Gonçalves, Lucas de Assis

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Integração Sobre Variedades Flag

Lucas de Assis Gonçalves

Brasília, Dezembro de 2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Instituto de Física

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Integração Sobre Variedades Flag

Lucas de Assis Gonçalves

Dissertação de mestrado submetida ao Instituto de Física
como requisito parcial para obtenção
do grau de mestre em Física

Banca Examinadora

Prof. Dr. Aleksandr Nikolaievich Pinzul ______________________
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Arsen Melikyan ______________________
Avaliador, IF-UnB

Prof. Dr. Daniel Vieira Lopes ______________________
Avaliador, IFG

RESUMO

Existem modelos dentro da física e da matemática que dependem de integrais sobre matrizes, que comumente são reduzidas a integrais sobre variedades *flag* . Para entender como tratar esses modelos, será feita uma extensa revisão sobre grupos e álgebras de Lie, apresentando posteriormente como obter o elemento de volume invariante dessas variedades. Então, é discutido sobre como pode ser aplicado em um sistema concreto que utiliza outro método de solução.

ABSTRACT

There are several models within physics and mathematics that depend on integrals, usually reduced to integral over flag manifolds. To understand how to deal with those models, a thorough review on Lie groups and algebras is made, then presenting a method to obtain invariant volume elements for those manifolds. Finally, there is a discussion on how to apply it to a concrete system that uses a different approach.

TABLE OF CONTENTS

1 INTRODUÇÃO

Com o avanço do estudo das teorias de calibre dentro das teorias de campo, uma das abordagens é modelar a evolução temporal das linhas de fluxo de excitações fundamentais como uma teoria de cordas. Na tentativa de estender as integrais de caminho para o modelo proposto, somos levados a considerar a soma sobre todas as possíveis configurações de superfícies bidimensionais com fronteira delimitada [1], em analogia à soma sobre todos os caminhos que uma partícula pode percorrer de um ponto inicial até um ponto final. Essa abordagem leva naturalmente a um acoplamento entre teoria conforme de campos e gravitação $2D$.

Tentativas de apresentar uma descrição mais rigorosa do formalismo levam a somas sobre triangulações, que é, em resumo, uma maneira de se discretizar uma superfície, descrevendo-a como uma união de triângulos equiláteros (ou outra forma desejada) que formam a original tomando o limite em que a área dos triângulos tende a zero. Esse modelo nos leva a cálculos do valor esperado de funções definidas sobre matrizes, daí recebendo o nome de *modelo de matrizes aleatórias*. A nova abordagem introduz a necessidade do cálculo de uma *função partição* para o sistema [26], em geral dada por

$$Z = \int dM e^{-S(M)}, \tag{1.1}$$

em que $S(M)$ é comumente chamada de *ação*.

Muitos casos, a ação é o traço de um polinômio na matriz M. Isso simplifica enormemente o problema, uma vez que podemos considerar apenas matrizes diagonalizáveis que, portanto, podem ser escritas $M = UM^{(d)}U^{\dagger}, U \in SU(N)$ e $M^{(d)}$ diagonal. Essa mudança de variáveis é conveniente pois a ação, devido à invariância do traço sob conjugação, passa a ser função apenas dos autovalores $m_1, ..., m_N$ de M, que assumimos diferentes. Com isso, (1.1) passa a ser

$$Z = \int \prod_{i=1}^{N} dm_i \prod_{i<j} |m_i - m_j|^2 e^{-S(m_1,...,m_N)} \int dU, \tag{1.2}$$

em que o quadrado do determinante de Vandermonde dos autovalores de M, $\prod_{i<j} |m_i - m_j|^2$, é o Jacobiano da mudança de variáveis e dU é a medida de Haar do grupo unitário especial, apropriadamente normalizada de modo que $\int dU = 1$, não contribuindo para o cálculo.

Esses casos foram estudados utilizando-se, em especial, o método do ponto de sela e, em geral, os resultados obtidos ao tomar o limite $N \to \infty$ coincidem com o que pode ser calculado analiticamente sem a necessidade de se discretizar as superfícies [23, 24, 25]. Esses resultados por si só já são de grande relevância teórica, pois matrizes aleatórias aparecem no estudo de uma variedade de campos na própria e dentro da matemática mas, no caso da gravitação quântica, não é suficiente para contar toda a história. Isso porque a função partição de uma superfície com área fixa A é

$$Z(A) \sim A^{(\gamma-2)\chi/2-1}, \tag{1.3}$$

em que χ é a característica de Euler da superfície e γ é um "expoente crítico"[27] da teoria dado por

$$\gamma = \frac{1}{12}(c - 1 - \sqrt{(c-1)(c-25)}). \tag{1.4}$$

Aqui c é a carga central do sistema.

Portanto, apesar de apresentar sucesso nas previsões, o modelo possui uma limitação: faz sentido apenas para campos com carga central que não atravessam a barreira $c = 1$, implicando imediatamente que a teoria só é válida em duas dimensões.

Para tentar contornar essa dificuldade, alguns autores passaram a utilizar das *redes de Manhattan*, um meio distinto de se discretizar as superfícies. Isso, no entanto, introduz novas dificuldades técnicas de cálculo, pois a nova ação passa a possuir um "termo cinético"no qual a parte angular, integração sobre o grupo unitário, não desacopla do resto como em (1.2). Esses problemas só possuem soluções aproximadas ou através de perturbações, sendo que nenhuma das abordagens possui respostas satisfatórias fora de um certo regime [25].

Estamos particularmente interessados no modelo apresentado em [5], cuja ação resultante é

$$S(M) = tr[M^\dagger(\sigma_a \otimes \tau^\mu)]I^a tr[M(\sigma_a \otimes \tau^\mu)] - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{d_k}{k} tr(M^k + (M^\dagger)^k), \tag{1.5}$$

e $\sigma_a \otimes \tau^\mu$ são os elementos de uma base conveniente e I^a são parâmetros do modelo. O cálculo apresentado, apesar de reproduzir os resultados em que o termo cinético não está presente e ser facilmente generalizado para outros sistemas, possui certas passagens que não são ainda claras, sobretudo na escolha da medida usada na integração.

Portanto, o presente trabalho tem como objetivo principal dar um tratamento matemático mais rigoroso a esse cálculo, a fim de corroborar ou refutar os resultados obtidos. Para tal, faremos uma extensa revisão sobre os conceitos necessários para entender a construção e propor uma solução.

Como o espaço de integração é o grupo unitário, um grupo de Lie, fatorizado por seu toro máximo, estamos lidando com o que é conhecido por variedade *flag* e estas admitem algumas estruturas convenientes. Em especial, sempre existe um elemento de volume que é invariante sob a ação do grupo de Lie que a define. É a partir desse elemento de volume que planejamos construir a medida de integração. Para que possamos entender a estrutura por trás desse tipo de espaço e obter o resultado desejado, começamos introduzindo as variedades diferenciáveis e suas propriedades mais básicas. A seguir, fazemos um estudo aprofundado de grupos e álgebras de Lie, sempre especificando como as propriedades são traduzidas para $U(N)$ e $SU(N)$. Então, estudamos as já mencionadas estruturas especiais das variedades *flag*. O próximo passo é derivar uma expressão concreta para esse elemento de volume usando fibrados de linha construídos com base em representações especiais do grupo. No mesmo capítulo, apresentamos a fórmula de Duistermaat-Heckman, que pode vir a ser uma maneira mais simples de se calcular a integral resultante. Depois, descrevemos detalhadamente os cálculos feitos em [5], explicitando quais e por que certas passagens são problemáticas, para, enfim, aplicar o que foi desenvolvido nos capítulos anteriores na tentativa de sistematicamente calcular algumas das integrais envolvidas. No último capítulo damos nossas conclusões e perspectivas para desenvolvimentos futuros.

2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS E GEOMETRIA

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos básicos de geometria diferencial, começando pela definição de variedade diferenciável, seguida por uma breve revisão sobre vetores, formas e tensores. Então definimos a integração sobre variedades, em especial sobre as variedades Riemmanianas. Por fim, introduzimos as noções sobre fibrados. O capítulo segue a abordagem contida em [2], que pode ser consultado para mais detalhes.

2.1 INTRODUÇÃO

Variedades são os espaços nos quais podemos generalizar mais naturalmente os conceitos geométricos do espaço euclidiano. De uma maneira simplificada, podemos dizer que uma variedade é um espaço localmente homeomórfico a um subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Uma curva ou uma superfície como a esfera são exemplos simples de variedades, mas que mostram que o conceito de variedade engloba os casos mais familiares da geometria diferencial euclidiana, chegando até espaços mais abstratos e com estruturas adicionais como os grupos e álgebras de Lie, e variedades *flag*, como será visto mais à frente.

Definição 2.1. *M é uma variedade diferenciável m-dimensional real quando*

1. *M é um espaço topológico;*
2. *M possui uma coleção de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}$, chamados de **cartas**, na qual $\{U_i\}$ é uma cobertura aberta de M e φ_i é um homeomorfismo de U_i a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. A união de todas as cartas é denominada **atlas**;*
3. *Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então as **funções de transição** $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \mapsto \varphi_i(U_i \cap U_j)$ são suaves.*

Cada conjunto U_i é denominado uma *vizinhança de coordenada*, em que cada ponto p tem como coordenadas $\varphi_i(p) = (x^1(p), x^2(p), ..., x^m(p)) \in \mathbb{R}^m$. O terceiro ponto da definição implica que se um mesmo ponto pertence a duas vizinhanças diferentes, cada coordenada desse ponto em uma carta é uma função suave das coordenadas da outra carta. Isto é, se $p \in U_i \cap U_j$, tem como coordenadas $x^\mu (1 \leq \mu \leq m)$ em U_i e também $y^\nu (1 \leq \nu \leq m)$ em U_j, então $x^\mu = x^\mu(y^\nu)$ é suave, e vice-versa.

Se há dois atlas diferentes $\{(U_i, \varphi_i)\}$ e $\{(V_j, \xi_j)\}$ tais que a união deles é novamente um atlas, eles são ditos *compatíveis*. A união de todos os atlas compatíveis de uma variedade é chamada de *atlas completo*.

Exemplo 2.1. *A variedade mais simples é o próprio $\mathbb{R}^m$, em que usamos como carta qualquer conjunto aberto e como função de coordenadas a identidade.*

Exemplo 2.2. *O conjunto de matrizes $n \times m$ reais $M_{n,m}(\mathbb{R})$ é uma variedade, uma vez que pode ser identificado com $\mathbb{R}^{nm}$, usando as mesmas cartas do exemplo anterior. Como o determinante é uma função* *contínua, $det^{-1}\{0\}$ é um conjunto fechado, portanto*

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{g \in M_{n,n} | g \text{ é inversível}\} \tag{2.1}$$

é um conjunto aberto de $M_{n,n}$, portanto a interseção de um atlas de $M_{n,n}$ com $GL(n,\mathbb{R})$ é um atlas de $GL(n,\mathbb{R})$, tornando este uma variedade diferenciável de dimensão n^2.

Exemplo 2.3. *Outro exemplo familiar de variedade é a esfera unitária n-dimensional S^n, realizada em $\mathbb{R}^{n+1}$ como*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \ \|x\| = 1\}.$$

Um possível atlas é dado pelos conjuntos

$$U_{i+} = \{(x^0, x^1, ..., x^i, ..., x^n) \in S^n | x^i > 0\}$$

e

$$U_{i-} = \{(x^0, x^1, ..., x^i, ..., x^n) \in S^n | x^i < 0\},$$

junto com as funções $\varphi_{i\pm} : U_{i\pm} \mapsto \mathbb{R}^n$ definidas por

$$\varphi_{i\pm}(x^0, x^1, ..., x^i, ..., x^n) = (x^0, ..., x^{i-1}, x^{i+1}, ...x^n),$$

que são suaves. Observe que, apesar de terem a mesma imagem, o domínio de φ_{i+} difere daquele de φ_{i-}. Essas funções são as projeções dos hemisférios $U_{i\pm}$ no plano $x_i = 0$.

Exemplo 2.4. *O espaço de todas as retas passando pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$, nomeado espaço projetivo real, $\mathbb{R}P^n$, é outro exemplo de variedade real. Se um ponto $x = (x^0, ..., x^n)$ e outro $y = (y^0, ..., y^n)$ definem a mesma reta, então esses pontos devem ser identificados. Para tanto, introduza uma relação de equivalência dada por $x \sim y$ se $x = \lambda y, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então $\mathbb{R}P^n$ é descrito como $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$. Não podemos usar $(x^0, ..., x^n)$, as chamadas coordenadas homogêneas, como coordenadas, já que elas não seriam independentes do representativo. Assim, como cartas usaremos os conjuntos*

$$U_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x^i \neq 0\},$$

combinados às coordenadas inomogêneas

$$\xi^j_{(i)} = \frac{x^j}{x^i}.$$

Perceba que essas coordenadas são bem definidas, uma vez que $x^i \neq 0$ e também são independentes do representativo, já que se $x = \lambda y$, então $\frac{x^j}{x^i} = \frac{\lambda y^j}{\lambda y^i}$. Dessa forma, $\varphi_i : U_i \mapsto \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\varphi_i(x^0, ..., x^n) = \left(\frac{x^0}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^n}{x^i}\right),$$

com $\frac{x^i}{x^i} = 1$ omitido.

As funções de transição são facilmente encontradas. Suponha $x = (x^0, ..., x^n) \in U_i \cap U_j$ e atribua duas coordenadas $\xi^j_{(i)} = \frac{x^j}{x^i}$ e $\xi^j_{(k)} = \frac{x^j}{x^k}$. Então, $\psi_{ij} = \left(\frac{x^i}{x^j}\right) \xi^k_{(i)}$.

2.2 CURVAS, ESPAÇO TANGENTE E ESPAÇO COTANGENTE

Agora que as principais definições sobre variedades foram dadas, é possível começar a estudar as estruturas presentes. Primeiramente, necessitamos de uma curva: uma aplicação suave c de um intervalo aberto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ em M, e $f \in \mathcal{F}(M)$, o conjunto de todas as funções suaves de M em $\mathbb{R}$. Por conveniência, consideramos que $t = 0 \in (a, b)$, sem perda de generalidade.

Definição 2.2. *Um vetor tangente X em um ponto p é o operador linear cuja ação em $f(c(t))$ dá a derivada direcional ao longo da curva $c(t)$, no ponto $p = c(0)$, isto é*

$$X[f] = \frac{df(c(t))}{dt}\Big|_{t=0}. \tag{2.2}$$

Em termos de coordenadas locais é escrito, utilizando a convenção de Einstein de somatórios,

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt}\Big|_{t=0}, \tag{2.3}$$

de onde tiramos a forma explícita do vetor

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{2.4}$$

com $X^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}\big|_{t=0}$. Note que quando escrevemos $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$, o que está implicitamente escrito é $\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x^\mu}$.

Se duas curvas $c_1(t)$ e $c_2(t)$ satisfazem

$$c_1(0) = c_2(0)$$

e

$$\frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{dx^\mu(c_2(t))}{dt}\Big|_{t=0},$$

então elas devem ser identificadas. Assim, sendo mais preciso, o vetor é definido em relação à classe de equivalência de curvas e não em relação a uma curva específica.

A coleção de todos os vetores tangentes em um ponto p forma um espaço linear T_pM, o **espaço tangente** de M em p. A base canônica, comumente chamada *base de coordenadas*, é $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $(1 \leq \mu \leq m)$, o que implica em $dim\ T_pM = dim\ M$.

Como T_pM é um espaço linear, podemos também falar do seu espaço de funcionais lineares T_p^*M, o *espaço dual* ou **espaço cotangente**. Os elementos do espaço cotangente são as **1-formas**. Se $\omega = \omega_\mu dx^\mu \in T_p^*M$, sua ação sobre um vetor é

$$\langle \omega, V \rangle = \omega_\mu X^\nu \Big\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big\rangle = \omega_\mu X^\mu, \tag{2.5}$$

definindo $\{dx^\mu\}$ como a base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$, de forma que $\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\rangle \equiv \delta^\nu_\mu$.

Vetores e 1-formas existem independentemente do sistema de coordenadas, o que torna claro que, dadas duas cartas com interseção não vazia, deve ser verdade que

$$X = X^{\mu}\frac{\partial}{x^{\mu}} = X'^{\nu}\frac{\partial}{y^{\mu}}, X \in T_pM$$
$$\omega = \omega_{\alpha}dx^{\alpha} = \omega'_{\beta}dx^{\beta}, \omega \in T_p^*M, \tag{2.6}$$

do que segue que as coordenadas devem estar relacionadas por

$$X'^{\mu} = X^{\nu}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{2.7}$$

e

$$\omega'_{\mu} = \omega_{\nu}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\mu}} \tag{2.8}$$

Podemos ainda generalizar os vetores e 1-formas ao construir os **tensores**. Um tensor do tipo (r, q) é um funcional multilinear que atua no espaço

$$\otimes^r T_p^*M \otimes^q T_pM.$$

Um tensor arbitrário T pode ser escrito em termos das bases de T_pM e T_p^*M como

$$T = T^{\mu_1\mu_2...\mu_r}_{\nu_1\nu_2...\nu_q}\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes ... \otimes dx^{\nu_q}, \tag{2.9}$$

e sua ação é dada por

$$T(\omega_1, ..., \omega_r; V_1, ..., V_q) = T^{\mu_1...\mu_r}_{\nu_1...\nu_q}\omega_{1\mu_1}...\omega_{r\mu_r}V_1^{\nu_1}...V_q^{\nu_q}. \tag{2.10}$$

Assinalando um vetor a cada ponto da variedade de forma suave, obtemos um **campo vetorial**. Uma diferente caracterização é dizer que V é um campo vetorial se $V[f] \in \mathcal{F}, \forall f \in \mathcal{F}$. O conjunto de todos os campos vetoriais é $\mathcal{X}(M)$. Com as 1-formas e tensores prosseguimos da mesma forma. O conjunto das 1-formas é denotado por $\Omega^1(M)$ e dos campos tensoriais $\tau^p_q(M)$. Vale ressaltar que tanto os campos vetoriais quanto as 1-formas são campos tensoriais do tipo $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Além disso, por convenção $\tau^0_0(M) \equiv \mathcal{F}(M)$.

2.3 PUSHFORWARDS E PULLBACKS

Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e $f : M \mapsto N$ uma aplicação suave. Então, f induz o **pushforward** $f_* : T_pM \mapsto T_{f(p)}N$, construído da seguinte maneira: se $g \in \mathcal{F}(N)$, então $g \circ f \in \mathcal{F}(M)$, de forma que, para $X \in T_pM$, $f_*X \in T_{f(p)}N$ e

$$f_*X[g] = X[g \circ f]. \tag{2.11}$$

Se escolhermos uma carta (U,φ) em M e (V,ψ) em N, então é possível escrever a forma explícita de f_*X. Em geral, $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $f_*X = W^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}$, portanto

$$W^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}[g \circ \psi^{-1}(y)] = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)].$$

Escolhendo $g = y^\alpha$, obtemos

$$W^\alpha = X^\mu \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^\mu}, \tag{2.12}$$

com $y(x) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$.

De modo parecido podemos também induzir uma aplicação $f^* : T^*_{f(p)}N \mapsto T^*_p M$ entre os espaços cotangentes, denominado **pullback**. Se tomarmos $X \in T_pM$ e $\omega \in T^*_{f(p)}N$, o pullback $f^*\omega$ é definido como

$$\langle f^*\omega, X\rangle = \langle \omega, f_*X\rangle. \tag{2.13}$$

Colocando $\omega = \omega_\mu dy^\mu$, $f^*\omega = \xi_\nu dx^\nu$ e $X = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ na definição do pushforward, vemos que as componentes são dadas por

$$\xi_\alpha = \omega_\mu \frac{\partial y^\mu(x)}{\partial x^\alpha}. \tag{2.14}$$

2.4 CURVAS INTEGRAIS

Definição 2.3. *Seja M uma variedade diferenciável. Dado um campo vetorial X e $I \subseteq \mathbb{R}$, então $\sigma(t,x_0) : I \mapsto M$ é uma **curva integral** de X se o vetor tangente a esta curva em um ponto x é $X|_x$ e $\sigma(0,x_0) = x_0$*

Portanto, se $\sigma(t,x_0)$ é uma curva integral, deve satisfazer

$$\frac{d}{dt}\sigma^\mu(t,x_0) = X^\mu(t,x_0), \tag{2.15}$$

com a condição inicial $\sigma(0,x_0) = x_0$. Devido aos conhecidos resultados sobre existência e unicidade das soluções de equações diferenciais, sabemos que uma curva integral sempre existe, ao menos localmente, e é a solução do sistema acima.

Se não fixarmos um ponto inicial x_0, e em vez disso considerarmos σ como uma aplicação de $I \times M$ em M, temos o chamado **fluxo** gerado por X. Além disso, um fluxo satisfaz

$$\sigma(t,\sigma(s,x_0)) = \sigma(t+s,x_0), \tag{2.16}$$

sendo ambas soluções da mesma equação diferencial com a mesma condição inicial. O lado esquerdo satisfaz

$$\frac{d}{dt}\sigma^\mu(t,\sigma(s,x_0)) = X^\mu(\sigma(t,\sigma(s,x_0))),$$

e como condição inicial

$$\sigma(0,\sigma(s,x_0)) = \sigma(s,x_0),$$

enquanto o lado direito

$$\frac{d}{dt}\sigma^{\mu}(t+s,x_0)) = \frac{d}{d(t+s)}\sigma^{\mu}(t+s,x_0)) = X^{\mu}(\sigma(t+s,x_0)$$

e

$$\sigma(0+s,\sigma(s,x_0)) = \sigma(s,x_0),$$

que é a mesma equação com $t \to t+s$.

2.5 FORMAS DIFERENCIAIS

As 1-formas que constituem o espaço cotangente são um exemplo de uma classe maior de funcionais lineares: as **formas diferenciais**.

Definição 2.4. *Uma forma diferencial de ordem r, ou simplesmente **r-forma**, é um tensor do tipo $(0,r)$ totalmente antissimétrico.*

A forma mais conveniente de se escrever uma r-forma é através do **produto de cunha** $\wedge$, que definimos como

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} sgn(P) dx^{\mu_{p_1}} \otimes dx^{\mu_{p_2}} \otimes ... dx^{\mu_{p_r}}, \tag{2.17}$$

na qual S_r é o grupo de permutações, ou grupo simétrico, de ordem r e $sgn(P) = 1$ se o número de permutações é par e $sgn(P) = -1$ se o número for ímpar.

O espaço linear de r-formas em um ponto p de uma variedade M é $\Omega^r_p(M)$, e a base canônica é formada pelas formas como em (2.17), portanto se a variedade possui dimensão m, $\Omega^r_p(M)$, como espaço linear, possui dimensão $\binom{m}{r}$, graças à antissimetria. De forma geral, uma r-forma é escrita

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1...\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}, \tag{2.18}$$

com os coeficientes $\omega_{\mu_1...\mu_r}$ também antissimétricos.

Se tomarmos $\omega \in \Omega^r_p(M)$ e $\xi \in \Omega^q_p(M)$, através do **produto exterior** podemos construir um elemento de $\Omega^{r+q}_p(M)$. Expressamos o produto como $\omega \wedge \xi$, definido através de sua ação em $r+q$ vetores:

$$\omega \wedge \xi(V_1, ..., V_{r+q}) = \frac{1}{r!q!} \sum_{P \in S_{r+q}} sgn(P) \omega(V_{p_1}, ..., V_{p_r}) \xi(V_{p_{(r+1)}}, ..., V_{p_{(r+q)}}). \tag{2.19}$$

Utilizando esse produto e definindo $\Omega^0_p(M) = \mathbb{R}$, estabelecemos uma álgebra

$$\Omega^*_p(M) = \Omega^0_p(M) \oplus \Omega^1_p(M) \oplus ... \oplus \Omega^m_p(M). \tag{2.20}$$

Algumas propriedades das formas serão mostradas a seguir.

Proposição 2.1. ***(a)*** $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = 0$ *se ao menos um índice for repetido;*

(b) $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = sgn(P) dx^{\mu_{p_1}} \wedge dx^{\mu_{p_2}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_{p_r}}$

(c) $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = 0$ *se* $r > m$*;*

Demonstração. **(a)** Pela definição (2.17), vemos que para cada termo na soma, há um outro igual, porém com sinal oposto, dado pela permutação dos índices repetidos.

(b) Porque somamos sobre todas as permutações, $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$ e $dx^{\mu_{p_1}} \wedge dx^{\mu_{p_2}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_{p_r}}$ podem diferir, no máximo, por um sinal. Inserindo $sgn(P)$, esse sinal é sempre compensado.

(c) Se $r > m$, há sempre ao menos um índice repetido. Da parte (a), segue a igualdade.

□

2.5.1 Derivada exterior

Definição 2.5. *Seja* $\omega \in \Omega_p^r(M)$ *como em (2.18). A* ***derivada exterior*** *é uma aplicação* $d : \Omega_p^r(M) \mapsto \Omega_p^{r+1}(M)$ *definida como*

$$d\omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}. \tag{2.21}$$

Algumas consequência seguem imediatamente dessa definição:

Proposição 2.2. *(a)* $d^2 \equiv 0$

(b) Se $\omega \in \Omega_p^m(M)$*, então* $d\omega = 0$.

Demonstração. **(a)** Por definição, $d^2\omega$ é dada por

$$d^2\omega = \frac{1}{r!} \frac{\partial^2 \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} dx^\alpha \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}.$$

No entanto, o coeficiente $\frac{\partial^2 \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$ é simétrico em relação aos índices α e ν, enquanto $dx^\alpha \wedge dx^\nu$ é antissimétrico, de forma que a soma sempre se cancela.

(b) Se $\omega \in \Omega_p^m(M)$, então $d\omega \in \Omega_p^{m+1}(M)$. Pela parte (c) da Proposição 2.5, essa forma é identicamente zero. □

A próxima definição será necessária quando estivermos lidando com a integração sobre o espaço projetivo.

Definição 2.6. *Se uma forma* ω *é tal que* $d\omega = 0$*, então é dita uma* ***forma fechada****. Se existe* ψ *com uma ordem menor tal que* $\omega = d\psi$*, então* ω *é dita uma* ***forma exata****. Ou seja,* $ker\ d$ *é o conjunto de todas as formas fechadas e* $im\ d$ *é o conjunto de todas as formas exatas.*

2.6 INTEGRAÇÃO DE FORMAS

Existe uma classe especial de formas que pode ser usada para definir uma medida sobre a variedade. No entanto, para que tal forma exista, a variedade deve ser **orientável**:

Definição 2.7. *Seja M uma variedade diferenciável conexa. Se para quaisquer interseções de duas cartas U_i e U_j, existem, respectivamente, dois sistemas de coordenadas $\{x^\mu\}$ e $\{y^\nu\}$ tais que o Jacobiano $J = det(\partial x^\mu/\partial y^\nu)$ é estritamente positivo em todos os pontos de $U_i \cap U_j$, então M é **orientável**.*

Se M é orientável, existe uma m-forma ω que nunca é zero. Essa forma pode ser usada para integrar qualquer $f \in \mathcal{M}$ e é chamada de **elemento de volume**. Além disso, se duas formas ω e ω' são relacionadas por $\omega = h\omega'$, com $f \in \mathcal{M}$, então elas são *equivalentes* se h for estritamente positiva e são *inequivalentes* se for estritamente negativa. A orientação é importante pois, dado um elemento de volume $\omega = h(p)dx^1 \wedge ... \wedge dx^m$ em uma carta U_i que faz interseção com outra carta U_j, com sistemas de coordenadas$\{x^\mu\}$ e $\{y^\nu\}$, respectivamente, então em U_j, a forma é expressa como

$$\omega = h(p)\frac{\partial x^1}{\partial y^{\nu_1}}dy^{\nu_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial x^m}{\partial y^{\nu_m}}dy^{\nu_m} = h(p)det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right)dy^1 \wedge ... \wedge dy^m,$$

de forma que se a variedade fosse não orientável, nenhuma forma poderia ser definida em todas as cartas tendo o mesmo sinal, o que implicaria que o elemento de volume se anula em pelo menos um ponto.

Estamos agora em posição para definir a integral de uma função $f \in \mathcal{F}(M)$. Seja ω um elemento de volume. A integral de f sobre uma carta U_i é

$$\int_{U_i} f\omega = \int_{\varphi(U_i)} f(\varphi^{-1}(x))h(\varphi^{-1}(x))dx^1...dx^m. \tag{2.22}$$

O lado direito nada mais é do que uma integral múltipla em m variáveis sobre o conjunto $\varphi(U_i)$.

Para estender a integral sobre M inteira é necessária a existência de uma família de funções chamada de **partição da unidade**.

Definição 2.8. *Tome uma cobertura $\{U_i\}$ de M tal que cada ponto está contido em um número finito de conjuntos. Se existe uma família de funções diferenciáveis ϵ_i que satisfaz*

I) $0 \leq \epsilon_i(p) \leq 1$;

II) $\epsilon_i(p) = 0$ *se* $p \notin U_i$;

III) $\sum_i \epsilon_i = 1 \; \forall \; p \in M$,

*então a família $\{\epsilon_i\}$ é uma **partição da unidade** subordinada a $\{U_i\}$.*

A hipótese de que cada ponto de M está contida em um número finito de conjunto será assumida, propriedade que torna M *paracompacta*. Dada uma partição da unidade, é claro que podemos escrever qualquer função como

$$f(p) = \sum_i f(p)\epsilon_i(p) \equiv \sum_i f_i(p), \tag{2.23}$$

com $f_i(p) = f(p)\epsilon_i(p)$.

A integral sobre todo o espaço será então

$$\int_M f\omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega. \tag{2.24}$$

2.6.1 Variedades Riemmanianas

Definição 2.9. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma* ***métrica Riemanniana*** *é um tensor g do tipo $(0,2)$, definido em cada ponto $p \in M$ que satisfaz*

1. $g_p(U,V) = g(V,U),\ U,V \in T_pM$.
2. $g_p(U,U) \geq 0$, *com igualdade se e somente se* $U = 0$.

Uma variedade Riemanniana M nada mais é do que uma variedade na qual o espaço tangente de cada ponto $p \in M$ possui uma forma bilinear simétrica não degenerada.

Note que se há uma métrica g, cada vetor V do espaço tangente de cada ponto p define uma 1-forma $\omega_V = g_p(V,\cdot)$. De maneira análoga, para cada forma ω existe um elemento V_ω tal que $\omega(U) = g_p(V_\omega, U)$. Por consequência, em variedades Riemmanianas temos uma maneira simples de escrever o isomorfismo entre os espaços tangentes T_pM e os cotangentes T_p^*M.

Sendo uma 2-forma, é evidente que podemos escrever a métrica como

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu, \tag{2.25}$$

na qual a matriz $g_{\mu\nu}(p)$, também chamada de *métrica*, tem como entradas

$$g_{\mu\nu}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = g_{\nu\mu}(p). \tag{2.26}$$

Como a métrica é não degenerada, a matriz $g_{\mu\nu}$ é inversível, cuja inversa expressamos $g^{\mu\nu}$, que obedece a relação $g_{\mu\nu}g^{\nu\kappa} = g^{\kappa\nu}g_{\nu\mu} = \delta^\kappa_\mu$. Com isso, o isomorfismo entre T_pM e T_p^*M é simplesmente $(V_\omega)^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu$ e $(\omega_V)_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu$.

A característica mais importante para nós das variedades Riemmanianas diz respeito à existência de um elemento de volume especial:

Proposição 2.3. *Seja M uma variedade Riemmaniana de dimensão m com métrica g. Então, M possui um elemento de volume dado por*

$$\Omega = \sqrt{det(g_{\mu\nu})} dx^1 \wedge ... \wedge dx^m, \tag{2.27}$$

que é invariante sob troca de coordenadas.

Demonstração. A m-forma dada pela equação (2.27) é claramente um elemento de volume uma vez que

$\sqrt{det(g)}$ é sempre maior do que zero, já que a métrica existe em todos os pontos e $g_{\mu\nu}$ é não degenerada.

Se x^μ são as coordenadas de uma carta (U, φ) e y^ν de uma outra (V, ψ), com $U \cap V \neq \emptyset$, então nas novas coordenadas o elemento de volume é

$$\Omega = \sqrt{det\left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\nu}g_{\kappa\lambda}\right)}dy^1 \wedge ... \wedge dy^m.$$

Como $dy^\lambda = \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\nu}dx^\nu$, então

$$\begin{aligned}\Omega &= det\left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\mu}\right)\sqrt{g}det\left(\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\nu}\right)dx^1 \wedge ... \wedge dx^m \\ &= \sqrt{g}dx^1 \wedge ... \wedge dx^m.\end{aligned}$$

□

Esse resultado será usado futuramente para calcular o elemento de volume das variedades *flag* .

2.7 FIBRADOS

Os fibrados são estruturas que aparecem naturalmente na descrição de problemas físicos, incluindo o tratado neste trabalho. Em suma, fibrados são espaços que localmente se comportam como o produto direto de duas variedades, mas que não necessariamente se comportam como tal globalmente. Mais precisamente,

Definição 2.10. *Um fibrado diferenciável $E \overset{\pi}{\mapsto} M$ é um espaço constituído por*

1. *Uma variedade E chamada de **espaço total**.*
2. *Uma variedade M chamada de **espaço base**.*
3. *Uma variedade F chamada de **fibrado**.*
4. *Uma aplicação sobrejetiva $\pi : E \mapsto M$ chamada de **projeção**. A imagem inversa $\pi^{-1}(p) = F_p \simeq F$ é o fibrado no ponto p.*
5. *Um grupo de Lie G que tem ação em F, chamado de **grupo estrutural**.*
6. *Um conjunto de pares (U_i, ϕ_i) tal que $\{U_i\}$ é uma cobertura de M e $\phi_i : U_i \times F \mapsto \pi^{-1}(U_i)$ é um difeomorfismo que satisfaz $\pi \circ \phi_i(p, f) = p, p \in M$ e $f \in F$. Uma aplicação ϕ_i é chamada de **trivialização local** e mapeia $\pi^{-1}(U_i)$ ao produto direto $U_i \times F$.*
7. *Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então as **funções de transição** $t_{ij} : F \mapsto F$ dadas por $t_{ij}(p) = \phi_i^{-1} \circ \phi_j(p)$ devem ser a ação de elementos de G.*

Para que as funções de transição sejam consistentes é necessário que obedeçam as seguintes condições:

1. $t_{ii}(p) = \mathrm{I}$.

2. $t_{ij}(p) = t_{ji}(p)^{-1}$.

3. $t_{ik}(p) \cdot t_{kj}(p) = t_{ij}(p)$.

A primeira condição significa que a função de transição de um conjunto em si mesmo deve ser a identidade. Já a segunda, que a função de transição de U_i para U_j deve ser a inversa da que manda U_j para U_i, de forma que na interseção entre os conjuntos há a liberdade na escolha da trivialização a ser utilizada. Por fim, se o ponto p pertence à interseção de três ou mais conjuntos, a transição entre cada um deles deve ser idêntica, não importando a ordem que é feita.

Outro elemento significativo de um fibrado é o conjunto de **seções**.

Definição 2.11. *Seja $E \overset{\pi}{\mapsto} M$ um fibrado. Uma **seção** é uma aplicação $s : M \mapsto E$ tal que $\pi \circ s$ é a identidade em M. Se s é definida apenas em um subconjunto U, então é uma seção local. O conjunto de todas as seções locais é $\Gamma(U, F)$. Se a seção é definida em toda M é dita uma seção global. O conjunto de todas as seções globais é $\Gamma(M, F)$.*

Exemplo 2.5. *Talvez o caso mais comum de fibrado seja o fibrado tangente, formado pela união de todos os espaços tangentes de uma variedade m-dimensional M:*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Podemos imediatamente identificar como espaço base a variedade M, e como fibrado em um ponto p seu espaço tangente. Assim, se (U, φ) é uma carta tal que $p \in U$ e $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in T_pM$, então, denotando $TU = \bigcup_{p \in U} T_pM$, $E \ni (p, V) \mapsto (\varphi(p), V^1, ..., V^m)$ é um homeomorfismo de $U \times TU$ em um subconjunto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. A projeção π toma $u \in E$ e leva ao ponto do espaço base, isto é, $\pi(u) = \pi(p, V) = p$, e o fibrado é, naturalmente, $T_pM = \pi^{-1}(p)$.

Suponha que um ponto pertence à interseção de duas cartas (U_1, φ) e (U_2, ψ), e um vetor $V \in T_pM$ tem coordenadas $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \tilde{V}^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}$, respectivamente. Ambos os sistemas devem ser relacionados por

$$\tilde{V}^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\xi}(p) V^\xi, \tag{2.28}$$

de forma que as matrizes jacobianas são as funções de transição, que devem ser inversíveis, implicando que deve ser não singular, portanto deve ser um elemento de $GL(m, \mathbb{R})$, o grupo estrutural.

Por fim, um campo vetorial X pode ser visto como uma seção em fibrados tangentes, através de $s(p) = (p, X|_p)$, que, é claro, satisfaz $\pi \circ s = Id_M$.

Exemplo 2.6. *Existe uma classe de fibrados vetoriais que serão de particular interesse em seções futuras: **fibrados vetoriais homogêneos**. Em geral, estes são fibrados $E \overset{\pi}{\mapsto} M$ nos quais a ação do grupo estrutural em M é transitiva e cada $g \in G$ manda F_p para F_{gp} linearmente. Uma variedade que possui ação transitiva de um grupo de Lie é nomeada de **variedade homogênea**, de onde vem o nome desta classe de fibrados. Devido à ação transitiva, basta que consideremos os espaços em que $M = G/H$, com H o* *grupo de isotropia de um ponto em M, que é fechado uma vez que a ação é contínua. Nesses espaços, uma maneira usual de se construir um fibrado vetorial homogêneo é através de uma representação de G, veja Definição 3.5, cujos fibrados são dados por*

$$L_V = \big\{[(g,v)] | g \in G, v \in V \text{ e } (g,v) \sim (gh, h^{-1}v)\big\},$$

para $g \in G$, $h \in H$ e $v \in V$. A projeção $\pi : L_V \mapsto G/H$ é $\pi(g,v) = gH = [g]_H$ e a ação de G em L_V é $g'[(g,v)] = [(g'g,v)]$.

3 GRUPOS DE LIE

Este capítulo é dedicado ao estudo de alguns dos resultados dentro da teoria dos grupos de Lie e suas representações que serão usados repetidamente nas seções seguintes. Seguimos principalmente [3], com [11] podendo ser consultado para uma abordagem mais simplificada e [12] para uma mais aprofundada.

3.1 INTRODUÇÃO

Definição 3.1. *Um grupo de Lie G é um grupo e, simultaneamente, uma variedade na qual a multiplicação e tomar a inversa são aplicações suaves.*

O exemplo mais trivial de grupo Lie é dado por $\mathbb{R}$ com a operação de adição. Um exemplo mais interessante é dado pelo grupo das matrizes inversíveis sobre um corpo $\mathbb{F}$ $GL(n, \mathbb{F})$:

Exemplo 3.1. *Como visto no capítulo anterior, Exemplo 2.2, $GL(n, \mathbb{F})$ é uma variedade. Para mostrar que é um grupo de Lie, observe que cada coordenada em um produto de matrizes é um polinômio nas coordenadas das matrizes originais. Para ver que a inversa é uma aplicação suave, basta relembrar que é dada por $g^{-1} = adj(g)/det\ g$, em que $adj(g)$ é a transposta da matriz dos cofatores de g, cujas coordenadas são polinômios das coordenadas de g, assim como $\det g$, que é também diferente de zero. Assim, tanto a multiplicação quanto a inversa são aplicações suaves.*

Para provar que os grupos unitários e outros são grupos de Lie, precisamos da noção de **imersão** e **subgrupo de Lie**.

Definição 3.2. *Seja $\varphi : M \mapsto N$ uma aplicação injetiva e suave entre variedades com $dim\ M \leq dim\ N$. φ é uma **imersão** de M em N se φ_* é injetivo. $\varphi(M) = M'$ é uma **subvariedade imersa** em N.*

A definição de subgrupo de Lie é bastante similar, com a diferença que agora a aplicação entre as variedades deve ser também um homomorfismo.

Definição 3.3. *Seja $\varphi : H \mapsto G$ um homomorfismo e uma imersão de H em G. Então H é um subgrupo de Lie de G.*

A última ferramenta necessária é o seguinte teorema.

Proposição 3.1. *Seja G um grupo de Lie e $H \subseteq G$ um subgrupo, não necessariamente uma variedade. H é um subgrupo de Lie se e somente se H é fechado.*

Isso, é claro, torna H um grupo de Lie independente de G. Com isso, listamos alguns outros grupos de Lie.

Exemplo 3.2. *O grupo especial linear*

$$SL(n, \mathbb{F}) = \{g \in GL(n, \mathbb{F}) | det\ g = 1\}$$

é um subgrupo de $GL(n, \mathbb{F})$ e é fechado pois det é função contínua, e $SL(n, \mathbb{F}) = det^{-1}\{1\}$.

Exemplo 3.3. *O grupo unitário*

$$U(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) | UU^\dagger = I\}$$

é um subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{C})$ já que cada coluna é um vetor unitário, de forma que $U(n)$ é homeomórfico a um conjunto fechado de $S^{2n-1} \times ... \times S^{2n-1} \subseteq \mathbb{R}^{2n^2}$, um S^{2n-1} para cada coluna. Portanto, o grupo especial unitário

$$SU(n) = \{g \in U(n) | det\ g = 1\}$$

é também um grupo de Lie. Esses dois grupos são os conhecidos grupos de rotação em $\mathbb{C}^n$.

Definição 3.4. *Seja G um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$. Então ele é* ***compacto*** *se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Se $\{g_n\}$ é uma sequência de elementos de G, então o limite desta sequência também pertence a G.*
2. *Existe constante $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $g \in G$, $|g_{ij}| \leq C, \forall 1 \leq i, j \leq n$.*

Note que a definição de compacidade nada mais é do que aplicação do Teorema de Borel-Lebesgue [13], aproveitando que $M_{n,n}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$. Os grupos unitários são compactos pois cada linha e cada coluna deve formar um vetor unitário, e são exemplos dos *grupos de Lie compactos clássicos*. Já $SL(n, \mathbb{C})$ não é compacto já que a matriz $diag(a, 1/a, 1, ..., 1), a \in \mathbb{C}$, é uma matriz inversível, com inversa dada por $diag(1/a, a, 1, ..., 1)$, na qual podemos tomar $|a|$ tão grande quanto desejado, não existindo constante satisfazendo a segunda condição.

Outros grupos de Lie relevantes em física são os grupos Euclidiano E_n o grupo de todas as simetrias em $\mathbb{R}^n$ e o grupo de Lorentz, o grupo de simetrias do espaço de Minkowski. Ambos são também não compactos.

Antes de passarmos para a teoria de representação, precisamos de um resultado que será usado repetidas vezes.

Proposição 3.2. *Seja G um grupo de Lie conexo e U uma vizinhança da identidade e. Então, U gera G, isto é, $G = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$, no qual U^n é o produto de U consigo n vezes.*

Demonstração. Escolha uma vizinhança aberta V de e, e defina $U = V \cap V^{-1} \subseteq V$. V^{-1} é aberto, de forma que U é aberto. Defina $H = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$, que é um subgrupo aberto de G por construção. Como G é conexo, basta mostrar que H é fechado, implicando em $H = G$. Para isso, tome $g \in \overline{H}$. Como U possui a identidade, gU é uma vizinhança de g e, portanto, intersecta H. Agora, considere $h \in H \cap gU$, que deve ter a forma $h = gu, u \in U$ e $h = u_1...u_m, u_i \in U$, para algum m natural. Usando essas duas relações, vemos que $g = u^{-1}u_1...u_m \in H$, mostrando que H é fechado e a proposição está provada.

□

3.2 TEORIA DE REPRESENTAÇÃO

Grupos de Lie muitas vezes aparecem como grupos de simetria abstratos em problemas físicos, então para termos uma realização concreta deles, precisamos das *representações*.

Definição 3.5. *Seja G um grupo de Lie, V um espaço vetorial de dimensão finita e $\pi : G \mapsto GL(V)$ um homomorfismo. O par (π, V) é dito uma* **representação** *de G. A dimensão da representação é a dimensão de V.*

Cada elemento do grupo G é *representado* por um operador linear atuando em um espaço vetorial. Apesar de também existirem representações em espaços de dimensão infinita, trataremos apenas dos casos de dimensão finita, já que serão as únicas representações utilizadas no decorrer do trabalho, além de sua maior simplicidade.

A condição de que π seja um homomorfismo significa que é uma aplicação suave e que dados dois elementos g e g' de G, então

$$\pi(g)\pi(g') = \pi(gg'). \tag{3.1}$$

Quando a representação for óbvia pelo contexto, escrevemos apenas gv no lugar de $(\pi(g))(v)$ para $g \in G$ e $v \in V$.

Exemplo 3.4. *O exemplo mais simples de representação é dado por $\pi(g) = 1, \forall g \in G$, a chamada representação trivial.*

Exemplo 3.5. *Se G é um de $GL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{C}), U(n)$ ou $SU(n)$, a representação padrão é dada pela multiplicação de um vetor de $\mathbb{C}^n$ por uma matriz. Se G é $O(n)$ ou $SO(n)$, em vez de C^n temos $\mathbb{R}^n$.*

Se existem duas representações, há a possibilidade que elas sejam a mesma, ou seja, existe alguma aplicação inversível que leva uma à outra. Quando isso ocorre, dizemos que são *equivalentes*. A condição para que duas representações sejam equivalentes é dada a seguir.

Definição 3.6. *Sejam (π, V) e (π', W) duas representações de um grupo de Lie G. Então*

1. *$T \in Hom(V, W)$ é um* **operador de entrelaçamento** *se $T \circ \pi(g) = \pi'(g) \circ T, \forall g \in G$. O conjunto de todos os operadores de entrelaçamento é denotado $Hom_G(V, W)$*

2. *As representações são* **equivalentes** *se existe $T \in Hom_G(V, W)$ que é uma bijeção. Quando esse é caso, escrevemos $V \simeq W$.*

Dados dois ou mais espaços lineares que possuem representações de G, podemos construir novas representações nos espaços gerados pelas combinações entre eles, como o produto tensorial, ou ainda em espaços relacionados aos originais, como o espaço dual. Listamos algumas das mais relevantes a seguir.

Proposição 3.3. *Sejam $v \in V$ e $w \in W$ elementos de representações de G de dimensão finita. Então, os seguintes também são representações:*

a) *$V \oplus W$, com $g(v + w) = gv + gw$.*

b) *$V \otimes W$, com $g \sum_{i,j} v_i \otimes w_j = \sum_{i,j} g v_i \otimes g w_j$.*

c) *$Hom(V, W)$, o espaço de todas as aplicações lineares de V em W, com $(gT)(v) = g[T(g^{-1}v)]$.*

d) *Segue de c) com $W = \mathbb{C}$.*

Demonstração. Os casos **a)** e **b)** são facilmente vistos serem homomorfismos. Das representações originais segue que são suaves e inversíveis.

c) Considere $g_1, g_2 \in G$ e calcule

$$[g_1(g_2T)](v) = g_1[(g_2T)(g_1^{-1}v)] = g_1g_2[T(g_2^{-1}g_1^{-1}v)] = [(g_1g_2)T](v).$$

d) Como caos anterior, temos

$$[g_1(g_2T)](v) = (g_2T)(g^{-1}v) = T(g_2^{-1}g_1^{-1}v) = T((g_1g_2)^{-1}v) = (g_1g_2T)(v).$$

□

3.2.1 Representações irredutíveis e Lema de Schur

Quando lidamos com representações, de modo geral, é mais conveniente lidar com a *menor* representação possível, as **representações irredutíveis**. De fato, veremos que quando a representação possui dimensão finita, é necessário estudar apenas as representações irredutíveis, já que qualquer representação pode ser reduzida a uma soma de representações irredutíveis.

Definição 3.7. *Seja G um grupo de Lie e V uma representação de dimensão finita.*

1. *Um subespaço $U \subseteq V$ é **invariante** se $gU \subseteq U, \forall g \in G$. U é também uma representação de G.*

2. *Uma representação é dita **irredutível** se os únicos espaços invariantes são $\{0\}$ e V. Se existem subespaços invariantes, a representação é chamada **redutível**.*

3. *Se uma representação é uma soma direta de representações irredutíveis, então é **completamente redutível**.*

A princípio, checar a irredutibilidade pode ser uma tarefa impossível, já que seria necessário verificar todos os subespaços um a um. No entanto, um dos resultados mais conhecidos em teoria de representação nos dá uma ferramenta que simplifica muitíssimo o trabalho: o **Lema de Schur**.

Proposição 3.4. ***Lema de Schur.*** *Sejam V e W representações complexas de dimensão finita irredutíveis de um grupo de Lie G. Então*

$$dim\ Hom_G(V, W) = \begin{cases} 1 \text{ se } V \simeq W \\ 0 \text{ se } V \not\simeq W. \end{cases} \tag{3.2}$$

Demonstração. Se $T \in Hom_G(V, W)$ é diferente de zero, então $kerT$ não é V e é invariante, de modo que deve ser $\{0\}$ devido à irredutibilidade de V, portanto é injetiva. Analogamente, ImT não é zero e invariante. Mas W é irredutível, então T deve também ser sobrejetiva, e $V \simeq W$.

No caso $V \simeq W$, suponha que existem T_0 e $T \in Hom_G(V, W)$ bijetivas. Então $T \circ T_0^{-1} \in Hom_G(V, V)$. Como V é um espaço linear de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, existe um autovalor λ diferente de zero de $T \circ T_0^{-1}$, e $ker(T \circ T_0^{-1} - \lambda I)$ não contém apenas o vetor nulo, sendo ainda invariante. Como V é irredutível, $T \circ T_0^{-1} - \lambda I = 0$, e $Hom_G(V, W) = \mathbb{C}T_0$. □

Como consequência imediata do Lema de Schur, temos que se V é uma representação irredutível, então $Hom_G(V, V) = \mathbb{C}I$.

Uma das características de grupos compactos é que suas representações são sempre completamente irredutíveis. Para provar essa afirmação, precisamos do seguinte conceito:

Definição 3.8. *Seja V uma representação de um grupo de Lie G. Uma forma $(\cdot, \cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{C}$ é invariante se $(gv, gv') = (v, v'), \forall g \in G$ e $v, v' \in V$. Uma representação é* ***unitária*** *se ela possui um produto interno invariante.*

Proposição 3.5. *Toda representação de um grupo de Lie compacto é unitária.*

Demonstração. Começando com qualquer produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definimos um novo através de

$$(v, v') = \int_G \langle gv, gv' \rangle dg, \tag{3.3}$$

na qual dg é a medida de Haar do grupo (Apêndice A.2). Essa fórmula é bem definida já que em $g \mapsto (gv, gv')$ tanto o produto interno quanto a ação de g são aplicações contínuas, e também invariante porque utilizamos a medida de Haar. Como G é compacto, a integral é um número finito. Por fim, também é positiva definida, já que $(v, v) = \int_G \langle gv, gv \rangle dg > 0$ pois $\langle gv, gv \rangle > 0, \forall g \in G$. □

Essa Proposição significa que uma representação de um grupo de Lie compacto é mais do que um homomorfismo ao grupo de transformações lineares de V, é um homomorfismo de G ao grupo de operadores lineares *unitários* de V. Essa característica será importante na prova de uma série de resultados posteriormente. O primeiro é o já mencionado sobre a redutibilidade das representações.

Proposição 3.6. *Representações de dimensão finita de grupos compactos são completamente redutíveis.*

Demonstração. Seja V uma representação redutível de G com produto interno invariante $(\cdot, \cdot)$. Então, existe subespaço próprio invariante $W \subseteq V$. Podemos escrever $V = W \oplus W^\perp$, em relação ao produto invariante. Além disso, $W^\perp$ também é um subespaço invariante já que para $w \in W$ e $w' \in W^\perp$, $(gw', w) = (g^{-1}gw', g^{-1}w) = (w', g^{-1}w) = 0$. Se $W^\perp$ é irredutível, a prova está finalizada. Se não, aplique o mesmo argumento até que todos os espaços sejam irredutíveis. □

Antes de prosseguirmos para a discussão das álgebras de Lie, há uma última Proposição necessária e que faz uso tanto do Lema de Schur quanto da existência de um produto interno invariante, que mostraremos ser único.

Proposição 3.7. *Se V é irredutível, então o produto interno invariante é único a menos de multiplicação por um número real positivo.*

Demonstração. Suponha que $(\cdot,\cdot)$ é um produto interno invariante em V. Como o espaço em questão possui dimensão finita a aplicação $T : V \mapsto V^*$ dado por $Tv = (\cdot, v), v \in V$, é um isomorfismo. Além disso, é também um operador de entrelaçamento usando a ação dada na Proposição 3.3. Pra ver isso, basta calcular

$$T(gv) = (\cdot, gv) = (g^{-1}\cdot, v) = (gT)(v),\ v \in V, g \in G.$$

Suponha agora que existe outro produto interno $(\cdot,\cdot)'$ invariante em V. Defina então $T' : V \mapsto V^*$ dado por $T'v = (\cdot, v)'$. Claramente T e T' pertencem a $Hom_G(V, V^*)$, que pelo Lema de Schur tem dimensão igual a um. Logo, a única possibilidade é $(\cdot,\cdot) = c(\cdot,\cdot)'$. Para que ambos sejam produto interno, devemos ter c real e positivo. □

De maneira similar às representações, podemos definir uma ação dos grupos de Lie sobre uma variedade.

Definição 3.9. *Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. A* ***ação*** *de G sobre M é uma aplicação $\sigma : G \times M \mapsto M$ que satisfaz*

$$\sigma(e, p) = p$$
$$\sigma(g_2, \sigma(g_1, p)) = \sigma(g_2 g_1, p)$$

Como no caso das representações, escrevemos apenas gp para a ação de G.

Exemplo 3.6. *O produto entre elementos de um grupo de Lie G, é claro, define uma ação de G sobre si mesmo. Como será visto no próximo capítulo, a exponencial da álgebra de Lie $GL(n, \mathbb{C})$ também é uma ação em G de um grupo aditivo.*

Exemplo 3.7. *Um fluxo é uma ação do grupo de Lie $\mathbb{R}$, que existe em qualquer variedade M.*

A ação de um grupo de Lie pode ser classificada pela maneira como atua na variedade. As classificações são:

1. **Transitiva** se para quaisquer pontos $x, y \in M$, exite $g \in G$ tal que $gx = y$.
2. **Efetiva** se não existem pontos fixos em M, isto é, se $gp = p$, então g deve ser a identidade.
3. **Livre** se o único elemento agindo trivialmente é a identidade, ou seja, se $gp = p, \forall p \in M$, então g é a identidade.
4. Uma **órbita** é a ação de todos os elementos do grupo G sobre um ponto p da variedade.

4 ÁLGEBRAS DE LIE

Aqui falamos sobre as álgebras de Lie e suas conexões com os grupos de Lie e a teoria de representação, que apresenta certas particularidades, com o objetivo de entender a decomposição dos espaços de pesos e raízes. Como anteriormente, seguimos [3], indicando [11] e [12].

4.1 INTRODUÇÃO

Seja G um grupo de Lie, e considere um elemento fixo a, e um elemento arbitrário g. Definimos então a translação à esquerda $L_a : G \mapsto G$, dado por

$$L_a g = ag. \tag{4.1}$$

Por definição, essa aplicação é um difeomorfismo de G em G, portanto podemos construir o *push-forward* $L_{a*} : T_g G \mapsto T_{ag} G$. Assim, é possível definir uma classe especial de campos vetoriais.

Definição 4.1. *Seja X um campo vetorial em um grupo de Lie G. X é um* ***campo vetorial invariante à esquerda*** *se $L_{a*} X|_g = X|_{ag}$. O conjunto de todos os vetores invariantes à esquerda é denotado $\mathfrak{g}$.*

Note que o fato de um grupo de Lie ter ação transitiva sobre si mesmo implica que o conjunto de vetores invariantes à esquerda corresponde ao espaço tangente da identidade $T_e G$: para cada elemento $v \in T_e G$ existe um campo vetorial invariante correspondente definido por $X|_g = L_{g*} v$, e para cada campo vetorial invariante Y existe um elemento $u \in T_e G$ definido por $u = Y|_e$.

Como estamos lidando com grupos de Lie que são subgrupos de $GL(n, \mathbb{C})$, a translação é escrita simplesmente como um produto de matrizes. Podemos identificar $T_e G$ como um subespaço de $T_I GL(n, \mathbb{C})$, no qual iremos definir nossa estrutura algébrica. Para tal, é necessário fazer a definição do **parênteses de Lie**:

Definição 4.2. *Seja G um grupo de Lie. A aplicação $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ que*

1. *é antissimétrica;*

2. *é bilinear;*

3. *satisfaz a identidade de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$*

é chamada ***parênteses de Lie****.*

Vale ressaltar que quando G é subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$, o parênteses de Lie é apenas o comutador $[X, Y] = XY - YX$, já que sua álgebra é uma álgebra de matrizes, como veremos. Podemos agora definir a *Álgebra de Lie* associada a um grupo de Lie.

Definição 4.3. *Seja G um grupo de Lie. Sua* ***Álgebra de Lie*** *é o conjunto*

$$\mathfrak{g} = \{c'(t)|_{t=0}|c(0) = \textit{ e}, c : (-t,t) \mapsto G, t > 0, \textit{ é suave}\},$$

munido com o produto dado pelos parênteses de Lie.

A álgebra é, naturalmente, também um grupo, de forma que é relevante que se faça o estudo de suas representações irredutíveis. A definição de representação para a álgebra conta com um requisito a mais em relação à usual: ela deve preservar o parênteses de Lie, ou seja, a representação deve preservar a soma e a multiplicação em $\mathfrak{g}$.

Definição 4.4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma* ***representação*** *de $\mathfrak{g}$ é um par (π, V), no qual V é um espaço linear complexo de dimensão finita e $\pi : \mathfrak{g} \mapsto End(V)$ uma aplicação linear que satisfaz $\pi([X,Y]) = \pi(X) \circ \pi(Y) - \pi(Y) \circ \pi(X) = [\pi(X), \pi(Y)], \forall X, Y \in \mathfrak{g}$*

A representação é dita ***irredutível*** *se os únicos subespaços invariantes são triviais. Isto é, se U é um subespaço tal que $\pi(\mathfrak{g})U \subseteq U$, então $U = \{0\}$ ou $U = V$.*

Note também que π não é mais uma aplicação a $GL(V)$ já que um elemento da álgebra só possui sempre uma inversa em relação à soma.

4.1.1 Aplicação exponencial

Para conseguirmos calcular a álgebra de um grupo, é necessário definir a exponencial de matrizes.

Definição 4.5. *Seja X uma matriz $n \times n$. A aplicação $exp : \mathbb{M}_{n,n} \mapsto GL(n)$, dada por*

$$exp(X) = e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \tag{4.2}$$

é a ***exponencial*** *da matriz M.*

A série converge absolutamente para qualquer matriz X. Para ver isso, considere a norma dada por $\|X\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |X_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e calcule $\|e^X\|$:

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X^k\|}{k!} = e^{\|X\|} < \infty. \tag{4.3}$$

Segue da definição que $e^0 = I$ e da fórmula de Baker-Campbell-Haussdorf [11] que $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.

Proposição 4.1. *Seja G um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$. Então:*

a) *Seja $X \in \mathfrak{g}$. Então, e^{tX} é um homomorfismo de $\mathbb{R}$ em G e também a curva integral do campo vetorial $\tilde{X}|_g = gX, g \in G$.*

b) *$\mathfrak{g} = \{X \in \mathbb{M}_{n,n} | e^{tX} \in G \textit{ para } t \in \mathbb{R}\}$.*

(c) *Existe uma vizinhança de* 0 *em* $\mathfrak{g}$ *cuja restrição de* exp *é um difeomorfismo em uma vizinhança de* I *em* G.

(d) *Se* G *é conexo,* $exp(\mathfrak{g})$ *gera* G.

Demonstração. **(a)** A fórmula BCH mostra que a aplicação $t \mapsto e^{tX}$ é um homomorfismo dos números reais em $GL(n, \mathbb{C})$ e também a curva integral do campo vetorial dado por $\tilde{X}|_g = gX, g \in GL(n, \mathbb{C})$, uma vez que $e^0 = I$ e $\frac{d}{dt}e^{tX} = e^{tX}X, \forall t \in \mathbb{R}$. Como X pertence ao espaço tangente de G, existe $\epsilon > 0$, tal que $e^{tX} \in G$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Como G é subgrupo e e^{tX} homomorfismo, $(e^{tX})^n = e^{ntX} \in G, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo t real, $e^{tX} \in G$ e repetindo os argumentos usados para $GL(n, \mathbb{C})$, a curva integral de $\tilde{X}|_g \in T_gG$.

(b) Pela parte (a), $\mathfrak{g} \subseteq \{X \in \mathbb{M}_{n,n} | e^{tX} \in G \text{ para } t \in \mathbb{R}\}$. Para ver a relação contrária, pegue X tal que $e^{tX} \in G$. Calculando a derivada em $t = 0$, temos $\frac{d}{dt}e^{tX}|_{t=0} = X \in \mathfrak{g}$, provando a inclusão.

(c) Pelo teorema da função inversa em variedades [9], é preciso mostrar que a derivada de exp é inversível em T_IG. Mas, $\frac{d}{dt}e^{tX}|_{t=0} = X$, ou seja, a derivada de exp em I é apenas a identidade, provando o resultado.

(d) Segue da parte (c) e da Proposição 3.2. □

A Proposição 4.1 fornece a maneira mais simples para calcular a álgebra de Lie dos grupos clássicos.

Exemplo 4.1. *Pela própria definição da exponencial e pela Proposição 4.1, parte b), podemos ver que álgebra de Lie de* $GL(n, \mathbb{C})$ *é simplesmente o conjunto de todas matrizes* $n \times n$ *complexas.*

Exemplo 4.2. *A álgebra de* $SL(n, \mathbb{F})$ *é*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) | trX = 0\}. \tag{4.4}$$

Suponha que X *pertence à álgebra de* $SL(n, \mathbb{F})$. *Usando a parte d) e a condição* $\det e^{tX} = 1 = e^{t(trX)}$, *temos que* $\frac{d}{dt}|_{t=0}e^{t(trX)} = trX = 0$.

Exemplo 4.3. *O grupo unitário tem como álgebra*

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) | X^\dagger = -X\}. \tag{4.5}$$

Para ver que isso é verdade, tome um elemento $g = e^{tX} \in U(n)$ *e calcule a derivada em* $t = 0$ *da relação* $e^{tX}(e^{tX})^\dagger = e^{tX}e^{tX^\dagger} = I$, *temos que*

$$\frac{d}{dt}(e^{tX}e^{tX^\dagger})|_{t=0} = X + X^\dagger = 0 \implies X^\dagger = -X.$$

Exemplo 4.4. *Seguindo* $U(n)$ *e* $SL(n, \mathbb{C})$, $SU(n)$ *tem como álgebra*

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) | X^\dagger = -X, trX = 0\}. \tag{4.6}$$

4.2 REPRESENTAÇÕES ADJUNTAS

Dentre todas as representações de um grupo de Lie G e da sua álgebra $\mathfrak{g}$, as representações adjuntas possuem um maior destaque. Como as álgebras são identificadas com o espaço tangente da identidade, são espaços vetoriais de dimensão finita, de forma que podemos usá-las para definir representações.

Para poder dar a definição exata das representações adjuntas, é necessário fazer o estudo dos *diferenciais* entre álgebras.

Definição 4.6. *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente, e $\varphi : G \mapsto H$ um homomorfismo. Então o **diferencial** de φ, $d\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}$ é dado por*

$$d\varphi(X) = \frac{d}{dt}\varphi(e^{tX})|_{t=0}. \tag{4.7}$$

Note que isso coincide com a definição de pushforward da geometria (2.11).

Proposição 4.2. *Sejam G e H grupos de Lie, e $\varphi : G \mapsto H$ um homomorfismo. Então $exp \circ d\varphi = \varphi \circ exp$. Além disso, $d\varphi$ é um homomorfismo entre as álgebras.*

Demonstração. Como φ é um homomorfismo, temos

$$\frac{d}{dt}\varphi(e^{tX}) = \frac{d}{ds}\varphi(e^{(t+s)X})|_{s=0} = \varphi(e^{tX})d\varphi(X).$$

Portanto e^{tX} é a curva integral do campo vetorial invariante $d\varphi(X)$. Assim, pela equação (2.16), temos $\varphi(e^{tX}) = e^{td\varphi X}$.

Para a segunda parte da Proposição, comece com $\varphi(e^{tX}e^{sY}e^{-tX}) = e^{td\varphi X}e^{sd\varphi Y}e^{-td\varphi X}$. Pela definição de exponencial é fácil ver que $Ae^{tW}A^{-1} = e^{tAWA^{-1}}$. Aplicando isso a $e^{tX}e^{sY}e^{-tX}$ com $A = e^{tX}$, e calculando $\frac{d}{ds}|_{s=0}$, temos

$$\begin{aligned} d\varphi(e^{tX}Ye^{-tX}) &= \frac{d}{ds}\varphi(e^{tX}e^{sY}e^{-tX})|_{s=0} = \frac{d}{ds}\varphi(e^{se^{tX}Ye^{-tX}})|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}e^{td\varphi X}e^{sd\varphi Y}e^{-td\varphi X} = e^{td\varphi X}d\varphi(Y)e^{-td\varphi X} \end{aligned}$$

Aplicando $\frac{d}{dt}|_{t=0}$ ao resultado

$$\frac{d}{dt}d\varphi(e^{tX}Ye^{-tX})|_{t=0} = d\varphi X d\varphi Y - d\varphi Y d\varphi X = [d\varphi X, d\varphi Y].$$

Finalmente temos

$$d\varphi([X,Y]) = d\varphi(XY - YX) = \frac{d}{dt}d\varphi(e^{tX}Ye^{-tX})|_{t=0} = [d\varphi X, d\varphi Y].$$

□

Em particular, isso mostra que o diferencial de uma representação de G é uma representação de $\mathfrak{g}$. Mais ainda, se $d\pi$ é uma representação de $\mathfrak{g}$, π é uma representação de G se este for conexo. Com isso, estamos em posição para definir as representações adjuntas.

Definição 4.7. *Seja G um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$. Então*

1. *Para $g \in G$ a **conjugação** $c_g : G \mapsto G$ é a aplicação dada por $c_g(h) = ghg^{-1}$, $h \in G$.*
2. *A **representação adjunta** de G, $(Ad, \mathfrak{g})$, é dada por $Ad(g) = d(c_g)$.*
3. *A **representação adjunta de** $\mathfrak{g}$, $(ad, \mathfrak{g})$, é dada por $ad = d(Ad)$.*

A representação adjunta de G é simplesmente dada pela conjugação de $X \in \mathfrak{g}$ por $g \in G$, já que

$$Ad(g)(X) = d(c_g)(X) = \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1}) = gXg^{-1}. \tag{4.8}$$

Além disso, é um homomorfismo

$$Ad(g_1g_2)(x) = g_1g_2X(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2Xg_2^{-1}g_1^{-1} = Ad(g_1)Ad(g_2)X,$$

de forma que Ad é de fato uma representação. Como consequência da última Proposição, $ad = d(Ad)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$, e é dada por

$$ad(X)Y = \frac{d}{dt}(Ad(e^{tX}))(Y)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{tX}Ye^{-tX})|_{t=0} = [X, Y], \tag{4.9}$$

4.3 SUBGRUPOS E SUBÁLGEBRAS ABELIANAS

Definição 4.8. 1. *Seja G um grupo. G é um **grupo Abeliano** se $g_1g_2 = g_2g_1, \forall g_1, g_2 \in G$.*

2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. $\mathfrak{g}$ é uma **álgebra Abeliana** se $[X, Y] = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Em palavras, um grupo ou álgebra são Abelianos se todos os seus elementos *comutam* entre si.

É interessante que o estudo dos grupos e álgebras Abelianos sejam feitos simultaneamente, pois há uma variedade de resultados conectando ambos.

Proposição 4.3. *Seja G um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ com álgebra $\mathfrak{g}$. Então, para $X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] = 0$ se e somente se $e^{tX}e^{sY} = e^{sY}e^{tX}$. Além disso, se G é conexo, então é Abeliano se e somente se $\mathfrak{g}$ também o é.*

Demonstração. $(\rightarrow)$ Da fórmula BCH, segue que se $[X, Y] = 0$, então $e^{tX}e^{sY} = e^{tX+sY} = e^{sY}e^{tX}$.

$(\leftarrow)$ Se e^{tX} e e^{sY} comutam, então $e^{tX}e^{sY}e^{-tX} = e^{sY}$. Aplicando $\frac{d}{ds}|_{s=0}$ e $\frac{d}{dt}|_{t=0}$ a essa igualdade, ficamos com $XY - YX = 0$.

A segunda parte segue da Proposição 4.1 e da primeira parte deste. □

Definição 4.9. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

1. *Um subgrupo máximo, conexo e Abeliano é denominado um* ***toro máximo*** *de G.*

2. *Uma subálgebra máxima e Abeliana é denominada uma* ***subálgebra de Cartan*** *de $\mathfrak{g}$.*

Uma importante característica dos toros máximos e subálgebras de Cartan é que elas estão em correspondência de um para um. Para mostrar isso, precisamos de alguns resultados da teoria de geometria diferencial. Dada uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, há uma única subvariedade H, chamada *variedade integral*, de $GL(n, \mathbb{C})$ que contém a identidade e cujo espaço tangente em um ponto h é dado por $h\mathfrak{h}$ [9]. Além disso, se $f : M \mapsto G$ é uma aplicação suave entre variedades, tal que $f(M) \subseteq H$, então $f : M \mapsto H$ também é uma aplicação suave. Com isso, o produto e tomar a inversa automaticamente se tornam aplicações suaves em H. Assim, resta provar que H é um subgrupo de G para estabelecer o seguinte:

Proposição 4.4. *Seja G um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então, há uma bijeção entre o conjunto das subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ e dos subgrupos conexos de G. Ou seja, cada subgrupo de Lie $H \subseteq G$ possui uma álgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Em particular, um subgrupo conexo T é um toro máximo se e somente se sua álgebra $\mathfrak{t}$ for uma subálgebra de Cartan.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{t}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ e H a única subvariedade contendo a identidade, e cujo espaço tangente em um ponto h é dado por $h\mathfrak{t}$. Seja h_0 um ponto arbitrário de H. Como o produto é suave, considere $h_0 H$, uma subvariedade conexa contendo a identidade. Além disso, dada curva integral $c(t)$ em H, $h_0 c(t)$ é uma curva integral em $h_0 H$ tal que $\frac{d}{dt}(h_0 c(t))|_{t=0} = h_0 c(t')$. Isso implica que o espaço tangente de $h_0 H$ em $h_0 h$ é dado por $h_0 h\mathfrak{t}$. Isso mostra que $h_0 H$ é uma variedade integral. Mas pela unicidade, devemos ter $h_0 H = H$. O mesmo argumento pode ser utilizado para mostrar que $h_0^{-1} H = H$, provando que H é de fato um subgrupo de Lie. A correspondência é sobrejetiva.

Para ver também que é injetiva, suponha que H e H' são dois subgrupos conexos de G com mesma álgebra de Lie $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$. Como foi mostrado anteriormente, Proposição 4.1, a exponencial é um difeomorfismo da álgebra para uma vizinhança da identidade, de forma que existe uma vizinhança comum a H e H'. Como ambos são conexos, a Proposição 3.2 garante que a única possibilidade é $H = H'$.

Combinando esse resultado com a Proposição 4.3, segue facilmente que um subgrupo conexo T é um toro máximo se e somente se sua álgebra $\mathfrak{t}$ for uma subálgebra de Cartan. □

Exemplo 4.5. *Como matrizes unitárias que comutam são simultaneamente diagonalizáveis, já que são normais, o toro máximo de $U(n)$ deve ser composto de matrizes diagonais. Como a álgebra deve ser composta de matrizes anti-hermitianas, equação (4.5), o toro máximo T e a subálgebra $\mathfrak{t}$ são, respectivamente*

$$\begin{aligned} T &= \{diag(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}), \theta_j \in \mathbb{R}\} \\ \mathfrak{t} &= \{diag(i\theta_1, ..., i\theta_n), \theta_j \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Já $SU(n) \subseteq U(n)$, basta adicionar a condição det $e^{tX} = 1, X \in \mathfrak{su}(n)$, que implica em

$$\begin{aligned} T &= \{diag(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}), \theta_j \in \mathbb{R}, \Sigma_{j=1}^n \theta_j = 0\} \\ \mathfrak{t} &= \{diag(i\theta_1, ..., i\theta_n), \theta_j \in \mathbb{R}, \Sigma_{j=1}^n \theta_j = 0\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Em seguida, alguns resultados que serão importantes no desenvolvimento da teoria.

Proposição 4.5. *Seja G um grupo de Lie compacto, (π, V) uma representação de dimensão finita e $(\cdot, \cdot)$ um produto interno invariante. Então esse produto interno é anti-hermitiano em relação a $d\pi$.*

Demonstração. Sejam $v, w \in V$. Já que o produto interno é invariante, por definição $(\pi(g)v, \pi(g)w) = (v, w)$. Aplicando $\frac{d}{dt}|_{t=0}$ à igualdade, reescreva $g = e^{tX}$, para algum $X \in \mathfrak{g}$, para obter

$$\begin{aligned} 0 = &\Big(\frac{d}{dt}\pi(e^{tX})v, \pi(e^{tX})w\Big)|_{t=0} + \Big(\pi(e^{tX})v, \frac{d}{dt}\pi(e^{tX})w\Big)|_{t=0} \\ &\implies (d\pi(X)v, w) = -(v, d\pi(X)w). \end{aligned}$$

□

No caso em que $\pi = Ad$, $d\pi = ad$ e temos

$$(ad(X)v, w) = -(v, ad(X)w). \tag{4.12}$$

Proposição 4.6. *Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$. Então existe $X \in \mathfrak{t}$ tal que $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X)$, isto é, $\mathfrak{t} = \{Y \in \mathfrak{g} | [X, Y] = 0\}$, o centralizador de X.*

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{t}$ e $(\cdot, \cdot)$ um produto interno invariante. Denote $\mathfrak{k}_X = ker\ ad(X)$ e $\mathfrak{r}_X = ker\ ad(X)^{\perp}$. Então $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_X \oplus \mathfrak{r}$. Como $(ad(X)Z, W) = -(Z, ad(X)W) = 0$ para $Z \in \mathfrak{k}_X$ e $W \in \mathfrak{r}_X$, $\mathfrak{r}_X$ é subespaço invariante em relação a $ad(X)$ e também sua imagem.

Se $X, Y \in \mathfrak{t}$, então $ad(X)$ e $ad(Y)$ comutam, Proposição 4.2, e $\mathfrak{k}_X$ e $\mathfrak{r}_X$ são invariantes em relação a $ad(Y)$, já que para $Z \in \mathfrak{k}_X$ e $W \in \mathfrak{r}_X$, $0 = (ad(Y)ad(X)Z, W) = -(ad(Y)Z, ad(X)W)$. Isso implica que

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{k}_Y) \oplus (\mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{r}_Y) \oplus (\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{k}_Y) \oplus (\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y)$$

Se $\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y = \{0\}$, então $\mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{k}_Y = ker\ ad(X + Y)$. Caso contrário, restrinja $ad(X + tY)$ a $\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y$. Então existe $t_0 \in R$ tal que o determinante dessa aplicação é não zero, portanto inversível em $\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y$. Isso significa que em todo o conjunto $ad(X + tY)$ é diferente de zero e, como no primeiro caso, $ker\ ad(X + t_0Y) = \mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{k}_Y$.

Repita o argumento pra elementos linearmente independentes $\{X_i\}$ até que eles formem uma base. Como $\mathfrak{t}$ é máxima, é verdade que $\mathfrak{t} = \cap ker\ X_i$, de maneira que $Y = \Sigma_i t_i X_i$ é o elemento desejado. □

Proposição 4.7. *Seja G um grupo de Lie compacto com subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$. Então, para cada $X \in \mathfrak{g}$, existe $g \in G$ tal que $Ad(g)X \in \mathfrak{t}$.*

Demonstração. Seja $(\cdot, \cdot)$ um produto interno invariante e escreva $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y)$. Se $Ad(g)X \in \mathfrak{t}$, então $[Ad(g)X, Y] = 0$ e $(Z, [Ad(g)X, Y]) = 0, \forall Z \in \mathfrak{g}$. Como o produto é invariante em relação a G, isso é o mesmo que mostrar que $([Ad(g)X, Z], Y) = 0$.

Defina $f(g) = ([Ad(g)X, Z], Y)$. Como G é compacto, $f(g)$ possui um máximo em algum ponto g_0, e a função $t \mapsto (Ad(g_0)X Ad(e^{tZ}), Y)$ possui um máximo em $t = 0$. Aplicando $\frac{d}{dt}|_{t=0}$, temos

$([Ad(g_0)X, Z], Y) = 0.$ □

Proposição 4.8. *Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então, $Ad(G)$ age transitivamente no conjunto de subálgebras de Cartan e no conjunto de toros máximos.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{t}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X_i), X_i \in \mathfrak{g}$, as subálgebras de Cartan. Pelo resultado anterior, existe $g \in G$ tal que $Ad(g)X_1 \in \mathfrak{t}_2$. Isso implica que

$$\begin{aligned} Ad(g)\mathfrak{t}_1 &= \{Ad(g)Y \in \mathfrak{g} | [Y, X_1] = 0\} \\ &= \{Y' \in \mathfrak{g} | [Ad(g)^{-1}Y', X_1] = 0\} \\ &= \{Y' \in \mathfrak{g} | [Y', Ad(g)X_1] = 0\} = \mathfrak{z}_g(Ad(g)X_1). \end{aligned}$$

Como $Ad(g)X_1 \in \mathfrak{t}_2$ e esta é abeliana, segue que $\mathfrak{t}_2 \subseteq Ag(g)\mathfrak{t}_1$. Além disso, Ad é homomorfismo, de modo que $Ag(g)\mathfrak{t}_1$ é uma subálgebra de Cartan. Como ambas devem ser máximas, $Ag(g)\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$.

Seja T_i o toro máximo correspondente a $\mathfrak{t}_i$, Proposição 4.4. Escreva $T_1 = exp(\mathfrak{t}_1)$ e, usando a Proposição 4.2, calcule

$$c_g T_1 = c_g e^{\mathfrak{t}_1} = e^{Ad(g)\mathfrak{t}_1} = e^{\mathfrak{t}_2} = T_2.$$

□

Para provar a última proposição, precisamos dos seguintes conceitos:

Definição 4.10. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Ela é dita*

1. ***simples** se os únicos ideais, isto é, subespaços U tais que $[X, U] \subseteq U$,$\forall X \in \mathfrak{g}$ são $\{0\}$ e o próprio $\mathfrak{g}$, além de ser não abeliana;*
2. ***semissimples** se é uma soma direta de álgebras de Lie simples. Ou seja, é uma soma direta de ideais;*
3. ***redutiva** se é a soma direta de uma álgebra semissimples com uma abeliana.*

Proposição 4.9. *Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{g}$ é redutiva. Em particular, se $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é o centro de $\mathfrak{g}$, isto é, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} | [X, \mathfrak{g}] = 0\}$, então*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \tag{4.13}$$

no qual $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Além disso, $\mathfrak{g}' = \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{s}_i$ é a soma direta de ideais satisfazendo $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j] = 0$ para $i \neq j$ e $span[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] = \mathfrak{s}_i$.

Demonstração. Seja $(\cdot, \cdot)$ um produto interno em $\mathfrak{g}$ invariante em relação a Ad. A existência do produto invariante implica que se um subespaço é um ideal, seu complemento ortogonal também o é. Segue que $\mathfrak{g}$ pode ser decomposto como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{s}_k \oplus \mathfrak{z}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{z}_n,$$

no qual $\mathfrak{s}_i$ e $\mathfrak{z}_i$ são ideais mínimos tais que $dim\ \mathfrak{s}_i > 1$ e $dim\ \mathfrak{z}_i = 1$. o subespaço gerado por um elemento de uma base do centro de $\mathfrak{g}$. De serem ideais, segue que $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j] \subseteq \mathfrak{s}_i \cap \mathfrak{s}_j = \{0\}$, se $i \neq j$. Do mesmo argumento segue que $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{z}_j] = [\mathfrak{z}_i, \mathfrak{z}_j] = 0$ para qualquer i, j. O caso $[\mathfrak{z}_i, \mathfrak{z}_i] = 0$ decorre de $dim\ \mathfrak{z}_i = 1$. Disso segue que $\mathfrak{z}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{z}_n \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Para mostrar a inclusão contrária, considere $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ e decomponha como em (4.13): $Z = \Sigma_i S_i + \Sigma_j Z_j, S_i \in \mathfrak{s}_i$ e $Z_j \in \mathfrak{z}_j$. Então, $0 = [Z, \mathfrak{s}_k] = [\Sigma_i S_i, \mathfrak{s}_k]$. Como Z é arbitrário, segue que $S_i = 0$ e $\mathfrak{z}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{z}_n \supseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Por fim, para mostrar que $span[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] = \mathfrak{s}_i$, basta relembrar que $dim\ span[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] > 1$, por não pertencer ao centro, e que se fosse um subespaço menor do que $\mathfrak{s}_i$, $span[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i]$ seria um ideal próprio de $\mathfrak{s}_i$, o que não pode ser verdade pois, por construção, $\mathfrak{s}_i$ é um ideal mínimo. □

4.4 PESOS E RAÍZES

Construímos as álgebras de Lie como espaços lineares reais. No entanto podemos facilmente estender o espaço, tornando-o um espaço complexo, o que chamamos de *complexificação*. Para tal, dado $\mathfrak{g}$, consideramos $\mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$, denotado por $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Todas as definições se estendem trivialmente ao novo espaço devido à linearidade.

Ao passarmos a considerar $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, é natural que tenhamos uma operação de involução, dada pela *involução de Cartan*.

Definição 4.11. *Seja G um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$. Se X é um elemento de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ escrito unicamente como $Z = X + iY$, a* ***involução de Cartan*** *θ é definida por*

$$\theta Z = X - iY \tag{4.14}$$

Todas as definições dadas anteriormente para as álgebras de Lie podem ser estendidas à complexificação devido à linearidade.

A importância da complexificação é que todo operador linear atuando em um espaço vetorial complexo possui ao menos um autovalor, e os autovalores dos operadores de uma determinada representação podem ser vistos como um elemento do espaço dual de uma subálgebra de Cartan. O estudo desses operadores e suas implicações é a parte mais interessante e rica da teoria das álgebras de Lie.

Um grupo de Lie cuja álgebra de Lie é complexa é denominado um grupo de Lie complexo.

4.4.1 Pesos

Dada uma representação (π, V) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, existe uma maneira especial de se decompor o espaço da representação V. O procedimento começa fixando-se uma subalgebra de Cartan $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, e então separamos o espaço na soma

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Delta(V)} V_\lambda, \tag{4.15}$$

na qual

$$V_\lambda = \{v \in V | d\pi(H)v = \lambda(H)v, \forall H \in t_{\mathbb{C}}\}$$

e $\Delta V \subseteq h^*_{\mathbb{C}}$ é o conjunto de *pesos* de V, com todos os elementos diferentes de zero. A decomposição em espaços de pesos nada mais é do que encontrar os autovetores comuns do conjunto de operadores que comutam $\pi(H)$.

Proposição 4.10. *Seja G um grupo de Lie compacto, com (π, V) uma representação de dimensão finita, decomposta nos espaços de pesos. Então, cada λ é puramente imaginário em $\mathfrak{t}$ e real em $i\mathfrak{t}$.*

Demonstração. Segue do fato de $d\pi$ ser anti-hermitiano em $\mathfrak{t}$ e, consequentemente, real em $i\mathfrak{t}$. □

4.4.2 Raízes

Dentre as representações das álgebras de Lie, como mencionado anteriormente, a representação adjunta possui um papel mais fundamental. Começamos com decomposição no espaço dos pesos com $V = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in R(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\alpha \tag{4.16}$$

e, como no caso geral,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} | [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in t_{\mathbb{C}}\},$$

em que $R(\mathfrak{g}) \subseteq t^*_{\mathbb{C}}$ é o conjunto das **raízes** de $\mathfrak{g}$. Perceba que agora temos $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, o espaço correspondente a $\alpha = 0$. Isso ocorre devido à própria subalgebra de Cartan, que, é claro, tem todos os comutadores nulos entre si.

Exemplo 4.6. *O toro máximo de $U(n)$ é dado por $T = \{diag(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}), \theta_i \in \mathbb{R}\}$, de forma que $\mathfrak{t} = \{X \in \mathfrak{u}(n) | X = diag(i\theta_1, ..., i\theta_n), \theta_i \in \mathbb{R}\}$. A complexificação de $\mathfrak{u}(n)$ é $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, que é o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ complexas e $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \{X \in \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}(n) | X = diag(z_1, ..., z_n), z_i \in \mathbb{C}\}$. Defina uma matriz E_{kj} consistindo de zeros em todas as entradas, exceto aquela na linha k e coluna j. É fácil ver que $[X, E_{kj}] = (z_k - z_j)E_{kj}$, de modo que*

$$R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \{(\epsilon_i - \epsilon_j), 1 \leq i, j \leq n\},$$

com $\epsilon_i(diag(z_1, ..., z_n)) = z_i$. Assim, para cada raíz, corresponde o espaço

$$\mathfrak{g}_{ij} = \mathbb{C}E_{ij},$$

o que torna claro que todo elemento de $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}(n)$ pode ser decomposto como em (4.16).

Proposição 4.11. *Seja G um grupo de Lie compacto, com (π, V) uma representação de dimensão finita e $\mathfrak{t}$ uma subalgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Para $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ e $\lambda \in \Delta(V)$, $d\pi(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda \subseteq V_{\alpha+\lambda}$. Em particular, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$*

Demonstração. Para $H \in \mathfrak{t}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, e $v_\lambda \in V_\lambda$, temos

$$\begin{aligned} d\pi(H)d\pi(X_\alpha)v_\lambda &= (d\pi(X_\alpha)d\pi(H) + [d\pi(H), d\pi(X_\alpha)])v_\lambda \\ &= (d\pi(X_\alpha)d\pi(H) + d\pi[H, X_\alpha])v_\lambda \\ &= (\lambda(H) + \alpha(H))d\pi(X_\alpha)v_\lambda, \end{aligned}$$

de forma que $d\pi(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda \in V_{\alpha+\lambda}$. Como caso particular, temos $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, quando $(\pi, V) = (ad, \mathfrak{g})$. □

Proposição 4.12. *Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{t}$ uma subálgebra de Cartan. Se $\alpha \in R(\mathfrak{g})$, então $-\alpha \in R(\mathfrak{g})$ e $-\alpha = \theta\alpha$.*

Demonstração. Como θ é uma involução, basta que $\mathfrak{g}_{\theta\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Escreva $Z \in \mathfrak{g}_\alpha$ como $Z = X + iY$, para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Se $H \in \mathfrak{t}$, calcule

$$\alpha(H)(X + iY) = [H, X + iY] = [H, X] + i[H, Y].$$

Já que $\alpha(H) \in i\mathbb{R}$, devemos ter $\alpha(H)X = i[H, X]$ e $\alpha(H)Y = -i[H, Y]$. Portanto

$$\alpha(H)(\theta Z) = \alpha(H)(X - iY) = -\alpha(X - iY) = -\alpha(\theta Z).$$

□

4.5 FORMA DE KILLING

Definição 4.12. *Seja $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ a complexificação da álgebra de Lie de um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$. Para X e $Y \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$, a aplicação $B : \mathfrak{g}_\mathbb{C} \times \mathfrak{g}_\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por*

$$B(X, Y) = tr(ad(X) \circ ad(Y)) \tag{4.17}$$

é uma forma bilinear simétrica chamada de forma de Killing.

É interessante que agora sejam mostradas algumas das propriedades mais significativas. No que se segue, $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de um grupo G, subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$.

Proposição 4.13. ***(a)*** *$B(ad(Z)X, Y) = -B(X, ad(Z)Y)$.*

(b) *B restrita a $\mathfrak{g}'$ é negativa definida.*

(c) *B restrita a $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$ é zero se $\alpha + \beta \neq 0$, para $\alpha, \beta \in R(\mathfrak{g})$.*

(d) *B é não degenerada em $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Se $\mathfrak{g}$ é semissimples, então B é não degenerada em $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.*

(e) *Se $\mathfrak{g}$ é semissimples, $-B(X, \theta Y)$ define um produto interno.*

(f) *Se $\mathfrak{g} \subseteq u(n)$ é simples, então $B(X, Y) = c\, tr(XY)$.*

Demonstração. **(a)** A ação adjunta Ad de G sobre $\mathfrak{g}$ preserva o parênteses de Lie. Consequentemente, para $g \in G$, $ad(Ad(g)X) = Ad(g)ad(X)Ad(g^{-1})$ e $B(Ad(g)X, Ad(g)Y) =$ $tr(Ad(g)ad(X)Ad(g^{-1})Ad(g)ad(Y)Ad(g^{-1})) = tr(ad(X)ad(Y))$, uma vez que Ad é homomorfismo e o traço é cíclico. Para provar o que queremos, basta analisar o caso em que $g = exp(tZ)$, com $X \in \mathfrak{g}$ e calcular $\frac{d}{dt}|_{t=0}$. Com isso, obtemos

$$\frac{d}{dt}B(Ad(e^{tZ})X, Ad(e^{tZ})Y)|_{t=0} = 0 = \frac{d}{dt}tr(Ad(e^{tZ})ad(X)ad(Y)Ad(e^{-tZ}))|_{t=0} =$$

$$= tr(ad(Z)ad(X)ad(Y) - ad(X)ad(Y)ad(Z)) \implies B(ad(Z)X, Y) = -B(X, ad(Z)Y)$$

(b) Seja $X \in \mathfrak{g}$. Pela Proposição 4.7 escolha $\mathfrak{t}$ contendo X. Então, pela decomposição do espaço de raízes, $B(X, X) = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})} \alpha^2$. Como as raízes são puramente imaginárias em $\mathfrak{t}$, Proposição 4.7, $B(X, X)$ é negativa semidefinida. $B(X, X)$ é nula se e somente se $\alpha(X) = 0$, $\forall \alpha \in R(\mathfrak{g})$, implicando em X pertencente ao centro de $\mathfrak{g}$. A decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}$ finaliza a prova.

(c) Basta usar a parte (a), com $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Então

$$B(ad(H)X_\alpha, X_\beta) + B(X_\alpha, ad(H)X_\beta) = (\alpha + \beta)(H)B(X_\alpha, X_\beta) = 0$$

o que prova a afirmação.

(d) Como $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \theta\mathfrak{g}_\alpha$, Proposição 4.12, se $X_\alpha = U + iV \in \mathfrak{g}_\alpha$, então $\theta X_\alpha = U - iV \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Utilizando (b) e (c), temos que

$$B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B(U, U) + B(V, V)$$

que é zero se e somente X_α pertence ao centro de $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{g}$ é semissimples o centro é trivial e B não degenerado.

(e) Segue de (b), (c) e (d).

(f) Se $X \in \mathfrak{g} \subseteq u(n)$, então é uma matriz anti-hermitiana com autovalores em $i\mathbb{R}$, mostrando que $tr(XY)$ é negativo semidefinido. Pelo mesmo argumento da parte (d), concluímos que é não degenerada, portanto negativo definido. Como $\mathfrak{g}$ é simples, possui apenas ideais triviais, e $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ é uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$ sob ad, logo é uma representação irredutível de G sob Ad. Pela propriedade de ser cíclico, o traço é invariante sob a ação de Ad, portanto $-B(X, \theta Y)$ e $-tr(X, \theta Y)$ são produtos internos invariantes de uma representação irredutível de G. Pela Proposição 3.7, devem ser múltiplos do outro. □

Como consequência, quando $\mathfrak{g}$ é semissimples, B restrita a $i\mathfrak{t}$ define um produto interno real, o que induz um isomorfismo entre $i\mathfrak{t}$ e $(i\mathfrak{t})^*$. Assim, para cada $\alpha \neq 0$ em $(i\mathfrak{t})^*$, existe elemento único u_α em $i\mathfrak{t}$ tal que

$$\alpha(H) = B(H, u_\alpha), \ \forall H \in i\mathfrak{t}, \tag{4.18}$$

por consequência, podemos transportar a forma de Killing para elementos de $(i\mathfrak{t})^*$ através da fórmula

$$B(\lambda, \gamma) = B(u_\lambda, u_\gamma),\ \lambda, \gamma \in (i\mathfrak{t})^*. \tag{4.19}$$

Definimos também a *coraíz* associada a α

$$H_\alpha = \frac{2u_\alpha}{B(u_\alpha, u_\alpha)}. \tag{4.20}$$

Com essas definições, temos os seguintes resultados

Proposição 4.14. *Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$. Denote $R(\mathfrak{g})$ seu conjunto de raízes.*

(a) *Então $\alpha(H_\alpha) = 2$*

(b) *Sejam $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $F \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Então*

$$[E_\alpha, F_\alpha] = \frac{1}{2}B(E_\alpha, F_\alpha)B(u_\alpha, u_\alpha)H_\alpha \tag{4.21}$$

(c) *Dado $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, o subespaço gerado por $E_\alpha, F_\alpha = \theta E_\alpha$ e H_α é isomórfico a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.*

(d) *Sejam $\mathcal{I}_\alpha = iH_\alpha, \mathcal{J}_\alpha = -E_\alpha + F_\alpha$ e $\mathcal{K}_\alpha = i(E_\alpha + F_\alpha)$. O subespaço span$\{\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha\}$ é isomórfico a $\mathfrak{su}(2)$.*

Demonstração. **(a)** Por definição,

$$\alpha(H_\alpha) = \frac{2B(u_\alpha, u_\alpha)}{B(u_\alpha, u_\alpha)} = 2$$

(b) Usando a Proposição 4.13 parte (a), temos, $\forall H \in i\mathfrak{t}$

$$B([E_\alpha, F_\alpha], H_\alpha) = B(E_\alpha, [F_\alpha, H_\alpha]) = \alpha(H_\alpha)B(E_\alpha, F_\alpha) = B(u_\alpha, H_\alpha)B(E_\alpha, F_\alpha) = B(B(E_\alpha, F_\alpha)u_\alpha, H_\alpha)$$

$$\implies [E_\alpha, F_\alpha] = B(E_\alpha, F_\alpha)u_\alpha = \frac{1}{2}B(E_\alpha, F_\alpha)B(u_\alpha, u_\alpha)H_\alpha,$$

já que a forma de Killing é não degenerada.

(c) Se na parte (b) escolhermos cE_α, com $c^2 = \frac{1}{-B(E_\alpha, F_\alpha)B(u_\alpha, u_\alpha)}$, então $[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$. Como $H_\alpha \in i\mathfrak{h}$, $[H_\alpha, E_\alpha] = \alpha(H_\alpha)E_\alpha = 2E_\alpha$ e $[H_\alpha, F_\alpha] = -\alpha(H_\alpha)F_\alpha = -2F_\alpha$. Estas são as mesmas relações de comutação dos geradores de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, estabelecendo o isomorfismo.

(d) Um cálculo simples mostra que $[\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha] = 2\mathcal{K}_\alpha, [\mathcal{J}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha] = 2\mathcal{I}_\alpha$ e $[\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{I}_\alpha] = 2\mathcal{J}_\alpha$, que são as relações de comutação de $\mathfrak{su}(2)$. □

O isomorfismo entre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ é extremamente útil para a prova de uma série de resultados, por isso é conveniente escrevermos a correspondência entre seus elementos na representação padrão:

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, F_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Proposição 4.15. *Sejam G um grupo de Lie compacto, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, $\mathfrak{t}$ uma subálgebra de Cartan e $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.*

(a) *Os únicos múltiplos de α pertencentes a $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ são $\pm\,\alpha$ e $dim\ \mathfrak{g}_\alpha = 1$.*

(b) *$\alpha(h_\beta) \in \pm 0, 1, 2, 3$.*

Demonstração. **(a)** Considere $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ e $\mathfrak{s}^\alpha = span_{\mathbb{C}}\{H_\alpha, E_\alpha, F_\alpha\} \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Defina $V = \mathbb{C}H_\alpha \bigoplus_k \mathfrak{g}_{k\alpha}$. Note que $V \supseteq \mathfrak{s}^\alpha$ é invariante sob a ação adjunta de $\mathfrak{s}^\alpha$. Para ver que isso é verdade, perceba que cada $\mathfrak{g}_\alpha$ é um autoespaço de $ad(H)$. Pela Proposição 4.11 $ad(E)\mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Se $\mathfrak{g}_\beta \subseteq V$, então $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ é zero se $\alpha+\beta$ não é uma raíz; $\mathbb{C}H_\alpha$ se $\alpha = -\beta$; ou pertence a V e $\alpha+\beta$ é uma raíz. Em cada caso a ação preserva o espaço V, e o mesmo argumento vale para $ad(F)$. Portanto, V é uma representação de dimensão finita de $\mathfrak{s}^\alpha$.

É conhecido da teoria de representação de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ que os autovalores de $ad(H)$ em representações de dimensão finita são os números inteiros $\{n-1, n-3, ..., -n+1\}$, $n = dimV$, e que elas são completamente redutíveis, de forma que $V = \mathfrak{s}^\alpha \bigoplus_j U_j$, com cada U_j uma representação irredutível, uma vez que o próprio $\mathfrak{s}^\alpha$ é uma representação irredutível.

Segue que se $k\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, então $u_{k\alpha} = ku_\alpha$, implicando que $\alpha(H_{k\alpha}) = \alpha(kH_\alpha) = \frac{2B(u_\alpha,u_{k\alpha})}{B(u_{k\alpha},u_{k\alpha})} = \frac{2}{k} \in \mathbb{Z}$ e $(k\alpha)(H_\alpha) = \frac{2B(u_{k\alpha},u_\alpha)}{B(u_\alpha,u_\alpha)} = 2k \in \mathbb{Z}$, o que deixa como alternativas $k = \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ e $\pm\,2$. Como as duas relações devem ser satisfeitas simultaneamente, basta mostrarmos que $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \{0\}$.

Se $\mathfrak{g}_{2\alpha} \neq \{0\}$, então está contido em alguma das representações irredutíveis U_k e existe elemento $X \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$, diferente de zero, tal que $ad(H_\alpha)X = 4X$. Porém, isso implicaria que 0 também é autovalor desta representação, o que só seria possível se X fosse um múltiplo de H_α. Como V é uma soma direta e $\mathbb{C}H_\alpha \in \mathfrak{s}^\alpha$, não pode ser verdade, pois significaria que existe um elemento não zero que pertence à interseção de $\mathfrak{s}^\alpha$ e U_k. Concluímos que $V = \mathfrak{s}^\alpha$. $dim\mathfrak{g}_\alpha = 1$ segue de $[H,E] = 2E$, sendo este o maior autovalor de H em V, inferimos que $dimV = 3$, e portanto, $dim\mathfrak{g}_\alpha = 1$, $\forall\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

(b) Seja $\beta \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ e note que $4cos(\gamma)^2 = 2\frac{B(u_\alpha,u_\beta)}{B(u_\alpha,u_\alpha)}2\frac{B(u_\beta,u_\alpha)}{B(u_\beta,u_\beta)} = \alpha(H_\beta)\beta(H_\alpha)$, com γ o ângulo entre α e β definido pela forma de Killing. Esse número é um inteiro pois tanto H_α quanto H_β pertencem a um subespaço isomórfico a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ e $\mathfrak{g}_\alpha$ é uma representação deste, então $[H_\alpha, E_\beta] = \beta(H_\alpha)E_\beta$, e $\beta(H_\alpha)$ um inteiro, e vice-versa. Como cos^2 é sempre menor ou igual a um, segue que $4cos(\gamma)^2 = \alpha(H_\beta)\beta(H_\alpha) \in \{0,1,2,3,4\}$. Mas $cos(\gamma) = \pm 1$ implica que α é um múltiplo de β, que tem como única possibilidade $\alpha = \pm\beta$ e $\alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha) = \pm 2$, deixando apenas $\pm\{0,1,2,3\}$ como possibilidades. □

4.6 GRUPO DE WEYL

Definição 4.13. *Seja G um grupo de Lie compacto conexo com toro máximo T e $N(T)$ o seu normalizador, isto é, $N = \{g \in G | Ad(g)T = T\}$. O **grupo de Weyl** de G é dado por $W(G,T) = N/T$. Dados $w \in N, H \in \mathfrak{t}$ e $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, aS ações de W em $\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{t}^*$ são, respectivamente,*

$$w \cdot H = Ad(w)H$$

$$(w \cdot \lambda)(H) = \lambda(w^{-1}(H)) \tag{4.23}$$

Algumas propriedades importantes do grupo de Weyl serão mostradas agora.

Proposição 4.16. *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo com toro máximo T e subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$. Então,*

***(a)** O grupo de Weyl é único a menos de isomorfismos.*

***(b)** A ação de W em $\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{t}^*$ é fiel, isto é, age trivialmente se e somente w é a identidade.*

***(c)** Para $w \in W$ e $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $w \cdot \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\alpha}$. Ainda, a ação de W preserva e age fielmente em $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$*

***(d)** A ação de W preserva e age fielmente em $\{u_\alpha | \alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ e $wH_\alpha = H_{w\alpha}$.*

***(e)** W é um grupo finito.*

Demonstração. **(a)** Suponha que T' e $\mathfrak{t}'$ são outro toro e sua subálgebra de Cartan. Escreva $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X)$. Pela Proposição 4.7, há um elemento $g \in G$, tal que $Ad(g)X \in \mathfrak{t}'$ Ou seja,

$$\begin{aligned} Ad(g)\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) &= \{Y \in \mathfrak{g} | [Ad(g)^{-1}Y, X] = 0\} \\ &= \{Y \in \mathfrak{g} | [Y, Ad(g)X] = 0\} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Ad(g)X). \end{aligned}$$

Como $Ad(g)X \in \mathfrak{t}'$ e $\mathfrak{t}'$ é abeliana, $\mathfrak{t}' \subseteq Ad(g)\mathfrak{t}$. Como Ad é um homomorfismo e $\mathfrak{t}'$ é máxima, $Ad(g)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$. Portanto, $gTg^{-1} = ge^{\mathfrak{t}}g^{-1} = e^{Ad(g)\mathfrak{t}} = e^{\mathfrak{t}'} = T'$.

Assim, existe g tal que $gN(T)g^{-1} = N(T')$ e $W(G,T) \simeq W(G,T')$.

(b) Suponha que $w \in N$ age trivialmente em $\mathfrak{t}$. Como $Ad(w)X = \frac{d}{dt}(we^{tX}w^{-1})|_{t=0}$ isso significa que w pertence ao centro de T. Porém, T é máximo, assim $Z(T) = T$ e $[w] = [e] \in W$.

(c) Sejam $w \in N, H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ e $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e calcule

$$[H, Ad(w)X] = [Ad(w)^{-1}H, X] = \alpha(Ad(w)^{-1}H)X = (w \cdot \alpha)X,$$

mostrando que $\mathfrak{g}_{w\alpha} \supseteq w\mathfrak{g}_\alpha$. Como $dim\ \mathfrak{g}_\alpha = 1$, $\mathfrak{g}_{w\alpha} = w\mathfrak{g}_\alpha$ e $w\alpha \in R$. Como $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ gera $\mathfrak{t}^*$, a ação é fiel neste espaço.

(d) Como $w\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, temos

$$B(u_{w\alpha}, H) = (w\alpha)(H) = \alpha(w^{-1}H) = B(u_\alpha, Ad(w)^{-1}H) = B(Ad(w)u_\alpha, H),$$

o que significa que $u_{w\alpha} = wu_\alpha$.

(e) Das partes (c) e (d) segue que W é um grupo finito, já que $R(g)$ é finito. □

Exemplo 4.7. *O normalizador de $T(n) = diag(i\theta_1, ..., i\theta_n), \theta_i \in \mathbb{R}$ é dado pelas matrizes de permutação $n \times n$, além dos próprios elementos de $T(n)$, já que sua ação via conjugação é apenas permutar a ordem das entradas. Lembrando que uma matriz de permutação, que consiste em cada linha e em cada coluna de 1 em uma entrada e 0 nas outras, é uma matriz ortogonal com determinante igual a um, o que significa* *que é um elemento de $SO(n) \subseteq SU(n) \subseteq U(n)$, portanto de fato pertence a $N(T)$. Assim, o grupo de Weyl de $U(n)$ é dado por $W(U(n)) \simeq S_n$, o grupo simétrico de ordem n que possui $n!$ elementos.*

O mesmo argumento pode ser repetido para $SU(n)$ que possui o mesmo grupo de Weyl.

O grupo de Weyl também pode ser descrito como o grupo de reflexões através de hiperplanos perpendiculares a cada elemento de $i\mathfrak{t}^*$ através da seguinte ação:

Definição 4.14. *Seja G um grupo de Lie compacto com subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$. Para $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, defina $r_\alpha(\lambda) : (i\mathfrak{t})^* \mapsto (i\mathfrak{t})^*$ como*

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha, \tag{4.24}$$

e $r_{h_\alpha} : i\mathfrak{t} \mapsto i\mathfrak{t}$

$$r_{h_\alpha}(H) = H - \alpha(H)\mathfrak{t}_\alpha. \tag{4.25}$$

Denote $W(\mathfrak{g})$ o grupo gerado pelo conjunto $\{r_\alpha | \alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ e $W(\mathfrak{g}^\vee)$ o grupo gerado pelo conjunto $\{r_{h_\alpha} | \alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$.

No entanto, não é claro ainda como ambas as definições do grupo de Weyl podem ser coincidentes. A próxima proposição mostra que $W(\mathfrak{g}) \subseteq W(G)$. Embora seja possível mostrar que de fato $W(\mathfrak{g})$ e $W(G)$ são iguais, essa inclusão já é suficientes para os nossos propósitos.

Proposição 4.17. *Seja G um grupo de Lie compacto com toro máximo T. Então, para $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, existe $w_\alpha \in N(T)$ tal que a ação em $i\mathfrak{t}^*$ é dada por r_{h_α}, e a ação em $(i\mathfrak{t})^*$ é dada por r_α. Ainda, para $\alpha, \beta \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $r_\alpha(\beta) \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ e $r_{h_\alpha}(h_\beta) = h_{r_\alpha(\beta)}$.*

Demonstração. Escolhemos E_α, F_α e H_α como na Proposição 4.14 e definimos $w_\alpha = exp(\frac{\pi}{2}(F_\alpha - E_\alpha))$. Em $SL(2, \mathbb{C})$, temos

$$\begin{aligned} w_\alpha &= I + \pi/2(F_\alpha - E_\alpha) - (\pi/2)^2 I/2! - (\pi/2)^3(F_\alpha - E_\alpha)/3! + (\pi/2)^4 I/4! + ... \\ &= cos(\pi/2)I + sin(\pi/2)(F_\alpha - E_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seja $H \in i\mathfrak{t}$ tal que $B(H, H_\alpha) = 0$, ou seja, $\alpha(H) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} Ad(w_\alpha)H &= Ad(exp(\pi/2(F_\alpha - E_\alpha)))H = exp(\pi/2\ ad((F_\alpha - E_\alpha)))H \\ &= exp(\pi/2\ \alpha(H)(E_\alpha + F_\alpha))H = H \end{aligned}$$

Se $H = H_\alpha$, podemos usar as expressões dadas pelas matrizes para calcular

$$Ad(w_\alpha)H_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -H_\alpha,$$

de maneira que $Ad(w_\alpha)$ e r_{h_α} têm a mesma ação em $i\mathfrak{t}$. Já que $T = exp(\mathfrak{t})$ e que $c_{w_\alpha}(e^H) = e^{Ad(w_\alpha)H}$, vemos que $w_\alpha \in N(T)$.

Por fim, considere $\lambda \in (i\mathfrak{t})^*$ e calcule

$$(w_\alpha \lambda)(H) = \lambda(w_\alpha H) = B(u_\lambda, Ad(w_\alpha)^{-1} H) = B(Ad(w_\alpha) u_\lambda, H).$$

Portanto, se $\lambda = \alpha, w_\alpha \alpha = -\alpha$, já que $Ad(w_\alpha) u_\alpha = -u_\alpha$. Se $\lambda(H_\alpha) = 0$, então $B(u_\lambda, H_\alpha) = 0$ e $Ad(w_\alpha) u_\lambda = u_\lambda$, implicando em $w_\alpha \lambda = \lambda$, o que mostra que w_α tem a mesma ação de r_α em $(i\mathfrak{t})^*$.

A última afirmação segue da Proposição 4.16. □

4.7 RAÍZES SIMPLES

Definição 4.15. *Seja G um grupo de Lie compacto com grupo de Lie $\mathfrak{g}$ semissimples e subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$. Se $\mathfrak{g}$ não é semissimples considere $\mathfrak{t}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{t}$, de acordo com a fatorização da Proposição 4.9. Então,*

1. *Um **sistema de raízes simples** é um subconjunto $\Pi = \Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, que é uma base de $(i\mathfrak{t})^*$ tal que qualquer elemento $\beta \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ pode ser escrito como*

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha, \tag{4.26}$$

   *uma combinação linear de elementos de Π com coeficientes inteiros de mesmo sinal. Isto é, para cada $\beta, k_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ ou $k_\alpha \in \mathbb{Z}_-, \forall \alpha \in \Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. Os elementos de $\Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ são chamados de **raízes simples**.*

2. *Dado um sistema de raízes simples Π, o conjunto das **raízes positivas** é*

$$R^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \{\beta \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) | \beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha, \text{ com } k_\alpha \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{4.27}$$

   *Analogamente, o conjunto de **raízes negativas** é*

$$R^-(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \{\beta \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) | \beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha, \text{ com } k_\alpha \in \mathbb{Z}_-\}. \tag{4.28}$$

É claro que se tal sistema existe, $R^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = -R^-(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ e é possível escrever $R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = R^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \cup R^-(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. No entanto, essas condições são bastante estritas e, a princípio, pode ser que um sistema de raízes simples nem exista. Porém, será mostrado que de fato as raízes simples existem e estão em correspondência com as **câmaras de Weyl**.

Definição 4.16. *Seja G um grupo de Lie compacto com subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$.*

1. *As componentes conexas de $(i\mathfrak{t})^* \setminus (\cup_{\alpha \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} \alpha^\perp)$ são as **câmaras de Weyl** de $(i\mathfrak{t})^*$. As componentes conexas de $i\mathfrak{t} \setminus (\cup_{\alpha \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} h_\alpha^\perp)$ são as **câmaras de Weyl** de $i\mathfrak{t}$.*

2. *Se C é uma câmara de Weyl de $(i\mathfrak{t})^*$, $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ é C-positiva se $B(C, \alpha) > 0$ e C-negativa se $B(C, \alpha) < 0$. Se α é C-positiva e pode ser escrita como a soma de duas raízes C-positivas, então dizemos que α pode ser* ***decomposta*** *com respeito a C.*

3. *Se $C^\vee$ é uma câmara de Weyl de $i\mathfrak{t}$, $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ é $C^\vee$-positiva se $\alpha(C^\vee) > 0$ e $C^\vee$-negativa se $\alpha(C^\vee) < 0$. Se α é $C^\vee$-positiva e pode ser escrita como a soma de duas raízes $C^\vee$-positivas, então dizemos que α pode ser* ***decomposta*** *com respeito a $C^\vee$.*

4. *Se C uma câmara de Weyl de $(i\mathfrak{t})^*$, defina*

$$\Pi(C) = \{\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) | \alpha \text{ é C-positiva e não pode ser decomposta}\}. \tag{4.29}$$

Se $C^\vee$ é uma câmara de Weyl de $i\mathfrak{t}$, defina

$$\Pi(C^\vee) = \{\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) | \alpha \text{ é } C^\vee\text{-positiva e não pode ser decomposta}\}. \tag{4.30}$$

5. *Seja $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ um sistema de raízes simples, então*

$$C(\Pi) = \{\lambda \in (i\mathfrak{t})^* | B(\lambda, \alpha) > 0, \alpha \in \Pi\} \tag{4.31}$$

e

$$C^\vee(\Pi) = \{H \in i\mathfrak{t} | \alpha(H) > 0, \alpha \in \Pi\} \tag{4.32}$$

são as câmaras de Weyl associadas de $(i\mathfrak{t})^*$ e $i\mathfrak{t}$, respectivamente.

6. *Os* ***pesos fundamentais*** *são uma base $\{\pi_1, ..., \pi_n\}$ de $(i\mathfrak{t})^*$ que satisfazem $2\frac{B(\pi_i,\alpha_j)}{B(\alpha_j,\alpha_j)} = \delta_{i,j}$. Além disso, $\rho(\Pi)$ é definido como*

$$\rho = \sum_i \pi_i. \tag{4.33}$$

Proposição 4.18. *Seja G um grupo de Lie compacto com subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$. Então, há uma correspondência de um para para entre os sistemas de raízes simples e as câmaras de Weyl, isto é, se C é uma câmara de Weyl, então $\Pi(C)$ é um sistema de raízes simples, e se Π é um sistema de raízes simples, $C(\Pi)$ é uma câmara de Weyl. Além disso, se $\alpha, \beta \in \Pi$, um sistema de raízes simples, então $B(\alpha, \beta) \leq 0$.*

Demonstração. Seja $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ um sistema de raízes simples e note que $B(\rho, \alpha_j) = B(\alpha_j, \alpha_j)/2 > 0$, de forma que $\rho \in C(\Pi)$. Tome $\lambda \in C(\Pi)$ e $\alpha_k \in \Pi$, e veja que $t \mapsto B((1-t)\lambda + t\rho, \alpha_k), t \in [0,1]$ é sempre maior ou igual a zero, mostrando que o caminho $(1-t)\lambda + t\rho$ está contido em $C(\Pi)$, ou seja, $C(\Pi)$ é conexo por caminhos pois se $\gamma \in C(\Pi)$, então λ e γ estão conectados por

$$f(t) = \begin{cases} (1-2t)\lambda + 2t\,\rho, 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2t-1)\gamma + (2-2t)\rho, \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Sendo conexo por caminhos, é também conexo [10]. Por definição, $B(\lambda, \beta) > 0$ se $\beta \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ e $B(\lambda, \beta) < 0$ se $\beta \in R^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, portanto $\lambda \notin \beta^\perp$ e $C(\Pi) \subseteq (i\mathfrak{t})^* \setminus (\cup_{\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \alpha^\perp)$. Como $C(\Pi)$ é conexo, está contida em alguma câmara de Weyl C. Como o sinal de $B(\beta, \alpha_k)$ é o mesmo para qualquer $\beta \in C$, e $\rho \in C(\Pi) \subseteq C$, temos $B(C, \alpha_k) > 0, 1 \leq k \leq l$ e $C = C(\Pi)$.

Para ver que $\Pi(C)$ é não vazio, considere α C-positiva tal que $B(\alpha, \lambda), \lambda \in C$, é mínimo e assuma que $\alpha = \beta_1 + ... + \beta_n, n \geq 2$ e $\beta_i \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Então, $B(\alpha, \lambda) < B(\beta_1, \lambda)$, o que é uma contradição e a única possibilidade é $\alpha \in \Pi(C)$. Segue da definição de $\Pi(C)$ que $\gamma \in R(\mathfrak{g})$ pode ser escrita como uma combinação linear de elementos de $\Pi(C)$ com todos os coeficientes não negativos ou não positivos. O último passo é mostrar que $\Pi(C)$ é um conjunto linearmente independente.

Considere $\alpha, \beta \in \Pi(C)$ distintos e assuma que $B(\alpha, \alpha) \leq B(\beta, \beta)$, sem perda de generalidade. Como ambas são positivas, $\alpha \neq -\beta$, o que força $2\frac{B(\alpha,\beta)}{B(\beta,\beta)} \in \pm\{0, 1\}$, Proposição 4.15, e se $B(\alpha, \beta) > 0$, $r_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, Proposição 4.17. Se $\beta - \alpha$ é C-positiva, então $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$ e se é C-negativa, $\alpha = -(\beta - \alpha) + \beta$. Os dois casos violam a hipótese que α e β não podem ser decompostos, e se $\alpha, \beta \in \Pi(C)$, necessariamente $B(\alpha, \beta) \leq 0$.

Por fim, seja $\gamma = \sum_{\alpha \in \Pi_1} c_\alpha \alpha = \sum_{\beta \in \Pi_2} d_\beta \beta$, com $c_\alpha, d_\beta \geq 0$, $\Pi_1 \cup \Pi_2 = \Pi(C)$ e $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$. Então

$$0 \leq \left\| \sum_{\alpha \in \Pi(C)} c_\alpha \alpha \right\| \leq B(\sum_{\alpha \in \Pi} c_\alpha \alpha, \sum_{\beta \in \Pi} d_\beta \beta) = \sum_{\alpha, \beta \in \Pi} c_\alpha d_\beta B(\alpha, \beta) \leq 0,$$

implicando em $c_\alpha = d_\beta = 0$ e $\Pi(C)$ é linearmente independente.

□

4.8 PESOS MAIS ALTOS

Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Pela decomposição do espaço das raízes, podemos escrever

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}^+, \tag{4.34}$$

em que $\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in R^\pm(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} g_\alpha$. Essa separação é comumente chamada de *decomposição triangular* em alusão à decomposição de $GL(n, \mathbb{C})$, cuja álgebra é separada nos subespaços das matrizes triangulares superiores e inferiores com zeros na diagonal principal, em conjunto com as matrizes diagonais.

Definição 4.17. *Seja V uma representação de dimensão finita de $\mathfrak{g}$.*

1. *um peso λ_0 é um* ***peso mais alto*** *em relação a $R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ se algum $v \in V_{\lambda_0}$ diferente de zero satisfaz $\mathfrak{n}^+ v = 0$. v é denominado* ***vetor de peso mais alto****.*

2. *Um peso λ é* ***dominante*** *se $B(\lambda, \alpha) \geq 0$ para todo $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g})$, ou seja, $\lambda \in C(\Pi)$. Analogamente, é* ***antidominante*** *se $B(\lambda, \alpha) \leq 0$ para todo $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g})$.*

3. *Defina uma ordem parcial $\lambda \succ \gamma$ se $\lambda - \gamma$ é uma soma de raízes positivas.*

Proposição 4.19. *Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e V uma representação irredutível de dimensão finita com peso mais alto λ_0. Então*

(a) *Qualquer peso $\lambda \in \Delta(V)$ pode ser escrito como*

$$\lambda = \lambda_0 - \sum_{\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} n_i \alpha_i, \tag{4.35}$$

com n_i um inteiro não negativo. λ é o elemento máximo da ordem parcial $\succ$.

(b) *λ_0 sempre existe e é único. O vetor de peso mais alto é único a menos de multiplicação por escalar.*

(c) *Para $w \in W, wV_\lambda = V_{w\lambda}$. Além disso, λ_0 é dominante e $2\frac{B(\lambda_0,\alpha_j)}{B(\alpha_j,\alpha_j)} \in \mathbb{Z}_+$, se $\alpha_j \in \Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.*

(d) *A menos de isomorfismos, V é completamente determinado por λ_0.*

Demonstração. **(a)** Seja v_o um vetor de peso mais alto e defina $V_n = V_{n-1} + \mathfrak{n}^- V_{n-1}$, com $V_0 = \mathbb{C}v_0$. Pela Proposição 4.11, e pelo fato que $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{n}^-$, temos $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{n}^-] \subseteq \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t}_\mathbb{C}$, para $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. Por isso, como $\mathfrak{g}_\alpha V_0 = 0$, segue que $\mathfrak{g}_\alpha V_1 \subseteq V_1$. Da mesma forma, $\mathfrak{g}_\alpha V_2 \subseteq V_2$ e, repetindo o argumento $\mathfrak{g}_\alpha V_n \subseteq V_n$, implicando que $V_\infty = \cup_n V_n$ é um espaço invariante. Como V é irredutível, concluímos que $V_\infty = V$. Utilizando novamente a Proposição 4.11, isso mostra também que cada $v \in V$ é um vetor de peso $\lambda = \lambda_0 + \sum_{\beta \in \mathfrak{n}^-} \beta$. Em particular, podemos escrever os pesos como em (4.35).

(b) Um peso mais alto sempre existe pois, de acordo com a Proposição 4.11, se λ é um elemento máximo com relação à ordem parcial $\succ$, então $\lambda + \alpha \succ \lambda$, violando o fato de λ ser máximo. Portanto, existe $v_0 \in V_{\lambda_0}$ satisfazendo $\mathfrak{n}^+ v_0 = 0$. Para ver a unicidade, suponha que λ_1 também é um peso mais alto. Então, $\lambda_0 = \lambda_1 - \Sigma_j n_j \alpha_j$ e $\lambda_1 = \lambda_0 - \Sigma_i m_i \alpha_i$, implicando que $-n_k = m_k = 0$, para todo k e $\lambda_1 = \lambda_0$.

(c) Pelo mesmo argumento da Proposição 4.16 parte (d), temos $u_{w\lambda} = w\lambda$. Portanto, pela Proposição 4.17, $r_{\alpha_j}\lambda_0$ é um peso e

$$\lambda_0 - 2\frac{B(\lambda_0, \alpha_j)}{B(\alpha_j, \alpha_j)}\alpha_j = \lambda_0 - \sum_{\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{g})} n_i \alpha_i,$$

de maneira que $2\frac{B(\lambda_0,\alpha_j)}{B(\alpha_j,\alpha_j)} = n_j \in \mathbb{Z}_+$.

(d) Suponha que V' é outra representação irredutível com peso mais alto λ_0 e que possui um vetor de peso mais alto v'_0. Defina $W = V \oplus V'$, que é uma representação de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ com vetor de peso mais alto $v = v_0 + v'_0$, e $W_n = W_{n-1} + \mathfrak{n}^+ W_{n-1}$, com $W_0 = \mathbb{C}(v_0 + v'_0)$. Argumentando como na parte (a), vemos que $W_\infty = \cup_{n=0}^\infty W_n$ é uma representação contida em W. Suponha agora que U é uma representação contida em W_∞, que por sua vez possui um vetor de peso mais alto $u = u_0 + u'_0$. Mas se u é um vetor de peso mais alto, u_0 e u'_0 são vetores de peso mais alto de V e V', respectivamente, já que $v \in U$. Devido à unicidade, parte (b), devemos ter $u = av, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $U = W_\infty$, sendo irredutível. Já que $V = V_\infty$, como na parte (a), e a projeção p_1 de W_∞ em V contém v_0, temos $W_\infty \simeq V$. Analogamente, $W_\infty \simeq V'$, portanto $V \simeq V'$. □

5 VARIEDADES FLAG

Agora, faremos uma breve introdução sobre variedades *flag*, culminando com a expressão de uma 2-forma não degenerada utilizada para construir um elemento de volume invariante. Mais detalhes sobre variedades simpléticas podem ser encontrados em [28], enquanto [14] oferece um resumo completo sobre variedades *flag* .

5.1 INTRODUÇÃO

Variedades flag carregam uma série de estruturas devido ao fato de serem **espaços homogêneos**, isto é, uma variedade M que possui ação transitiva de um grupo de Lie G, o que permite sua descrição como um espaço coset G/K, com K um subgrupo fechado, ou como uma órbita adjunta de G de algum elemento da sua álgebra de Lie. Como consequência, possui uma 2-forma não degenerada que pode ser usada para formar um elemento de volume invariante sob a ação de G.

Veremos a seguir como essas propriedades surgem.

5.1.1 Variedades simpléticas

Variedades simpléticas são caracterizadas pela existência de uma 2-forma especial, chamada *forma simplética*:

Definição 5.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\omega : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ uma forma bilinear antissimétrica. ω é uma* ***forma simplética*** *se for fechada e não degenerada.*

Isso significa que se $(u, v) = 0, \forall v \in V$, então necessariamente $u = 0$, em adição a $d\omega = 0$. Se $e_1, ..., e_k$ é uma base de V, então uma maneira alternativa de definir uma forma não degenerada é através de sua matriz $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$: se esta matriz possui posto máximo, ou seja, todas as suas linhas e colunas são linearmente independentes, então ω é não degenerada. Assim, definimos o **posto** de ω como o posto p da matriz ω_{ij}.

Proposição 5.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\omega : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ uma forma bilinear antissimétrica. Então, ω é não degenerada se e somente se V tem dimensão par e $\omega^n = \omega \wedge ... \wedge \omega$ é um elemento de volume.*

Demonstração. Se ω^n é um elemento de volume, então ω é não degenerado e $(\omega) = dim\ V = 2n$.

Suponha que ω é não degenerado, devemos mostrar que existe uma base de V^* tal que $\omega = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge e^{i+n}$. Disso segue imediatamente que

$$\omega^n = \frac{1}{n!} e^1 \wedge ... \wedge e^{2n}$$

é um elemento de volume e $dim\ V = 2n$.

Comece com dois vetores $e_1, e_{n+1} \in V$ tais que $\omega(e_1, e_{n+1}) \neq 0$, o que sempre é possível. Podemos dividir e_1 por uma constante e assumir que $\omega(e_1, e_{n+1}) = 1$. Denote V_1 o espaço gerado por e_1 e e_{n+1} e P seu complemento ortogonal, isto é,

$$P = \{v \in V | \omega(u, v) = 0, \forall u \in V_1\}.$$

Então, é claro que $V_1 \cap P = \{0\}$ e se $z \in V$, $z + \omega(z, e_1)e_{n+1} - \omega(z, e_{n+1})e_1 \in P$, implicando que

$$z = [z + \omega(z, e_1)e_{n+1} - \omega(z, e_{n+1})e_1] + [-\omega(z, e_1)e_{n+1} + \omega(z, e_{n+1})e_1],$$

e $V = V_1 \oplus P$. Tomando dois vetores e_2 e $e_{n+2} \in P$, tais que $\omega(e_2, e_{n+2}) \neq 0$, podemos repetir o procedimento até obtermos uma base $e_1, ..., e_{2n}$ de V com base dual $e^1, ..., e^{2n}$, fazendo com que nesta base $\omega = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge e^{i+n}$. $\square$

Podemos transportar esse resultado imediatamente para variedades diferenciáveis, se definirmos que $\omega \in \Omega^2(M)$ é não degenerado se ω_m é não degenerado, como definido anteriormente, em todos os pontos $m \in M$. Portanto, temos

Proposição 5.2. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão finita e $\omega \in \Omega^2(M)$. ω é não degenerada se e somente se M tem dimensão par e $\omega^n = \omega \wedge ... \wedge \omega$ é um elemento de volume.*

5.1.2 Subálgebras de Borel e Parabólicas

Variedades *flag* são definidas em termos das chamadas subálgebras de Borel e Parabólicas. Antes de introduzir esses conceitos, precisamos de algumas definições e resultados adicionais.

Definição 5.2. *Seja G um grupo de Lie complexo semissimples com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$.*

1. *Uma subálgebra $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{t}$ é **regular** se $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$.*
2. *Um subconjunto $Q \subset R(\mathfrak{g})$ é **fechado** se $(Q + Q) \cap R \subseteq Q$, isto é, se $\alpha, \beta \in Q$ e $\alpha + \beta \in R(\mathfrak{g})$, então $\alpha + \beta \in Q$.*
3. *Um subconjunto $Q \subset R(\mathfrak{g})$ é **simétrico** se $Q = -Q$, ou antissimétrico se $Q \cap (-Q) = \emptyset$.*

Todo conjunto $Q \subseteq R$ pode ser decomposto em sua parte simétrica e antissimétrica, Q^s e Q^a, respectivamente, de forma a ser a união disjunta $Q = Q^s \cup Q^a$.

Proposição 5.3. *Um subconjunto fechado $Q \subseteq R(\mathfrak{g})$ define uma subálgebra regular dada por*

$$\mathfrak{g}(Q) = \sum_{\alpha \in Q^s} H_\alpha + \sum_{\beta \in Q} \mathbb{C}E_\beta.$$

Demonstração. Que $\mathfrak{g}(Q)$ define uma subálgebra é claro. Para ver que é também regular, tome uma base Δ para $\mathfrak{t}$ composta por elementos $H_\alpha, \alpha \in R$, e escreva $t \ni H = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha H_\alpha$ e $\mathfrak{g}(Q) \ni X = \sum_{\gamma\in Q^s} H_\gamma + \sum_{\beta\in Q} a_\beta E_\beta$. Por fim, calcule

$$[H,X] = \left[\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha H_\alpha, \sum_{\gamma\in Q^s} H_\gamma + \sum_{\beta\in Q} a_\beta E_\beta\right] = \sum_{\alpha\in\Delta}\sum_{\beta\in Q}[c_\alpha H_\alpha, a_\beta E_\beta] = \sum_{\alpha\in\Delta}\sum_{\beta\in Q} c_\alpha a_\beta \beta(H_\alpha)E_\beta, \in \mathfrak{g}(Q).$$

□

Seja Δ uma base de $\mathfrak{t}^*$ e $R(\mathfrak{g}) = R^+ \cup R^-$ a decomposição em raízes positivas e negativas do sistema de raízes de $\mathfrak{g}$. Para qualquer subconjunto $\Delta_0 \subseteq \Delta$, defina

$$[\Delta_0] =< \Delta_0 > \cap R$$

e

$$[\Delta_0^\pm] =< \Delta_0 > \cap R^\pm,$$

nas quais escrevemos $< \Delta_0 >= span_{\mathbb{R}}(\Delta_0)$. Se além disso, estabelecermos os conjuntos *fechados* $R^\pm_{\Delta_0} = R^\pm \setminus [\Delta_0^\pm]$, então o conjunto de raízes pode ser decomposto em três conjuntos disjuntos:

$$R(\mathfrak{g}) = R^-_{\Delta_0} \cup [\Delta_0] \cup R^+_{\Delta_0}.$$

Como os conjuntos $R^\pm_{\Delta_0}$ são fechados, atribuímos as subálgebras regulares

$$\mathfrak{n}^\pm_{\Delta_0} = \mathfrak{g}(R^\pm_{\Delta_0}),$$

juntamente com

$$\mathfrak{k}_{\Delta_0} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}([\Delta_0]).$$

Essa última equação pode ser reescrita como uma soma direta, definindo uma subálgebra $\mathfrak{z}_{\Delta_0}$, que é o complemento ortogonal de $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}([\Delta_0])$ em $\mathfrak{t}$, dado pelo produto interno relacionado à forma de Killing. Assim,

$$\mathfrak{k}_{\Delta_0} = \mathfrak{z}_\Delta \oplus \mathfrak{g}([\Delta_0]).$$

Note que essa é uma decomposição redutiva de $\mathfrak{k}_{\Delta_0}$, já que

$$[Z,X] = \sum_{\alpha\in\mathfrak{z}_{\Delta_0}}\sum_{\beta\in\Delta_0} c_\alpha d_\beta [u_\alpha, E_\beta] = \sum_{\alpha\in\mathfrak{z}_{\Delta_0}}\sum_{\beta\in\Delta_0} c_\alpha d_\beta B(u_\alpha, u_\beta) = 0,$$

com $Z = \sum_{\alpha\in\mathfrak{z}_{\Delta_0}} c_\alpha u_\alpha \in \mathfrak{z}_{\Delta_0}$ e $X = \sum_{\beta\in\Delta_0} d_\beta E_\beta \in \mathfrak{g}([\Delta_0])$. Isso implica também que $\mathfrak{k}_{\Delta_0}$ é o centralizador de $\mathfrak{z}_{\Delta_0}$.

Finalmente, temos uma decomposição de $\mathfrak{g}$ como a soma: $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^-_{\Delta_0} + \mathfrak{k}_{\Delta_0} + \mathfrak{n}^+_{\Delta_0}$. Essa decomposição é nomeada **decomposição de Gauss generalizada**. A decomposição triangular (4.34), é uma caso particular, no qual $\Delta_0 = \emptyset$. Via Proposição 4.1, a decomposição de Gauss de $\mathfrak{g}$ induz uma decomposição de G, quando este é conexo, no produto $G = N^- K N^+$, na qual os subgrupos conexos N^-, K e N^+ têm como álgebra de Lie $\mathfrak{n}^-_{\Delta_0}$, $\mathfrak{k}_{\Delta_0}$ e $\mathfrak{n}^+_{\Delta_0}$, respectivamente, Proposição 4.4.

Definição 5.3. *Seja G um grupo de Lie semissimples complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que possui sistema de raízes $R(\mathfrak{g})$.*

1. *Uma **subálgebra de Borel** relativa a uma escolha de raízes positiva R^+ é a subálgebra $\mathfrak{b}^\pm$ composta por*

$$\mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}(R^\pm). \tag{5.1}$$

   Um subgrupo de Borel B é o único subgrupo conexo de G que possui $\mathfrak{b}$ como álgebra de Lie.

2. *Uma **subálgebra parabólica** $\mathfrak{p}$ é uma subálgebra que contém uma subálgebra de Borel. Um subgrupo parabólico P é um subgrupo conexo de G que contém uma subgrupo de Borel. Evidentemente, se P é o único subgrupo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{p}$, então P é parabólico.*

Uma importante caracterização das subálgebras parabólicas é a seguinte:

Proposição 5.4. *Qualquer subálgebra parabólica é conjugada a uma álgebra dada por*

$$\mathfrak{p}^\pm_{\Delta_0} = \mathfrak{n}^\pm_{\Delta_0} + \mathfrak{k}_{\Delta_0}.$$

Demonstração. Primeiramente, devemos mostrar que essa subálgebra é de fato parabólica, o que é simples já que $\mathfrak{t} + R^\pm \subseteq \mathfrak{g}(R^\pm_{\Delta_0}) + \mathfrak{g}([\Delta_0]) + \mathfrak{t} = \mathfrak{n}^\pm_{\Delta_0} + \mathfrak{k}_{\Delta_0}$. Pelas Proposições 4.8 e 4.16, é fácil ver que duas subálgebras de Borel são conjugadas, portanto podemos assumir que uma subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ contém a subálgebra de Borel $\mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}(R^\pm)$, de forma que $\mathfrak{p} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}(R')$, $R' \supseteq R^\pm$ é um conjunto fechado. Por sua vez, isso mostra que existe um subconjunto Δ_0 de uma base Δ tal que $R' = [\Delta_0] \cup R^\pm$. □

5.1.3 Variedades de Kähler e espaços homogêneos

Como mencionado, um espaço homogêneo é uma variedade que possui ação transitiva de um grupo de Lie G. Devido à transitividade da ação, podemos identificar qualquer espaço homogêneo com um espaço coset G/K, com K um subgrupo fechado de G, o grupo de isotropia de uma ponto $m \in M$:

$$K = \{h \in G | hm = m\}.$$

Por outro lado, se K for um subgrupo fechado, G/K sempre define uma variedade [9], que por definição possui uma ação transitiva de G, sendo então um espaço homogêneo.

O ponto principal sobre espaços homogêneos é que, sob certas condições, são variedades de Kähler: uma variedade simplética que apresenta uma métrica riemmaniana g e uma estrutura quase complexa $T \in \tau^1_1$, um tensor que satisfaz $T^2 = -I$ [6], que são *compatíveis* com a forma ω, significando

$$g(u, v) = \omega(u, Tv). \tag{5.2}$$

Nosso objetivo é mostrar que $M = G/K$ possui uma forma simplética, já que a partir dela podemos construir um elemento de volume, Proposição 5.2. Isso é feito através do Teorema de Kirillov-Kostant-Souriau:

Proposição 5.5. ***Teorema de Kirillov-Kostant-Souriau*** *- Seja $M = G/K$ um espaço homogêneo de G, grupo de Lie compacto, conexo e semissimples, com forma simplética ω. Então, $K = Z_G(h_0)$ é o centralizador de um elemento $h_o \in \mathfrak{g}$, a álgebra de Lie de G, portanto M pode ser identificado como a órbita adjunta de h_0. Além disso, w calculada em um ponto $M \ni m = Ad(g)h_0$ é dada por $\omega_m(X,Y) = B(m,[X,Y])$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, com $\mathfrak{k}$ a subálgebra de Lie de $K = Z_G(m)$. Como $\mathfrak{g}$ é semissimples, a forma de Killing é não degenerada e $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp}$. Denote ω_m a forma simplética no ponto $m = eK$, que por construção é invariante sob a ação de $Ad(K)$, implicando que $ker\ w_m = \mathfrak{k}$. Como é fechada, temos

$$d\omega_m(X,Y,Z) = \sum_{\text{permutações cíclicas}} \omega_m([X,Y],Z) = 0.$$

Um fato sobre os grupos de cohomologia de De Rham é que se $\mathfrak{g}$ é semissimples $H^1(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \{0\}$ [15], ou seja, toda 2-forma fechada é também exata, portanto existe 1-forma ξ tal que $\omega_m(X,Y) = d\xi(X,Y) = \xi([X,Y])$. Ainda, existe $h_0 \in \mathfrak{g}$ de forma que

$$\xi(X) = B(h_o, X),$$

de maneira que

$$\omega_m(X,Y) = \xi([X,Y]) = B(h_0,[X,Y]) = B([h_0,X],Y).$$

A última igualdade implica que $\mathfrak{k} = ker\ \omega_m = Z_{\mathfrak{g}}(h_0)$. Via exponencial e a fórmula de BCH, inferimos que K contém o centralizador $Z_G(h_0)$. Como h_0 deve ser invariante por $Ad(K)$, vemos também que $Z_G(h_0)$ contém K, de forma que $Z_G(h_0) = K$. $\square$

5.2 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Finalizadas as preliminares, estamos agora em posição para definir o que são as variedades flag e por que o resultado geral sobre espaços homogêneos é importante.

Definição 5.4. *Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ um espaço vetorial e $\bar{p} = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$ um conjunto de r números naturais tal que $p_1 < p_2 < ... < p_r$. Uma* ***flag do tipo*** *$\bar{p}$ é um sistema $f = (V_1, V_2, ..., V_r)$ de subespaços de V tais que $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_r$ e $dim\ V_i = p_i$. Uma* ***flag completa*** *é uma flag do tipo $(1, 2, ..., n-1)$.*

Sejam $e_1, ..., e_n$ a base canônica de $\mathbb{C}^n$ e $< e_1, ..., e_k >$ o espaço gerado pelos k primeiros vetores dessa base. $SL(n,\mathbb{C})$ possui ação transitiva sobre o conjunto $\mathcal{F}_{\bar{p}}(V)$ de todas as *flags* do tipo $\bar{p}$, já que uma base normalizada é levada a outra base normalizada através da conjugação por um elemento do grupo. Note que o grupo de isotropia $P_{\bar{p}}$ de

$$f_0 = (< e_1, ..., e_{p_1} >, < e_1, ..., e_{p_1}, ..., e_{p_2} >, ..., < e_1, ..., e_{p_r} >),$$

a chamada *flag* -$\bar{p}$ padrão, é o subgrupo das matrizes triangulares superiores por blocos, com blocos de tamanho $p_1, (p_2 - p_1), ..., (p_r - p_{r-1})$. Assim, podemos identificar $\mathcal{F}_{\bar{p}}(V)$ com o órbita de $SL(n, \mathbb{C})$ em f_0 módulo seu grupo de isotropia, que por sua vez é o espaço coset $SL(n, \mathbb{C})/P_{\bar{p}}$.

É importante ver que o grupo de isotropia da *flag* completa padrão é precisamente o subgrupo de Borel B de $SL(n, \mathbb{C})$: o subgrupo das matrizes triangulares superiores, e que o grupo de isotropia de uma *flag*-$\bar{p}$ padrão sempre contém B, o que significa que é um subgrupo parabólico. Isso nos leva à noção de uma **variedade *flag* generalizada**.

Definição 5.5. *Seja G um grupo de Lie semissimples complexo. Uma **variedade flag generalizada** é o espaço coset G/P, em que P é um subgrupo parabólico.*

Exemplo 5.1. *O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é uma variedade flag identificada com $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$. Lembrando que $\mathbb{C}P^n$ é dado por $\mathbb{C}^{n+1}/\sim$, com a relação de equivalência dada por $x \sim y$ se $x = cy, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se tomarmos o ponto $x = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$, seu grupo de isotropia é dado por*

$$H(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & SU(n) \\ 0 & \end{pmatrix} = S(U(1) \times U(n)).$$

Se tomarmos representativos com a mesma norma, então é fácil ver que $SU(n)$ possui ação transitiva sobre $\mathbb{C}P^n$. Assim, cada ponto de $\mathbb{C}P^n$ pode ser escrito como a ação de um elemento $u \in SU(n+1)$ sobre o ponto x, identificando sua órbita módulo grupo de isotropia $H(x)$ com $\mathbb{C}P^n$. Como $S(U(1) \times U(n))$ é o centralizador do subtoro $T_0 = diag\{e^{ina}, e^{-ia}, e^{-ia}, ..., e^{-ia} | a \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{C}P^n$ é uma variedade flag . Passando para a descrição complexa, $SU(n+1)_{\mathbb{C}} = SL(n+1)$ e o grupo de isotropia de x é dado por $P = \{p \in SL(n+1) | p_{j1} = 0, \forall j > 1\}$, que é parabólico porque contém o subgrupo de Borel, formado pelas matrizes triangulares superiores.

6 FORMA DE KÄHLER E ELEMENTOS DE VOLUME

6.1 COORDENADAS DE BRUHAT

Como foi visto na seção anterior, as variedades *flag* , são o quociente entre um grupo de Lie complexo $G_{\mathbb{C}}$ e um grupo parabólico P, sendo isomórfico a $G/C(T_0)$, em que T_0 é um subtoro contido em um toro máximo T. As diferentes maneiras de se descrever uma variedade *flag* não apenas nos ajudam a identificá-las, mas também facilitam o trabalho, já que podemos transitar entre as diferentes definições. No entanto, precisamos concretamente ver como fazer essa transição.

Sejam B e P subgrupos de Borel e Parabólico, respectivamente, e $G_{\mathbb{C}}$ a complexificação do grupo G. Então, existem isomorfismos $G/T \simeq G_{\mathbb{C}}/B$ e $G/C(T_0) \simeq G_{\mathbb{C}}/P$. Para o primeiro caso o isomorfismo é dado, em uma direção, mapeando $[g]_T$ a $[g]_B$. Na outra, deve-se fazer uma *decomposição de Iwasawa* [12], escrevendo um elemento $g_{\mathbb{C}} \in G_{\mathbb{C}}$ como

$$g_{\mathbb{C}} = gb,\ g \in G,\ b \in B \tag{6.1}$$

de maneira única a menos de elementos do toro. Portanto, $[g_{\mathbb{C}}]_B = [gb]_{\mathbb{C}}$ é mapeado a $[g]_T$. O caso $G/C(T_0) \simeq G_{\mathbb{C}}/P$ pode ser mostrado de maneira similar.

A grande vantagem de se utilizar esse isomorfismo é que agora podemos decompor M em termos de células complexas, através da *decomposição de Bruhat* [12]. Seja W o grupo de Weyl de G e a ação de um elemento $w \in W$ seja dada através de uma matriz $\omega_w \in G$ via conjugação, isto é, $w{\cdot}Z = \omega_w Z \omega_w^{-1}$, $Z \in i\mathfrak{t}$. Então, a decomposição de Bruhat de $G_{\mathbb{C}}$ é dada por

$$G_{\mathbb{C}} = \bigcup_{w \in W} B\omega_w B = \bigcup_{w \in W} \{b_1 \omega_w b_2 | b_1, b_2 \in B\}. \tag{6.2}$$

Desta forma, $G_{\mathbb{C}}/B$ também pode ser fatorizada como

$$G_{\mathbb{C}}/B = \bigcup_{w \in W} [B\omega_w]_B \equiv \bigcup_{w \in W} M_w. \tag{6.3}$$

Se em vez de um subgrupo de Borel, tivermos $G/C(T_0) \simeq G_{\mathbb{C}}/P$, a decomposição de Bruhat passa a ser

$$G_{\mathbb{C}}/P = \bigcup_{w \in W/W_0} [B\omega_w]_P \equiv \bigcup_{w \in W/W_0} M_w, \tag{6.4}$$

com W/W_0 o grupo de Weyl de T fatorizado pelo grupo de Weyl de T_0.

Como é conhecido, um subgrupo de Borel pode ser fatorizado como o produto de um elemento do toro e um nilpotente, a chamada *decomposição de Levi* [20]. Usando isso, podemos permutar a parte pertencente ao toro com ω_w, sendo absorvido no segundo B. Além disso, gostaríamos que a identidade sempre estivesse contida na maior das células de Bruhat, de acordo com a ordem parcial geométrica

$$w' \geq w \text{ se } M_{w'} \subset \overline{M_w}. \tag{6.5}$$

Um fato importante é que esse ordenamento coincide com o dado pela teoria de grupos [17]

$$w' \geq w \text{ se } B(Z, w'(V)) \leq B(Z, w(V)) \, \forall Z, V \in C^\vee. \tag{6.6}$$

Uma célula de Bruhat qualquer pode ser descrita como

$$M_w = [B\omega_w]_B = [b'^w \omega_w]_B, \tag{6.7}$$

com

$$b'^w = I + \sum_{\alpha \in R_w^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} z^\alpha E_\alpha \tag{6.8}$$

e

$$R_w^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \{\alpha \in R^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) | w^{-1}(\alpha) \in R^-(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\} \tag{6.9}$$

Podemos escrever dessa forma porque um elemento $b \in B$ pode ser fatorizado como

$$b = b'^w \left(I + \sum_{\alpha \in R^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \setminus R_w^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} z''^\alpha E_\alpha \right).$$

O segundo termo pode ser comutado com ω_w, já que $E_\alpha \omega_w = \omega_w \omega_w^{-1} E_\alpha \omega_w$, que é proporcional a $\omega_w E_{w^{-1}(\alpha)}$, com $w^{-1}(\alpha) \in R_+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, como na Proposição 4.16.

Dessa forma, se multiplicarmos uma célula à esquerda por ω_m^{-1}, o elemento mínimo de acordo com a ordem parcial (6.6), temos

$$\begin{aligned} M_w = [\omega_{w_m}^{-1} B \omega_w]_B &= \left[\omega_{w_m}^{-1} \left(I + \sum_{\alpha \in R_w^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} z^\alpha E_\alpha \right) \omega_w \right]_B \\ &= \left[\left(I + \sum_{\alpha \in R_{\overline{w}}^-(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} z'^\alpha E_\alpha \right) \omega_{\overline{w}} \right]_B, \end{aligned} \tag{6.10}$$

com

$$R_w^-(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \{w_m^{-1}(\alpha) | \alpha \in R_w^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\}$$

e

$$\overline{w} = w_m^{-1} w.$$

Observe que $\overline{w_m} = I$, implicando que a identidade pertence à maior célula de Bruhat, como queríamos. No caso geral em que $C(T_0)$ não coincide com T, tudo o que foi feito pode ser repetido substituindo W por W/W_0 [17] e, sendo P um subgrupo maior do que B, o conjunto em (6.9) por

$$R_\omega^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \{\alpha \in R^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) | E_{\omega^{-1}(\alpha)} \notin \mathfrak{p}\}. \tag{6.11}$$

Vamos agora ilustrar o procedimento com um exemplo simples: $SU(2)/U(1) \simeq SL(2,\mathbb{C})/B$. O subgrupo de Borel é constituído pelas matrizes triangulares superiores e o grupo de Weyl é o grupo de permutações de dois elementos, S_2. As matrizes $\omega_I, \omega_{(12)} \in SU(2)$ que representam a ação são

$$\omega_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

e

$$\omega_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

de forma que a decomposição de Bruhat fica

$$SL(2,\mathbb{C})/B = \left[B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_B \bigcup \left[B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]_B . \tag{6.14}$$

O primeiro coset é apenas a identidade $[\mathbb{1}]$, enquanto o segundo é isomórfico a $\mathbb{C}$, como será visto mais adiante. O próximo passo é calcular o ordenamento dos elementos do grupo de Weyl. Para isso, usamos a Proposição 4.13 para escrever a forma de Killing como $B(H,H') = 4tr(HH'), H, H' \in i\mathfrak{t}$. Escolhemos a câmara de Weyl como sendo $\{diag(a,-a) | a \in \mathbb{R}_+\}$, e ficamos com $B(H, w_I(H')) = 8aa'$ e $B(H, w_{(12)}(H')) = -8aa'$, implicando em $(12) \leq I$.

Agora, fatorizamos $b \in B$ como

$$b = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{6.15}$$

O segundo termo pertence ao toro, portanto multiplicar por $\omega_{(12)}\omega_{(12)}^{-1}$ a esquerda, para que seja absorvido no coset B à direita. Aqui, podemos ver claramente como essa célula de Bruhat corresponde a $\mathbb{C}$. Agora, multiplicamos ambos os coset por $\omega_{(12)}^{-1}$ para que a identidade agora pertença à maior célula:

$$SL(2,\mathbb{C})/B = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_B \bigcup \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \right]_B . \tag{6.16}$$

Nessa última expressão podemos facilmente checar o ordenamento geométrico $M_1 \subset \overline{M}_{(12)}$, basta ver que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \right]_B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z^{-1} & -1 \\ 0 & -z \end{pmatrix} \right]_B = \left[\begin{pmatrix} -z^{-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_B , \tag{6.17}$$

mostrando que M_1 é o ponto no infinito pertence ao fecho de $M_{(12)}$.

6.2 FORMA DE KÄHLER

O objetivo desta seção é encontrar a 2-forma ω que é simultaneamente fechada, simplética e invariante sob multiplicação à esquerda do grupo G. Uma vez que a forma de Kähler é obtida, podemos construir o elemento de volume invariante. Além disso, sendo o grupo compacto, o elemento de volume é unimodular [18], implicando que é também uma medida invariante para a ação adjunta.

Para isso, seguiremos duas abordagens distintas. A primeira é um método algébrico que utiliza alguns resultados da teoria geral de variedades de Kähler para escrever uma expressão para ω, que coincide com a forma de Kirillov. A partir desse ponto, é necessário apenas utilizar a decomposição de Iwazawa, de forma que tenhamos uma aplicação de M em G, cujo pullback nos dá uma base escrita em termos das coordenadas de Bruhat, da qual as componentes de ω podem ser lidas com facilidade.

Na segunda abordagem, usaremos diversas propriedades dos fibrados de linhas para calcular o potencial de Kähler utilizando a fórmula $F = ln|s|^2$, sendo s é uma seção global, e definimos $|s|^2 = \mathscr{H}(s,s)$, com $\mathscr{H}$ uma estrutura hermitiana. Com essa construção, a forma de Kähler é dada apenas por $\omega = i\partial\bar{\partial}F$. Talvez o mais interessante esse último ponto de vista é que a forma de Kähler pode ser identificada com primeira classe de Chern [7], o que significa que existe toda uma classe de cohomologia que podem ser igualmente utilizadas.

6.2.1 Método Algébrico

Seja $M = G/T$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$, uma decomposição da álgebra de G. Há uma correspondência entre os elementos de $\mathfrak{n}$ e os campos vetoriais invariantes de M dada por

$$X \leftrightarrow \tilde{X}_m = \frac{d}{dt}e^{tX} \cdot m. \tag{6.18}$$

Assim, podemos também identificar o espaço tangente na identidade T_eM com $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha\in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha$, os elementos da complexificação da álgebra de G, usando o isomorfismo $G/T \simeq G_{\mathbb{C}}/B$.

Seguindo a argumentação em [6], a forma de Kähler é construída da seguinte forma: seja Z^ω um elemento qualquer da câmara de Weyl positiva e $E_{\alpha_1}, ..., E_{\alpha_p}$, com $\alpha_i \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ uma base de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$. Então, a forma de Kähler ω_e calculada na identidade é

$$\omega_e(E_\alpha, E_\beta) = \begin{cases} i\alpha(Z^\omega) & \text{se } \alpha + \beta = 0; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6.19}$$

Essa forma dá origem a uma métrica riemanniana, Definição 2.9 através da equação (5.2)

$$g(E_\alpha, E_\beta) = \omega(E_\alpha, -i\theta(E_\beta)) = \begin{cases} \alpha(Z^\omega) & \text{se } \alpha = \beta; \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{6.20}$$

na qual podemos identificar a estrutura quase complexa $T = -i\theta$, com θ a involução de Cartan (4.14).

O que resta a fazer é construir uma base e_α dual aos vetores $\tilde{E}_\alpha$ definidos pela equação (6.18), expressa em termos das coordenadas de Bruhat. Para tal, seja U uma célula de Bruhat. Após o processo descrito na seção anterior, obtemos um elemento preferido g_c que será usado como representativo do coset $[g_{\mathbb{C}}]_B$, e fazemos uma decomposição de Iwasawa $g_{\mathbb{C}} = gb$, obtendo uma aplicação de U em G, do qual podemos fazer um pullback das formas invariantes de G.

De acordo com a equação (2.14) e da representação de G no espaço cotagente, Proposição 3.3, podemos lê-las diretamente de

$$g^{-1}dg = \sum_{\beta \in \Pi(\mathfrak{g})} h^\beta H_\beta + \sum_{\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} e^\alpha E_\alpha, \tag{6.21}$$

as formas sendo os termos multiplicando cada E_α. Como G é compacto, os E_α só aparecem nas combinações $i(E_\alpha + E_{-\alpha})$ e $(E_\alpha - E_{-\alpha})$ [6], implicando na relação $e_\alpha = -\bar{e}_{-\alpha}$. Assim, a forma de Kähler é escrita

$$\omega = \sum_{\alpha \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \omega_e(E_\alpha, E_{-\alpha}) e^\alpha \wedge e^{-\alpha} = -i \sum_{\alpha \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \alpha(Z^\omega) e^\alpha \wedge \overline{e^\alpha}. \tag{6.22}$$

Como exemplo, vamos retomar o caso $SU(2)/T \simeq SL(2,\mathbb{C})/B$. Escolhemos a célula correspondente a (12), cuja decomposição de Iwasawa é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} = (1 + z\bar{z})^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ -z & 1 \end{pmatrix} b(z), \tag{6.23}$$

de forma que

$$g^{-1}(z) dg(z) = (1 + z\bar{z})^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) & d\bar{z} \\ -dz & -\frac{1}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) \end{pmatrix}, \tag{6.24}$$

e podemos imediatamente identificar

$$e^{12} = -e^{\bar{2}1} = (1 + z\bar{z})^{-1}. \tag{6.25}$$

Lembrando que $\mathfrak{su}(2)$ só possui uma raíz dada por $\alpha(H) = 2a$, para $H = diag(a, -a) \in \mathfrak{t}$, escolhemos $Z^\omega = m\ diag(1/2, -1/2), m > 0$. A forma de Kähler é então

$$\omega = i\, m (1 + z\bar{z})^{-2} dz \wedge d\bar{z}. \tag{6.26}$$

Apesar de ser um método simples em teoria, nem sempre é de fácil execução devida à necessidade de se escrever a decomposição de Iwasawa do grupo, o que nem sempre é possível de uma forma prática. O próximo método contorna esse problema.

6.2.2 Método de fibrados de linhas

Seja $M = G/T \simeq G_{\mathbb{C}}/B$ e χ um caractere de T. Os caracteres de grupos abelianos são um homomorfismo $\chi : T \mapsto U(1)$, que pode ser estendido para um homomorfismo $\chi : B \mapsto \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a complexificação de $U(1)$, de forma única. Dado um caractere, podemos construir um fibrado de linhas complexo $L_\chi \overset{\pi}{\mapsto} M$.

$$L_\chi = \big\{[(g_\mathbb{C}, c)] | g_\mathbb{C} \in G_\mathbb{C}, c \in \mathbb{C} \text{ e } (g_\mathbb{C}, c) \sim (g_\mathbb{C} b, \chi(b^{-1})c)\big\}, \tag{6.27}$$

com a projeção dada por $\pi([(g_\mathbb{C}, c)]) = [g_\mathbb{C}]_B$. L_χ é o fibrado de linha associado ao fibrado principal $G_\mathbb{C} \overset{\pi}{\mapsto} M$, com projeção dada por $\pi(g_c) = [g_c]_B$ e grupo estrutural B.

Com os fibrados construídos, devemos encontrar a forma hermitiana utilizada para definir a "norma ao quadrado"da seção. Dado um espaço linear V, lembramos que uma forma hermitiana é uma aplicação $\mathscr{H} : V \times V \mapsto \mathbb{C}$ que obedece

$$\begin{gathered} \mathscr{H}(\mu v_1 + \nu v_2, u) = \mu \mathscr{H}(v_1, u) + \nu \mathscr{H}(v_2, u) \\ \mathscr{H}(v, u) = \overline{\mathscr{H}(u, v)}. \end{gathered} \tag{6.28}$$

Uma forma hermitiana em um fibrado vetorial designa continuamente para cada ponto do espaço base uma forma para o fibrado do ponto. A estrutura de espaço vetorial é dada pela soma e multiplicação estabelecidas por

$$[(g_\mathbb{C}, c_1)] + \mu[(g_c, c_2)] = [(g_c, c_1 + \mu c_2)]. \tag{6.29}$$

Para encontrar as estruturas hermitianas necessárias, precisamos construir os *produtos de fibrados*. Sejam P_1 e P_2 dois fibrados principais sobre M, com grupo $U(1)$ e projeções π_1 e π_2, respectivamente. Definimos o produto como $P_1 P_2 = \Delta(P_1 \times P_2)/\sim$, no qual

$$\Delta(P_1 \times P_2) = \{(p_1, p_2) \in P_1 \times P_2 | \pi_1(p_1) = \pi_2(p_2)\}, \tag{6.30}$$

fatorizado pela relação de equivalência $(p_1, p_2) \sim (up_1, u^{-1}p_2), u \in U(1)$. A projeção é dada pela restrição a qualquer um dos fatores, seguida da aplicação da respectiva projeção. A ação de $U(1)$ é $u[(p_1, p_2)] = [(up_1, p_2)]$.

Para cada P_i, há um fibrado de linha L_i associado: $L_i = (P \times \mathbb{C})/\sim$, no qual $(p, c) \sim (up, u^{-1}c), u \in U(1)$. Dados dois fibrados de linha L_1 e L_2, associados a P_1 e P_2, respectivamente, podemos construir seu produto como $L_1 L_2 = \Delta(L_1 \times L_2)/\sim$, o mesmo feito para os fibrados principais, equação (6.30). Dessa forma $L_1 L_2$ é isomórfico ao fibrado de linha *associado* a $P_1 P_2$, $(P_1 P_2 \times \mathbb{C})/\sim$, através da identificação

$$[([p_1, c_1], [p_2, c_2])] \leftrightarrow [(p_1, p_2), c_1 c_2]. \tag{6.31}$$

A estrutura de espaço linear é dada por

$$[([p_1, c_1], [p_2, c_2])] + \mu[([p_1, c_1'], [p_2, c_2'])] = [([p_1, c_1''], [p_2, c_2''])], \tag{6.32}$$

em que c_1'' e c_2'' são tais que $c_1'' c_2'' = c_1 c_2 + \mu c_1' c_2'$.

Finalmente, se $\mathscr{H}_i(\cdot, \cdot)$ é uma estrutura hermitiana em L_i, então

$$\mathscr{H}([(v_1, v_2)], [(v_1', v_2')]) = \mathscr{H}_1(v_1, v_1') \mathscr{H}_2(v_2, v_2') \tag{6.33}$$

é uma estrutura hermitiana em L_1L_2, fazendo com que o problema se reduza a encontrar as estruturas para os fibrados de linha mais simples.

Essa construção foi feita para encontrar a forma de Kähler de $SU(N)/T$, para N geral. Primeiramente, identificamos $L_{\chi_1}L_{\chi_2}$ com $L_{\chi_1\chi_2}$ através de

$$[([g,c_1]_{\chi_1},[g,c_2]_{\chi_2})] \leftrightarrow [(g,c_1c_2)]_{\chi_1\chi_2}, \tag{6.34}$$

como descrito acima. Em seguida, estudamos os fibrados determinante sobre os Grassmaniannos $G(k,N)$ complexos. Em cada ponto da variedade, existe um plano caracterizado por k vetores $e_1,...,e_k$. Então, há um fibrado E_k em cada ponto dado por um dos vetores e_j que formam o plano como ponto no espaço base, e o próprio plano V como fibrado, cujo ponto geral é dado por (e_j,V). O fibrado determinante é dado pelo produto de cunha $det = \wedge^k E_k$, ou seja, um ponto de det é dado $(e_1\wedge ... \wedge e_k, V), e_i \in V\ , 1 \leq i \leq k$. A dimensão do fibrado é $\binom{k}{k} = 1$, portanto é um fibrado de linhas. Definimos uma forma hermitiana em det como

$$\mathscr{H}_{det}(e'_1\wedge ... \wedge e'_k, e''_1 \wedge ... \wedge e''_k) = det[(e'_i,e''_j)], \tag{6.35}$$

no qual $det[(e_i,e_j)]$ é o determinante da matriz cuja entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna é dada pelo produto interno canônico de $\mathbb{C}^n$ entre os vetores e_i e e_j.

Esse procedimento pode ser generalizado para $SU(N)/T$. Um ponto numa variedade flag completa é um espaço unidimensional C_1 contido num espaço bidimensional C_2,..., contido num espaço de dimensão $(N-1) \subset \mathbb{C}^N$. Para cada $1 \leq k \leq N$ pode ser associado um fibrado determinante $\wedge^k E_k$, e a esta uma estrutura hermitiana $\mathscr{H}_{det_k}$. Por fim, precisamos mostrar que det_k coincidem com L_{λ_k}, o fibrado descrito pelo caractere dado pelo k-ésimo peso fundamental.

Sejam $g_{\mathbb{C}}$ e $g'_{\mathbb{C}}$ representativos da interseção de duas células distintas. Então existe $b \in B$ tal que $g'_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}}b$. Em E_k, os dois são relacionados pela função de transição dada pelo menor principal $k\times k$ de b, de forma que em det_k, a função de transição é dada pelo determinante dessa matriz, isto é

$$g_{zz'} = \prod_{i=1}^{k} b_{ii}, \tag{6.36}$$

correspondendo ao caractere

$$\chi_k(t) = \prod_{i=1}^{k} t_{ii}, t\in T. \tag{6.37}$$

Para ver que também é um peso fundamental, considere a Proposição 4.13 para escrever

$$\frac{2tr(u_{\lambda_i}u_{\alpha_j})}{tr(u_{\alpha_j}u_{\alpha_j})} = \delta_{ij}, \tag{6.38}$$

no qual λ_i é o i-ésimo peso fundamental e $\lambda_i(H) = tr(u_{\lambda_i}H), H\in i\mathfrak{t}$, e analogamente para a raíz simples α_j. Lembrando que as raízes simples de $SU(N)$ são dadas por $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, 1\leq i \leq n-1$, significando que $u_{\alpha_i} = diag(0, ..., 1, -1, 0, ..., 0)$, com 1 na i-ésima entrada. Se escrevermos

$$u_{\lambda_j} = (1/N)diag(\underbrace{N-j, N-j, ..., N-j}_{j \text{ vezes}}, \underbrace{-j, -j, ..., -j}_{N-j \text{ vezes}}), \tag{6.39}$$

basta um simples cálculo pra ver que obedece a relação (6.38). Assim, para $H \in i\mathfrak{t}$, temos

$$\lambda_j(H) = tr(u_{\lambda_j} H) = \sum_{i=1}^{j} H_{ii}, \tag{6.40}$$

e utilizando a exponencial, $\forall t \in T$

$$\lambda_j(t) = \prod_{i=1}^{j} t_{ii}. \tag{6.41}$$

Dado um representativo de $[g_{\mathbb{C}}(z)]_B$, usamos como seção global de det_k

$$s_0([g_{\mathbb{C}}(z)]_B) = [(g_{\mathbb{C}}, e_1 \wedge ... \wedge e_k)], \tag{6.42}$$

em que e_i é a i-ésima coluna do representativo $g_{\mathbb{C}}(z)$. Essa definição, é claro, obedece a relação de equivalência (6.27). Então, se $L_\chi = \prod_{i=1}^{n-1} L_{\chi_i}$, sua seção global s_0 é o produto das seções globais de cada fator e a norma ao quadrado é

$$|s_0|^2 = \prod_{k=1}^{n-1} (\mathscr{H}_{det_k}(e_1 \wedge ... \wedge e_k, e_1 \wedge ... \wedge e_k))^{m_k}. \tag{6.43}$$

Note que a escolha da seção não muda ω. Para ver isso, suponha que há uma outra seção s' relacionada à primeira por $s' = f(z)s$, $f(z)$ uma função holomórfica, então $\partial\overline{\partial}(ln(\mathscr{H}(s,s)) - ln(\mathscr{H}(f(z)s, f(z)s))) = \partial\overline{\partial}ln(f\overline{f}) = 0$, de forma que $i\partial\overline{\partial}ln|s_0|^2$ pode ser identificado como as componentes da forma de Kähler quado χ pertence à câmara de Weyl positiva [7]. Apesar da liberdade de escolha da seção global, sua existência está atrelada a qual caractere χ foi usado para a construção do fibrado, pois de acordo com o teorema de Borel-Weil [3, 7], o espaço de seções globais de L_χ é isomórfico à representação da qual χ é um peso antidominante, e se o caractere não o é, não existem seções globais.

Finalmente, agora que temos um meio sistemático de obter a forma de kähler, nos resta calcular $\omega^n/n!$. Em vez de simplesmente calcularmos o produto de cunha n vezes, é possível derivar uma fórmula que dá diretamente o elemento de volume em termos apenas dos pesos e da seção global. Para isso, citamos alguns resultados gerais de geometria diferencial.

Em geral, dada uma forma simplética $\omega = ig_{\alpha\beta}dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$, então o elemento de volume é

$$\omega^n/n! = i^n(det\ g) \prod_{\gamma=1}^{n} dz_\gamma \wedge d\bar{z}_\gamma. \tag{6.44}$$

Também é conhecido que o tensor de Ricci pode ser derivado a partir de um potencial através de

$$Ric = \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}(-ln(det\ g))dz_\alpha d\bar{z}_\beta = R_{\alpha\beta}dz_\alpha d\bar{z}_\beta. \tag{6.45}$$

Alternativamente, o tensor de Ricci também pode ser expresso através da *forma de Ricci* ρ, que tem papel análogo ao de ω.

$$\rho = i\partial\overline{\partial}(-ln(det\ g))dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta = iR_{\alpha\beta}dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta. \tag{6.46}$$

No entanto, se o espaço está equipado com uma métrica de Kähler invariante, o tensor e a forma de Ricci independem da escolha particular de métrica [6]. Devido à invariância, basta determinar as componentes da forma na identidade para determinar as componentes em M, assim como em (6.19). É dada por

$$\rho_e(E_\alpha, E_\beta) = \begin{cases} i\alpha(Z^\rho) & \text{se } \alpha + \beta = 0; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6.47}$$

A maior diferença é que agora temos um elemento particular na definição da forma: a soma das raízes positivas

$$Z^\rho = \sum_{\alpha \in R_+} u_\alpha. \tag{6.48}$$

Podemos escrever uma expressão pra ρ em termos de uma seção do fibrado de linhas L_ρ

$$\rho = i\partial\overline{\partial}ln(|s_\rho|^2). \tag{6.49}$$

Comparando com (6.46), vemos que

$$\partial\overline{\partial}ln(|s_\rho|^2) = \partial\overline{\partial}(-ln(det\ g)), \tag{6.50}$$

o que implica em

$$det\ g = \frac{\epsilon}{|s_\rho|^2}, \tag{6.51}$$

com ϵ constante a ser determinada. Como há uma liberdade na escolha da métrica, podemos escolhê-lá como uma métrica de Einstein: uma métrica que é um múltiplo do tensor de Ricci. Dessa forma, colocamos $\omega = \rho$ e $g = Ric$. Usando a equação anterior, (6.47) e (6.44), vemos que

$$\begin{aligned} \epsilon &= \prod_{\alpha \in R_+} \rho(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \prod_{\alpha \in R_+} \alpha\left(\sum_{\beta \in R_+} H_\beta\right) \\ &= \prod_{\alpha \in R_+} \sum_{\beta \in R_+} \left(\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\right). \end{aligned} \tag{6.52}$$

A forma de Ricci fixa $m_i = 2, i = 1, ..., n-1$ em (6.43), já que $Z^\rho = 2\sum_i \pi_i$, equação (4.33), o que é equivalente a definir $L_\chi = \prod_{i=1}^{n-1}(det_k)^2$.

Exemplo 6.1. *Primeiro, retomamos o exemplo mais simples de $SU(2)/T$: Como o toro de $SU(2)$ é unidimensional só existe um peso fundamental independente λ^m, o que significa que só há um termo no produtório (6.43). Como nossa seção global fazemos a mesma escolha de (6.42), usando um representativo* *da maior célula de Bruhat, já que a usaremos posteriormente para integração. Assim, temos que*

$$s_0\left(\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ -z & 1\end{pmatrix}\right]\right) = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ -z & 1\end{pmatrix}, (1,z)\right]_{\lambda^m}, \tag{6.53}$$

portanto

$$|s_0|^2 = \mathscr{H}_{det_{\lambda^m}}((1,-z),(1,-z))^m = (1+|z|^2)^m. \tag{6.54}$$

$SU(2)/T$ como variedade possui dimensão 2, portanto podemos imediatamente obter o elemento de volume, dado por

$$\omega = i\, m(1+|z|^2)^{-2}, \tag{6.55}$$

o mesmo obtido através do modo algébrico da seção anterior.

Exemplo 6.2. *Vamos considerar o exemplo de $SU(3)/T \simeq SL(3,\mathbb{C})/B$. Vimos no Exemplo 4.7 que o grupo de Weyl de $SU(N)$ é o grupo de permutações de n elementos, que pode ser representado, no caso $n = 3$, através das matrizes*

$$\begin{gathered}\omega_I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \omega_{(12)} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \omega_{(23)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\\ \omega_{(132)} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \omega_{(123)} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \omega_{(13)} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{gathered}. \tag{6.56}$$

Para obter as coordenadas de Bruhat devemos simplificar os representativos de cada célula. Para isso, escrevemos o elemento do grupo de Borel como na Equação (6.8). Calculando a ação do grupo de Weyl nas raízes positivas, temos

$$\begin{gathered}R^+_{w_{(12)}} = \{\alpha_{12}\}, R^+_{w_{(23)}} = \{\alpha_{23}\}, R^+_{w_{(132)}} = \{\alpha_{13},\alpha_{23}\},\\ R^+_{w_{(123)}} = \{\alpha_{12},\alpha_{13}\}, R^+_{w_{(13)}} = \{\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{23}\}.\end{gathered} \tag{6.57}$$

O ordenamento dos elementos, equação (6.6), é $(13) \leq (123),(132), \leq (12)(23) \leq I$, de forma que ao multiplicar todas as células à esquerda por $\omega^{-1}_{(13)}$ ficamos com

$$\begin{gathered}M_{\omega_I} = \left\{\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_B\right\} M_{\omega_{(12)}} = \left\{\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ -z_1 & 1 & 0\end{pmatrix}\right]_B\right\}\\ M_{\omega_{(23)}} = \left\{\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -z_3 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_B\right\} M_{\omega_{(132)}} = \left\{\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -z_3 & 0 & 1\\ -z_2 & -1 & 0\end{pmatrix}\right]_B\right\}\\ M_{\omega_{(123)}} = \left\{\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -z_1 & -z_2 & 1\end{pmatrix}\right]_B\right\} M_{\omega_{(13)}} = \left\{\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -z_3 & 1 & 0\\ -z_2 & z_1 & 1\end{pmatrix}\right]_B\right\}\end{gathered} \tag{6.58}$$

.

O próximo passo para encontrar a forma de Kähler é calcular a norma da seção global (6.42). Como $SU(3)$ possui duas raízes simples, temos dois termos no produtório de (6.43):

$$|s_0|^2 = [\mathscr{H}_{det_1}(e_1, e_1)]^{m_1}[\mathscr{H}_{det_2}(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2)]^{m_2}, \tag{6.59}$$

na qual

$$\mathscr{H}_{det_1}(e_1, e_1) = 1 + |z_2|^2 + |z_3|^2$$

e

$$\mathscr{H}_{det_2}(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2) = det \begin{pmatrix} 1 + |z_2|^2 + |z_3|^2 & -z_3 - z_2\overline{z_1} \\ -\overline{z_3} - z_1\overline{z_2} & 1 + |z_1|^2 \end{pmatrix} = 1 + |z_1|^2 + |z_2 - z_1z_3|^2,$$

de forma que

$$\omega = i\partial\overline{\partial}ln[(1 + |z_2|^2 + |z_3|^2)^{m_1}(1 + |z_1|^2 + |z_2 - z_1z_3|^2)^{m_2}]. \tag{6.60}$$

Após calcular os diferenciais, ficamos com

$$\begin{aligned} = \frac{im_1}{K_1^2}&[(1 + |z_1|^2)dz_1 \wedge d\overline{z_1} + (1 + |z_3|^2)dz_2 \wedge d\overline{z_2} - z_2\overline{z_3}dz_3 \wedge d\overline{z_2} - \overline{z_2}z_3dz_2 \wedge \overline{z_3}]+ \\ &\frac{im_2}{K_2}[K_1dz_1 \wedge d\overline{z_1} - (z_3 + \overline{z_1}z_2)dz_1 \wedge d\overline{z_2} + (z_3\overline{z_1} + \overline{z_1}^2z_2)dz_1 \wedge d\overline{z_3}- \\ &-(\overline{z_3} + z_1\overline{z_2})dz_2 \wedge d\overline{z_1} + (1 + |z_1|^2)dz_2 \wedge d\overline{z_2} - (1 + |z_1|^2)dz_2 \wedge d\overline{z_3}+ \\ &+(z_1\overline{z_3} + z_1^2\overline{z_2})dz_3 \wedge d\overline{z_1} - (1 + |z_1|^2)dz_3 \wedge d\overline{z_2} + (1 + |z_1|^2)dz_3 \wedge d\overline{z_3}] \end{aligned} \tag{6.61}$$

, na qual $K_1 = 1 + |z_2|^2 + |z_3|^2$ e $K_2 = 1 + |z_1|^2 + |z_2 - z_1z_3|^2$. A partir deste ponto, podemos prosseguir de duas maneiras para obter o elemento de volume: a primeira é calcular diretamente o produto ω^3, enquanto a segunda consiste em utilizar as fórmulas (6.44) e (6.51).

A primeira alternativa resulta, após um cálculo bastante longo, em

$$\frac{\omega^3}{n!} = i^3\frac{(m_1 + m_2)m_1m_2}{(K_1K_2)^2}\prod_{j=1}^{3} dz_j \wedge d\overline{z_j}. \tag{6.62}$$

Já a segunda,

$$\frac{\omega^3}{n!} = i^3\frac{16}{K_1^2K_2^2}\prod_{j=1}^{3} dz_j \wedge d\overline{z_j}, \tag{6.63}$$

o mesmo resultado com $m_1 = m_2 = 2$, como esperado pela escolha de Z^ρ.

Exemplo 6.3. *Como um último exemplo, vamos calcular o elemento de volume de $\mathbb{C}P^2$, uma variedade flag parcial, Exemplo 5.1, com $n = 2$.*

O subgrupo $S(U(1)\times U(2))$ surge como o centralizador de $T_0 = \{t \in T | t = diag(e^{2ia}, e^{-ia}, e^{-ia}), a \in \mathbb{R}\}$, que possui como grupo de Weyl $W_0 = \{I, (23)\}$. Sendo assim, $W/W_0 = \{[I], [(12)], [(13)]\}$, o que pode ser visto de $(123) = (12)(23)$ e $(132) = (13)(23)$. Calculando a ação de cada elemento de W/W_0

nas raízes positivas, temos $\omega_{(13)} : \alpha_1 \mapsto \alpha_{-3}, \alpha_2 \mapsto \alpha_{-2}, \alpha_3 \mapsto \alpha_{-1}$; $\omega_{(12)} : \alpha_1 \mapsto \alpha_{-1}, \alpha_2 \mapsto \alpha_3, \alpha_3 \mapsto \alpha_2$*, de forma que*

$$R^+_{\omega_{(12)}} = \{\alpha_1\}, R^+_{\omega_{(13)}} = \{\alpha_2, \alpha_3\}. \tag{6.64}$$

Segue então que as células de Bruhat são dadas, após absorver o máximo possível no coset, por

$$\begin{gathered} M_{\omega_{[I]}} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_P \right\} M_{\omega_{[(12)]}} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -z_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_P \right\} \\ M_{\omega_{[(13)]}} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z_3 & 1 & 0 \\ -z_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_P \right\} \end{gathered} \tag{6.65}$$

O ordenamento das células é dado por $[(13)] \leq [(12)] \leq [I]$*, como pode ser visto de*

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -z_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z_1^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & -z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ z_1^{-1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z_3 & 1 & 0 \\ -z_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z_2^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -z_3 \\ 0 & 0 & -z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_2^{-1} & 0 & -1 \\ \frac{z_3}{z_2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{6.66}$$

o que mostra que $M_{\omega_{[I]}} \subset \overline{M}_{\omega_{[(12)]}}$ *e* $M_{\omega_{[I]}} \subset {}_{\omega_{[(13)]}}$*. Por fim,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z_3 & 1 & 0 \\ -z_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -z_3 \\ 0 & 1 & -z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3^{-1} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{z_2}{z_3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.67}$$

Para calcular a forma de Kähler, primeiro notamos que $C(T_0)$ *possui apenas um peso fundamental:* λ_1*, já que a única raíz simples é* $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$*. Isso significa que há apenas um termo em (6.43):*

$$|s_0|^2 = det_1(e_1, e_1)^m = (1 + |z_2|^2 + |z_3|^2)^m. \tag{6.68}$$

Utilizando novamente (6.44), o elemento de volume é

$$\frac{\omega^n}{n!} = i^3 \frac{16}{(1 + |z_2|^2 + |z_3|^2)^3} dz_2 \wedge d\overline{z_2} \wedge dz_3 \wedge \overline{z_3}. \tag{6.69}$$

Exemplo 6.4. *Para finalizar, vamos generalizar o exemplo anterior para calcular o elemento de volume de* $\mathbb{C}P^n$*, dado por* $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$*. O subtoro* $T_0 = \{(e^{-ina}, e^{ia}, ..., e^{ia}), a \in \mathbb{R}\}$ *é centralizado por* $S(U(1) \times U(n))$*, que tem como complexificação* $P = \{p \in SL(n+1) | p_{i1} = 0, i > 1\}$*, que é o subgrupo que mantém a flag consistida de um espaço unidimensional e um espaço* n*-dimensional. O representativo da maior célula de Bruhat é*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & & & \\ \vdots & & & I_{n\times n} & \\ z_n & & & & \end{pmatrix}, \tag{6.70}$$

uma vez que a célula é caracterizada pelo elemento do grupo de Weyl que mapeia todas as raízes positivas nas raízes negativas.

Como no exemplo anterior, só existe um peso fundamental e uma única escolha de caractere $\lambda_1 = p_{11}$. A norma da seção fica então

$$|s_0|^2 = (1 + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2)^m. \tag{6.71}$$

Para finalizar, precisamos determinar o coeficiente m, já que temos $L_\chi = L_{\lambda_1^m}$. Para isso, podemos escrever $\rho = m_1\lambda_1 +$ (outros pesos que não contêm ϵ_1) e comparamos com a expressão geral $\rho = 2\sum_{i=1}^{n} \pi_i$. Disso, temos que

$$\begin{aligned} m_1(u_{\lambda_1})_{11} &= 2\sum_{i=1}^{n}(u_{\lambda_i})_{11} \\ \implies m_1\frac{n}{n+1} &= \frac{2}{n+1}\left(n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}\right), \end{aligned} \tag{6.72}$$

de onde tiramos $m = n+1$. Daí, podemos ver que

$$\frac{\omega^n}{(n!} = \epsilon \prod_{j=1}^{n} \frac{i^n dz_j \wedge d\overline{z_j}}{(1 + \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2)^{n+1}}. \tag{6.73}$$

7 INTEGRAÇÃO SOBRE ESPAÇOS PROJETIVOS

7.1 INTRODUÇÃO

Enfim, temos a teoria necessária desenvolvida e passamos a de fato apresentar o problema a ser resolvido. A intenção é aplicar tudo o que foi apresentado na tentativa de calcular uma integral sobre a variedade *flag* $U(2n)/\otimes^{2n} U(1)$, motivados por [5]. Inicialmente, apresentaremos como os autores modelam e sua proposta de solução, para em seguida mostrarmos, de maneira mais rigorosa, um outro procedimento, que esperamos comparar com obtidos anteriormente.

7.2 MODELO DE REDES DE MANHATTAN E INTEGRAL SOBRE O GRUPO UNITÁRIO

Existem certos modelos dentro da teoria de calibre não abeliana que podem ser descritos alternativamente como uma teoria de cordas não crítica, cujos cálculos são feitos através de integrais sobre matrizes, e estes, em uma variedade de casos têm soluções dadas por meios não perturbativos [23,25]. No entanto, esses modelos esbarram em uma limitação: são válidos apenas no regime no qual o valor da carga central possui valores $c \leq 1$, impedindo que as teorias envolvendo três ou quatro dimensões possam ser estudadas através desse método. Como tentativa de superar esse empecilho, foi estudado um modelo que se baseia nas chamadas redes de Manhattan, que associada a uma matriz R acopla um modelo de matéria integrável com gravitação quântica em duas dimensões.

A partir desse modelo, é possível calcular a função partição através da integral

$$Z = \int dM e^{-NS(M)}, \tag{7.1}$$

com N um número que terá o limite tomado e $S(M)$ a ação dada por

$$S(M) = M^*_{\alpha\beta,ij}(\check{R}^c)^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'} M_{\beta'\alpha',ij} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{d_k}{k} tr(M^k + (M^\dagger)^k), \tag{7.2}$$

na qual M é uma matriz normal $2n \times 2n$. Os índices α e β assumem os valores 0 e 1, e são relacionados ao modelo XXZ, enquanto os índices i e j assumem valores entre 1 e n, e controlam a expansão topológica. Já a chamada matriz-R, que denotamos por $\check{R}^c$ é dada por

$$\begin{aligned}(\check{R}^c)^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'} &= \frac{b+c}{2}\sigma_1{}^\beta_\alpha \otimes \sigma_1{}^{\beta'}_{\alpha'} + \frac{b-c}{2}\sigma_2{}^\beta_\alpha \otimes \sigma_2{}^{\beta'}_{\alpha'} + \frac{a}{2}(\sigma_0{}^\beta_\alpha \otimes \sigma_0{}^{\beta'}_{\alpha'} + \sigma_3{}^\beta_\alpha \otimes \sigma_3{}^{\beta'}_{\alpha'}) \\ &= I_a(\sigma_a)^\beta_\alpha \otimes (\sigma_a)^{\beta'}_{\alpha'},\end{aligned} \tag{7.3}$$

em que a, b, c são constantes, σ_0 é a matriz identidade 2×2 e σ_i são as matrizes de Pauli.

O fato de a matriz M ser normal implica que é diagonalizável através da conjugação por um elemento $U \in U(2n)$, e podemos considerá-la um elemento de $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}(2n) = \mathfrak{gl}(2n)$. Portanto, podemos escrever

$$M = UM^{(d)}U^{\dagger}, \tag{7.4}$$

na qual $M^{(d)}$ é a matriz M diagonalizada. Assim, podemos escrever a ação em termos da matriz $U \in U(2n)$ e dos autovalores de M. No entanto, diferente da integral de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber, por exemplo, o primeiro termo, o chamado *termo cinético* $T(M)$, é quártico em relação U. Para contornar esse problema, os autores sugerem que passemos a utilizar a representação adjunta em vez da representação fundamental.

Escolhendo uma base ortonormal $\{\tau^{\mu}\}$ para $\mathfrak{u}(n)$ em relação à forma de Killing, e utilizando a identidade de Fierz $\tau^{\mu}_{ij}\tau^{\mu}_{i'j'} = \delta_{i'i}\delta_{j'j}$, o primeiro termo cinético pode ser escrito como

$$\begin{aligned} T(M) &= M^{*}_{\alpha\beta,ij}(\check{R}^{c})^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'}\tau^{\mu}_{ij}\tau^{\mu}_{i'j'}M_{\beta'\alpha',i'j'} \\ &= tr[M^{\dagger}(\sigma_a \otimes \tau^{\mu})]I^{a}tr[(\sigma_a \otimes \tau^{\mu})M]. \end{aligned} \tag{7.5}$$

A partir dessa expressão, vemos que uma base conveniente de $\mathfrak{u}(2n)$ é dada por $\{t^{a,\mu}\}$, na qual $t^{a,\mu} = \sigma^{a} \otimes \tau^{\mu}$, $a = 0, 1, 2, 3$ e $\mu = 1, ..., n$, apropriadamente normalizados, ou seja,

$$tr(t^{a,\mu}t^{b,\nu}) = \delta^{a,\mu\, b,\nu}. \tag{7.6}$$

Em relação a essa base, $M^{(d)}$ e Λ, o operador linear relativo a U na representação adjunta, são dados por

$$\begin{aligned} M^{(d)} &= M^{(d)\,a,\mu}t^{a,\mu} = tr(M^{(d)}t^{a,\mu})t^{a,\mu}, \\ \Lambda^{a,\mu\, b,\nu} &= tr(t^{a,\mu}Ut^{b,\nu}U^{\dagger}). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Com essas definições, a equação (7.5) passa a ser escrita

$$T(M) = (\Lambda)^{a\mu}_{a'\mu'}(\Lambda)^{a\mu}_{a''\mu''}M^{(d)}_{a',\mu'}M^{*(d)}_{a'',\mu''}I^{a}. \tag{7.8}$$

Seguindo ainda [5], a escolha de geradores de $\mathfrak{u}(2n)$ é

$$\begin{aligned} t^{0,11} &= \frac{1}{\sqrt{n}}(I \otimes I), \\ t^{0,ii} &= \frac{1}{2}(I + \sigma_3) \otimes (\tau^{i,i} - \tau^{i-1,i-1}), 1 < i \leq n, \\ t^{3,ii} &= \sigma_3 \otimes \tau^{i,i}, \\ t^{a,ii} &= \sigma_a \otimes \tau^{i,j}, a = 0, 1, \\ t^{a,ij} &= \sigma_a \otimes \tau^{i,i}, a = 0, 1, 2, 3 \text{ e } i \neq j, \end{aligned} \tag{7.9}$$

nas quais $(\tau^{ij})_k l = \delta^{i}_{k}\delta^{j}_{l}$. Com essa escolha, a forma de Killing é dada por $B(X, Y) = \frac{1}{2}tr(XY)$. No entanto, analisando o caso mais simples, $n = 1$, temos que

$$t^{3,11}t^{0,11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o que evidentemente não tem traço zero e não pode ser uma boa escolha de base.

Passando para a integração, é utilizado o fato de que as matrizes diagonais são invariantes sob conjugação, o conjunto das matrizes normais pode ser descrito não como uma órbita de $U(2n)$, e sim de $U(2n)/T = U(2n)/\otimes^{2n} U(1)$. Como $T = \otimes^{2n}U(1)$ é um toro máximo, $U(2n)/T$ é uma variedade *flag* . Além disso, como $U(n)$ também possui ação transitiva sobre a esfera unitária $(2n-1)$-dimensional, esta pode ser representada como a órbita de um vetor complexo $x = \{1, 0, ..., 0\} \in \mathbb{C}^n$ módulo seu grupo de isotropia $U(n-1)$, de modo $U(n)/U(n-1)$ é isomórfico S^{2n-1}. Ainda, a geometria dos grupos unitários mostra que estes podem ser identificados como um produto de esferas com dimensão ímpar [19], isto é,

$$U(n) \sim S^1 * S^3 * ... * S^{2n-1} \tag{7.10}$$

Seguindo o Exemplo 5.1 em conjunto com os argumentos anteriores, pode-se concluir que

$$\mathbb{C}P^n = \frac{U(n+1)}{U(n) \otimes U(1)} \simeq \frac{S^{2n}}{U(1)}, \tag{7.11}$$

e, finalmente

$$\frac{U(2n)}{\otimes^{2n}U(1)} \simeq \mathbb{C}P^{2n-1} \times \mathbb{C}P^{2n-2} \times ... \times \mathbb{C}P^1. \tag{7.12}$$

Mais precisamente, de acordo com as palavras do autor [5], a órbita da representação adjunta de $U(2n)$ sobre o conjunto das matrizes normais é uma sequência de fibrados, que localmente, nos conjuntos abertos apropriados, os elementos da variedade *flag* podem ser representados por um produto direto dos espaços projetivos.

Assim, é proposto que uma matriz diagonalizada pode ser decomposta como

$$M^{(d)} = (\underbrace{M^{(d)}_{3,nn}, 0, ..., 0}_{4n-1}, \underbrace{M^{(d)}_{0,nn}, 0, ..., 0}_{4n-3}, ..., \underbrace{M^{(d)}_{3,kk}, 0, ..., 0}_{4k-1}, \underbrace{M^{(d)}_{0,kk}, 0, ..., 0}_{4k-3}, ..., M^{(d)}_{3,11}, 0, 0, 0, M^{(d)}_{0,11}), \tag{7.13}$$

cuja imagem sob a ação de $\Lambda \in U(2n)$ é um elemento do produto de espaços projetivos mostrado em (7.12), na qual o segmento de tamanho $4j-1$ corresponde a $\mathbb{C}P^{2j-1}$ e o de tamanho $4j-3$ corresponde a $\mathbb{C}P^{2j-2}$.

Assim, a medida $\mathcal{D}\Lambda$ deve poder ser decomposta como um produto entre a medida do espaço base, as matrizes diagonais, e a medida dos fibrados, os espaços projetivos. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\Lambda &= \prod_{i=1}^{n} dM^{(d)^{0,ii}} dM^{(d)^{3,ii}} \prod_{k=1}^{2n-1} \mathcal{D}[\mathbb{C}P^k] \\ &= \prod_{i=1}^{n} dM^{(d)^{0,ii}} dM^{(d)^{3,ii}} \prod_{k=1}^{2n-1} \mathcal{D}\left[\frac{S^{4k-1}}{S^1}\right] \mathcal{D}\left[\frac{S^{4k-3}}{S^1}\right],\end{aligned} \tag{7.14}$$

e como as matrizes diagonais devem ser invariantes sob a ação do toro máximo, a integração pode ser estendida para

$$\mathcal{D}\Lambda = \prod_{i=1}^{n} dM^{(d)^{0,ii}} dM^{(d)^{3,ii}} \prod_{k=1}^{2n-1} \mathcal{D}[S^{4k-1}]\mathcal{D}[S^{4k-3}]. \tag{7.15}$$

Disso, a hipótese dada é que Λ transforma os seguimentos $\underbrace{M^{(d)}_{3,kk}, 0, ..., 0}_{4k-1}$ e $\underbrace{M^{(d)}_{0,kk}, 0, ..., 0}_{4k-3}$ em vetores reais $x^r_{3,k}, r = 1, ..., 4k-1$ e $x^s_{0,k}, s = 1, ..., 4k-3$, que seriam as coordenadas de S^{4k-1} e S^{4k-3}, respectivamente. Então, as medidas das esferas, mergulhadas em $\mathbb{R}^{4k}$ e $\mathbb{R}^{4k-2}$, são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[S^{4k-1}] &= \delta\left(\sum_{r=1}^{4k}(x^r_{3,k})^2 - 1\right)\prod_{r=1}^{4k} dx^r_{3,k}, \\ \mathcal{D}[S^{4k-3}] &= \delta\left(\sum_{r=1}^{4k-2}(x^r_{0,k})^2 - 1\right)\prod_{r=1}^{4k-2} dx^r_{0,k}.\end{aligned} \tag{7.16}$$

Para lidar com as funções delta, são introduzidos novos parâmetros $\lambda_{a,k}, a = 0, 3$ em integrais gaussianas para reproduzir os fatores $(2[1 - \Sigma_r (x^r_{a,k})^2])^{-1/2}$. Por consequência, (7.16) passa a ser

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[S^{4k-1}] &= \int d\lambda_{3,k} \prod_{r=1}^{4k-1} dx^r_{3,k} e^{-\lambda_{3,k}(1-\sum_{r=1}^{4k-1}[x^r_{3,k}]^2)}, \\ \mathcal{D}[S^{4k-3}] &= \int d\lambda_{0,k} \prod_{r=1}^{4k-3} dx^r_{0,k} e^{-\lambda_{0,k}(1-\sum_{r=1}^{4k-3}[x^r_{0,k}]^2)}.\end{aligned} \tag{7.17}$$

7.3 INTEGRAÇÃO

Antes de dar prosseguimento, deve-se introduzir o elemento de volume apropriado ao espaço das matrizes $\mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{C})$, utilizando as coordenadas dadas em (7.4). Como $\mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{m^2}$, este é um espaço métrico, cuja distância entre pontos é

$$s(X - Y) = \|X - Y\|, \tag{7.18}$$

com $\|X\| = \langle X|X\rangle = tr(X^\dagger X)$, que é invariante sob ação do grupo unitário, tanto por multiplicação à esquerda e à direita como por conjugação. A partir daí, é possível construir um *elemento de linha* $ds^2 = \|dX\|^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$, do qual podemos extrair a métrica, no sentido da Definição 2.9. Fazendo esse cálculo, chega-se a

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{m} dm_i^2 + 2\sum_{i>j} |m_i - m_j|^2 |d\Omega_{ij}|^2, \tag{7.19}$$

na qual $m_i, i = 1, ..., m$ são os autovalores de M e $d\Omega = U^\dagger dU$ é uma matriz anti-hermitiana. Podemos tirar imediatamente que a medida dada pelo elemento de volume é

$$dM = \prod_{i=1}^{n} dm_i \prod_{k>l} |m_i - m_j|^2 dU, \tag{7.20}$$

na qual $W(M) = |m_i - m_j|^2$ é o determinante de Vandermonde e dU representa a integração sobre os $n(n-1)$ parâmetros não diagonais referentes ao grupo unitário.

Assim, a integral a ser calculada é

$$Z = \int \prod_{a=0,3} \prod_{i=1}^{n} dM_{a,ii}^{(d)} d\lambda_{a,k} \prod_{r=1}^{4k-1} dx_{3,k}^r \prod_{r=1}^{4k-3} dx_{0,k}^r W(M) e^{-S(M)}, \tag{7.21}$$

com a ação $S(M)$ agora escrita

$$S(M) = \sum_{a=0,3} \sum_{k=1}^{n} \left[|M_{a,kk}^{(d)}|^2 \sum_{b=1}^{s(a,k)} |(x_{a,k}^b)^2|^2 I^b + \lambda_{a,k}^2 \left(1 - \sum_{p=1}^{s(a,k)} (x_{a,k}^p)^2 \right) \right] - V(M), \tag{7.22}$$

na qual $V(M) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{d_k}{k} tr(M^k + (M^\dagger)^k)$ é o termo potencial, $s(3,k) = 4k-1$, $s(0,k) = 4k-3$ e

$$I = \frac{1}{2}(\underbrace{a, b-c, b+c, a, ..., b+c}_{4n-1}, \underbrace{a, a, b-c, b+c, a, ..., a}_{4n-3}, ..., \underbrace{a, b-c, b+c}_{3}, \underbrace{a}_{1}).$$

Com a mudança de variáveis $\tilde{\lambda}_{a,k} = |M_{a,kk}^{(d)}|^{-1} \lambda_{a,k}$, cujo jacobiano é $J = \prod_{k=1}^{n} |M_{0,kk}^{(d)}|^{-1} |M_{3,kk}^{(d)}|^{-1}$, as integrais sobre os $x_{a,k}^r$ podem ser calculadas. Para k fixo, o parâmetro a aparece $2k-1$ vezes, $b-c$ e $b+c$ aparecem k vezes na sequência de comprimento $4k-1$. Portanto essas gaussianas introduzem os fatores

$$\frac{Z_{3,k}}{|M_{3,kk}^{(d)}|^{4k-3}} = \frac{1}{|M_{3,kk}^{(d)}|^{4k-3}} \frac{1}{(a - \tilde{\lambda}_{3,k}^2)^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{(b - c - \tilde{\lambda}_{3,k}^2)^{\frac{k}{2}}} \frac{1}{(b + c - \tilde{\lambda}_{3,k}^2)^{\frac{k}{2}}}. \tag{7.23}$$

Já na sequência de comprimento $4k-3$, a aparece $2k-1$ vezes, enquanto $b-c$ e $b+c$ apenas $k-1$. Por sua vez, essas integrais resultam em

$$\frac{Z_{0,k}}{|M_{0,kk}^{(d)}|^{4k-3}} = \frac{1}{|M_{0,kk}^{(d)}|^{4k-3}} \frac{1}{(a - \tilde{\lambda}_{0,k}^2)^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{(b - c - \tilde{\lambda}_{0,k}^2)^{\frac{k-1}{2}}} \frac{1}{(b + c - \tilde{\lambda}_{0,k}^2)^{\frac{k-1}{2}}}. \tag{7.24}$$

Juntando ambos os resultados, temos a expressão final:

$$Z = \int \prod_{a=0,3} \prod_{k=1}^{n} dM_{a,kk}^{(d)} W(M) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{|M_{3,kk}^{(d)}|^{4k-2} |M_{0,kk}^{(d)}|^{4k-4}} \int \prod_{a=0,3} \prod_{k=1}^{n} d\tilde{\lambda}_{a,k} Z_{a,k}(\tilde{\lambda}_{a,k}) e^{-V(M) - M^{(d)2} \tilde{\lambda}_{a,k}^2}. \tag{7.25}$$

7.4 ANÁLISE E POSSÍVEIS SOLUÇÕES

Apresentados os argumentos dos autores, é chegado o momento de mostrarmos os pontos que ficaram pouco claros e como pretendemos resolvê-los.

Em primeiro lugar, é afirmado que a ação adjunta de $U(2n)$ em um elemento da subálgebra de Cartan o transforma em coordenadas da esfera de uma determinada dimensão, como pode ser lido após a Equação (7.15). No entanto, é fácil verificar que os subespaços supostamente separados seriam misturados após a ação do grupo unitário. Como não existe uma parametrização simples de $U(3)$, o menor grupo em que poderíamos observar a fatorização (7.12), numericamente calculamos uma matriz unitária através do processo de Gram-Schimidt, construindo em seguida a matriz da representação adjunta. Temos

$$U = \begin{pmatrix} 0.4942 + 0.5545i & -0.1321 + 0.1620i & 0.3969 - 0.4970i \\ 0.5425 + 0.3797i & 0.0006 - 0.3052i & -0.3315 + 0.5988i \\ 0.0784 + 0.0603i & 0.6530 + 0.6609i & 0.1628 + 0.3171i \end{pmatrix} \tag{7.26}$$

como nossa matriz pertencente a $U(3)$. Para construir o operador referente à representação adjunta, a base utilizada foi

$$\begin{gathered} t^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} I \\ t^k = \sqrt{\frac{1}{k(k+1)}} \left(\sum_{i=1}^{k} \tau^{ii} - k\tau^{k+1,k+1} \right),\ k = 1, 2, \end{gathered} \tag{7.27}$$

para a subálgebra de Cartan e

$$\begin{aligned} t^{ij} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau^{ij} + \tau^{ji}) \\ \tilde{t}^{ij} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\tau^{ij} - \tau^{ji}),\ i > j, \end{aligned} \tag{7.28}$$

para os elementos não diagonais, que nada mais são do que as "combinações compactas"$(E_\alpha + E_{-\alpha})$ e $i(E_\alpha - E_{-\alpha})$. Essa base é ortonormal em relação ao produto $tr(AB)$ e os elementos são ordenados de forma que os geradores de $U(2)$ sejam os primeiros, seguidos dos geradores de $U(3)$ não pertencentes a $U(2)$. Finalmente,

$$\Lambda(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0814 & 0.1401 & 0.3191 & 0.0553 & -0.1269 & -0.9164 & 0.0500 & 0.1021 \\ 0 & 0.5282 & -0.1791 & -0.0131 & 0.7433 & 0.1948 & 0.0595 & 0.2927 & 0.0954 \\ 0 & 0.1533 & 0.2892 & -0.1588 & 0.1263 & -0.9001 & 0.1416 & 0.1462 & -0.0111 \\ 0 & 0.7391 & -0.1576 & -0.0215 & -0.3094 & -0.0552 & 0.0260 & -0.5471 & -0.1723 \\ 0 & 0.0513 & 0.6886 & -0.0148 & 0.1610- & 0.2574 & 0.0036 & -0.0394 & -0.6551 \\ 0 & -0.1795 & 0.0561 & 0.6898 & 0.3581 & -0.1293 & 0.2552 & -0.5186 & 0.0992 \\ 0 & 0.2667 & 0.5868 & 0.0866 & -0.2354 & 0.2188 & 0.1771 & 0.0826 & 0.6599 \\ 0 & 0.1967 & -0.1345 & 0.6235 & -0.3509 & -0.0433 & 0.1986 & 0.5602 & -0.2759 \end{pmatrix}. \tag{7.29}$$

Se afirmação da separação dos espaços fosse verdadeira, a matriz (7.29) seria diagonal por blocos. A razão mais provável para que isso não ocorra é que (7.12) não é um produto direto como escrito pelos autores porque o fibrado principal construído a partir da relação $U(n)/U(n-1) \simeq S^{2n-1}$ não é trivial, ou seja, $U(n) \not\simeq U(n-1) \times S^{2n-1}$. A fatorização em (7.10), como descrito em [19], é um "produto direto a menos de uma 'torção finita'". Poderíamos também argumentar a partir da própria teoria de grupos, uma vez que a matriz diagonal por blocos significaria que a representação adjunta é redutível, o que não é o caso.

Em relação à medida usada, Equação 7.16, embora não exista uma única escolha invariante para a medida de cada espaço projetivo, o mais natural seria a utilização do elemento de volume induzido pela métrica de Fubini-Study, compatível com a forma de Kähler (6.73). Apesar de o Exemplo 6.2 nos mostrar que o elemento de volume das variedades *flag* completas ser mais complexo do que simplesmente o produto de cada um dos fatores, o Teorema de Fubini, Proposição A.6, garantiria que essa ainda é uma medida bem definida e invariante por construção. De fato, utilizando da liberdade de escolha da forma de Kähler dentro da classe de Chern, podemos transformar (6.62) em

$$\frac{\omega'^3}{3!} = i^3 \frac{m'^2 n}{(1+|z_1|^2)^2(1+|z_2|^2+|z_3|^2)^3} \prod_{j=1}^{3} dz_j \wedge d\overline{z_j}. \tag{7.30}$$

Lembrando que o segundo termo da forma hermitiana de $SU(3)/T$ é dado por

$$\mathscr{H}_{\lambda_2^n} = det \begin{pmatrix} 1+|z_2|^2+|z_3|^2 & -z_3 - z_2\overline{z_1} \\ -\overline{z_3} - \overline{z_2} z_1 & 1+|z_1|^2 \end{pmatrix} = (1+|z_1|^2+|z_2-z_1z_3|^2)^n,$$

obtemos (7.30) subtraindo o termo não diagonal do determinante, isto é, escrevemos agora

$$\mathscr{H}'_{\lambda_2^n} = (det[(e_i,e_j)+(e_1,e_2)(e_2,e_1)])^n = (1+|z_1|^2)^n(1+|z_2|^2+|z_3|)^n, \tag{7.31}$$

em vez da definição dada em (6.35). Com essa forma hermitiana, temos a nova forma de Kähler

$$\omega' = i\partial\overline{\partial}(\mathscr{H}_{\lambda_1^m}\mathscr{H}'_{\lambda_2^n}) = i\partial\overline{\partial} ln[(1+|z_1|^2)^n(1+|z_2|^2+|z_3|^2)^{m'}], m' = n+m, \tag{7.32}$$

da qual (7.30) segue facilmente.

Ambas as formas de fato pertencem à mesma classe pois

$$\omega' - \omega = i\partial\overline{\partial}(\mathscr{H}_{\lambda_2^n} + f) - i\partial\overline{\partial}(\mathscr{H}_{\lambda_2^n}) = i\partial\overline{\partial}(1 + f/\mathscr{H}_{\lambda_2^n}), \tag{7.33}$$

com $f = (e_1,e_2)(e_2,e_1)$. Como $d = \partial + \overline{\partial}$ e $\overline{\partial}^2 = 0$, temos $\partial\overline{\partial} = d\overline{\partial}$, mostrando que a diferença entre ambas é uma forma exata.

Dado isso, ainda esperamos que haja alguma forma de se fatorizar a variedade e que a função partição possa ser calculada de maneira recursiva, a depender de como a ação fica escrita em termos das coordenadas de Bruhat, ou aplicando a fórmula de Duistermaat-Heckman [4]. Essa crença vem do fato de que existem alguns resultados na literatura que garantem a existência de uma imersão holomórfica de uma variedade *flag* em um produto de espaços projetivos [22], mais precisamente

Proposição 7.1. *Seja $M = G/C(T_0)$ uma variedade flag, $T \supseteq T_0$ um toro máximo. Existe um homomorfismo de ρ de G em $SU(m)$, para m suficientemente grande, e uma imersão holomórfica $\psi : G \mapsto \mathbb{C}P^{m_1} \times \mathbb{C}P^{m_2} \times ... \times \mathbb{C}P^{m_l}$ tal que $\psi(gx) = \rho(g)\psi(x)$, para $g \in G$ e $x \in M$.*

Cada m_i é relacionado à dimensão de alguma representação irredutível de G. É claro pelo enunciado que essa fatorização não deve tão simples quanto a mostrada em (7.12), mas ainda é uma alternativa que merece explorada futuramente.

Há outro ponto prático que ainda não conseguimos superar e que pode estar relacionado com o anterior: não conseguimos transcrever as expressões que queremos calcular em termos das coordenadas de Bruhat, pois como as matrizes diagonais não são invariantes por multiplicação ou conjugação dos elementos do subgrupo de Borel, não é possível escrever $UM^{(d)}U^\dagger$ como um representativo de um coset como em (6.10).

A consideração final é que o subespaço gerado pelo vetor de peso mais alto da representação adjunta dos grupos unitários, E_{1n}, é invariante sob conjugação por elementos do subgrupo de Borel $b = (b)_{ij}, j \geq i$, uma vez que o produto à esquerda apenas o multiplica por b_{11} e o produto à direita o multiplica por b_{nn}^{-1}. A invariabilidade desse subespaço é um dos pontos-chaves da Proposição 7.1, então a solução para expressar a ação em termos das coordenadas de Bruhat deve passar pelo entendimento de como relacionar as variáveis originais com o vetor de peso mais alto de uma ou várias representações.

8 CONCLUSÃO

Integrais sobre matrizes nas quais o integrando não é invariante sob a mudança de variáveis $M \mapsto UM^{(d)}U^\dagger$ ainda representam um problema sem uma solução geral ou mesmo soluções aproximadas ou perturbativas. Em geral, essas integrais são reduzidas a integrais sobre variedades *flag*, uma vez que estas são as órbitas de elementos da subálgebra de Cartan sob a ação adjunta do grupo. Para desenvolver uma teoria geral sobre as variedades *flag*, revisitamos em detalhes os grupos e álgebras de Lie, com foco principalmente nos pesos e raízes. Para ver como aplicar esses resultados gerais, utilizamos o modelo de Ambjørn-Sedrakyan, caracterizado por (7.1) e (7.2), e comparamos com nossos métodos e resultados.

Vimos que o trabalho original apresenta um ponto que quebra as argumentações subsequentes: a ação adjunta do grupo unitário nos elementos da sua subálgebra de Cartan deveria fatorizar em subespaços bem definidos, correspondentes a cada termo mostrado em (7.12). No entanto, um simples exemplo como (7.10) mostra que isso não é verdade e não há segurança de que o método pode ser utilizado.

Assim, acreditamos que todo o aparato desenvolvido em [4], descrito no Capítulo 6, é a maneira mais correta e simples, e ainda rigorosa, de se lidar com integrais desse tipo. No entanto, os resultados são obtidos através da descrição *complexa* das variedades *flag*, isomórficas às orbitas adjuntas mencionadas anteriormente.

O próximo passo é encontrar uma forma de se escrever a ação (7.2) em termos das coordenadas de Bruhat, o que daria uma forma concreta ao isomorfismo entre as descrições e, possivelmente, permitiria o cálculo não apenas do modelo citado aqui, mas de qualquer modelo de matrizes aleatórias.

Appendices

A
INTEGRAL DE LEBESGUE E MEDIDA DE HAAR

Neste apêndice, listamos algumas das definições e resultados sobre teoria de medida utilizados no decorrer do trabalho. Todas as provas e outros resultados podem ser consultados em [21], [18] e [29].

A.1 DEFINIÇÕES

Definição A.1. *Seja $\mathfrak{M}$ uma família de subconjuntos de um conjunto X. Então $\mathfrak{M}$ é uma σ-**álgebra** se*

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{M}$.
2. *Se $A \in \mathfrak{M}$, então o complemento $X \setminus A \in \mathfrak{M}$.*
3. *Se (A_n) é uma sequência de conjuntos em $\mathfrak{M}$, então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.*

O par $(X, \mathfrak{M})$ é um **espaço mensurável**, os conjuntos de $\mathfrak{M}$ são os **conjuntos mensuráveis** nos quais uma **medida** é definida.

Se X é um espaço topológico, damos atenção especial às σ-álgebras de Borel $\mathfrak{B}$, a menor σ-álgebra contendo todos os conjuntos abertos. É formada tomando-se todas as uniões e interseções contáveis e as diferenças entre conjuntos.

Definição A.2. *Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Uma **medida** é uma função $\mu : \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R} \cup [0, \infty]$ tal que*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(E) \geq 0, \forall E \in \mathfrak{M}$.
3. *Se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos de $\mathfrak{M}$, então*

$$\mu\Big(\cup_{n=1}^{\infty} E_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{A.1}$$

Como permitimos que μ assuma o valor ∞, a soma em (A.1) não precisa ser convergente. No entanto, se $\mu(E) < \infty, \forall E \in \mathfrak{M}$, então é uma *medida finita*.

Se um espaço mensurável $(X, \mathfrak{M})$ possui uma medida μ, então $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ é um **espaço de medida**.

A classe de funções que podem ser integradas utilizando-se a integral de Lebesgue difere daquelas da integral de Riemann:

Definição A.3. *Seja* $(X, \mathfrak{M})$ *um espaço mensurável.* $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *é uma* ***função mensurável*** *se para todo* α *real, o conjunto*

$$\{x \in X | f(x) > \alpha\} \tag{A.2}$$

pertence a $\mathfrak{M}$*. O conjunto de todas as funções mensuráveis de* X *é denotado* $M(X, \mathfrak{M})$*.*

Para simplificar a notação, escrevemos $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ apenas como $\overline{\mathbb{R}}$. No entanto, é necessário enfatizar que a definição dada é equivalente a qualquer uma das seguintes:

$$\begin{aligned} &\{x \in X | f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{M}, \\ &\{x \in X | f(x) < \alpha\} \in \mathfrak{M}, \\ &\{x \in X | f(x) \leq \alpha\} \in \mathfrak{M}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Se uma proposição é válida no complemento de um conjunto N tal que $\mu(N) = 0$, então dizemos que *vale em quase todos os pontos*. Muitas das propriedades da teoria de medida são definidas dessa forma, o que se tornará claro uma vez que a integral for definida.

A integral de Lebesgue é definida inicialmente apenas para as chamadas *funções simples*: funções que possuem somente um número finito de valores distintos. É claro que uma função simples φ pode ser representada por

$$\varphi = \sum_j a_j \chi_{E_j}, \tag{A.4}$$

na qual $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica do conjunto E_j, ou seja, $\chi_{E_j}(x) = 1, x \in E_j$ e $\chi_{E_j}(x) = 0$ caso contrário.

Definição A.4. *Seja* $f \in M^+(X, \mathfrak{M})$*, uma função simples não negativa em um espaço de medida. Então, a* ***integral de*** f ***com respeito a*** μ *é dada por*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j). \tag{A.5}$$

Estendemos para $f \in M^+(X, \mathfrak{M})$*, não necessariamente simples através de*

$$\int f d\mu = sup \int \varphi d\mu, \tag{A.6}$$

com o supremo tomado sobre φ *simples e satisfazendo* $0 \leq \varphi \leq f$*.*

Como a integral de Lebesgue é linear, podemos estende-lá para qualquer função mensurável, escrevendo $f = f^+ - f^-$, em que f^+ e f^- são, respectivamente, as partes positiva e negativa de f, isto é, $f^{\pm}(x) = sup(\pm f(x), 0)$. Se uma função f é tal que $\int f d\mu < \infty$, dizemos ser **integrável**.

A.2 MEDIDA DE HAAR

Quando estamos lidando com grupos topoógicos, dos quais os grupos de Lie fazem parte, existe uma medida especial, chamada de **medida de Haar**, que é invariante por translações.

Definição A.5. *Seja $(X, \mathfrak{B}(X), \mu)$ um espaço de medida. Então, μ é uma* ***medida de Borel****. Se, em adição, satisfaz*

1. $\mu(K) < \infty, \forall K \in \mathfrak{B}(X)$ *compacto,*
2. *Se $E \in \mathfrak{B}(X)$, então $\mu(E) = inf\{\mu(U)|E \subset U, U \text{ é aberto}\}$,*
3. *Se $U \in \mathfrak{B}(X)$ é aberto, então $\mu(U) = sup\{\mu(K)|K \subset U, K \text{ é compacto}\}$,*

então é uma ***medida de Radon****. Se satisfaz apenas 1 é uma* ***medida localmente finita****, e se satisfaz apenas 2 e 3 é uma* ***medida regular****.*

Quando $X = G$ é um grupo de Lie e $\mu \neq 0$, então se $\mu(E) = \mu(gE), \forall g \in G$, μ é ***uma medida de Haar esquerda****. Analogamente, se $\mu(E) = \mu(Eg)$, μ é* ***uma medida de Haar direita****.*

Proposição A.1. *Seja G um grupo localmente compacto. Então, existe uma medida de Haar esquerda. Ainda, essa medida é única a menos de multiplicação por escalar.*

A prova, bastante longa, pode ser achada em [18]. É importante notar que todos os resultados válidos para as medidas de Haar esquerdas valem para as medidas de Haar direitas.

Os grupos compactos são, é claro, também localmente compactos, portanto sempre possuem uma medida de Haar. Essa, no entanto, não é a única característica especial desses grupos. Listamos os mais relevantes para nós.

Proposição A.2. *Seja G um grupo topológico localmente compacto com medida de Haar μ. Então, μ é finita se e somente se G é compacto.*

Devido a essa propriedade, é prática comum normalizar a medida, isto é, escolhemos $\mu(G) = 1$.

Proposição A.3. *Seja G um grupo topológico compacto. Então, a medida de Haar esquerda coincide com a medida de Haar direita.*

Dada uma medida de Haar esquerda μ, $\mu_g(A) = \mu(Ag)$ define uma nova medida de Haar esquerda. Pela Proposição A.1, μ_g deve ser um múltiplo da medida original, digamos $\mu_g = \Delta(g)\mu$. As constantes de proporcionalidade de cada $g \in G$ geram um homomorfismo $\Delta : G \mapsto R_+^*$ chamado de **função modular** e independem da medida de Haar particular escolhida. Quando as medidas esquerda e direita são iguais, denominamos o grupo **unimodular**. Isso garante que a medida de Haar não é invariante apenas por translações à esquerda ou à direita, mas também por conjugação, uma vez $\mu(c_g E) = \mu(gEg{-}1) = \mu(Eg^{-1}) = \mu(E)$.

É natural imaginar que esses resultados possam ser aplicados também para variedades que possuem ação do grupo G. Acontece que, sob certas condições, é sim possível garantir a existência de uma medida invariante para esses espaços.

Proposição A.4. *Sejam G um grupo de Lie localmente compacto, H um subgrupo fechado e $E = G/H$. Existe uma medida em E, invariante sob a ação esquerda de G, se e somente se a função modular Δ de E satisfaz $\Delta_H(h) = \Delta(h)\Delta_G(h), h \in H$.*

A.3 TEOREMA DE FUBINI

Por fim, se temos dois espaços de medida $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ e $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$, e consideramos o produto $X \times Y$, a maneira mais conveniente de se construir uma medida neste espaço é através de

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B), A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}. \tag{A.7}$$

Essa medida é bem definida, desde que ambas as medidas originais sejam σ-finitas [21].

A existência dessa medida nos leva à formulação dos teoremas de Tonelli e de Fubini em termos da integral de Lebesgue.

Proposição A.5. ***Teorema de Tonelli*** *- Sejam $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ e $(Y, \mathfrak{n}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e $F : X \times Y \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável não negativa. Então,*

$$\int_{X \times Y} F d\pi = \int_X \left(\int_Y F d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X F d\mu \right) d\nu. \tag{A.8}$$

Proposição A.6. ***Teorema de Fubini*** *- Sejam $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ e $(Y, \mathfrak{n}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e $F : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ uma função integrável com respeito a π. Então,*

$$\int_{X \times Y} F d\pi = \int_X \left(\int_Y F d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X F d\mu \right) d\nu. \tag{A.9}$$

Referências Bibliográficas

1 POLYAKOV, A. M. Quatum Geometry of Bosonic Strings. *Physics Letters B*. v. 103, n. 3, p. 207-210, 1981.

2 NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*: 2 Ed. Bristol: IOP Publishing, 2003.

3 SEPANSKI, M. R. *Compact Lie Groups*: 1 Ed. Nova Iorque: Springer, 2007.

4 PICKEN, R. F. The Duistemaat-Heckman Integration Formula on Flag Manifolds. *Journal of Mathematical Physics*. v. 31, n. 3, p. 616-638, 1990.

5 AMBJØRN, J; SEDRAKYAN, A. The XXZ Heisenberg Model on Random Surfaces. *Nuclear Physics B*. v. 874, n. 3, p. 877-888, 2013.

6 BORDEMANN, D; FORGER, M; RÖMER, H. Homogeneous Kahler Manifolds: Paving the Way Towards New Supersymmetric Sigma Models. *Commun. Math. Phys.*, v. 102, p. 605-647, 1986.

7 BOTT, R. Homogeneous Vector Bundles. *The Annals of Mathematics*. v. 66, n. 2, p. 203-248, 1957.

8 PRESSLEY, A; SEGAL, G. *Loop Groups*: 1 Ed. Oxford: Clarendon Press, 1986.

9 BOOTHBY, W. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*: 2. ed. Orlando: Academic Press, 1986

10 MUNKRES, J. R. *Topology*: 2 Ed. Nova Jérsei: Prentice Hall, 2000.

11 HALL, B. C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*: 1 Ed. Nova Iorque: Springer, 2003.

12 BUMP, D. *Lie Groups*: 1 Ed. Nova Iorque: Spriger, 2004.

13 RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*: 3 Ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1976.

14 ALEKSEEVSKY, D. Flag Manifolds. In: YUGOSLAV GEOMETRIC SEMINAR, 11., 1996, Divčibare. *Anais*... Viena: ESI, 1997. p. 3-35.

15 CHEVALLEY, C; EILENBERG, S. Cohomology Theory of Lie Groups and Lie Algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 63, n. 1, p. 85-124, 1948.

16 HELGASON, S. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*: 1 Ed. Cambridge: Academic Press, 2001.

17 ATIYAH, M. F. Convexity and Commuting Hamiltonians. *Bulletin of the London Mathematical Society*. v. 14, n. 1, p. 1-15, 1982.

18 COHN, D. L. *Measure Theory*: 2 Ed. Nova Iorque: Birkhäuser, 2013.

19 BOYA, L. J. The Geometry of Compact Lie Groups. *Reports on Mathematical Physics*. v. 30, n. 2, p. 149-162, 1991.

20 ABBASPOUR, H; MOSKOWITZ, M. *Basic Lie Theory*: 1 Ed. Singapura: World Scientific, 2007.

21 BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*: 1 Ed. Nova Jersey: Wiley-Interscience, 1995.

22 WALLACH, N. R. *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*: 1 Ed. New Brunswick: M. Dekker, 1973.

23 DI FRANCESCO, P; GINSPARG, P; ZINN-JUSTIN, P. 2D Gravity and Random Matrices. *Physics Reports*. v. 254, n.1-2, p.1-133, 1995.

24 ZINN-JUSTIN, P; ZUBER, J. B. On Some Integrals Over the U(N) Unitary Group and Their Large N Limit. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. v. 36, n. 12, p. 3173-3194, 2003.

25 ŠUBJAKOVÁ, M; TEKEL, J. Fuzzy Field Theories and Related Matrix Models. *Procedings of Science*. v. 376, n. 1 p. 1-27, 2020.

26 ALVAREZ-GAUMÉ, L. Random Surfaces, Statistical Mechanics and String Theory. In: HELVETICA PHYSICA ACTA, 64., 1991, Lausanne. *Anais*... Basel: Basel: Birkhäuser, 1991. p. 359-526.

27 KNIZHNIK, V. G; POLYAKOV, A. M; ZALAMODCHIKOV, A. B. Fractal Structure of 2D Quantum Gravity. *Modern Physics Letters A*. v. 3, n. 8 p. 819-826, 1988.

28 ABRAHAM, R; MARSDEN, J. E. *Foundations of Mechanics*: 2 Ed. Boca Raton: CRC Press, 1987.

29 NACHBIN, L. *The Haar Integral*: 1 Ed. Princeton: Van Nostrand, 1965.