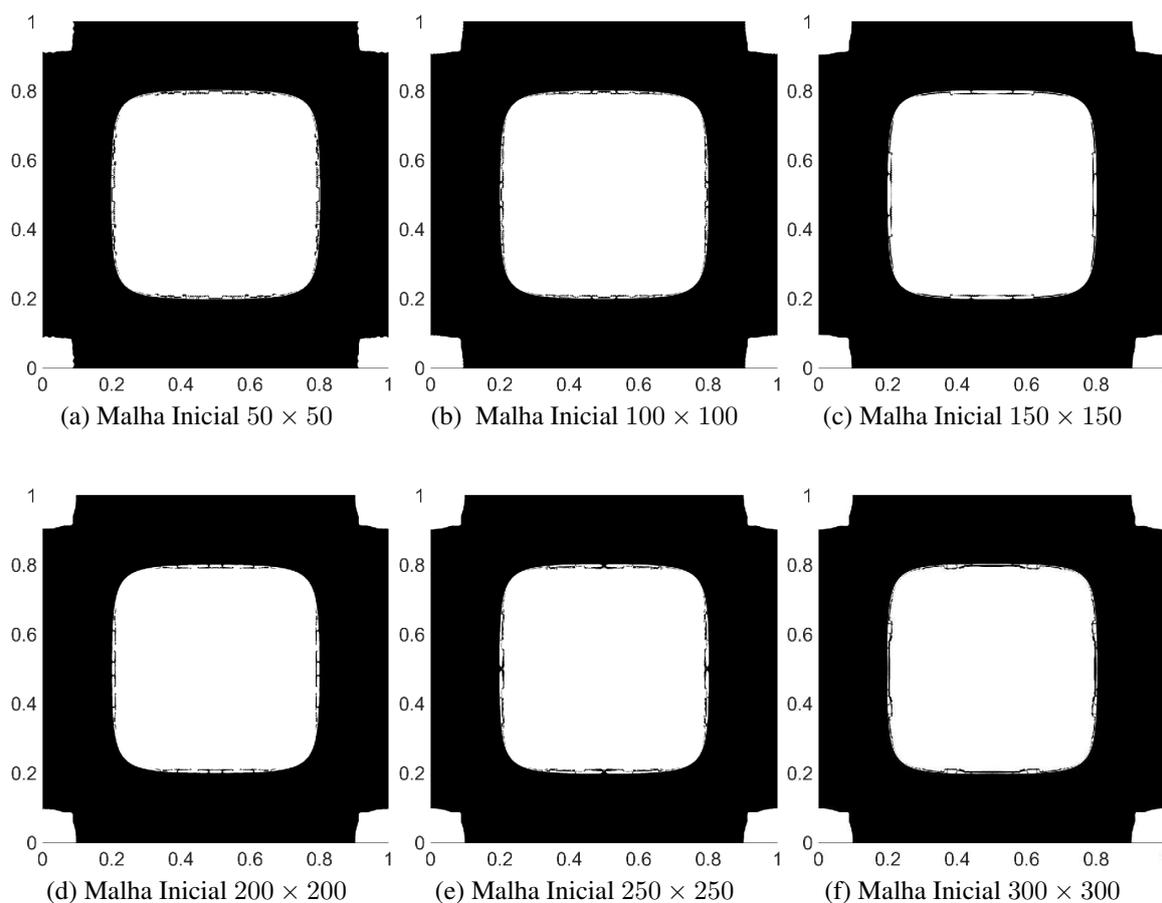


Figura 4.2 – Geometria final otimizada para algumas malhas.

Também foi feito um estudo para verificar a convergência do primeiro autovalor com relação à malha. O valor de comparação foi o resultado teórico fornecido pela Equação (2.13), que é igual a: 19,7392. Os resultados são apresentados na tabela 4.2

Tabela 4.2 – Análise de convergência da malha

n° de divisões no lado	Primeiro autovalor	Erro relativo (%)	n° de elementos da malha
5	20, 2103	2, 38	100
10	19, 8728	0, 67	400
15	19, 7991	0, 30	900
20	19, 7730	0, 17	1600
50	19, 7446	0, 027	10000
100	19, 7405	0, 0068	40000

Ao analisar os resultados obtidos na Tabela 4.2 verifica-se que em uma malha com poucas divisões por lado (10×10) o erro relativo já é bem pequeno (menor que 1%) e, quando consideramos malhas mais refinadas, o erro relativo fica muito menor (0,0068 para 100×100 e $10^{-4}\%$ para 800×800).

A figura 4.3 mostra a convergência do primeiro autovalor conforme melhoramos a malha.

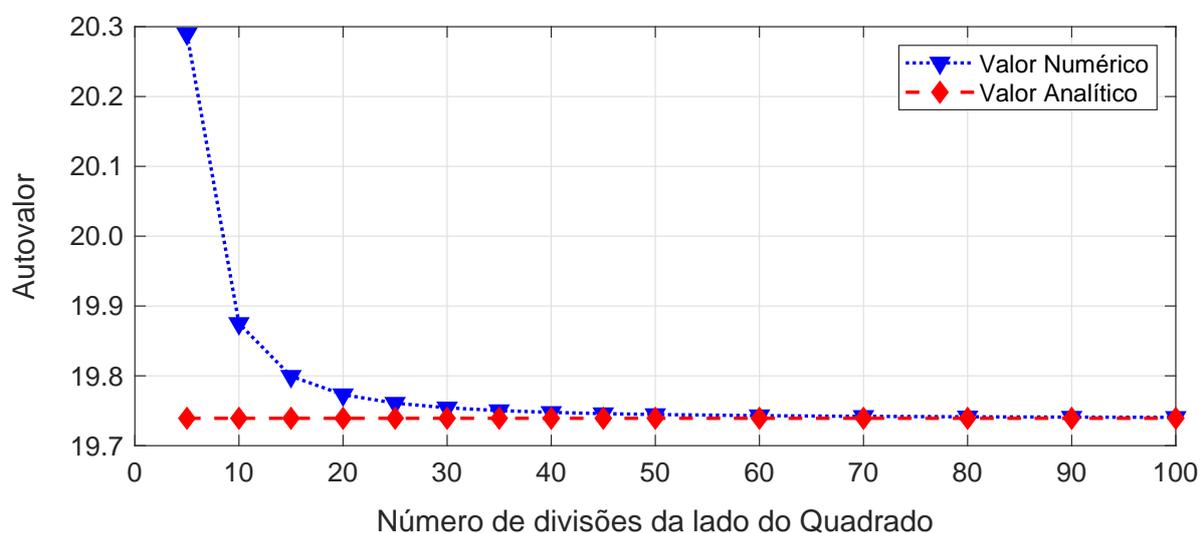


Figura 4.3 – Análise de Convergência do Autovalor

Tendo em vista a pouca variação do autovalor otimizado apresentada na Tabela 4.1, a convergência de λ_ϵ para λ apresentada na Tabela 4.2 e Figura 4.3, o tempo computacional necessário para trabalhar com grandes malhas (mais de 2 horas para fazer 1 iteração) e a capacidade de processamento do computador utilizado, neste exemplo e nos próximos exemplos consideramos uma malha inicial com 50 divisões em cada lado do quadrado e foram feitos 4 refinamentos na malha, o que gerou a seguinte quantidade de elementos e nós, conforme apresentado na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Quantidade de elementos da malha

n° de divisões no lado	n° de elementos da malha	n° de nós
50	10.000	5.101
100	40.000	20.201
200	160.000	80.401
400	640.000	320.801
800	2.560.000	1.281.601

Na Tabela 4.4 é apresentado, para cada iteração, os valores da função custo, Volume final (VF), Ângulo θ , Primeiro e Segundo Autovalor e a variável κ .

Tabela 4.4 – Valores em cada iteração para $\xi = 0, 4$.

Iteração	Função Custo	VF (%)	Ângulo θ	λ_1	λ_2	κ
0	-0,6000	100,00	180	49,3892	19,7393	1
1	-2,0126	71,4133	71,6030	45,3788	52,9041	1
2	-2,6179	65,1733	43,2352	56,837	62,1168	0,5
3	-2,6968	64,0533	33,0439	58,3065	61,7548	0,75
4	-2,6968	64,0533	8,789	58,3065	61,7548	0,125
5	-2,6968	64,0533	7,6904	58,3065	61,7548	0,046875
6	-2,6968	64,0533	7,3299	58,3065	61,7548	0,017578
7	-2,6968	64,0533	7,2011	58,3065	61,7548	0,013184
8	-2,6968	64,0533	7,1061	58,3065	61,7548	0,00061798
9*	-2,6479	64,0400	7,0135	57,3405	61,3486	0,125
10	-2,6479	64,0400	6,1368	57,3405	61,3486	0,046875
11	-2,6479	64,0400	5,8491	57,3405	61,3486	0,017578
12	-2,6479	64,0400	5,7463	57,3405	61,3486	0,013184
13	-2,6479	64,0400	5,6706	57,3405	61,3486	0,0024719
14	-2,6479	64,0400	5,6566	57,3405	61,3486	0,0018539
15	-2,6479	64,0400	5,6461	57,3405	61,3486	$8,6904 \times 10^{-05}$
16*	-2,6334	64,0933	5,6114	57,0573	61,1906	0,5
17	-2,6578	64,1967	2,8107	57,5482	61,3482	0,75
18	-2,6588	63,9233	0,81035	57,5459	61,8071	0,25
19*	-2,6605	63,5800	0,59229	57,5522	62,3217	0,25
20*	-2,6700	63,3340	0,43167	57,7200	62,6484	0,25

Antes das iterações 9, 16, 19 e 20 em que aparece o * foi feito um refinamento de malha, que consiste em dobrar o número de divisões em cada lado do quadrado, isto é, onde tínhamos um elemento passamos a ter 4 elementos. Nas duas primeiras paradas da rotina o critério utilizado pela mesma foi $\kappa < 10^{-3}$, enquanto que nas duas últimas, o critério foi $\theta < 1^\circ$. Vale destacar a eficiência do método em calcular o autovalor, pois na segunda iteração a diferença entre autovalor calculado na iteração e o autovalor final é de 0,883 e a variação do volume retirado é de 1,8393 pontos percentuais, o que pode ser observado na Figura 4.6 onde apresentamos as geometrias após a primeira, nona e vigésima iteração (geometria otimizada).

Na Figura 4.4 são apresentados os valores dos quocientes λ_1/λ_1^0 (em azul, com escala do lado esquerdo), ou seja, o quociente entre o primeiro autovalor de cada iteração e o primeiro

autovalor do domínio cheio de material e λ_1/λ_2 (em vermelho, com escala do lado direito) que é o quociente entre o primeiro e segundo autovalor de cada iteração. Como o quociente λ_1/λ_2 é sempre diferente de 1 o primeiro autovalor sempre é único e por isso não temos problema de diferenciabilidade do mesmo.

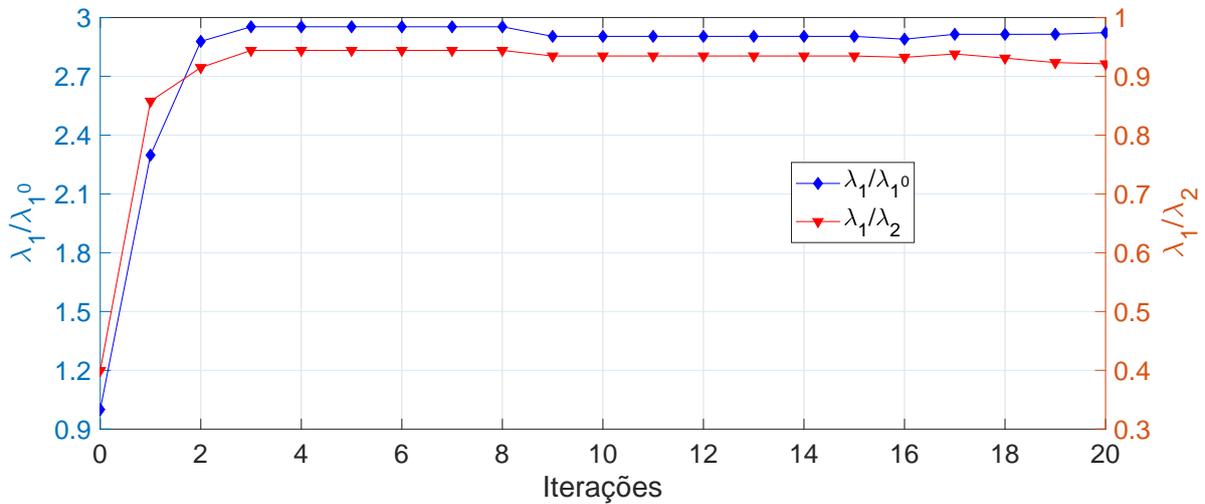


Figura 4.4 – Dois primeiros autovalores

Na Figura 4.5 é apresentado o gráfico para os valores do volume e ângulo θ considerando a massa concentrada $\xi = 0,4$.

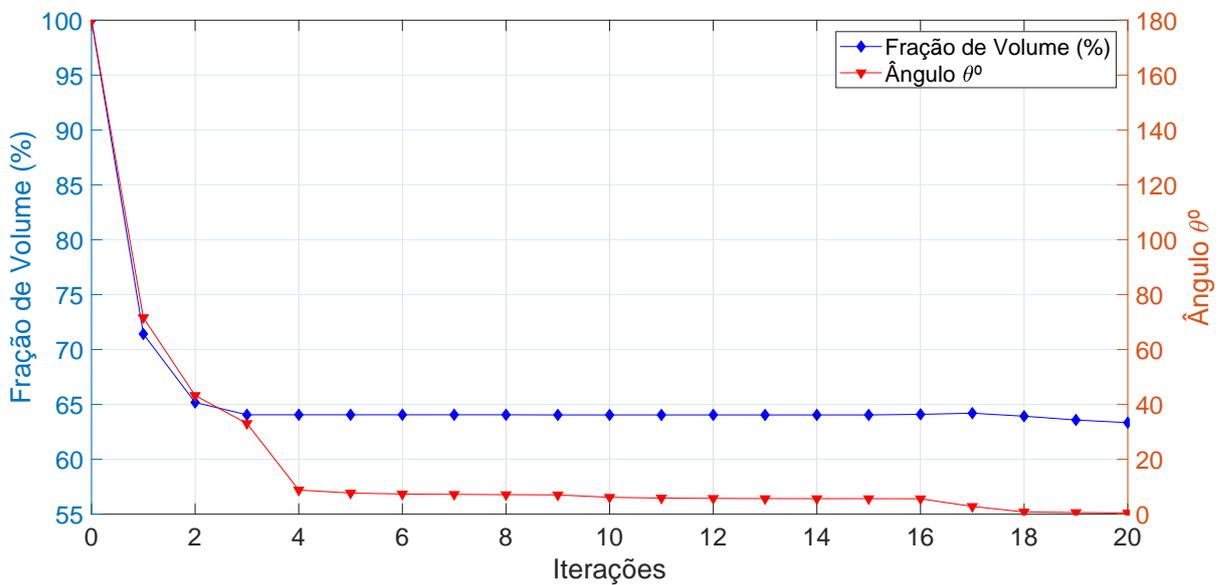


Figura 4.5 – Variação do volume e ângulo θ para $\xi = 0,4$

Na Figura 4.6 é apresentada a evolução da geometria e a geometria otimizada para $\xi = 0,4$.

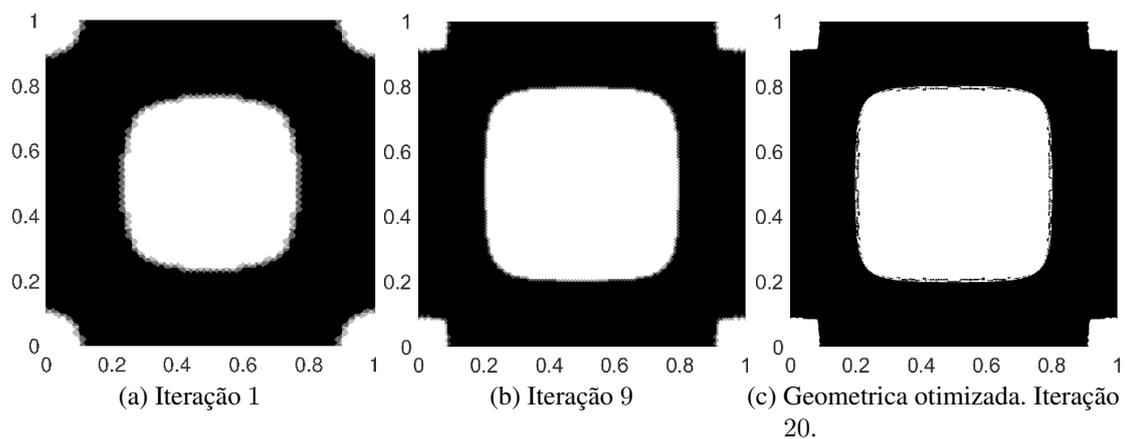


Figura 4.6 – Evolução da geometria para $\xi = 0, 4$.

Na Figura 4.7 são apresentados o gráfico dos três primeiros modos de vibração e o gráfico da derivada topológica para λ_0 . É possível verificar que o segundo e terceiro modo de vibração são simétricos. Isto acontece devido ao fato do segundo e terceiro autovalor serem iguais. Além disso a rotina retira material onde a derivada topológica assume os maiores valores (globalmente ou localmente), isto é, no centro da geometria e nos cantos, perto dos vértices da geometria.

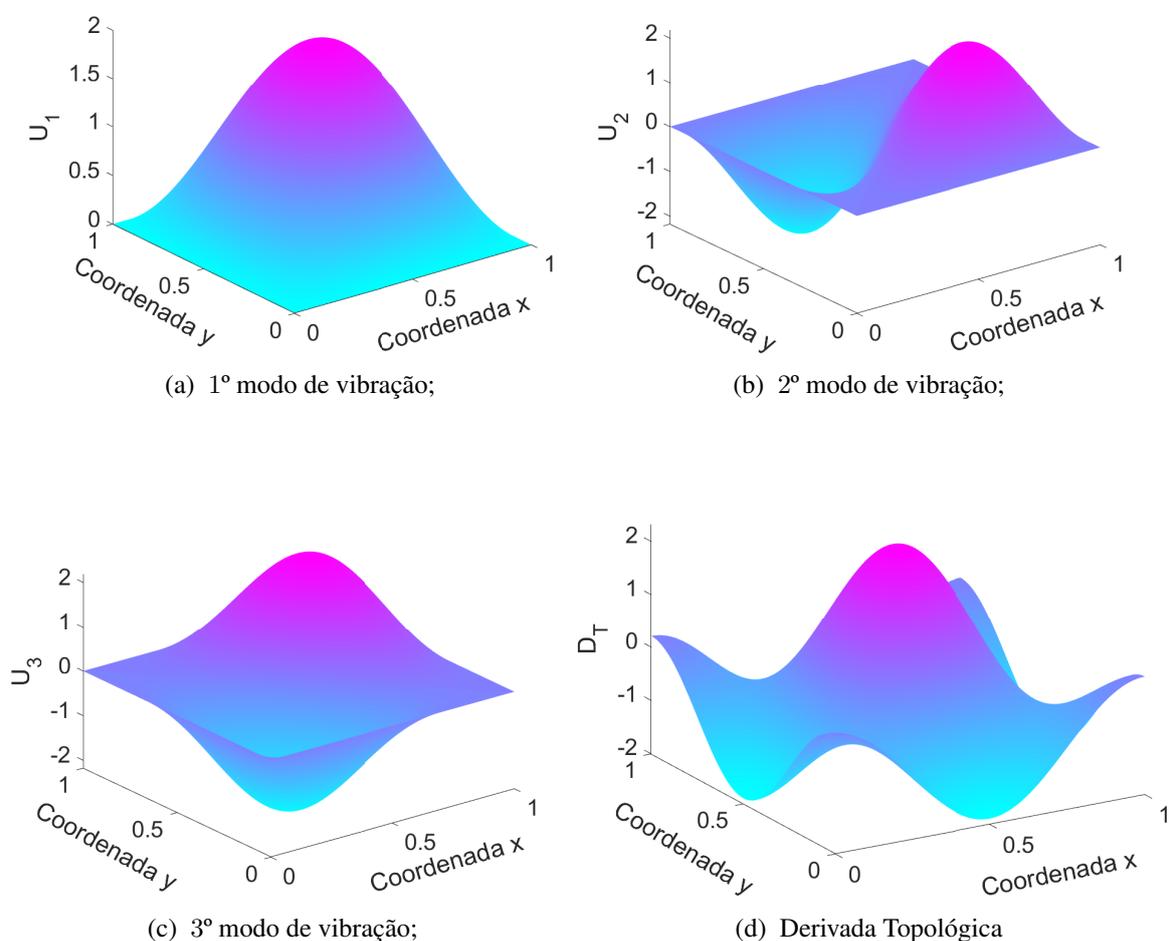


Figura 4.7 – Três primeiros modos de vibração e Derivada Topológica para λ_0 .

Na tabela 4.5 são apresentados os valores do volume final (VF) não retirado, autovalor inicial e otimizado, variação do autovalor, número de iterações (NI) e tempo gasto para obter a geometria otimizada para cada um dos valores do penalty apresentado na tabela.

Tabela 4.5 – Variação do Penalty.

Penalty	VF	λ_1	λ_2	NI	Tempo gasto
0,20	65,7544%	57,921	62,0487	21	14 min 11 seg
0,30	64,515%	57,9304	62,7964	19	11 min 39 seg
0,40	63,334%	57,72	62,6484	20	08 min 33 seg
0,50	62,1508%	57,4709	62,3452	21	13 min 49 seg
0,60	59,9977%	57,7393	64,0314	16	10 min 52 seg
0,70	59,3988%	57,1549	62,3216	19	09 min 32 seg
0,80	56,3508%	56,3946	65,3719	16	12 min 22 seg
0,90	54,5067%	55,8849	65,1198	18	12 min 18 seg

A partir dos dados apresentados na Tabela 4.5, é possível verificar que a variação do volume final foi de 21,82% e a variação do λ final foi de 3,02%.

Dependendo da malha que é trabalhada e da quantidade de refinamentos feitos na malha, pode-se considerar um valor maior para a penalização (até $\xi = 1, 2$), mas com a malha que utilizamos, quando consideramos $\xi = 1$, a rotina produz uma geometria deformada (divisão em 4 partes disjuntas).

Na Figura 4.8 é apresentada a geometria otimizada para alguns valores de ξ .

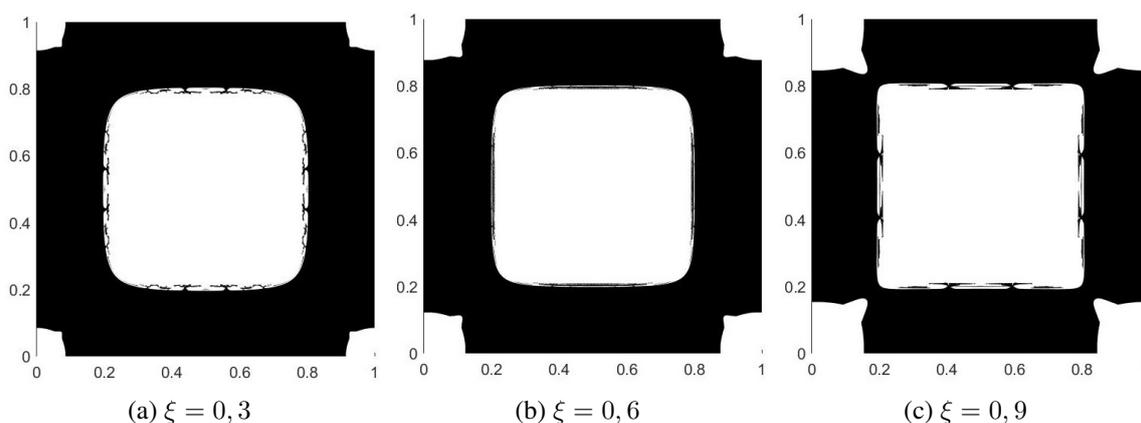


Figura 4.8 – Geometria otimizada para alguns valores de ξ .

É possível observar que as geometrias otimizadas tem pouca mudança quando variamos o valor da penalização.

Este exemplo também foi resolvido utilizando métodos de elementos de contorno.

Na Tabela 4.6 são apresentados os valores finais do volume, λ_1 e λ_2 considerando MEF e MEC. Foi escolhido o valor de $\xi = 0,9$ para comparar os dois métodos, pois nesse caso os valores ficaram os mais próximos para os dois métodos.

Tabela 4.6 – Valores finais do Volume, λ_1 e λ_2 considerando MEF e MEC

	MEF ($\xi = 0,9$)	MEC
Volume final	54,5067%	54,878%
λ_1	55,8849	54,274
λ_2	65,1198	70,828
NI	18	9

Na Figura 4.9 é apresentada a geometria inicial com a malha utilizada e a geometria otimizada.

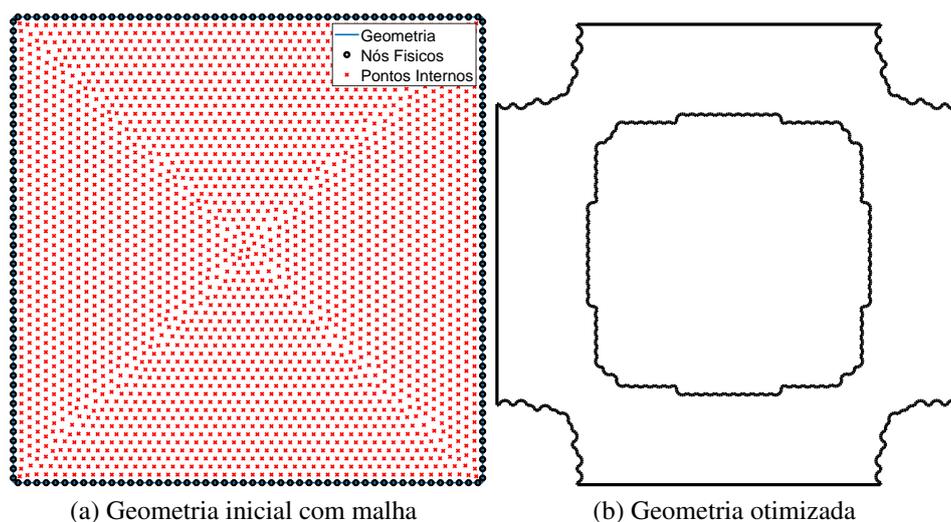


Figura 4.9 – Geometria inicial e otimizada para o MEC.

Exemplo 4.2 Neste exemplo foi considerada uma placa com as mesmas características apresentadas no Exemplo 4.1, porém com uma fonte de massa concentrada no centro da geometria..

Neste exemplo são apresentados dois casos: No primeiro caso é mantido fixo o valor do penalty ($\xi = 0,15$) e foi variado do valor da massa concentrada conforme os valores apresentados na tabela a seguir:

Tabela 4.7 – Casos considerados para $\xi = 0,15$.

	Caso 1A	Caso 1B	Caso 1C	Caso 1D	Caso 1E	Caso 1F
ξ	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
k	0,003	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04

Neste exemplo o maior valor de massa concentrada considerado foi de $k = 0,04$, pois para valores maiores a rotina retira pouco material.

Na Figura 4.10 é apresentada a geometria inicial do problema.

Na Figura 4.11 são apresentados o gráfico do 1º modo de vibração e o gráfico da derivada topológica para λ_0 para o caso da massa concentrada $k = 0,02$ e penalty $\xi = 0,15$. Além disso, observa-se que é retirado material onde a derivada topológica assume os maiores valores.

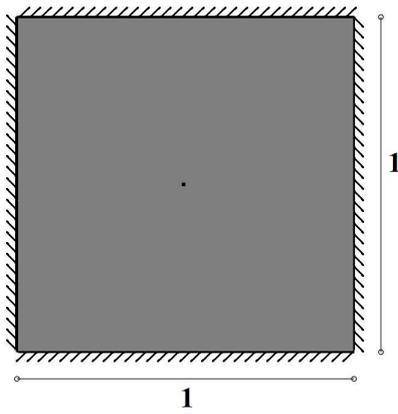


Figura 4.10 – Geometria Inicial

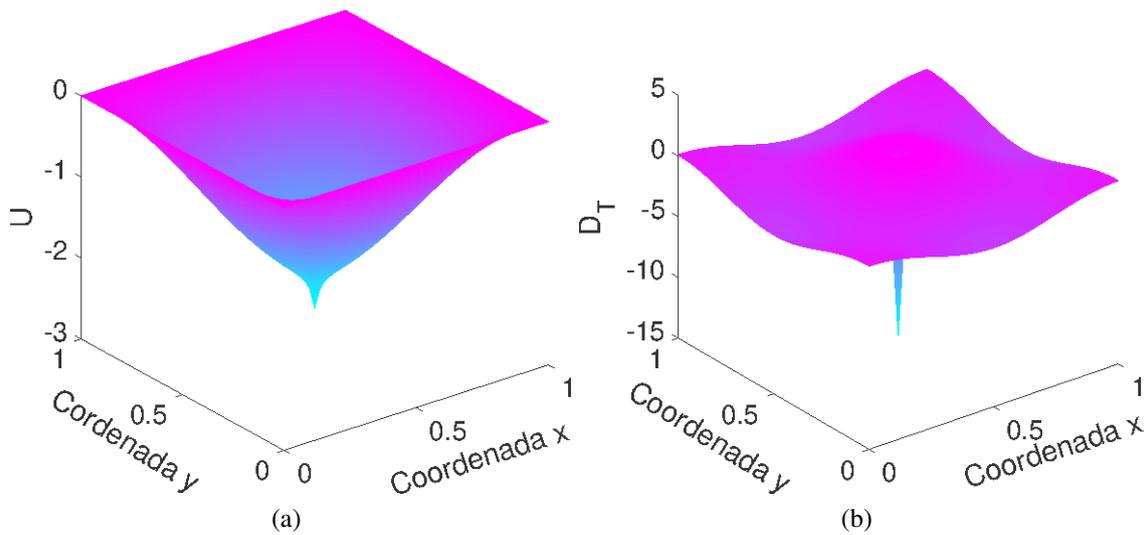


Figura 4.11 – (a) 1º modo de vibração; (b) Derivada Topológica para λ_0 .

Na figura 4.12 são apresentados os valores do ângulo θ em graus, para cada valor de massa concentrada considerada. É possível observar que nos primeiros refinamentos a rotina utilizou como critério de refinamento o valor de κ , enquanto que nos últimos refinamentos o critério utilizado para o refinamento foi o ângulo θ .

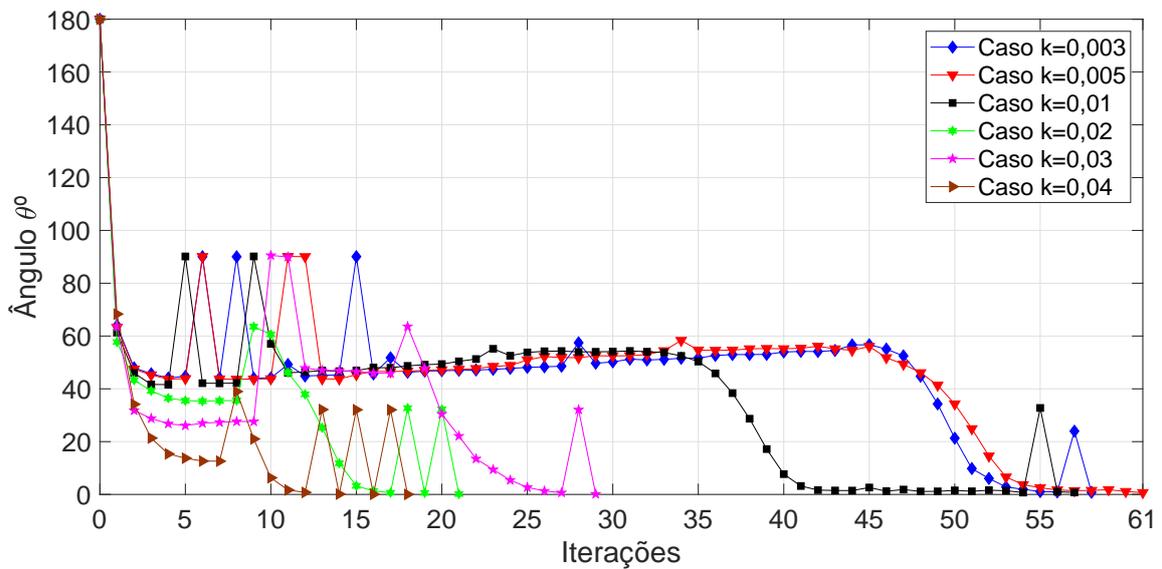


Figura 4.12 – Variação do ângulo θ para $\xi = 0, 15$.

Na figura 4.13 são apresentados os valores da fração de volume que foi mantido na geometria otimizada, para cada valor de massa concentrada considerada. É possível observar que o material mantido na geometria aumenta conforme o valor da massa concentrada aumenta. Além disso o número de iterações diminui conforme a massa concentrada aumenta.

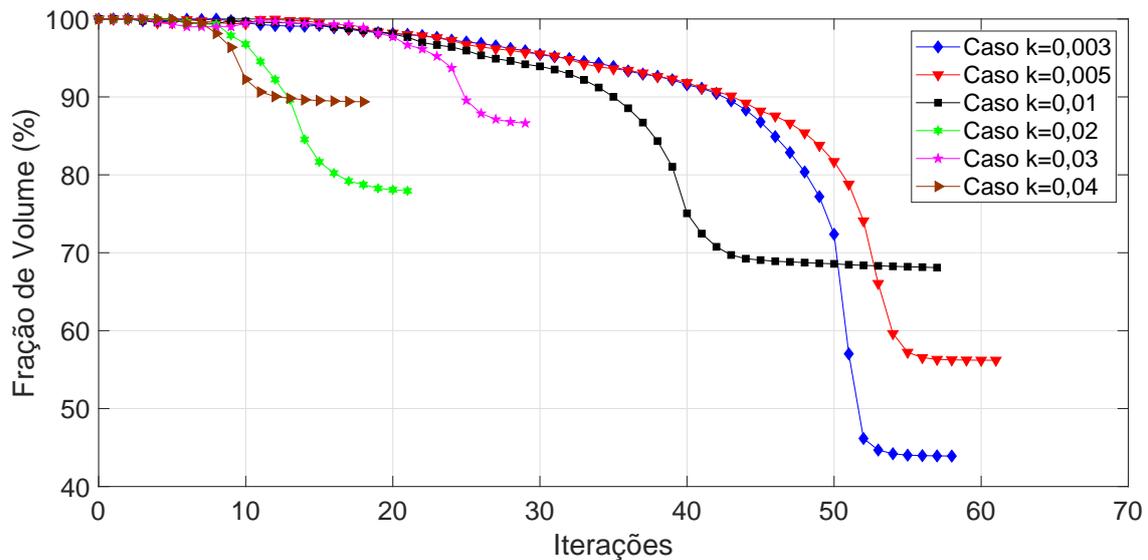


Figura 4.13 – Variação da fração de volume para $\xi = 0, 15$.

Na figura 4.14 são apresentados os valores de λ_1 normalizado em função de λ_0 . É possível observar que conforme aumenta o valor da massa concentrada o valor de λ_1/λ_1^0 tende a se manter próximo de 1.

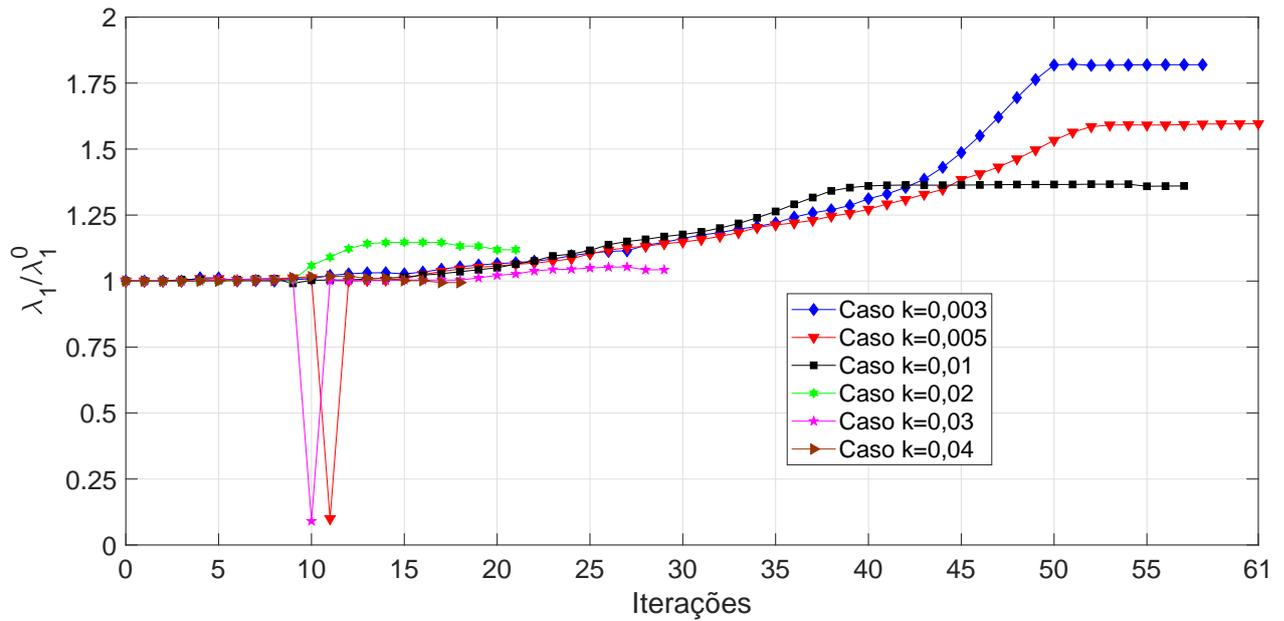


Figura 4.14 – Variação de λ_1/λ_1^0 para $\xi = 0, 15$.

Na figura 4.15 é apresentado o quociente entre λ_1 e λ_2 calculados em cada iteração. O objetivo desse gráfico é mostrar que λ_2 é sempre diferente de λ_1 , ou seja, o primeiro autovalor não tem repetição. Além disso λ_2 converge para um valor aproximadamente 25% maior que λ_1 no primeiro caso considerado e mais de 100% no último caso analisado.

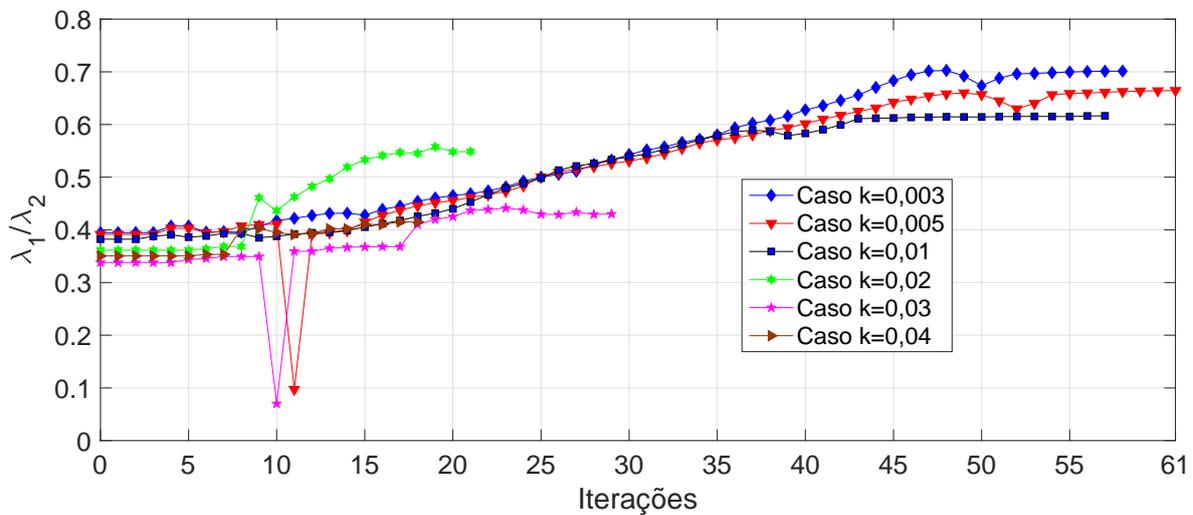


Figura 4.15 – Variação de λ_1/λ_2 para $\xi = 0, 15$.

De um modo geral é possível observar, a partir das Figuras 4.12 à 4.15, que uma pequena variação no valor da massa concentrada produz uma grande variação no valor do primeiro autovalor, na quantidade de material retirado e no número de iterações.

Na tabela 4.8 são apresentados os valores do volume final (VF) não retirado, primeiro autovalor normalizado (λ_1/λ_1^0), o quociente (λ_1/λ_2), ângulo final (θ°) e número de iterações (NI) para obter a geometria otimizada para cada um dos valores da massa concentrada (k) apresentado na tabela para a geometria inicial apresentada na Figura 4.10.

Tabela 4.8 – Valores finais para alguns valores de massa concentrada e $\xi = 0, 1$.

k	VF	λ_1/λ_1^0	λ_1/λ_2	ângulo final (θ°)	NI
0,003	54,8359%	1,8348	0,7395	0,8015°	75
0,005	56,2068%	1,5957	0,6644	0,6951°	61
0,01	68,0928%	1,3603	0,6164	0,7405°	57
0,02	77,9441%	1,1185	0,5488	0,1693°	21
0,03	86,6258%	1,0427	0,4300	0,1569°	29
0,04	89,3748%	0,9943	0,4150	0,0241°	18

Pode-se observar que, para os valores de massa concentrada considerados, a variação do volume final foi de 62,98%, já a variação do primeiro autovalor normalizado (λ_1/λ_1^0) foi de -45,80%, o que faz sentido do ponto de vista físico, pois quando aumenta-se a carga concentrada e, portanto, a energia de todo sistema, a tendência é de que a amplitude de modo de vibração aumente e por consequência a frequência diminua.

Na figura 4.16 são apresentados os valores do ângulo θ , do volume e do parâmetro κ para $\xi = 0, 15$ e $k = 0,003$. A ideia deste gráfico é mostrar a relação entre essas três variáveis. Assim verifica-se que o valor do ângulo θ fica menor que 20° quando o valor de κ fica maior que 0,7.

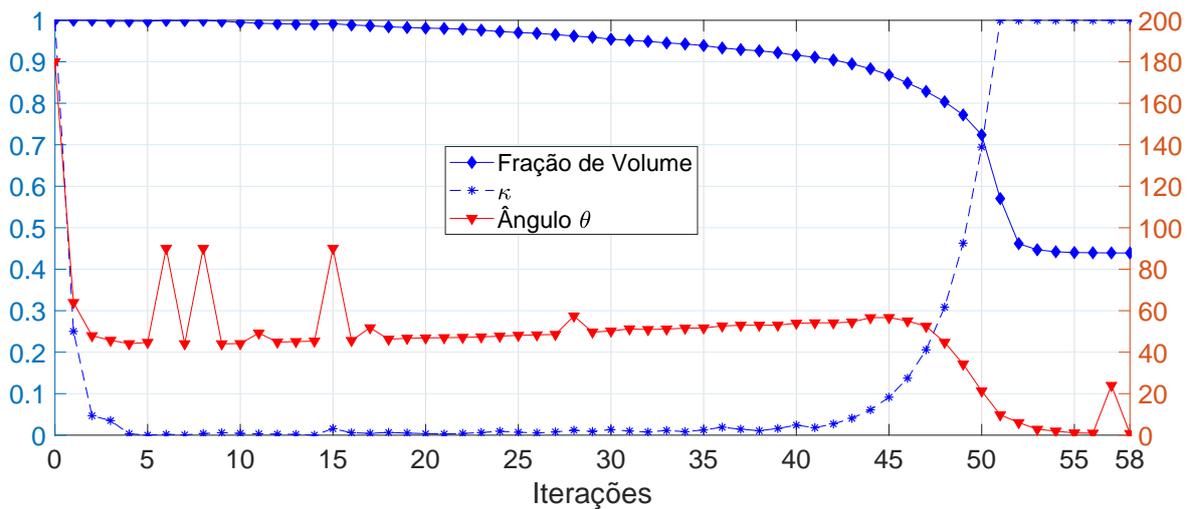


Figura 4.16 – Variação do ângulo θ , volume e κ para $\xi = 0, 15$ e $k = 0,003$

Outra informação a ser destacada é o número de iterações, que é maior quando o valor da massa concentrada é bem pequeno, pois neste caso temos uma pequena perturbação no sistema, e portanto, o mesmo é bem sensível e por consequência κ_j é bem pequeno ($\kappa_j < 0,02$), o ângulo θ é alto (acima de 20°) e a rotina retira pouco material (mantém mais de 80%), o que acontece até por volta da iteração 45, conforme visto na Figura 4.16. A partir daí o valor de κ começa a aumentar e por consequência a rotina retira mais material e o ângulo θ começa a diminuir, ou seja, começa a convergir para $\theta < 1$. Esta situação também ocorre nos outros casos em que consideramos uma massa concentrada bem pequena $k \leq 0,01$. Além disso o valor de κ está diretamente relacionado com o número de iterações necessárias para a convergência da rotina, ou seja, se a rotina precisa de muitas iterações, então o valor de κ é pequeno $\kappa \leq 0,1$ por varias iterações.

Na Figura 4.17 são apresentadas as geometrias otimizadas para os valores de massa concentrada considerados nesse caso.

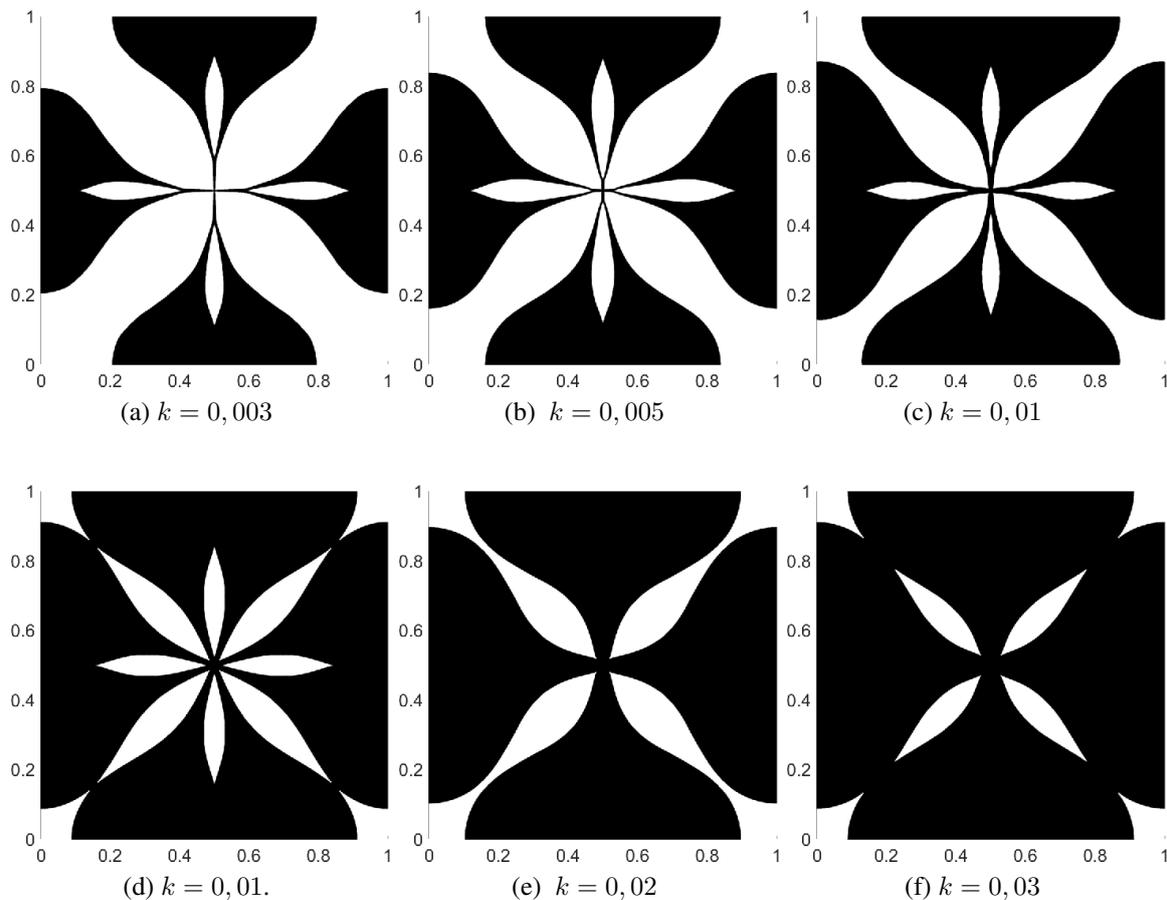


Figura 4.17 – Geometria inicial otimizada para alguns valores de k e $\xi = 0,15$.

É possível verificar que, embora as geometrias mantenham um certo padrão, a variação da massa concentrada produz uma grande mudança no volume final do problema apresentado.

No segundo caso iremos manter fixo o valor da massa concentrada ($k = 0,03$) e variar os seguintes valores do penalty conforme apresentados na tabela a seguir.

Tabela 4.9 – Casos considerados para $k = 0,03$.

	Caso 2A	Caso 2B	Caso 2C	Caso 2D	Caso 2E	Caso 2F
ξ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
k	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03

Na figura 4.18 são apresentados os valores do ângulo θ em graus, para cada valor de ξ considerado. É possível verificar que nos refinamentos iniciais a rotina utilizou como critério de refinamento o valor de κ , enquanto que nos últimos refinamentos o critério utilizado para o refinamento foi o ângulo θ .

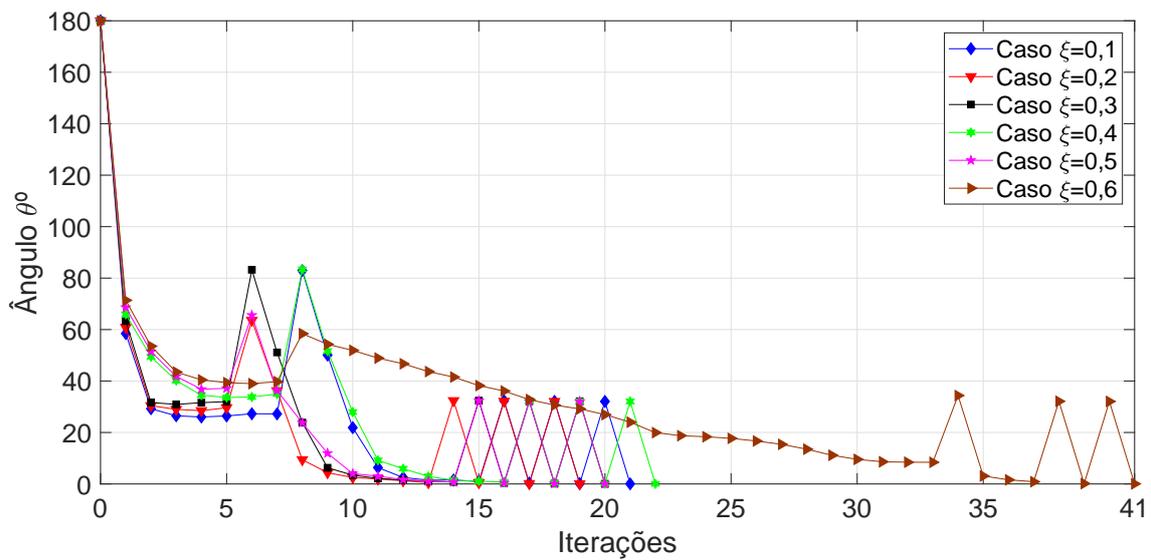


Figura 4.18 – Variação do ângulo θ para $k = 0,03$.

Na figura 4.19 são apresentados os valores da fração de volume que foi mantido na geometria otimizada, para cada valor de ξ considerado. É possível observar que em geral o material mantido na geometria diminui conforme o valor de ξ aumenta. Além disso, o número de iterações nos cinco primeiros casos são bem próximos.

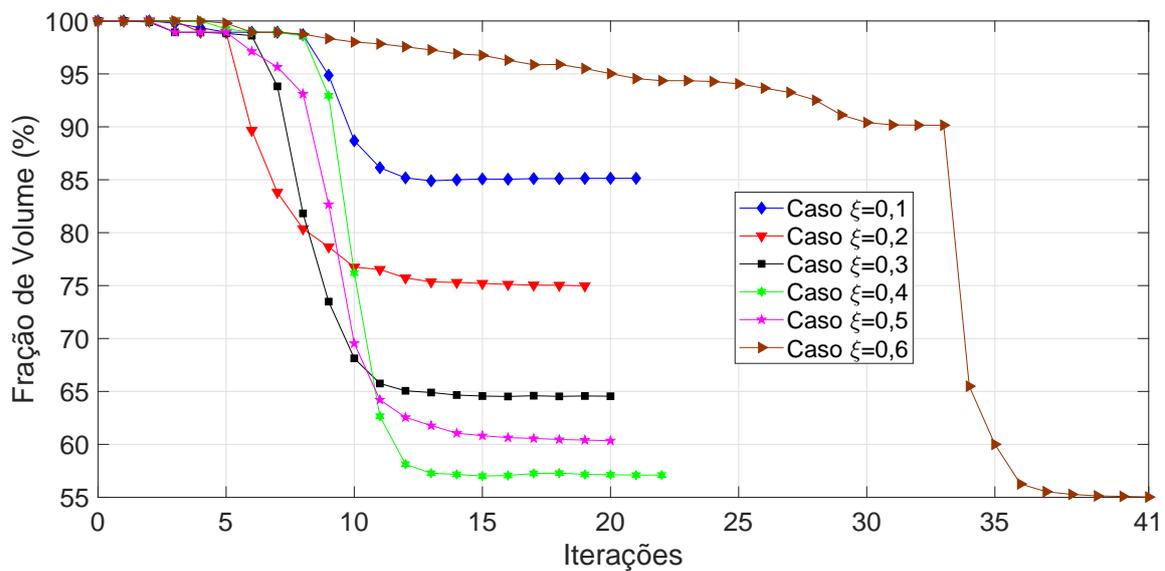


Figura 4.19 – Variação da fração de volume para $k = 0,03$.

Na figura 4.20 são apresentados os valores de λ_1 normalizado em função de λ_0 . É possível verificar que, embora o volume mantido muda bastante conforme muda o valor de ξ o quociente λ_1/λ_1^0 se mantém próximo de 1.

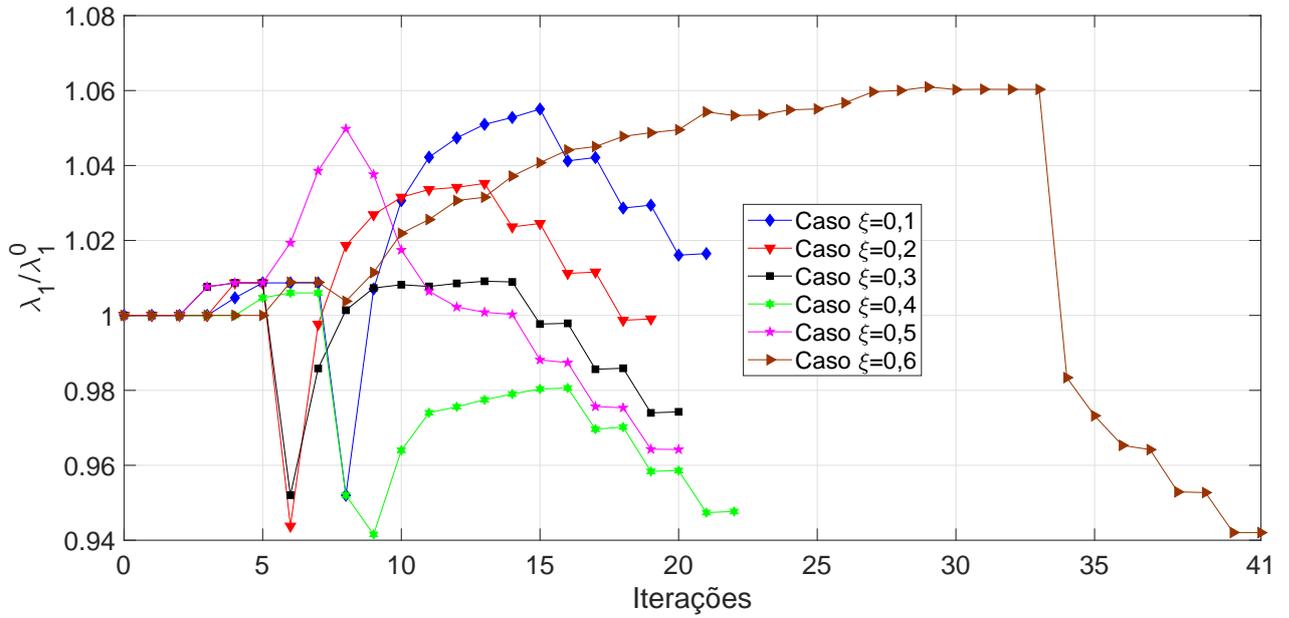


Figura 4.20 – Variação de λ_1/λ_1^0 para $k = 0, 03$.

Na figura 4.21 são apresentados os valores do quociente entre λ_1 e λ_2 calculados em cada iteração. O objetivo desse gráfico é mostrar que λ_2 é sempre diferente de λ_1 , ou seja, o primeiro autovalor não tem repetição. Além disso, o quociente λ_1/λ_2 tende para valores entre 0,4 e 0,44, independentemente do valor de ξ considerado.

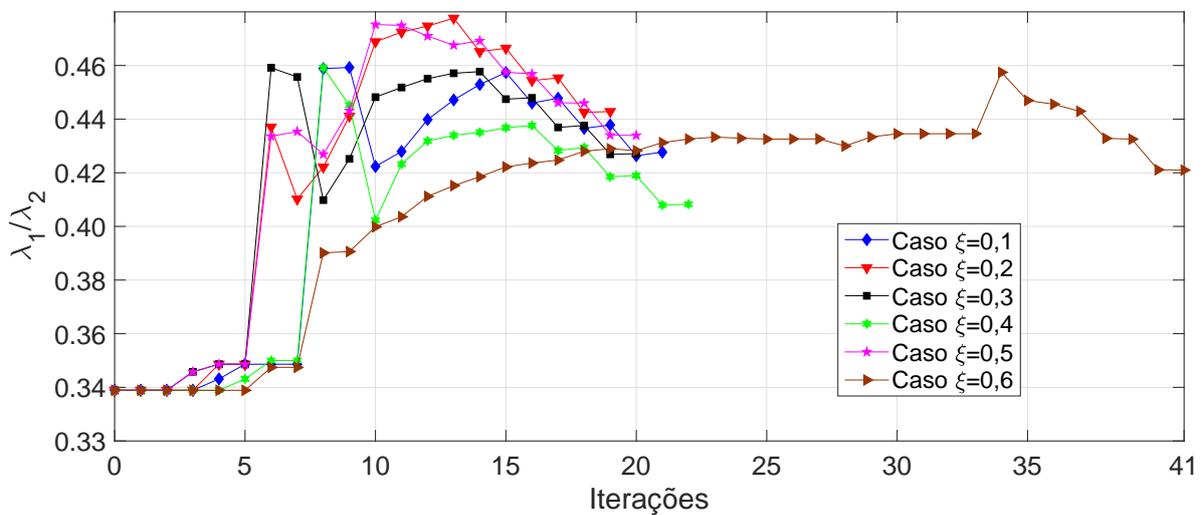


Figura 4.21 – Variação de λ_1/λ_2 para $k = 0, 03$.

De um modo geral observa-se a partir das Figuras 4.18 à 4.21 que a variação no ξ produz uma grande variação na quantidade de material retirado e no número de iterações mas mantém os valores finais dos quocientes λ_1/λ_1^0 e λ_1/λ_2 praticamente constantes.

Na tabela 4.10 são apresentados os valores do volume final (VF) não retirado, primeiro autovalor normalizado (λ_1/λ_1^0), do quociente (λ_1/λ_2), ângulo final (θ°) e número de iterações (NI) para obter a geometria otimizada para cada um dos valores de ξ apresentado na tabela para a geometria inicial apresentada na Figura 4.10.

Tabela 4.10 – Valores finais para alguns valores de ξ e massa concentrada $k = 0,03$.

ξ	VF	λ_1/λ_1^0	λ_1/λ_2	ângulo final (θ°)	NI
0,1	85,1413%	1,0164	0,4276	0,0084°	21
0,2	74,9780%	0,9990	0,4428	0,0524°	19
0,3	64,5486%	0,9742	0,4271	0,0498°	18
0,4	57,0973%	0,9476	0,4082	0,0484°	22
0,5	60,3482%	0,9642	0,4339	0,0367°	20
0,6	55,0278%	0,9420	0,4209	0,0430°	41

Pode-se observar que, para os valores dos casos considerados, houve uma diminuição no volume final do material mantido em 35,36%, já o primeiro autovalor normalizado (λ_1/λ_1^0) diminuiu em 7,31%, ou seja, embora a variação do penalty ξ resulte em uma grande variação no volume, a energia de todo sistema se mantém praticamente constante, e por consequência a vibração também varia pouco.

Na Figura 4.22 são apresentadas as geometrias otimizadas para alguns valores de massa concentrada e pode-se verificar um padrão nas geometrias obtidas.

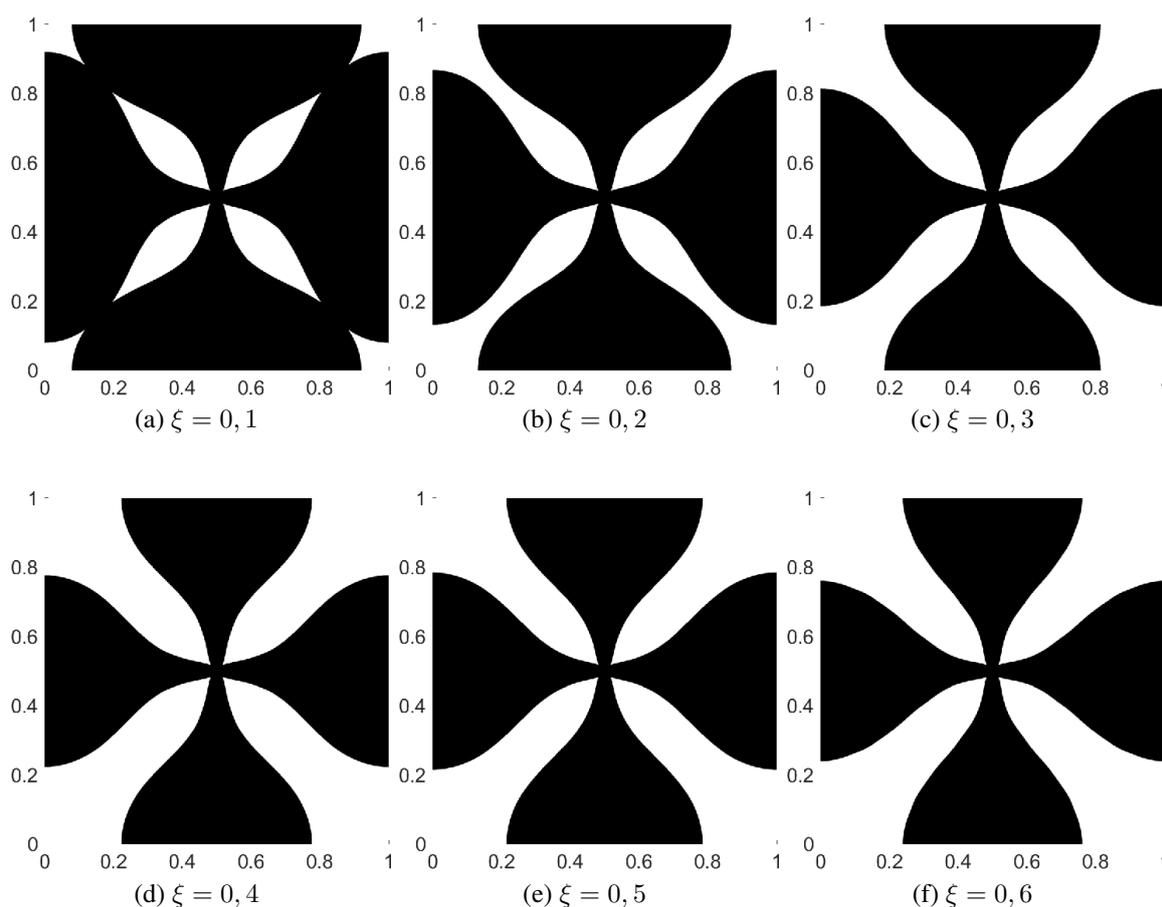


Figura 4.22 – Geometria inicial otimizada para alguns valores de ξ e $k = 0,03$.

Exemplo 4.3 Neste exemplo foi considerada a placa apresentada na Figura 4.29a, que está engastada apenas nos quatro vértices do quadrado, livre no restante da fronteira e possui uma carga concentrada no centro do geometria.

A malha utilizada e a quantidade de refinamentos é a mesma do exemplo anterior e consideramos 4 casos.

Tabela 4.11 – Casos considerados para $k = 0,03$.

	Caso A	Caso B	Caso C	Caso D
ξ	0,4	0,2	0,1	0,1
k	0,02	0,03	0,04	0,7

Na Figura 4.23 é apresentado o gráfico do 1º modo de vibração e o gráfico da derivada topológica para λ_0 para o caso da massa concentrada $k = 0,04$ e penalty $\xi = 0,1$.

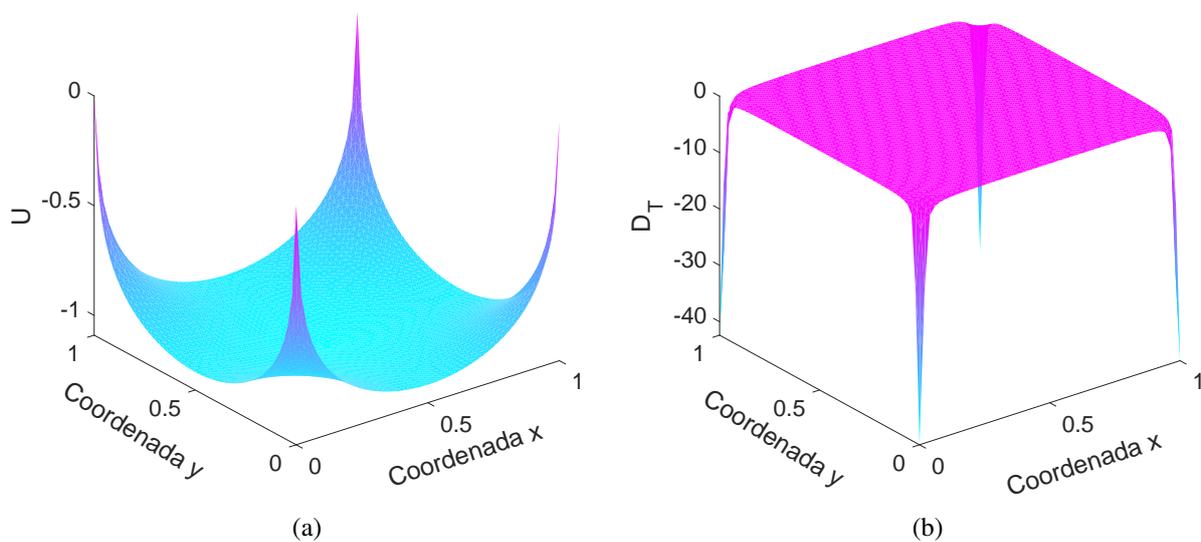


Figura 4.23 – (a) 1º modo de vibração; (b) Derivada Topológica para λ_0 .

Na tabela 4.12 são apresentados os valores do volume final (VF) não retirado, primeiro autovalor normalizado (λ_1/λ_1^0), segundo autovalor normalizado em relação ao primeiro autovalor (λ_1/λ_2), ângulo final (θ°) e número de iterações (NI) para obter a geometria otimizada para cada um dos valores de ξ apresentado na tabela para a geometria inicial apresentada na Figura 4.10.

Tabela 4.12 – Valores finais para alguns valores de ξ e massa concentrada $k = 0,03$.

k	ξ	VF	λ_1/λ_0	λ_1/λ_2	ângulo final (θ°)	NI
0,02	0,4	11,1545%	4,0179	0,3024	0,2902°	129
0,03	0,2	13,3843%	3,7080	0,3092	0,0524°	44
0,01	0,4	18,0935%	3,3975	0,3450	0,1218°	96
0,7	0,4	43,8272%	1,8272	0,0918	0,0395°	18

Pode-se observar que, para os casos considerados, a quantidade de material mantido na geometria aumentou em aproximadamente 292%, já a variação do primeiro autovalor normalizado (λ_1/λ_1^0) teve uma redução de aproximadamente 54,23%, ou seja, embora haja variação dos parâmetros nos três primeiros casos, a energia de todo sistema se manteve praticamente constante

neste casos, e por consequência a vibração também varia pouco. Já no último caso analisado, embora a geometria seja muito parecida com o terceiro caso, houve uma grande variação no volume e nos autovalores.

Na figura 4.24 são apresentados os valores do ângulo θ em graus, para cada valor de ξ e massa concentrada considerado. Pode-se observar que, nos primeiros refinamentos, a rotina utilizou como critério de refinamento o valor de κ , enquanto que nos últimos refinamentos o critério utilizado para o refinamento foi o ângulo θ . Além disso o número de iterações está diretamente relacionado com o valor da massa concentrada, que diminui conforme aumentamos a massa concentrada.

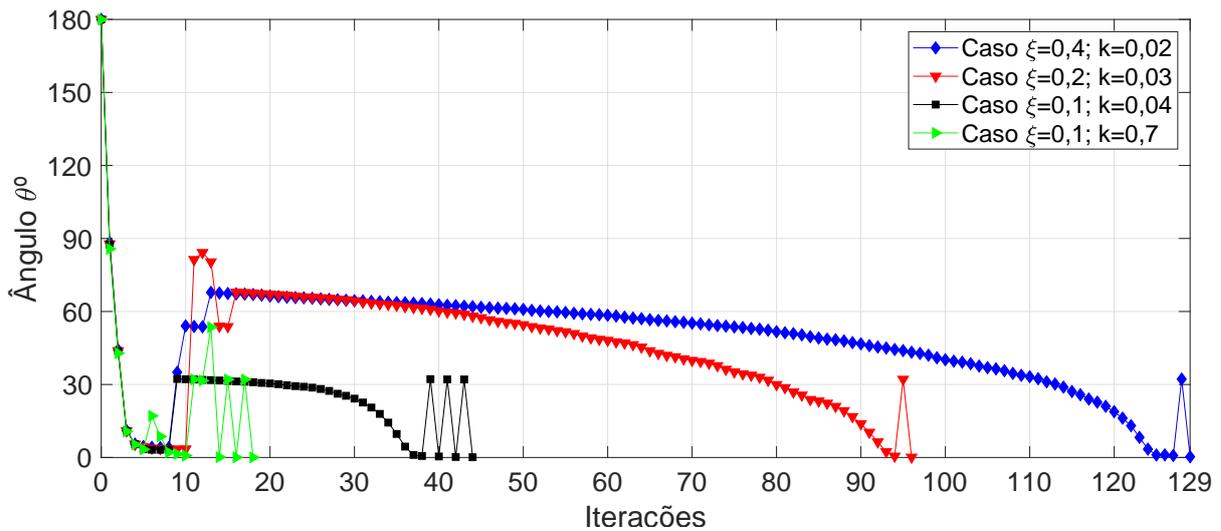


Figura 4.24 – Variação do ângulo θ para alguns valores de k e ξ .

Na figura 4.25 são apresentados os valores da fração de volume que foi mantido na geometria otimizada, para cada um dos casos considerados. Pode-se observar que nos três primeiros casos o volume final mantido é muito próximo um do outro.

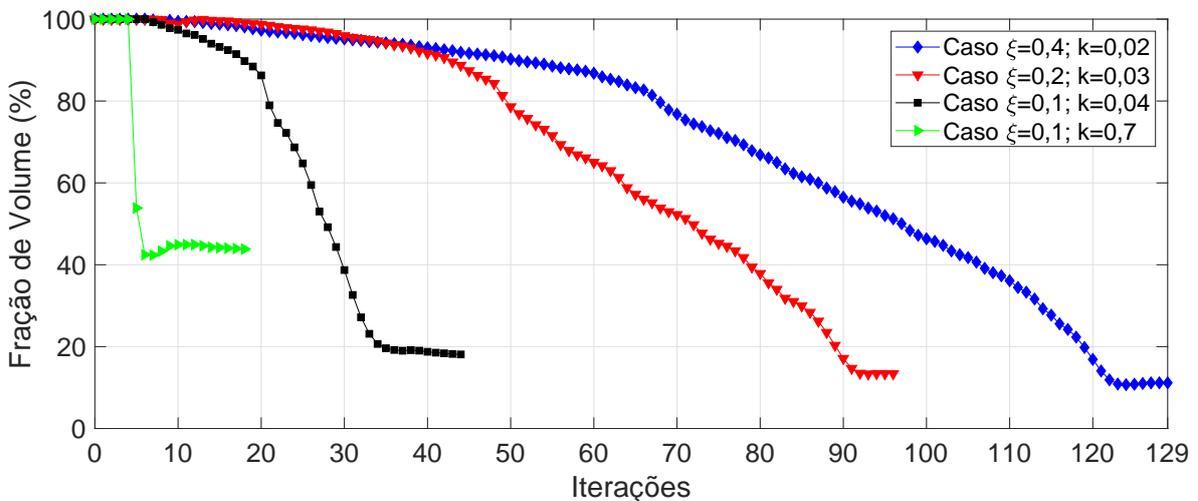


Figura 4.25 – Variação da fração de volume para $k = 0,03$.

Na figura 4.26 são apresentados os valores de λ_1 normalizado em função de λ_0 . Pode-se

observar que, nos três primeiros casos considerados, o primeiro autovalor mais que triplica de valor, enquanto que no último caso o quociente λ_1/λ_1^0 se mantém próximo de 1.

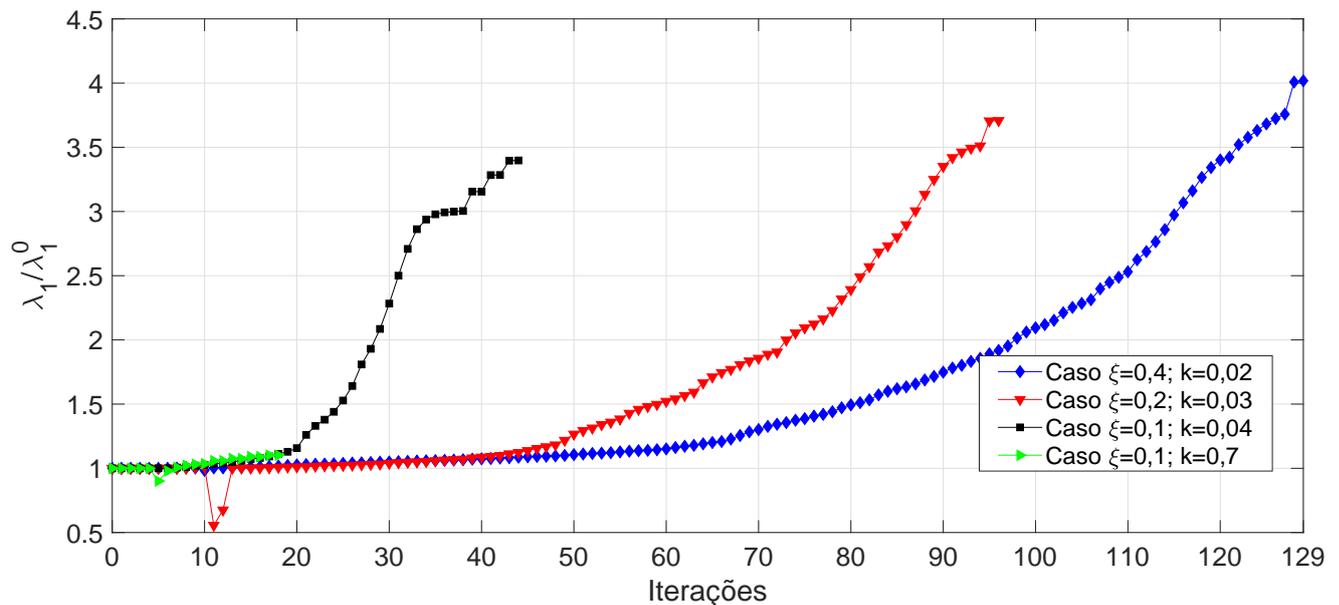


Figura 4.26 – Variação de λ_1/λ_1^0 para $k = 0,03$.

Na figura 4.27 são apresentados os valores de λ_2 normalizado em função de λ_1 calculados em cada iteração. O objetivo desse gráfico é mostrar que λ_2 é sempre diferente de λ_1 , ou seja, o primeiro autovalor não tem repetição. Além disso, o quociente λ_1/λ_2 tende para valores próximos a 0,3 nos três primeiros casos e a 0,1 no último caso considerado.

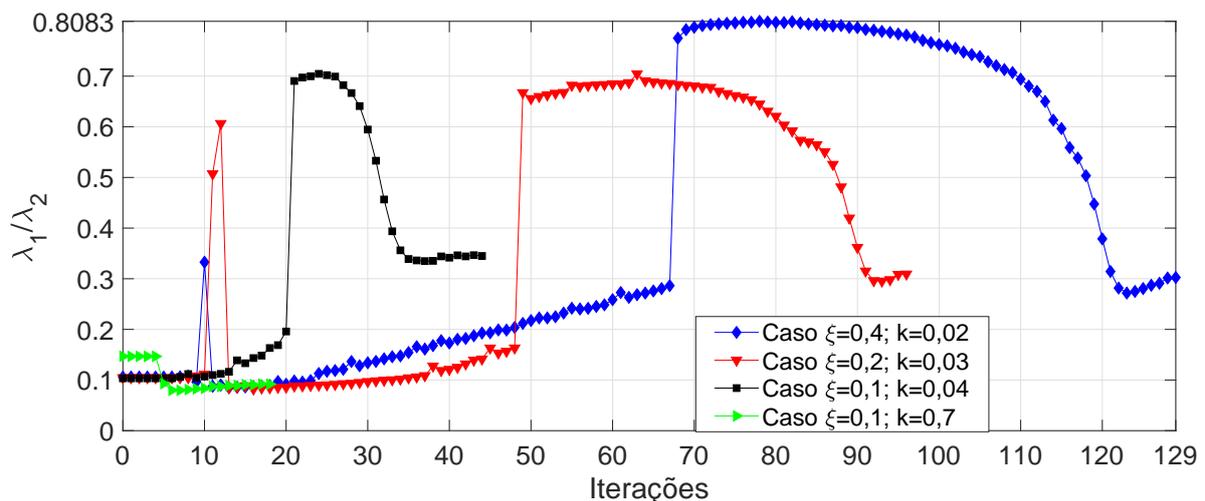


Figura 4.27 – Variação de λ_1/λ_2 para $k = 0,03$.

De um modo geral é possível observar a partir das Figuras 4.18 à 4.21 que a variação no ξ produz uma grande variação na quantidade de material retirado e no número de iterações mas mantém os valores finais dos quocientes λ_1/λ_1^0 e λ_1/λ_2 praticamente constantes nos três primeiros casos considerados.

Na figura 4.28 são apresentados os valores do ângulo θ , do volume e do parâmetro κ . A ideia deste gráfico é mostrar a relação entre essas três variáveis. Podemos verificar que o ângulo θ fica menor que 20° quando o valor de κ fica maior que 0,2.

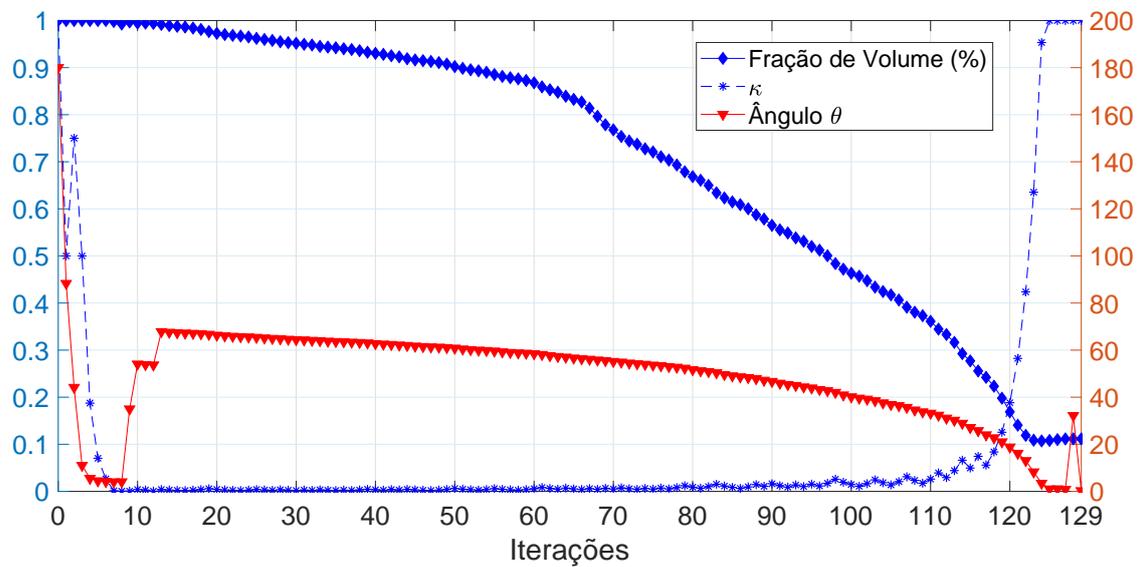


Figura 4.28 – Variação do ângulo θ , volume e κ para $\xi = 0,1$ e $k = 0,003$

Nas Figuras 4.29 e 4.30 é apresentada a geometria inicial, a evolução da geometria durante o processo de iteração e a geometria final.

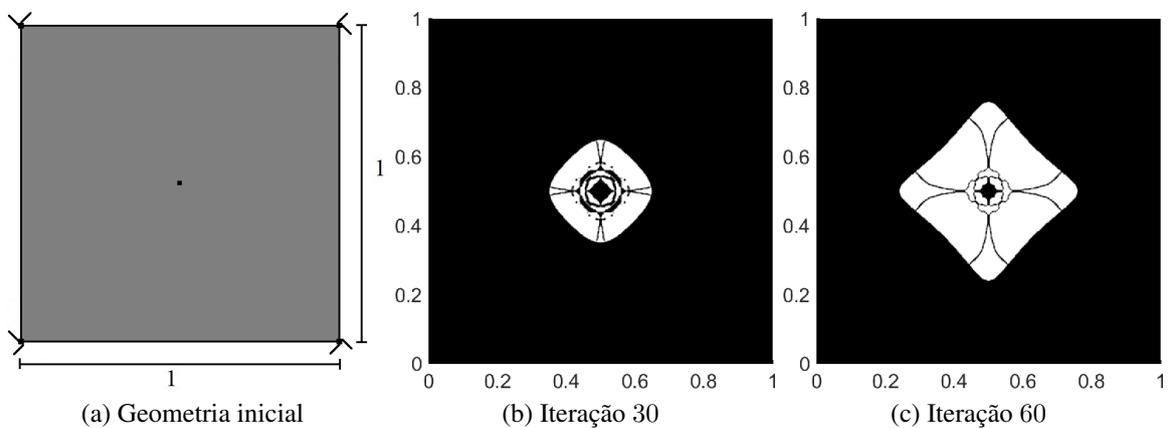


Figura 4.29 – Geometria inicial e evolução da topologia para $\xi = 0,4$ e $k = 0,02$

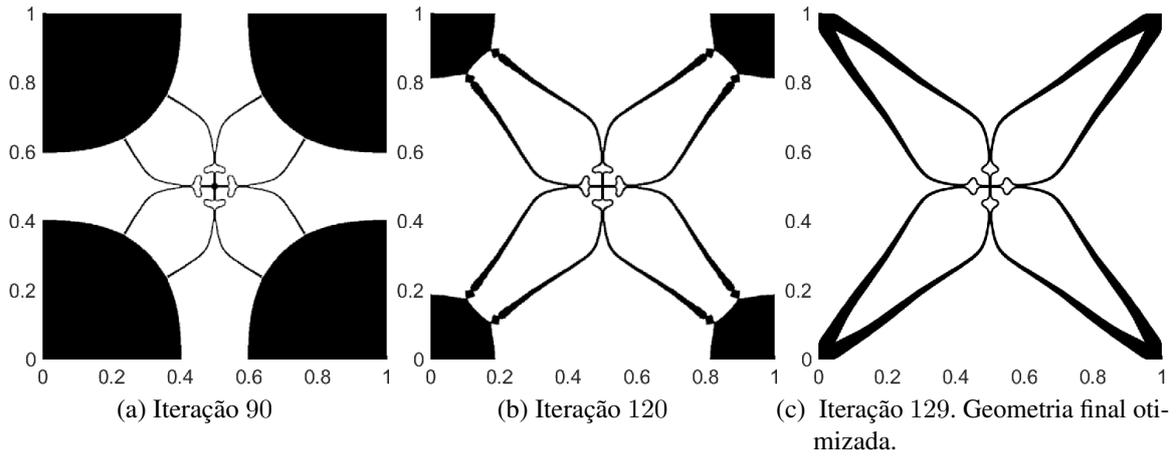


Figura 4.30 – Evolução da topologia e geometria otimizada para $\xi = 0,4$ e $k = 0,02$

Pode-se observar na Figura 4.29 que a rotina demora a tirar material, isso se deve ao fato do valor da massa concentrada ser pequeno.

Na Figura 4.31 é apresentada a geometria otimizada para os outros casos considerados.

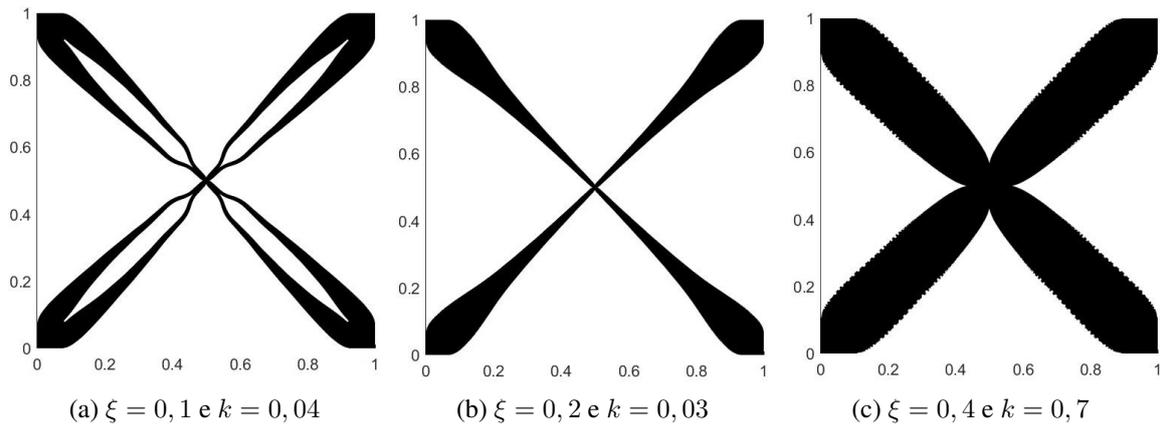


Figura 4.31 – Geometria final para alguns valores de ξ e k .

Exemplo 4.4 Neste exemplo foi considerada a placa apresentada na Figura 4.38a, que possui condições de Dirichlet Γ_D , de comprimento $m(\Gamma_D) = 0,1$ com início nos vértices, e livre no restante da fronteira.

A malha utilizada e a quantidade de refinamentos é a mesma do exemplo anterior e consideramos 4 casos.

Tabela 4.13 – Casos considerados para $k = 0,03$.

	Caso A	Caso B	Caso C	Caso D
ξ	0,1	0,5	0,2	0,2
k	0,01	0,01	0,03	0,4

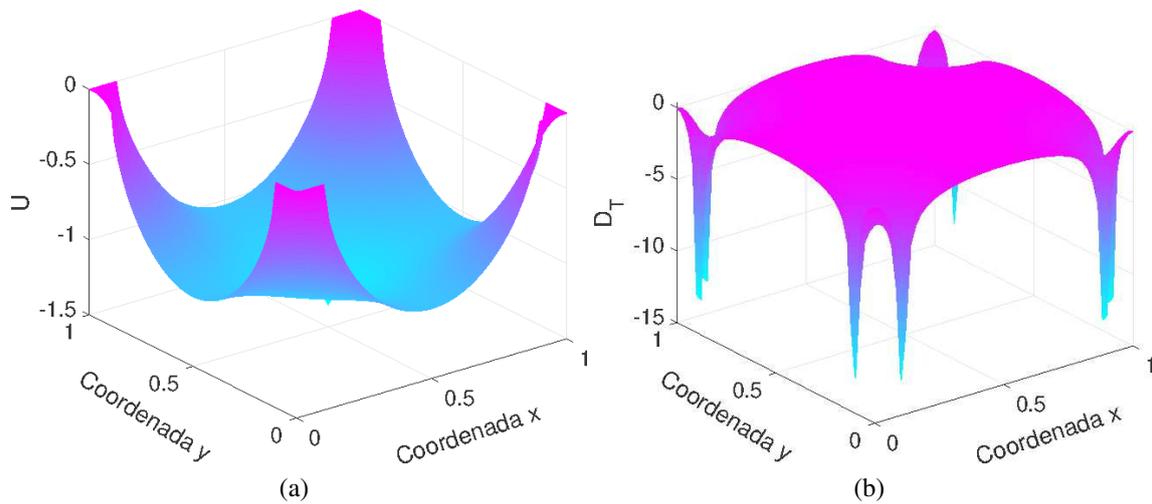


Figura 4.32 – (a) 1º modo de vibração; (b) Derivada Topológica para λ_0 .

Na Figura 4.32 é apresentado o gráfico do 1º modo de vibração e o gráfico da derivada topológica para λ_0 para o caso da massa concentrada $k = 0,01$ e penalty $\xi = 0,1$. Além disso, observa-se que é retirado material onde a derivada topológica assume os maiores valores.

Na figura 4.33 são apresentados os valores do ângulo θ em graus, para cada valor de ξ e massa concentrada considerado. É possível observar que nos primeiros refinamentos a rotina utilizou como critério de refinamento o valor de κ , enquanto que nos últimos refinamentos o critério utilizado para o refinamento foi o ângulo θ . Além disso, quanto maior o valor da massa concentrada, menos iterações foram necessárias.

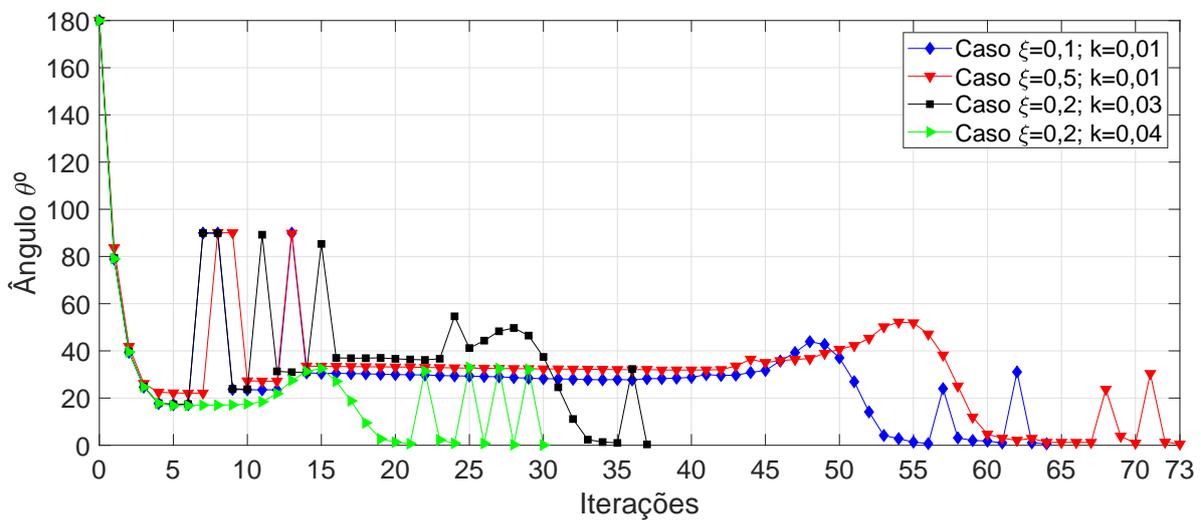


Figura 4.33 – Variação do ângulo θ para alguns valores de k e ξ .

Na figura 4.34 são apresentados os valores da fração de volume que foi mantido na geometria otimizada, para cada caso considerado. Observa-se que a quantidade do material mantido na geometria aumenta conforme o valor da massa concentrada aumenta.

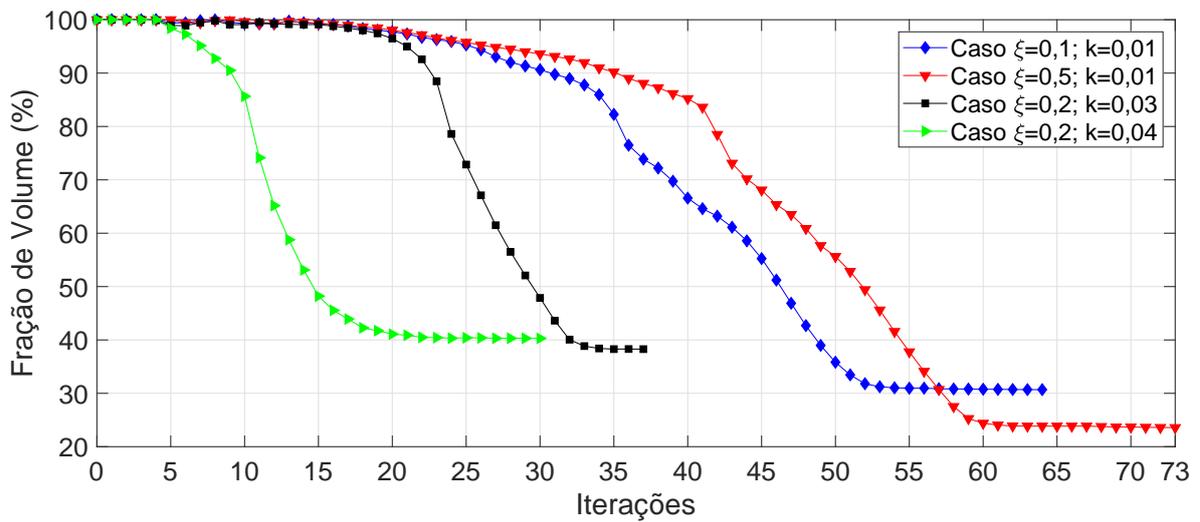


Figura 4.34 – Variação da fração de volume para $k = 0,03$.

Na figura 4.35 são apresentados os valores de λ_1 normalizado em função de λ_0 . Pode-se observar que, nos dois primeiros casos analisados, o valor de λ_1/λ_1^0 fica próximo de 2,75 enquanto que nos dois últimos casos se mantem próximo de 1,75.

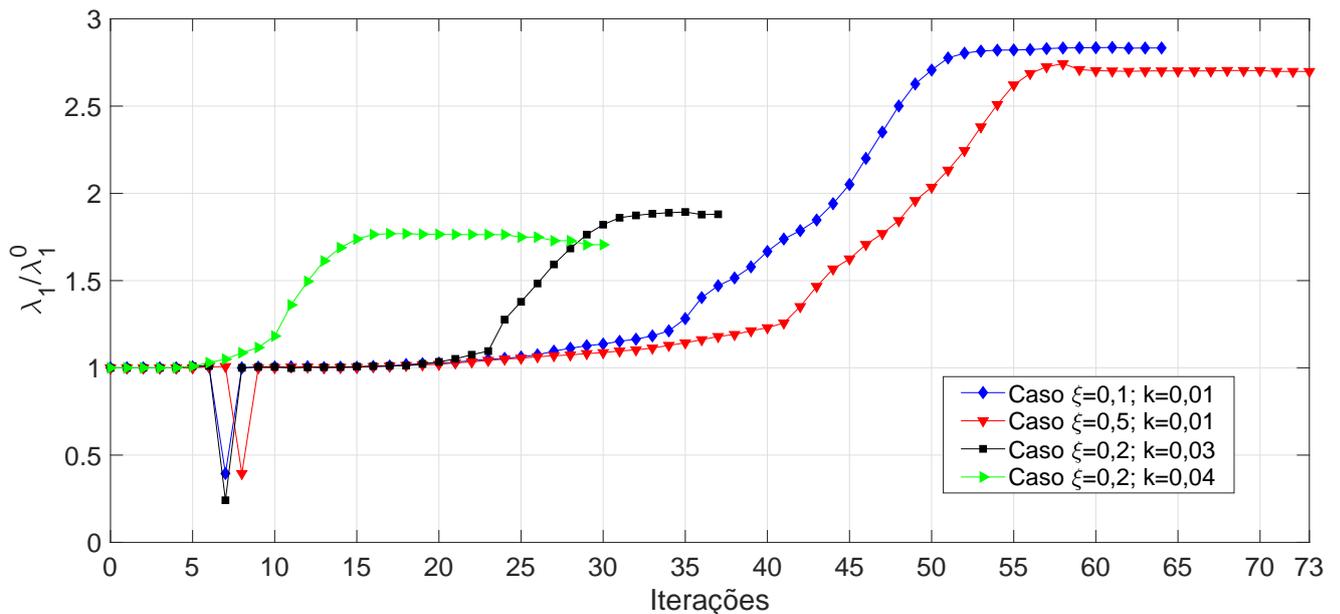


Figura 4.35 – Variação de λ_1/λ_1^0 para $k = 0,03$.

Na figura 4.36 são apresentados o quociente λ_1/λ_2 calculado em cada iteração. O objetivo desse gráfico é mostrar que λ_2 é sempre diferente de λ_1 , ou seja, o primeiro autovalor não tem repetição. Além disso, o quociente λ_1/λ_2 tende para valores entre 0,4 e 0,6 em todos os casos considerados.

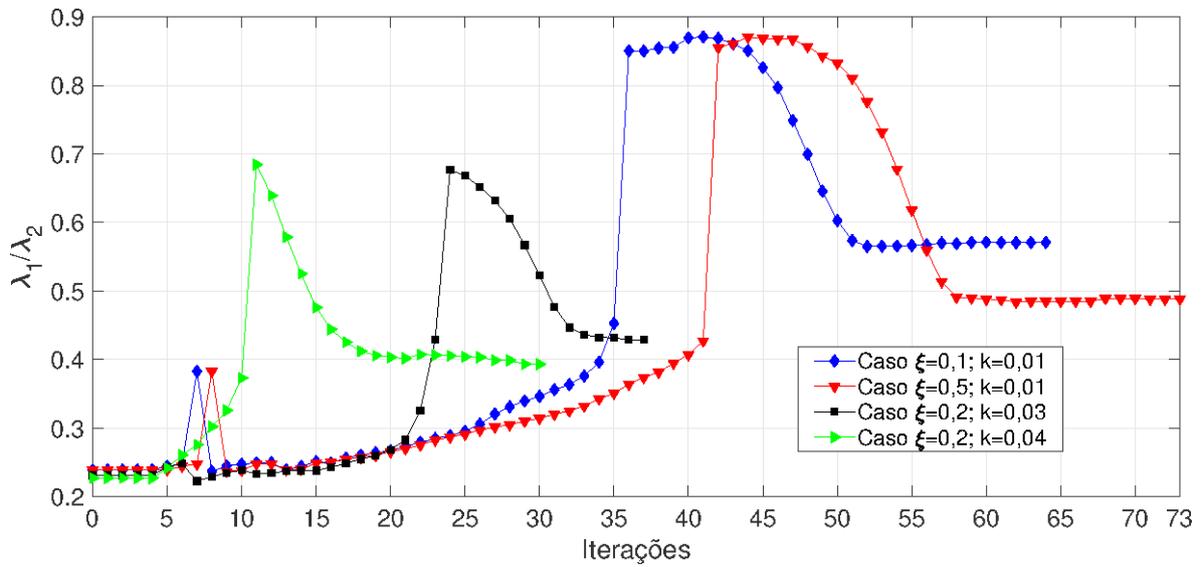


Figura 4.36 – Variação de λ_1/λ_2 para $k = 0,03$.

Na tabela 4.14 são apresentados os valores do volume final (VF) não retirado, primeiro autovalor normalizado (λ_1/λ_1^0), segundo autovalor normalizado em relação ao primeiro autovalor (λ_1/λ_2), ângulo final (θ°) e número de iterações (NI) para obter a geometria otimizada para cada um dos valores de ξ apresentado na tabela para a geometria inicial apresentada na Figura 4.10.

Tabela 4.14 – Valores finais para alguns valores de ξ e massa concentrada $k = 0,03$.

k	ξ	VF	λ_1/λ_0	λ_1/λ_2	ângulo final (θ°)	NI
0,01	0,1	30,6867%	2,8331	0,5707	0,6191°	64
0,1	0,5	23,5761%	2,6981	0,4881	0,5223°	73
0,03	0,2	38,2805%	1,8801	0,4286	0,3738°	37
0,04	0,2	40,2988%	1,7057	0,3932	0,0896°	30

Na figura 4.37 são apresentados os valores do ângulo θ , do volume e do parâmetro κ . A ideia deste gráfico é mostrar a relação entre essas três variáveis.

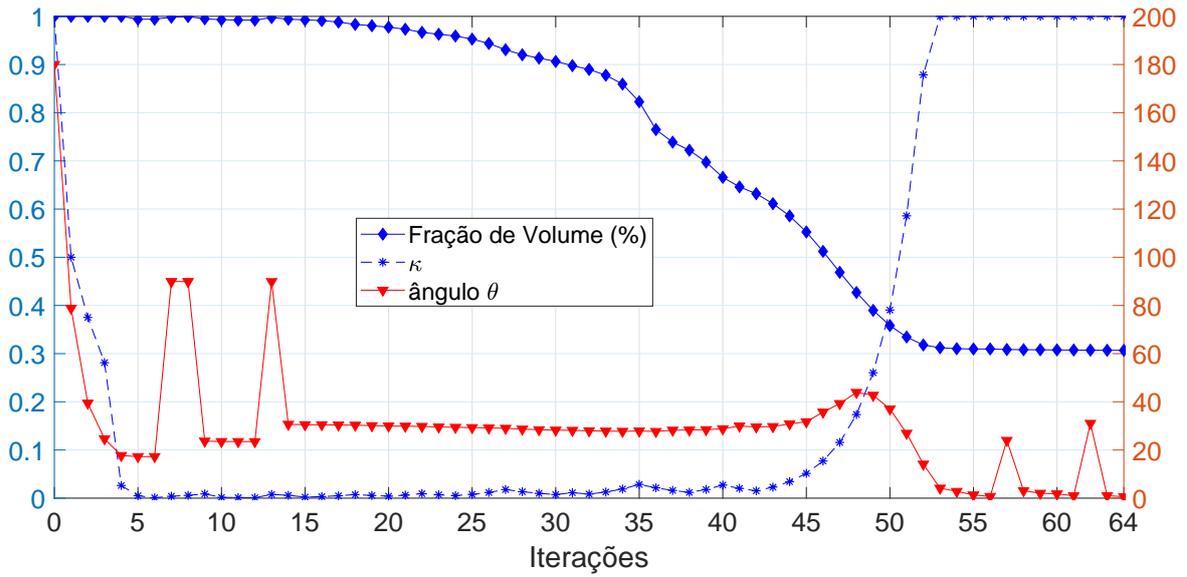


Figura 4.37 – Variação do ângulo θ , volume e κ para $\xi = 0, 1$ e $k = 0, 003$

Nas Figuras 4.38 e 4.39 são apresentadas a geometria inicial, a evolução da geometria durante o processo de iteração e a geometria final.

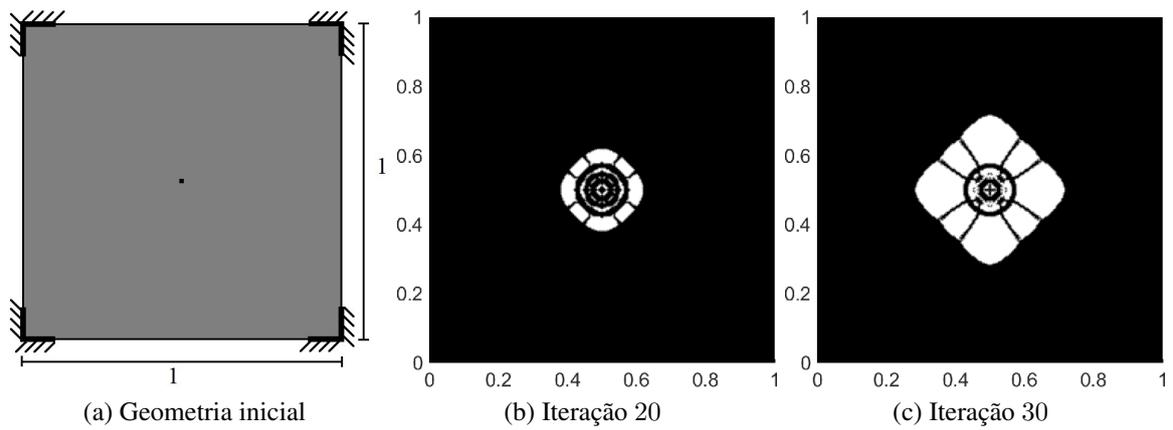


Figura 4.38 – Geometria inicial e evolução da topologia para $\xi = 0, 1$ e $k = 0, 01$

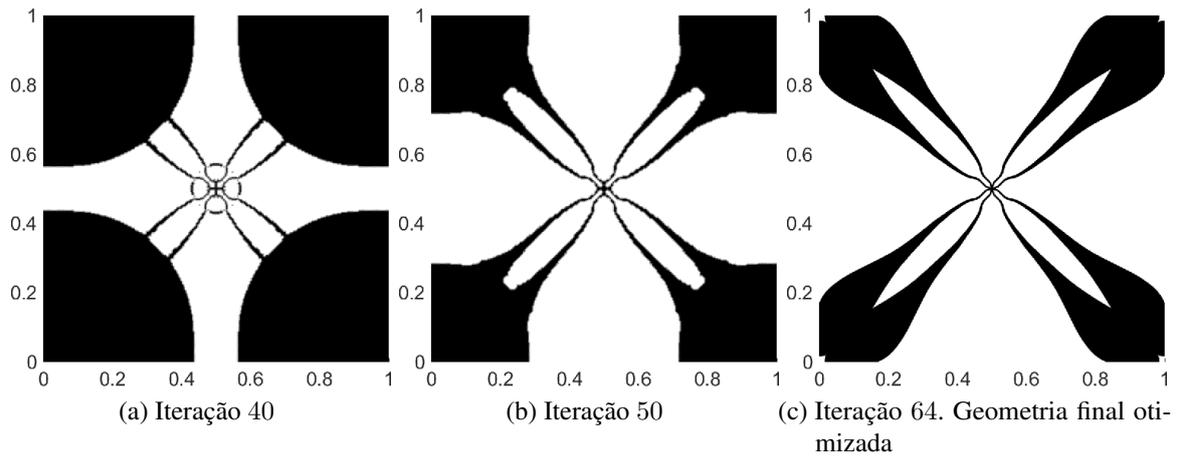


Figura 4.39 – Evolução da topologia e geometria final para $\xi = 0, 1$ e $k = 0, 01$

É possível observar nas Figuras 4.29 e E 4.30 que a rotina demora a tirar material, isso se deve ao fato de o valor da massa concentrada ser pequeno.

Na Figura 4.40 apresentamos a geometria otimizada para alguns valores de ξ e k .

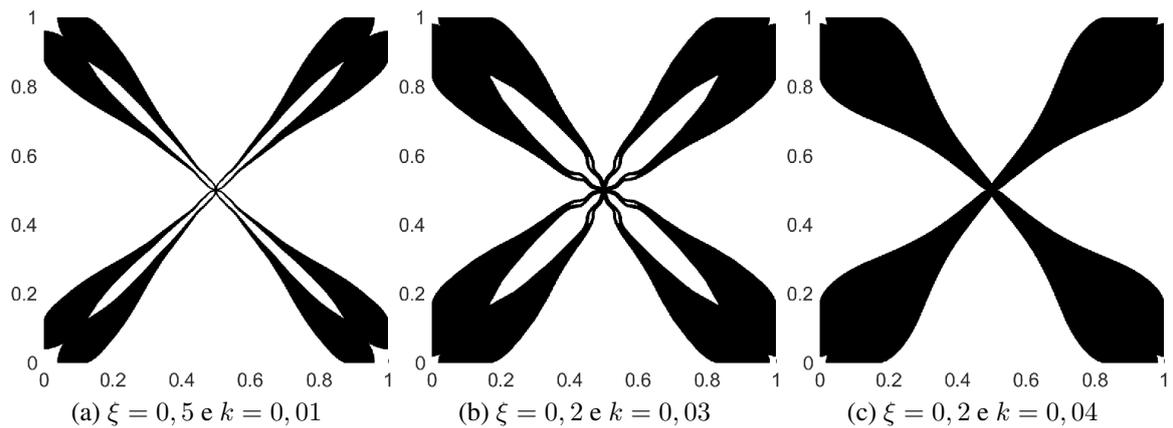


Figura 4.40 – Geometria otimizada para alguns valores de ξ e k

4.2 Problema de Difusão

Nos exemplos desta seção foi utilizada a Equação 3.152 para o cálculo da análise de sensibilidade topológica.

Alguns trabalhos recentes que estudam o problema de transferência de calor: Li et al., (2017); Lin et al., 2018; Subramaniam et al., (2018); Badenhorst, 2019

Exemplo 4.5 No domínio inicial (retângulo de lado unitário), as bordas (Γ_N) estão isoladas, exceto por uma região Γ_D de comprimento $m(\Gamma_D) = 0, 2$, posicionada no meio do lado esquerdo, na qual a temperatura é prescrita como $u = 273, 15 K$. Para o parâmetro de penalização foi considerado $\xi = 8$, a fonte de calor uniforme em toda a placa de $f = 10^4 W$ e $t = 1$. Para o

modelo de trocador de calor, utilizamos dois materiais distintos: um bom condutor térmico, o alumínio, cuja condutividade térmica é $k_1 = 205 \text{ W/mK}$ e um mal condutor ou isolante (neste caso a cerâmica cuja condutividade térmica é $k_2 = 4 \text{ W/mK}$) que tem a condutividade térmica controlada pelo contraste imposto $\gamma = 1,9024 \times 10^{-2}$. O domínio inicial é constituído apenas de alumínio e a região branca é preenchida com porcelana.

Tendo em vista a sensibilidade da problema e a capacidade da workstation utilizada, neste exemplo e nos próximos exemplos, é considerada uma malha inicial com 200 divisões em cada lado do quadrado e foram feitos 4 refinamentos na malha, o que gerou a seguinte quantidade de elementos e nós, conforme apresentado na Tabela 4.15.

Tabela 4.15 – Quantidade de elementos da malha

nº de divisões no lado	nº de elementos da malha	nº de nós
200	160.00	80.401
400	640.000	320.401
800	2.560.000	1.281.601
1.600	10.240.000	5.123.201
3.200	40.960.000	20.486.401

Na Tabela 4.16 são apresentados o volume do material bom condutor mantido (VOM), temperatura máxima na placa com os 2 materiais (TMG), temperatura máxima na placa considerando apenas o material bom condutor (TMBC) e o tempo gasto (TG) para as iterações (NI) apresentadas na Figura 4.43.

Tabela 4.16 – Volume não retirado, Temperatura na placa e Tempo Gasto

NI	VOM	TMG [K]	TMBC [K]	TG
15	38,00 %	415,57	372,02	2 minutos
44	23,70 %	411,65	382,13	6 minutos
58	22,74 %	406,31	386,75	11 minutos
72	22,11 %	405,35	387,52	18 minutos
136	21,78 %	405,01	391,03	1.346 minutos

Como é possível observar na Tabela 4.16 a variação da temperatura considerando os 2 materiais tende a se aproximar da temperatura do material bom condutor, ou seja, a geometria que a rotina encontra consegue escoar bem o calor produzido pela fonte constante ao qual a placa está submetida. Além disso, a variação do volume do material bom condutor entre as iterações 44, 58, 72 e 136 é pequena, mas o tempo gasto varia muito, principalmente entre as iterações 72 e 136. Sabemos que muitas vezes na resolução de problemas da engenharia o tempo computacional é uma variável muito importante e nesse caso, dependendo da necessidade, o critério de parada poderia ser revisto, considerando por exemplo o número de iterações ou a variação do volume de material bom condutor como critério de parada.

Na Figura 4.41 é apresentada a temperatura máxima que a placa atinge em cada iteração, considerando apenas a região onde está o material com boa condutividade térmica ou a placa

toda com os dois materiais. Assim, é possível observar que a diferença de temperatura máxima atingida na placa nas duas situações diminui conforme aumenta o número de iterações, ou seja, a geometria encontrada consegue fazer um bom escoamento do calor produzido pela fonte de calor e evitando que a placa tenha um problema de super aquecimento.

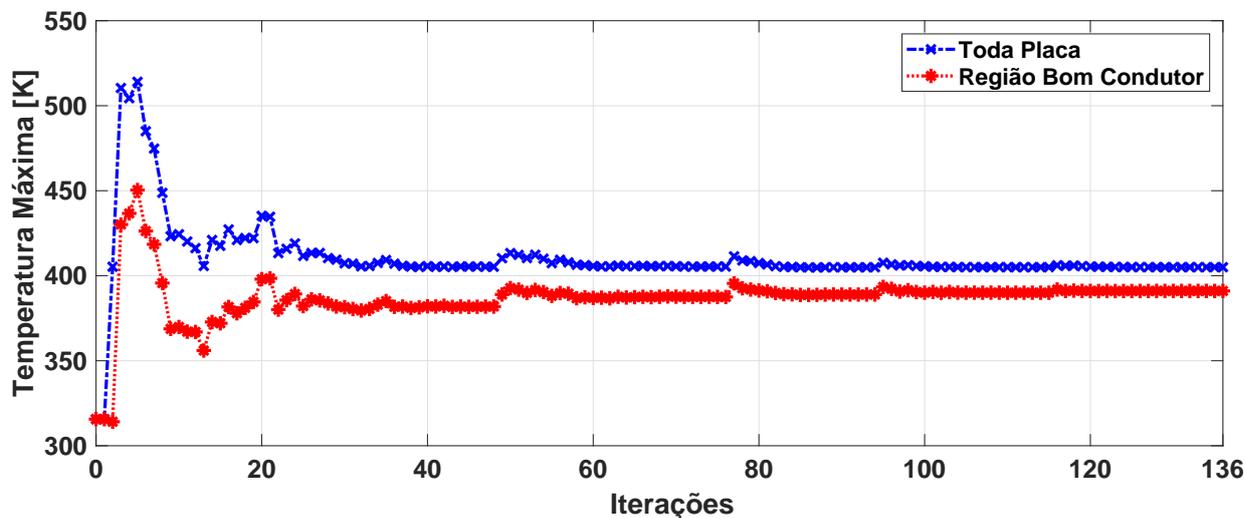


Figura 4.41 – Temperatura máxima na placa

Na Figura 4.42 é apresentada a temperatura inicial e da geometria otimizada. Podemos observar que a variação de temperatura na placa é bem suave, ou seja, a geometria construída pela rotina consegue transferir bem o calor.

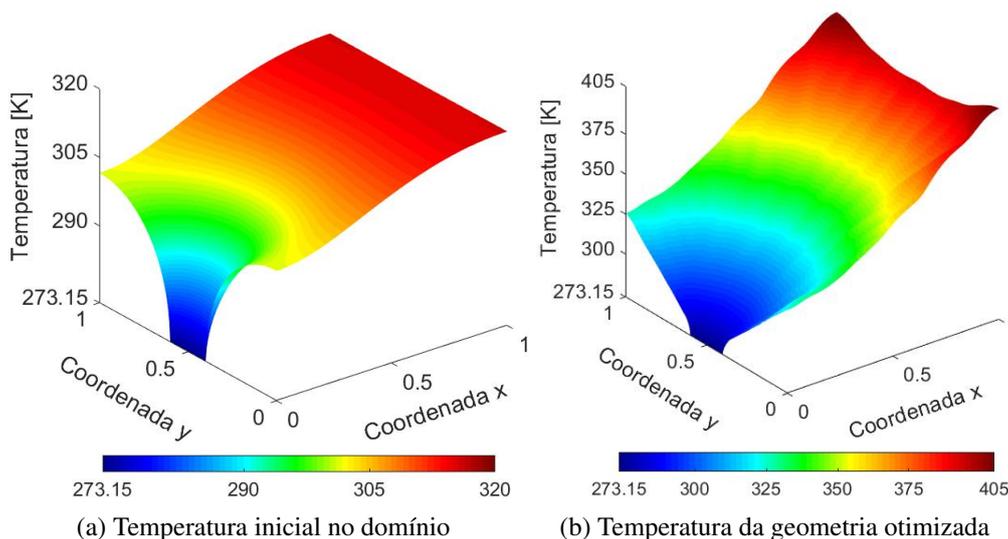


Figura 4.42 – Temperatura inicial e final

Na Figura 4.43 é apresentada a geometria inicial do problema, a evolução da geometria e a geometria final otimizada.

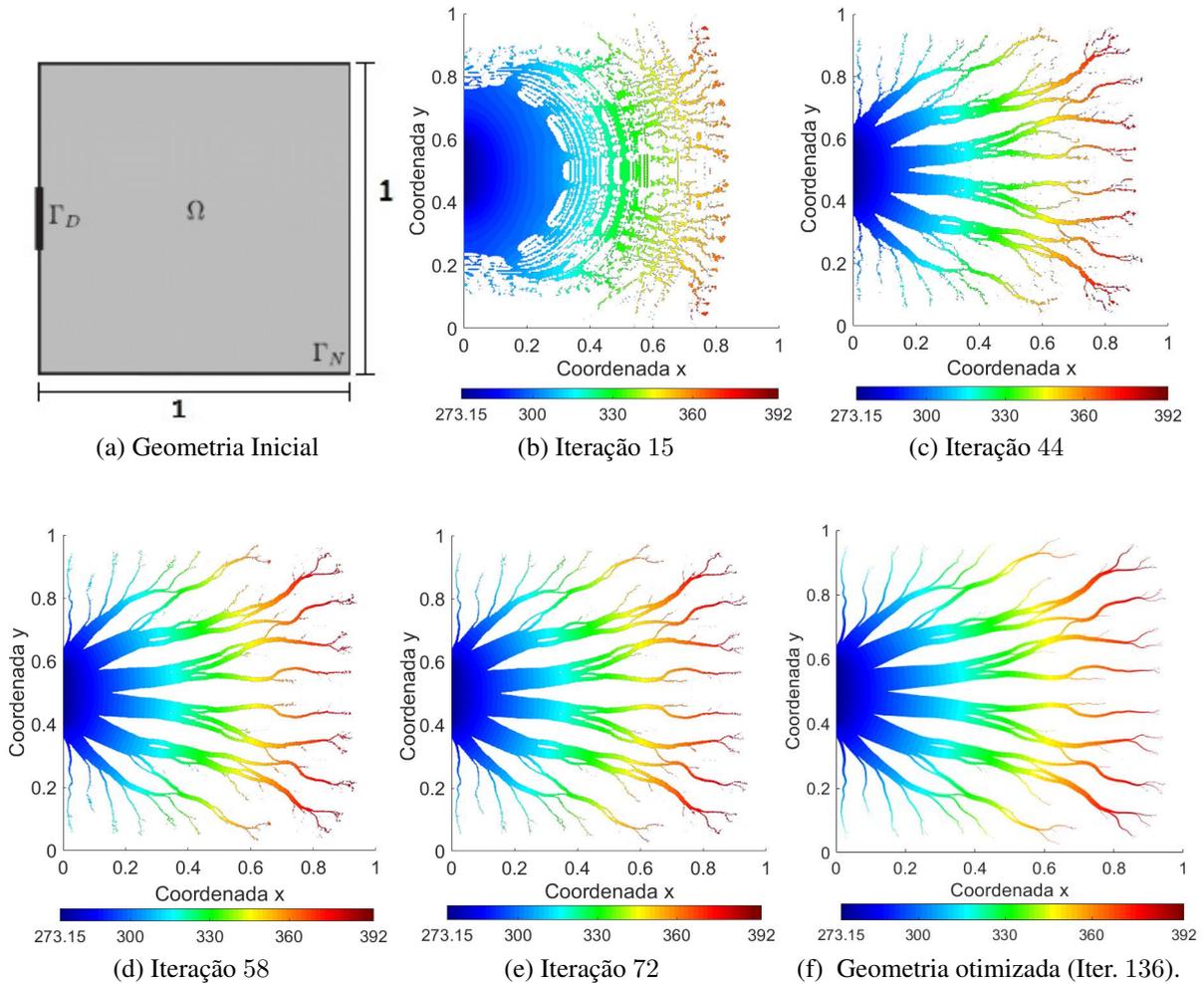


Figura 4.43 – Geometria inicial e Evolução da topologia

Observa-se na Figura 4.43 que, a partir da iteração 44, a geometria muda pouco, pois nesta iteração já aparecem as principais regiões onde a rotina não irá retirar o material.

Exemplo 4.6 Neste exemplo foi alterado apenas um dos materiais usados, trocando a porcelana pelo vidro cuja condutividade térmica é de $k_2 = 0,8 \text{ W/mK}$ e por consequência também muda o contraste na propriedade do material, que passa a ser de $\gamma = 3,9024 \times 10^{-3}$.

Na Tabela 4.17 são apresentados o volume do material bom condutor mantido (VOM), temperatura máxima na placa com os 2 materiais (TMG), Temperatura máxima na placa considerando apenas o material bom condutor (TMBC) e o tempo gasto (TG) para as iterações (NI) apresentadas na Figura 4.46.

Como pode ser observado na Tabela 4.17 a variação do volume do material bom condutor é pequena entre as iterações 130, 161, 197 e 236 é pequena, mas o tempo gasto varia muito, principalmente entre as iterações 161 e 236.

Tabela 4.17 – Volume não retirado, Temperatura na placa e Tempo Gasto

NI	VOM	TMG [K]	TMBC [K]	TG
10	73,68 %	423,96	348,12	1 minutos
71	38,53 %	380,72	372,36	7 minutos
130	30,51 %	395,84	392,97	45 minutos
161	27,88 %	406,78	404,51	119 minutos
197	26,94 %	403,20	400,94	500 minutos
236	26,06 %	399,29	397,37	2.451 minutos

Na Figura 4.44 é apresentada a temperatura máxima que a placa atinge em cada iteração, considerando um (bom condutor) ou dois (bom e mal condutor) materiais. Assim, podemos observar que a diferença de temperatura máxima atingida na placa nas duas situações diminui conforme aumenta o número de iterações.

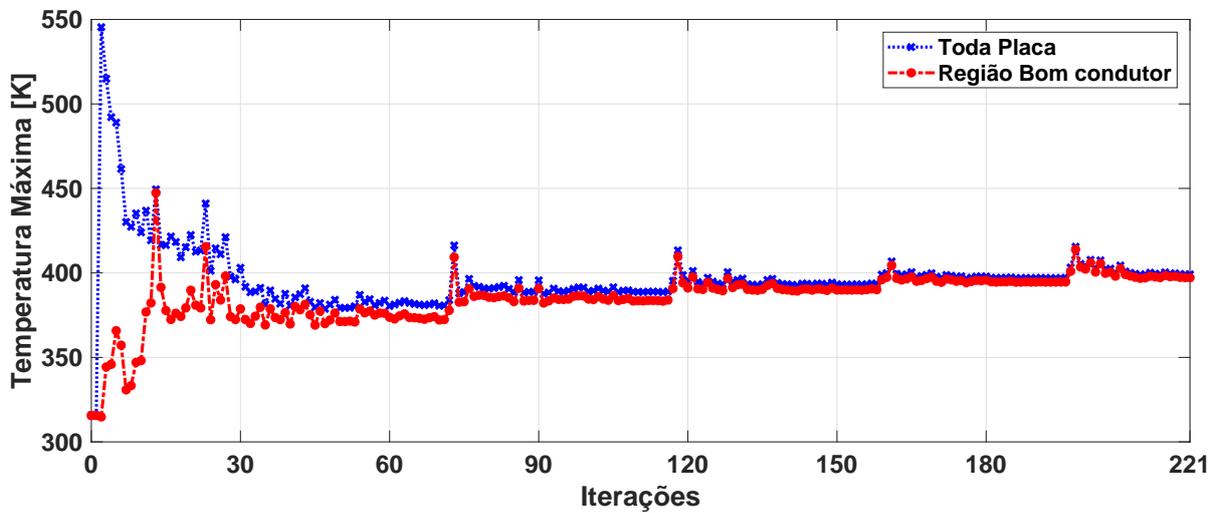


Figura 4.44 – Temperatura máxima na placa

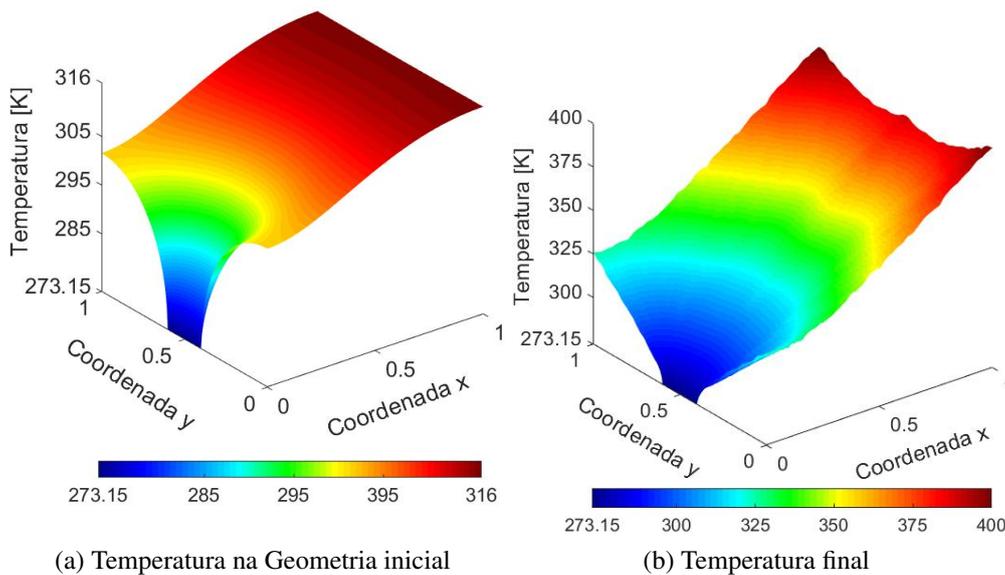


Figura 4.45 – Temperatura inicial e final.

Na Figura 4.45 é apresentada a temperatura na geometria inicial e da geometria otimizada. Pode-se observar que a variação de temperatura na placa é bem suave, ou seja, a geometria construída pela rotina consegue transferir bem o calor.

Na Figura 4.46 é apresentada a evolução da geometria e a geometria final otimizada.

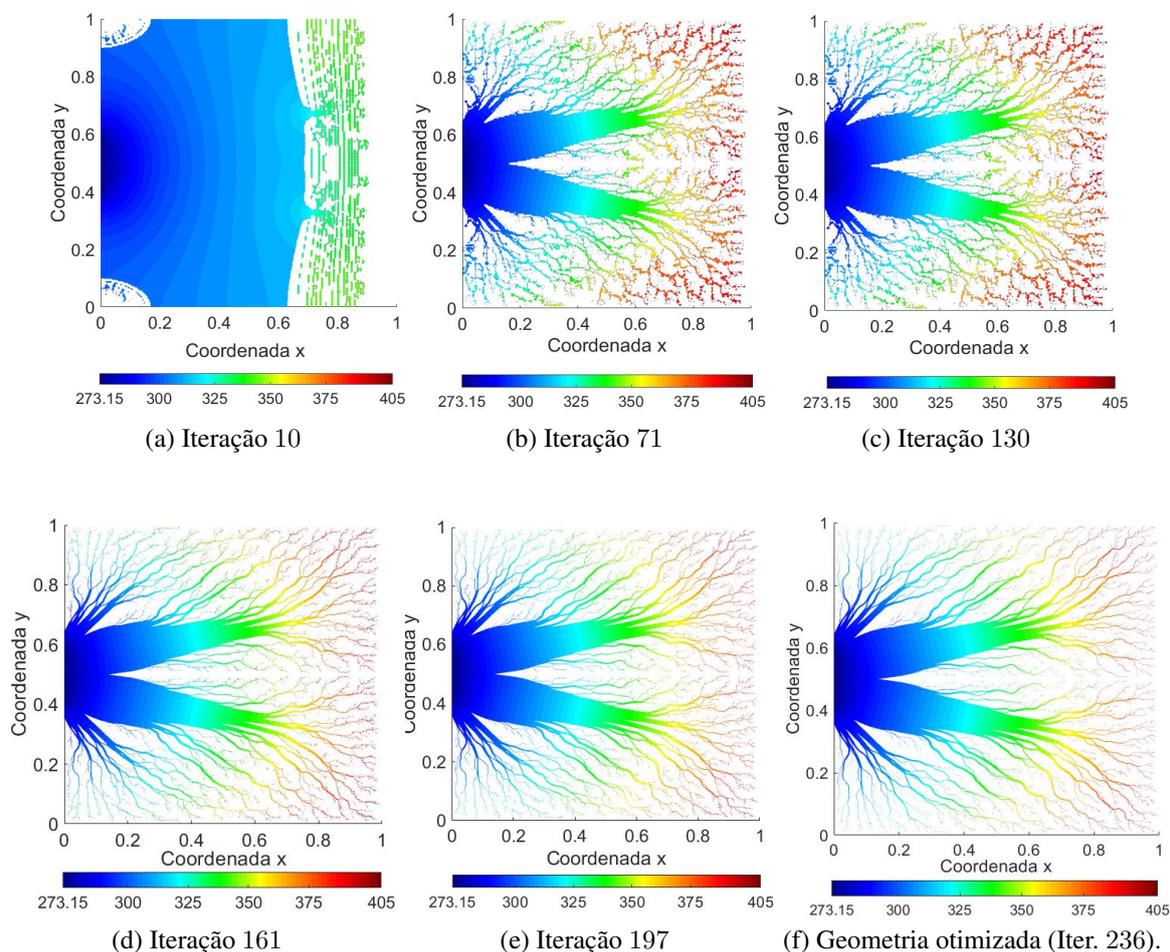


Figura 4.46 – Evolução da topologia

Pode ser observado que com a mudança do material isolante ou mal condutor (da cerâmica para o vidro) a geometria otimizada teve um maior perfilamento. Isso faz todo sentido, pois como o vidro não escoo o calor da mesma forma que a cerâmica, é necessária a presença do material bom condutor em mais partes.

5 Problema de Estruturas Sobre Apoio Elástico

Neste capítulo será calculada a derivada topológica do problema de estruturas sobre apoio elástico associada ao problema de elasticidade linear bidimensional em estado plano de tensões e deformações, considerando como perturbação topológica a nucleação de uma pequena inclusão. Além disso como aplicação deste problema, utiliza-se desta derivada para determinar a derivada topológica para o problema de estruturas em vibração livre.

5.1 Formulação do Problema

Nesta seção foi considerado o problema de estruturas sobre apoio elástico, cuja formulação é dada por: Encontre $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, tal que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha\sigma(\mathbf{u})) + \rho k\mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{em } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) = \mathbb{C}\nabla^s\mathbf{u} \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde as seguintes hipóteses adicionais foram consideradas:

- $\nabla^s\mathbf{u} = \frac{\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t}{2}$;
- \mathbb{C} é um tensor constitutivo de quarta ordem e simétrico dado por;

$$\mathbb{C} = 2\mu_l\mathbb{I} + \lambda_l\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (5.2)$$

em que \mathbf{I} e \mathbb{I} são os tensores identidade de segunda e quarta ordens, respectivamente, μ_l e λ_l são os coeficientes de Lamé, ambos considerados constantes em todo o domínio. Em particular, no caso do estado plano de tensões tem-se

$$\mu_l = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \lambda_l = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad (5.3)$$

enquanto que no caso do estado plano de deformações

$$\mu_l = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \lambda_l = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (5.4)$$

onde E é o módulo de elasticidade de Young e ν o coeficiente de Poisson.

Com isso a formulação fraca é dada por,

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U} : \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}, \quad (5.5)$$

onde,

$$\mathcal{U} := \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_D} = 0\}; \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2). \quad (5.6)$$

Ao considerar a mesma perturbação apresentada nas Tabelas 3.2 e 3.3, é possível definir o problema perturbado.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } \mathbf{u}_{\varepsilon}, \text{ tal que} \\ -\operatorname{div}(\alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon})) + \rho_{\varepsilon} k \mathbf{u}_{\varepsilon} = \mathbf{f}_{\varepsilon} \quad \text{em } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon}) = \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{u}_{\varepsilon} \\ \mathbf{u}_{\varepsilon} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\ \llbracket \mathbf{u}_{\varepsilon} \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_{\varepsilon}, \quad (5.7)$$

$$\text{onde } \nabla^s \mathbf{u}_{\varepsilon} = \frac{\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + (\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon})^t}{2}.$$

Com isso a formulação fraca é dada por,

$$\mathbf{u}_{\varepsilon} \in \mathcal{U} : \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \mathbf{u}_{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\eta} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}. \quad (5.8)$$

5.2 Existência da Derivada Topológica

Uma vez definidos o problema não perturbado (5.1) e o problema perturbado (5.7), é provada a existência da derivada topológica. Para isso, será demonstrado o lema a seguir.

Lema 5.1 *Seja u solução do Problema (5.1) e \mathbf{u}_{ε} solução do Problema (5.7). Então:*

$$\|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = O(\varepsilon). \quad (5.9)$$

Demonstração. Fazendo-se a diferença entre (5.8) e (5.5),

$$\underbrace{\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta}}_{L_4} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \mathbf{u}_{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}}_{L_5} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}}_{L_6}. \quad (5.10)$$

Desenvolvendo L_4 , L_5 e L_6 , obtém-se

$$\begin{aligned} L_4 &= \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{B_{\varepsilon}} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} \\ &\quad - \int_{B_{\varepsilon}} \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} \pm \int_{B_{\varepsilon}} \gamma \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{B_{\varepsilon}} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
L_5 &= \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \mathbf{u}_{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} \\
&= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho_{\varepsilon} k \mathbf{u}_{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\eta} + \int_{B_{\varepsilon}} \rho_{\varepsilon} k \mathbf{u}_{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_{B_{\varepsilon}} \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} \pm \int_{B_{\varepsilon}} \gamma \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} \\
&= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho_{\varepsilon} k (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} + \int_{B_{\varepsilon}} \rho_{\varepsilon} k (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} \\
&= \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$L_6 = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}. \tag{5.13}$$

Agora, ao substituir L_4 , L_5 e L_6 em (5.10), tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \\
&\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

e ao considerar $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \nabla(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|^2 = \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \\
&\quad + \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Mas, usando a desigualdade Cauchy-Schwarz, o fato de \mathbf{u} ser Lipschitz contínua e $\mathbf{L}^2(B_{\varepsilon}) = \mathbf{L}^2(B_{\varepsilon}; \mathbb{R}^2)$, tem-se

$$\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \leq c_1 \|\sigma(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(B_{\varepsilon})} \|\nabla^s(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(B_{\varepsilon})} \leq c_1 \varepsilon \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \tag{5.16}$$

$$\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \leq c_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_{\varepsilon})} \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_{\varepsilon})} \leq c_2 \varepsilon \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \tag{5.17}$$

$$\int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \leq c_3 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(B_{\varepsilon})} \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_{\varepsilon})} \leq c_3 \varepsilon \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \tag{5.18}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|^2 \leq c_4 \varepsilon \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \tag{5.19}$$

Por outro lado, ao usar a coercividade, obtém-se

$$\alpha \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|^2. \tag{5.20}$$

Por último, foi substituído (5.19) em (5.20), o que resultou em:

$$\alpha \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq c_4 \varepsilon \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \tag{5.21}$$

que conduz ao resultado

$$\|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \varepsilon. \tag{5.22}$$

□

5.3 Cálculo da Derivada Topológica

Teorema 5.1 Considerando os funcionais de forma

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2 \quad e \quad \mathcal{G}_{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2, \quad (5.23)$$

onde \mathbf{u} é solução de (5.1) e \mathbf{u}_{ε} é solução de (5.7), então a derivada topológica de \mathcal{G} é dado por:

$$\mathcal{D}_T \mathcal{G} = -2\mathbb{P}\alpha\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla q - k\rho(1-\gamma)\mathbf{u} \cdot [\mathbf{u} + \mathbf{q}] + (1-\gamma)\mathbf{q} \cdot \mathbf{f} \quad (5.24)$$

onde q solução do problema adjunto

$$\mathbf{q} \in \mathcal{U} : \int_{\Omega} \alpha\sigma(\mathbf{q}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{\Omega} \rho k \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta} = -2 \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}, \quad (5.25)$$

e \mathbb{P} é um tensor de quarta ordem.

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2} \frac{1-\gamma}{1+\gamma\delta_2} \left((1-\delta_2)\mathbb{I} + \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2) \frac{1-\gamma}{1+\gamma\delta_1} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \quad (5.26)$$

onde δ_1 e δ_2 são dados por:

$$\delta_1 = \frac{\mu_l + \lambda_l}{\mu_l} \quad \delta_2 = \frac{3\mu_l + \lambda_l}{\mu_l + \lambda_l}. \quad (5.27)$$

Demonstração. Fazendo-se a diferença entre os funcionais apresentados em (5.23) e considerando-se a igualdade apresentada em (3.24) para u vetorial, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) - \mathcal{G}(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2 \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{B_{\varepsilon}} \rho k \gamma \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2 \pm \int_{B_{\varepsilon}} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{B_{\varepsilon}} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2 + \int_{B_{\varepsilon}} \rho k \gamma \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \int_{B_{\varepsilon}} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 \\ &= \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2 + \int_{B_{\varepsilon}} \rho k \gamma \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \int_{B_{\varepsilon}} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 \\ &= \int_{\Omega} \rho k (\|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2) + \int_{B_{\varepsilon}} (\gamma - 1) \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 \\ &= \underbrace{2 \int_{\Omega} \rho k (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}}_{D_1} - \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} (1-\gamma) \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2}_{D_2} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|^2}_{\mathcal{E}_1(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para D_2 , tem-se:

$$\begin{aligned} D_2 &= \int_{B_{\varepsilon}} (1-\gamma) \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 = \int_{B_{\varepsilon}} (1-\gamma) \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u} + \mathbf{u}\|^2 \\ &= \int_{B_{\varepsilon}} (1-\gamma) \rho k \|\mathbf{u}\|^2 + \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} (1-\gamma) \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|^2}_{\mathcal{E}_2(\varepsilon)} + 2 \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} (1-\gamma) \rho k (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}}_{\mathcal{E}_3(\varepsilon)} \\ &= \int_{B_{\varepsilon}} (1-\gamma) \rho k \|\mathbf{u}(\hat{x})\|^2 + \underbrace{\int_{B_{\varepsilon}} (1-\gamma) \rho k \|\mathbf{u}\|^2 - (1-\gamma) \rho k \|\mathbf{u}(\hat{x})\|^2}_{\mathcal{E}_4(\varepsilon)} + \mathcal{E}_2(\varepsilon) + \mathcal{E}_3(\varepsilon) \\ &= (1-\gamma) \pi \varepsilon^2 \rho k \|\mathbf{u}(\hat{x})\|^2 + \sum_2^4 \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{q}) \cdot \nabla^s(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \alpha \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{q} \cdot \nabla^s(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \alpha \nabla^s \mathbf{q} \cdot \mathbb{C}^T \nabla^s(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \\ &= \int_{\Omega} \alpha \nabla^s \mathbf{q} \cdot \mathbb{C} \nabla^s(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

e considerando-se $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}$ em (5.25), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{q}) \cdot \nabla^s(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) + \int_{\Omega} \rho k(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{q} &= -2 \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \\ \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q} + \int_{\Omega} \rho k(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{q} &= -2 \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Por outro lado, pode-se observar que (5.14) é igual a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} &= \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (5.32)$$

e fazendo-se $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{q}$ em (5.32), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q} + \int_{\Omega} \rho k(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{q} &= \\ \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q} + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{q} - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Agora vale destacar que o lado esquerdo de (5.31) e (5.33) são iguais, e o lado direito de (5.31) é igual a $-D_1$. Dessa forma,

$$D_1 = - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q}}_{D_3} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{q}}_{D_4} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{q}}_{D_5}. \quad (5.34)$$

Para D_4 e D_5 tem-se:

$$\begin{aligned} D_4 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{q} = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{q}}_{\mathcal{E}_6(\varepsilon)} \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{q})(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} - (1 - \gamma) \rho k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{q})(\hat{x})}_{\mathcal{E}_7(\varepsilon)} + \mathcal{E}_6(\varepsilon) \\ &= (1 - \gamma) \rho k \pi \varepsilon^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q})(\hat{x}) + \mathcal{E}_6(\varepsilon) + \mathcal{E}_7(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} D_5 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) (\mathbf{f} \cdot \mathbf{q})(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{q} - (1 - \gamma) (\mathbf{f} \cdot \mathbf{q})(\hat{x})}_{\mathcal{E}_5(\varepsilon)} \\ &= (1 - \gamma) \pi \varepsilon^2 (\mathbf{f} \cdot \mathbf{q})(\hat{x}) + \mathcal{E}_5(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Ao substituir (5.35) e (5.36) em (5.34),

$$\begin{aligned} D_1 &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q} \\ &\quad - (1 - \gamma) \rho k \pi \varepsilon^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q})(\hat{x}) + (1 - \gamma) \pi \varepsilon^2 (\mathbf{f} \cdot \mathbf{q})(\hat{x}) + \sum_{i=5}^7 \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Dando continuidade, substituí-se (5.37) e (5.29) em (5.24),

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) - \mathcal{G}(\mathbf{u}) &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha\sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q} - (1 - \gamma)\rho k \pi \varepsilon^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q})(\hat{x}) \\ &\quad + (1 - \gamma)\pi \varepsilon^2 (\mathbf{f} \cdot \mathbf{q})(\hat{x}) - (1 - \gamma)\pi \varepsilon^2 \rho k \|\mathbf{u}(\hat{x})\|^2 + \sum_{i=1}^7 \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Para calcular D_3 utiliza-se um *ansatz* para a expansão de \mathbf{u}_ε ,

$$\mathbf{u}_\varepsilon(x) = \mathbf{u}(x) + \mathbf{w}_\varepsilon(x) + \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(x), \quad (5.39)$$

onde u é solução de (5.1), \mathbf{w}_ε é solução do problema exterior e $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ é um resíduo.

Com isso pode-se escrever D_3 da seguinte forma,

$$\begin{aligned} D_3 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha\sigma(\mathbf{u} + \mathbf{w}_\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(x)) \cdot \nabla^s \mathbf{q} \\ &= \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q}}_{D_6} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q}}_{D_7} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha\sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q}}_{\mathcal{E}_8(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Dai,

$$\begin{aligned} D_6 &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q} \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x}) \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q} - (1 - \gamma)\alpha(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x})}_{\mathcal{E}_9(\varepsilon)} \\ &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma)\alpha(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x}) + \mathcal{E}_9(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Para determinar D_7 substituí-se (5.39) em (5.7).

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\{\alpha_\varepsilon\sigma[\mathbf{u} + \mathbf{w}_\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon]\} + \rho_\varepsilon k[\mathbf{u} + \mathbf{w}_\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon] &= \mathbf{f}_\varepsilon \\ \underbrace{-\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon\sigma(\mathbf{u})) + \rho_\varepsilon k\mathbf{u} - \mathbf{f}_\varepsilon}_{D_8} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon)) - \operatorname{div}[\alpha_\varepsilon\sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)] + \rho_\varepsilon k\mathbf{w}_\varepsilon + \rho_\varepsilon k\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Reescrevendo os termos de D_8 ,

$$D_8 = \begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha\sigma(\mathbf{u})) + \rho k\mathbf{u} - \mathbf{f} & \text{se } x \in \Omega \setminus B_\varepsilon \\ -\gamma\operatorname{div}(\alpha\sigma(\mathbf{u})) + \gamma k\mathbf{u} - \gamma\mathbf{f} & \text{se } x \in B_\varepsilon. \end{cases} \quad (5.43)$$

Logo $D_8 = 0$ por (5.1). Assim (5.42) pode ser escrito como:

$$-\operatorname{div}[\alpha_\varepsilon\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon)] - \operatorname{div}[\alpha_\varepsilon\sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)] + \rho_\varepsilon k\mathbf{w}_\varepsilon + \rho_\varepsilon k\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = 0. \quad (5.44)$$

Também pode-se calcular o salto de $\llbracket \rho_\varepsilon\sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \rrbracket \mathbf{n}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \llbracket \alpha_\varepsilon\sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \rrbracket \cdot \mathbf{n} = (\gamma - 1)\alpha\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + \llbracket \alpha_\varepsilon\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \rrbracket \cdot \mathbf{n} + \llbracket \alpha_\varepsilon\sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \rrbracket \cdot \mathbf{n} \\ &= (\gamma - 1)\alpha\sigma(\mathbf{u})(\hat{x}) \cdot \mathbf{n} - (1 - \gamma)\alpha[\nabla\sigma(\mathbf{u}(y))(x - \hat{x})\mathbf{n}]_{\partial B_\varepsilon} + \llbracket \alpha_\varepsilon\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \rrbracket \cdot \mathbf{n} + \llbracket \alpha_\varepsilon\sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \rrbracket \cdot \mathbf{n} \\ &= (\gamma - 1)\alpha\sigma(\mathbf{u})(\hat{x}) \cdot \mathbf{n} - \varepsilon(1 - \gamma)\alpha\{[\nabla\sigma(\mathbf{u}(y))\mathbf{n}]\mathbf{n}\} + \llbracket \alpha_\varepsilon\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \rrbracket \cdot \mathbf{n} + \llbracket \alpha_\varepsilon\sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \rrbracket \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Agora, utilizando (5.44) e (5.45), pode-se montar o problema exterior quando $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$P_3 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } \alpha_\varepsilon \nabla^s \mathbf{w}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\text{div}(\alpha_\varepsilon \sigma(\mathbf{w}_\varepsilon)) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}, \\ \mathbf{w}_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando } \|x\| \rightarrow \infty \\ \llbracket \mathbf{w}_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_\varepsilon \sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \rrbracket \mathbf{n} = \hat{u} \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \quad (5.46)$$

onde $\hat{u} = (1 - \gamma)\rho[\sigma(\mathbf{u})(\hat{x})]\mathbf{n}$.

O problema de valor de contorno acima admite uma *solução explícita* (ver Little (1973)), o qual pode ser escrito no sistema de coordenadas polares (r, θ) centrado no ponto \hat{x} como:

Para $r \geq \varepsilon$ (fora da inclusão)

$$\sigma^{rr}(w_{\varepsilon\varepsilon}(r, \theta)) = -\psi_1 \left(\frac{1 - \gamma \varepsilon^2}{1 + \gamma\alpha r^2} \right) - \psi_2 \left(4 \frac{1 - \gamma \varepsilon^2}{1 + \gamma\beta r^2} + 3 \frac{1 - \gamma \varepsilon^4}{1 + \gamma\beta r^4} \right) \cos 2\theta, \quad (5.47)$$

$$\sigma^{\theta\theta}(w_{\varepsilon\varepsilon}(r, \theta)) = \psi_1 \left(\frac{1 - \gamma \varepsilon^2}{1 + \gamma\alpha r^2} \right) - \psi_2 \left(3 \frac{1 - \gamma \varepsilon^4}{1 + \gamma\beta r^4} \right) \cos 2\theta, \quad (5.48)$$

$$\sigma^{r\theta}(w_{\varepsilon\varepsilon}(r, \theta)) = -\psi_2 \left(2 \frac{1 - \gamma \varepsilon^2}{1 + \gamma\beta r^2} - 3 \frac{1 - \gamma \varepsilon^4}{1 + \gamma\beta r^4} \right) \sin 2\theta. \quad (5.49)$$

Para $0 < r < \varepsilon$ (no interior da inclusão)

$$\sigma^{rr}(w_{\varepsilon\varepsilon}(r, \theta)) = \psi_1 \left(\gamma\alpha \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma\alpha} \right) + \psi_2 \left(\gamma\beta \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma\beta} \right) \cos 2\theta, \quad (5.50)$$

$$\sigma^{\theta\theta}(w_{\varepsilon\varepsilon}(r, \theta)) = \psi_1 \left(\gamma\alpha \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma\alpha} \right) - \psi_2 \left(\gamma\beta \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma\beta} \right) \cos 2\theta, \quad (5.51)$$

$$\sigma^{r\theta}(w_{\varepsilon\varepsilon}(r, \theta)) = -\psi_2 \left(\gamma\beta \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma\beta} \right) \sin 2\theta, \quad (5.52)$$

onde os coeficientes ψ_1 e ψ_2 são dados por

$$\psi_1 = \frac{1}{2}[\sigma_1(u(\hat{u})) + \sigma_2(u(\hat{u}))] \quad \psi_2 = \frac{1}{2}[\sigma_1(u(\hat{u})) - \sigma_2(u(\hat{u}))], \quad (5.53)$$

em que $\sigma_1(u(\hat{u}))$ e $\sigma_2(u(\hat{u}))$ são os autovalores do tensor $\sigma(u(\hat{u}))$, que podem ser expressos como

$$\sigma_{1,2}(u(\hat{u})) = \frac{1}{2} \left(\text{tr } \sigma(u(\hat{u})) \pm \sqrt{2\sigma^D(u(\hat{u})) \cdot \sigma^D(u(\hat{u}))} \right), \quad (5.54)$$

com $\sigma^D(u(\hat{u}))$ usado para denotar a parte desviadora do tensor tensão $\sigma(u(\hat{u}))$, ou seja

$$\sigma^D(u(\hat{u})) = \sigma(u(\hat{u})) - \frac{1}{2} \text{tr } \sigma(u(\hat{u})) \mathbf{I}. \quad (5.55)$$

Finalmente, $\sigma^{rr}(\mathbf{u}_\varepsilon)$, $\sigma^{\theta\theta}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ e $\sigma^{r\theta}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ são componentes do tensor $\sigma(\mathbf{u}_\varepsilon)$ no sistema de coordenadas polares, ou seja,

$$\sigma^{rr}(\mathbf{u}_\varepsilon) = e^r \cdot \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) e^r, \quad \sigma^{\theta\theta}(\mathbf{u}_\varepsilon) = e^\theta \cdot \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) e^\theta, \quad \sigma^{r\theta}(\mathbf{u}_\varepsilon) = e^r \cdot \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) e^\theta. \quad (5.56)$$

com e^r e e^θ usados para denotar a base canônica associada ao sistema de coordenadas polares (r, θ) , tal que, $\|e^r\| = \|e^\theta\| = 1$ e $e^r \cdot e^\theta = 0$.

Agora pode-se construir $\nabla \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ de tal forma que ficam compensadas as discrepâncias introduzidas por termos de ordem superior em ε , bem como pela camada limite ∇w_ε na fronteira exterior Ω_ε . Isto significa que o *resíduo* $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ deve ser solução para o seguinte problema de valor de contorno:

$$P_4 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)) = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) = \mathbb{C} \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \\ \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = -\mathbf{w}_\varepsilon \quad \text{em } \partial\Omega \\ \llbracket \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \rrbracket \mathbf{n} = \varepsilon g \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \quad (5.57)$$

onde $g = (1 - \gamma)\rho[\nabla\sigma(\mathbf{u}(y))\mathbf{n}]\mathbf{n}$.

Será demonstrado no Lema 5.3 que o resíduo, apresentado no problema acima, possui uma estimativa na forma $\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$.

Agora usando (5.50), (5.51) e (5.52) pode-se estimar D_7

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q} &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q} \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha(\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x}) = \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha(\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\alpha[\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q} - (\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x})]}_{\mathcal{E}_{10}(\varepsilon)} \\ &= \pi\varepsilon^2\alpha\mathbb{T}(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x}) + \mathcal{E}_{10}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.58)$$

onde o tensor \mathbb{T} é dado por

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2} \frac{\gamma(1 - \gamma)}{1 + \gamma\beta} \left(2\beta\mathbb{I} + \frac{\alpha - \beta}{1 + \gamma\alpha} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right). \quad (5.59)$$

Dando continuidade, substituí-se (5.41) e (5.59) em (5.40)

$$\begin{aligned} D_3 &= \pi\varepsilon^2(1 - \gamma)\alpha(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x}) + \pi\varepsilon^2\alpha\mathbb{T}(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x}) + \sum_{i=9}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon) \\ &= \pi\varepsilon^2\alpha\mathbb{P}(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x}) + \sum_{i=8}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Finalmente, substituí-se (5.60) em (5.38)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) - \mathcal{G}(\mathbf{u}) &= -\pi\varepsilon^2\alpha\mathbb{P}(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q})(\hat{x}) - (1 - \gamma)\rho k\pi\varepsilon^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{q})(\hat{x}) \\ &\quad + (1 - \gamma)\pi\varepsilon^2(\mathbf{f} \cdot \mathbf{q})(\hat{x}) - (1 - \gamma)\pi\varepsilon^2\rho k\|\mathbf{u}(\hat{x})\|^2 + \sum_{i=1}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Portanto, ao considerar que $f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$, pode-se concluir que a derivada topológica de \mathcal{G} é dado por,

$$D_T \mathcal{G} = -2\mathbb{P}\alpha\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{q} - (1 - \gamma)\rho k\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{q}) + (1 - \gamma)\mathbf{f} \cdot \mathbf{q}. \quad (5.62)$$

□

Teorema 5.2 Considerando os funcionais de forma

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u}, \quad e \quad \mathcal{J}_{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla^s \mathbf{u}_{\varepsilon}, \quad (5.63)$$

onde u é solução de (5.1) e \mathbf{u}_{ε} é solução de (5.7) então a derivada topológica de \mathcal{J} é dado por:

$$\mathcal{D}_T \mathcal{J} = -2\alpha \mathbb{P} \sigma(\mathbf{u}) \cdot [\nabla^s \mathbf{u} + \nabla^s \mathbf{p}] - k\rho(1 - \gamma(x))\mathbf{u} \cdot \mathbf{q} + (1 - \gamma)\mathbf{q} \cdot \mathbf{f}, \quad (5.64)$$

onde p solução do problema adjunto

$$\mathbf{p} \in \mathcal{U} : \quad \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{p}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{\Omega} \rho k \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta} = -2 \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}, \quad (5.65)$$

e \mathbb{P} é um tensor de quarta ordem apresentado em (5.26).

Demonstração. Ao considerar $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}$ em (5.5) e $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_{\varepsilon}$ em (5.8) tem-se:

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2, \quad (5.66)$$

$$\mathcal{J}_{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \alpha_{\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla^s \mathbf{u}_{\varepsilon} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon} - \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2. \quad (5.67)$$

Logo,

$$\mathcal{J}_{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) - \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}_{F_1} - \underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2}_{F_2}. \quad (5.68)$$

Agora desenvolvendo F_1 ,

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon} + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \pm \int_{B_{\varepsilon}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon} \pm \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \\ &= 2 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Para determinar F_2 é considerado a igualdade (3.24) para \mathbf{u} vetorial, assim segue que:

$$\begin{aligned} -F_2 &= \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2 \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 + \int_{B_{\varepsilon}} \gamma \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2 \pm \int_{B_{\varepsilon}} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 \\ &= \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2 - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 \\ &= \int_{\Omega} \rho k (\|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2) - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2 \\ &= 2 \int_{\Omega} \rho k (\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}\|^2}_{\mathcal{E}_{11}(\varepsilon)} - \int_{B_{\varepsilon}} (1 - \gamma) \rho k \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|^2. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Portanto, substituindo-se (5.69) e (5.70) em (5.68) tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) - \mathcal{J}(\mathbf{u}) &= \underbrace{2 \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) - 2 \int_\Omega \rho k (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}}_{F_3} - \underbrace{\int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u})}_{F_4} \\ &\quad + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \|\mathbf{u}_\varepsilon\|^2 - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Dando continuidade, substituí-se (5.5) em (5.65) e considera-se $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \alpha \sigma(\mathbf{p}) \cdot \nabla^s (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) + \int_\Omega \rho k \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) &= \\ &= \underbrace{-2 \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) + 2 \int_\Omega \rho k \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u})}_{F_8}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Com isso tem-se que F_8 é igual a $(-F_3)$.

Agora, fazendo $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{p}$ em (5.14), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{p} + \int_\Omega \rho k (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{p} \\ = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{p} + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{p} - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Pode ser observado que o lado esquerdo das Equações (5.72) e (5.73) são iguais, logo F_3 pode ser escrito da seguinte forma,

$$F_3 = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{p} - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{p} + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{p}. \quad (5.74)$$

Agora para calcular F_4 foi considerado $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon$ em (5.5) e $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}$ em (5.8)

$$\int_\Omega \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon + \int_\Omega \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon. \quad (5.75)$$

$$\int_\Omega \alpha_\varepsilon \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{u} + \int_\Omega \rho_\varepsilon k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{u} = \int_\Omega \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \mathbf{u}. \quad (5.76)$$

Fazendo as contas de forma análoga as feitas em (5.30), tem-se:

$$\int_\Omega \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon = \int_\Omega \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{u}, \quad (5.77)$$

logo, pode-se reescrever (5.75)

$$\int_\Omega \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{u} + \int_\Omega \rho_\varepsilon k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{u} = \int_\Omega \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \mathbf{u}. \quad (5.78)$$

Subtraindo (5.76) de (5.78), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{u} + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{u} &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon - \int_\Omega \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \mathbf{u} \pm \int_{B_\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \\ &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Assim,

$$F_4 = - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{u} - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{u} - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \quad (5.80)$$

Logo, ao substituir (5.74) e (5.80) em (5.71), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) - \mathcal{J}(\mathbf{u}) &= - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{p} - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{p} + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} \\ &\quad - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{u} - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{u} + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho \|\mathbf{u}_\varepsilon\|^2 \\ &\quad - \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon) = - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{p}}_{F_9} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{p}}_{F_{10}} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{p}}_{F_{11}} \\ &\quad - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{u}}_{F_{12}} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho \mathbf{u}_\varepsilon \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u})}_{\mathcal{E}_{12}(\varepsilon)} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u})}_{\mathcal{E}_{13}(\varepsilon)} + \mathcal{E}_{11}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} F_{10} &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{p} \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} + \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{p} \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})(\hat{x}) \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} - (1 - \gamma) \rho k (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})(\hat{x})}_{\mathcal{E}_{14}(\varepsilon)} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{p}}_{\mathcal{E}_{15}(\varepsilon)} \\ &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma) \rho k (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})(\hat{x}) + \mathcal{E}_{14}(\varepsilon) + \mathcal{E}_{15}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} F_{11} &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} \pm \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) (\mathbf{f} \cdot \mathbf{p})(\hat{x}) \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) (\mathbf{f} \cdot \mathbf{p})(\hat{x}) + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} - (1 - \gamma) (\mathbf{f} \cdot \mathbf{p})(\hat{x})}_{\mathcal{E}_{16}(\varepsilon)} \\ &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma) (\mathbf{f} \cdot \mathbf{p})(\hat{x}) + \mathcal{E}_{16}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.83)$$

As contas necessárias para determinar F_9 e F_{12} são análogas as feitas para determinar D_7 , assim:

$$\begin{aligned} F_9 &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma) \alpha (\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{p})(\hat{x}) + \pi \varepsilon^2 \rho \mathbb{T}(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{p})(\hat{x}) + \sum_{i=9}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon) \\ &= \pi \varepsilon^2 \alpha \mathbb{P}(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{p})(\hat{x}) + \sum_{i=17}^{19} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} F_{12} &= \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma) \alpha (\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u})(\hat{x}) + \pi \varepsilon^2 \rho \mathbb{T}(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u})(\hat{x}) + \sum_{i=9}^{10} \mathcal{E}_i(\varepsilon) \\ &= \pi \varepsilon^2 \rho \mathbb{P}(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u})(\hat{x}) + \sum_{i=20}^{22} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.85)$$

onde:

$$\mathcal{E}_{17}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{p}. \quad (5.86)$$

$$\mathcal{E}_{18}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{p} - (1 - \gamma) \alpha (\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{p})(\hat{x}). \quad (5.87)$$

$$\mathcal{E}_{19}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \cdot \nabla \mathbf{p} - (\sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{p})(\hat{x}). \quad (5.88)$$

$$\mathcal{E}_{20}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{u}. \quad (5.89)$$

$$\mathcal{E}_{21}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u} - (1 - \gamma) \alpha (\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u})(\hat{x}). \quad (5.90)$$

$$\mathcal{E}_{22}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{w}_\varepsilon) \cdot (\nabla \mathbf{u} - \nabla^s \mathbf{u})(\hat{x}). \quad (5.91)$$

Finalmente, substituí-se (5.82), (5.83), (5.84) e (5.85) em (5.81)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) - \mathcal{J}(\mathbf{u}) &= -\pi \varepsilon^2 (1 - \gamma) \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} + \pi \varepsilon^2 (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} \\ &\quad - \pi \varepsilon^2 \alpha \mathbb{P} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{p} - \pi \varepsilon^2 \alpha \mathbb{P} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u} + \sum_{i=10}^{22} \mathcal{E}_i(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.92)$$

Por último, ao considerar que $f(\varepsilon) = \pi \varepsilon^2$, pode-se concluir que a derivada topológica de \mathcal{J} é dada por:

$$D_T \mathcal{J} = -2\alpha \mathbb{P} \sigma(\mathbf{u}) \cdot [\nabla^s \mathbf{u} + \nabla^s \mathbf{p}] + (1 - \gamma) [-\rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{p}]. \quad (5.93)$$

5.4 Estimativas dos Termos Remanescentes

Nesta seção serão calculadas as estimativas dos termos remanescentes do cálculo da derivada topológica do problema coercivo apresentadas nas Seção 5.3.

Antes de calcular a estimativa dos erros será necessário a demonstração dos resultados a seguir.

Lema 5.2 *Seja \mathbf{w}_ε definido em (5.39) e solução de (5.46), então*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = o(\varepsilon). \quad (5.94)$$

Demonstração. As contas para este caso são análogas as feitas para o caso escalar no Lema 3.2. \square

Lema 5.3 *Seja $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(x)$ definido em (5.39) e solução de (5.57), então*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = o(\varepsilon). \quad (5.95)$$

Demonstração. A forma fraca do problema definido em (5.57) é dada por:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \in \tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon : \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\eta} = - \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\eta} + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (5.96)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon := \{\boldsymbol{\varphi} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : \boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Omega} = -\mathbf{w}_\varepsilon\}, \quad (5.97)$$

$$\mathbf{g} = (1 - \gamma)\rho[\nabla\sigma(\mathbf{u}(y))\mathbf{n}]\mathbf{n}. \quad (5.98)$$

Seja $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \in \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ logo $\boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e substituindo-se $\boldsymbol{\eta}$ em (5.96),

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \int_\Omega \rho_\varepsilon k \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2 - \int_\Omega \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \int_\Omega \rho_\varepsilon k \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \\ &= - \int_\Omega \rho_\varepsilon k \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \int_\Omega \rho_\varepsilon k \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Pelo Teorema da divergência tem-se:

$$- \int_\Omega \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = \int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \int_{\partial\Omega} \rho_\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \cdot \partial_n \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \rrbracket \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon. \quad (5.100)$$

Ao substituir (5.100) em (5.99), obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon + \int_\Omega \rho_\varepsilon k \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2 + \underbrace{\int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon}_{E_{11}} \\ & \quad - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho_\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \cdot \partial_n \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}_{E_{12}} - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \rrbracket \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon}_{E_{13}} - \underbrace{\int_\Omega \rho_\varepsilon k \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon}_{E_{14}} = \\ & \quad - \int_\Omega \rho_\varepsilon k \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \underbrace{\int_\Omega \rho_\varepsilon k \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon}_{E_{15}} + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \varepsilon \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon}_{E_{16}}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Juntando E_{11} , E_{14} e E_{15} em uma única integral tem-se

$$E_{17} = \int_\Omega [\operatorname{div}(\alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)) - \rho_\varepsilon k \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \rho_\varepsilon k \mathbf{w}_\varepsilon] \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \quad (5.102)$$

assim, por (5.57) tem-se que $E_{17} = 0$. Além disso tem-se que $E_{13} = E_{16}$.

Como $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \in \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ segue que $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon|_{\partial\Omega} = -\mathbf{w}_\varepsilon$, assim $E_{12} = \int_{\partial\Omega} \rho_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \partial_n \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$.

Logo (5.101) pode ser reescrito como:

$$\int_\Omega \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon + \int_\Omega \rho_\varepsilon k \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2 = \underbrace{- \int_\Omega \rho_\varepsilon k \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}_{E_{18}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \partial_n \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}_{E_{19}} + \varepsilon \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}_{E_{20}}. \quad (5.103)$$

Calculando E_{18}

$$|E_{18}| = \left| \int_\Omega \rho_\varepsilon k \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \right| \leq \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} o(\varepsilon). \quad (5.104)$$

Como $\mathbf{w}_\varepsilon|_{\partial\Omega} = h\varepsilon^2$ logo

$$\begin{aligned} |E_{19}| &= \left| \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \rho_\varepsilon h \cdot \partial_n \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \right| \leq \varepsilon^2 \|h\|_{H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)} \|\partial_n \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)} \leq \\ & \varepsilon^2 \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \varepsilon^2 \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Por último

$$\begin{aligned} |E_{20}| &= \left| \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \right| \leq \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{H^{-1/2}(\partial B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\partial B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)} \\ &\leq \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^2(B_\varepsilon)} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{B_\varepsilon} \leq \varepsilon^2 \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Agora ao substituir (5.104), (5.105) e (5.106) em (5.103) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \varphi_\varepsilon + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2 \leq (o(\varepsilon) + 2\varepsilon^2) \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq o(\varepsilon) \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (5.107)$$

Por outro lado, usando a coercividade,

$$\alpha \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \varphi_\varepsilon + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon k \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2. \quad (5.108)$$

Assim substituindo-se (5.107) em (5.108), tem-se que

$$\alpha \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq o(\varepsilon) \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (5.109)$$

que conduz ao resultado

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = o(\varepsilon). \quad (5.110)$$

□

Lema 5.4 *Seja \mathbf{u} solução do Problema (3.1) e \mathbf{u}_ε solução do Problema (3.3). Então*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_\varepsilon)} = o(\varepsilon). \quad (5.111)$$

Demonstração.

Considerando a expansão de \mathbf{u}_ε apresentada em (5.39) e usando (5.98), tem-se

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \|\mathbf{w}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.112)$$

□

De posse dos resultado apresentados, podem ser estimados os termos remanescentes.

Para estimar $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$ e $\mathcal{E}_2(\varepsilon)$ foi utilizado o Lema 5.3

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon) = \int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|^2 \leq C_1 \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_\varepsilon)}^2 \leq C_2 \varepsilon^{2(1+\delta)} = o(\varepsilon^2). \quad (5.113)$$

$$\mathcal{E}_2(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|^2 \leq C \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_\varepsilon)}^2 \leq C_2 \varepsilon^{2(1+\delta)} = o(\varepsilon^2). \quad (5.114)$$

Já para estimar $\mathcal{E}_3(\varepsilon)$ foi usado a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema 5.3,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3(\varepsilon) &= 2 \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \\ &\leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_\varepsilon)} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_\varepsilon)} \leq C_3 \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.115)$$

Dando continuidade, para estimar $\mathcal{E}_4(\varepsilon)$ foi usado o fato de u ser Lipschitz contínua.

$$\mathcal{E}_4(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k [\|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u}(\hat{x})\|^2] \leq C_1 \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| = o(\varepsilon^2). \quad (5.116)$$

Para estimar $\mathcal{E}_5(\varepsilon)$ e $\mathcal{E}_{16}(\varepsilon)$ é considerado uma função auxiliar $\phi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, assim tem-se:

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \mathbf{f} \cdot [\phi - \phi(\hat{x})] \leq C_1 \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| = o(\varepsilon^2). \quad (5.117)$$

Agora ao considerar $\phi = q$ e $\phi = p$, por (5.117) tem-se que $\mathcal{E}_5(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{16}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ respectivamente.

Já os resíduos $\mathcal{E}_6(\varepsilon)$ e $\mathcal{E}_{15}(\varepsilon)$, podem ser calculados por

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \phi &\leq C_1 \|\phi\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C_2 \varepsilon \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.118)$$

Novamente, considerando $\phi = q$ e $\phi = p$, teremos $\mathcal{E}_6(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{15}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$.

Considerando o fato de ϕ e u serem Lipschitz contínuas, tem-se:

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \rho k u \cdot [\phi - \phi(\hat{x})] \leq C_1 \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| = o(\varepsilon^2). \quad (5.119)$$

Logo, ao considerar $\phi = q$ e $\phi = p$, tem-se $\mathcal{E}_7(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{14}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$.

Usando a imersão de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema 5.3.

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \phi &\leq C \|\sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|\nabla^s \phi\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(x)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\phi\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.120)$$

Assim, se considerarmos $\phi = q$, $\phi = p$ e $\phi = u$, teremos $\mathcal{E}_8(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$, $\mathcal{E}_{17}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{20}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$.

Usando o fato de ϕ serem Lipschitz contínuas, obtém-se

$$\int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot [\nabla^s \phi - \nabla^s \phi(\hat{x})] \leq C \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| \leq C \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \quad (5.121)$$

Portanto, ao considerar $\phi = q$, $\phi = p$ e $\phi = u$, tem-se $\mathcal{E}_9(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$, $\mathcal{E}_{18}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{21}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$.

Novamente, usando o fato de ϕ ser Lipschitz contínua, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma) \alpha [\nabla^s \phi - \nabla^s \phi(\hat{x})] \cdot \nabla^s \mathbf{w}_\varepsilon &\leq C \int_{B_\varepsilon} (x - \hat{x}) \cdot \nabla^s \mathbf{w}_\varepsilon \leq C \int_{B_\varepsilon} \varepsilon \mathbf{n} \cdot \nabla^s \mathbf{w}_\varepsilon \\ &\leq C \varepsilon \|\mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla^s \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \varepsilon^2 \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.122)$$

Considerando $\phi = q$, $\phi = p$ e $\phi = u$, o que resulta em $\mathcal{E}_{10}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$, $\mathcal{E}_{19}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{E}_{22}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ respectivamente.

O resíduo $\mathcal{E}_{12}(\varepsilon)$ é calculado usando a Lema 5.4

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{12}(\varepsilon) &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\rho k(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\rho k(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u} + \mathbf{u}) \\ &= \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\rho k \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|^2 + (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \leq C_1 \|1\|_{\mathbf{L}^2(B_\varepsilon)} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_\varepsilon)}^2 \\ &\quad + C_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_\varepsilon)} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(B_\varepsilon)} \leq C_5 \varepsilon^{1+(1+\delta)^2} + \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2).\end{aligned}\quad (5.123)$$

Por último no resíduo $\mathcal{E}_{13}(\varepsilon)$ é usado o fato de q ser Lipschitz contínua.

$$\mathcal{E}_{13}(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (1 - \gamma)\mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \leq C \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| = o(\varepsilon^2).\quad (5.124)$$

5.5 Problema de Estruturas em Vibração Livre

Estamos interessados em calcular a derivada do primeiro autovalor do Problema de Estruturas em vibração livre.

5.5.1 Formulação do Problema

Para formular o Problema de Estruturas em Vibração Livre o problema (5.1) é reescrito com $f = 0$ e $k = -\lambda k^*$ no termo fonte. Por abuso de natação vamos considerar $-\lambda k^* = -\lambda k$. Assim temos o problema de autovalor

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontre } \mathbf{u}, \text{ tal que} & \\ -\text{div}(\alpha\sigma(\mathbf{u})) = \lambda\rho k\mathbf{u} & \text{em } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) = \mathbb{C}\nabla^s\mathbf{u} & \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \\ -\sigma(\mathbf{u})\boldsymbol{\eta} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (5.125)$$

onde $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N}$ com $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ e Γ_D e Γ_N são as fronteiras de Dirichlet e Neumann, respectivamente.

Com isso a formulação fraca é dada por,

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U} : \quad \int_{\Omega} \rho\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s\boldsymbol{\eta} = \int_{\Omega} \lambda\rho k\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}.\quad (5.126)$$

Considerando a mesma perturbação apresentada nas Tabelas 3.2 e 3.3, é definido o

problema perturbado,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } \mathbf{u}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\operatorname{div}(\rho_\varepsilon \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon)) = \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon k \mathbf{u}_\varepsilon \quad \text{em } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) = \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon \\ \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D \\ -\sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \boldsymbol{\eta} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N \\ \llbracket \mathbf{u}_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \rho_\varepsilon \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \rrbracket \mathbf{n} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \quad (5.127)$$

cuja formulação fraca é dada por

$$\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{U} : \quad \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \sigma(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} = \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon k \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}. \quad (5.128)$$

Com isso pode ser enunciado um Corolário a respeito da derivada topológica do problema de autovalor.

5.5.2 Cálculo da Derivada Topológica

Corolário 5.1 *Sejam λ e \mathbf{u} solução de (5.125), então a derivada topológica de λ é dado por:*

$$D_T(\lambda) = \frac{-2\alpha \mathbb{P} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u} + \rho(1-\gamma)\lambda \|\mathbf{u}\|^2}{\mathcal{G}(\mathbf{u})}. \quad (5.129)$$

Demonstração. Se considerarmos $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}$ em (5.126) tem-se

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u}}{\int_{\Omega} \rho k \|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\mathcal{J}(\mathbf{u})}{\mathcal{G}(\mathbf{u})}, \quad (5.130)$$

ou seja,

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \lambda \mathcal{G}(\mathbf{u}) \quad (5.131)$$

Para calcular a derivada topológica de $D_T \lambda$ foi aplicado a regra do quociente em (5.130).

Assim

$$D_T(\lambda) = \frac{(D_T \mathcal{J}) \mathcal{G}(\mathbf{u}) - (D_T \mathcal{G}) \mathcal{J}(\mathbf{u})}{[\mathcal{G}(\mathbf{u})]^2}. \quad (5.132)$$

Ao substituir (5.131) em (5.132) tem-se

$$D_T(\lambda) = \frac{(D_T \mathcal{J}) \mathcal{G}(\mathbf{u}) - \lambda (D_T \mathcal{G}) \mathcal{G}(\mathbf{u})}{[\mathcal{G}(\mathbf{u})]^2} = \frac{D_T \mathcal{J} - \lambda D_T \mathcal{G}}{\mathcal{G}(\mathbf{u})}. \quad (5.133)$$

É possível constatar que os funcionais de forma $\mathcal{J}(\mathbf{u})$ e $\mathcal{G}(\mathbf{u})$ são os mesmos do problema de estruturas sobre apoio elástico apresentados no início deste capítulo, as diferenças estão nos problemas adjuntos considerado para $\mathcal{J}(\mathbf{u})$ e $\mathcal{G}(\mathbf{u})$, que são apresentados a seguir:

Se considerarmos os seguintes problemas adjuntos para $\mathcal{J}(\mathbf{u})$ e $\mathcal{G}(\mathbf{u})$

$$\mathbf{q} \in \mathcal{U} : \quad \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{q}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega} \lambda \rho k \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta} = -2 \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} = -2\lambda \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U} \quad (5.134)$$

$$\mathbf{p} \in \mathcal{U} : \int_{\Omega} \alpha \sigma(\mathbf{p}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega} \lambda \rho k \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta} = -2 \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U} \quad (5.135)$$

e considerando os resultados obtidos para o problema de estruturas sobre apoio elástico no início do capítulo, teremos as seguintes derivadas para $\mathcal{J}(u)$ e $\mathcal{G}(u)$

$$D_T \mathcal{J} = 2\alpha \mathbb{P}\sigma(\mathbf{u}) \cdot (\nabla^s \mathbf{u} + \nabla^s \mathbf{q}) + \rho(1 - \gamma) \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}, \quad (5.136)$$

$$D_T \mathcal{G} = 2\alpha \mathbb{P}\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{p} + \rho(1 - \gamma) \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} - \rho(1 - \gamma) \|\mathbf{u}\|^2. \quad (5.137)$$

Fazendo-se $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{p}$ em (5.134) e $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{q}$ em (5.135) tem-se

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla q \cdot \nabla p - \int_{\Omega} \lambda \rho k \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = -2\lambda \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}, \quad (5.138)$$

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla p \cdot \nabla q - \int_{\Omega} \lambda \rho k \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = -2 \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}, \quad (5.139)$$

ou seja,

$$-2\lambda \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = -2 \int_{\Omega} \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{p} - \mathbf{q}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q} = \lambda \mathbf{p}. \quad (5.140)$$

Por (5.133), (5.140) e as derivadas (5.136) e (5.137), obtém-se:

$$\begin{aligned} D_T \mathcal{J} - \lambda D_T \mathcal{G} &= 2\alpha \mathbb{P}\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u} + 2\alpha \mathbb{P}\lambda \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{p} + \rho(1 - \gamma) \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \\ &\quad - 2\alpha \mathbb{P}\lambda \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{p} - \rho(1 - \gamma) \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} + \rho(1 - \gamma) \lambda \|\mathbf{u}\|^2 \\ D_T \mathcal{J} - \lambda D_T \mathcal{G} &= -2\alpha \mathbb{P}\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u} + \rho(1 - \gamma) \lambda \|\mathbf{u}\|^2. \end{aligned} \quad (5.141)$$

Portanto,

$$D_T(\lambda) = \frac{-2\alpha \mathbb{P}\sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \mathbf{u} + \rho(1 - \gamma) \lambda \|\mathbf{u}\|^2}{\mathcal{G}(\mathbf{u})}. \quad (5.142)$$

6 Exemplos Numéricos

Quando são apresentadas as aplicações de otimização de estruturas planas, temos alguns exemplos que são clássicos na literatura, como por exemplo: “cantilever beam” (Bendsøe e Sigmund, (2003); Pereira e Bittencourt, (2008); Suresh, (2010); Laurain, (2018); Deng e Cheng, (2019)) que é um problema mal posto¹; “Estrutura em L (Problema da bota)” (Amstutz e Novotny, (2010); Suresh, (2010); Amir, (2017); Torii e Faria, (2017); Deng e Cheng, (2019)); Barra apoiada ou problema da ponte (Torii e Faria, (2017)); Problema do portal (Torii e Faria, (2017)).

Nos exemplos desta seção, foi utilizada a Equação 5.142 para o cálculo da análise de sensibilidade topológica.

Exemplo 6.1 Neste exemplo foi considerado um retângulo de altura 1 e comprimento 3 engastado em 20% do lado esquerdo dividido igualmente entre os dois extremos e foi aplicado uma carga no ponto (3; 0,5) de $k = 0.3$ conforme Figura 6.1. Também foi considerado o coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. Além disso foi considerado o valor do penalty de $\xi = 1,4$.

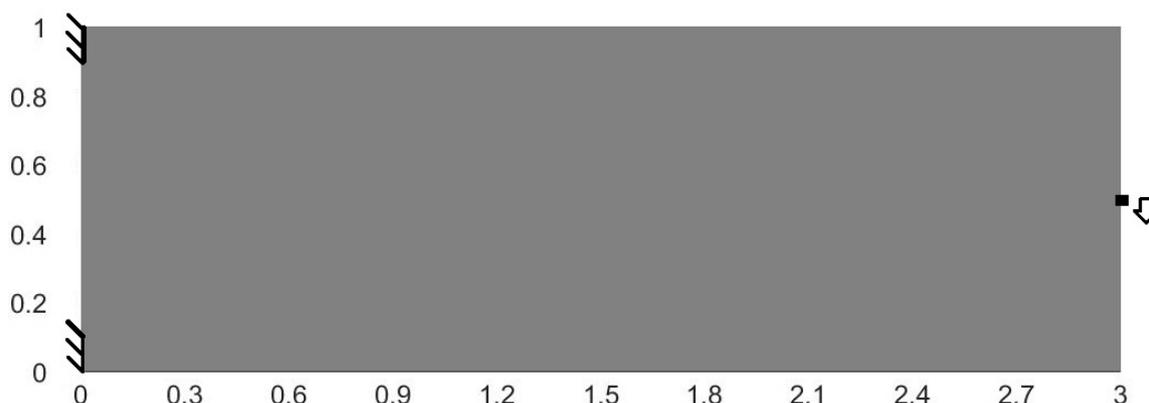


Figura 6.1 – Geometria inicial.

Neste exemplo foi considerado malha inicial com 90 divisões verticais e 30 divisões horizontais e foram feitos 4 refinamentos na malha, o que gerou a seguinte quantidade de elementos e nós, conforme apresentado na Tabela 6.1.

¹ O problema é dito mal posto, quando pequenas perturbações nos dados de entrada produzem grandes oscilações na resposta. Inclusive alterações na malha inicial podem produzir geometrias distintas.

Tabela 6.1 – Quantidade de elementos da malha

n° de divisões no lado	n° de elementos da malha	n° de nós
90 × 30	10.800	5.521
180 × 60	43.200	21.841
360 × 120	172.800	86.881
720 × 240	691.200	364.561
1440 × 480	2.764.800	1.384.321

Também foi considerado três valores para o Modulo de Young conforme apresentado na tabela a seguir:

Tabela 6.2 – Casos considerados no Exemplo 6.1.

	Caso A	Caso B	Caso C
E(GPa)	1	70	210

Como o Modulo de Young está relacionado a rigidez do material, o objetivo de variar o referido valor, consiste em analisar a influência da rigidez no valor do autovalor.

Embora o volume final da geometria fique praticamente constante quando altera-se o valor do modulo de Young, há uma variação significativa no valor do autovalor e na geometria final. Além disso como apresentado em (5.3) e (5.4), \mathbb{C} assume valores distintos para o caso de estado plano de tensão ou estado plano de deformação. Assim nas Tabelas 6.3 e 6.4 apresenta-se os valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 e λ_1^f/λ_2^f para os valores do Modulo de Young considerados.

Tabela 6.3 – Valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 e λ_1^f/λ_2^f , volume final mantido na geometria e número de iterações para o estado plano de tensão.

E(GPa)	λ_1^0	λ_1^f	λ_1^f/λ_1^0	λ_1^f/λ_2^f	VF(%)	NI
1	7,385	10,4253	1,4116	0,1409	34,7513	114
70	516,9519	736,0433	1,4238	0,1880	34,4798	175
210	1.550,8557	2.228,9294	1,4372	0,1709	34,8341	88

Tabela 6.4 – Valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 e λ_1^f/λ_2^f , volume final mantido na geometria e número de iterações para o estado plano de deformação.

E(GPa)	λ_1^0	λ_1^f	λ_1^f/λ_1^0	λ_1^f/λ_2^f	VF(%)	NI
1	7,8523	11,3	1,4390	0,1619	34,1667	96
70	549,6639	788,2029	1,4339	0,1653	34,1459	140
210	1.648,9917	2.374,8484	1,4401	0,1485	33,9767	69

É possível observar nas Tabelas 6.3 e 6.4 que, embora a escala de grandeza entre os valores do autovalor seja 10^1 quando altera-se o Modulo de Young, quando é feito o quociente entre λ_1^f/λ_1^0 os valores ficam muito próximos, havendo uma variação de menos de 3% em todos os casos analisados. Desta forma, no restante deste exemplo consideramos sempre o estado plano de tensão.

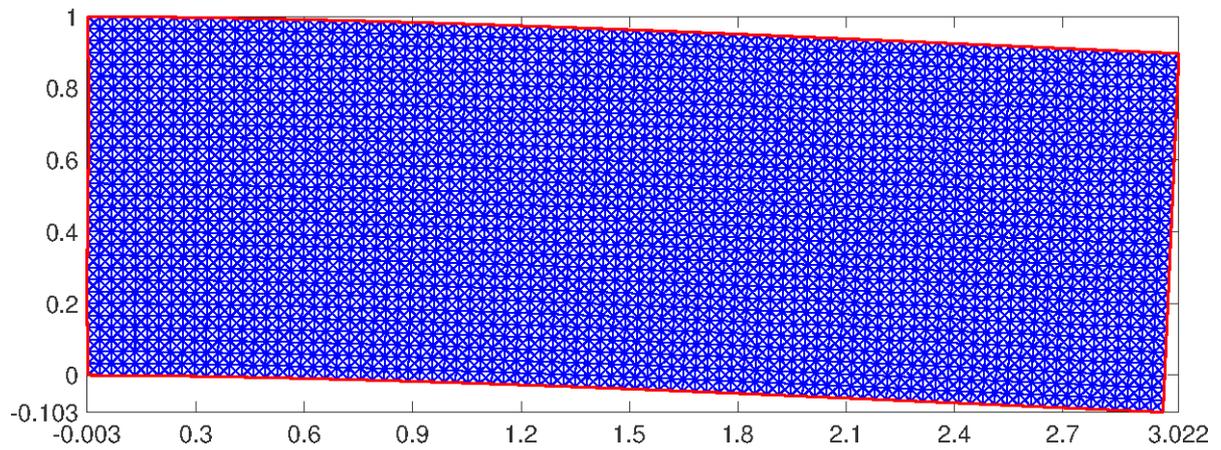


Figura 6.2 – Deslocamento inicial para o estado plano de tensão e Modulo de Young $E = 210GPa$.

Na figura 6.2 apresentam-se a malha inicial e o deslocamento inicial da geometria.

Na tabela a seguir são apresentados os números das iterações em que a rotina fez o refinamento após a referida iteração, em cada caso.

Tabela 6.5 – Casos considerados no Exemplo 6.1.

	Caso A	Caso B	Caso C
1º refinamento	71	72	13
2º refinamento	81	94	44
3º refinamento	95	104	63
4º refinamento	106	129	85

Na Figura 6.3 apresenta-se a evolução dos valores do ângulo θ em um dos casos considerados. Percebe-se que somente no último refinamento do caso C, o critério de parada foi o ângulo θ . Em todos os outros casos o critério de parada para refinamento foi o valor de κ .

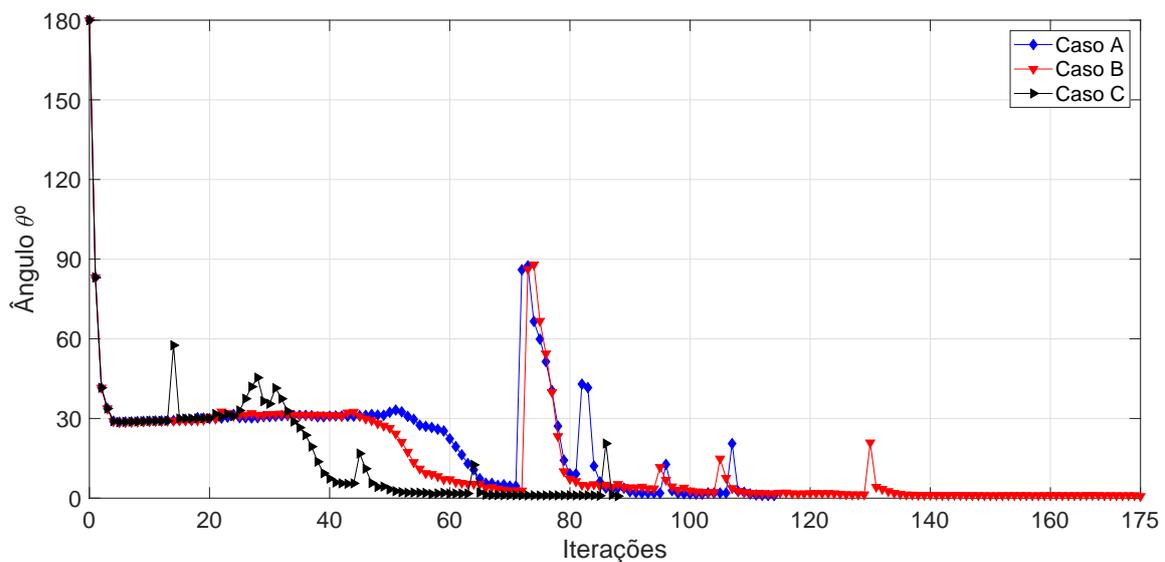


Figura 6.3 – Variação do ângulo θ para os casos A, B e C.

Na Figura 6.4 é apresentado a variação da função de forma em cada um dos casos analisados. Observa-se que em todos os casos a função de forma é decrescente, com a exceção das iterações em que há o refinamento.

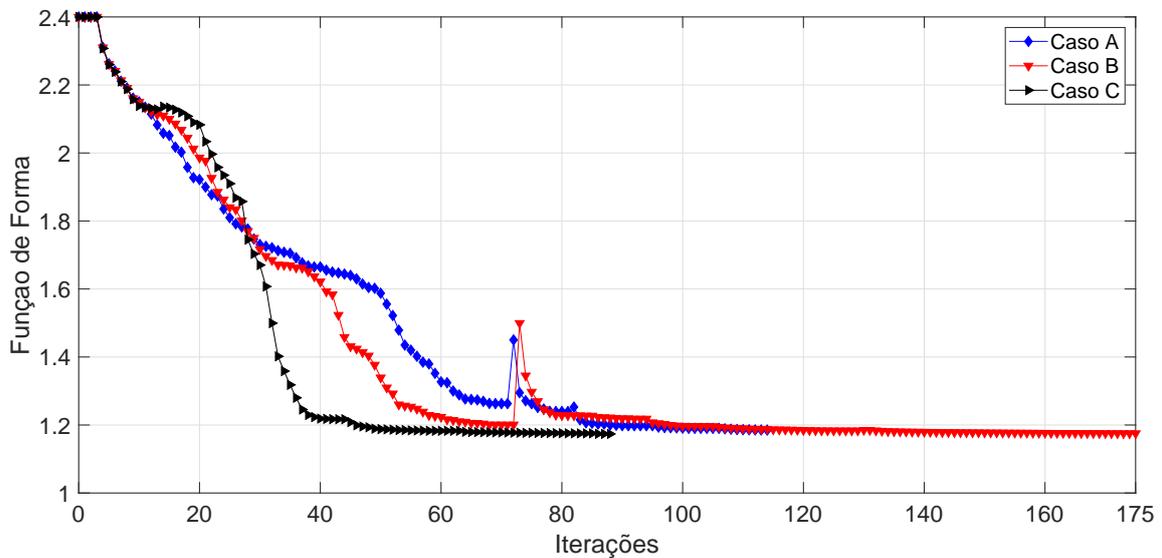


Figura 6.4 – Variação da função de forma para os casos A, B e C.

Na Figura 6.5 é apresentado a variação do volume em cada um dos casos considerados. Observa-se que nos 3 casos o volume converge para um valor entre 34% e 35% o que confirma a informação de que a variação do Modulo de Young tem apenas influência no valor do autovalor, mantendo o quantidade de material praticamente constante.

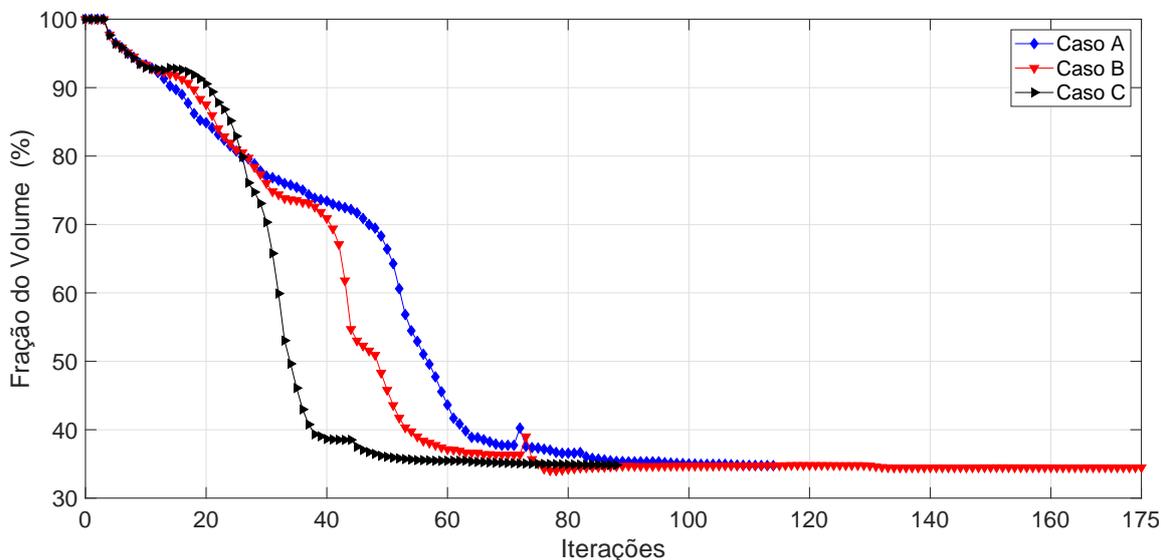


Figura 6.5 – Variação do volume para os casos A, B e C.

Na Figura 6.6 são apresentado os valores de λ_1 normalizados em relação a λ_1^0 . É possível observar que, embora o valor do autovalor mude bastante em cada um dos casos analisados, quando normalizamos os mesmos em função de λ_1^0 em cada caso, o quociente converge sempre para um valor entre 1,41 e 1,44.

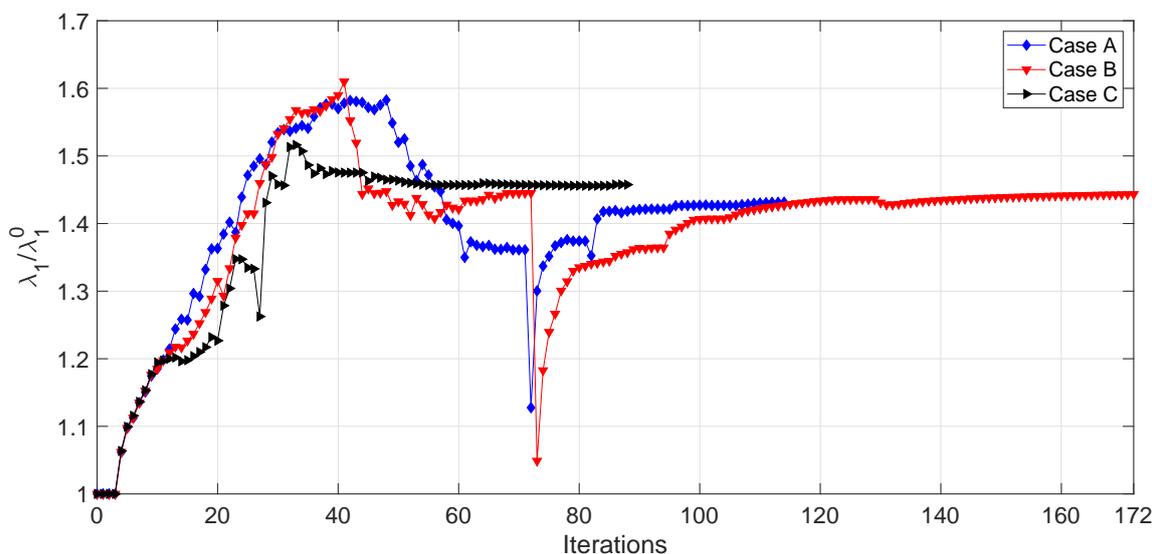


Figura 6.6 – Variação dos valores de λ_1/λ_1^0 para os casos A, B e C.

Na Figura 6.7 são apresentados os valores do quociente de λ_1 por λ_2 . Pode-se observar nos valores de λ_1/λ_2 são sempre menores que 1 e por isso não temos o problema de multiplicidade para o primeiro autovalor como acontece em Seyranian et al., (1994).

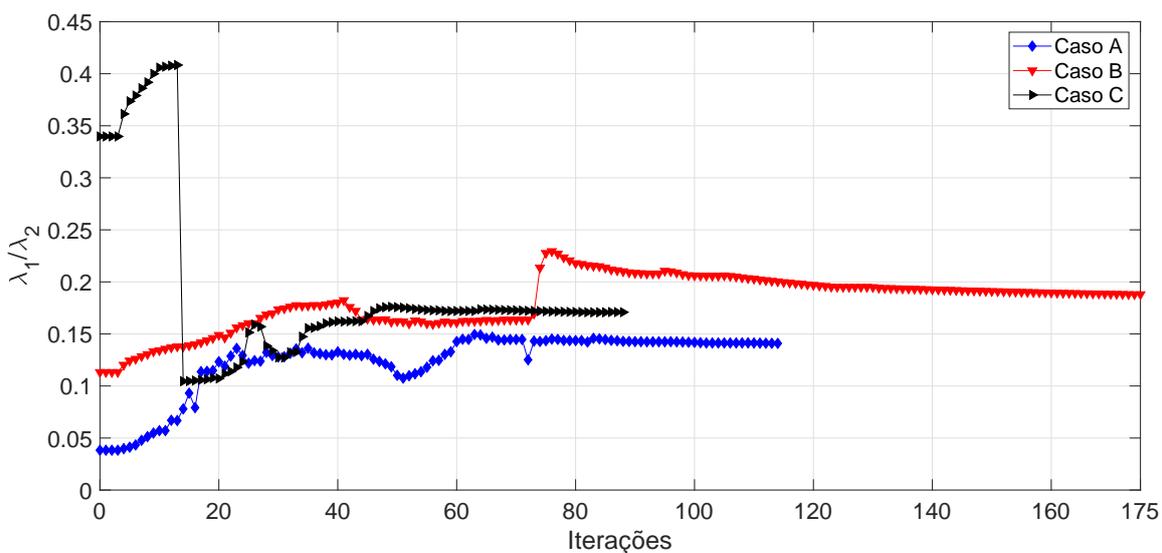


Figura 6.7 – Variação dos valores de λ_1/λ_2 para os casos A, B e C.

Na Figura 6.8 é apresentada a geometria otimizada obtida, para o caso C, após 88 iterações, o tempo gasto foi de 101 minutos e 17 segundos e volume final de de 34, 8341% do volume original, valor bem próximo ao encontrado por Perreira e Bittencourt, (2008) que foi de 32% do volume original. Como foi comentado anteriormente, devido ao fato deste problema ser mal posto, se escolhermos uma outra malha inicial, obtemos uma geometria diferente. Uma outra característica a ser destacada é o fato da geometria produzida neste trabalho ser simétrica com relação a reta $y = 0,5$ enquanto que a geometria encontrada por Perreira e Bittencourt, (2008) não é simétrica.

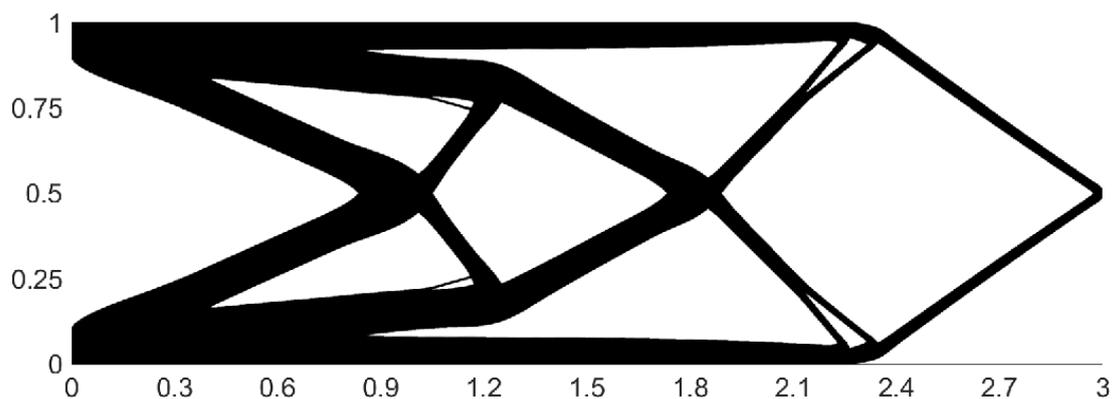


Figura 6.8 – Geometria otimizada, após 88 iterações, para o estado plano de tensão e Modulo de Young $E = 210GPa$.

Na Figura 6.9 apresenta-se a geometria obtida por Perreira e Bittencourt, (2008). Pode ser observado que a uma grande semelhança entre os duas geometrias, embora neste trabalho otimizamos o primeiro autovalor e no trabalho Perreira e Bittencourt, (2008) foi otimizado a Energia Potencial Total. As condições iniciais utilizadas por Perreira e Bittencourt, (2008) foram as mesmas utilizadas neste trabalho com a diferença de que o mesmo usou uma carga concentrada de $F = 7.500 N$.

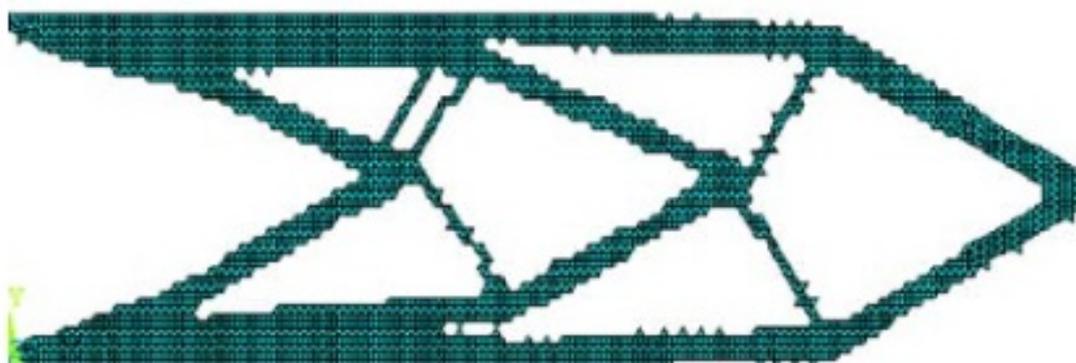


Figura 6.9 – Geometria obtida por Perreira e Bittencourt, (2008).

Exemplo 6.2 Neste exemplo vamos considerar um retângulo de altura 1 e comprimento 6, onde a mesma está engastado nos pontos $(0;0)$ e apoiado no ponto $(6;0)$, com cargas aplicadas nos pontos $(1;1)$ ($k = 0.7$), $(2;1)$ ($k = 1.4$) e $(5;1)$ ($k = 0.7$) conforme Figura 6.10. Foi considerado uma malha inicial com 30 divisões na horizontal e 180 no vertical totalizando um total de 21.600 elementos e 11.011 nós. Foi considerado o seguinte valor para o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Além disso foi considerado o valor do penalty de $\xi = 0,5$.

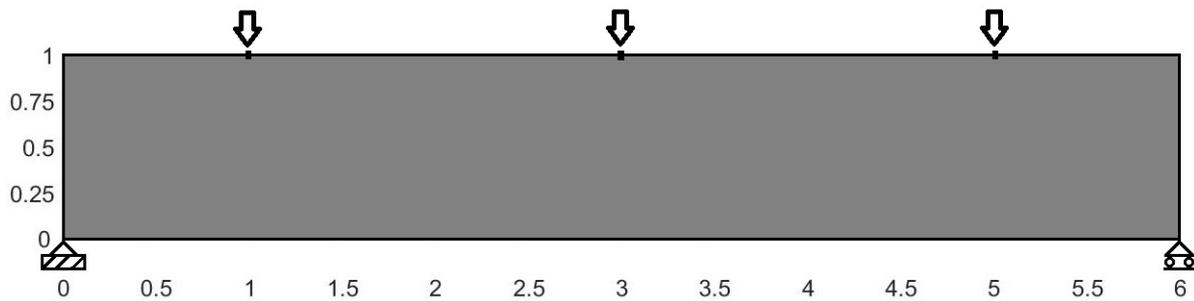


Figura 6.10 – Geometria inicial.

Neste exemplo foi considerado malha inicial com 180 divisões verticais e 30 divisões horizontais e foram feitos 4 refinamentos na malha, o que gerou a seguinte quantidade de elementos e nós, conforme apresentado na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Quantidade de elementos da malha

nº de divisões no lado	nº de elementos da malha	nº de nós
180 × 30	21.600	11.011
360 × 60	86.400	43.621
720 × 120	345.600	173.641
1440 × 240	1.382.400	692.881
2880 × 480	5.529.600	2.768.161

Também foi considerado três valores para o Modulo de Young conforme apresentado na tabela a seguir:

Tabela 6.7 – Casos considerados no Exemplo 6.

	Caso A	Caso B	Caso C
E(GPa)	1	70	210

Na Tabela 6.8 apresenta-se os valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 e λ_1^f/λ_2^f para os valores do Modulo de Young considerados.

Tabela 6.8 – Valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 e λ_1^f/λ_2^f , volume final mantido na geometria e número de iterações para o estado plano de tensão.

E(GPa)	λ_1^0	λ_1^f	λ_1^f/λ_1^0	λ_1^f/λ_2^f	VF(%)	NI
1	3,4449	3,4345	0,9970	0,2968	43,6224	49
70	259,2382	238,6828	0,9207	0,3335	43,371	47
210	777,7145	738,011	0,9489	0,2135	41,4154	62

Na figura 6.11 apresenta-se a geometria com o deslocamento inicial criado pela carga sobre a estrutura plana.

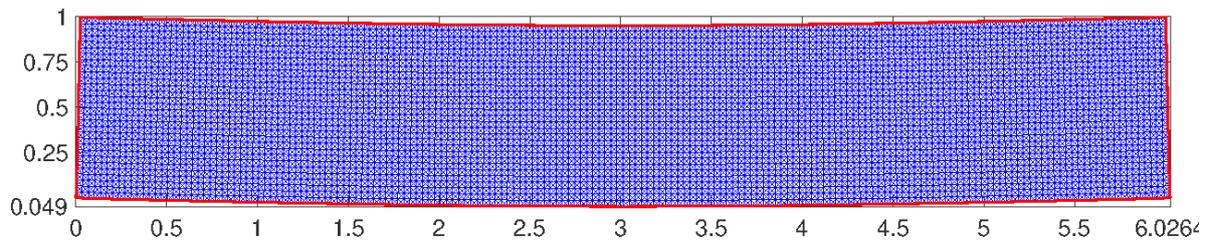


Figura 6.11 – Deslocamento inicial da geometria.

Na tabela a seguir são apresentados os números das iterações em que a rotina fez o refinamento, após a referida iteração, em cada caso.

Tabela 6.9 – Casos considerados no Exemplo 6.

	Caso A	Caso B	Caso C
1º refinamento	29	15	17
2º refinamento	42	39	55
3º refinamento	45	43	58
4º refinamento	47	45	60

Na Figura 6.12 apresenta-se a evolução dos valores do ângulo θ em um dos casos considerados. Percebe-se que nos dois últimos refinamentos, o critério de parada foi o ângulo θ . Em todos os outros casos o critério de parada para refinamento foi o valor de κ .

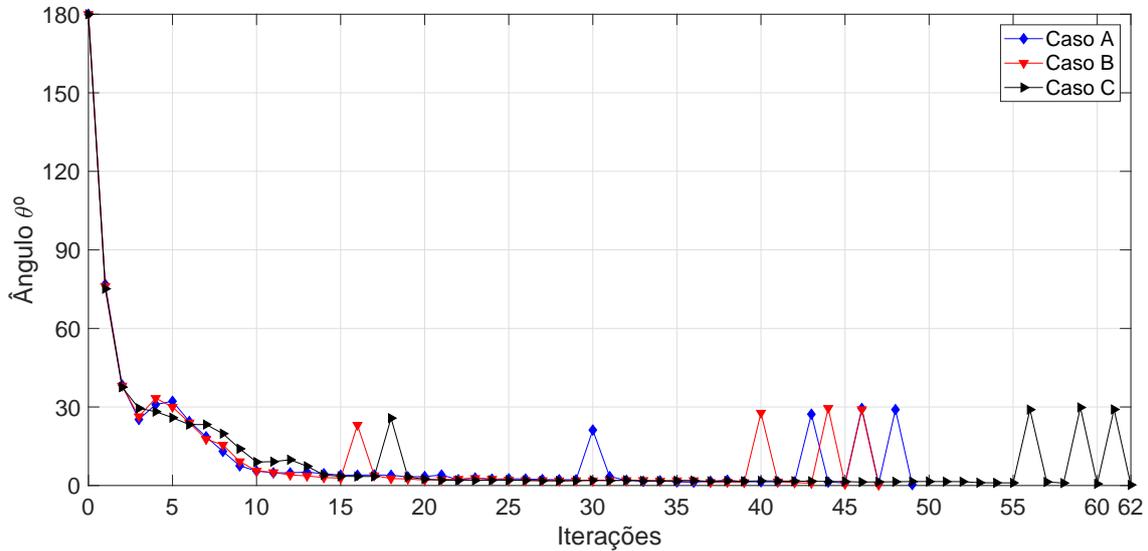


Figura 6.12 – Variação do ângulo θ para os casos A, B e C.

Na Figura 6.13 é apresentado a variação da função de forma em cada um dos casos analisados. Observa-se que em todos os casos a função de forma é decrescente.

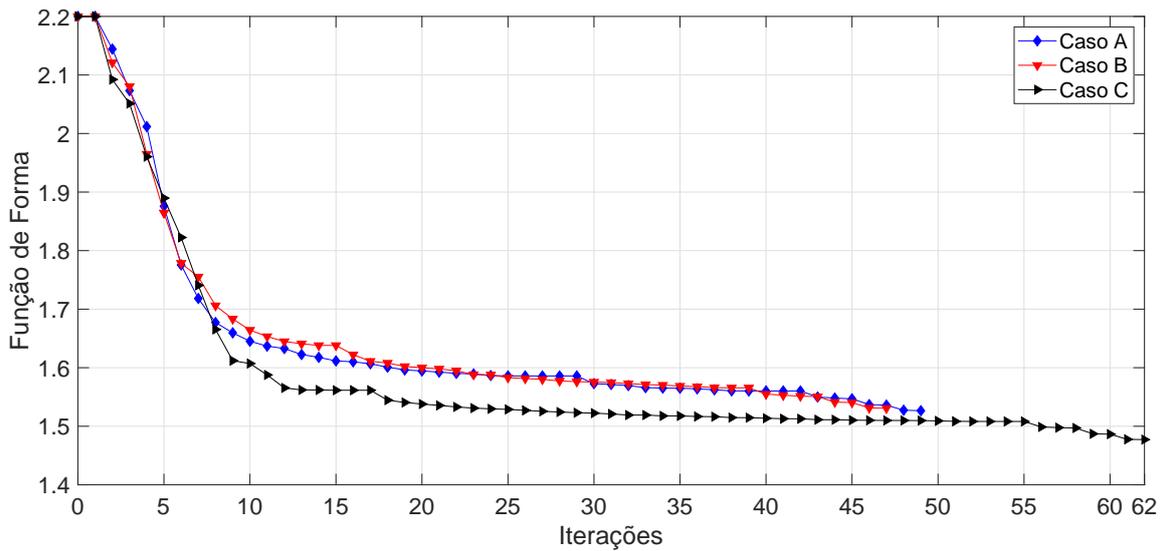


Figura 6.13 – Variação da função de forma para os casos A, B e C.

Na Figura 6.14 é apresentado a variação do volume em cada um dos casos considerados. Observa-se que nos 3 cassos o volume converge para um valor entre 41% e 44% o que confirma a informação de que a variação do Modulo de Young tem apenas influência no valor do autovalor, mantendo o quantidade de material praticamente constante.

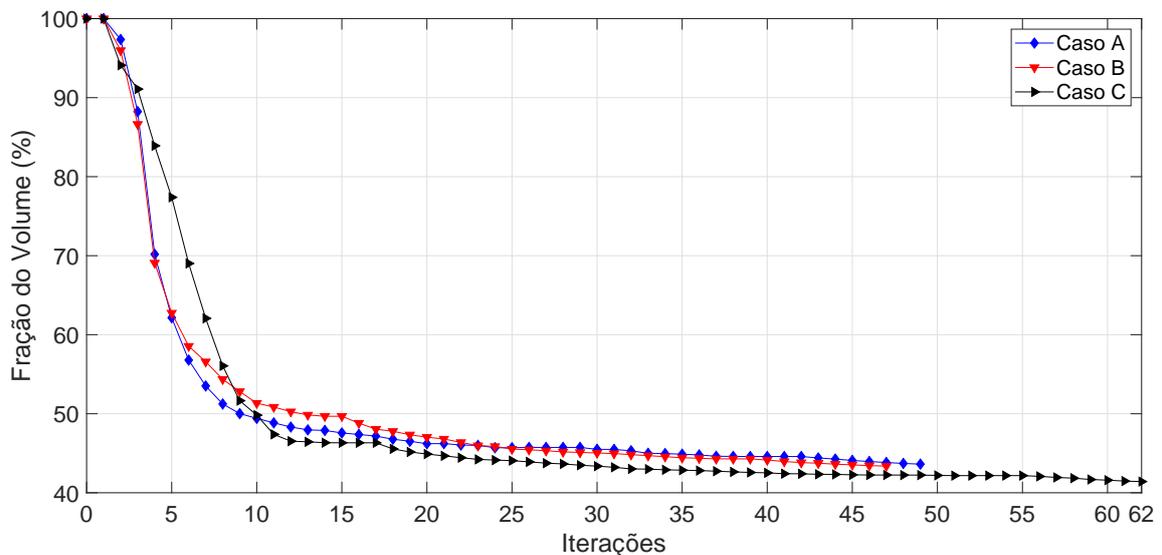


Figura 6.14 – Variação do volume para os casos A, B e C.

Na Figura 6.15 são apresentado os valores de λ_1 normalizados em relação a λ_1^0 . É possível observar que, embora o valor do autovalor mude bastante em cada um dos casos analisados, quando normalizamos os mesmos em função de λ_1^0 em cada caso, o quociente converge sempre para um valor entre 0,94 e 0,997.

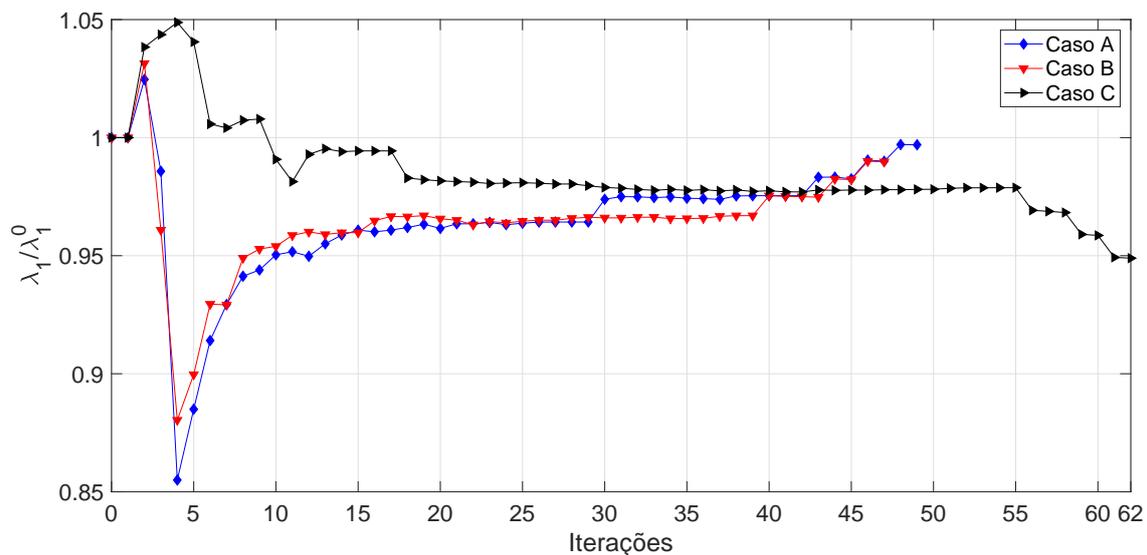


Figura 6.15 – Variação dos valores de λ_1/λ_1^0 para os casos A, B e C.

Na Figura 6.16 são apresentados os valores do quociente de λ_1 por λ_2 . Pode-se observar nos valores de λ_1/λ_2 são sempre menores que 1 e por isso não temos o problema de multiplicidade para o primeiro autovalor como acontece em Seyranian et al., (1994).

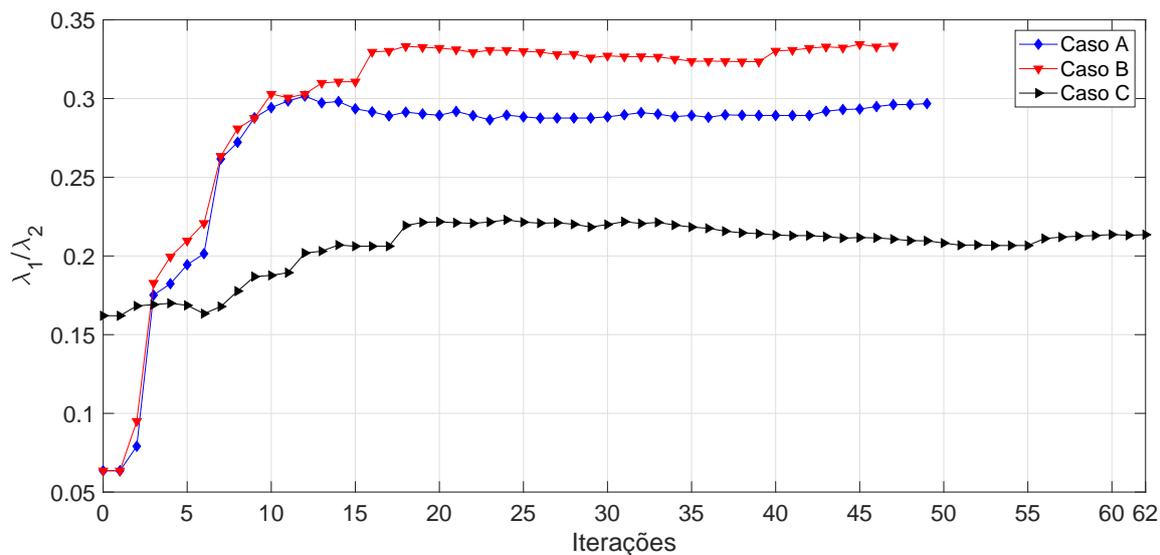


Figura 6.16 – Variação dos valores de λ_1/λ_2 para os casos A, B e C.

Para obter a geometria otimizada apresentada na Figura 6.17 foram realizados 4 refinamentos na malha e necessários 62 iterações. O volume final que restou foi de 41,4154%.

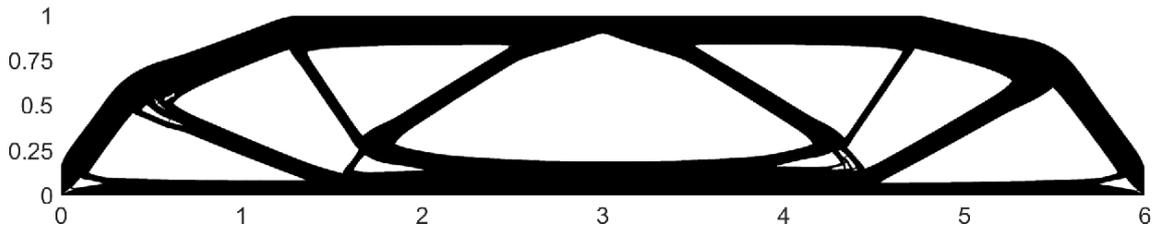


Figura 6.17 – Geometria otimizada para o estado plano de tensão e Modulo de Young $E = 210GPa$.

Exemplo 6.3 Neste exemplo consideramos um quadrado de lado 1 engastado nos pontos $(0; 0)$ e $(0; 1)$ e uma carga aplicada no ponto $(1; 1)$ de $k = 0.4$ conforme Figura 6.1. Foi considerado uma malha inicial com 30 divisões de cada lado totalizando um total de 3.600 elementos e 1.861 nós. Foi considerado o seguinte valor para o Modulo de Young $E = 210 \times 10^3 N/mm^2$ e para o coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$ e o valor da massa concentrada $k = 1,0$.

Neste exemplo foi considerado 4 valores para o penalty.

Tabela 6.10 – Casos considerados.

	Caso A	Caso B	Caso C	Caso D
ξ	0,5	1,0	1,5	2,0

Neste exemplo foi considerado malha inicial com 30 divisões verticais e 30 divisões horizontais e foram feitos 5 refinamentos na malha, o que gerou a seguinte quantidade de elementos e nós, conforme apresentado na Tabela 6.11.

Tabela 6.11 – Quantidade de elementos da malha

nº de divisões no lado	nº de elementos da malha	nº de nós
30×30	3.600	1.8611
60×60	14.400	7.321
120×120	57.600	29.041
240×240	230.400	115.681
480×480	921.600	461.761
960×960	3.686.400	1.845.121

Na Tabela 6.12 apresenta-se os valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 , λ_2^f e λ_1^f/λ_2^f para os valores do Modulo de Young considerados.

Tabela 6.12 – Valores de λ_1^0 , λ_1^f , λ_1^f/λ_1^0 , λ_1^f/λ_2^f , volume final mantido na geometria e número de iterações para o estado plano de tensão e $k = 1,0$.

ξ	λ_1^0	λ_1^f	λ_1^f/λ_1^0	λ_2^f	λ_1^f/λ_2^f	VF(%)	NI
0,5	5.110	5.057	0,9897	59.057	0,0856	56,9363	20
1,0	5.110	4.876	0,9543	36.230	0,1345	46,7765	23
1,5	5.110	4.669	0,9137	31.941	0,1709	39.7931	25
2,0	5.110	4.444	0,8696	37.221	0,0598	57.2087	16

Na Figura 6.18 apresenta-se a geometria inicial e o deslocamento inicial considerados neste exemplo.

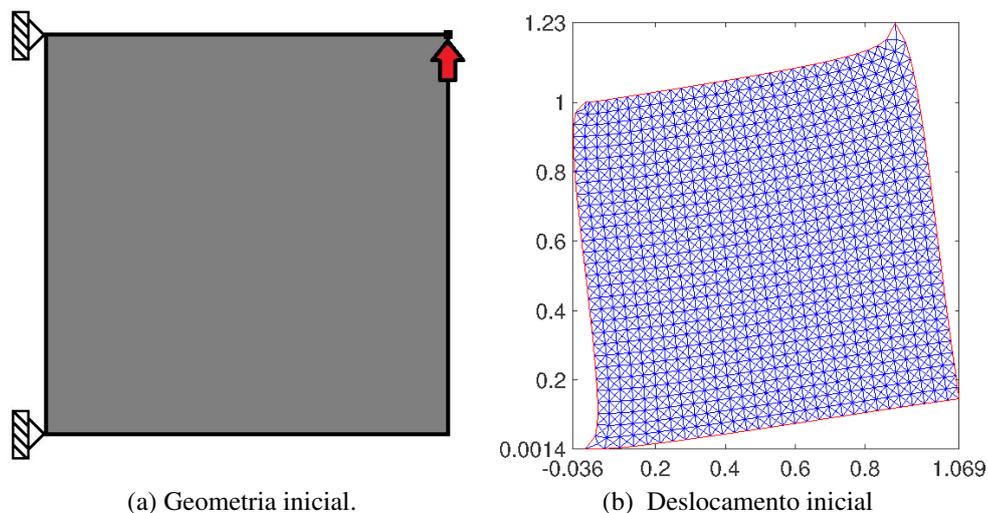


Figura 6.18 – Geometria inicial e deslocamento inicial.

Na tabela a seguir são apresentados os números das iterações em que a rotina fez o refinamento, após a referida iteração, em cada caso.

Tabela 6.13 – Casos considerados no Exemplo 6.

	Caso A	Caso B	Caso C	Caso D
1º refinamento	4	11	15	9
2º refinamento	9	13	17	11
3º refinamento	11	15	19	13
4º refinamento	16	17	21	15
5º refinamento	18	21	23	17

Na Figura 6.19 apresenta-se a evolução dos valores do ângulo θ em um dos casos considerados. Percebe-se que apenas no primeiro refinamento do caso D, o critério de parada foi o valor de κ , enquanto que nos demais casos, o critério de parada foi o ângulo θ .

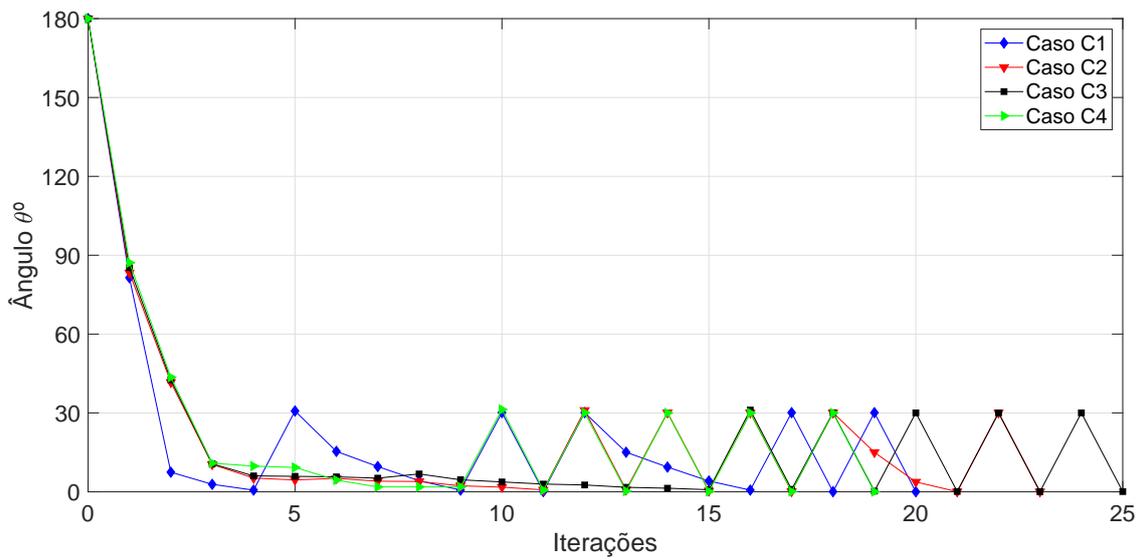


Figura 6.19 – Variação do ângulo θ para os casos A, B, C e D.

Na Figura 6.20 é apresentado a variação da função de forma em cada um dos casos analisados. Observa-se que em todos os casos a função de forma é decrescente.

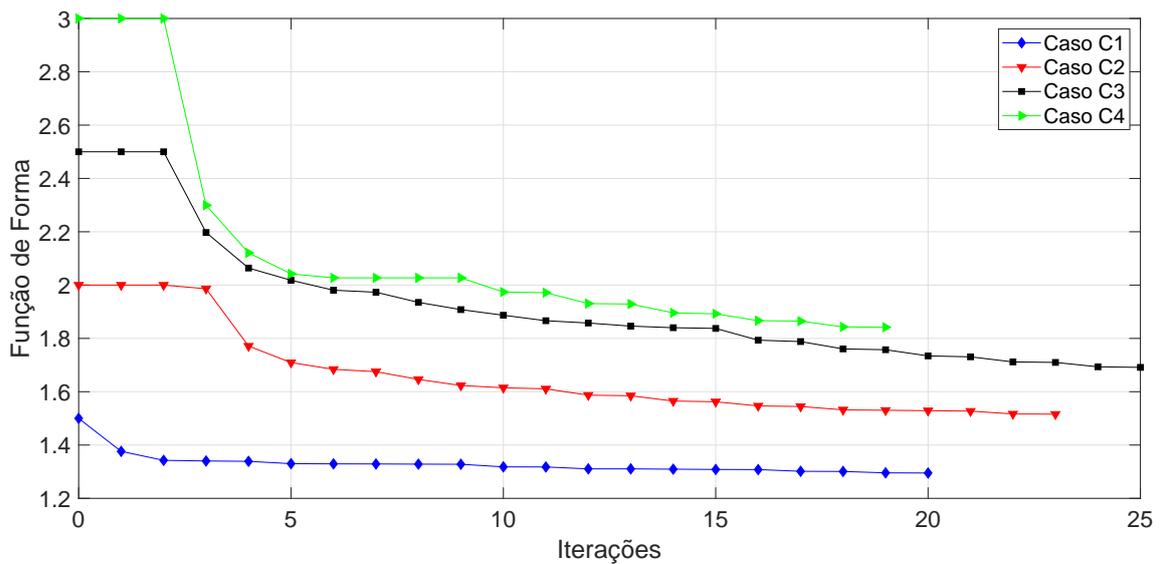


Figura 6.20 – Variação da função de forma para os casos A, B, C e D.

Na Figura 6.21 é apresentado a variação do volume em cada um dos casos considerados. Observa-se que há uma grande variação no volume em cada caso, o que confirma a informação de que a variação do dp penalty ξ tem influência na variação do volume.

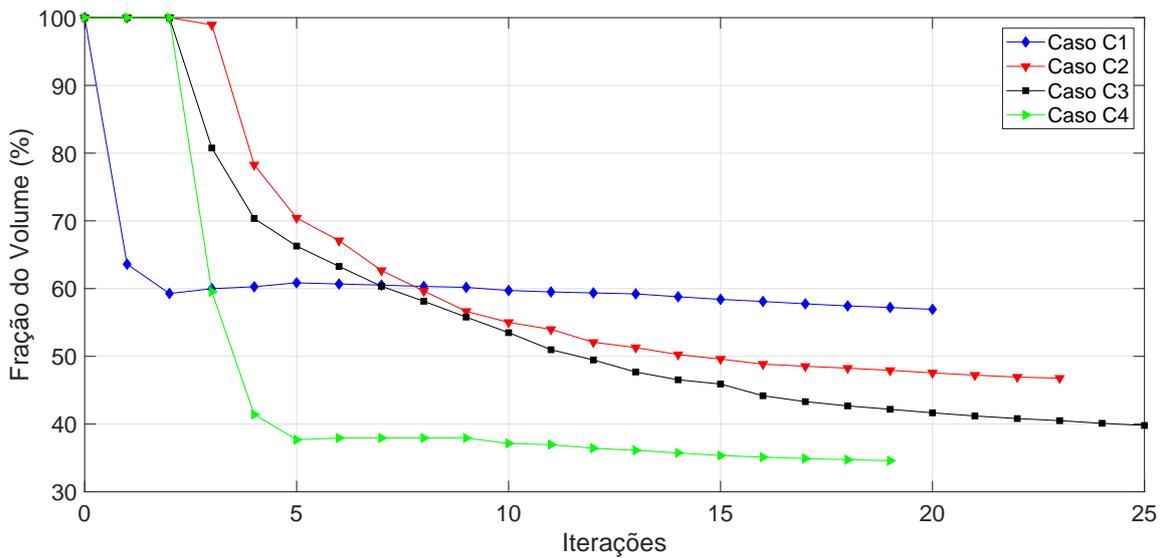


Figura 6.21 – Variação do volume para os casos A, B, C e D.

Na Figura 6.22 são apresentados os valores de λ_1 normalizados em relação a λ_1^0 . É possível observar que, além do fato do valor do autovalor mudar bastante em cada um dos casos analisados, quando normalizamos os mesmos em função de λ_1^0 em cada caso, o quociente também tem uma variação entre 0,86 e 0,99.

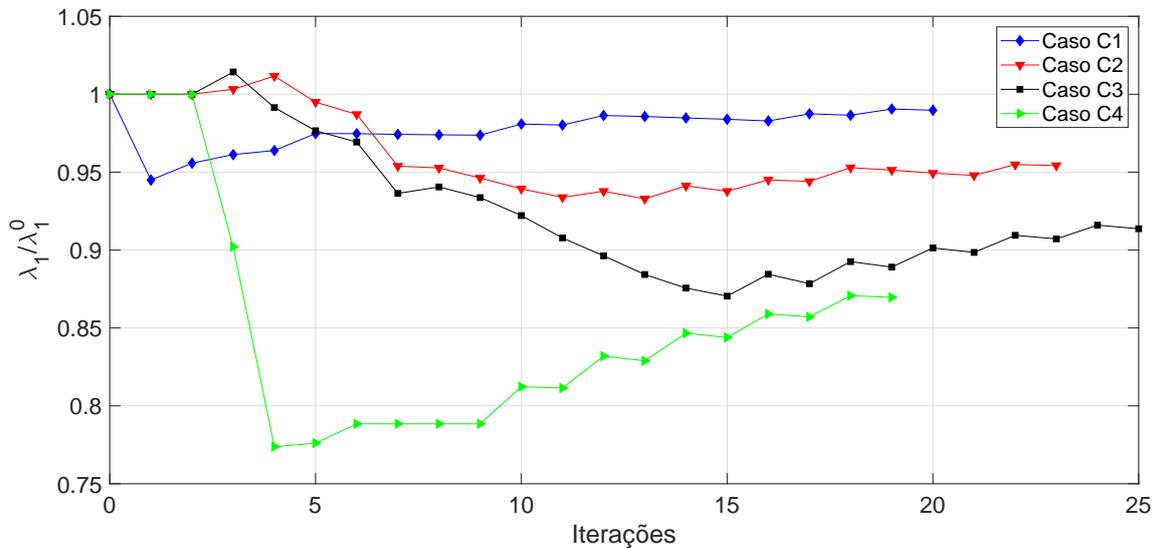


Figura 6.22 – Variação dos valores de λ_1/λ_1^0 para os casos A, B, C e D.

Na Figura 6.23 são apresentados os valores do quociente de λ_1 por λ_2 . Pode-se observar nos valores de λ_1/λ_2 são sempre menores que 1 e por isso não temos o problema de multiplicidade para o primeiro autovalor como acontece em Seyranian et al., (1994).

Na Figura 6.24 apresenta-se a geometria otimizada para cada um dos casos.

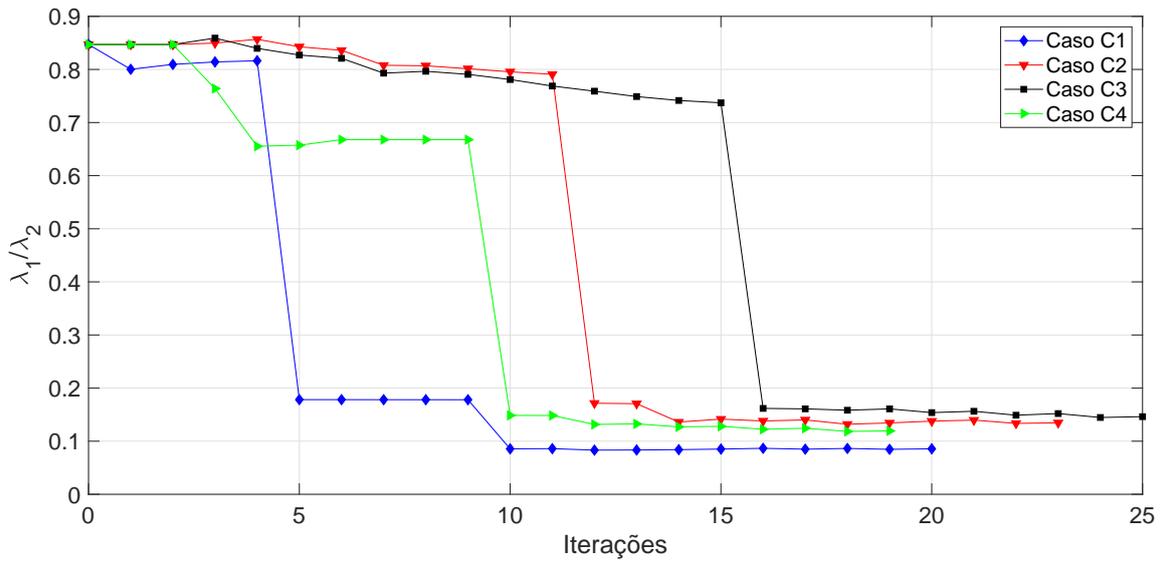


Figura 6.23 – Variação dos valores de λ_1/λ_2 para os casos A, B, C e D.

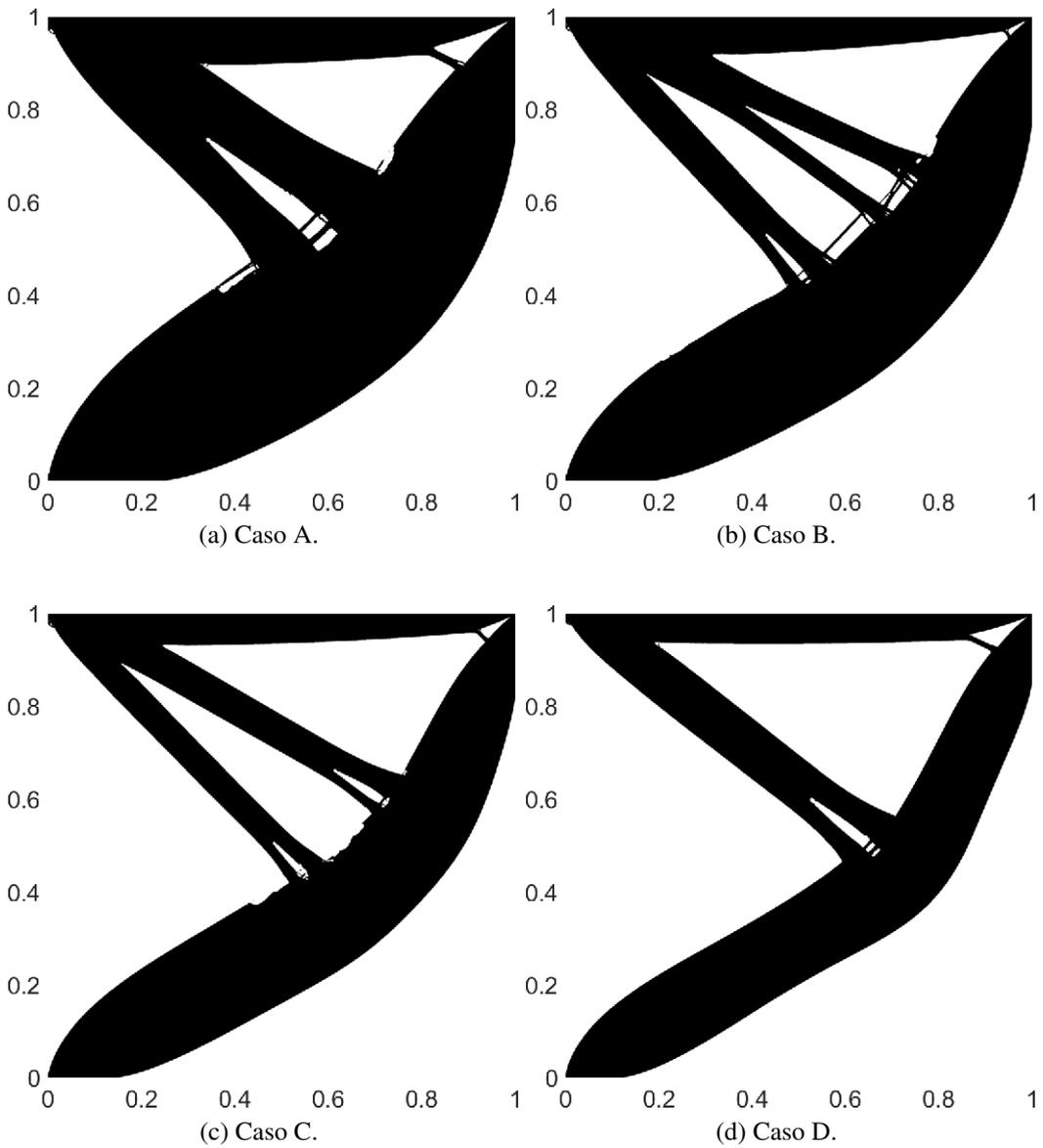


Figura 6.24 – Geometria otimizada para os casos considerados.

7 Conclusão

Existem atualmente diversas aplicações bem sucedidas e comprovadas da derivada topológica em inúmeras soluções de engenharia realizadas em diversos trabalhos publicados. Estas aplicações cada vez mais ratificam o método por sua grande capacidade em obter soluções rápidas, aproximadas e com alta precisão. Assim a derivada topológica se apresenta como uma ferramenta de grande versatilidade e com sua sólida base matemática, aliada às constantes pesquisas que resultam em maior eficiência e resultados cada vez melhores, vem tendo sua aplicação prática bastante ampliada.

No Capítulo 2 foi apresentado a origem do problema de autovalor para equação de Laplace, bem como foram apresentados os teoremas que garantem a positividade e unicidade do primeiro autovalor e também os valores dos autovalores e autofunções para um retângulo $R = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$. Dando continuidade foi apresentado a definição da derivada topológica e os métodos numéricos utilizados. Dentro da seção dos métodos numéricos, inicialmente foi apresentado os elementos finito utilizado, as malhas, o algoritmo de otimização e a metodologia utilizada em para resolver o problema de otimização de topologia. Uma das principais vantagens do algoritmo do MEF, é o sistema de refinamento da malha, pois inicialmente pode-se trabalhar com uma malha *mais grosseira* e conforme a geometria for ganhando forma é feito a refinamento da malha, até que a geometria obtenha a precisão desejada. Como consequência direta disso as primeiras iterações são muito rápidas de serem calculadas e portanto, toda a geometria final é obtida em pouco tempo computacional. Já para o método de elementos de contorno foi apresentado o método de reciprocidade dual, a solução fundamental, a discretização do domínio e a solução para o problema de autovalores e autofunções, além da metodologia de funcionamento do algoritmo utilizado para o problema de otimização de topologia.

No Capítulo 3 foram apresentados os problemas não perturbado e perturbado da equação de Helmholtz modificado e provado a existência da derivada topológica para os funcionais apresentados em (3.19). Uma vez provada a existência de derivada topológica, foi calculado a derivada topológica para os referidos funcionais e encontrada uma forma fechada para a mesma, bem como a estimativa para os termos remanescentes (resíduos) apresentados na expansão topológica foi rigorosamente provadas. Por ultimo foi apresentado a forma analítica fechada da derivada topológica para as aplicações analisadas, que foram: autovalor para a equação de Laplace e o problema de difusão para a transferência de calor. Vale resaltar que uma das principais vantagens da derivada topológica em relação a outros métodos de otimização topológica é a sua

forma analítica e fechada.

Já no Capítulo 4 foram apresentados os resultados numéricos para os dois problemas apresentados no Capítulo 3. Inicialmente foi considerado um problema de autovalor sem fonte de massa concentrada. O referido problema foi resolvido pelos métodos MEF e MEC, onde os resultados obtidos apresentaram boa concordância. Em seguida foi analisado o problema com massa concentrada e verificou-se que quando o valor da massa concentrada aumenta, o algoritmo retira menos material. Já quando é feita a variação do parâmetro ξ , o algoritmo retira mais material conforme o valor de ξ aumenta. Neste capítulo também foi analisada a influência das condições de contorno no resultado da geometria final. Além disso, uma análise foi realizada comparando o primeiro e o segundo autovalores à medida que o processo iterativo evoluía. O fenômeno de múltiplos autovalores não foi observado, eliminando assim qualquer presença da não diferenciabilidade do operador considerado. Desta forma, os experimentos numéricos confirmam a eficácia do método proposto. Por último foi analisado o problema da transferência de calor, o material de alta eficiência foi progressivamente substituído por um material de baixa condutividade térmica até que um projeto complexo com alto desempenho fosse alcançado. Para resolver este problema foi necessário um computador com grande capacidade de memória (64 GB). Isso se deve ao fato de a figura obtida ter várias ramificações e por consequência é necessário uma malha bem refinada (40.960.000 elementos e 20.486.401 nós) para que a rotina capture todas as informações do domínio.

Dando continuidade, no Capítulo 5 foram apresentados os problemas não perturbado e perturbado do problema de estruturas sobre apoio elástico associada ao problema de elasticidade linear bidimensional em estado plano de tensões e deformações e provado a existência da derivada topológica para os funcionais apresentados em (5.23). Após provado a existência de derivada topológica, foi calculado a derivada topológica para os referidos funcionais e encontrada uma forma fechada para a mesma, bem como a estimativa para os termos remanescentes (resíduos) apresentados na expansão topológica foi rigorosamente provadas. Por último foi apresentado a forma analítica fechada da derivada topológica para as aplicações analisadas, que foi otimização de estruturas planas.

Por último, no Capítulo 6 são apresentados os exemplos numéricos para o problema de vibração em estruturas planas. Foram estudados três exemplos, onde foi obtida a topologia otimizada, que foram comparados com outros trabalhos presentes na literatura e foi verificado que os resultados obtidos apresentaram boa concordância entre si. Além disso, novamente foi realizada uma análise comparando o primeiro e o segundo autovalores à medida que o processo iterativo evoluía. O fenômeno de múltiplos autovalores não foi observado, eliminando assim qualquer presença da não diferenciabilidade do operador considerado.

7.1 Contribuição do Trabalho

Como principais contribuições do trabalho destacam-se:

- Cálculo da derivada topológica do funcional (função custo) modificado da energia em um problema que envolve difusão;
- Cálculo da derivada topológica do primeiro autovalor do operador diferencial que representa o modelo de uma membrana;
- Cálculo da derivada topológica do primeiro autovalor do operador diferencial que representa o problema de elasticidade;
- Adaptação do algoritmo existente para Otimização Topológica, baseado na derivada topológica, utilizando métodos do elementos finitos e de contorno;

7.2 Trabalhos Futuros

- Implementar um método em elementos de contorno para obter a geometrias otimizadas para o Problema de Estruturas em Vibração Livre.
- Calcular a derivada topológica do funcional energia modificado para o problema Difusivo-Advectivo-Reativo.
- Utilizar a mesma estratégia adotada neste trabalho para calcular a derivada do primeiro autovalor para placa de Kirchhoff.
- Utilizar a mesma estratégia adotada neste trabalho para calcular a derivada do primeiro autovalor para placa de Reissner-Mindlin.
- Implementar um método em elementos finitos para obter a geometrias otimizadas para o problema Difusivo-Advectivo-Reativo.
- Implementar um método em elementos finitos para obter a geometrias otimizadas para placa de Kirchhoff.
- Implementar um método em elementos finitos para obter a geometrias otimizadas para placa de Reissner-Mindlin.

7.3 Trabalhos Realizados Durante a Execução Desta Tese

Artigos em congressos internacionais.

- *Topological derivative applied to the eigenvalue problem in a membrane structure* no 25th International Congress of Mechanical Engineering. (Ruscheinsky et al., 2019);
- *Topological derivatives applied in a problem of convection-diffusion of a heat exchanger* no 25th International Congress of Mechanical Engineering. (Carvalho et al., 2019);

- *A numerical routine for eigenvalue problem based on Boundary Element Method and Topological Derivative* no 25th International Congress of Mechanical Engineering. (Dias et al., 2019).
- *A Studying the parameters influence on the final topology obtained by sensitivity analysis in an eigenvalue problem* no XIV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. (Dias et al.,2019);

Artigos em revistas indexadas.

- *Topological asymptotic analysis of a diffusive-convective-reactive problem* na revista Engineering Computations. Fator de impacto 1.322 (Ruscheinsky et al., 2020);
- *Topological derivative-based topology optimization of plate structures under bending effects* na revista Structural and Multidisciplinary Optimization. Fator de impacto 3.377 (Carvalho et al., 2020)

Referências

- AMIGO, R. et al. Optimum design of flexensional piezoelectric actuators into two spatial dimensions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 52, n. 2, p. 760–789, 2016.
- AMIR, O. Stress-constrained continuum topology optimization: a new approach based on elasto-plasticity. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 55, n. 5, p. 1797–1818, 2017.
- AMMARI, H.; KANG, H. *Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2004. (Lecture Notes in Mathematics). ISBN 9783540445012.
- AMMARI, H.; KHELIFI, A. Electromagnetic scattering by small dielectric inhomogeneities. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 82, p. 749–842, 2003.
- AMSTUTZ, S. *Aspects théoriques et numériques en optimisation de forme topologique*. 2003. Tese (Doutorado) — Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse.
- AMSTUTZ, S. Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptotic Analysis*, v. 49, n. 1-2, p. 87–108, 2006.
- AMSTUTZ, S. Topological sensitivity analysis for some nonlinear PDE systems. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 85, n. 4, p. 540–557, 2006.
- AMSTUTZ, S. Analysis of a level set method for topology optimization. *Optimization Methods and Software*, v. 26, n. 4-5, p. 555–573, 2011.
- AMSTUTZ, S.; ANDRÄ, H. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, v. 216, n. 2, p. 573–588, 2006.
- AMSTUTZ, S. et al. Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 84, p. 733–756, 2010.
- AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological optimization of structures subject to von mises stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 41, n. 3, p. 407–420, 2010.
- AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological asymptotic analysis of the Kirchhoff plate bending problem. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, v. 17, n. 3, p. 705–721, 2011.
- AMSTUTZ, S. et al. Topological derivative-based topology optimization of structures subject to drucker–prager stress constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 233-236, p. 123–136, 2012.
- AMSTUTZ, S. et al. Minimal partitions and image classification using a gradient-free perimeter approximation. *Inverse Problems and Imaging*, v. 8, n. 2, p. 361–387, 2014.

AMSTUTZ, S. et al. Topological sensitivity analysis for elliptic differential operators of order 2m. *Journal of Differential Equations*, v. 256, p. 1735–1770, 2014.

ANFLOR, C.; MARCZAK, R. A boundary element approach for topology design in diffusive problems containing heat sources. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, n. 19, p. 4604 – 4611, 2009. ISSN 0017-9310.

ANFLOR, C. T. M. *Otimização Evolucionária e Topológica em Problemas Governados pela equação de Poisson Empregando o Método dos Elementos de Contorno*. 2007. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

ANFLOR, C. T. M. et al. Structural optimization using the boundary element method and topological derivative applied to a suspension trailing arm. *Engineering Optimization*, v. 50, n. 10, p. 1662–1680, 2018.

ANFLOR, C. T. M. et al. Structural optimization using the boundary element method and topological derivative applied to a suspension trailing arm. *Engineering Optimization*, v. 50, n. 10, p. 1662–1680, 2018.

ANTUNES, P.; FREITAS, P. Numerical optimization of low eigenvalues of the Dirichlet and Neumann Laplacians. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 154, n. 1, p. 235–257, 2012.

ANTUNES, P.; FREITAS, P. Optimisation of eigenvalues of the Dirichlet Laplacian with a surface area restriction. *Applied Mathematics & Optimization*, v. 73, n. 2, p. 313–328, 2016.

AUROUX, D. et al. Image restoration and classification by topological asymptotic expansion. In: *Variational formulations in mechanics: theory and applications*. Barcelona, Spain: [s.n.], 2007.

BADENHORST, H. A comparison of topology optimization and genetic algorithms for the optimization of thermal energy storage composites. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, v. 29, n. 9, p. 3454–3471, 2019.

BEBENDORF, M. *Hierarchical Matrices*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

BEJAN, A. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 40, n. 4, p. 799 – 816, 1997.

BEJAN, A. et al. *Thermal Design and Optimization*. New York: Wiley-Interscience, 1995.

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structure Optimization*, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology optimization. Theory, methods and applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

BIEZUNER, R. J. *Notas de Aula: Autovalores do Laplaciano*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2006.

BREBBIA, C. A. et al. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. [S.l.]: Springer Netherlands, 1992.

- CéA, J. et al. The shape and topological optimizations connection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 188, n. 4, p. 713–726, 2000.
- CANELAS, A. et al. A new method for inverse electromagnetic casting problems based on the topological derivative. *Journal of Computational Physics*, v. 230, p. 3570–3588, 2011.
- CARVALHO, F. et al. Topological derivatives applied in a problem of convection-diffusion of a heat exchanger. In: *25th ABCM International Congress of Mechanical Engineering*. Uberlândia, Brasil: [s.n.], 2019. p. 1–8.
- CARVALHO, F. et al. Topological derivative-based topology optimization of plate structures under bending effects. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020.
- CASTRO, A. A. *Curso de Teoria da Medida*. Rio de Janeiro: SBM, 2008. (Projeto Euclides).
- CHENG, A.; CHENG, D. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 29, p. 268–302, 2005.
- DBOUK, T. A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization. *Applied Thermal Engineering*, v. 112, p. 841 – 854, 2017.
- DEATON, J.; GRANDHI, R. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 49, n. 1, p. 1–38, 2014.
- DENG, H. et al. Distortion energy-based topology optimization design of hyperelastic materials. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 59, n. 6, p. 1895–1913, 2019.
- DIAS, D. G. G. *Otimização Topológica para Problemas de Autovalor Usando o Método dos Elementos de Contorno e a Derivada Topológica*. 2020. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília.
- DIAS, D. G. G. et al. Studying the parameters influence on the final topology obtained by sensitivity analysis in an eigenvalue problem. In: *XIV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica*. Cartagena, Colombia: [s.n.], 2019.
- DIAS, D. G. G. et al. A numerical routine for eigenvalue problem based on boundary element method and topological derivative. In: *25th ABCM International Congress of Mechanical Engineering*. Uberlândia, Brasil: [s.n.], 2019. p. 1–8.
- DIJK, N. et al. Level-set methods for structural topology optimization: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 48, n. 3, p. 437–472, 2013.
- ESCHENAUER, H. A. et al. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural optimization*, v. 8, n. 1, p. 42 – 51, 1994.
- ESCHENAUER, H. A.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures: A review. *Applied Mechanics Reviews*, v. 54, n. 4, p. 331, 2001. ISSN 00036900.
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. Providence,: American Mathematical Society, 1998.
- FARIA, J. R. *Análise de sensibilidade topológica de segunda ordem*. 2007. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis.
- FEIJÓO, R. A. A new method in inverse scattering based on the topological derivative. *Inverse Problems*, v. 20, n. 6, p. 1819–1840, 2004.

- FEIJÓO, R. A. et al. The topological derivative for the poisson's problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 13, n. 12, p. 1825–1844, 2003.
- FERREIRA, A.; NOVOTNY, A. A. A new non-iterative reconstruction method for the electrical impedance tomography problem. *Inverse Problems*, v. 33, n. 3, p. 035005, 2017.
- GARREAU, S. et al. The topological asymptotic for PDE systems: The elasticity case. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 39, n. 6, p. 547–555, 2001.
- GERSBORG-HANSEN, A. et al. Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 31, n. 4, p. 251–259, 2006.
- GIUSTI, S. et al. Topological derivative for steady-state orthotropic heat diffusion problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 40, p. 53–64, 02 2010.
- GIUSTI, S. M. *Análise de sensibilidade topológica em modelos constitutivos multi - escala*. 2009. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis.
- GIUSTI, S. M.; NOVOTNY, A. A. Topological derivative for an anisotropic and heterogeneous heat diffusion problem. *Mechanical Research Communication*, v. 46, p. 26–33, 2012.
- GRAVESEN, J. et al. On the sensitivities of multiple eigenvalues. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 44, p. 583 – 587, 2011.
- GUILLAUME, P.; IDRIS, K. S. The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 41, n. 4, p. 1042–1072, 2002.
- GUILLAUME, P.; IDRIS, K. S. Topological sensitivity and shape optimization for the stokes equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 43, n. 1, p. 1–31, 2004.
- HABER, E. A multilevel, level-set method for optimizing eigenvalues in shape design problems. *Journal of Computational Physics*, v. 198, n. 2, p. 518–534, 2004.
- HAUG, E.; ROUSSELET, B. Design sensitivity analysis in structural mechanics.ii. eigenvalue variations. *Journal of Structural Mechanics*, v. 8, n. 2, p. 161–186, 1980.
- HINTERMÜLLER, M. et al. Second-order topological expansion for electrical impedance tomography. *Advances in Computational Mathematics*, v. 36, n. 2, p. 235–265, 2012.
- HUANG, X.; XIE, Y. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 43, n. 14, p. 1039 – 1049, 2007.
- HUANG, X.; XIE, Y.-M. A further review of eso type methods for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 41, n. 5, p. 671–683, 2010.
- HUANG, X. et al. Evolutionary topological optimization of vibrating continuum structures for natural frequencies. *Computers & Structures*, v. 88, n. 5, p. 357 – 364, 2010.
- JENSEN, J. S.; PEDERSEN, N. L. On maximal eigenfrequency separation in two-material structures: The 1D and 2D scalar cases. *Journal of Sound and Vibration*, v. 289, n. 4-5, p. 967–986, 2006.
- KOZLOV, V. A. et al. *Asymptotic Analysis of Fields in Multi-Structures*. Oxford: Clarendon Press, 1999.

- KUTLER, J. R.; SIGILLITO, V. G. Eigenvalues of the Laplacian in two dimensions. *SIAM REVIEW*, v. 26, n. 2, p. 163–193, 1984.
- LARRABIDE, I. *Processamento de imagens via derivada topológica e suas aplicações na modelagem e simulação computacional do sistema cardiovascular humano*. 2007. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis.
- LAURAIN, A. A level set-based structural optimization code using fenics. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 58, n. 3, p. 1311–1334, 2018.
- LI, B. et al. Constructal design of internal cooling geometries in heat conduction system using the optimality of natural branching structures. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 115, p. 16 – 28, 2017.
- LI, R. et al. New analytic free vibration solutions of rectangular thin plates resting on multiple point supports. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 110, p. 53 – 61, 2016.
- LIN, Q. et al. Investigation into the topology optimization for conductive heat transfer based on deep learning approach. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 97, p. 103 – 109, 2018.
- LITTLE, R. W. *Elasticity*. New Jersey: Prentice-Hall, 1973.
- LIU, Y. *Fast Multipole Boundary Element Method: Theory and Applications in Engineering*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- LOHAN, J. et al. Topology optimization for heat conduction using generative design algorithms. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 55, n. 3, p. 1063–1077, 2017.
- LOPES, C. G. *Síntese de mecanismos flexíveis com restrição em tensão e otimização topológica de estruturas sujeitas a cantato e atrito*. 2017. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis.
- MACHADO, T. J. et al. A new one-shot pointwise source reconstruction method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 40, n. 15, p. 1367–1381, 2017.
- MARCZAK, R. J. Optimization of elastic structures using boundary elements and a topological-shape sensitivity formulation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, n. 1, p. 99–117, 2008.
- MASUR, E.; MRÓZ, Z. Non-stationary optimality conditions in structural design. *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, n. 6, p. 503 – 512, 1979.
- MUNK, D. J. et al. Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 52, n. 3, p. 613–631, 2015.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied Mathematical Modelling*, v. 7, n. 3, p. 157–162, 1983.
- NAZAROV, S.; SOKOŁOWSKI, J. Shape sensitivity analysis of eigenvalues revisited. *Control and Cybernetics*, v. 37, n. 4, p. 999–1012, 2008.
- NAZAROV, S. A.; SOKOŁOWSKI, J. The topological derivative of the Dirichlet integral due to formation of a thin ligament. *Siberian Mathematical Journal*, v. 45, n. 2, p. 341–355, 2004.
- NECHES, L. C.; CISLINO, A. P. Topology optimization of 2d elastic structures using boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 32, n. 7, p. 533–544, 2008.

- NOVOTNY, A. A. *Análise de sensibilidade topológica*. 2003. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis.
- NOVOTNY, A. A. et al. Topological sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 7-8, p. 803–829, 2003.
- NOVOTNY, A. A. et al. Topological sensitivity analysis for three-dimensional linear elasticity problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 41–44, p. 4354–4364, 2007.
- NOVOTNY, A. A.; SALES, V. Energy change to insertion of inclusions associated with a diffusive/convective steady-state heat conduction problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 39, n. 5, p. 1233–1240, 2015.
- NOVOTNY, A. A.; SOKOŁOWSKI, J. *Topological derivatives in shape optimization. Interaction of Mechanics and Mathematics*. Berlin: Springer, 2013.
- NOVOTNY, A. A.; SOKOŁOWSKI, J. *Análise de Sensibilidade Topológica - Teoria e Aplicações*. São Carlos: SBMAC, 2014. (Notas de Matemática Aplicada).
- NOVOTNY, A. A.; SOKOŁOWSKI, J. *An Introduction to the Topological Derivative Method*. Switzerland: Springer International Publishing, 2020.
- NOVOTNY, A. A. et al. Topological sensitivity analysis of a multi-scale constitutive model considering a cracked microstructure. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 33, n. 5, p. 676–686, 2010.
- NOVOTNY, A. A. et al. Topological derivatives of shape functionals. Part I: Theory in singularly perturbed geometrical domains. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 180, n. 2, p. 341–373, 2019.
- NOVOTNY, A. A. et al. Topological derivatives of shape functionals. Part II: First order method and applications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 180, n. 3, p. 683–710, 2019.
- NOVOTNY, A. A. et al. Topological derivatives of shape functionals. Part III: Second order method and applications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 181, n. 1, p. 1–22, 2019.
- NOVOTNY, A. A. et al. *Applications of the Topological Derivative Method*. Switzerland: Springer International Publishing, 2019.
- OSHER, S.; FEDKIW, R. Level set methods: An overview and some recent results. *Journal of Computational Physics*, v. 169, n. 2, p. 563–502, 2001.
- OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Front propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, v. 79, n. 1, p. 12–49, 1988.
- OUDET, E. Numerical minimization of eigenmodes of a membrane with respect to the domain. *ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations*, v. 10, n. 3, p. 315–330, 2004.
- PEREIRA, C. E. L.; BITTENCOURT, M. L. Topological sensitivity analysis in large deformation problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 37, n. 2, p. 149–167, 2008.

- ROBERTS, S. B. The eigenvalue problem for two-dimensional regions with irregular boundaries. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, v. 89, p. 618–622, 1967.
- ROSA, V. S. D. *Análise de sensibilidade topológica do modelo de flexão de placas de Reissner-Mindlin*. 2015. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis.
- RUSCHEINSKY, D. et al. Topological derivative applied to the eigenvalue problem in a membrane structure. In: *25th ABCM International Congress of Mechanical Engineering*. Uberlândia, Brasil: [s.n.], 2019. p. 1–8.
- RUSCHEINSKY, D. et al. Topological asymptotic analysis of a diffusive–convective–reactive problem. *Engineering Computations*, 2020.
- SÁ, L. F. N. et al. Topological derivatives applied to fluid flow channel design optimization problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 54, n. 2, p. 249–264, 2016.
- SALES, V. et al. Energy change to insertion of inclusions associated with the reissner-mindlin plate bending model. *International Journal of Solids and Structures*, v. 59, p. 132–139, 2015.
- SEYRANIAN, A. P. et al. Multiple eigenvalues in structural optimization problems. *Structural optimization*, v. 8, n. 4, p. 207–227, 1994.
- SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 48, p. 1031–1055, 2013.
- SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural optimization*, v. 16, n. 1, p. 68–75, 1998.
- SOKOŁOWSKI, J.; ŻOCHOWSKI, A. *On topological derivative in shape optimization*. France, 1997.
- SOKOŁOWSKI, J.; ŻOCHOWSKI, A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 37, n. 4, p. 1251–1272, 1999.
- SOKOŁOWSKI, J.; ZOLÉSIO, J. P. *Introduction to Shape Optimization - Shape Sensitivity Analysis*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.
- SUBRAMANIAM, V. et al. Topology optimization of conductive heat transfer devices: An experimental investigation. *Applied Thermal Engineering*, v. 131, p. 390 – 411, 2018.
- SURESH, K. A 199-line matlab code for pareto-optimal tracing in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 42, n. 5, p. 665–679, 2010.
- TORII, A. J.; FARIA, J. R. Structural optimization considering smallest magnitude eigenvalues: a smooth approximation. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 39, n. 5, p. 1745–1754, 2017.
- UHLENBECK, K. Eigenfunctions of Laplace operator. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 78, p. 1073–1076, 1972.
- VAN GOETHEM, N.; NOVOTNY, A. A. Crack nucleation sensitivity analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 33, n. 16, p. 1978–1994, 2010.
- XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, v. 49, n. 1, p. 885–896, 1993.

ZHAO, C. et al. A generalized evolutionary method for natural frequency optimization of membrane vibration problems in finite element analysis. *Computers and Structures*, v. 66, n. 2, p. 353–364, 1998.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. The coc algorithm, part ii: Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 89, n. 1, p. 309 – 336, 1991. Second World Congress on Computational Mechanics.