



**MODELOS ESPECTRAIS DE VIGAS ACOPLADAS À
PIEZOELÉTRICOS SHUNT PARA ATENUAÇÃO DE
VIBRAÇÃO E DE ONDAS ELÁSTICAS**

Braion Barbosa de Moura

**Dissertação de Mestrado
Ciências Mecânicas**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MODELOS ESPECTRAIS DE VIGAS ACOPLADAS À
PIEZOELÉTRICOS SHUNT PARA ATENUAÇÃO DE
VIBRAÇÃO E DE ONDAS ELÁSTICAS

Braion Barbosa de Moura

Orientadora: Marcela Rodrigues Machado, Dra. Univ (ENM/ UnB)

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - XXX.XXX

BRASÍLIA/DF: 19 de março de 2021

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MODELOS ESPECTRAIS DE VIGAS ACOPLADAS À
PIEZOELÉTRICOS SHUNT PARA ATENUAÇÃO DE
VIBRAÇÃO E DE ONDAS ELÁSTICAS

Braion Barbosa de Moura

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARCIAIS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Marcela Rodrigues Machado, Dra. Univ (ENM/ UnB)
(Orientadora)

Adriano Todorovic Fabro, Dr. Univ (ENM/ UnB)
(Examinador Interno)

Carlos De Marqui Junior, Dr. Univ (EESC/ USP)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 19 DE MARÇO DE 2021.

FICHA CATALOGRÁFICA

Moura, B. B.

MODELOS ESPECTRAIS DE VIGAS ACOPLADAS À PIEZOELÉTRICOS SHUNT
PARA ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÃO E DE ONDAS ELÁSTICA

[Distrito Federal] 2021.

xvii, 84p. (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2021.

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

Palavras-chave:

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| 1. Controle Passivo de Vibrações | 2. Piezoelétricos |
| 3. Circuitos Shunt | 4. Método do Elemento Espectral |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Moura, B. B.(2021). MODELOS ESPECTRAIS DE VIGAS ACOPLADAS À PIEZOELÉTRICOS SHUNT PARA ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÃO E DE ONDAS ELÁSTICAS. Dissertação de Mestrado, Publicação ENM.DM - XXX.XXX, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, xvii, 84p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Braion Barbosa de Moura.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: MODELOS ESPECTRAIS DE VIGAS ACOPLADAS À PIEZOELÉTRICOS SHUNT PARA ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÃO E DE ONDAS ELÁSTICAS.

GRAU / ANO: MESTRE / 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Braion Barbosa de Moura

Dedico a todos aqueles que de alguma forma me ajudaram e incentivaram com a realização desse mestrado. Em especial a minha orientadora Marcela que sempre esteve disponível para me proporcionar orientações e explicações. A minha namorada Heloísa por estar sempre ao meu lado me fornecendo apoio e motivação para encarar todas as dificuldades. Ao meu pai, minha mãe e meu irmão, por sempre ajudarem de todas as formas possíveis e acreditarem no meu potencial. Por último e não menos importante, aos meus amigos velhos e novos, que sempre dividiram suas palavras de conforto e amizade nos momentos tristes e alegres.

Resumo

MODELOS ESPECTRAIS DE VIGAS ACOPLADAS À PIEZOELÉTRICOS SHUNT PARA ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÃO E DE ONDAS ELÁSTICAS

Autor: Braion Barbosa de Moura

Orientadora: Marcela Rodrigues Machado, Dra. Univ (ENM/ UnB)

Programa de Pós Graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, 19 de março de 2021

Dentre as diferentes técnicas de controles vibracionais destacam-se as que utilizam piezoelétricos (PZTs) combinados com circuitos elétricos passivos (circuitos *shunt*). Neste tipo de controle, uma conversão de energia mecânica para elétrica é realizada pelo efeito piezoelétrico direto. Em geral, os controles passivos de PZT com circuitos *shunt* são realizados com a utilização de topografias de circuitos passivos formados por elementos resistivos, indutivos, capacitivos e chaveados. Entende-se que cada tipo de circuito *shunt* pode impor um comportamento específico nas vibrações e propagações de onda de uma estrutura. Neste sentido, o presente trabalho apresenta uma discussão do comportamento dinâmico de uma viga sujeita a diferentes acoplamentos de PZTs conectados a circuitos *shunt* resistivo, indutivo, capacitivo, indutivo-capacitivo (LC) em série e paralelo, resistivo-indutivo (RL) em série e paralelo, e resistivo-indutivo-capacitivo (RLC) em série e paralelo. O Método do Elemento Espectral (MEE) é utilizado para realizar as modelagens numéricas e extrair as Funções de Resposta em Frequência (FRF) das estruturas, e para estimar o gráfico de dispersão de onda é utilizado o Método de Matriz de Transferência (MMT). Nas modelagens são considerados os modelos de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko para representar a viga com uma e duas camadas de PZTs, respectivamente. Os resultados obtidos indicam que as formulações por MEE e por MMT são adequadas para viabilizar projetos de controle de vibrações e de propagação de ondas utilizando circuitos *shunt*.

Palavras-chaves: Controle Passivo de Vibrações; Piezoelétricos; Circuitos Shunt; Método do Elemento Espectral.

Abstract

SPECTRAL MODELS OF BEAMS COUPLED TO PIEZOELECTRIC SHUNT FOR ATTENUATION OF VIBRATION AND ELASTIC WAVES

Author: Braion Barbosa de Moura

Supervisor: Marcela Rodrigues Machado, Dra. Univ (ENM/ UnB)

Master in Mechanical Sciences

Brasília, 2021

Among the different techniques of vibrational controls, they stand out as using piezoelectric (PZTs) combined with passive electrical circuits (shunt circuits). In this type of control, a direct conversion from mechanical to electrical energy is performed by the piezoelectric effect. In general, passive PZT controls with shunt circuits are performed using passive topographies formed by resistive, inductive, capacitive and switching elements. It is understood that each type of shunt circuit can impose a specific behavior on the vibrations and wave propagation of a structure. In this sense, the present work presents a discussion of the dynamic behavior of a beam repaired to different couplings of PZTs connected to resistive, inductive, capacitive, inductive-capacitive (LC) circuits in series and parallel, resistive-inductive (RL) in series and parallel, and resistive-inductive-capacitive (RLC) in series and parallel. The Spectral Element Method (SEM) is used to perform numerical modeling and extract as Frequency Response Functions (FRF) from structures, and to estimate the wave dispersion graph is used by the Transfer Matrix Method (TMM). In the modeling the Euler-Bernoulli and Timoshenko beam models are considered to represent a beam with one and two layers of PZTs, respectively. The results obtained indicate that the formulations by SEM and by TMM are classified to make possible projects of control of vibrations and wave propagation using shunt circuits.

Key-words: Passive Vibration Control; Piezoelectric; Shunt Circuit; Spectral Element Method.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	3
1.2	Metodologia	3
1.3	Organização do trabalho	4
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1	Controle vibracional com PZT- <i>shunt</i>	7
2.2	Método do Elemento Espectral	9
3	MÉTODO DE ELEMENTO ESPECTRAL	11
3.1	Formulação geral	11
3.2	Elemento espectral de viga de Euler Bernoulli	14
3.3	Elemento espectral de viga de Timoshenko	17
3.4	Método da Matriz de Transferência Espectral	21
3.5	Estruturas inteligentes	23
3.5.1	Viga acoplada com uma camada piezoelétrica	23
3.5.1.1	Formulação Lee-Kim	23
3.5.1.2	Formulação Lee	28
3.5.2	Viga acoplada com duas camadas piezoelétricas	33
4	CIRCUITO SHUNT	37
4.1	Relações de acoplamento do circuito <i>shunt</i>	37
4.2	Modelagem piezoelétrica	38
4.3	Impedâncias dos circuitos <i>shunt</i>	40
5	RESULTADOS	43
5.1	Propriedades e análise estrutural	43
5.2	Estruturas inteligentes	45
5.2.1	Circuito <i>shunt</i> resistivo	48
5.2.2	Circuito <i>shunt</i> indutivo	51
5.2.3	Circuito <i>shunt</i> capacitivo	54

5.2.4	Circuito <i>shunt</i> LC	57
5.2.5	Circuito <i>shunt</i> RL	60
5.2.6	Circuito <i>shunt</i> RLC	63
5.3	Multi-impedâncias	66
5.4	Viga acoplada a quatro piezoelétricos conectados em circuitos <i>shunt</i> ressonante	68
6	CONCLUSÃO	71
6.0.1	Contribuições	72
6.0.2	Trabalhos Futuros	73
6.0.3	Publicações	73
	REFERÊNCIAS	74

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Aplicações de controle vibracional em estruturas acopladas com piezoelétricos conectados com circuitos <i>shunts</i> : a) chassi de automóvel (SEBA; NI; LOHMANN, 2006); b) centrífuga (MIN; DUFFY; PROVENZA, 2010); c) turbina (NEUBAUER; WALLASCHEK, 2013); d) pá de um turbojato (SÉNÉCHAL, 2011); e) hélice de um helicóptero (BOEING, 2021); f) placa de alumínio (CASADEI et al., 2010); g) viga de alumínio (AIROLDI; RUZZENE, 2011b).	2
Figura 2.1 – Ilustração piezoelétrica de efeito direto e reverso.	5
Figura 3.1 – Elemento <i>smart material</i> : a) modelo físico; b) modelo elemento espectral.	11
Figura 3.2 – Elemento viga: a) viga delgada em flexão; b) diagrama de corpo livre.	14
Figura 3.3 – Conversão de sinal para o elemento viga de Timoshenko.	19
Figura 3.4 – Elemento viga acoplado a um piezoelétrico.	23
Figura 3.5 – Convenção de sinais do elemento viga com um piezoelétrico acoplado.	27
Figura 3.6 – Elemento de viga acoplado com duas camadas piezoelétricas.	33
Figura 3.7 – Convenção de sinais do elemento viga com duas camadas piezoelétricas acopladas.	35
Figura 4.1 – Representação de circuito topográfico de piezoelétricos conectados com um resistor na configuração: a) viga-PZT; b) PZT-viga-PZT em série; c) PZT-viga-PZT em paralelo.	39
Figura 4.2 – Circuitos <i>shunts</i> : a) puro resistivo; b) puro indutivo; c) puro capacitivo; d) chaveado; e) LC série; f) LC paralelo; g) RL série; h) RL paralelo; i) RLC série; j) RLC paralelo.	41
Figura 5.1 – Ilustração geométrica das estruturas: a) Viga-PZT; b) PZT-viga-PZT;	44
Figura 5.2 – Comparação entre as estruturas de viga e viga-PZT: a) FRF; b) Diagrama de dispersão.	44
Figura 5.3 – Comparação entre as estruturas de viga e PZT-viga-PZT: a) FRF; b) Diagrama de dispersão.	45
Figura 5.4 – Ilustração de <i>smart materials</i> : a) Viga-PZT- <i>shunt</i> ; b) PZT-viga-PZT- <i>shunt</i> em série; c) PZT-viga-PZT- <i>shunt</i> em paralelo;	46

Figura 5.5 – Análise da estrutura viga-PZT: a) FRF; b) Diagrama de dispersão com o <i>shunt</i> em curto; c) Diagrama de dispersão com o <i>shunt</i> aberto.	46
Figura 5.6 – Análise da estrutura PZT-viga-PZT: a) FRF; b) Diagrama de dispersão com o <i>shunt</i> em curto; c) Diagrama de dispersão com o <i>shunt</i> aberto em série; d) Diagrama de dispersão com o <i>shunt</i> aberto em paralelo.	47
Figura 5.7 – Impedância geral do circuito <i>shunt</i> resistivo puro: a) $R = 33 \Omega$; b) $R = 3300 \Omega$	48
Figura 5.8 – Viga-PZT conectada com circuito <i>shunt</i> resistivo: a) FRF com <i>shunt</i> resistivo $R = 33 \Omega$; b) FRF com <i>shunt</i> resistivo $R = 3300 \Omega$; c) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> resistivo $R = 33 \Omega$; d) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> resistivo $R = 3300 \Omega$;	49
Figura 5.9 – PZT-viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> resistivo: a) FRF com <i>shunt</i> resistivo $R = 33 \Omega$; b) FRF com <i>shunt</i> resistivo $R = 3300 \Omega$; c) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> resistivo $R = 33 \Omega$ em série; d) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> resistivo $R = 3300 \Omega$ em série;; e) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> resistivo $R = 33 \Omega$ em paralelo; f) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> resistivo $R = 3300 \Omega$ em paralelo.	50
Figura 5.10–Impedância geral do circuito <i>shunt</i> indutivo pruo: a) $L = 3.508H$; b) $L = 0.508H$; c) $L = 0.135H$	51
Figura 5.11–Viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> indutivo: a) FRF com <i>shunt</i> indutivo $L = 3.508 H$; b) FRF com <i>shunt</i> indutivo $L = 0.508 H$; c) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> indutivo $L = 3.508 H$; d) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> indutivo $L = 0.508 H$	52
Figura 5.12–PZT-viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> indutivo: a) FRF com <i>shunt</i> indutivo $L = 0.135 H$ conectado em série; b) FRF com <i>shunt</i> indutivo $L = 0.135 H$ conectado em paralelo; c) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> indutivo $L = 0.135 H$ conectado em série; d) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> indutivo $L = 0.135 H$ conectado em paralelo.	53
Figura 5.13–Impedância geral do circuito <i>shunt</i> capacitivo puro: a) $C = -52nF$; b) $C = 1KnF$	54
Figura 5.14–Viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> capacitivo: a) FRF com <i>shunt</i> capacitivo negativo $C = -52nF$; b) FRF com <i>shunt</i> capacitivo positivo $C = 1KnF$; c) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> capacitivo negativo $C = -52nF$; d) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> capacitivo positivo $C = 1KnF$	55
Figura 5.15–PZT-viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> capacitivo: a) FRF com <i>shunt</i> capacitivo $C = -52nF$; b) FRF com <i>shunt</i> capacitivo $C = 1KnF$; c) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> capacitivo $C = -52nF$ em série; d) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> capacitivo $C = 1KnF$ em série; e) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> capacitivo $C = -52nF$ em paralelo; f) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> capacitivo $C = 1KnF$ em paralelo.	56

Figura 5.16–Impedância geral do circuito <i>shunt</i> LC nas configurações: a) Série; b) Paralelo.	57
Figura 5.17–Viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> LC: a) FRF com <i>shunt</i> LC em série; b) FRF com <i>shunt</i> LC em paralelo; c) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> LC em série; d) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> LC em paralelo.	58
Figura 5.18–PZT-viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> LC: a) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao <i>shunt</i> LC em série; b) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao <i>shunt</i> LC em paralelo; c) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao <i>shunt</i> LC em série; d) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao <i>shunt</i> LC em paralelo; e) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao <i>shunt</i> LC em série; f) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao <i>shunt</i> LC em paralelo.	59
Figura 5.19–Impedância geral do circuito <i>shunt</i> RL nas configurações: a) Série; b) Paralelo.	60
Figura 5.20–Viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> RL: a) FRF com <i>shunt</i> RL em série; b) FRF com <i>shunt</i> RL em paralelo; c) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> RL em série; d) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> RL em paralelo.	61
Figura 5.21–PZT-viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> RL: a) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao <i>shunt</i> RL em série; b) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao <i>shunt</i> RL em paralelo; c) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao <i>shunt</i> RL em série; d) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao <i>shunt</i> RL em paralelo; e) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao <i>shunt</i> RL em série; f) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao <i>shunt</i> RL em paralelo.	62
Figura 5.22–Impedância geral do circuito <i>shunt</i> RLC nas configurações: a) Série; b) Paralelo.	63
Figura 5.23–Viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> RLC: a) FRF com <i>shunt</i> RLC em série; b) FRF com <i>shunt</i> RLC em paralelo; c) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> RLC em série; d) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> RLC em paralelo.	64
Figura 5.24–PZT-viga-PZT conectada em circuito <i>shunt</i> RLC: a) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao <i>shunt</i> RLC em série; b) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao <i>shunt</i> RLC em paralelo; c) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao <i>shunt</i> RLC em série; d) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao <i>shunt</i> RLC em paralelo; e) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao <i>shunt</i> RLC em série; f) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao <i>shunt</i> RLC em paralelo.	65

Figura 5.25–Ilustração de um <i>shunt</i> RL multi-ressonante: a) Conexão de dois circuitos RL-shunt equivalente de um piezo transdutor; b) Esboço de componentes eletrônicos ressonantes do circuito multi-ressonante <i>shunt</i> .	66
Figura 5.26–Impedâncias ressonantes: a) Tunada em 556 e 1101 Hz; b) Tunada em 1101 e 1831 Hz.	67
Figura 5.27–Viga acoplada com uma camada piezoelétrica conectada em circuito <i>shunt</i> multi-ressonante em série: a) FRF com <i>shunt</i> multi-ressonante tunado em 556 e 1101 Hz; b) FRF com <i>shunt</i> multi-ressonante tunado em 1101 e 1831 Hz;	67
Figura 5.28–Viga acoplada com uma camada piezoelétrica conectada em circuito <i>shunt</i> multi-ressonante em série: a) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> multi-ressonante tunado em 556 e 1101 Hz; b) Diagrama de dispersão com <i>shunt</i> multi-ressonante tunado em 1101 e 1831 Hz.	68
Figura 5.29–Ilustração de uma viga acoplada com quatro PZTs conectados no circuito <i>shunt</i>	68
Figura 5.30–Comparações das FRFs de uma viga com acoplamentos de 1 à 4 PZTs conectados em circuito <i>shunt</i> ressonante: a) FRFs com o <i>shunt</i> desligado; b) FRFs com o <i>shunt</i> ressonante ligado.	69
Figura 5.31–Diagrama de dispersão de uma viga acoplada com quatro PZTs conectados em circuito <i>shunt</i> ressonante.	69

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Propriedades e características geométricas da viga e do piezoelétrico. . . 43

Lista de Algoritmos

Lista de Abreviaturas e Siglas

<i>FRF</i>	<i>Função Resposta em Frequência</i>
<i>FFT</i>	<i>Fast Fourier Transform</i>
<i>FEM</i>	<i>Finite Element Method</i>
<i>GDL</i>	<i>Degrees of Freedom</i>
<i>LC</i>	<i>Indutor- capacitor</i>
<i>MDF</i>	<i>Método de Diferenças Finitas</i>
<i>MEF</i>	<i>Método de Elementos Finitos</i>
<i>MEFO</i>	<i>Método de Elementos Finitos de Onda</i>
<i>MEE</i>	<i>Método do Elemento Espectral</i>
<i>MMT</i>	<i>Método da Matriz de Transferência</i>
<i>MMT</i>	<i>Método da Matriz de Transferência Espectral</i>
<i>MEOP</i>	<i>Método de Expansão de Onda Plana</i>
<i>PVDF</i>	<i>Polivinil Fluoreto</i>
<i>PZT</i>	<i>Lead Zirconate Titanate</i>
<i>RL</i>	<i>Resistor-indutor</i>
<i>RLC</i>	<i>Resistor-indutor-capacitor</i>
<i>SEM</i>	<i>Spectral Element Method</i>
<i>TCF</i>	<i>Transformada Contínua de Fourier</i>
<i>TDF</i>	<i>Transformada Discreta de Fourier</i>

Lista de Símbolos

Letras Latinas

A	Área da seção transversal [m^2]
a_i	Constante
b_i	Constante
c	Coefficiente de amortecimento
\mathbf{c}_i	Autovetor normalizado
C	Capacitor
C_{11}^D	Rigidez elástica
C_p^T	Capacitância piezoelétrica
\mathbf{d}	Vetor de deslocamento
d_{31}	Constante piezoelétrica
D	Deslocamento elétrico
\mathbf{e}	Vetor de propagação de ondas
E	Módulo de Young [GPa]
E_c	Campo elétrico
F	Força de tração axial
\mathbf{f}_c	Vetor de forças nodais
\mathbf{G}	Módulo de cisalhamento
\mathbf{G}	Matriz de forças
h	Espessura
h_{31}	Constante piezoelétrica

H	Matriz de deslocamento
<i>I</i>	Momento de inercia
<i>k</i>	Número de ondas
k_{ij}	Coefficiente de acoplamento piezoelétrico
L_c	Comprimento da estrutura
<i>L</i>	Indutor
\mathbf{L}^{-1}	Matriz diagonal de comprimento piezoelétricos
L_{GB}	Operador diferencial
<i>M</i>	Momento fletor
n	Vetor unitário
<i>N</i>	Função de forma
p	Vetor de forças externas
\mathbf{p}_k	Vetor de estado
P	Componente espectral de forças externas
<i>Q</i>	Força cortante
<i>R</i>	Resistor
R	Vetor diagonal de deslocamento
<i>s</i>	Parâmetro de Laplace
S	Matriz de rigidez espectral
S_{11}^E	Conformidade elástica
S_{55}^E	Conformidade elástica
<i>t</i>	Tempo
\mathbf{t}_k	Matriz de transferência
<i>T</i>	Energia cinética
T	Matriz de transferência global
<i>u</i>	Deslocamento axial
<i>U</i>	Energia potencial

U	Componente espectral de deslocamento axial
V	Voltagem
V	Componente espectral de voltagem
w	Deslocamento transversal
W	Componente espectral de deslocamento translacional
Y	Admitância
Z	Impedância

Letras gregas

β_{33}^S	Constante dielétrica
ω	Frequência discreta
σ	Tensão mecânica
ϵ	Tensão normal
ϵ	Constante de permissividade
γ_p	Tensão de cisalhamento
τ	Força externa
τ_p	Deformação de cisalhamento
\mathcal{L}	Operador estrutural
κ	Fator de cisalhamento
η	Fator de amortecimento
ρ	Densidade [kg/m^3]
θ	Ângulo de rotação
δW	Trabalho virtual
\mathcal{M}	Operador inercial
Θ	Componente espectral do ângulo de rotação
ϕ_i	Vetor unitário

1 Introdução

Conhecer o comportamento e as características dinâmicas de uma estrutura é um fator avultoso para evitar problemas vibracionais como desgaste mecânico, fadiga e ruído (INMAN, 2001). Em geral, diversos problemas vibracionais podem afetar a integridade das estruturas e conseqüentemente estar associados com riscos de segurança e perdas econômicas. No entanto, o controle vibracional em uma estrutura é uma possibilidade viável para evitar os problemas vibracionais e suas conseqüências, o que justifica o interesse crescente em tecnologias que podem controlar de forma inteligente as vibrações em uma estrutura (LIMA, 1999).

Atualmente, entre os controles vibracionais destacam-se os controles com utilizam materiais piezoelétricos. Nesses controles, várias técnicas passivas, semipassivas, semiativas, ativas e híbridas, estão sendo utilizadas por possuírem a capacidade de ajuste vibracional oriunda da conexão de circuitos elétricos externos (SANTANA; RADE; STEFFEN, 2003). Esses circuitos podem assumir diferentes configurações, porém em técnicas passivas as topografias alternam sempre em componentes como resistores, indutores, capacitores e chaves. Logo, a configuração topográfica desses circuitos elétricos é quem estabelece os efeitos de controle, podendo em alguns casos apresentar comportamentos semelhantes aos dos métodos que utilizam pêndulos, ressonadores mecânicos e absorvedores dinâmicos (GRIPP; RADE, 2018).

A utilização de piezoelétricos (PZTs) para o controle de vibração está cada vez mais presente no aprimoramento de equipamentos e estruturas. Alguns estudos abordam o desenvolvimento de estruturas associadas com PZTs para promover o controle de vibração e de propagação de ondas, onde limitações geométricas, variações vibracionais e dependência de energia elétrica são fatores que não impedem o funcionamento deste tipo de controle. Em Seba, Ni e Lohmann (2006) foram utilizados PZTs conectados com circuitos *shunts* para amortecer as vibrações de um chassi auxiliar de um automóvel (Figura 1.1a). De forma parecida, Min, Duffy e Provenza (2010) usaram um controle vibracional de um PZT com circuito *shunt* para reduzir o ruído de um centrífuga (Figura 1.1b).

Algumas aplicações com circuitos *shunts* também foram desenvolvidas para controlar vibrações no setor aeronáutico. Em Neubauer e Wallaschek (2013), PZTs foram utilizados para amortecer as vibrações nas pás de uma turbina (Figura 1.1c). Já em Sénéchal (2011), controles com PZTs foram utilizados para promover uma redução da vibração de baixa

frequência em uma pá de turbojato CFM56-7B (Figura 1.1d), e em Boeing (2021) um controle com *shunt* piezoelétrico foi utilizado para atenuar a vibração em uma pá de helicóptero (Figura 1.1e).

Aplicações com circuitos *shunts* para elementos simples (viga, barra, placa) também foram realizadas para controlar vibrações. Em Casadei et al. (2010), um controle vibracional com PZTs é realizado em uma placa de alumínio (Figura 1.1f). Já em Airolidi e Ruzzene (2011b), PZTs conectados com shunts multi-modais fazem o controle de vibração em uma viga (Figura 1.1g).

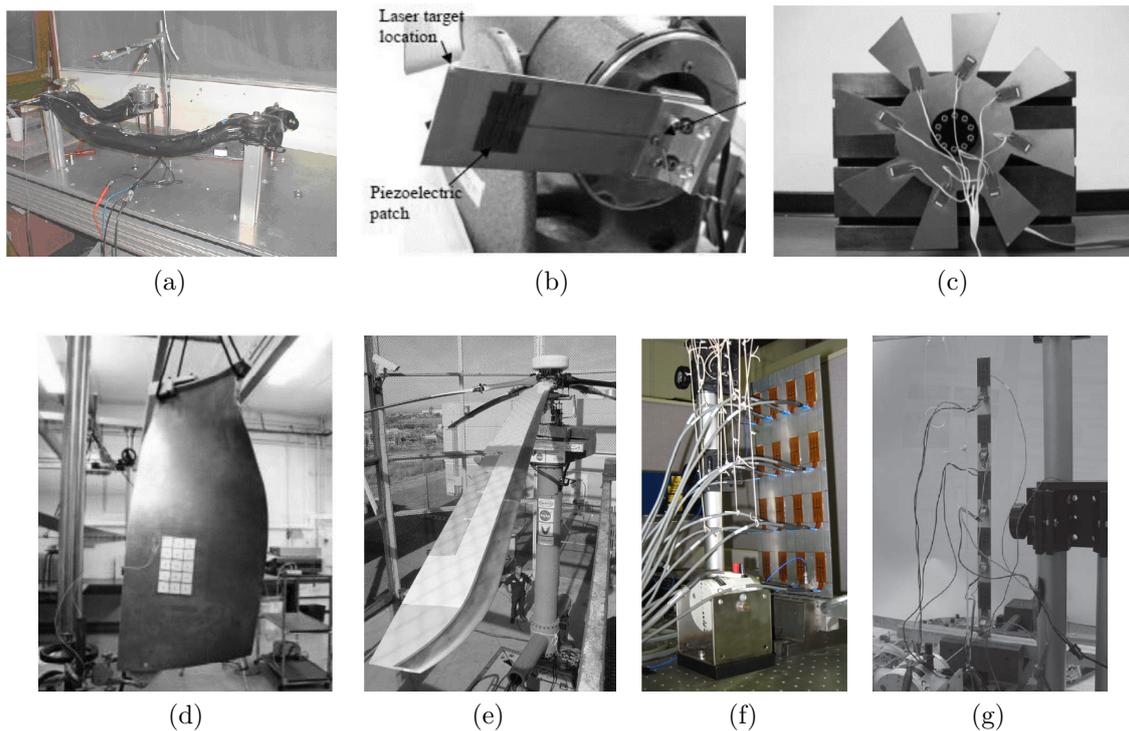


Figura 1.1 – Aplicações de controle vibracional em estruturas acopladas com piezoelétricos conectados com circuitos *shunts*: a) chassi de automóvel (SEBA; NI; LOHMANN, 2006); b) centrífuga (MIN; DUFFY; PROVENZA, 2010); c) turbina (NEUBAUER; WALLASCHEK, 2013); d) pá de um turbojato (SÉNÉCHAL, 2011); e) hélice de um helicóptero (BOEING, 2021); f) placa de alumínio (CASADEI et al., 2010); g) viga de alumínio (AIROLDI; RUZZENE, 2011b).

Nos estudos de caso demonstrados na Figura 1.1, as necessidades de controle demandadas por cada sistema são ministradas com eficiência pelo controle vibracional realizado com piezoelétricos conectados a circuitos *shunts*. No entanto, variações topográficas dos circuitos para cada exemplo não são demonstradas nas respectivas literaturas. Logo, uma comparação entre os resultados dinâmicos associados com diferentes topografias de circuitos *shunts* pode apresentar uma importância no trato do controle vibracional inteligente com técnicas passivas.

As modelagens dinâmicas das estruturas com piezoelétricos conectados em circuitos *shunts*, geralmente são desenvolvidas com base no Método dos Elementos Finitos (MEF)

ou por análise modal. No entanto, em alguns casos o MEF se torna computacionalmente oneroso, pois necessita de um número grande de discretizações na malha. Assim, devido as limitações computacionais do MEF, cria-se a necessidade da utilização de um método que supere os altos custos computacionais. Logo, uma alternativa para suprir essa necessidade pode ser encontrada no Método do Elemento Espectral (MEE), visto que sua solução não necessita de grandes discretizações.

Diante do exposto, o presente trabalho apresenta estudos de modelos numéricos baseados no MEE para análises de controles vibracionais de uma viga acoplada com piezoelétricos conectados em diferentes circuitos *shunts*. Diferentes configurações de acoplamento da viga com os PZTs e do tipo de circuito shunt são analisadas através das respostas dinâmicas e da propagação de ondas da estrutura.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é analisar o comportamento dinâmico de um viga sujeita a diferentes acoplamentos de piezoelétricos que serão conectados a circuitos *shunts* resistivos, indutivos, LC em série e paralelo, RL em série e paralelo, e RLC em série e paralelo. Dentro desse objetivo salientam-se os seguintes objetivos específicos:

- Implementar as formulações em MEE necessárias para representar as estruturas viga, viga acoplada com uma camada piezoelétrica, e viga acoplada com duas camadas piezoelétricas;
- Analisar e comparar as respostas dinâmicas e de propagação de ondas nas estruturas viga, viga acoplada com uma camada piezoelétrica, e viga acoplada com duas camadas piezoelétricas;
- Analisar e comparar os efeitos que os diferentes tipos de circuitos *shunts* causam nas respostas dinâmicas e de propagação de ondas das estruturas viga acoplada com uma camada piezoelétrica, e viga acoplada com duas camadas piezoelétricas;

1.2 Metodologia

A metodologia desenvolvida neste trabalho parte de um referencial teórico e de um estado da arte que abordam a temática. Posteriormente, o desenvolvimento de modelagens numéricas das estruturas viga, viga com uma camada piezoelétrica e viga com duas camadas piezoelétricas são realizadas com MEE. Também são realizadas modelagens numéricas dos circuitos elétricos *shunts* para conecta-los aos piezoelétricos. As interações entre as estruturas e os circuitos *shunts* são realizadas através das relações matemáticas de impedância admensional. A modelagem das estruturas com mais de um piezoelétrico utilizam

a matriz de transferência na alocação das matrizes de rigidez dinâmica espectral para unir as estruturas e estimar os números de ondas. Todas as modelagens são implementadas no *software* MATLAB, onde os resultados são comparados e validados com a literatura.

1.3 Organização do trabalho

A organização deste trabalho está ministrada na divisão de seis capítulos, no capítulo 2 é apresentado uma revisão bibliográfica, abordando os principais trabalhos e suas contribuições. No capítulo 3 é realizada a formulação de força e deslocamento em MEE para os elementos viga, viga com uma camada piezoelétrica e viga com duas camadas piezoelétricas. No capítulo 4 são demonstradas as formulações que regem o efeito piezoelétrico associado aos circuitos *shunts*, e como esses efeitos são somados ao comportamento da viga. Já no capítulo 5 são demonstrados os comportamentos dinâmicos de cada viga associada as diferentes configurações de acoplamento piezoelétrica conectados aos diferentes tipos de circuitos *shunts*. Por último, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho e as sugestões de continuidade para o tema.

2 Revisão Bibliográfica

Desde a década de 90, a utilização de materiais piezoelétricos vem se destacando como um método de controle eficiente para solucionar diversos problemas vibracionais (GRIPP; RADE, 2018). Esses materiais são formados principalmente por substâncias como titânio, turmalina, óxido de chumbo, zircônio e quartzo. De acordo com o tipo de material, os piezoelétricos são classificados principalmente em dois tipos, os PZTs (*Lead Zirconate Titanate*) e os PVDFs (*Polivinil Fluoreto*) (GAUTSCHI, 2002; CHENG et al., 2007). Segundo Cheng et al. (2007), o tipo PZT é amplamente utilizado para atenuar vibrações, visto que sua margem de rigidez o torna flexível e resistente. Já o tipo PVDF, devido à sua geometria complexa e fina, é categoricamente utilizado para sensoriamento em sistemas eletromecânicos.

Para os PZTs acoplados em estruturas simples, além da divisão por material, também há divisões por geometria, entre as quais destacam-se os atuadores *unimorfos*, *bimorfos* e o de tubos. O atuador *unimorfo* é classificado por acoplar o PZT em apenas uma superfície de uma estrutura, enquanto que o atuador *bimorfo* acopla o PZT em duas superfícies (LEO, 2007). Contudo, a definição de funcionamento do PZT é baseada na converção de energia do domínio mecânico para o elétrico, e vice-versa. Em resumo, quando o piezoelétrico é exposto a uma tensão mecânica é produzido um campo elétrico (efeito direto), e quando o piezoelétrico é exposto a um campo elétrico é produzido uma tensão mecânica (efeito inverso), conforme mostra a Figura 2.1 (CLARK, 2000).

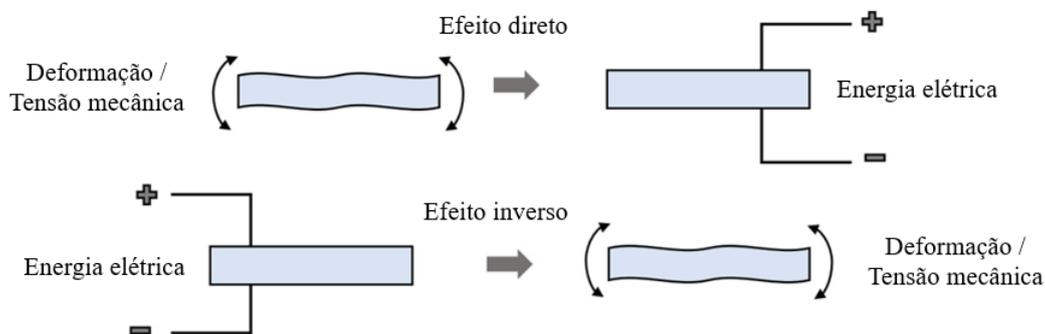


Figura 2.1 – Ilustração piezoelétrica de efeito direto e reverso.

As variações dos controles vibracionais que utilizam os efeitos direto ou reverso dos PZTs para atingir uma estabilidade estrutural podem ser classificadas em controles

passivos, ativos e híbridos (SANTANA, 2007). As técnicas de controle ativo com materiais piezoelétricos estão relacionadas basicamente ao uso de uma fonte de energia elétrica externa para suprir por conversão piezoelétrica um aumento de energia mecânica necessária ao sistema. Diferentemente das técnicas ativas, as técnicas de controle passivo contam com mudanças na estrutura básica sem depender de uma fonte de energia elétrica. Já os controles híbridos mesclam ambas as técnicas dos controles passivo e ativo (AQUINO, 2011).

Na literatura, entende-se que o controle vibracional passivo pode ser obtido nos casos em que os PZTs são conectados com circuitos elétricos externos compostos por componentes passivos, também conhecidos como circuitos *shunt* (SANTANA; RADE; STEFFEN, 2003). As estruturas com esse tipo de controle passivo podem ser denominadas de estruturas inteligentes, também conhecidas pelo termo em inglês *smart materials*. Contudo, determinadas estruturas com piezoelétricos acoplados de forma periódica ao longo de uma estrutura, podem ser denominadas de metamateriais inteligentes, também conhecidas pelo termo inglês *smart metamaterials* (CORR, 2002; GRIPP; RADE, 2018).

A utilização de metamateriais em aplicações de engenharia tem aumentado nos últimos anos. Cada vez mais o desenvolvimento de materiais com padrões periódicos é realizado levando em conta as necessidades prévias para uma estrutura com potenciais de aplicações que incluem invisibilidade, controle vibracional e acústico (AIROLDI; RUZZENE, 2011a). Geralmente, os metamateriais associados com circuitos *shunts* podem apresentar desde efeitos de atenuações até possíveis supressões de vibrações em uma banda de frequência (*band gap*). Contudo, o metamaterial aplicado ao controle vibracional é definido como uma distribuição periódica de constante elástica e densidade de massa ao longo de uma estrutura (CASADEI et al., 2010; ZHOU; WU; ZUO, 2015; SUGINO; RUZZENE; ERTURK, 2018).

Na literatura, as simulações numéricas das estruturas *smarts* são predominantemente elaboradas por análise modal e por métodos como o MEF, o MEE, o Método de Elemento Finito de Onda (MEFO), o Método de Diferença Finita (MDF), o Método de Matriz de Transferência (MMT), e o Método de Expansão de Onda Plana (MEOP) (LEO, 2007; SANTANA; RADE; STEFFEN, 2003). Esses métodos são eficientes no tratamento da dimensão espacial do sistema. Porém, para determinadas aplicações alguns métodos se mostram mais eficientes do que os outros.

O MEF (em inglês *Finite Element Method* - FEM) é um dos métodos mais utilizados para representar simulações de controle vibracional com estruturas *smarts*. A formulação do MEF é baseada na discretização do sistema em diversos elementos menores, sendo a quantidade dessas discretizações uma influência decisiva na precisão da resposta vibracional do sistema (PETYT, 2010). Em contrapartida, o Método dos Elementos Espectrais (em inglês *Spectral Element Method* - SEM) é uma alternativa frente ao FEM nessas análises, visto que sua formulação trata de um modelo que relaciona as forças e os deslocamentos nodais espectrais, ambos baseados na solução analítica da onda. Assim, o MEE não

necessita de uma discretização com grandes números de elementos, ou seja, para casos sem descontinuidades apenas um elemento é necessário (DOYLE, 1997; LEE, 2009).

O MEE é considerado um método muito eficiente para representar diversos tipos de geometrias, condições de contorno e materiais. Parte dessa eficiência se deve ao fato de que as funções de forma dos elementos são obtidas a partir da solução analítica das equações diferenciais governantes e da solução do sistema dinâmico escrito no domínio da frequência. Este recurso reduz significativamente o número de elementos exigidos no modelo de estrutura, ocasionando uma melhora na precisão da solução do sistema dinâmico. Portanto, com o MEE um único elemento é suficiente para modelar qualquer parte contínua e uniforme de uma estrutura. Além disso, uma interpretação em forma de onda da dinâmica estrutural pode ser obtida diretamente, levando a um controle inovador baseado em estratégias de ondas (DOYLE, 1997; LEE, 2009).

2.1 Controle vibracional com PZT- *shunt*

Por volta de 1883 os irmãos físicos Pierre e Jacques Curie demonstraram que uma tensão elétrica é gerada em uma determinada direção de um material piezoelétrico quando este sofre uma deformação no tamanho ou forma do material (efeito piezoelétrico direto). Posteriormente, após Gabirel Lippmann demonstrar matematicamente o efeito piezoelétrico inverso, os irmãos Curie demonstram experimentalmente. Já em termos de vibração, foi somente em Forward (1979) que foi proposto pela primeira vez a utilização desses materiais piezoelétricos para o controle vibracional, conectando nos piezoelétricos alguns circuitos elétricos passivos, denominados de circuitos *shunt*. A lógica utilizada por Forward consiste na manipulação de energia elétrica gerada pela conversão do piezoelétrico, alterando assim as propriedades mecânicas de uma estrutura.

Aplicações vibracionais com circuitos *shunt* resistivo e resistivo-indutivo, ambos conectados em cerâmicas PZTs, foram analisadas por Uchino e Ishii (1988) e Hagoood e Flotow (1991), respectivamente, onde foram observadas características dinâmicas impostas pelo circuito resistivo que assemelharam-se mecânicamente aos efeitos de amortecimento de um material viscoelástico. Já as características impostas pelo circuito resistivo-indutivo, também chamado de *shunt* ressonante, demonstraram efeitos semelhantes aos de um absorvedor dinâmico amortecido de vibrações, porém apresentava uma capacidade de ressonância elétrica que pode ser sintonizada para diferentes frequências.

Em relação aos circuitos *shunt* ressonantes, Wu (1996) apresenta um estudo que argumenta sobre a necessidade de valores de resistência e indutância adequados para a combinação RL em série e paralelo. No entanto, o estudo afirma que o circuito *shunt* ressonante precisa ser sintonizado de acordo com as propriedades da estrutura. Em Hollkamp e Gordon (1996), compara-se os *shunts* ressonantes com materiais viscoelásticos, e afirma-se que os *shunts* ressonantes são mais eficientes devido a sua possibilidade de

sintonia adaptativa. Já nos trabalhos de Zhou, Wu e Zuo (2015) e Airoidi e Ruzzene (2011a), efeitos específicos de atenuações de vibração e de propagação de ondas foram desenvolvidas em metamateriais devido as periodicidades de piezoelétricos conectados com circuitos *shunts* ressonantes.

Diversos trabalhos abordaram variações com a utilização dos circuitos *shunts* ressonantes para controle de vibração. Em Airoidi e Ruzzene (2011b), foram propostas relações de um *shunt* ressonante com multi-impedâncias para atenuar vibrações. De maneira parecida, em Viana e Steffen (2006), análises multi-modais com um *shunt* ressonante foram executadas afim de evidenciar as influências para diferentes valores de resistência. Contudo, esses trabalhos comprovam a capacidade dos circuitos *shunts* ressonantes de se equiparar com absorvedores dinâmicos distribuídos ao longo de uma estrutura.

Em Davis e Lesieutre (1995), o circuito *shunt* resistivo é baseado em uma aproximação de energia de deformação modal, o que permite ao projetista adicionar amortecimento a um dado modo estrutural. Porém, diferente dos materiais viscoelásticos, o desempenho do circuito *shunt* resistivo não é muito eficiente para o amortecimento estrutural de grandes estruturas.

Em Guyomar, Richard e Audigier (1999), são abordados os efeitos de variações de circuitos *shunt* com componentes eletrônicos que permitem ou interrompem a passagem de corrente elétrica. Esses componentes são conhecidos pelo termo em ingles *switch* e podem ser utilizados para gerar uma série de combinações de dissipação de energia elétrica. Trabalhos como os de Clark (2000), Corr (2002) buscaram resolver topologias ideais para a utilização do circuito *shunt switch* associado com outros componentes passivos.

Davis e Lesieutre (2000), retratam a estratégia de ajuste de rigidez no piezoelétrico com o circuito *shunt* capacitivo. Segundo Chen, Huang e Sunn (2014) os *shunts* capacitivos quando combinados com outros componentes como resistores, indutores, *switchs* e até outros capacitores, podem apresentar efeitos específicos de controle vibracional que estabelecem, de acordo com a configuração, possíveis atenuações e *band gap*. Um exemplo desses efeitos de controle vibracional com diferentes circuitos *shunt* é demonstrado em Gang et al. (2011), onde retrata-se por MEF a propagação de ondas e o comportamento vibracional de uma viga com PZTs acoplados de forma periódica.

Em trabalhos como os de Lesieutre (1998), Santana, Rade e Steffen (2003), Santana (2007) e Gripp e Rade (2018), são realizadas revisões sobre as variações dos diferentes tipos de circuitos *shunt*. Nesses trabalhos, descrições dos efeitos associados a cada *shunt* são embasadas com estados da arte relativos aos períodos de cada publicação.

2.2 Método do Elemento Espectral

Segundo Lee (2009) a análise espectral, também conhecida como análise de Fourier, teve início com Joseph Fourier em 1822. Em seu trabalho intitulado "*Theorie analytique de la chaleur*", Joseph demonstrou que infinitas séries de funções senos e cossenos podem ser utilizadas para analisar a condução de calor em sólidos. Posteriormente, matemáticos como Dirichlet e Riemann desenvolveram trabalhos resolvendo dúvidas sobre a validade das séries de Joseph. Com isso, a análise espectral foi classificada em duas variações que ficaram conhecidas por Transformada Contínua de Fourier (TCF) e Transformada Discreta de Fourier (TDF).

De acordo com o avanço de soluções computacionais associadas com a redução do número de operações aritméticas, foram surgindo desenvolvimentos de algoritmos como o *Fast Fourier Transform* (FFT). Esse algoritmo tornou as análises espectrais mais eficientes para aplicações com processamento de sinal digital (LEE, 2009). Assim, abordagens espectrais foram surgindo até o Método do Elemento Espectral ser proposto pela primeira vez em Beskos e Narayanan (1978), onde formularam a matriz de rigidez dinâmica para elementos de viga de Euler-Bernoulli uniformes de dois nós no domínio da frequência.

Segundo Lee (2009) a modelagem por MEE é suficiente para adquirir soluções precisas para um elemento de estrutura uniforme, independentemente do seu comprimento. Isso resulta em uma redução drástica no número total de graus de liberdade (GDL), reduzindo significativamente o gasto computacional e o tempo de computação. No entanto, ainda é inevitável que um grande número de GDLs tenham que ser tratados, mesmo quando o MEE é aplicado a grandes estruturas de rede tipo viga (1-D) que consistem em muitas células de rede.

Diversos trabalhos utilizando o MEE estão sendo desenvolvidos a cerca de dinâmica estrutural e propagação de ondas. Algumas análises vibracionais de estruturas simples e complexas foram abordadas no livro *Wave Propagation in Structures* em Doyle (1997). De maneira semelhante, no livro *Spectral Elements Method In Structural Dynamics*, Lee (2009) apresenta análises espectrais de estruturas simples e também de novas variedades de aplicações como compósitos laminados e detecção de danos. Contudo, poucos trabalhos abordam a utilização do MEE para desenvolver estruturas acopladas com piezoelétricos aplicados ao controle vibracional (LEE; KIM, 2000; FANG et al., 2017).

Em Lee e Kim (2000) é apresentado um método de elemento espectral e um método de análise modal para representar uma viga de Euler-Bernoulli com um piezoelétrico acoplado onde a estrutura está sujeita a uma força axial. Nessa análise, as equações de movimento acopladas são geradas primeiro usando o princípio de Hamilton, e posteriormente a matriz do elemento espectral é formulada a partir das autofunções exatas espectralmente formuladas das equações governantes acopladas. De forma parecida, em Lee e Kim (2001) é apresentado um método de elemento espectral e um método de análise

modal para representar uma viga de Euler-Bernoulli com um piezoelétrico, porém existe o acréscimo de uma camada de um material viscoelástico entre a viga e o piezoelétrico. Também de maneira parecida, em [Park et al. \(2010\)](#) uma teoria do feixe de Euler-Bernoulli e de piezoeletricidade linear são usadas para modelar o comportamento eletromecânico de piezoelétrico. Um modelo de elemento espectral é desenvolvido para representar a resposta dinâmica dos piezoelétricos acoplados no feixe.

Recentemente, análises de propagação de ondas flexurais em MEE de um elemento viga de Euler-Bernoulli com um piezoelétrico conectado com circuitos shunts ressoantes foram demonstradas em [Moura e Machado \(2019\)](#) e em [Machado, Fabro e Moura \(2019\)](#). Posteriormente, uma análise semelhante em MEE de uma viga de Euler-Bernoulli com circuitos shunts multi-ressonantes foi realizada em [Machado, Fabro e Moura \(2020\)](#). Já a análise em MEE de uma geometria composta por uma viga de Euler-Bernoulli com quatro piezoelétricos conectados em circuitos *shunts* ressonantes foi apresentada em [Moura, Borges e Machado \(2020\)](#). Assim, são demonstradas pesquisas voltadas à SFRF utilizando a análise modal como base teórica, mas não se encontra material que utilize o SEM, indicando uma lacuna na literatura com a abordagem do SEM.

3 Método de Elemento Espectral

Neste capítulo é abordado a formulação do Método do Elemento Espectral para modelar o comportamento dinâmico dos elementos viga de Euler Bernoulli e Timoshenko, viga com uma camada piezoelétrica e viga com duas camadas piezoelétricas. A vantagem do SEM é o número reduzido de elementos necessários para modelar um sistema, conforme mostra a Figura 3.1.



Figura 3.1 – Elemento *smart material*: a) modelo físico; b) modelo elemento espectral.

Ainda neste capítulo, também é abordada a formulação do Método de Matriz de Transferência para obter os números de ondas de cada estrutura.

3.1 Formulação geral

Partindo dos conceitos de equilíbrio, Doyle (1997) e Lee (2009) formularam o elemento espectral partindo da solução exata da equação do movimento de uma estrutura. A equação do movimento de um elemento estrutural pode ser representada simbolicamente por:

$$\mathcal{L}\mathbf{u}(x, t) + \mathcal{M}\ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{p}(x, t) \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L} é o operador estrutural e \mathcal{M} é o operador inercial. O domínio do tempo é representado por t e as coordenadas espaciais são representadas por x . Os termos $\mathbf{u}(x, t)$ e $\mathbf{p}(x, t)$ são os vetores dos campos de deslocamento e de forças externas, respectivamente. As forças externas e os deslocamentos podem ser representados na forma espectral por

$$\mathbf{p}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{P}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{U}(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{P}(x, \omega_n)$ e $\mathbf{U}(x, \omega_n)$ são os componentes espectrais de forças e deslocamentos, respectivamente.

Substituindo os componentes espectrais das equações 3.2 e 3.3 na equação 3.1, assumindo que os componentes $\mathbf{P}(x, \omega_n)$ e $\mathbf{U}(x, \omega_n)$ satisfaçam a equação 3.1 em cada frequência discreta ω_n , obtém-se

$$\mathcal{L}\mathbf{U}(x, \omega_n) - \omega_n^2 \mathcal{M}\mathbf{U}(x, \omega_n) = \mathbf{P}(x, \omega_n) \quad (3.4)$$

As funções de forma dinâmica são as funções de forma dependentes da frequência. Essas funções são utilizadas para formular a matriz de rigidez espectral que parte da seguinte equação homogênea

$$\mathcal{L}\mathbf{U}(x) - \omega_n^2 \mathcal{M}\mathbf{U}(x) = 0 \quad (3.5)$$

A equação 3.5 é válida para todas as frequências discretas. Logo, pode ser utilizada uma solução geral do tipo

$$\mathbf{U}(x) = ce^{-ikx} \quad (3.6)$$

onde k é o número de ondas e c é um vetor de constantes. Aplicando a solução geral da equação 3.6 na equação 3.5 encontra-se um problema de autovalor,

$$\mathbf{A}(k, \omega)c = 0 \quad (3.7)$$

onde para uma solução não trivial o determinante de $\mathbf{A}(k, \omega)$ tem que ser zero. Assim, uma equação característica com o número de ondas é formada por:

$$k^p + \alpha_{p-1}(\omega)k^{p-1} + \alpha_{p-2}(\omega)k^{p-2} + \dots + \alpha_1(\omega)k + \alpha_0(\omega) = 0 \quad (3.8)$$

A equação 3.8, conhecida como relação de dispersão, apresenta raízes distintas (k_1, k_2, \dots, k_p) em uma frequência discreta ω . A associação do autovetor c pode ser computada a partir da equação 3.7 com:

$$\mathbf{c}_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ \varphi_i \end{Bmatrix} = a_i \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (3.9)$$

onde \mathbf{c}_i é o autovetor normalizado para tornar um componente do vetor ϕ_i unitário e os outros sejam coletados por φ_i . As constantes a_i são determinadas para satisfazer as condições de contorno. Assim, com k_i e c_i definidos para satisfazer o problema de autovalor na equação 3.7 a solução geral para a equação 3.5 pode ser representada por:

$$\mathbf{U}(x) = \sum_{i=1}^P \phi_i e^{-ik_i(\omega)x} a_i = \mathbf{e}(x, \omega)\mathbf{a} \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(x, \omega) &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_p] \Lambda(x, \omega) \\ \Lambda(x, \omega) &= \text{diag}[e^{-ik_i(\omega)x}] \\ \mathbf{a} &= \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_p\}^T\end{aligned}\tag{3.11}$$

Para uma estrutura de comprimento L , a equação 3.10 deve satisfazer as condições de contorno nos nós para $x = 0$ e $x = L$. Os deslocamentos e as inclinações são chamados geralmente de variáveis primárias e suas especificações no contorno constituem as condições geométricas de contorno. As variáveis primárias podem ser relacionadas ao campo de deslocamento na forma

$$\mathbf{D}(x) = L_{GB} \mathbf{U}(x)\tag{3.12}$$

onde L_{GB} é o operador diferencial linear para as condições de contorno geométricas. Assim, aplicando a solução geral da equação 3.10 na equação 3.12 que corresponde a um elemento finito com dois nós, tem-se:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}(0) \\ \mathbf{D}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{GB} \mathbf{e}(x, \omega)|_{x=0} \\ L_{GB} \mathbf{e}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a}\tag{3.13}$$

assim,

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega)^{-1} \mathbf{d}\tag{3.14}$$

Substituindo a equação 3.14 na equação 3.10, obtém-se:

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{N}(x, \omega) \mathbf{d}\tag{3.15}$$

onde $\mathbf{N}(x, \omega)$ é a função de forma dinâmica definida por,

$$\mathbf{N}(x, \omega) = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega)\tag{3.16}$$

As forças inerciais e os momentos são geralmente chamados de variáveis secundárias e suas especificações de contorno constituem as condições de contorno natural. A teoria de resistência dos materiais provê a relação entre as variáveis secundárias e os campos de deslocamento na forma,

$$\mathbf{F}(x) = L_{NB} \mathbf{U}(x)\tag{3.17}$$

onde L_{NB} é o operador diferencial linear para as condições de contorno naturais. Assim, substituindo a equação 3.15 na equação 3.17, e considerando que as forças nodais \mathbf{f}_c são concentradas nos dois nós do elemento, obtém-se:

$$\mathbf{f}_c = \begin{Bmatrix} -\mathbf{F}(0) \\ +\mathbf{F}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_{NB} \mathbf{N}(x, \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB} \mathbf{N}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{S}(\omega) \mathbf{d}\tag{3.18}$$

com

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} -L_{NB}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{bmatrix} -L_{NB}\mathbf{e}(x, \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}\mathbf{e}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

A matriz $\mathbf{S}(\omega)$ é a matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral. Essa matriz, pertencente ao domínio da frequência, carrega as informações comportamentais da estrutura.

3.2 Elemento espectral de viga de Euler Bernoulli

As vigas são elementos estruturais que possuem a dimensão da seção transversal menor que o comprimento total. Em geral, a regra é estabelecida com a razão do comprimento pela largura, tendo como resultado ideal um valor menor ou igual a dez. O modelo matemático para uma viga clássica de Euler-Bernoulli considera dimensionamentos prismáticos uniformes, e possui as relações de equilíbrio conforme mostra a Figura 3.2.

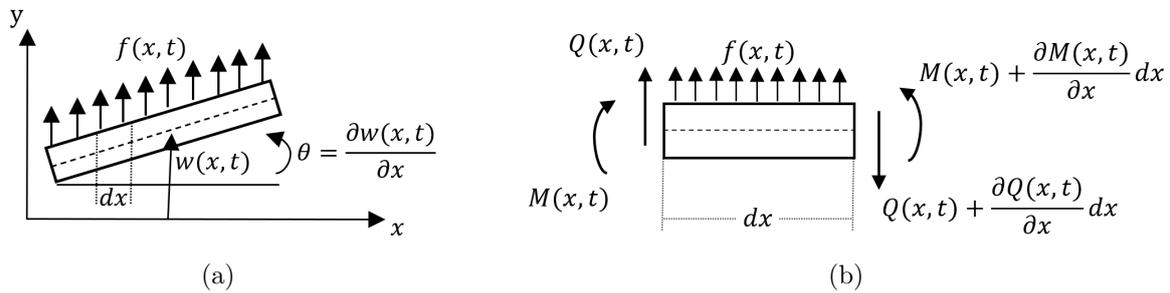


Figura 3.2 – Elemento viga: a) viga delgada em flexão; b) diagrama de corpo livre.

Os esforços que acontecem em um elemento de viga com sua seção transversal sujeita à uma força externa $f(x, t)$, podem ser representados com as variáveis de deslocamento transversal $w(x, t)$, de rotação $\theta(x, t)$, de força cortante $Q(x, t)$, e de momento fletor $M(x, t)$. Logo, realizando o somatório das forças e momentos conforme as relações de equilíbrio de Newton, tem-se a seguinte relação (HIBBELER, 2010):

$$-(Q + \frac{\partial Q}{\partial x}) + f(x, t)dx + Q = \rho A(x)dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (3.21)$$

$$(M + \frac{\partial M}{\partial x}) - (Q + \frac{\partial Q}{\partial x})dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (3.22)$$

onde ρ é a densidade de massa e A é a área da seção transversal. Por simplificação, dividindo as equações 3.21 e 3.22 por dx , e substituindo a deflexão pelo momento fletor,

pode-se expressar a equação do movimento para uma viga de Euler-Bernoulli com a seguinte forma (INMAN, 2001; MEIROVITCH, 2003; RAO, 2008):

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} + f(x, t) \quad (3.23)$$

Considerando que são constantes assumidas o módulo de Young E , o momento de inércia I , ρ e A , tem-se que a equação 3.23 com nenhuma força externa aplicada $f(x, t) = 0$, pode ser representada para um movimento livre com a seguinte forma:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.24)$$

Assumindo que o deslocamento transversal e a rotação podem ser expressos na seguinte forma espectral:

$$w(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.25)$$

$$\theta(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Theta(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.26)$$

onde $W(x, \omega_n)$ e $\Theta(x, \omega_n)$ são os componentes espectrais de deslocamento transversal e rotação, respectivamente.

Substituindo os termos espectrais das equações 3.25 e 3.26 na equação 3.24 e assumindo que os componentes $W(x, \omega_n)$ e $\Theta(x, \omega_n)$ satisfaçam a equação 3.24 em cada frequência discreta ω , obtém-se a seguinte equação homogênea:

$$EI \frac{\partial^4 W(x, \omega)}{\partial x^4} - \omega^2 \rho A W(x, \omega) = 0 \quad (3.27)$$

Semelhante a solução geral da equação 3.6, pode-se assumir uma solução geral do tipo:

$$W = a e^{-ik(\omega)x} \quad (3.28)$$

Aplicando a solução geral da equação 3.28 na equação 3.27, chega-se a um problema de autovalor semelhante ao abordado na equação 3.7. Logo, obtém-se a seguinte relação de dispersão (LEE, 2009),

$$k^4 - k_F^4 = 0 \quad (3.29)$$

onde k_F é o número de onda definido pela seguinte relação

$$k_F = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \quad (3.30)$$

Os demais números de ondas são relacionados com k_F e obedecem a seguinte compatibilidade

$$k_1 = -k_2 = k_F \quad k_3 = -k_4 = ik_F \quad (3.31)$$

Com os números de ondas obtidos e os autovetores normalizados, tem-se a seguinte a solução geral

$$W = a_1 e^{-ik_F x} + a_2 e^{-k_F x} + a_3 e^{ik_F x} + a_4 e^{k_F x} = \mathbf{e}(x; \omega) \mathbf{a} \quad (3.32)$$

onde

$$\mathbf{e}(x; \omega) = [e^{-ik_F x}, e^{-k_F x}, e^{ik_F x}, e^{k_F x}], \quad \mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^T \quad (3.33)$$

Para o elemento viga finita de comprimento L com nós definidos nos contornos $x = 0$ e $x = L$, os deslocamentos e as rotações nodais podem ser relacionados ao campo de deslocamento com

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \Theta_1 \\ W_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}(0, \omega) \\ \mathbf{e}'(0, \omega) \\ \mathbf{e}(L, \omega) \\ \mathbf{e}'(L, \omega) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_B(\omega) \mathbf{a} \quad (3.34)$$

onde

$$\mathbf{H}_B(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_F & -k_F & ik_F & k_F \\ e^{-ik_F L} & e^{-k_F L} & e^{ik_F L} & e^{k_F L} \\ -ik_F e^{-ik_F L} & -k_F e^{-k_F L} & ik_F e^{ik_F L} & k_F e^{k_F L} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Considerando $\mathbf{a} = \mathbf{H}_B(\omega)^{-1} \mathbf{d}$, tem-se que o campo de deslocamentos nodais do elemento de viga pode ser representado em termos dos seus graus de liberdade (GDL). Logo, considerando os GDLs com o vetor \mathbf{d} e eliminando o vetor de constantes \mathbf{a} da equação 3.32, tem-se que a solução geral pode ser expressa com

$$W(x) = \mathbf{N}_B(x, \omega) \mathbf{d} \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{N}_B(x, \omega)$ é definido por:

$$\mathbf{N}_B(x, \omega) = \mathbf{e}(x; \omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \quad (3.37)$$

Os componentes de força de cortante e de momento fletor podem ser relacionados ao componente espectral $\hat{W}(x)$ com

$$\mathbf{f}_c = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.38)$$

onde

$$Q(x) = -EIW'''(x), \quad M(x) = EIW''(x) \quad (3.39)$$

Substituindo a equação 3.36 nas relações espectrais da equação 3.38, a seguinte relação é obtida,

$$\mathbf{S}_B(\omega)\mathbf{d}(\omega) = \mathbf{f}_c(\omega) \quad (3.40)$$

onde $\mathbf{S}_B(\omega)$ é a matriz de rigidez espectral para uma viga de Euler-Bernoulli, e através da relação $\mathbf{f}_c = \mathbf{G}_B(\omega)\mathbf{a}$ obtem-se:

$$\mathbf{S}_B(\omega) = \mathbf{G}_B(\omega)\mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \quad (3.41)$$

onde

$$\mathbf{G}_B(\omega) = -EI \begin{bmatrix} -ik_1^3 & -ik_2^3 & -ik_3^3 & -ik_4^3 \\ -ik_1^2 & -ik_2^2 & -ik_3^2 & -ik_4^2 \\ ik_1^3 e^{-ik_1 L} & ik_2^3 e^{-ik_2 L} & ik_3^3 e^{-ik_3 L} & ik_4^3 e^{-ik_4 L} \\ k_1^2 e^{-ik_1 L} & k_2^2 e^{-ik_2 L} & k_3^2 e^{-ik_3 L} & k_4^2 e^{-ik_4 L} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Os termos da matriz de rigidez dinâmica para a viga, expostos em Lee (2009), são extensos e computacionalmente custosos de se obter analiticamente. Recomenda-se trabalhar com as matrizes $\mathbf{G}_B(\omega)$ e $\mathbf{H}_B(\omega)$.

3.3 Elemento espectral de viga de Timoshenko

Segundo Lee (2009), a vibração livre para uma viga de Timoshenko parte da seguinte equação do movimento

$$\begin{aligned} \kappa GA(w'' - \theta') - \rho A \ddot{w} &= 0 \\ EI\theta'' + \kappa GA(w' - \theta) - \rho I \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde κ é o fator de cisalhamento e G é o módulo de cisalhamento. O momento interno e a força de cisalhamento de flexão transversal são dados por

$$\begin{aligned} Q_t(x, t) &= \kappa GA[w'(x, t) - \theta(x, t)] \\ M_t(x, t) &= EI\theta'(x, t) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Assumindo uma solução da equação 3.3 na forma espectral com

$$w(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t}, \quad \theta(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Theta_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.45)$$

Substituindo a equação 3.45 na equação 3.3 um problema de autovalor é produzido com

$$\begin{aligned} \kappa GA(W'' - \Theta') + \rho A \omega^2 W &= 0 \\ EI\Theta'' + \kappa GA(W' - \Theta) + \rho I \omega^2 \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Assume a solução geral da equação 3.3 com

$$W(x) = ae^{-ik(\omega)x}, \quad \Theta(x) = \beta ae^{-ik(\omega)x} \quad (3.47)$$

Substituindo a equação 3.47 na equação 3.3 o problema de autovalor é obtido por

$$\begin{bmatrix} \kappa G A k^2 - \rho A \omega^2 & -ik\kappa G A \\ ik\kappa G A & EI k^2 + \kappa G A - \rho I \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

A partir do polinômio característico da matriz da equação 3.48, tem-se uma relação de dispersão com

$$k^4 - \eta k_F^4 k^2 - k_F^4 (1 - \eta_1 k_G^4) = 0 \quad (3.49)$$

onde

$$k_F = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4}, \quad k_G = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{\kappa G A} \right)^{1/4} \quad (3.50)$$

e

$$\eta = \eta_1 + \eta_2, \quad \eta_1 = \frac{\rho I}{\rho A}, \quad \eta_2 = \frac{EI}{\kappa G A} \quad (3.51)$$

As quatro raízes da equação 3.49 podem ser representadas por

$$\begin{aligned} k_1 = -k_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} k_F \sqrt{\eta k_F^2 + \sqrt{\eta^2 k_F^4 + 4(1 - \eta_1 k_G^4)}} = k_t \\ k_3 = -k_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} k_F \sqrt{\eta k_F^2 - \sqrt{\eta^2 k_F^4 + 4(1 - \eta_1 k_G^4)}} = k_e \end{aligned} \quad (3.52)$$

O modo de onda pode ser obtido a partir da primeira linha da equação 3.48 com

$$\beta_p(\omega) = \frac{1}{ik_p} (k_p^2 - k_G^4) = -ir_p(\omega), \quad (p = 1, 2, 3, 4) \quad (3.53)$$

onde

$$r_p(\omega) = \frac{1}{k_p} (k_p^2 - k_G^4) \quad (3.54)$$

Usando os quatro números de onda obtidos pela equação 3.52, a solução geral da equação 3.3 pode ser escrita com

$$\begin{aligned} W(x) &= a_1 e^{-ik_t x} + a_2 e^{+ik_t x} + a_3 e^{-ik_e x} + a_4 e^{+ik_e x} = \mathbf{e}_w(x; \omega) \mathbf{a} \\ \Theta(x) &= \beta_1 a_1 e^{-ik_t x} + \beta_2 a_2 e^{+ik_t x} + \beta_3 a_3 e^{-ik_e x} + \beta_4 a_4 e^{+ik_e x} = \mathbf{e}_\theta(x; \omega) \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^T \\ \mathbf{e}_w(x; \omega) &= [e^{-ik_t x}, e^{+ik_t x}, e^{-ik_e x}, e^{+ik_e x}] \\ \mathbf{e}_\theta(x; \omega) &= \mathbf{e}_w(x; \omega) \mathbf{B}(\omega) \\ \mathbf{B}(\omega) &= \text{diag}[\beta_p(\omega)] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Os deslocamentos nodais espectrais e as rotações nodais espectrais de uma viga de Timoshenko de comprimento L (Figura 3.3), podem ser alocados em um vetor de deslocamento \mathbf{d} com

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \Theta_1 \\ W_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W(0) \\ \Theta(0) \\ W(L) \\ \Theta(L) \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

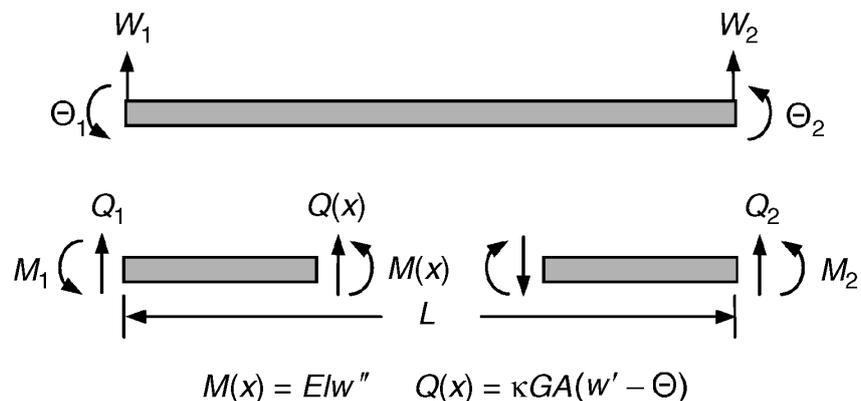


Figura 3.3 – Conversão de sinal para o elemento viga de Timoshenko.

Substituindo a equação 3.55 no lado direito da equação 3.57, tem-se

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_w(0; \omega) \\ \mathbf{e}_\theta(0; \omega) \\ \mathbf{e}_w(L; \omega) \\ \mathbf{e}_\theta(L; \omega) \end{Bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}_T(\omega) \mathbf{a} \quad (3.58)$$

onde

$$\mathbf{H}_T(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ir_t & ir_t & -ir_e & ir_e \\ e_t & e_t^{-1} & e_e & e_e^{-1} \\ -ir_t e_t & ir_t e_t^{-1} & -ir_e e_e & ir_e e_e^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

sendo as variáveis e_t , e_e , r_t e r_e definidas por

$$\begin{aligned} e_t &= e^{-iktL}, & e_e &= e^{-ikeL} \\ r_t &= \frac{1}{k_t}(k_t^2 - k_G^4), & r_e &= \frac{1}{k_e}(k_e^2 - k_G^4) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Usando a equação 3.58, o vetor de constante \mathbf{a} pode ser eliminado da equação 3.55 para expressar a solução geral com

$$W(x) = \mathbf{N}_w(x; \omega) \mathbf{d}, \quad \Theta(x) = \mathbf{N}_\theta(x; \omega) \mathbf{d} \quad (3.61)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_w(x; \omega) &= \mathbf{e}_w(x; \omega) \mathbf{H}_T^{-1} \\ \mathbf{N}_\theta(x; \omega) &= \mathbf{e}_\theta(x; \omega) \mathbf{H}_T^{-1} = \mathbf{e}_w(x; \omega) \mathbf{B}(\omega) \mathbf{H}_T^{-1} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Da equação 3.44, tem-se que a relação de $W(x)$ e $\Theta(x)$ com os componentes espectrais de momento fletor e força de cisalhamento transversal é dada por

$$Q = \kappa GA(W' - \Theta), \quad M = EI\Theta' \quad (3.63)$$

As forças de cisalhamento transversais nodais espectrais e os momentos fletores definidos para a viga finita podem ser relacionados às forças e momentos correspondentes definidos pela resistência de materiais como (HIBBELER, 2010)

$$\mathbf{f}_c(\omega) = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ +Q(L) \\ +M(L) \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

Aplicando a equação 3.61 na equação 3.63, considerando o lado direito da equação 3.67, tem-se a seguinte relação

$$\mathbf{S}_T(\omega)\mathbf{d} = \mathbf{f}_c(\omega) \quad (3.65)$$

onde $\mathbf{S}_T(\omega)$ é a matriz de elemento espectral para viga de Timoshenko, e também pode ser obtida por

$$\mathbf{S}_T(\omega) = \mathbf{G}_T(\omega)\mathbf{H}_T^{-1}(\omega) \quad (3.66)$$

onde

$$\mathbf{G}_T(\omega) = \begin{bmatrix} G_{T11} & G_{T12} & G_{T13} & G_{T14} \\ G_{T12} & G_{T22} & G_{T23} & G_{T24} \\ G_{T13} & G_{T32} & G_{T33} & G_{T34} \\ G_{T14} & G_{T42} & G_{T43} & G_{T44} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

onde

$$\begin{aligned} G_{T11} &= -\kappa GA(-ik_t - \beta_1), & G_{T12} &= -\kappa GA(ik_t - \beta_2) \\ G_{T13} &= -\kappa GA(-ik_e - \beta_3), & G_{T14} &= -\kappa GA(ik_e - \beta_4) \\ G_{T21} &= -EI(-ik_t\beta_1), & G_{T22} &= -EI(ik_t\beta_2) \\ G_{T23} &= -EI(-ik_e\beta_3), & G_{T24} &= -EI(ik_e\beta_4) \\ G_{T31} &= -G_{T11}e^{-ik_tL}, & G_{T32} &= -G_{T12}e^{-ik_tL} \\ G_{T33} &= -G_{T13}e^{-ik_eL}, & G_{T34} &= -G_{T14}e^{-ik_eL} \\ G_{T41} &= -G_{T21}e^{-ik_tL}, & G_{T42} &= -G_{T22}e^{-ik_tL} \\ G_{T43} &= -G_{T23}e^{-ik_eL}, & G_{T44} &= -G_{T24}e^{-ik_eL} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Os termos $\mathbf{G}_T(\omega)$ e $\mathbf{H}_T(\omega)$ representam as matrizes que contém as forças e os deslocamentos espectrais em todos os nós da viga de Timoshenko, respectivamente.

3.4 Método da Matriz de Transferência Espectral

Segundo Usik (2000), o Método da Matriz de Transferência (MMT) combinado com o MEE resulta em uma análise dinâmica denominada de "Método da Matriz de Transferência Espectral (MMTE)". A vantagem do MMTE é baseada na redução drástica do número de graus de liberdade, visto que o comprimento da estrutura é resumida em subestruturas que possuem características periódicas. Neste método, a modelagem de elemento espectral da k -ésima célula de uma rede pode ser realizada pela montagem dos modelos de elemento espectral de todos os membros da rede nas coordenadas globais na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{EE}(\omega) & \mathbf{S}_{ED}(\omega) \\ \mathbf{S}_{DE}(\omega) & \mathbf{S}_{DD}(\omega) \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_E \\ \mathbf{d}_D \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_E \\ \mathbf{f}_D \end{Bmatrix}_k \quad (3.69)$$

onde \mathbf{d}_E e \mathbf{d}_D correspondem a todos os GDLs nodais espectrais especificados nos nós da seção esquerda e da seção direita da célula da rede, respectivamente. Da mesma forma, \mathbf{f}_E e \mathbf{f}_D denotam as forças e momentos nodais espectrais especificados nos nós na seção esquerda e na seção direita da célula da rede, respectivamente.

A equação 3.69 pode ser reescrita no espectro dos GDLs nodais e forças que satisfaçam a continuidade de equilíbrio usada para a matriz de transferência

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{EE}(\omega) & \mathbf{S}_{ED}(\omega) \\ \mathbf{S}_{DE}(\omega) & \mathbf{S}_{DD}(\omega) \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_E \\ \mathbf{d}_D \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} -\mathbf{f}_E \\ +\mathbf{f}_D \end{Bmatrix}_k \quad (3.70)$$

A equação 3.70 pode ser transformada na forma de relação de entrada e saída com

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_D \\ \mathbf{f}_D \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{ED}^{-1}\mathbf{S}_{EE} & -\mathbf{S}_{ED}^{-1} \\ \mathbf{S}_{DE} - \mathbf{S}_{DD}\mathbf{S}_{ED}^{-1} & -\mathbf{S}_{DD}\mathbf{S}_{ED}^{-1} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_E \\ \mathbf{f}_E \end{Bmatrix}_k \quad (3.71)$$

ou simplesmente

$$\mathbf{p}_{kD} = \mathbf{t}_k(\omega)\mathbf{p}_{kE} \quad (3.72)$$

onde

$$\mathbf{p}_{kD} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_D \\ \mathbf{f}_D \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{kD} \\ \mathbf{f}_{kD} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{kE} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_E \\ \mathbf{f}_E \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{kE} \\ \mathbf{f}_{kE} \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

e

$$\mathbf{t}_k(\omega) = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{ED}^{-1}\mathbf{S}_{EE} & -\mathbf{S}_{ED}^{-1} \\ \mathbf{S}_{DE} - \mathbf{S}_{DD}\mathbf{S}_{ED}^{-1} & -\mathbf{S}_{DD}\mathbf{S}_{ED}^{-1} \end{bmatrix}_k \quad (3.74)$$

onde $\mathbf{t}_k(\omega)$ é a matriz de transferência derivada do modelo de elemento espectral para a k -ésima célula de rede relacionando o vetor de estado \mathbf{p}_{kE} (entrada) ao vetor de estado \mathbf{p}_{kD} (saída). Logo, os vetores de estado satisfazem

$$\mathbf{p}_{(k-1)D} = \mathbf{p}_{kE} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.75)$$

Se a subestrutura for de uma estrutura de rede periódica com N células de rede idênticas, cada célula de rede terá a matriz de transferência com a seguinte relação

$$\mathbf{t}_1(\omega) = \mathbf{t}_2(\omega) = \dots = \mathbf{t}_N(\omega) \quad (3.76)$$

Com a série de matrizes de transferência definida, utiliza-se o conceito do MMT para transformar as subestruturas em uma única estrutura equivalente. Para esse fim, as subestruturas da rede são representadas com

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{1D} &= \mathbf{t}_1(\omega)\mathbf{p}_{1E} \\ \mathbf{p}_{2D} &= \mathbf{t}_2(\omega)\mathbf{p}_{2E} \\ & \vdots \\ & \vdots \\ \mathbf{p}_{(N-1)D} &= \mathbf{t}_{(N-1)}(\omega)\mathbf{p}_{(N-1)E} \\ \mathbf{p}_{ND} &= \mathbf{t}_N(\omega)\mathbf{p}_{NE} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Utilizando a equação 3.4, tem-se que o vetor de estado \mathbf{p}_{ND} na extremidade direita de uma rede pode ser relacionada ao vetor de estado \mathbf{p}_{NE} em sua extremidade esquerda para uma subestrutura,

$$\mathbf{p}_{ND} = \mathbf{T}(\omega)\mathbf{p}_{1E} \quad (3.78)$$

onde

$$\mathbf{T}(\omega) = \mathbf{t}_N(\omega)\mathbf{t}_{N-1}(\omega) \dots \mathbf{t}_2(\omega)\mathbf{t}_1(\omega) \quad (3.79)$$

onde $\mathbf{T}(\omega)$ é a matriz de transferência global para todas as subestruturas da rede. Se a subestrutura de rede corresponder a uma estrutura periódica que consiste em N células idênticas da rede, a matriz de transferência global pode ser ainda mais simplificada com

$$\mathbf{T}(\omega) = \mathbf{t}^N(\omega) \quad (3.80)$$

Particionando a equação 3.4 e considerando $-\mathbf{f}_{1E}$ para satisfazer a matriz de transferência, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{ND} \\ \mathbf{f}_{ND} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{1E} \\ -\mathbf{f}_{1E} \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

Os termos de GDLs e forças nodais espectrais são definidas para a matriz de elemento espectral com

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}(\omega) \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

onde

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{11} & -\mathbf{T}_{12}^{-1} \\ \mathbf{T}_{21} - \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1} & \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

onde $\mathbf{S}(\omega)$ é a matriz do elemento espectral global.

A abordagem com a matriz de transferência não requer conhecimento prévio das soluções de onda ou das funções de forma exatas do problema. Contudo, se todos os autovetores da matriz $\mathbf{S}(\omega)$ forem lineares, os números de onda e os modos de onda podem ser calculados (ZHONG; WILLIAMS, 1995).

3.5 Estruturas inteligentes

3.5.1 Viga acoplada com uma camada piezoelétrica

Neste trabalho, duas formulações em MEE são utilizadas para descrever uma viga acoplada com uma camada piezoelétrica. A primeira formulação retratada é oriunda de Lee e Kim (2000), e se aplica com eficiência para representar uma estrutura composta de um PZT acoplado em toda superfície de uma viga. Já para casos em que o PZT não é acoplado com uniformidade, utiliza-se a formulação oriunda de Lee (2009).

3.5.1.1 Formulação Lee-Kim

As relações de acoplamento de uma viga de Euler-Bernouli com um piezoelétrico podem ser associadas com as relações de acoplamento de uma viga com uma barra, conforme mostra a Figura 3.4. Contudo, as propriedades e as geometrias devem ser uniformes com continuidade perfeita entre as interfaces, desprezando as deformações por cisalhamento e as inércias rotacionais (LEE; KIM, 2000).

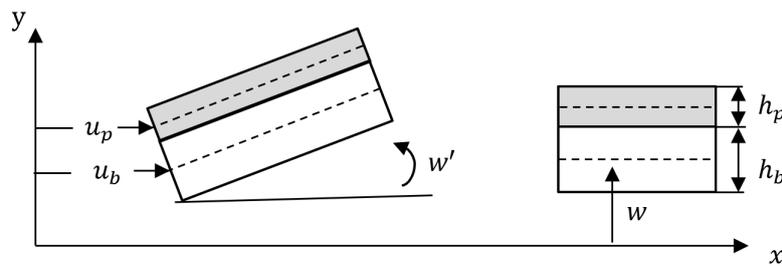


Figura 3.4 – Elemento viga acoplado a um piezoelétrico.

Segundo Lee e Kim (2000), para a condição de acoplamento perfeito, pode-se afirmar que as duas camadas (viga-pzt) apresentaram o mesmo deslocamento transversal $w(x, t)$. Com isso, as relações cinemáticas das espessuras com os deslocamentos podem ser expressas da seguinte forma:

$$u_p = u_b - \frac{h}{2}w' \quad (3.84)$$

onde u_p e u_b são os deslocamentos axiais do piezoelétrico e da viga, e a altura $h = h_p + h_b$ é a soma das espessuras do piezoelétrico com a da viga, respectivamente.

As relações constitutivas lineares usadas para representar o comportamento eletromecânico unidimensional do material piezoelétrico são expressas com

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ E_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^D & -h_{31} \\ -h_{31} & \beta_{33}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ D \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

onde σ é a tensão mecânica, ϵ é a deformação mecânica, D é deslocamento elétrico, E_c é o campo elétrico, C_{11}^D é a rigidez elástica, β_{33}^S é a constante dielétrica, e $h_{31} = d_{31}E_p\beta_{33}^S$ é a constante piezoelétrica.

Para se obter uma equação do movimento de uma estrutura com multicamadas, o princípio variacional de Hamilton pode ser utilizado com a seguinte expressão (MEIROVITCH, 2003),

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta(T - U) + \delta W) dt = 0 \quad (3.86)$$

onde T e U são as energias cinética e potencial, respectivamente, e δW é o trabalho virtual, ambos definidos com as seguintes formas

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_b A_b (\dot{u}_b^2 + \dot{w}^2) + \rho_p A_p (\dot{u}_p^2 + \dot{w}^2)] dx \quad (3.87)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [E_b A_b u_b'^2 + E_b I_b w''^2 + C_{11}^D I_p w''^2 + C_{11}^D A_p u_p'^2 - 2A_p h_{31} D u_p' + A_p \beta_{33}^S D^2] dx \quad (3.88)$$

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} bV(t) \delta D dx + N \delta u_b|_L^0 + M \delta \theta|_L^0 + Q \delta w|_L^0 \quad (3.89)$$

onde os subscritos b e p representam os elementos viga e piezoelétrico, respectivamente. Os termos E , ρ , A , I são o módulo de Young, a densidade de massa, a área de seção transversal e o momento de inércia, nesta ordem. A voltagem do piezoelétrico é representada por $V(t)$. Por simplificação de notação, as derivadas parciais espaciais são representadas por ($'$), enquanto que as derivadas parciais temporais são representadas por ponto ($\dot{}$).

Aplicando a equação 3.84 nas energias para eliminar o deslocamento u_p , e resolvendo o princípio de Hamilton da equação 3.86, obtem-se a seguinte relação

$$\begin{aligned} EI w'''' + \rho A \ddot{w} &= -\alpha \ddot{u}_b' + \beta u_b''' + \gamma \ddot{w}'' \\ EA u_b'' - \rho A \ddot{u}_b &= -\alpha \dot{w}' + \beta w''' \end{aligned} \quad (3.90)$$

onde

$$\begin{aligned} EA &= E_b A_b + E_p A_p, & EI &= E_b I_b + C_{11}^D I_p + \frac{1}{4} E_p A_p h^2, \\ \rho A &= \rho_b A_b + \rho_p A_p, & E_p &= C_{11}^D - h_{31}^2 \beta_{33}^S, \\ \gamma &= (1/4) \rho_p A_p h^2, & \alpha &= (1/2) \rho_p A_p h, & \beta &= (1/2) E_p A_p h \end{aligned} \quad (3.91)$$

Com o princípio de Hamilton também é possível fornecer as condições de contorno com,

$$\begin{aligned} N &= \bar{N} & \text{ou} & & u_b &= \bar{u}_b \\ M &= \bar{M} & \text{ou} & & \theta_b &= \bar{\theta}_b \\ Q &= \bar{Q} & \text{ou} & & w &= \bar{w} \end{aligned} \quad (3.92)$$

onde N , M , Q são os resultantes de força axial, momento de flexão e força de cisalhamento transversal, respectivamente. As relações mecânicas e piezoelétricas dessas resultantes podem ser expressas por:

$$N = EAu'_b - \beta w'' - bd_{31}E_p V(t) \quad (3.93)$$

$$M = EIw'' - \beta u'_b + \frac{1}{2} hbd_{31}E_p V(t) \quad (3.94)$$

$$Q = -EIw''' - \alpha \ddot{u}_b + \beta u''_b - \gamma \dot{w}' \quad (3.95)$$

Uma vez definida a equação do movimento para o elemento viga com piezoelétrico acoplado, pode-se utilizar a transformada de Fourier para converter as equações do domínio do tempo para o domínio da frequência. O deslocamento transversal, o deslocamento axial e a voltagem podem ser expressados com os seguintes termos espectrais:

$$w(x, t) = \sum_n^N W(x, \omega_n) e^{-i\omega_n t} \quad (3.96)$$

$$u_b(x, t) = \sum_n^N U(x, \omega_n) e^{-i\omega_n t} \quad (3.97)$$

$$V(t) = \sum_n^N V(\omega_n) e^{-i\omega_n t} \quad (3.98)$$

onde W , U e V são os componentes espectrais de deslocamento transversal, de deslocamento axial e voltagem, respectivamente. Substituindo esses termos espectrais na equação 3.90, tem-se a equação do movimento no domínio da frequência com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} EIW'''' - \omega^2 \rho AW &= \omega^2 (-\gamma W'' + \alpha U') + \beta U''' \\ EAU'' + \omega^2 \rho AU &= \omega^2 \alpha \hat{W}' + \beta W'''' \end{aligned} \quad (3.99)$$

Similar a solução geral para os componentes espectrais na equação 3.6, tem-se a seguinte solução geral para os termos espectrais da equação 3.99,

$$W(x) = \sum_{i=1}^3 A_i e^{k_i x/L} + A_{2i} e^{-k_i x/L} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (3.100)$$

$$U(x) = \sum_{i=1}^3 B_i e^{k_i x/L} + B_{2i} e^{-k_i x/L} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{b} \quad (3.101)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(x, \omega) &= [e^{k_1 x/L}, e^{k_2 x/L}, e^{k_3 x/L}, e^{-k_1 x/L}, e^{-k_2 x/L}, e^{-k_3 x/L}] \\ \mathbf{a} &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \\ \mathbf{b} &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} \end{aligned} \quad (3.102)$$

Um problema de autovalor, semelhante ao da equação equação 3.7, é encontrado quando os termos espectrais são substituídos por soluções gerais. Logo, considerando uma frequência discreta na solução, tem-se uma relação de dispersão de onde se obtém 3 pares de números de ondas $(\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3)$. A relação de dispersão tem a seguinte forma:

$$x_1 k^6 + x_2 k^4 + x_3 k^2 + x_4 = 0 \quad (3.103)$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta^2 - EA EI \\ x_2 &= \omega^2 L^2 (2\alpha\beta - \rho AEI - \gamma EA) \\ x_3 &= \omega^2 L^4 (\alpha^2 \omega^4 + \rho A (EA - \gamma \omega^2)) \\ x_4 &= \omega^4 L^6 \rho A^2 \end{aligned} \quad (3.104)$$

assim, utilizando o manipulador simbólico WolframAlpha os números de onda podem ser expressos com

$$\begin{aligned} \pm k_1 &= (-i2(2^{1/3})(-i + 3^{1/2})x_2^2 + 6(2^{1/3})(1 + i3^{1/2})x_3x_1 - 4x_2(-2x_2^3 + 9x_3x_2x_1 \\ &+ 27x_4x_1^2 + 3(3^{1/2})(x_1^2(-x_3^2x_2^2 - 4x_4x_2^3 + 4x_3^3x_1 + 18x_4x_3x_2x_1 + 27x_4^2x_1^2))^{1/2})^{1/3} \\ &+ i2^{2/3}(i + 3^{1/2})(-2x_2^3 + 9x_3x_2x_1 + 27x_4x_1^2 + 3(3^{1/2})(x_1^2(-x_3^2x_2^2 - 4x_4x_2^3 \\ &+ 4x_3^3x_1 + 18x_4x_3x_2x_1 + 27x_4^2x_1^2))^{1/2})^{2/3}) / (x_1(-2x_2^3 + 9x_3x_2x_1 + 27x_4x_1^2 + 3(3^{1/2}) \\ &(x_1^2(-x_3^2x_2^2 - 4x_4x_2^3 + 4x_3^3x_1 + 18x_4x_3x_2x_1 + 27x_4^2x_1^2))^{1/2})^{1/3})^{1/2} / (2(3^{1/2})); \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \pm k_2 &= (-i2(2^{1/3})(-i + 3^{1/2})x_2^2 + 6(2^{1/3})(1 + i3^{1/2})x_3x_1 - 4x_2(-2x_2^3 + 9x_3x_2x_1 \\ &+ 27x_4x_1^2 + 3(3^{1/2})(x_1^2(-x_3^2x_2^2 - 4x_4x_2^3 + 4x_3^3x_1 + 18x_4x_3x_2x_1 + 27x_4^2x_1^2))^{1/2})^{1/3} \\ &+ i2^{2/3}(i + 3^{1/2})(-2x_2^3 + 9x_3x_2x_1 + 27x_4x_1^2 + 3(3^{1/2})(x_1^2(-x_3^2x_2^2 - 4x_4x_2^3 \\ &+ 4x_3^3x_1 + 18x_4x_3x_2x_1 + 27x_4^2x_1^2))^{1/2})^{2/3}) / (x_1(-2x_2^3 + 9x_3x_2x_1 + 27x_4x_1^2 + 3(3^{1/2}) \\ &(x_1^2(-x_3^2x_2^2 - 4x_4x_2^3 + 4x_3^3x_1 + 18x_4x_3x_2x_1 + 27x_4^2x_1^2))^{1/2})^{1/3})^{1/2} / (2(3^{1/2})); \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \pm k_3 &= (i2(2^{1/3})(i + 3^{1/2})x_2^2 + 6(2^{1/3})(1 - i3^{1/2})x_3x_1 - 4x_2(-2x_2^3 + 9x_3x_2x_1 \\ &+ 27x_4x_1^2 + 3(3^{1/2})(x_1^2(-x_3^2x_2^2 - 4x_4x_2^3 + 4x_3^3x_1 + 18x_4x_3x_2x_1 + 27x_4^2x_1^2))^{1/2})^{1/3} \\ &- i2^{2/3}(-i + 3^{1/2})(-2x_2^3 + 9x_3x_2x_1 + 27x_4x_1^2 + 3(3^{1/2})(x_1^2(-x_3^2x_2^2 - 4x_4x_2^3 \\ &+ 4x_3^3x_1 + 18x_4x_3x_2x_1 + 27x_4^2x_1^2))^{1/2})^{2/3}) / (x_1(-2x_2^3 + 9x_3x_2x_1 + 27x_4x_1^2 + 3(3^{1/2}) \\ &(x_1^2(-x_3^2x_2^2 - 4x_4x_2^3 + 4x_3^3x_1 + 18x_4x_3x_2x_1 + 27x_4^2x_1^2))^{1/2})^{1/3})^{1/2} / (2(3^{1/2})); \end{aligned} \quad (3.107)$$

A relação entre os coeficientes \mathbf{a} e \mathbf{b} das equações 3.100 e 3.101, pode ser demonstrada com

$$b_i = (-1)^i \left\{ \frac{L^4 \rho A \omega^2 + L^2 \gamma \omega^2 k_i^2 + E I k_i^4}{L k_i (L^2 \alpha \omega^2 - \beta k_i^2)} \right\} a_i = \lambda_i(\omega) a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.108)$$

ou simplesmente

$$\mathbf{b} = \text{diag}(\lambda_i) a_i \quad (3.109)$$

A partir das equações 3.100 e 3.101, os deslocamentos nodais espectrais podem ser expressos em termos do coeficiente A_i , conforme a convenção de sinais da Figura 3.5.

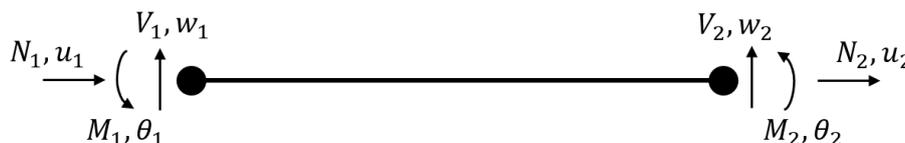


Figura 3.5 – Convenção de sinais do elemento viga com um piezoelétrico acoplado.

A relação de deslocamento nodal leva em conta um vetor definido com,

$$\mathbf{d} = \{U_1, W_1, \Theta_1, U_2, W_2, \Theta_2\}^T \quad (3.110)$$

onde os componente espectrais podem ser relacionados com o vetor de deslocamento \mathbf{d} com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} W(x) &= \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}_{vp}^{-1}(\omega) \mathbf{d} \\ U(x) &= \mathbf{e}(x, \omega) \text{diag}(\lambda_i) \mathbf{H}_{vp}^{-1}(\omega) \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.111)$$

A relação de força e deslocamento também pode ser expressa em termos do coeficiente a_i , com a seguinte representação

$$f_c = \mathbf{G}_{vp}(\omega) \mathbf{a} = [N_1 - N^e \quad Q_1 \quad M_1 + M^e \quad N_2 + N_2^e \quad Q_2 \quad M_2 + M^e] \quad (3.112)$$

onde N_i , Q_i e M_i são os componentes nodais espectrais de força axial, de força cortante e de momento, respectivamente. Os componentes espectrais N^e e M^e são a força axial e o momento fletor de indução piezoelétrica, definidos por:

$$N^e = b d_{31} E_p V, \quad M^e = \frac{1}{2} h b d_{31} E_p V \quad (3.113)$$

Relacionando os componentes espectrais de força e deslocamento em termos de \mathbf{a} , podemos expressar:

$$f_c = \mathbf{G}_{vp}(\omega) \mathbf{H}_{vp}^{-1}(\omega) \mathbf{d} = \mathbf{S}_{vp}(\omega) \mathbf{d} \quad (3.114)$$

onde $\mathbf{S}_{vp}(\omega)$ é a matriz de rigidez espectral dependente da frequência para o elemento viga com um piezoelétrico acoplado. As matrizes $\mathbf{G}_{vp}(\omega)$ e $\mathbf{H}_{vp}(\omega)$ podem ser expressas com

$$\mathbf{G}_{vp}(\omega) = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{11} & p_{12} & p_{12} & p_{13} & p_{13} \\ p_{21} & -p_{21} & p_{22} & -p_{22} & p_{23} & -p_{23} \\ p_{31} & p_{31} & p_{32} & p_{32} & p_{33} & p_{33} \\ -e^{k_1} p_{11} & -e^{-k_1} p_{11} & -e^{k_2} p_{12} & -e^{-k_2} p_{12} & -e^{k_3} p_{13} & -e^{-k_3} p_{13} \\ -e^{k_1} p_{21} & -e^{-k_1} p_{21} & -e^{k_2} p_{22} & -e^{-k_2} p_{22} & -e^{k_3} p_{23} & -e^{-k_3} p_{23} \\ -e^{k_1} p_{31} & -e^{-k_1} p_{31} & -e^{k_2} p_{32} & -e^{-k_2} p_{32} & -e^{k_3} p_{33} & -e^{-k_3} p_{33} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$$\mathbf{H}_{vp}(\omega) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1/L & -k_1/L & k_2/L & -k_2/L & k_3/L & -k_3/L \\ e^{k_1} \lambda_1 & -e^{-k_1} \lambda_1 & e^{k_2} \lambda_2 & -e^{-k_2} \lambda_2 & e^{k_3} \lambda_3 & -e^{-k_3} \lambda_3 \\ e^{k_1} & e^{-k_1} & e^{k_2} & e^{-k_2} & e^{k_3} & e^{-k_3} \\ (e^{k_1} k_1)/L & -(e^{-k_1} k_1)/L & (e^{k_2} k_2)/L & -(e^{-k_2} k_2)/L & (e^{k_3} k_3)/L & -(e^{-k_3} k_3)/L \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

onde

$$\begin{aligned} p_{1i} &= k_i L (\beta k_i - E A L \lambda_i) \\ p_{2i} &= L^2 \omega^2 \gamma k_i + E I k_i^3 - L^3 \omega^2 \alpha \lambda_i - L \beta k_i^2 \lambda_i \\ p_{3i} &= k_i L (L \beta \lambda_i - E I k_i) \end{aligned} \quad (3.117)$$

As matrizes $\mathbf{G}_{vp}(\omega)$ e $\mathbf{H}_{vp}(\omega)$ representam o comportamento de forças e deslocamentos espectrais, respectivamente.

3.5.1.2 Formulação Lee

Para casos de estruturas *smart materials* que utilizam mais de um piezoelétrico, Lee (2009) apresenta uma segunda formulação seguindo as relações de energias cinética e potencial com

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_b A_b (\dot{u}_b^2 + \dot{w}^2) + \rho_p A_p (\dot{u}_p^2 + \dot{w}^2)] dx \quad (3.118)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [E_b A_b u_b'^2 + E_b I_b w''^2 + E_p I_p w''^2 + E_p A_p u_p'^2 + F w'^2] dx \quad (3.119)$$

O trabalho virtual δW das forças externas, forças de restrições e forças de amortecimento viscoso é dado por

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^L p(x, t) \delta w dx + \int_0^L \tau(x, t) \delta u_b dx \\ &- \int_0^L \int_{A_b} c_b \dot{\mathbf{r}}_b \delta \mathbf{r}_b A_b dx - \int_0^L \int_{A_p} c_p \dot{\mathbf{r}}_p \delta \mathbf{r}_p A_p dx + N_1(t) \delta u_b(0, t) \\ &+ N_2(t) \delta u_b(L, t) + M_1(t) \delta w'(0, t) + M_2(t) \delta w'(L, t) \\ &+ Q_1(t) \delta w(0, t) + Q_2(t) \delta w(L, t) + \int_0^L b V(t) \delta D_3 dx \end{aligned} \quad (3.120)$$

onde

$$\mathbf{r}_b = u_b \mathbf{n}_x + w \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{r}_p = u_p \mathbf{n}_x + w \mathbf{n}_z \quad (3.121)$$

onde \mathbf{n}_x e \mathbf{n}_z são vetores unitários, c_b e c_p são os coeficientes de amortecimento viscoso, F é a força de tração axial constante, e $p(x, t)$ e $\tau(x, t)$ são forças externas aplicadas ao longo da viga.

Semelhante ao que acontece na obtenção da equação 3.88, tem-se que substituindo as equações 3.118, 3.119 e 3.120 na equação do princípio de Hamilton (3.86), chega-se a equação do movimento no domínio do tempo dada por

$$\begin{aligned} EI w'''' + \rho A \ddot{w} + c A \dot{w} &= -\alpha \ddot{u}'_b + \beta u'''' + \lambda \ddot{w}'' + c_1 \ddot{w}'' - c_4 \ddot{u}'_b + F w'' + p(x, t) \\ EA u''_b - \rho A \ddot{u}_b - c A \dot{u}_b &= -\alpha \dot{w}' + \beta w'''' - c_4 \dot{w}' - \tau(x, t) \end{aligned} \quad (3.122)$$

onde

$$\begin{aligned} EA &= E_b A_b + E_p A_p, & EI &= E_b I_b + E_p I_p + (1/4) E_p A_p h^2, & c_4 &= (1/2) c_p A_p h, \\ \gamma &= (1/4) \rho_p A_p h^2, & \alpha &= (1/2) \rho_p A_p h, & \beta &= (1/2) E_p A_p h, & c_1 &= (1/4) c_p A_p h^2 \\ \rho A &= \rho_b A_b + \rho_p A_p, & E_p &= C_{11}^D - h_{31}^2 \beta_{33}^{S-1}, & c A &= c_b A_b + c_p A_p, \end{aligned} \quad (3.123)$$

Considerando um elemento de comprimento L para $x = 0$ e $x = L$, as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} Q(0, t) &= -Q_1(t) - F w'(0, t) & \text{ou} & & w(0, t) &= w_1(t) \\ M(0, t) &= -M_1(t) & \text{ou} & & w'(0, t) &= \theta_1(t) \\ N(0, t) &= -N_1(t) & \text{ou} & & u_b(0, t) &= u_1(t) \\ Q(L, t) &= +Q_2(t) - F w'(L, t) & \text{ou} & & w(L, t) &= w_2(t) \\ M(L, t) &= -M_2(t) & \text{ou} & & w'(L, t) &= \theta_2(t) \\ N(L, t) &= -N_2(t) & \text{ou} & & u_b(L, t) &= u_2(t) \end{aligned} \quad (3.124)$$

A força axial resultante $N(x, t)$, o momento fletor $M(x, t)$ e a força cortante transversal $Q(x, t)$ são relacionados com o deslocamento com

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= -EI w'''' - \alpha \ddot{u}_b + \beta u'''' + \gamma \ddot{w}'' - c_4 \dot{u}_b \\ M(x, t) &= EI w'' - \beta u''_b \\ N(x, t) &= EA u'_b - \beta w'' \end{aligned} \quad (3.125)$$

O amortecimento estrutural de cada camada pode ser prontamente levado em consideração usando o módulo de elasticidade complexo como

$$E_b^* = E_b(1 + i\eta_b) \quad E_p^* = E_p(1 + i\eta_p) \quad (3.126)$$

Para transformar as equações governantes no domínio da frequência, utiliza-se as seguintes formas espectrais dos deslocamentos transversal e axial, e das forças e momentos

$$\begin{pmatrix} w(x, t) \\ u_b(x, t) \\ p(x, t) \\ \tau(x, t) \\ Q(x, t) \\ M(x, t) \\ N(x, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{pmatrix} W_n(x, \omega_n) \\ U_n(x, \omega_n) \\ P_n(x, \omega_n) \\ T_n(x, \omega_n) \\ Q_n(x, \omega_n) \\ M_n(x, \omega_n) \\ N_n(x, \omega_n) \end{pmatrix} e^{i\omega_n t} \quad (3.127)$$

Aplicando os termos espectrais da equação 3.127 na equação 3.122, tem-se a equação do movimento no domínio da frequência, expressa por

$$\begin{aligned} EIW'''' - \omega^2 \rho AW + i\omega cAW &= \omega^2 \alpha U' + \beta U''' - \omega^2 \gamma W'' + i\omega c_1 W'' - i\omega c_4 U' \\ &\quad + FW'' + P(x) \quad (3.128) \\ EAU'' + \omega^2 \rho AU - i\omega^2 cAU &= \omega^2 \alpha W' + \beta W'''' - i\omega c_4 W' - T(x) \end{aligned}$$

Na frequência, as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} Q(0, \omega) &= -Q_1(\omega) - FW'(0, \omega) \quad ou \quad W(0, \omega) = W_1(\omega) \\ M(0, \omega) &= -M_1(\omega) \quad ou \quad W'(0, \omega) = \theta_1(\omega) \\ N(0, \omega) &= -N_1(\omega) \quad ou \quad U_b(0, \omega) = U_1(\omega) \\ Q(L, \omega) &= +Q_2(\omega) - FW'(L, \omega) \quad ou \quad W(L, \omega) = W_2(\omega) \\ M(L, \omega) &= -M_2(\omega) \quad ou \quad W'(L, \omega) = \Theta_2(\omega) \\ N(L, \omega) &= -N_2(\omega) \quad ou \quad U_b(L, \omega) = U_2(\omega) \end{aligned} \quad (3.129)$$

No domínio da frequência, a força axial resultante $N(x, t)$, o momento fletor $M(x, t)$ e a força cortante transversal $Q(x, t)$ são relacionados com o deslocamento com

$$\begin{aligned} Q(x, \omega) &= -EIW'''' + \omega^2 \alpha U + \beta U'' - \omega^2 \gamma W' - i\omega c_4 U \\ M(x, t) &= EIW'' - \beta U' \\ N(x, t) &= EAU' - \beta W'' \end{aligned} \quad (3.130)$$

Considerando uma estrutura finita de comprimento L . Os deslocamentos nodais espectrais que satisfazem as condições de contorno do sistema para $x = 0$ e $x = L$, podem ser representados pelo vetor \mathbf{d} , que é definido por:

$$\mathbf{d} = [U_1(0), W_1(0), \theta_1(0), U_2(L), W_2(L), \theta_2(L)]^T \quad (3.131)$$

Da mesma forma, o vetor de forças e momentos nodais espectrais mecânicos é dado por

$$\mathbf{f}_c = [N_1(0), Q_1(0), M_1(0), N_2(L), Q_2(L), M_2(L)]^T \quad (3.132)$$

Para o cálculo das funções de forma no domínio da frequência, considera-se que $P(x)$ e $T(x)$ são iguais a zero. Assim, forma-se a seguinte equação do movimento homogênea

$$\begin{aligned} EIW'''' - \omega^2 \rho AW + i\omega cAW &= \omega^2 \alpha U' + \beta U'''' - \omega^2 \gamma W'' + i\omega c_1 W'' - i\omega c_4 U' \\ EAU'' + \omega^2 \rho AU - i\omega^2 cAU &= \omega^2 \alpha W' + \beta W'''' - i\omega c_4 W' \end{aligned} \quad (3.133)$$

As soluções das equações do movimento no domínio da frequência podem ser realizadas a partir de uma solução geral para os componentes dos deslocamentos espectrais com a seguinte relação:

$$W(x) = \sum_{i=1}^6 a_j e^{-ik_j x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (3.134)$$

$$U(x) = \sum_{i=1}^6 r_j a_j e^{-ik_j x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{R} \mathbf{a} \quad (3.135)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(x, \omega) &= [e^{-ik_1 x}, e^{-ik_2 x}, e^{-ik_3 x}, e^{-ik_4 x}, e^{-ik_5 x}, e^{-ik_6 x}] \\ \mathbf{a} &= [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]^T \\ \mathbf{R} &= \text{diag} \left[\frac{-\omega k_j c_4 - i\omega^2 k_j \alpha + ik_j^3 \beta}{-k_j^2 EA + \omega^2 \rho A - i\omega c_4 A} \right] \end{aligned} \quad (3.136)$$

Através da solução geral aplicada na equação de movimento, uma equação característica com um problema de autovalor é obtida, e os números de onda $k_i (i = 1, 2, 3, \dots, 6)$ são determinados pelas raízes da seguinte expressão:

$$x_1 k^6 + x_2 k^4 + x_3 k^2 + x_4 = 0 \quad (3.137)$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta^2 - EAEI \\ x_2 &= \omega^2 (EA\gamma + EI\rho A - 2\alpha\beta) - i\omega (EIc_4 A + EA c_1 - 2\beta c_4) - EAF \\ x_3 &= \omega^4 (\alpha^2 - \gamma\rho A) + i\omega^3 (\rho A c_1 + \gamma c_4 A - 2\alpha c_4) + \omega^2 (EA\rho A + c_4 A c_1 + \\ &\quad F\rho A - c_4^2) - i\omega c_4 A (EA + F) \\ x_4 &= -\rho A^2 \omega^4 + 2i\omega^3 \rho A c_4 A + \omega^2 c_4 A^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.138)$$

assim, utilizando o manipulador simbólico WolframAlpha os números de onda podem ser expressos com

$$\begin{aligned} \pm k_1 &= (-x_2 / (3x_1) + (2^{1/3} x_2^2) / (3x_1 (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 \\ &\quad + 3x_1 x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) - (2^{1/3} * x_3) / (-2x_2^3 \\ &\quad + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1 x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 * x_3 \\ &\quad - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3} + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1 x_3)^3 \\ &\quad + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3} / (32^{1/3} x_1))^{1/2}; \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned}
\pm k_2 = & (-x_2/(3x_1) - x_2^2/(3(2^{2/3})x_1(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 \\
& + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) + (ix_2^2)/(2^{2/3}3^{1/2}x_1(-2x_2^3 \\
& + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) \\
& + x_3/(2^{2/3}(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 \\
& - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) - (i3^{1/3}x_3)/(2^{2/3}(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 \\
& + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) - (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 \\
& - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}/(6(2^{1/3})x_1) \\
& - ((i/2)(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 \\
& - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3})/(2^{1/3}3^{1/2}x_1))^{1/2}; \tag{3.140}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pm k_3 = & (-x_2/(3x_1) - x_2^2/(3(2^{2/3})x_1(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 \\
& + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) - (ix_2^2)/(2^{2/3}3^{1/2}x_1(-2x_2^3 \\
& + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) \\
& + x_3/(2^{2/3}(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 \\
& - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) + (i3^{1/3}x_3)/(2^{2/3}(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 \\
& + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) - (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 \\
& - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}/(6(2^{1/3})x_1) \\
& + ((i/2)(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 \\
& - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3})/(2^{1/3}3^{1/2}x_1))^{1/2}; \tag{3.141}
\end{aligned}$$

Relacionando os deslocamentos nodais espectrais em termos de \mathbf{a} com o vetor \mathbf{d} , obtém-se

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}_{vp2}(\omega) \tag{3.142}$$

onde

$$\mathbf{H}_{vp2}(\omega) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_1 & -ik_2 & -ik_3 & -ik_4 & -ik_5 & -ik_6 \\ e^{-ik_1L}r_1 & e^{-ik_2L}r_2 & e^{-ik_3L}r_3 & e^{-ik_4L}r_4 & e^{-ik_5L}r_5 & e^{-ik_6L}r_6 \\ e^{-ik_1L}r_1 & e^{-ik_2L} & e^{-ik_3L} & e^{-ik_4L} & e^{-ik_5L} & e^{-ik_6L} \\ -ik_1e^{-ik_1L} & -ik_2e^{-ik_2L} & -ik_3e^{-ik_3L} & -ik_4e^{-ik_4L} & -ik_5e^{-ik_5L} & -ik_6e^{-ik_6L} \end{bmatrix} \tag{3.143}$$

Com o conhecimento da interação dinâmica de cada componente nodal, a seguinte matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral pode ser montada (LEE, 2009),

$$\mathbf{S}_{vp2}(\omega) = \mathbf{H}_{vp2}^{-T}(\omega)\mathbf{D}(\omega)\mathbf{H}_{vp2}^{-1}(\omega) \tag{3.144}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\omega) = & -EAR\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{K}\mathbf{R} + EIK^2\mathbf{E}_g\mathbf{K}^2 - i\beta(\mathbf{K}^2\mathbf{E}_g\mathbf{K}\mathbf{R} \\
& + \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{K}^2) - \omega^2[\rho A(\mathbf{E}_g + \mathbf{R}\mathbf{E}_g\mathbf{R}) + i\alpha(\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{E}_g\mathbf{K}) \\
& - \lambda\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{K}] + i\omega[cA(\mathbf{E}_g + \mathbf{R}\mathbf{E}_g\mathbf{R}) - c_1\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{K} \\
& + ic_4(\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{E}_g\mathbf{K})] - F\mathbf{R}\mathbf{E}_g\mathbf{R} \\
\mathbf{K}^2 = & [\mathbf{K} = \text{diag}(k_i)]^2 \\
\mathbf{E}_g(\omega) = & \int_0^L \mathbf{e}^T(x, \omega)\mathbf{e}(x, \omega)dx
\end{aligned} \tag{3.145}$$

Definida a matriz de um elemento espectral $\mathbf{S}_{vp2}(\omega)$, pode-se obter a matriz global que representa uma viga discretizada com o número de elementos de interesse, a partir do procedimento de montagem similar ao utilizado no MEF. Então, a equação global pode ser escrita com

$$\mathbf{S}_{vp2}(\omega)\mathbf{d}(\omega) = \mathbf{f}_c(\omega) \tag{3.146}$$

sendo

$$\mathbf{f}_c(\omega) = \mathbf{G}_{vp2}(\omega)\mathbf{a} \tag{3.147}$$

onde $\mathbf{G}_{vp2}(\omega)$ é a matriz global contendo as forças espectrais em todos os nós. Logo, pode-se obter as relações de os deslocamentos e as forças nodais, similarmente a equação 3.41.

3.5.2 Viga acoplada com duas camadas piezoelétricas

Para representar uma estrutura composta de um elemento viga com duas camadas de piezoelétricos acoplados, Wu e Li (2015) considera que as relações de acoplamento obedecem condições de continuidade e de acoplamento perfeito semelhante ao caso de viga acoplada com uma camada piezoelétrica, porém considera-se a adição de deformações por cisalhamento em função da geometria demonstrada na Figura 3.6.

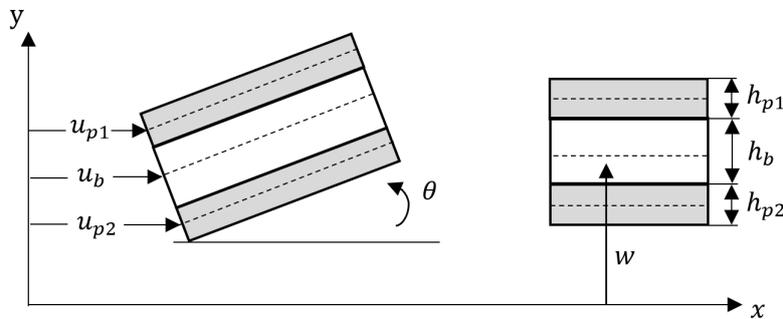


Figura 3.6 – Elemento de viga acoplado com duas camadas piezoelétricas.

A junção elétrica do circuito elétrico externo com as camadas piezoelétricas superior e inferior podem ser conectadas em configuração série ou paralelo, conforme mostram as Figuras 4.1b e 4.1c, respectivamente. A adoção de cada configuração remete a uma

propriedade específica na rigidez da estrutura, visto que acontece diferentes interações entre as capacitâncias de cada piezoelétrico C_p^T (WU; LI, 2015).

As equações constitutivas das camadas piezoelétricas apresentam a seguinte relação

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_p \\ \gamma_p \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^E & 0 & d_{31} \\ 0 & S_{55}^E & 0 \\ d_{31} & 0 & \epsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \tau_p \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.148)$$

onde ϵ_p é a tensão normal, γ_p é a tensão de cisalhamento, D_3 é o deslocamento elétrico, σ_p é a deformação normal, τ_p é a deformação de cisalhamento, E_3 é a intensidade do campo elétrico, ϵ_{33}^T é a constante de permissividade, d_{31} é a constante piezoelétrica, e S_{11}^E e S_{55}^E são as constantes de conformidade elástica.

Semelhante ao caso do elemento viga acoplada com uma camada piezoelétrica (viga-PZT), tem-se que as relações de energias cinética e potencial associadas ao princípio de Hamilton, equação 3.86, podem expressar o comportamento dinâmico da estrutura viga acoplada com duas camadas piezoelétricas (PZT-viga-PZT). Logo, a equação do movimento pode ser representada por

$$\begin{aligned} \kappa GA \left[\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} &= 0 \\ D_t \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + \kappa GA \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \theta(x, t) \right] - \rho I \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.149)$$

onde

$$\begin{aligned} GA &= G_b b h_b + 2G_p b h_p & \rho A &= \rho_b b h_b + 2\rho_p b h_p & \rho I &= \rho_b I_b + 2\rho_p I_p \\ D_{t1} &= E_b I_b + 2C_{11}^D I_p - 2A_p \bar{h}^2 h_{31}^2 \beta_{33} & D_{t2} &= E_b I_b + 2C_{11}^E I_p \end{aligned} \quad (3.150)$$

onde κ é fator de cisalhamento, G é o módulo de cisalhamento, e D_{t1} e D_{t2} são os deslocamentos elétricos para as condições de circuito aberto e curto-circuito, respectivamente.

Aplicando na equação 3.149 as mesmas relações de componentes espectrais das equações 3.96, 3.97 e 3.98, tem-se as equações do movimento no domínio da frequência com

$$\begin{aligned} \kappa GA \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial x^2} \right] - \rho A \omega^2 W &= 0 \\ D_t \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial x^2} + \kappa GA \frac{\partial W}{\partial x} + (\rho I \omega^2 - \kappa GA) \Theta &= 0 \\ V &= g(\Theta(L) - \Theta(0)) \end{aligned} \quad (3.151)$$

onde g é a relação elétrica dada por

$$g = \frac{i\omega R d_{31} \bar{h} b}{S_{11}^E (1 + i\omega R C_p)} \quad (3.152)$$

Para transformar as variáveis do domínio espacial para a solução espectral, o deslocamento e rotação são assumidos da seguinte forma

$$\begin{aligned} W &= A_j e^{ik_j x} \\ \Theta &= \alpha_i A_j e^{ik_j x} \end{aligned} \quad (3.153)$$

onde A_j e α_i são os coeficientes de modo de onda, e k_j é o número de onda definido por

$$\pm k_t = \sqrt{\frac{\kappa GA \rho I \omega^2 + D_t \rho A \omega^2 + \sqrt{(\kappa GA \rho I \omega^2 + D_t \rho A \omega^2)^2 - 4 D_t \kappa GA \rho A \omega^2 (\rho I \omega^2 - \kappa GA)}}{2 D_t \kappa GA}} \quad (3.154)$$

$$\pm k_e = \sqrt{\frac{\kappa GA \rho I \omega^2 + D_t \rho A \omega^2 - \sqrt{(\kappa GA \rho I \omega^2 + D_t \rho A \omega^2)^2 - 4 D_t \kappa GA \rho A \omega^2 (\rho I \omega^2 - \kappa GA)}}{2 D_t \kappa GA}} \quad (3.155)$$

Resultantes das equações características os quatro números de ondas podem ser relacionados com os coeficientes de modos de onda com a seguinte forma

$$\alpha_j = ik_j + \frac{\rho A \omega^2}{i \kappa G A k_j}, \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (3.156)$$

Com base nos números de ondas as soluções da equação 3.153 pode relacionar o deslocamento e a rotação com

$$W(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A_2 e^{ik_2 x} + A_3 e^{ik_3 x} + A_4 e^{ik_4 x} \quad (3.157)$$

$$\Theta(x) = R_1 A_1 e^{ik_1 x} + R_2 A_2 e^{ik_2 x} + R_3 A_3 e^{ik_3 x} + R_4 A_4 e^{ik_4 x} \quad (3.158)$$

Conforme a convenção de sinais da Figura 3.7, os deslocamentos e as forças nodais espectrais podem ser expressos com

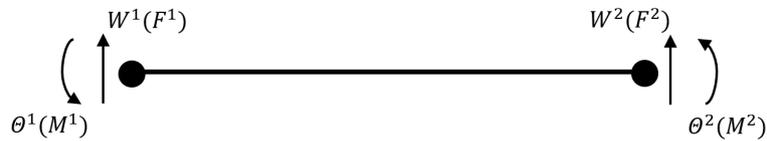


Figura 3.7 – Convenção de sinais do elemento viga com duas camadas piezoelétricas acopladas.

$$\begin{aligned} W_1 &= W|_{x=0} & \Theta_1 &= \Theta|_{x=0} & F_1 &= -F|_{x=0} & M_1 &= -M|_{x=0} \\ W_2 &= W|_{x=L} & \Theta_2 &= \Theta|_{x=L} & F_2 &= -F|_{x=L} & M_2 &= -M|_{x=L} \end{aligned} \quad (3.159)$$

onde a força de cisalhamento e o momento fletor no domínio da frequência são os seguintes:

$$F = \kappa GA \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \theta \right), \quad M = D_t \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\bar{h} b d_{31}}{S_{11}^E} V \quad (3.160)$$

Substituindo as equações 3.157 e 3.158 nas relações nodais da equação 3.159, obtém-se a relação entre forças e deslocamentos nodais com

$$\begin{Bmatrix} F^1 \\ M^1 \\ F^2 \\ M^2 \end{Bmatrix} = [\mathbf{S}_{pvp}] \begin{Bmatrix} W^1 \\ \Theta^1 \\ W^2 \\ \Theta^2 \end{Bmatrix} \quad (3.161)$$

onde $\mathbf{S}_{pvp}(\omega)$ é a matriz dinâmica de rigidez espectral do elemento viga com duas camadas de piezoelétricos, e é expressa por (WU; LI, 2015),

$$\mathbf{S}_{pvp}(\omega) = \mathbf{G}_{pvp}(\omega)\mathbf{H}_{pvp}^{-1}(\omega) + g\frac{\bar{h}bd_{31}}{S_{11}^E}\mathbf{I} \quad (3.162)$$

onde as matrizes $\mathbf{G}_{pvp}(\omega)$, $\mathbf{H}_{pvp}(\omega)$ e \mathbf{I} são dadas por

$$\mathbf{G}_{pvp}(\omega) = \begin{bmatrix} -\kappa GA(\alpha_1 - ik_1) & -\kappa GA(\alpha_2 - ik_2) & \dots & -\kappa GA(\alpha_4 - ik_4) \\ -D_t\alpha_1 ik_1 & -D_t\alpha_2 ik_2 & \dots & -D_t\alpha_4 ik_4 \\ \kappa GA(\alpha_1 - ik_1)e^{ik_1L} & \kappa GA(\alpha_2 - ik_2)e^{ik_2L} & \dots & \kappa GA(\alpha_j - ik_4)e^{ik_4L} \\ D_t\alpha_1 ik_1 e^{ik_1L} & D_t\alpha_2 ik_2 e^{ik_2L} & \dots & D_t\alpha_4 ik_4 e^{ik_4L} \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

$$\mathbf{H}_{pvp}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ e^{ik_1L} & e^{ik_2L} & e^{ik_3L} & e^{ik_4L} \\ \alpha_1 e^{ik_1L} & \alpha_2 e^{ik_2L} & \alpha_3 e^{ik_3L} & \alpha_4 e^{ik_4L} \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

Os números de onda adotados obedecem as ordens $k_1 = k_t = -k_2$ e $k_3 = k_e = -k_4$.

4 Circuito Shunt

Neste capítulo são abordados os tipos de circuitos *shunt* utilizados para promover controle vibracional e de propagação de onda, bem como, as convergências de energia mecânica e elétrica relacionadas nas formulações piezoelétricas com as impedâncias dos circuitos *shunts*. Também são abordadas as relações nodais dinâmicas de junção da estrutura com a conexão do circuito *shunt*.

4.1 Relações de acoplamento do circuito *shunt*

A representação matemática da conexão de um circuito elétrico *shunt* em um piezoelétrico, parte da relação de energia com a deformação mecânica. A equação do movimento viga-PZT com o circuito elétrico *shunt* é dada por

$$\begin{aligned} EIw''''(t) + \rho A\ddot{w}(t) + \Gamma V(t) &= -\alpha\ddot{u}'_b(t) + \beta u'''_b(t) + \gamma\ddot{w}''(t) \\ EAu''_b(t) - \rho A\ddot{u}_b(t) + \Gamma V(t) &= -\alpha\dot{w}'(t) + \beta w'''(t) \\ +\Gamma\dot{x}(t) + C_p^T V(t) &= I(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $\Gamma = A(h_{31}/\beta_{33}^S)/L$ $C_p^T = A(C_{11}^D - h_{31}^2\beta_{33}^S)$.

A equação 4.1 pode ser particularizada para um movimento harmônico e convertida para o domínio da frequência, conforme demonstrado nas seções 3.5.1 e 3.5.2. Assim, a suposição de movimento harmônico correspondente para força e corrente generalizadas é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\omega)\mathbf{d} - \mathbf{S}_{SH}(\omega)V(\omega) &= f(\omega) \\ i\omega\mathbf{S}_{SH}(\omega)\mathbf{d} + i\omega C_p^T V(\omega) &= I(\omega) \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde x é o deslocamento nodal generalizado, $f(\omega)$ é a força generalizada, $I(\omega)$ é a corrente no domínio espectral, e $V(\omega)$ é a voltagem. Como não há operadores derivativos ou energia elétrica alimentando o sistema, o circuito *shunt* parte da relação entre corrente e impedâncias gerais $Z^{EL}(\omega) = V(\omega)/I(\omega)$. Logo, a equação 4.2 pode ser representado com a seguinte expressão

$$\left[\mathbf{S}(\omega) + \mathbf{S}_{SH} \right] \mathbf{d} = f(\omega) \quad (4.3)$$

onde \mathbf{S}_{SH} é a matriz de rigidez dinâmica do circuito *shunt*, definida por:

$$\mathbf{S}_{SH}(\omega) = \begin{bmatrix} \chi_N N_w(x_0; \omega) \\ 0 \\ -\chi_M N_w(x_0; \omega) \\ -\chi_N N_w(x_0; \omega) \\ 0 \\ \chi_M N_w(x_0; \omega) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Conforme a relação nodal da equação 3.36, o componente espectral W pode ser substituído pela função de forma e pelo vetor de deslocamento. Assim, as relações de forças e momentos nodais do piezoelétrico são dadas por:

$$N_p = \frac{k_{ij}^2 i\omega Z^{EL} b_p d_{31} E_p}{1 + i\omega C_p^T Z^{EL}} = \chi_N N_w(x_0; \omega) \mathbf{d} \quad (4.5)$$

$$M_p = \frac{k_{ij}^2 i\omega Z^{EL} h b_p d_{31} E_p}{2 + 2i\omega C_p^T Z^{EL}} = \chi_M N_w(x_0; \omega) \mathbf{d} \quad (4.6)$$

4.2 Modelagem piezoelétrica

O comportamento de conversão de energia mecânica em energia elétrica e vice-versa pode ser representado de forma matricial envolvendo os vetores das variáveis associadas (HAGOOD; FLOTOW, 1991; JAFFE; COOK; JAFFE, 1971). A expressão geral para um piezoelétrico linear é dada com a seguinte relação

$$\begin{bmatrix} D \\ S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^T & d \\ d_t & s^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c \\ T \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

onde D é o vetor de deslocamento elétrico (C/m^2), T é o vetor de tensões (N/m^2), E_c é o vetor de campo elétrico (V/m), S é o vetor de deformações materiais, ϵ^T é a matriz com constantes dielétricas, s^E é a matriz de conformidade da piezocerâmica, e d é a matriz de constantes piezoelétricas. Os subscritos $()^T$ e $()^E$ representam os valores constantes de tensão mecânica e campo elétrico, respectivamente.

Aplicando a transformada de Laplace na equação 4.7 e usando as relações de corrente I e tensão V para eliminar os termos E e D , obtém-se a seguinte equação geral para um piezoelétrico

$$\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{EL} & sAd \\ d_t L^{-1} & s^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

onde Y^{EL} é a admitância elétrica geral, L^{-1} é uma matriz diagonal de comprimentos piezoelétricos, A é a matriz diagonal das áreas das superfícies e s é o parâmetro de Laplace. Com isso, tem-se que a relação geral de admitância elétrica parte da seguinte soma de admitâncias

$$Y^{EL} = Y^P + Y^{SH} \quad (4.9)$$

onde Y^P é a admitância correspondente ao piezoeletrico e Y^{SH} é a admitância do circuito externo conectado ao piezoeletrico, também conhecido como *shunt*.

As admitâncias são inversamente proporcionais às impedâncias, $Y^{EL} = 1/Z^{EL}$, porém são dependentes da relação de tensão e corrente do sistema. Logo, a conformidade piezoeletrica com o circuito *shunt* produz a seguinte relação entre tensões mecânicas e deformações

$$s_{jj}^{SH} = s_{jj}^E [1 - k_{ij}^2 \bar{Z}_i^{EL}] \quad (4.10)$$

onde s_{jj}^{SH} é a conformidade do circuito *shunt* acoplado ao piezoeletrico, $k_{ij} = d_{ij} \sqrt{s_{jj}^E \epsilon_i^T}$ é o coeficiente de acoplamento eletromecânico, e \bar{Z}_i^{EL} é a matriz de impedância não dimensional obtida pela razão da impedância geral com a impedância do piezoeletrico. Essas relações de acoplamento e de impedância influenciam diretamente o valor do módulo de Young da estrutura carregada na direção j e desviada na direção i , conforme mostra a equação a seguir:

$$E_{jj}^{SH} = E_{jj}^D \frac{1 - k_{ij}^2}{1 - k_{ij}^2 \bar{Z}_i^{EL}} \quad (4.11)$$

onde E_{jj}^D e E_{jj}^{SH} são os módulos de Yonug do piezoeletrico e do circuito *shunt*, respectivamente. O ajuste desses módulo de Young podem definir características específicas para o comportamento dinâmico da estrutura. Logo, o próprio acoplamento do piezoeletrico na estrutura apresenta influência no comportamento dinâmico (FORWARD, 1979). A Figura 4.1 apresenta os modelos de circuitos que representam os piezoeletricos acoplados na configuração viga acoplada com um PZT (Figura 3.4) e viga acoplada com dois PZTs em série e paralelo (Figura 3.6).

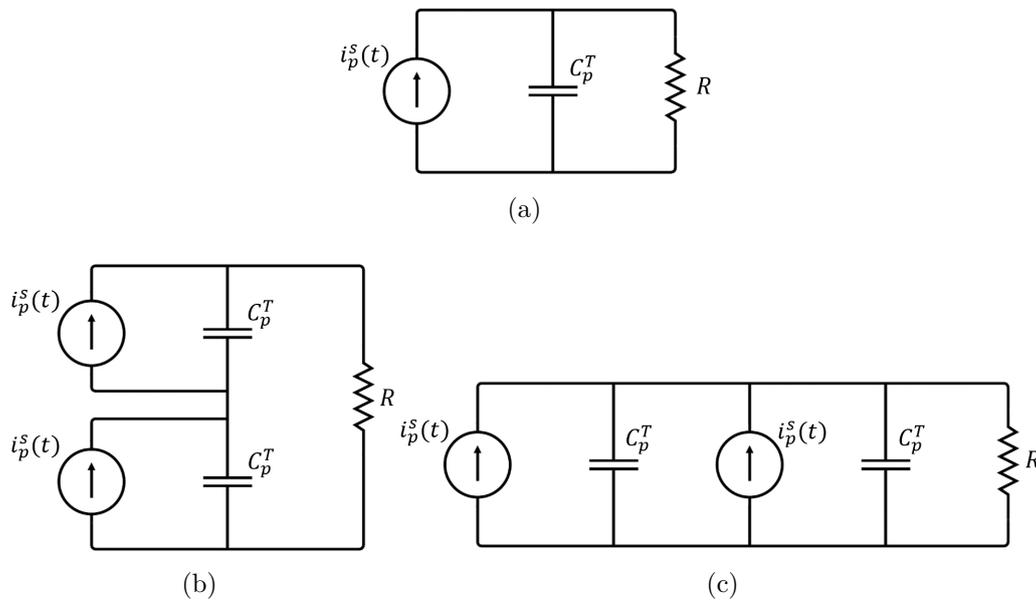


Figura 4.1 – Representação de circuito topográfico de piezoeletricos conectados com um resistor na configuração: a) viga-PZT; b) PZT-viga-PZT em série; c) PZT-viga-PZT em paralelo.

Conforme as topografias demonstradas na Figura 4.1, entende-se que a capacitância

piezoelétrica pode assumir um valor diferente para as configuração em série e paralelo com

$$\text{Série } C_p^T = \frac{\epsilon_{33}^S L b}{2 h_p}, \quad \text{Paralelo } C_p^T = 2 \frac{\epsilon_{33}^S L b}{h_p} \quad (4.12)$$

onde b , h_p e L são a largura, a espessura e o comprimento do piezoelétrico. A conformidade piezoelétrica pode ser obtida com

$$\epsilon_{33}^S = \frac{\epsilon_{33}^T - d_{31}^2}{s_{11}^E} \quad (4.13)$$

4.3 Impedâncias dos circuitos *shunt*

As capacitâncias piezoelétricas intervêm nas adimitâncias gerais, que por consequência de configurações, podem estar sujeitas a serem influenciadas por circuito aberto, curto-circuito ou um circuito *shunt* (HAGOOD; FLOTOW, 1991). Assim, para casos com esforço mecânico constante, as impedâncias de curto-circuito e de circuito aberto são

$$\text{Curto } Z^{EL} = 0, \quad \text{Aberto } Z^{EL} = i\omega C_p^T \quad (4.14)$$

Para as impedâncias de circuitos *shunt*, existem dependências quanto as disposições dos componentes usados no circuito. Em geral, o circuito *shunt* pode ser classificado pela predominância de elementos resistivos, indutivos, capacitivos e de chaveamento (GRIPP; RADE, 2018). Segundo Forward (1979), as impedâncias dos circuitos *shunt* estão associadas a uma frequência de ressonância específica, onde para circuitos com componentes resistivos predominantes, o fator de acoplamento e o valor da resistência são influências que determinam a frequência tunada, conforme demonstra a seguinte relação

$$\omega_R = \frac{\sqrt{1 - k_{ij}^2}}{RC_p^T} \quad (4.15)$$

Para circuitos *shunt* com predominância de componentes de indutância é considerado a seguinte relação para determinar a frequência a ser tunada

$$\omega_L = \frac{1}{\sqrt{LC_p^T}} \quad (4.16)$$

Na Figura 4.2 estão listadas algumas das principais topografias de circuitos *shunt* utilizados na literatura para promover os efeitos associados com controle de vibração, ruído e propagação de onda.

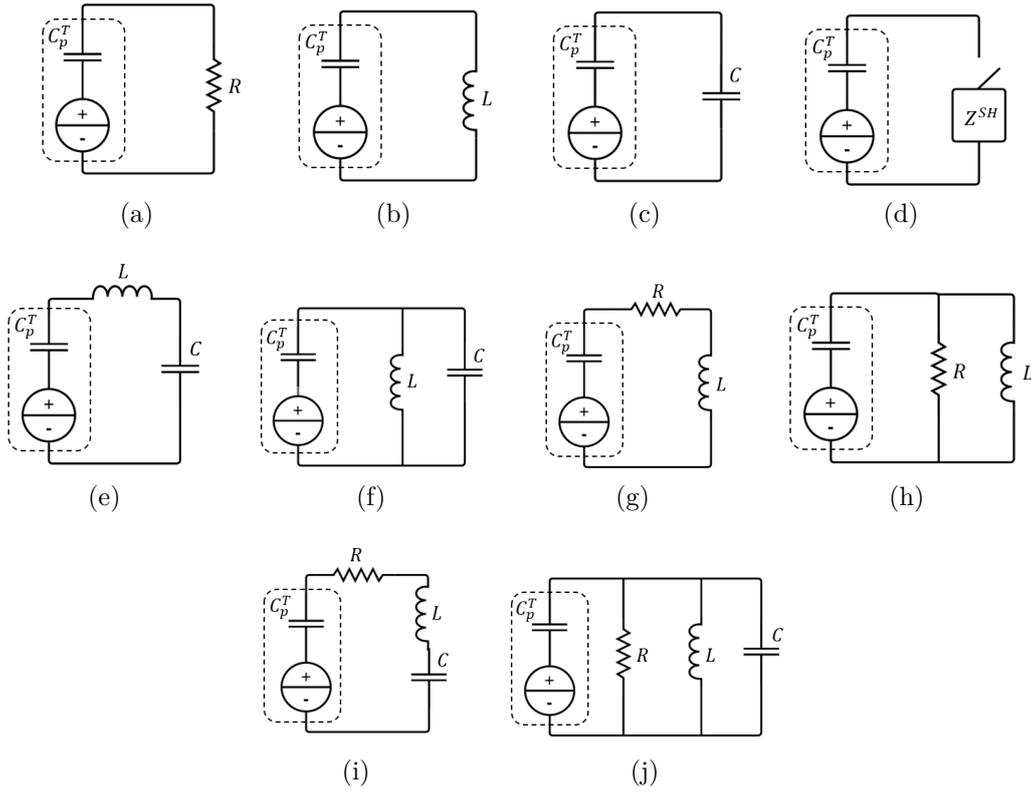


Figura 4.2 – Circuitos *shunts*: a) puro resistivo; b) puro indutivo; c) puro capacitivo; d) chaveado; e) LC série; f) LC paralelo; g) RL série; h) RL paralelo; i) RLC série; j) RLC paralelo.

Nos circuitos da Figura 4.2, os retângulos tracejados representam o piezoelétrico, e os demais componentes R , L e C são respectivamente os elementos externos de resistência, indutância e capacitância pertencentes ao circuito *shunt*. A Figura 4.2a mostra um circuito *shunt* resistivo puro, onde de acordo com a equação 4.9, a admitância piezoelétrica $Y^P = i\omega C_p^T$ é somada a admitância do *shunt* resistivo, resultando na seguinte relação de impedância geral resistiva

$$Z^{EL} = \frac{1}{i\omega C_p^T + 1/R} \quad (4.17)$$

Diferente do circuito puramente resistivo, o circuito puramente indutivo (Figura 4.2b) apresenta uma admitância *shunt* exclusivamente imaginária $Y^{SH} = 1/i\omega L$, onde desconsiderando a resistência interna do piezoelétrico, tem-se também uma impedância geral indutiva exclusivamente imaginária da seguinte forma

$$Z^{EL} = \frac{i\omega L}{-\omega^2 L C_p^T + 1} \quad (4.18)$$

O circuito puramente capacitivo da Figura 4.2c é semelhante ao puramente indutivo, em termos de apresentarem parte real nula. Porém, a admitância desse circuito apresenta a mesma forma da admitância do piezoelétrico considerado, o que sugere a seguinte relação de impedância geral capacitiva

$$Z^{EL} = \frac{1}{i\omega C_p^T + i\omega C} \quad (4.19)$$

Para os circuitos *shunt* com elementos indutivos e capacitivos (LC), um complexo imaginário predominante é estabelecido. Nos circuitos das Figuras 4.2e e 4.2f, faixas de controle associadas à frequência são apresentadas para admitância em série $Y^{SH} = 1/(i\omega L + 1/i\omega C)$ e em paralelo $Y^{SH} = 1/i\omega L + i\omega C$. Partindo dessas admitâncias, as impedâncias gerais para os circuitos LC em série e paralelo podem ser expressas com

$$\text{Série } Z^{EL} = \frac{i\omega L + (1/i\omega C)}{-\omega^2 LC_p^T + (i\omega C_p^T/i\omega C) + 1} \quad (4.20)$$

$$\text{Paralelo } Z^{EL} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC - \omega^2 LC_p^T} \quad (4.21)$$

Nas Figuras 4.2g e 4.2h estão representados os circuitos *shunt* com elementos resistivos-indutivos (RL). As admitâncias dos circuitos para a configuração em série $Y^{SH} = 1/(R + i\omega L)$ e paralelo $Y^{SH} = 1/i\omega L + 1/R$, resultam nas seguintes impedâncias gerais:

$$\text{Série } Z^{EL} = \frac{R + i\omega L}{1 - \omega^2 LC_p^T + i\omega RC_p^T} \quad (4.22)$$

$$\text{Paralelo } Z^{EL} = \frac{i\omega RL}{i\omega L + R - \omega^2 RLC_p^T} \quad (4.23)$$

Algumas combinações de circuitos *shunts* ressonantes também podem ser montadas no intuito de duplicar as impedâncias. No trabalho de [Airoldi e Ruzzene \(2011b\)](#), uma relação de impedância geral para dois circuitos *shunt* ressonantes parte da seguinte configuração

$$\text{Multi } Z^{EL} = R_j + i\omega L_j + \sum_{k=1}^n Z^{SH} \quad (4.24)$$

Os circuitos *shunt* das Figuras 4.2i e 4.2j são semelhantes aos circuitos RL e LC, porém, apresentam todos os componentes passivos. As admitâncias para relação em série $Y^{SH} = 1/(R + i\omega L + 1/C)$ e paralelo $Y^{SH} = 1/R + 1/i\omega L + i\omega C$, geram as respectivas relações de impedância:

$$\text{Série } Z^{EL} = \frac{R + i\omega L + (1/i\omega C)}{1 + i\omega C_p^T(R + i\omega L + (1/i\omega C))} \quad (4.25)$$

$$\text{Paralelo } Z^{EL} = \frac{i\omega L}{i\omega L(i\omega C_p^T + i\omega C) + (i\omega L/R) + 1} \quad (4.26)$$

O circuito *shunt* chaveado representado na Figura 4.2d, conhecido como *shunt switch*, é uma excessão entre os circuitos passivos comuns. Geralmente, aplicações com o *shunt switch* tendem a envolver vários outros componentes passivos ou até ativos, como amplificadores, diodos e até microcontroladores. Logo, os controles com os elementos *switch* tendem a ser classificados como semipassivos, ativos ou semiativos, visto que necessitam de energia elétrica interna ou externa.

5 Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados que ilustram o comportamento dinâmico de estruturas do tipo viga, viga acoplada com uma camada piezoelétrica e viga acoplada com duas camadas piezoelétricas. O objetivo é analisar a função de resposta em frequência (FRF), os diagramas de dispersão e entender os efeitos que as diferentes geometrias de acoplamento e os diferentes tipos de circuitos *shunt* podem influenciar a vibração de uma viga e a atenuação da vibração em determinadas frequências de projeto.

5.1 Propriedades e análise estrutural

Neste trabalho, as propriedades e geometrias adotadas para os elementos viga e viga acoplada com uma e com duas camadas piezoelétricas, foram extraídas do trabalho de Lee e Kim (2000), visto que uma validação de comportamento pode ser orientada através de associações entre as respostas obtidas neste trabalho e as apresentadas na literatura. Assim, adotou-se para os materiais piezoelétricos o valor de constante dielétrica $d_{31} = -175e^{-12}m/V$, um fator de cisalhamento $\kappa = 0.9$, um coeficiente de acoplamento $k_{31} = 0.31$ e uma capacitância interna de $C_p^T = 200nF$. As demais propriedades físicas e geométricas, estão representados na Tabela 1.

Propriedades	Viga	Piezoelétrico
Comprimento [mm]	261.6	261.6
Largura [mm]	12.7	12.7
Espessura [mm]	2.286	0.762
Módulo de Young [GPa]	71	64.9
Módulo de Cisalhamento [GPa]	23	40
Densidade [kg/m ³]	2700	7600

Tabela 1 – Propriedades e características geométricas da viga e do piezoelétrico.

As simulações numéricas neste trabalho foram realizadas no *software* MatLab e resultam em análises de FRFs e diagramas de dispersão. A discretização da frequência adotada compreende uma faixa de 1 á 2500 Hz, com passo de 10 Hz. As estruturas analisadas estão em condições de contorno do tipo livre-livre e consistem em variações envolvendo uma viga de alumínio acoplada com piezoelétricos em configurações unimorfo e bimorfo, conforme mostra a Figura 5.1.

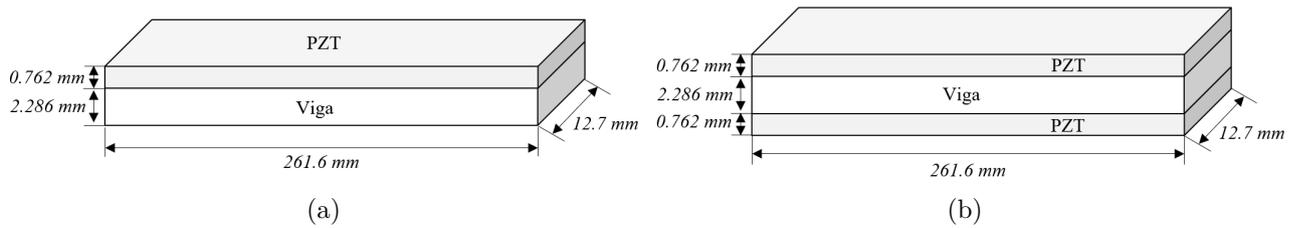


Figura 5.1 – Ilustração geométrica das estruturas: a) Viga-PZT; b) PZT-viga-PZT;

Os elementos representados nas Figuras 5.1a e 5.1b possuem as relações dinâmicas definidas no capítulo 3 nas seções 3.5.1 e 3.5.2, respectivamente. A estrutura viga-PZT (Figura 5.1a) possui a camada piezoelétrica modelada com o elemento de barra, o que totaliza uma estrutura de 2 nós com 3 GDL por nó, enquanto que a estrutura PZT-viga-PZT (Figura 5.1b) as camadas piezoelétricas são modeladas com o elemento de viga, o que totaliza uma estrutura de 2 nós com 2 GDL por nó.

As FRF são analisadas no nó 2 na direção vertical de cada estrutura, onde também é aplicado um forçamento unitário. Na Figura 5.2 estão demonstradas as FRFs e o diagrama de dispersão relativos a estrutura viga-PZT (Figura 5.1a) comparada à uma viga de Euler-Bernoulli.

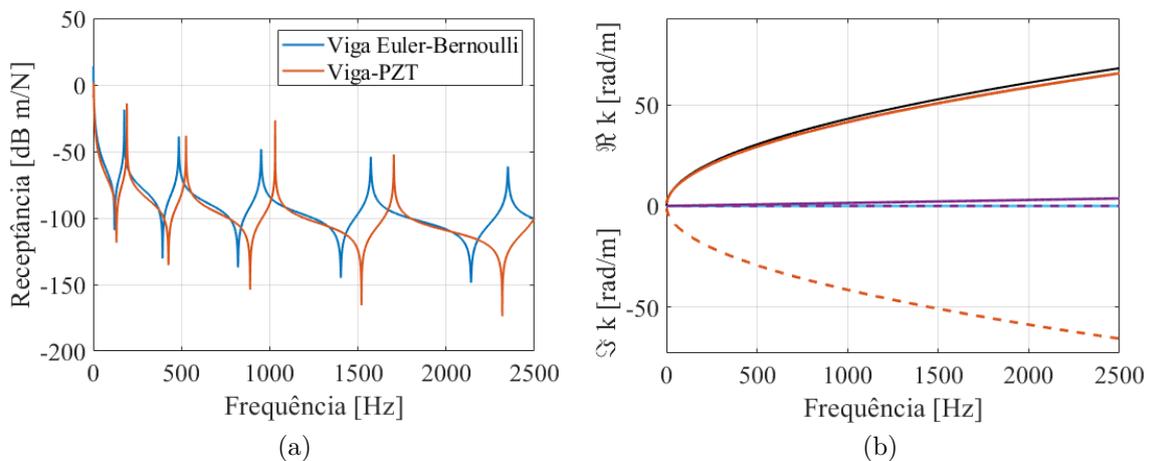


Figura 5.2 – Comparação entre as estruturas de viga e viga-PZT: a) FRF; b) Diagrama de dispersão.

Na Figura 5.2a, comparando as FRFs das estruturas viga e viga-PZT é perceptível que existe uma alteração na posição dos picos de ressonância e antirressonância, o que remete ao efeito de aumento de rigidez e de massa na estrutura por causa da adição da camada piezoelétrica. Já na Figura 5.2b, as relações de espectro demonstram modos de onda de flexão para as estruturas viga analítica (linha contínua preta) e viga-PZT (linha contínua laranja), onde uma pequena diferença nas amplitudes é perceptível nas frequências posteriores a 500 Hz. Também é demonstrado um modo de onda longitudinal (linha contínua roxa) que representa a propagação de onda no piezoelétrico. Ainda existe

outro modo referente a impedância do circuito *shunt* (linha contínua azul), mas como não há impedância conectada, tem-se que o comportamento deste modo é não propagante em toda a banda de frequência analisada. Contudo, cada modo possui uma representação real e uma imaginária (linha tracejada), onde indicam um comportamento dispersivo ou não.

Na Figura 5.3 estão demonstrados os comportamentos das FRFs e do diagrama de dispersão relativos a estrutura PZT-viga-PZT (Figura 5.1b) comparada à uma viga de Timoshenko.

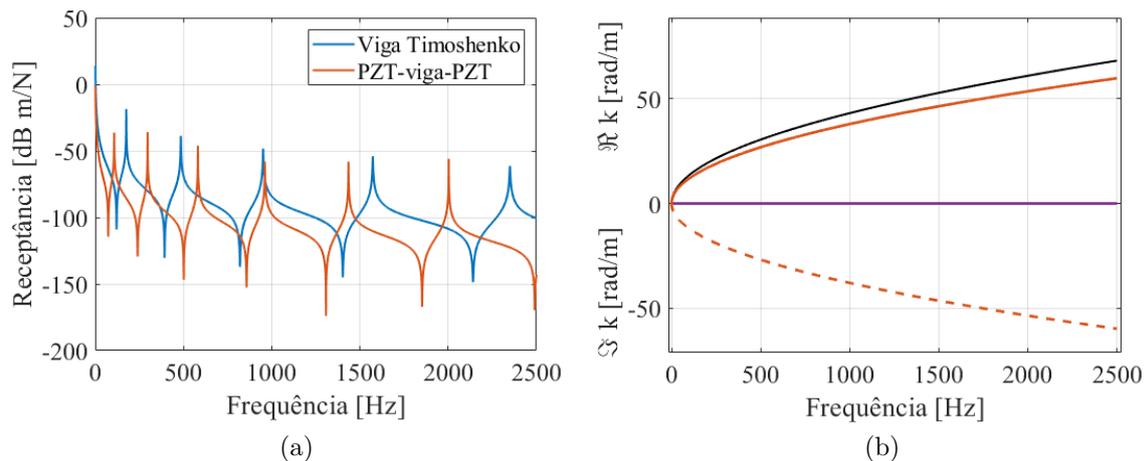


Figura 5.3 – Comparação entre as estruturas de viga e PZT-viga-PZT: a) FRF; b) Diagrama de dispersão.

Na Figura 5.3a é demonstrada uma alteração na posição dos picos de ressonância e antirressonância ainda maior do que no caso da estrutura com um piezoelétrico unimorfo (Figura 5.2a), o que é justificado pela adição de duas camadas piezoelétrica a estrutura. Contudo, em relação aos espectros demonstrados na Figura 5.3b, também é perceptível uma alteração nas amplitudes dos modos de onda de flexão da estrutura viga analítica (linha contínua preta) com o da estrutura PZT-viga-PZT (linha contínua laranja). Como a estrutura PZT-viga-PZT é composta apenas por elementos de viga, tem-se apenas modos de flexão propagantes indicando um comportamento dispersivo.

5.2 Estruturas inteligentes

Nesta seção, as variações dos elementos de viga acoplada com piezoelétricos conectados em circuitos *shunt*, obedecem as configurações de conexão retratadas na Figura 5.4, onde na Figura 5.4a representa a viga acoplada à uma camada de PZT conectado à um circuito *shunt*. A Figura 5.4b ilustra a viga acoplada com duas camadas de PZT conectados em um circuito *shunt* em série e a Figura 5.4c representa à viga acoplada a duas camadas de PZT conectados em um circuito *shunt* em paralelo.

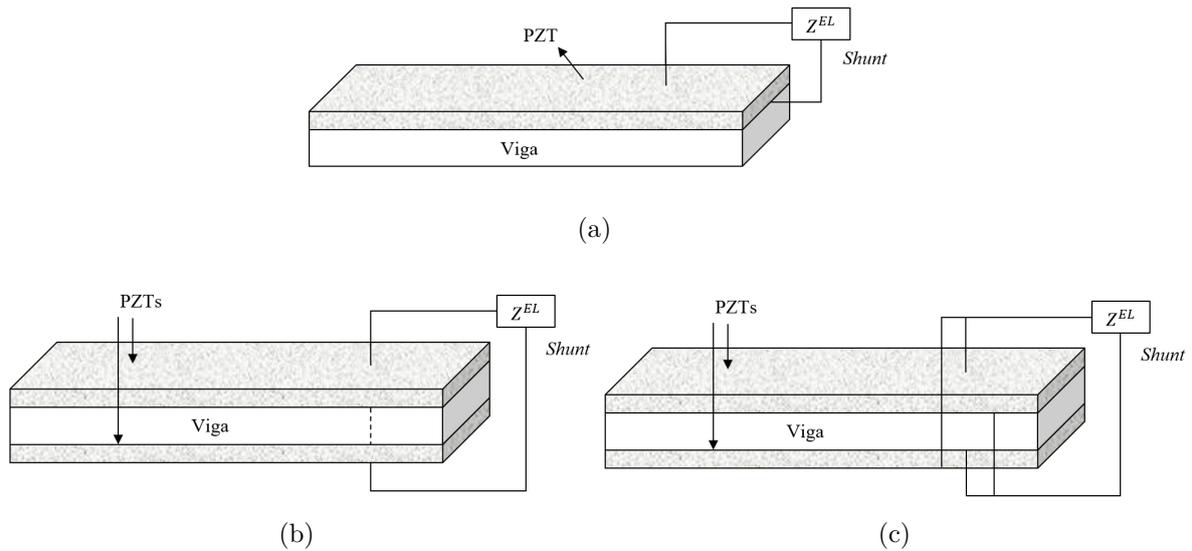


Figura 5.4 – Ilustração de *smart materials*: a) Viga-PZT-*shunt*; b) PZT-viga-PZT-*shunt* em série; c) PZT-viga-PZT-*shunt* em paralelo;

Na Figura 5.5 estão representadas as FRFs e os diagramas de dispersão da estrutura viga-PZT conectada ao circuito *shunt* nas configurações de curto-circuito e circuito aberto.

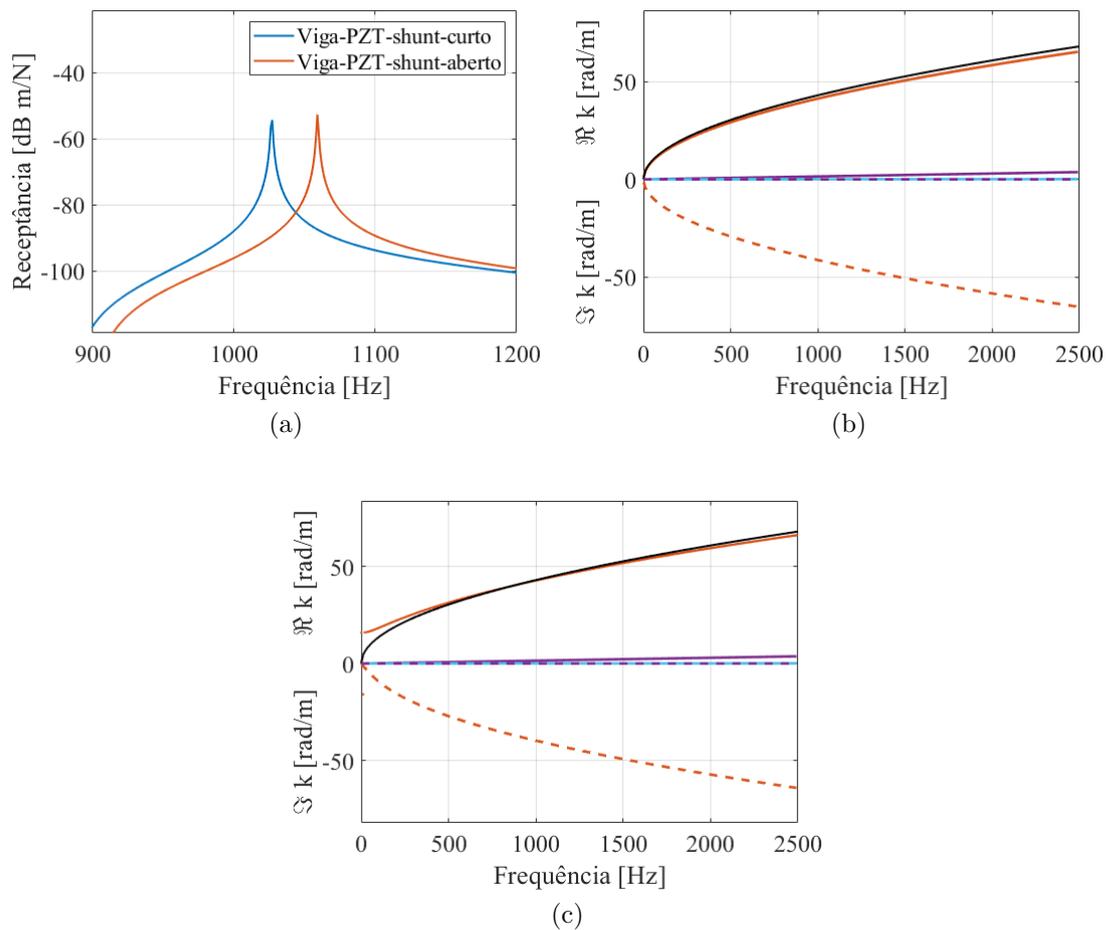


Figura 5.5 – Análise da estrutura viga-PZT: a) FRF; b) Diagrama de dispersão com o *shunt* em curto; c) Diagrama de dispersão com o *shunt* aberto.

A diferença entre as FRFs demonstradas na Figura 5.5 implicam na análise de que a condição do circuito *shunt* em curto em comparação com a condição aberto apresenta uma alteração na localização dos picos de ressonância em função da frequência. Essa alteração que o circuito *shunt* aberto possui é demonstrada no modo de flexão (linha constante laranja) da Figura 5.5c.

Na Figura 5.6 estão representadas as FRFs e os diagramas de dispersão da estrutura PZT-viga-PZT conectada ao circuito *shunt* nas configurações de curto-circuito e circuito aberto.

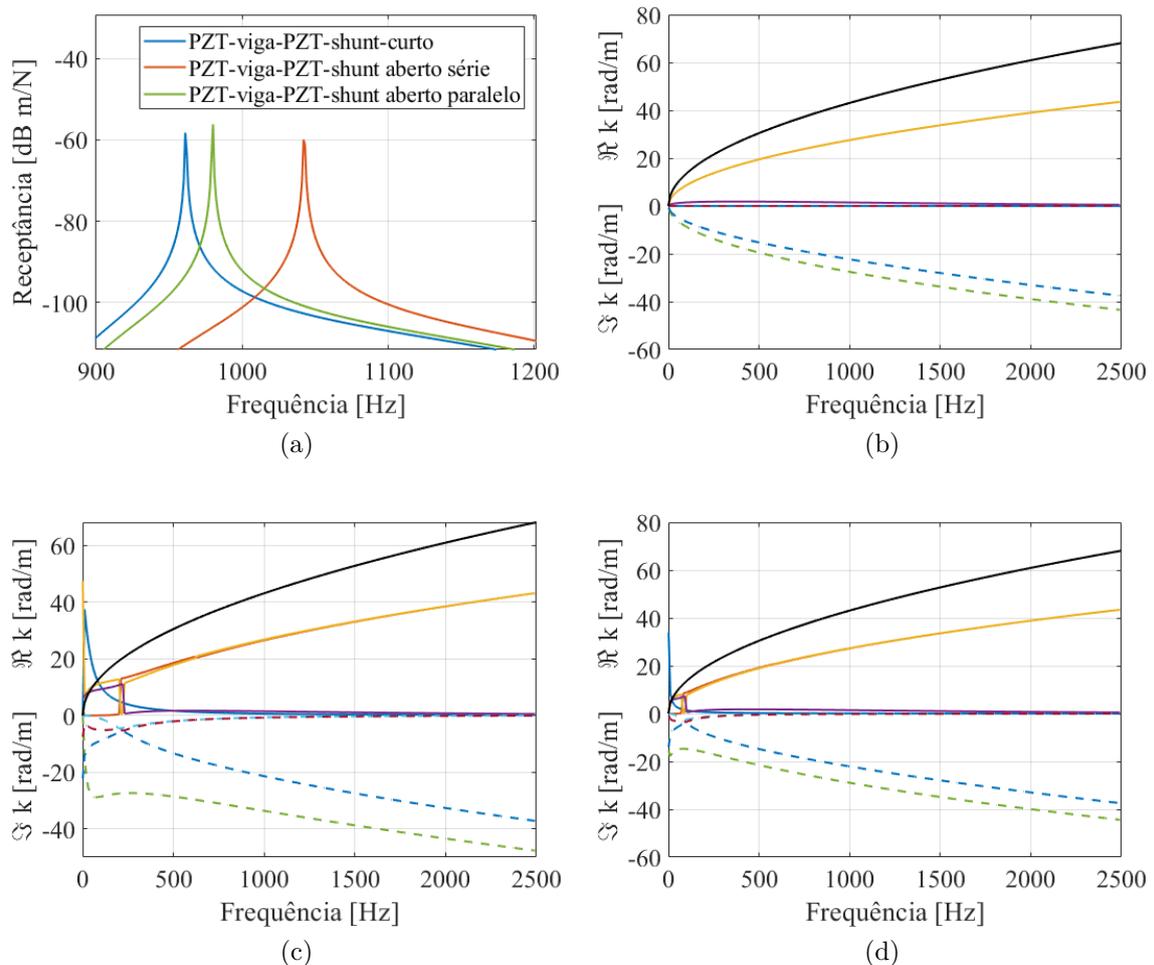


Figura 5.6 – Análise da estrutura PZT-viga-PZT: a) FRF; b) Diagrama de dispersão com o *shunt* em curto; c) Diagrama de dispersão com o *shunt* aberto em série; d) Diagrama de dispersão com o *shunt* aberto em paralelo.

As alterações das posições dos picos de ressonância na frequência também é perceptível no caso da estrutura PZT-viga-PZT, porém a conexão do circuito *shunt* em paralelo afeta uma alteração ainda maior na localização dos picos. Os diagramas de dispersão da estrutura PZT-viga-PZT conectada a um circuito *shunt* denotam 2 modos propagantes de flexão, sendo eles o modo relacionado com a viga (linha contínua amarela e laranja) e o modo relacionado com o piezoelétrico (linha contínua roxa). A impedância do circuito *shunt* é representada pela linha contínua azul e as linhas tracejadas verde e azul repre-

sentam os modos evanescentes de onda relacionados com o piezoelétrico e com a viga, respectivamente.

5.2.1 Circuito *shunt* resistivo

Com as impedâncias nas configurações *shunt* definidas em função da frequência, pode-se estabelecer as relações nodais espectrais para se conectar cada impedância de circuito *shunt* com um piezoelétrico acoplado há uma viga, conforme demonstrado no capítulo 4 na seção 4.1. Em resumo, tem-se que a relação de amortecimento do circuito *shunt* resistivo pode ser definida de acordo com o coeficiente de acoplamento k_{ij} , a capacitância piezoelétrica C_p^T , e o valor da resistência R . Logo, para realizar a simulação do efeito do *shunt* resistivo foram escolhidas duas impedâncias gerais resistivas com o valores de resistência iguais a 33Ω e 3300Ω , ambas demonstradas na Figura 5.7.

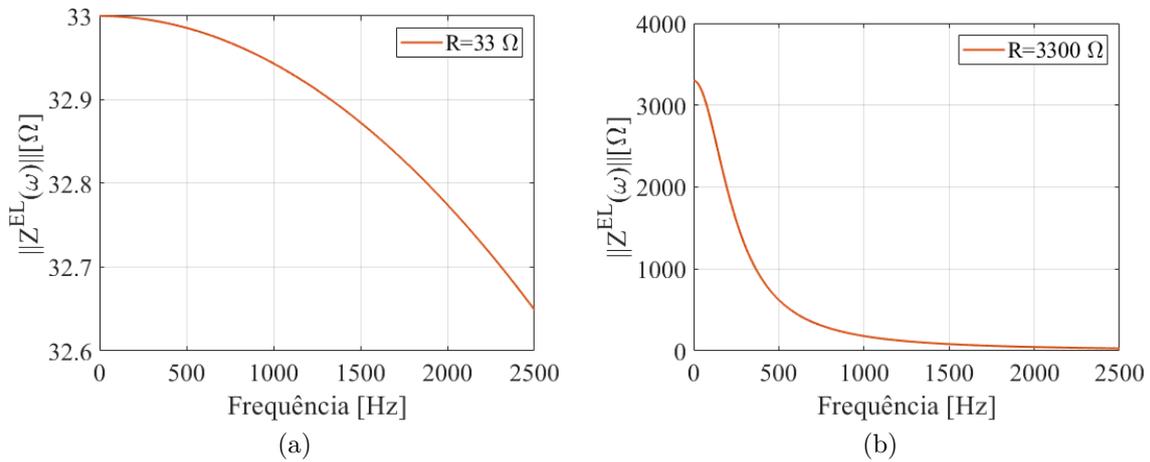


Figura 5.7 – Impedância geral do circuito *shunt* resistivo puro: a) $R = 33 \Omega$; b) $R = 3300 \Omega$.

Conectando as impedâncias gerais do circuito *shunt* resistivo na estrutura de viga acoplada com uma camada piezoelétrica (Figura 5.4a), tem-se as FRFs e o diagramas de dispersão para cada valor do *shunt* resistivo, conforme mostra a Figura 5.8.

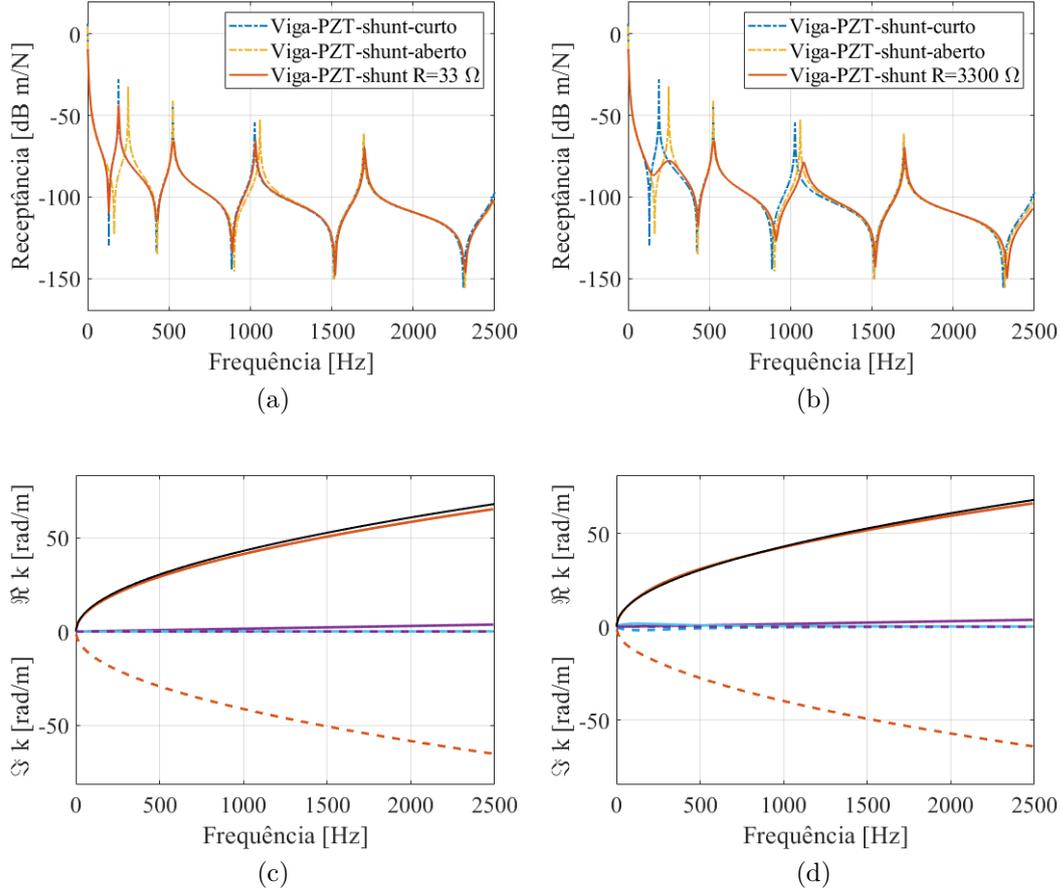


Figura 5.8 – Viga-PZT conectada com circuito *shunt* resistivo: a) FRF com *shunt* resistivo $R = 33 \Omega$; b) FRF com *shunt* resistivo $R = 3300 \Omega$; c) Diagrama de dispersão com *shunt* resistivo $R = 33 \Omega$; d) Diagrama de dispersão com *shunt* resistivo $R = 3300 \Omega$;

Na Figura 5.8 são demonstradas comparações de FRFs e de diagramas de dispersão da estrutura viga-pzt acoplada ao circuito *shunt* em condição puramente resistiva. Nas Figuras 5.8a e 5.8b, uma pequena defasagem para a direita nos picos ressonância e antirressonância é percebida nas FRFs na condição de circuito aberto em comparação com a condição de curto-circuito. Essa comparação demonstra que a condição do circuito em curto induz uma alteração de energia mecânica através do PZT. Contudo, na Figura 5.8a, onde um único circuito *shunt* resistivo de $R = 33 \Omega$ é acoplado na estrutura, a FRF demonstra um amortecimento presente nos picos de 190 e 1000 Hz. Na Figura 5.8b, onde o *shunt* resistivo de $R = 3300 \Omega$ é acoplado na estrutura, tem-se um efeito nítido de amortecimento estrutural ainda maior, que também está localizado nos mesmos picos de 190 e 1000 Hz.

Por outro lado, os diagramas de dispersão dos circuitos *shunt* resistivos em comparação com os casos em curto-circuito (Figura 5.5b) e circuito aberto (Figura 5.5c), seguem o mesmo comportamento, porém com uma pequena alteração na amplitude. No entanto, comparando os diagramas de dispersão do *shunt* resistivo de $R = 33 \Omega$ (Figura 5.8c) com o de $R = 3300 \Omega$ (Figura 5.8d) observa-se que o modo de onda relacionado com a

impedância (linha contínua azul) apresenta uma alteração nas frequências iniciais, sendo essa alteração proporcional ao valor do resistor.

Aplicando as impedâncias gerais do circuito *shunt* resistivo nas estruturas de viga acoplada com duas camadas piezoelétricas em série e paralelo (Figuras 5.4b e 5.4c), tem-se as FRFs e o diagrama de dispersão demonstrados na Figura 5.9.

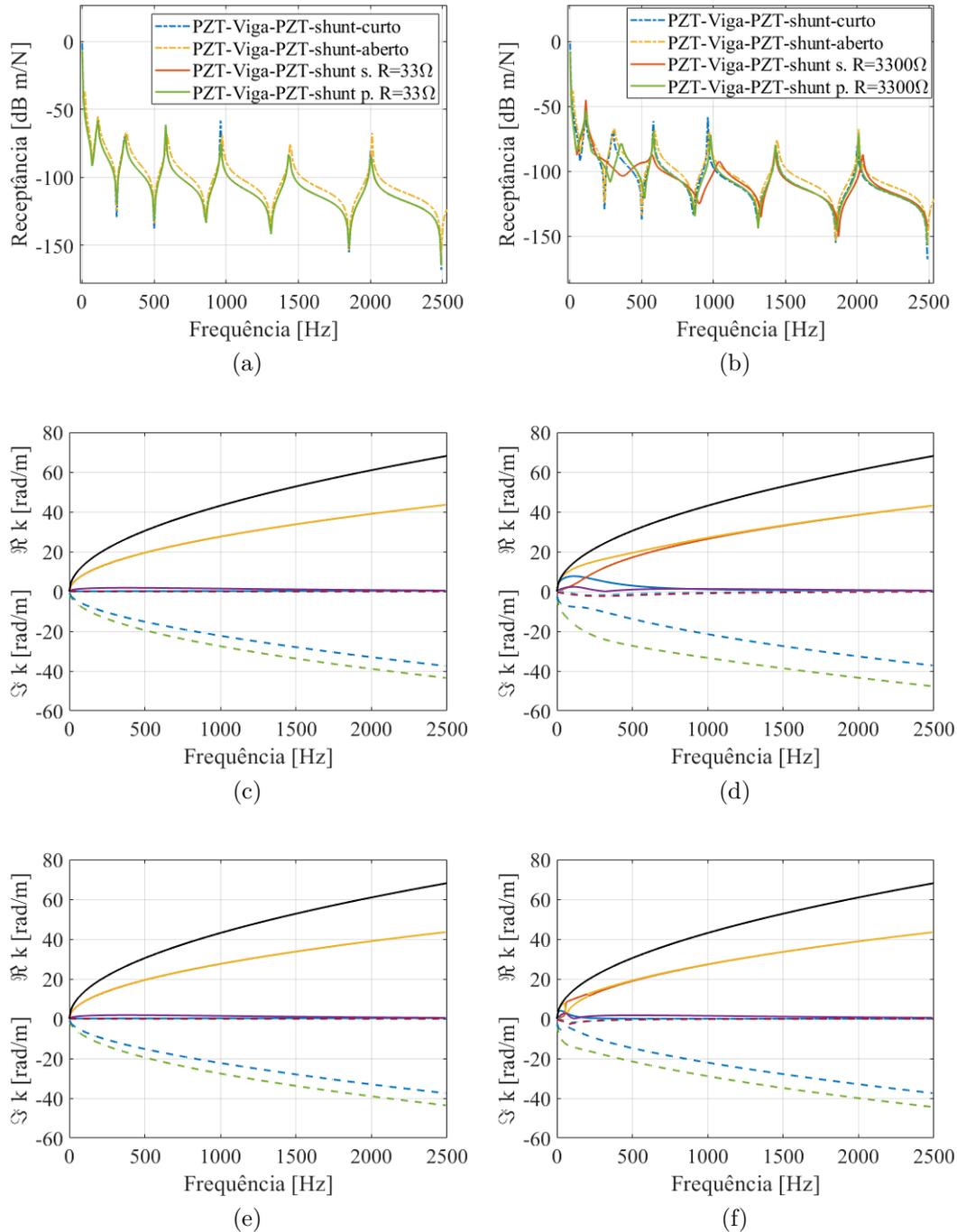


Figura 5.9 – PZT-viga-PZT conectada em circuito *shunt* resistivo: a) FRF com *shunt* resistivo $R = 33 \Omega$; b) FRF com *shunt* resistivo $R = 3300 \Omega$; c) Diagrama de dispersão com *shunt* resistivo $R = 33 \Omega$ em série; d) Diagrama de dispersão com *shunt* resistivo $R = 3300 \Omega$ em série; e) Diagrama de dispersão com *shunt* resistivo $R = 33 \Omega$ em paralelo; f) Diagrama de dispersão com *shunt* resistivo $R = 3300 \Omega$ em paralelo.

Na Figura 5.9, as respostas associadas à piezoelétricos conectados no circuito *shunt* nas configurações em série (s) e paralelo (p) foram ministradas para os valores de capacitância piezoelétrica interna $C_p^T = 200 \text{ nF}$ e $C_p^T = 800 \text{ nF}$, respectivamente. Nas Figuras 5.9a e 5.9b estão demonstradas as FRFs da viga acoplada com duas camadas de PZTs nas configurações de circuito *shunt* em curto-circuito, circuito aberto e resistivo puro. As relações de conexão em série e paralelo com o circuito *shunt* resistivo alteram o comportamento vibracional, bem como o diagrama de dispersão. Contudo, o comportamento das FRFs da viga acoplada com dois PZTs bimorfo conectados em circuito *shunt* resistivo apresenta semelhança com as FRFs do caso da viga com apenas uma camada piezoelétrica (Figura 5.8). Portanto, observa-se que o efeito analisado em ambos os casos resistivos é correspondente a um efeito de amortecimento estrutural, porém a taxa de amortecimento é mais nítida no caso com o valor de resistor maior.

Comparando os diagramas das Figuras 5.9c, 5.9d, 5.9e e 5.9f são percebidas alterações de propagações nos diagramas de dispersão relacionados com o tipo *shunt* série e paralelo, respectivamente. As alterações acontecem nas frequências iniciais, sendo perceptível que o modo de onda relacionado com o piezoelétrico (linha contínua roxa) apresenta maior alteração para o caso em que o resistor tem uma maior resistência. Os efeitos de amortecimento também estão presentes por meio da alteração dos modos propagantes de flexão da viga (linha amarela e vermelha). Logo, esses efeitos de amortecimentos presentes nas FRFs e não nos diagramas de dispersão, justificam a literatura e corroboram o argumento sobre o *shunt* resistivo ser equivalente a um fator de amortecimento.

5.2.2 Circuito *shunt* indutivo

As impedâncias gerais dos circuitos *shunt* puramente indutivos, com valores de indutor L iguais a $3.508H$, $0.508H$ e $0.135H$, são demonstradas na Figura 5.10. Essas impedâncias são implementadas no controle vibracional e de propagação de onda das estruturas demonstradas na Figura 5.4.

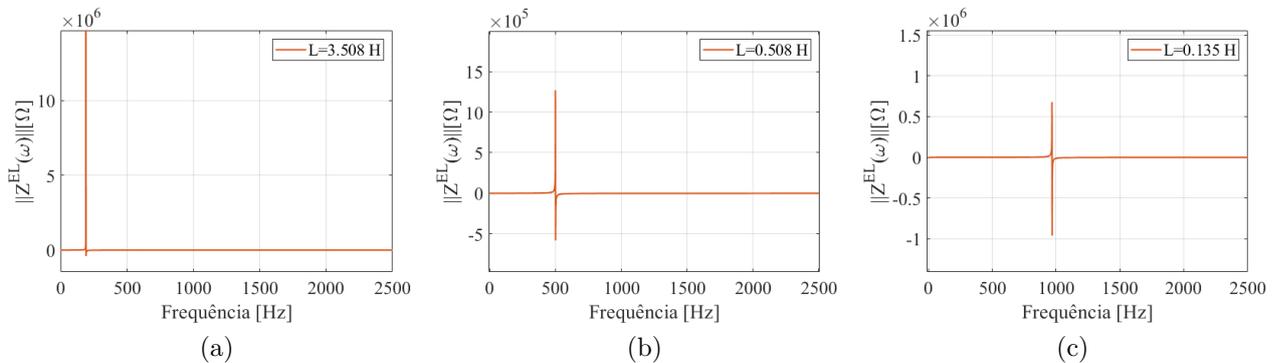


Figura 5.10 – Impedância geral do circuito *shunt* indutivo pruo: a) $L = 3.508H$; b) $L = 0.508H$; c) $L = 0.135H$.

Aplicando as impedâncias gerais das Figuras 5.10a e 5.10b na estrutura de viga acoplada com uma camada piezoelétrica (Figura 5.4a), tem-se as FRFs e o diagrama de dispersão para cada valor do *shunt* indutivo, conforme mostra a Figura 5.11.

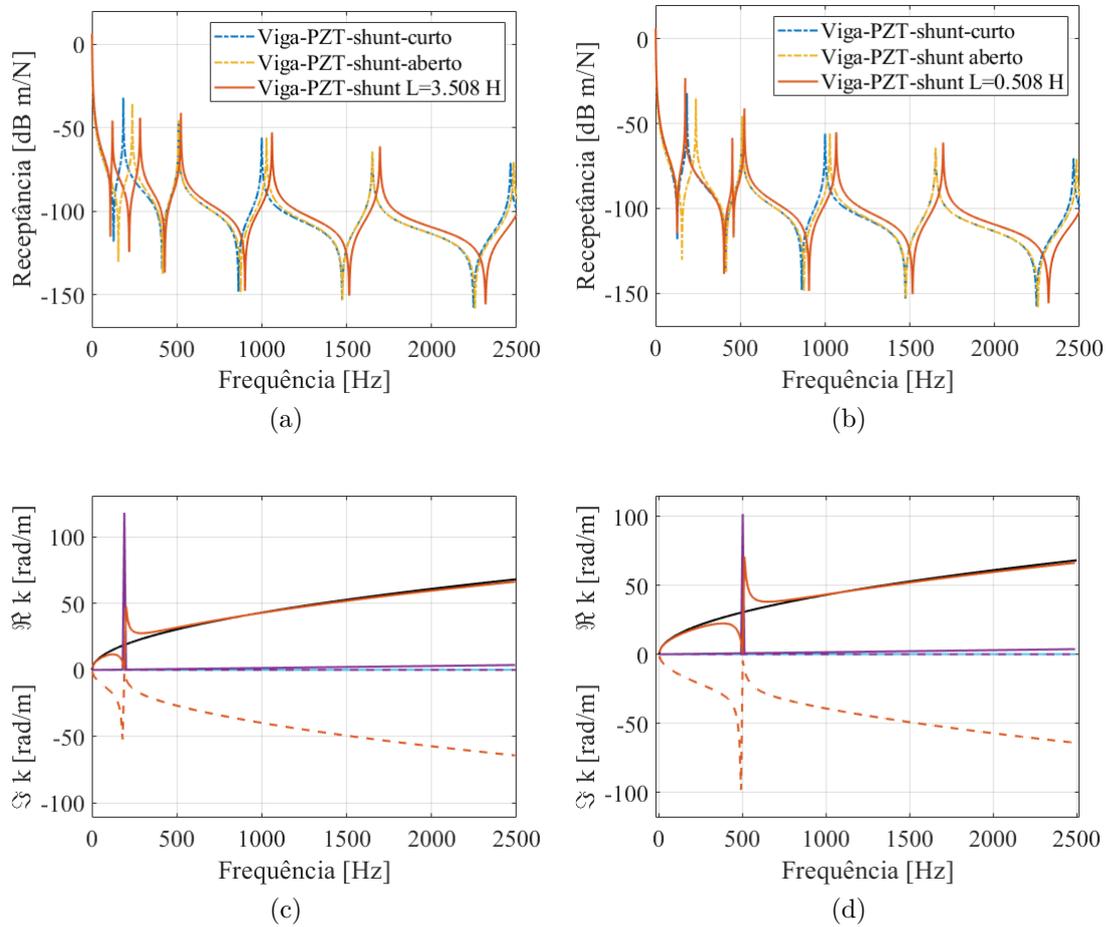


Figura 5.11 – Viga-PZT conectada em circuito *shunt* indutivo: a) FRF com *shunt* indutivo $L = 3.508$ H; b) FRF com *shunt* indutivo $L = 0.508$ H; c) Diagrama de dispersão com *shunt* indutivo $L = 3.508$ H; d) Diagrama de dispersão com *shunt* indutivo $L = 0.508$ H.

Na Figura 5.11a, a FRF correspondente ao circuito *shunt* indutivo sofre uma mudança semelhante à adição de massa na estrutura. O pico localizado na frequência próxima de 190 Hz é dividido em dois picos com amplitudes próximas. Esse efeito não acontece na Figura 5.10b, mas observa-se uma alteração na faixa de frequência próxima de 500 Hz, exatamente onde o pico da impedância de $L = 0.508$ está localizado na frequência. Nas Figuras 5.11c e 5.11d, observa-se que os modo propagantes de flexão (linha contínua laranja) e longitudinal (linha contínua roxa) apresentam alterações exatamente na frequência sintonizada pela impedância indutiva. O modo evanescente de flexão (linha tracejada) também demonstra o efeito dissipativo e a alteração na propagação da onda na frequência em que as impedâncias gerais dos circuitos indutivos correspondentes são sintonizados, especificamente em 190 Hz para $L = 3.508$ H e 500 Hz para $L = 0.508$ H.

As impedâncias gerais indutivas das Figuras 5.10a e 5.10b não são sintonizadas especificamente para um pico de ressonância ou antiressonância no caso de viga acoplada com duas camadas piezoelétricas em série e paralelo (Figuras 5.4b e 5.4c). Logo, para demonstrar um efeito mais nítido do circuito *shunt* indutivo na estrutura PZT-viga-PZT conectada com o *shunt* indutivo utiliza-se a impedância geral da Figura 5.10c. Assim, tem-se as FRFs e os diagramas de dispersão demonstrados na Figura 5.12.

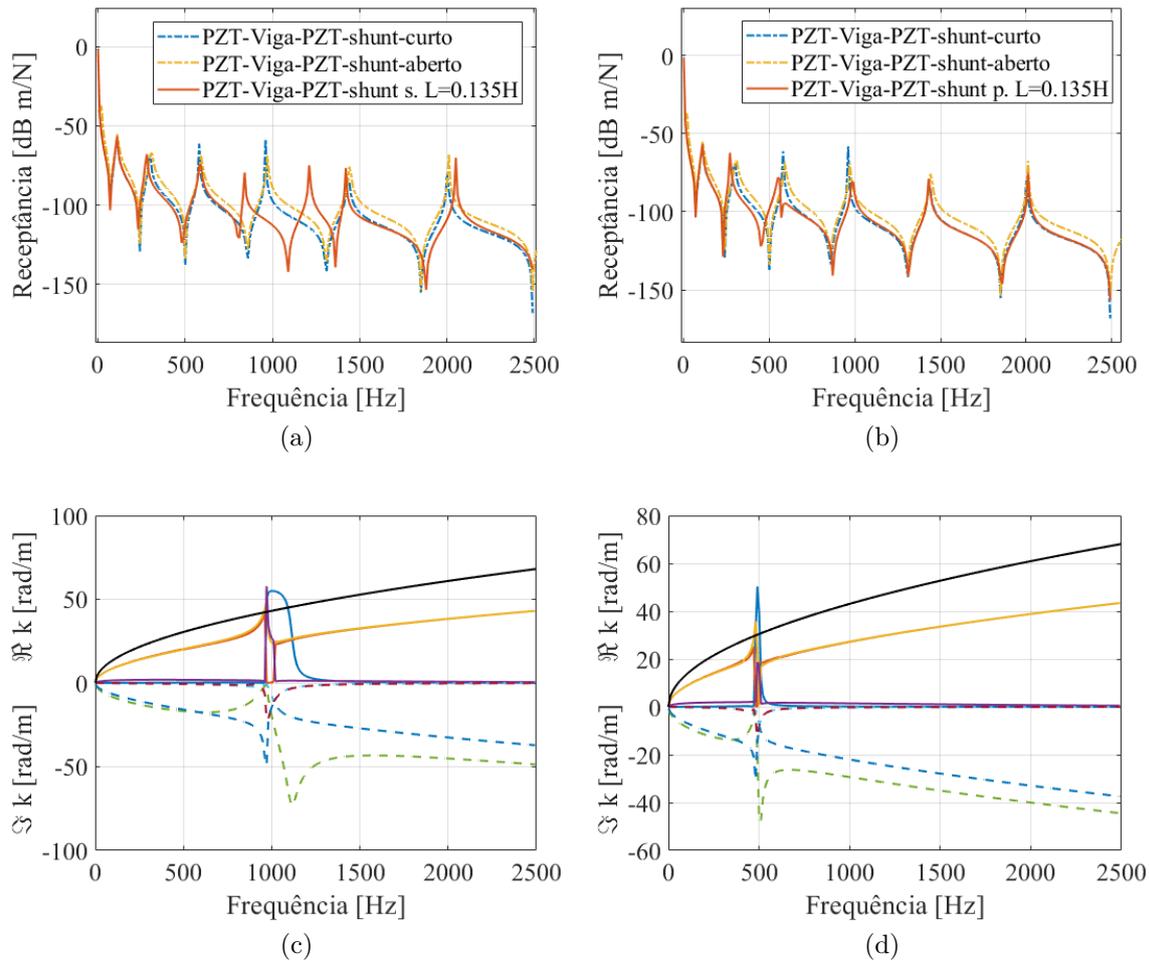


Figura 5.12 – PZT-viga-PZT conectada em circuito *shunt* indutivo: a) FRF com *shunt* indutivo $L = 0.135$ H conectado em série; b) FRF com *shunt* indutivo $L = 0.135$ H conectado em paralelo; c) Diagrama de dispersão com *shunt* indutivo $L = 0.135$ H conectado em série; d) Diagrama de dispersão com *shunt* indutivo $L = 0.135$ H conectado em paralelo.

Na Figura 5.12a é demonstrada a FRF da viga com dois PZTs bimorfos conectados em série com um circuito *shunt* indutivo de $L = 0.135$ H. Na Figura 5.12b é demonstrada a mesma análise, porém retrata a FRF com a conexão dos PZTs realizada em paralelo com circuito *shunt* indutivo. Ambos os casos, série e paralelo, remetem uma resposta semelhante à do caso da viga acoplada com apenas um PZT unimorfo (Figuras 5.11a e 5.11b). Essa semelhança remete na lógica de que a adição do circuito *shunt* indutivo provoca nessas estruturas efeitos parecidos aos de adição de massa em um local específico

na frequência.

Analisando os diagramas de dispersão das Figuras 5.12c e 5.12d, percebe-se que o efeito de adição de massa também pode ser observado na alteração dos modos propagantes (linhas contínuas) e evanescentes (linhas tracejadas). Os modos que representam o piezoelétrico (linha roxa) e a impedância (linha azul) apresentam um distúrbio localizado exatamente na frequência sintonização, 961 Hz para a configuração série e 500 Hz para configuração paralelo.

5.2.3 Circuito *shunt* capacitivo

As impedâncias gerais capacitivas com o valores de capacitor C iguais a $-52nF$ e $1KnF$ são demonstradas na Figura 5.13. Essas impedâncias são implementadas no controle vibracional e de propagação de onda das estruturas demonstradas na Figura 5.4.

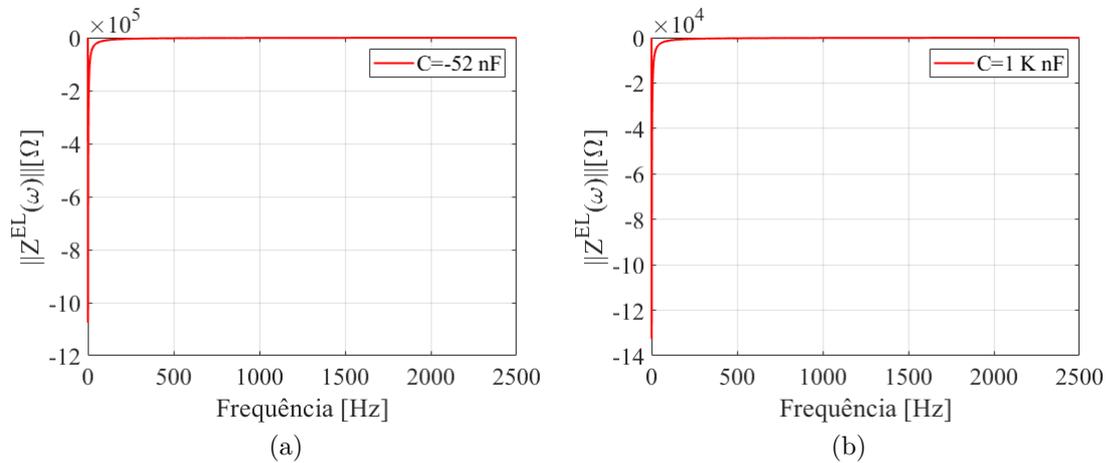


Figura 5.13 – Impedância geral do circuito *shunt* capacitivo puro: a) $C = -52nF$; b) $C = 1KnF$.

A Figura 5.13a demonstra uma impedância geral oriunda de um circuito *shunt* com capacitância negativa de $C_{neg} = -52nF$. Já a Figura 5.13b demonstra uma impedância geral oriunda de um circuito *shunt* capacitivo positivo de $C = 1KnF$. A diferença entre essas impedâncias estão relacionadas nas relações de capacitância piezoelétrica demonstradas na equação 4.14. Embora a impedância de um circuito *shunt* capacitivo puro não apresente elemento resistivo, uma relação com a capacitancia externa pode incluir uma resistência com $Z^{SH} = -R/i\omega C_{neg}$. Assim, uma interação de amortecimento pode ser induzida no sistema.

Aplicando as impedâncias gerais das Figuras 5.13a e 5.13b na estrutura de viga acoplada com uma camada piezoelétrica (Figura 5.4a), tem-se as FRFs e o diagrama de dispersão para cada valor do *shunt* capacitivo, conforme mostra a Figura 5.14.

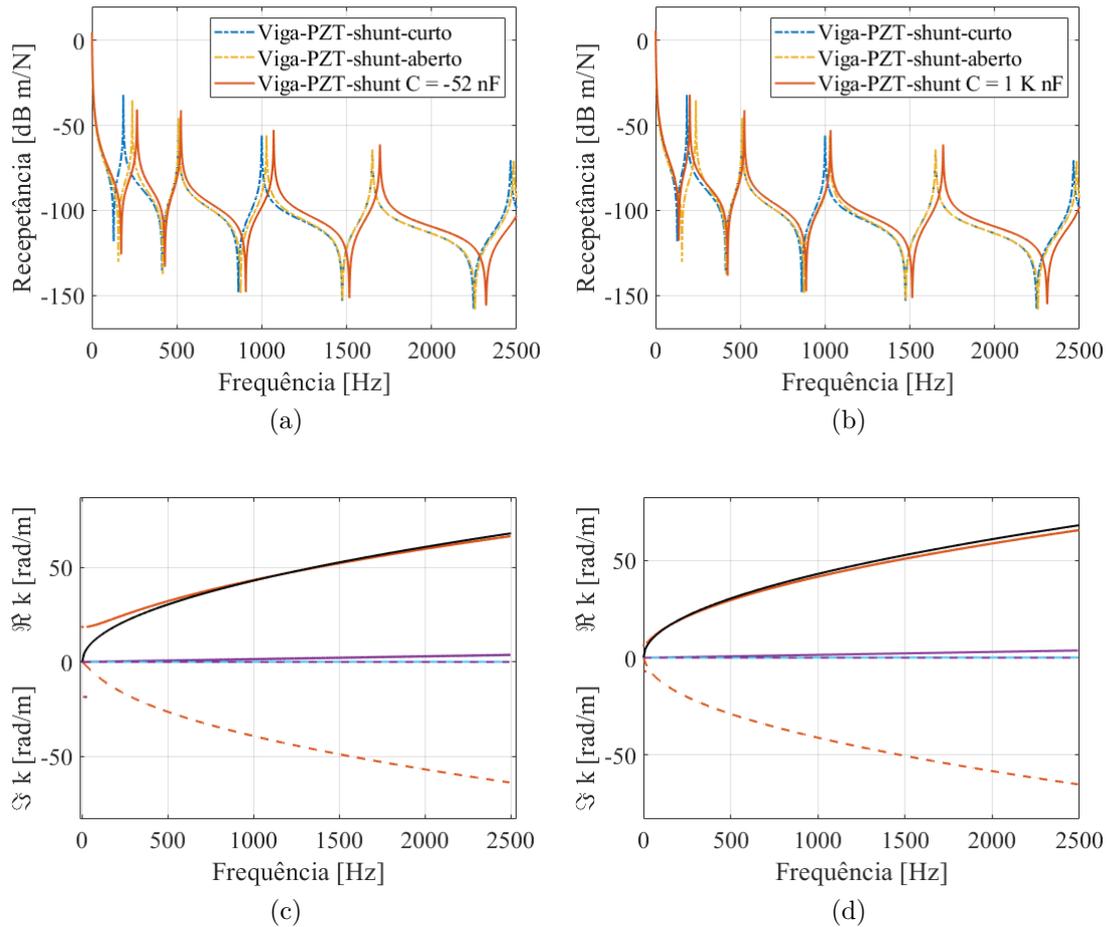


Figura 5.14 – Viga-PZT conectada em circuito *shunt* capacitivo: a) FRF com *shunt* capacitivo negativo $C = -52nF$; b) FRF com *shunt* capacitivo positivo $C = 1KnF$; c) Diagrama de dispersão com *shunt* capacitivo negativo $C = -52nF$; d) Diagrama de dispersão com *shunt* capacitivo positivo $C = 1KnF$.

Na Figura 5.14a é demonstrado que a FRF correspondente ao *shunt* capacitivo negativo em comparação com as FRFs das condições de curto-circuito e circuito aberto, apresenta os picos de ressonância e antiressonância deslocados na frequência para a direita, o que justifica a alteração da rigidez do sistema por meio da utilização de um capacitor externo negativo de $C = -56 nF$. De forma parecida, na Figura 5.14b uma capacitância positiva de $C = 1000 nF$ é utilizada, e as alterações nas localizações dos picos de ressonância e antiressonância na frequência também acontecem, porém de forma mais acentuada. Analisando os diagramas de dispersão das Figuras 5.14c e 5.14d, observa-se que o circuito *shunt* capacitivo positivo não apresenta diferença na propagação dos modos, porém no caso com o *shunt* capacitivo negativo percebe-se uma alteração nas frequências iniciais do modo de onda propagante de flexão (linha contínuas laranja).

Conectando as impedâncias das Figuras 5.13a e 5.13b nas estruturas PZT-viga-PZT bimorfo nas configurações em série e paralelo (Figuras 5.4b e 5.4c), tem-se as FRFs e o diagrama de dispersão para cada *shunt* capacitivo, conforme mostra a Figura 5.15.

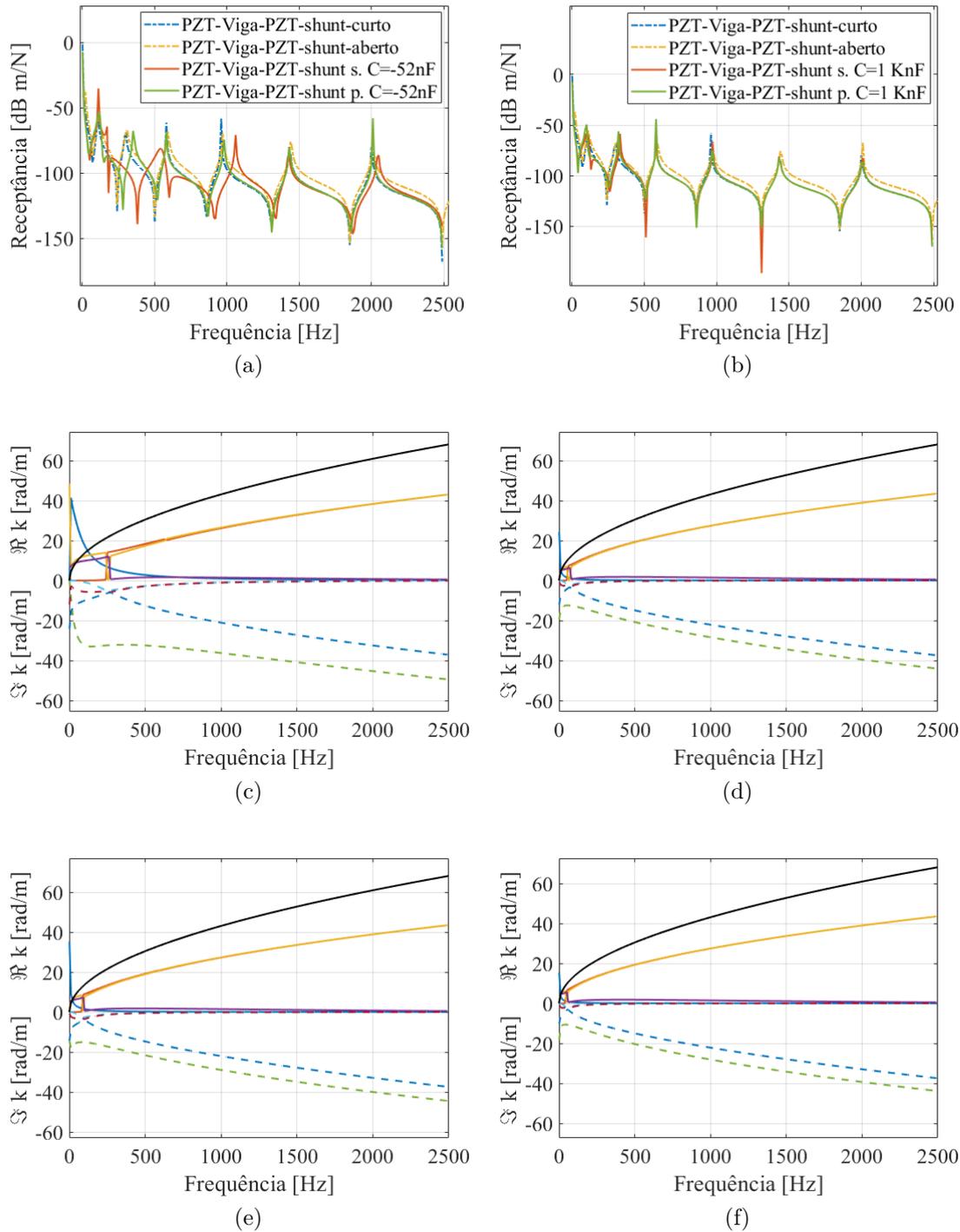


Figura 5.15 – PZT-viga-PZT conectada em circuito *shunt* capacitivo: a) FRF com *shunt* capacitivo $C = -52nF$; b) FRF com *shunt* capacitivo $C = 1KnF$; c) Diagrama de dispersão com *shunt* capacitivo $C = -52nF$ em série; d) Diagrama de dispersão com *shunt* capacitivo $C = 1KnF$ em série; e) Diagrama de dispersão com *shunt* capacitivo $C = -52nF$ em paralelo; f) Diagrama de dispersão com *shunt* capacitivo $C = 1KnF$ em paralelo.

Na Figura 5.15a, é demonstrado o comportamento da viga acoplada com dois PZTs bimorfos conectados em série e paralelo a um circuito *shunt* capacitivo negativo. Na configuração dos PZTs conectados em paralelo não é perceptível muitas alterações na

vibração do sistema, porém na configuração série é demonstrado uma pequena supressão de vibração na faixa de frequência entre 150 e 600 Hz. No caso com o capacitor positivo da Figura 5.15b, existem algumas alterações na vibração para ambas as configurações de conexão em série e paralelo. Contudo, os diagramas de dispersão demonstrados nas Figuras 5.15c, 5.15d, 5.15e e 5.15f remetem as alterações para os modos propagantes (linhas contínuas laranja e amarela) e os evanescentes (linhas tracejadas azul e verde) de flexão nas primeiras frequências. Os modos do piezoelétrico (linha contínua roxa) e da impedância (linha contínua azul) também apresentam alterações nas frequências iniciais, porém para o caso com o *shunt* capacitivo negativo em série, tem-se alterações mais elevadas em ambos os modos da estrutura.

5.2.4 Circuito *shunt* LC

As relações de impedância do circuito *shunt* indutor-capacitor LC são similares as do circuito *shunt* indutor puro com exceção do ajuste de rigidez proporcionado pelo capacitor externo. Logo, para fins de comparação, as impedâncias gerais do circuito LC em série e paralelo utilizam os valores de indutor $L = 0.148H$ e capacitor $C = 1KnF$, e são demonstradas na Figura 5.13. Essas impedâncias são implementadas no controle vibracional e propagação de onda das estruturas demonstradas na Figura 5.4.

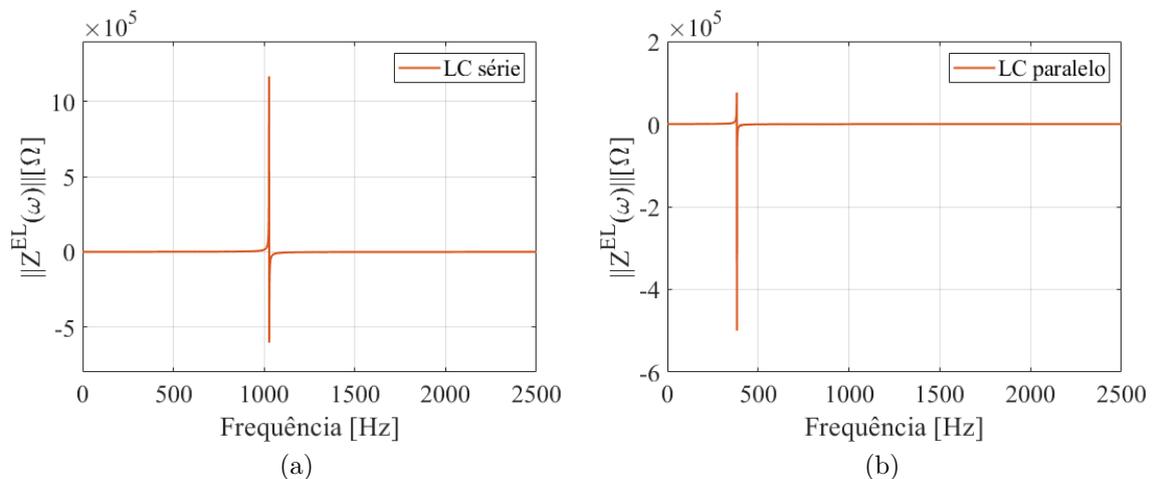


Figura 5.16 – Impedância geral do circuito *shunt* LC nas configurações: a) Série; b) Paralelo.

Os circuitos *shunt* LC nas configurações em série e paralelo são conhecidos pela viabilidade de filtro de passagem de corrente elétrica. Apesar dos valores de indutância e capacitância utilizados serem iguais para as configurações em série e paralelo, os efeitos de cada configuração geram impedâncias gerais com picos de diferentes amplitudes associadas com diferentes frequências tunadas. Essa diferença das configurações em série e paralelo para o *shunt* LC é justificada pela influência que capacitância piezoelétrica exerce na capacitância do circuito *shunt* e vice-versa. Contudo, aplicando as impedâncias gerais

das Figuras 5.16a e 5.16b na estrutura de viga acoplada com uma camada piezoelétrica (Figura 5.4a), tem-se as FRFs e os diagramas de dispersão demonstrados na Figura 5.17.

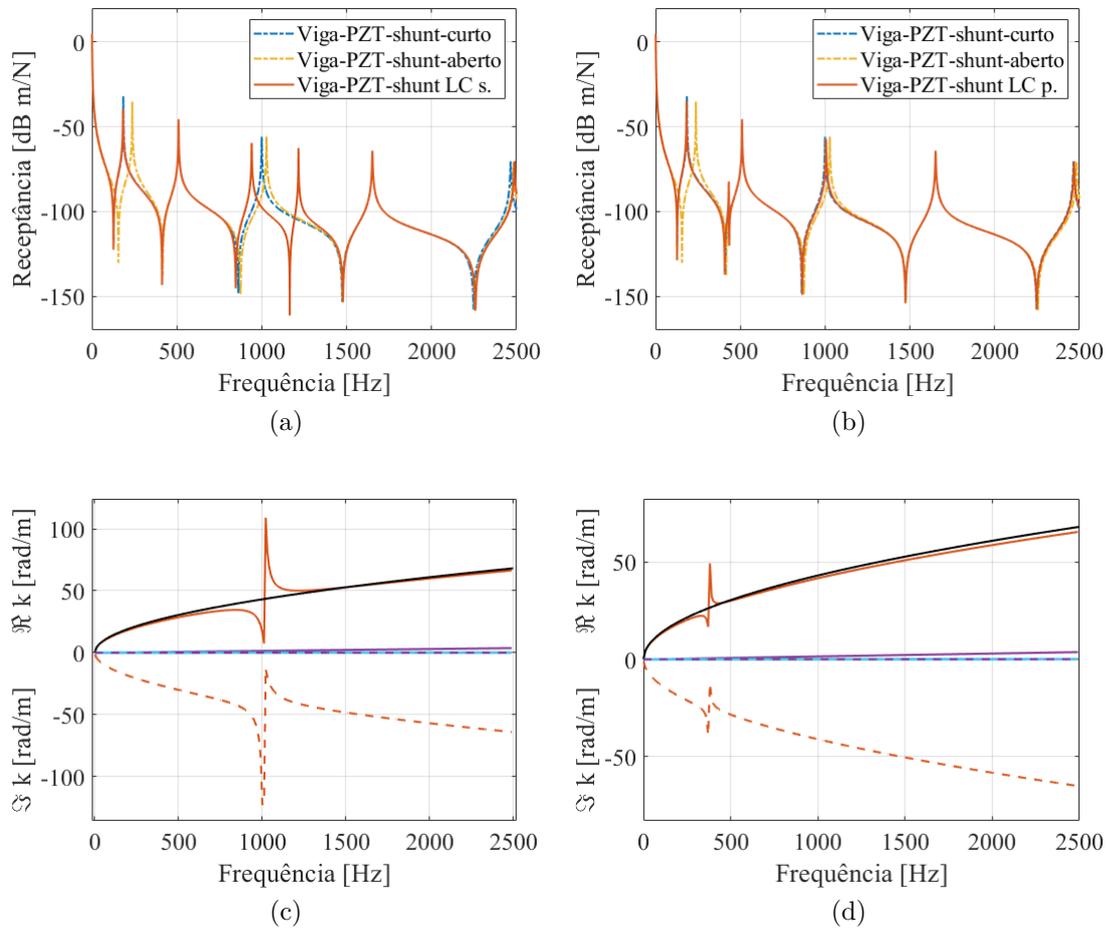


Figura 5.17 – Viga-PZT conectada em circuito *shunt* LC: a) FRF com *shunt* LC em série; b) FRF com *shunt* LC em paralelo; c) Diagrama de dispersão com *shunt* LC em série; d) Diagrama de dispersão com *shunt* LC em paralelo.

Semelhante ao que acontece no caso com circuito *shunt* indutivo puro, as Figuras 5.17a e 5.17b demonstram que um pico de ressonância pode ser convertido em dois picos graças ao componente indutivo correspondente do circuito *shunt* externo. Contudo, a Figura 5.17b comprova que a localização da impedância geral é um fator determinístico para que ocorra a separação do pico de ressonância em uma determinada frequência. As Figuras 5.17c e 5.17d apresentam os diagrama de dispersão onde os modos propagantes dispersivos de flexão (linha laranja) possuem uma alteração exatamente na frequência sintonizada pela impedância, porém a alteração é maior no caso com o circuito *shunt* LC em série. Os modos longitudinais de ambas as configurações não demonstram alteração.

Aplicando as impedâncias gerais das 5.16a e 5.16b nas estruturas de viga acoplada com duas camadas piezoelétricas em série e paralelo (Figuras 5.4b e 5.4c), tem-se as FRFs e os diagramas de dispersão demonstrados na Figura 5.18.

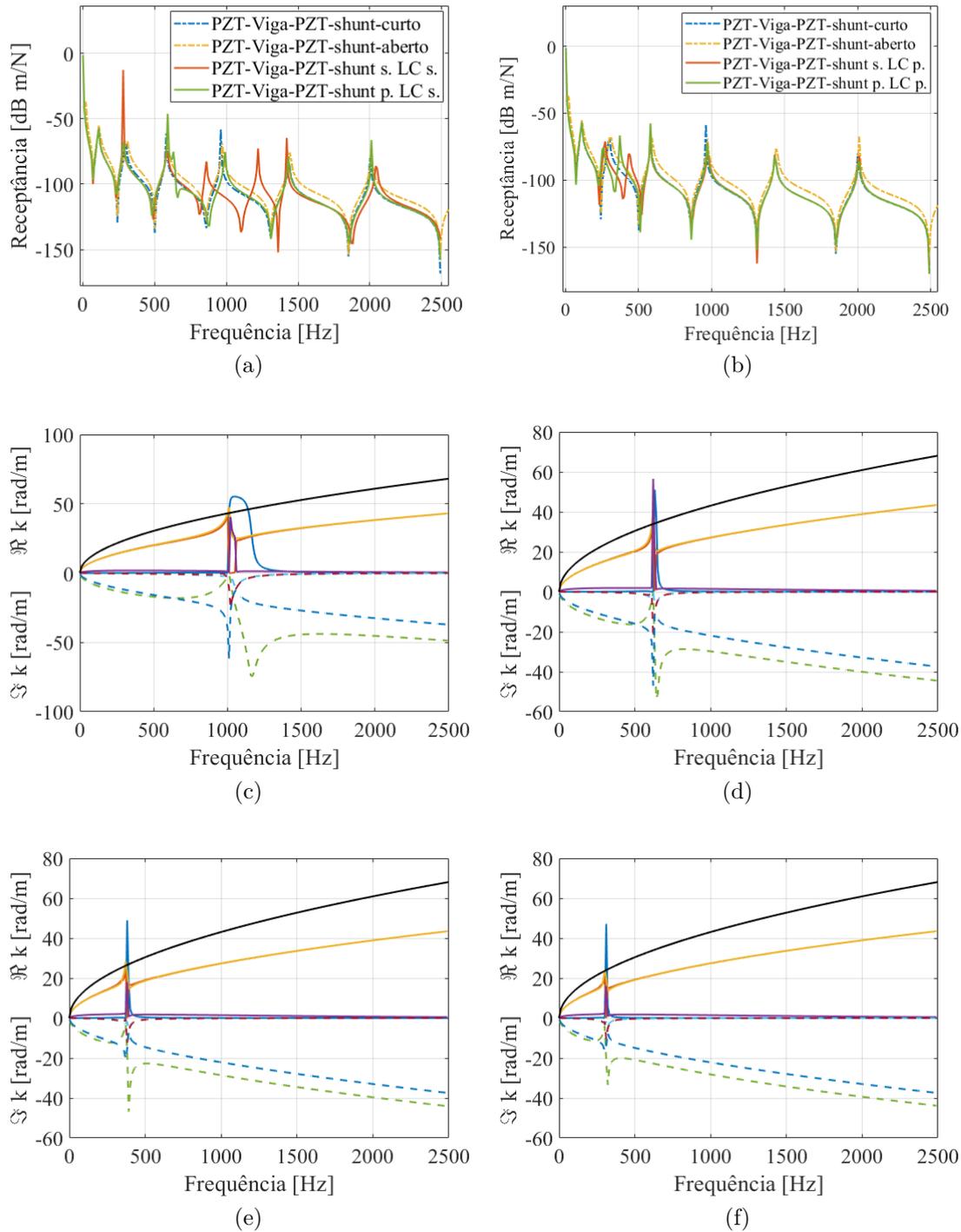


Figura 5.18 – PZT-viga-PZT conectada em circuito *shunt* LC: a) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao *shunt* LC em série; b) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao *shunt* LC em paralelo; c) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao *shunt* LC em série; d) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao *shunt* LC em paralelo; e) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao *shunt* LC em série; f) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao *shunt* LC em paralelo.

Nas Figuras 5.18a e 5.18b, estão representadas as FRFs do elemento viga acoplada com PZTs bimorfos conectados em série (s) e paralelo (p) com os circuito *shunt* LC com topografia em série (s) e paralelo (p). Percebe-se que os circuitos com os PZTs ligados em

série apresentam uma resposta com comportamento mais semelhante ao comportamento proporcionado pelo circuito *shunt* indutivo. Já os circuitos com os PZTs ligados em paralelo apresentam um comportamento mais parecido com o do circuito *shunt* capacitivo. De forma geral, os efeitos dos circuitos LC em série e paralelo apresentam um comportamento similar, porém uma diferente frequência de sintonização é determinada em cada configuração.

As Figuras 5.18c e 5.18e apresentam os diagramas de dispersão da viga acoplada aos PZTs conectados em série e paralelo ao circuito *shunt* LC em série, respectivamente. Já as Figuras 5.18d e 5.18f apresentam os diagramas de dispersão da viga acoplada aos PZTs conectados em série e paralelo ao circuito *shunt* LC em paralelo. Em ambos os diagramas de dispersão com *shunt* LC, percebe-se efeitos, localizados na frequência de projeto, em todos os modo dispersivos e não dispersivos da estrutura.

5.2.5 Circuito *shunt* RL

As relações de impedância do circuito *shunt* resistor-indutor RL partem da soma das impedâncias dos circuitos *shunt* indutor puro e resistor puro. Logo, para fins de comparação, as impedâncias gerais do circuito RL em série e paralelo, demonstradas na Figura 5.19, utilizam os valores de indutor $L = 0.148H$ e resistor $R = 33\Omega$.

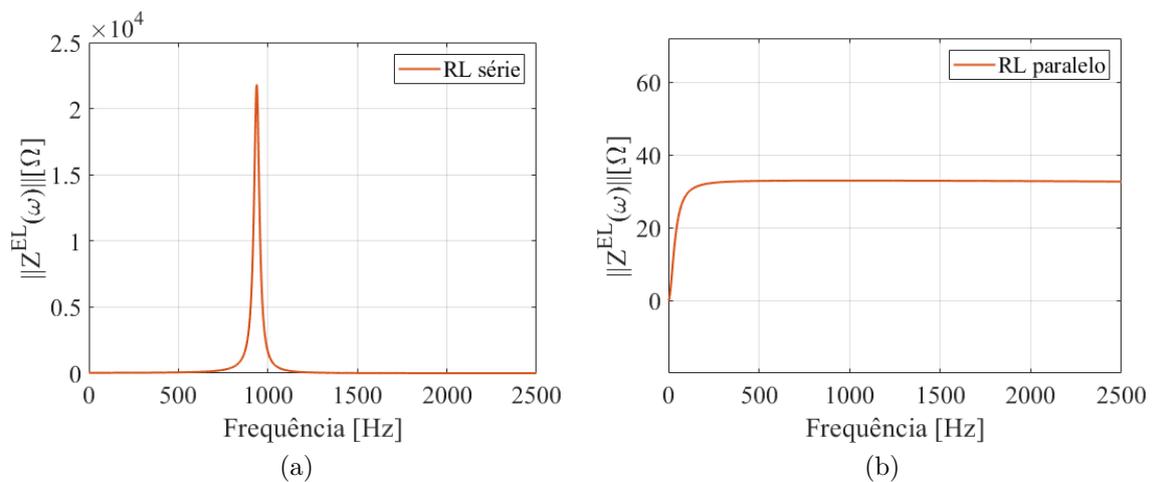


Figura 5.19 – Impedância geral do circuito *shunt* RL nas configurações: a) Série; b) Paralelo.

Os circuitos *shunt* RL são conhecidos pela possibilidade de atenuação de vibração. Apesar dos valores do indutor e do resistor utilizados serem iguais para as configurações em série e paralelo, a impedância da configuração série apresenta um comportamento semelhante a impedância geral de um circuito *shunt* indutivo puro, porém o pico gerado possui uma amplitude dependente da resistência. Já a impedância da configuração paralelo remete a um comportamento semelhante a impedância geral de um circuito *shunt* resistivo puro. Contudo, aplicando as impedâncias gerais das Figuras 5.19a e 5.19b na estrutura de

viga acoplada com uma camada piezoelétrica (Figura 5.4a), tem-se as FRFs e os diagramas de dispersão demonstrados na Figura 5.20.

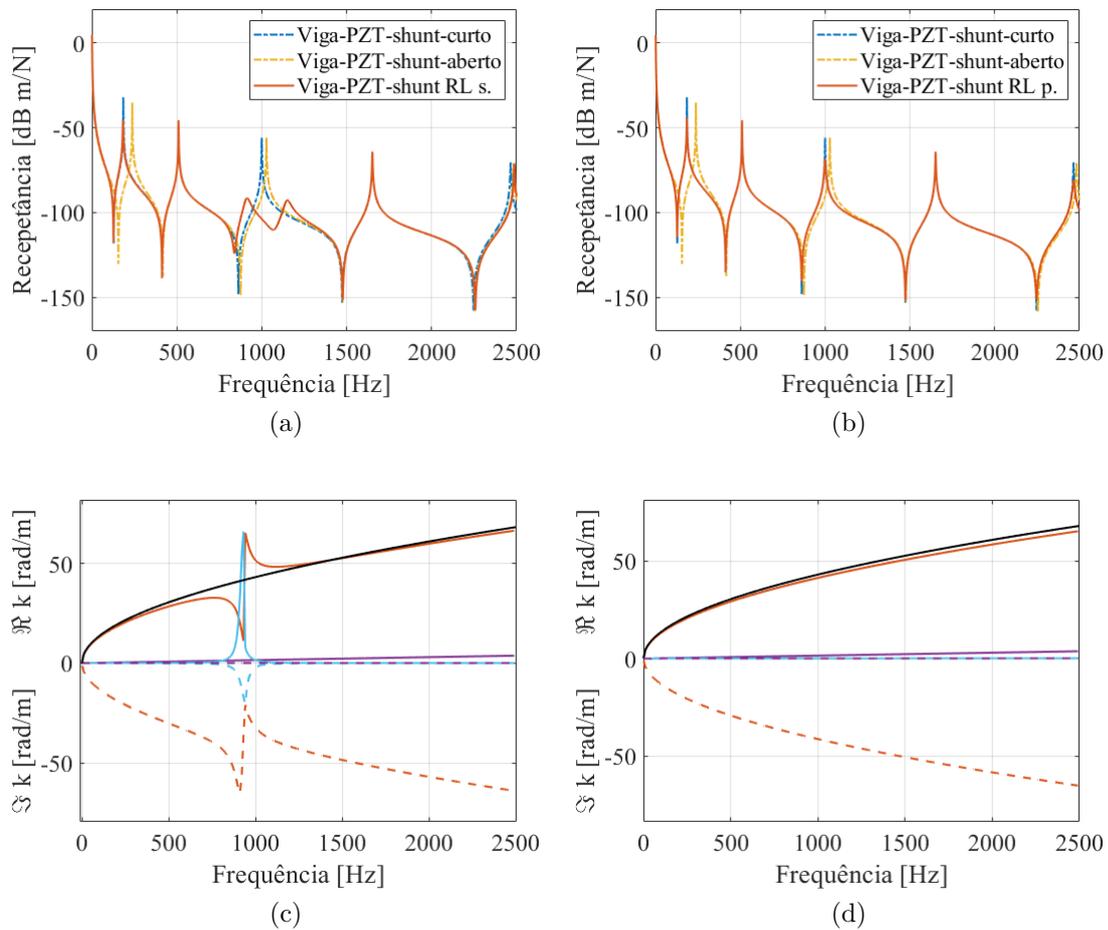


Figura 5.20 – Viga-PZT conectada em circuito *shunt* RL: a) FRF com *shunt* RL em série; b) FRF com *shunt* RL em paralelo; c) Diagrama de dispersão com *shunt* RL em série; d) Diagrama de dispersão com *shunt* RL em paralelo.

Na Figura 5.20a é demonstrado o efeito de atenuação proveniente do circuito *shunt* RL em série. Esse efeito de atenuação não acontece no caso com o circuito *shunt* RL em paralelo (Figura 5.20b), porém percebe-se um pequeno amortecimento nos picos de ressonância próximos de 190 e 1000 Hz. O diagrama de dispersão da Figura 5.20c demonstra que o modo propagante dispersivo de flexão da estrutura viga-PZT (linha laranja) apresenta um comportamento semelhante ao modo dispersivo de flexão da estrutura viga (linha preta), porém o modo da viga-PZT apresenta uma alteração exatamente na propagação exatamente na frequência sintonizada. O modo longitudinal (linha roxa) não apresenta alteração, mas o modo da impedância (linha azul) apresenta uma alteração com comportamento similar a impedância geram em função da frequência (Figura 5.19a). Já na Figura 5.20d o comportamento de ambos os modos são similares aos modos do caso de conexão com circuito *shunt* resistivo (Figura 5.8d).

Aplicando as impedâncias gerais das Figuras 5.19a e 5.19b nas estruturas de viga

acoplada com duas camadas piezoelétricas em série e paralelo (Figuras 5.4b e 5.4c), tem-se as FRFs e os diagramas de dispersão demonstrados na Figura 5.21.

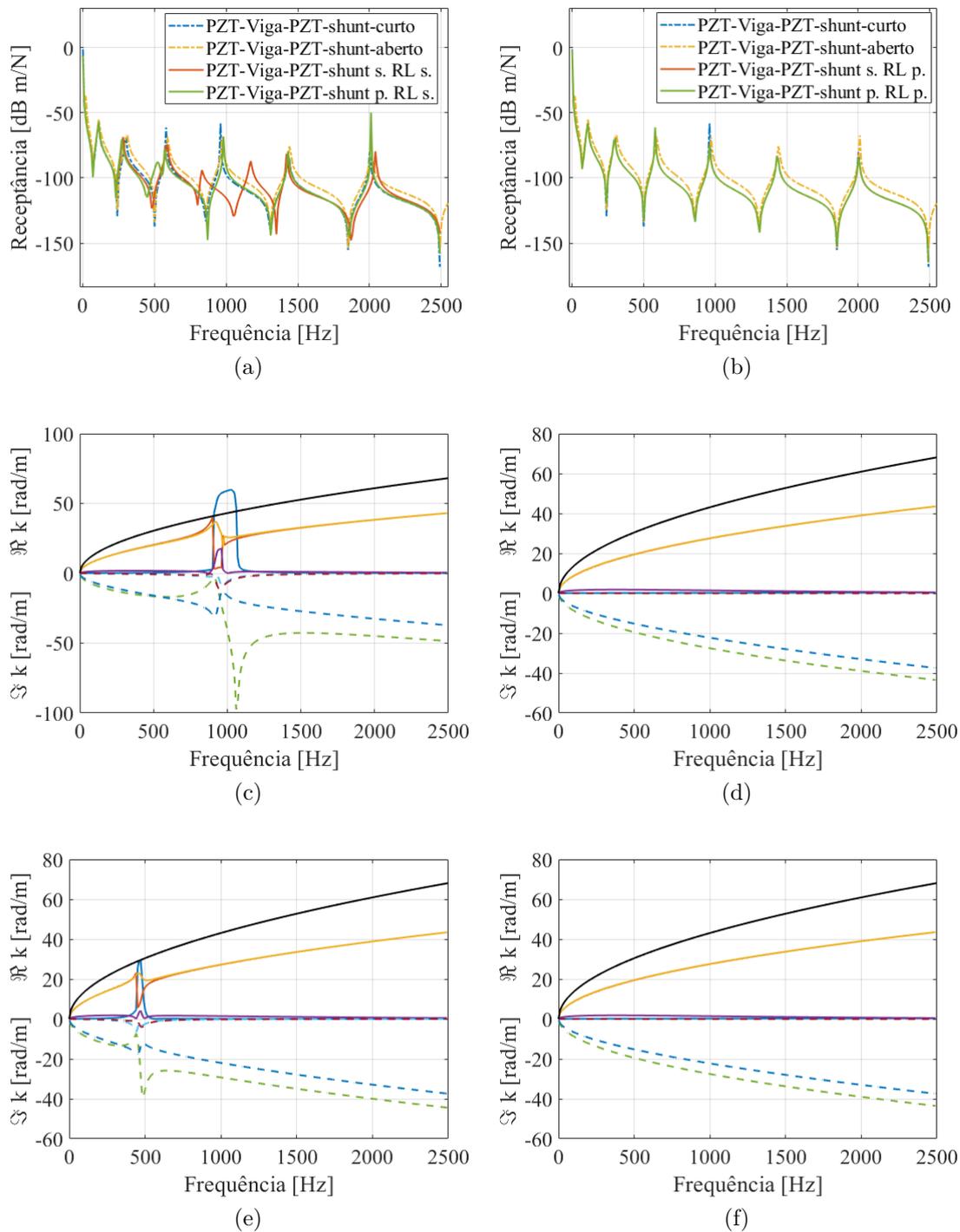


Figura 5.21 – PZT-viga-PZT conectada em circuito *shunt* RL: a) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao *shunt* RL em série; b) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao *shunt* RL em paralelo; c) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao *shunt* RL em série; d) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao *shunt* RL em paralelo; e) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao *shunt* RL em série; f) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao *shunt* RL em paralelo.

Nas Figuras 5.21a e 5.21b são demonstradas as FRFs do elemento viga acoplada com dois PZTs bimorfos conectados em série (s) e paralelo (p) com os circuitos *shunt* RL com topografia em série (s) e paralelo (p). Percebe-se que somente as respostas dos circuitos *shunt* RL em série apresentam a atenuação da vibração na frequência em que a impedância é sintonizada próxima de 1000 Hz, porém na condição em que os PZTs são conectados em paralelo ao *shunt* RL em série tem-se uma alteração na frequência sintonizada para 500 Hz. Os diagramas de dispersão das Figuras 5.21d e 5.21f demonstram que não existe alteração em todos os modos dispersivos e não dispersivos para os casos com os circuitos *shunt* RL em paralelo. Já as Figuras 5.21c e 5.21e, demonstram que existem alterações em todos os modos dispersivos e não dispersivos especificamente na frequência tunada pela impedância geral do circuito *shunt* RL em série.

5.2.6 Circuito *shunt* RLC

As relações de impedância do circuito *shunt* resistor-indutor-capacitor RLC são semelhantes as impedâncias do circuito *shunt* resistor-indutor RL. Logo, para fins de comparação, as impedâncias gerais do circuito RLC em série e paralelo utilizam os valores de indutor $L = 0.148H$, resistor $R = 33\Omega$ e capacitor $C = 1KnF$. Na Figura 5.22 são demonstradas as impedâncias gerais do circuito *shunt* RLC em série e paralelo com alterações para o valor do resistor.

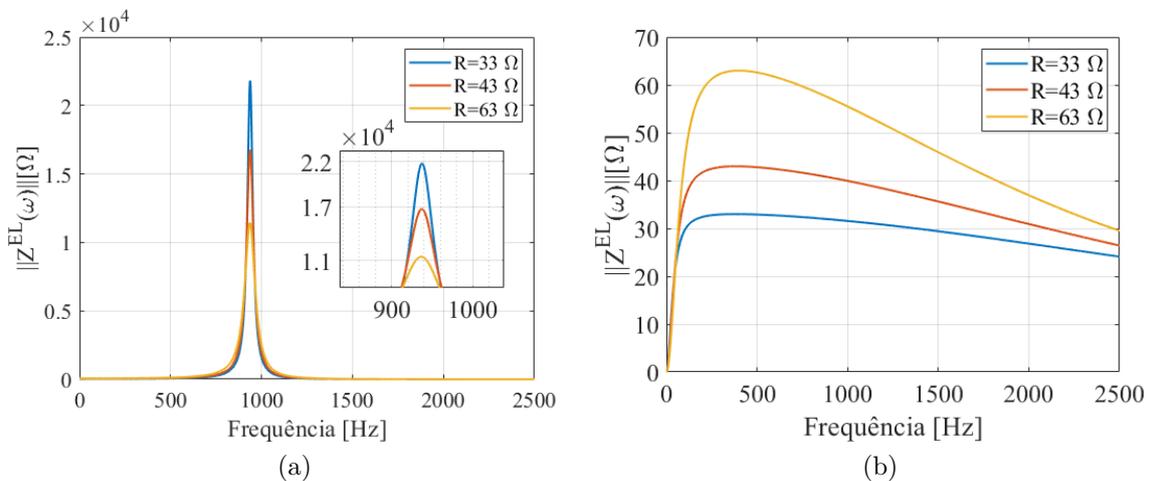


Figura 5.22 – Impedância geral do circuito *shunt* RLC nas configurações: a) Série; b) Paralelo.

Os circuitos *shunts* RL e RLC das Figuras 5.19a, 5.19b, 5.22a e 5.22b, demonstram basicamente o mesmo comportamento de impedância quando associados a semelhantes configurações série e paralelo. Também conhecidos como circuitos *shunts* ressonantes, os circuitos RL tornam-se os circuitos RLC quando são acoplados a um piezoelétrico, porém a diferença está na capacidade de ajustar a rigidez, onde RL é limitado a capacitância piezoelétrica C_p^T e RLC é limitado a seu próprio capacitor C_{SH} , que pode assumir um valor

apropriado para ajustar a rigidez em uma faixa de frequência desejada. Contudo, aplicando as impedâncias gerais de resistor $R = 33$ das Figuras 5.19a e 5.19b na estrutura de viga acoplada com uma camada piezoelétrica (Figura 5.4a), tem-se as FRFs e os diagramas de dispersão demonstrados na Figura 5.23.

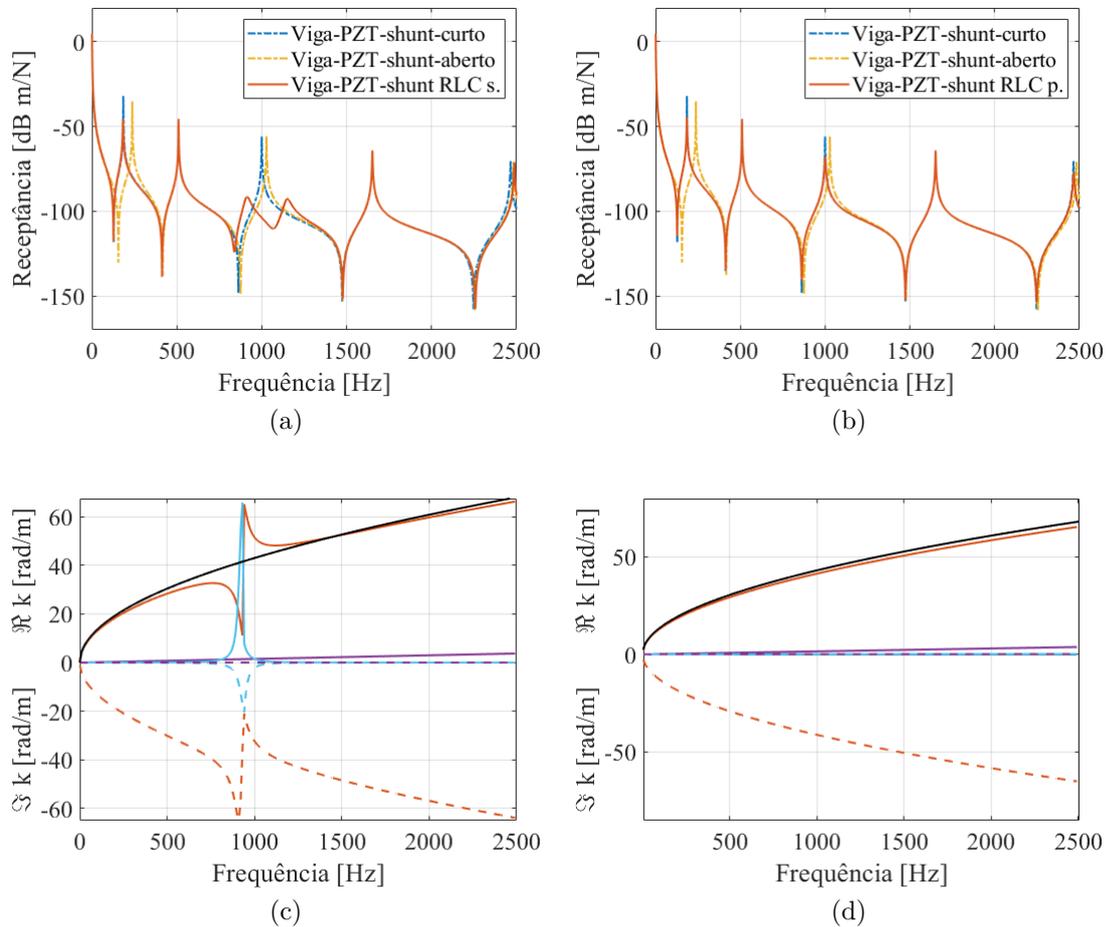


Figura 5.23 – Viga-PZT conectada em circuito *shunt* RLC: a) FRF com *shunt* RLC em série; b) FRF com *shunt* RLC em paralelo; c) Diagrama de dispersão com *shunt* RLC em série; d) Diagrama de dispersão com *shunt* RLC em paralelo.

O efeito de atenuação causado pelo circuito *shunt* RLC em série é demonstrado na Figura 5.23a. Essa atenuação acontece de forma semelhante ao caso fornecido pelo circuito *shunt* RL em série (Figura 5.20a). A propagação da onda retratada nos diagrama de dispersão dos casos do circuito *shunt* RLC em série e paralelo (Figura 5.23c e 5.23d) também apresentam os mesmos comportamentos dos diagramas de dispersão do caso com circuito *shunt* RL de topografia associada. Assim, percebe-se que para essa condição específica retratada, não existe influência visível que seja oriunda do capacitor externo $C = 1KnF$.

Aplicando as impedâncias gerais das Figuras 5.22a e 5.22b nas estruturas de viga acoplada com duas camadas piezoelétricas em série e paralelo (Figuras 5.4b e 5.4c), tem-se as FRFs e os diagramas de dispersão demonstrados na Figura 5.24.

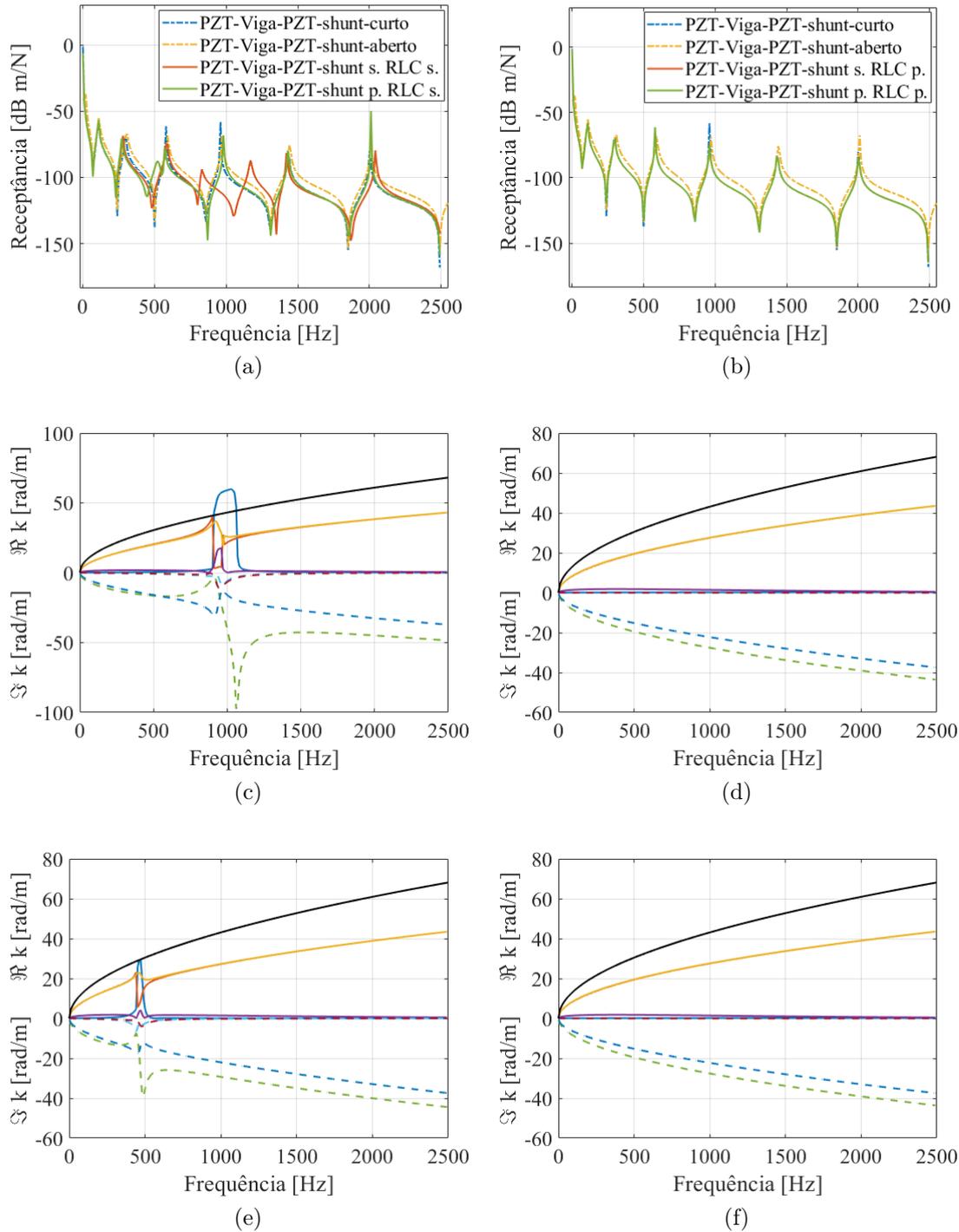


Figura 5.24 – PZT-viga-PZT conectada em circuito *shunt* RLC: a) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao *shunt* RLC em série; b) FRF com PZTs conectados em série e paralelo ao *shunt* RLC em paralelo; c) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao *shunt* RLC em série; d) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em série ao *shunt* RLC em paralelo; e) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao *shunt* RLC em série; f) Diagrama de dispersão com PZTs conectados em paralelo ao *shunt* RLC em paralelo.

O comportamento de ambas as respostas oriundas do circuito *shunt* RLC, presentes na Figura 5.24, apresentam comportamento semelhante as respostas oriundas do caso

com circuito *shunt* RL (Figura 5.21). A conclusão dessa semelhança comportamental está associada diretamente com a homogeneidade das impedâncias gerais que são influenciadas pelos valores de capacitância piezoelétrica C_p^T e de capacitância externa do circuito *shunt* $C = 1KnF$. Contudo, uma diversificação entre as impedâncias dos circuitos *shunt* RL e RLC pode ser melhor ministrada com a presença do componente capacitivo específico, visto que este elemento proporciona ajustes de locação de picos em determinadas faixas de frequência.

5.3 Multi-impedâncias

Uma variação de impedância pode ser criada a partir da junção de impedâncias ajustadas para atenuar em mais de uma frequência determinada. No caso do circuito *shunt* ressonante RL em série, dois pontos distintos de frequência podem ser ministrados com a escolha de uma topografia que mescla dois circuitos *shunt* RL. A Figura 5.25 mostra a representação topográfica do circuito multi-ressonante *shunt* RL.

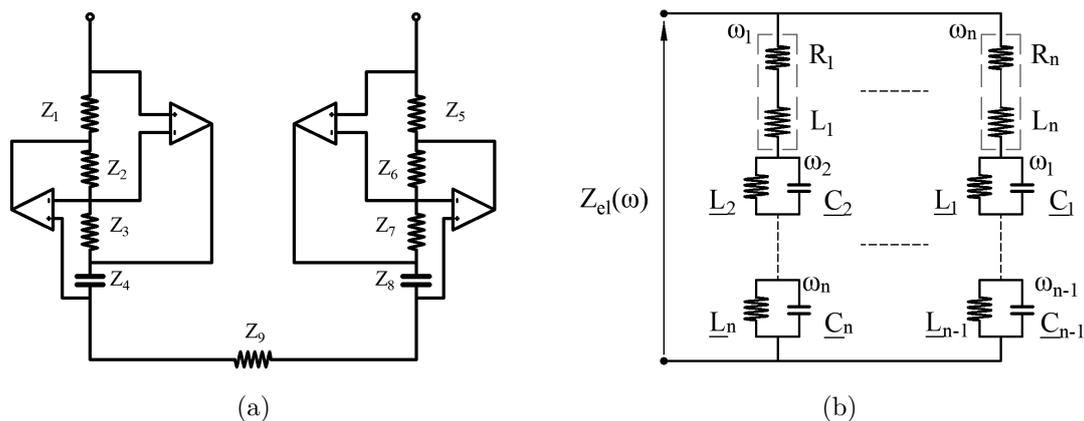


Figura 5.25 – Ilustração de um *shunt* RL multi-ressonante: a) Conexão de dois circuitos RL-shunt equivalente de um piezo transdutor; b) Esboço de componentes eletrônicos ressonantes do circuito multi-ressonante *shunt*.

O circuito multi-ressonante da Figura 5.25 trata a corrente elétrica como uma espécie de filtro dissipador dependente dos valores de indutor e resistor. Logo, a impedância geral do circuito multi-ressonante pode ser demonstrada em função da frequência tunada, conforme mostra a Figura 5.26.

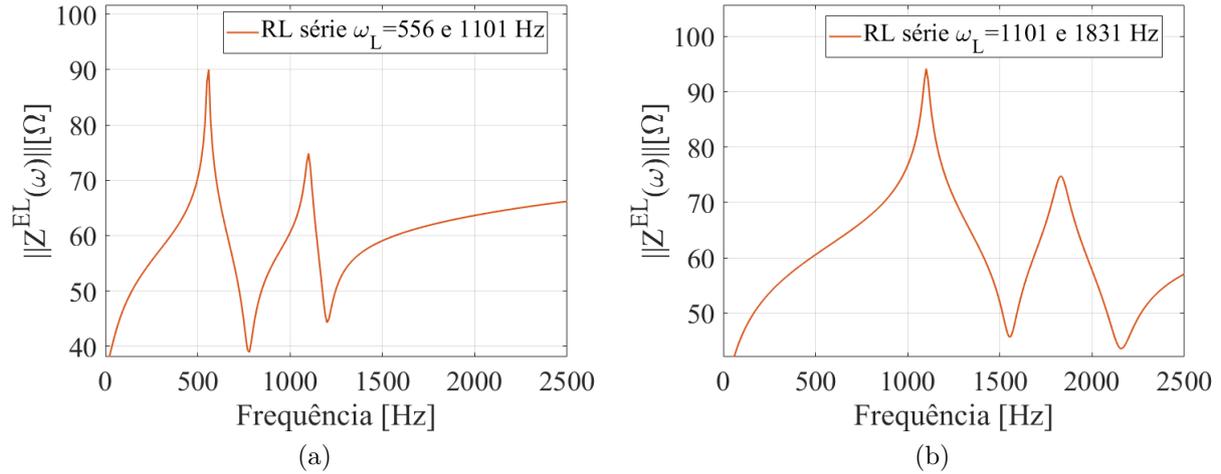


Figura 5.26 – Impedâncias ressonâtes: a) Tunada em 556 e 1101 Hz; b) Tunada em 1101 e 1831 Hz.

Na Figura 5.26a as frequências ω_L escolhidas foram 556 e 1101 Hz, e na Figura 5.26b as frequências ω_L escolhidas foram 1101 e 1831 Hz. Assim, aplicando as relações nodais espectrais da seção 4.3, pode-se conectar o circuito *shunt* multi-ressonante na estrutura de viga acoplada com uma camada piezoelétrica (Figura 5.4a). A Figura 5.28 demonstra as FRFs resultantes dessa conexão.

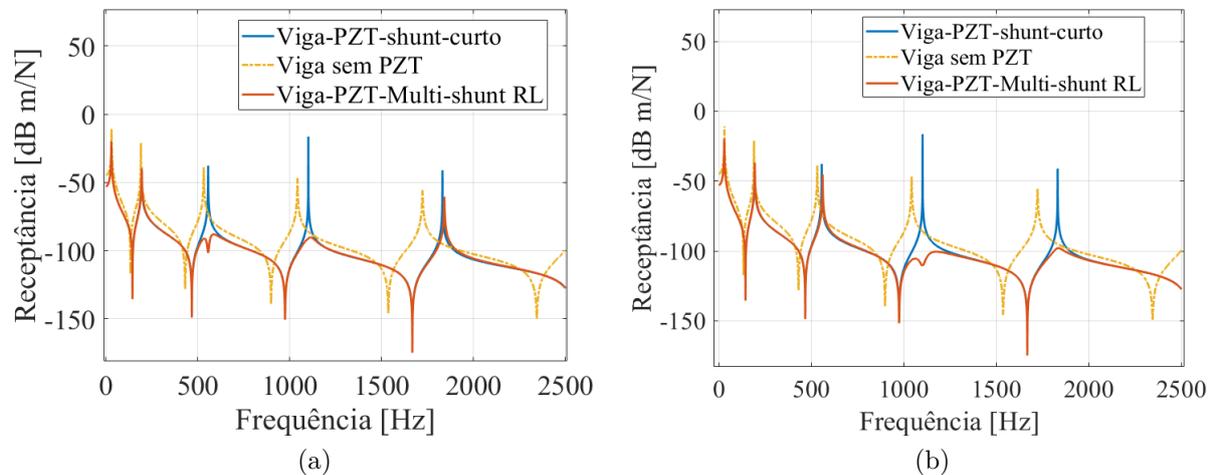


Figura 5.27 – Viga acoplada com uma camada piezoelétrica conectada em circuito *shunt* multi-ressonante em série: a) FRF com *shunt* multi-ressonante tunado em 556 e 1101 Hz; b) FRF com *shunt* multi-ressonante tunado em 1101 e 1831 Hz;

As Figuras 5.27a e 5.27b demonstram as atenuações nas FRFs resultantes do acoplamento do circuito *shunt* multi-ressonante na viga acoplada com uma camada piezoelétrica. Essas atenuações acontecem especificamente nos picos de ressonância localizados em 556 e 1101 Hz para a primeira conexão *shunt*, e 1101 e 1831 Hz para a segunda conexão *shunt*.

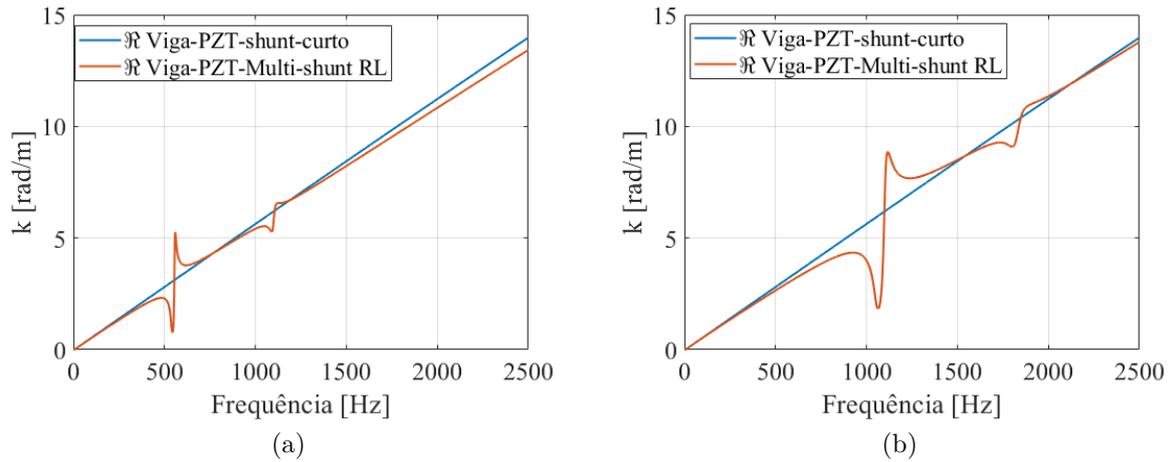


Figura 5.28 – Viga acoplada com uma camada piezoelétrica conectada em circuito *shunt* multi-ressonante em série: a) Diagrama de dispersão com *shunt* multi-ressonante tunado em 556 e 1101 Hz; b) Diagrama de dispersão com *shunt* multi-ressonante tunado em 1101 e 1831 Hz.

As atenuações resultantes dos circuitos *shunt* multi-ressonante também podem ser observadas pelo diagrama de dispersão. Nas Figuras 5.28a e 5.28b, percebe-se que as propagações de ondas apresentam alterações localizadas na mesma frequência em que as impedâncias gerais são tunadas. Além disso, é observável que existe uma relação de proporção entre as deformações nas propagações das ondas e as respectivas atenuações.

5.4 Viga acoplada a quatro piezoelétricos conectados em circuitos *shunt* ressonante

Além das variações geométricas demonstradas na Figura 5.4, tem-se algumas estruturas que utilizam o acoplamento de PZTs de forma periódica para se atingir determinadas características de controle vibracional e propagação de onda. Na Figura 5.29 está demonstrada uma geometria que consiste no acoplamento periódico de quatro PZTs unimorfos, ambos conectados a circuitos *shunt*.

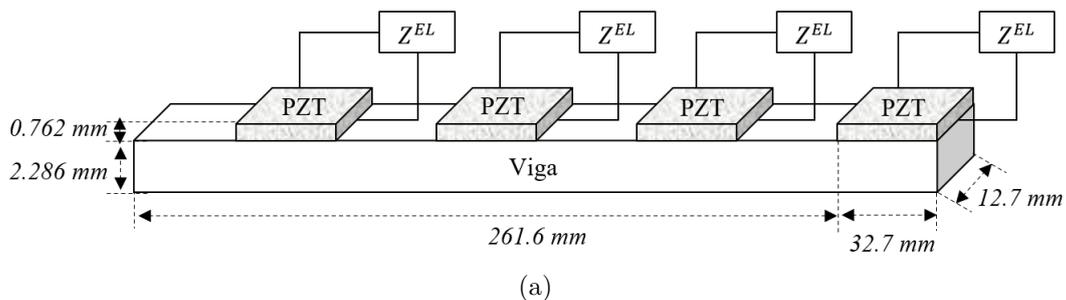


Figura 5.29 – Ilustração de uma viga acoplada com quatro PZTs conectados no circuito *shunt*.

Utilizando a impedância geral do circuito *shunt* ressonante RL em série da Figura 5.19a para conectar nos PZTs unimorfos da Figura 5.29, tem-se as relações de FRFs demonstradas na Figura 5.30.

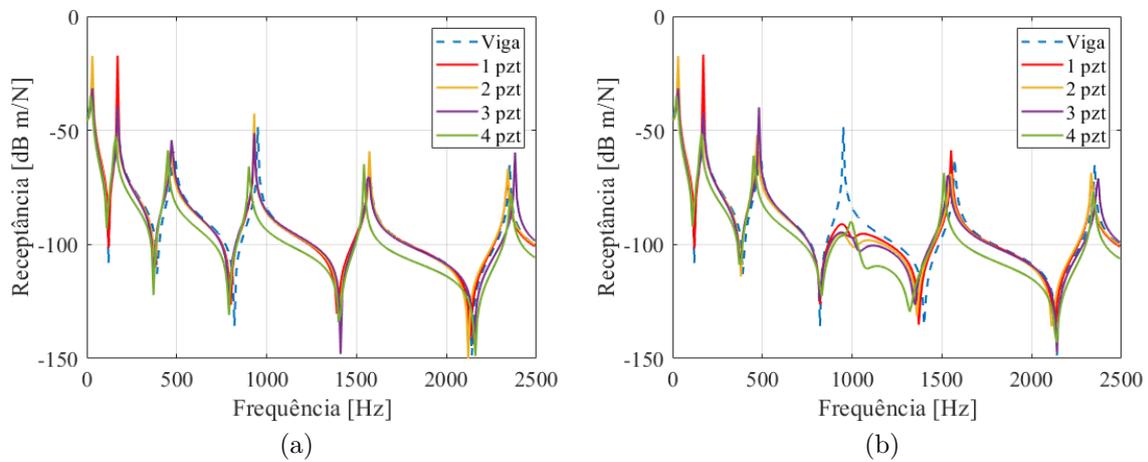


Figura 5.30 – Comparações das FRFs de uma viga com acoplamentos de 1 à 4 PZTs conectados em circuito *shunt* ressonante: a) FRFs com o *shunt* desligado; b) FRFs com o *shunt* ressonante ligado.

Na Figura 5.30 está demonstrada uma comparação entre as FRFs de um *smart material* com *shunt* ressonante desligado e ligado. O efeito de atenuação acontece somente quando *shunt* está ligado, e a atenuação fica localizada na frequência onde a impedância geral é tunada. Na Figura 5.30b, percebe-se que quanto maior é o número de PZTs acoplados na estrutura, maior é o efeito de atenuação na frequência sintonizada.

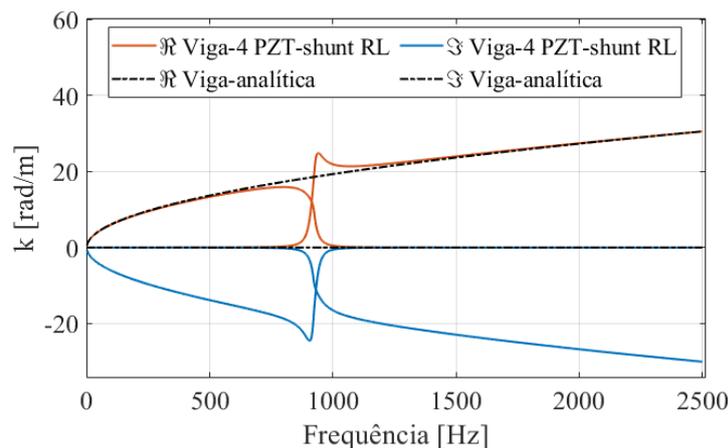


Figura 5.31 – Diagrama de dispersão de uma viga acoplada com quatro PZTs conectados em circuito *shunt* ressonante.

Na Figura 5.31, está demonstrado o diagrama de dispersão da viga acoplada com quatro PZTs conectados em circuito *shunt* ressonante. Uma alteração na propagação da onda é nítida na frequência tunada de 981 Hz, onde um espalhamento de ondas remete à condição de *Bragg*. Essa condição é formada pela combinação das ondas parcialmente

refletidas em planos igualmente espaçados e paralelos. Assim, como a Figura 5.29 possui uma periodicidade de acoplamentos piezoelétricos, tem-se que a ondas moduladas pelas interferências contrutivas e destrutivas do circuito *shunt* formam a onda espalhada. Contudo, segundo Miranda Jr. et al. (2020), a onda espalhada é aquela para a qual a diferença de fase é igual a um número inteiro de comprimentos de onda.

Em resumo, neste capítulo observa-se que a utilização do PZT para atenuar vibrações e propagações de onda é abrangente à diversas topografias de circuito *shunt*. O comportamento vibracional demonstrado pelas FRFs comprovam os efeitos oriundos de cada configuração *shunt* aqui abordada. Da mesma forma, as propagações das ondas demonstradas nos diagramas de dispersão também comprovam os efeitos de atenuação. Contudo, salienta-se que apesar deste trabalho trazer um estudo de topografias muito utilizadas nas literaturas, ainda existem diversas combinações topográficas passíveis de utilização para controlar ou impor algum efeito nas vibrações e propagações de ondas.

6 Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma abordagem de análise dinâmica para uma viga de alumínio acoplada com uma e duas camadas de piezoelétricos. Os piezoelétricos foram associados com circuitos *shunt* resistivo, indutivo, capacitivo, LC série e paralelo, RL série e paralelo, e RLC série e paralelo. O modelo para representar a estruturas foi baseado no Método dos Elementos Espectrais em conjunto com o Método de Matriz de Transferência. A implementação aconteceu no *software* MatLab, e os resultados foram representados na forma de FRF e de diagrama de dispersão.

A princípio, no capítulo 3 são abordadas formulações gerais, formulações de viga de Euler-Bernoulli e formulações de viga de Timoshenko, ambas utilizando o Método de Elemento Espectral. Posteriormente, a formulação do MMT é abordada para calcular a propagação de ondas nos casos em que existir mais de um elemento viga ou quando o elemento possui piezoelétrico conectado à um circuito *shunt*. Por fim, para representar as estruturas inteligentes foram realizadas três modelagens utilizando o MEE. Dois modelos para a estrutura viga de Euler-Bernoulli com uma camada piezoelétrica unimorfo e um modelo de viga de Timoshenko com duas camadas de piezoelétricos bimorfos.

No capítulo 4, a formulação do piezoelétrico acoplado ao circuito *shunt* é apresentada. O acoplamento do circuito *shunt* no piezoelétrico é relacionado pelas propriedades eletromecânicas de admitância e impedância que cada tipo de *shunt* possui. As configurações topográficas de cada circuito *shunt* são apresentadas e associadas com as respectivas admitâncias, impedâncias e demais características eletromecânicas.

No capítulo 5, são apresentadas as respostas das análises realizadas para as estruturas com os efeitos dos acoplamentos piezoelétricos ligados em circuitos *shunt*. No primeiro momento, o comportamento dinâmico do elemento viga é comparado aos comportamentos dos elementos viga com uma e duas camadas piezoelétricas sem o circuito *shunt*. Posteriormente, análises comparativas com elementos viga com uma e duas camadas piezoelétricas são realizadas nas condições de conexão com o circuito *shunt* em curto-circuito, circuito aberto e as demais topografias abordadas no capítulo 4.

Em resumo, dentre os efeitos observados de cada topografia analisada, tem-se que a topografia de circuito resistivo puro apresentou um efeito de amortecimento estrutural na estrutura. Já a topografia do circuito indutivo puro apresentou um efeito de separação de pico de ressonância. No circuito capacitivo observou-se alterações nas posições dos

picos de ressonância e antirressonância na frequência, semelhante a um efeito de mudança na rigidez. Conseqüentemente, no circuito LC observou-se um comportamento semelhante ao do circuito indutivo puro, porém com uma alteração na rigidez que é semelhante ao que acontece no circuito capacitivo. Por fim, os circuitos RL e RLC apresentaram praticamente os mesmos comportamentos, sendo que ambos demonstraram atenuações em frequência de projeto para a configuração em série e relações de amortecimento para a configuração paralelo.

Visto que o circuito ressonante apresentou a melhor atenuação, uma topografia do circuito multi-ressonante foi abordada para análise de FRF e de diagrama de dispersão, onde constatou-se a versatilidade dessa topografia para atenuar a vibração em duas faixas de frequência de projeto. Posteriormente, uma estrutura de viga acoplada com 4 PZT distribuídos de forma periódica foi analisada com o circuito *shunt* ressonante, onde constatou-se um efeito de espalhamento de onda conhecido pelo termo espalhamento de *Bragg*.

Os métodos propostos no presente trabalho apresentaram boa viabilidade para as estruturas analisadas. Logo, vale salientar que utilização do MEE e do MMT para representar os controles vibracionais e de propagação de ondas dos piezoelétricos com circuitos *shunt*, apresentou resultados satisfatórios. No entanto, ficaram evidente a existência de problemas passíveis de estudos complementares, conforme está descrito na subseção 6.0.2.

6.0.1 Contribuições

Dentre as contribuições presentes neste trabalho destaca-se os seguintes tópicos:

- Utilização do Método de Elementos Espectrais e do Método de Matriz de Transferência Espectral para aplicações de controle vibracional passivo e de propagação de onda com o circuito *shunt*;
- Discursão dos efeitos vibracionais e de propagação de onda para as estruturas de viga com uma e duas camadas de piezoelétricos conectados em circuito *shunt* resistivo, indutivo, capacitivo, LC série e paralelo, RL série e paralelo, e RLC série e paralelo;
- A análise do efeito de amortecimento estrutural oriundo do circuito *shunt* resistivo;
- A análise do efeito de atenuação unimodal com o circuito *shunt* RL e RLC, ambos série;
- A análise do efeito das técnicas de controle multimodal com o circuito *shunt* ressonante;

- A análise do efeito de *Bragg* em uma viga acoplada com 4 PZTs conectados com circuito *shunt* ressonante;

6.0.2 Trabalhos Futuros

Com a implementação realizada, outras possibilidades de extensão são sugeridas para trabalhos futuros, tais como:

- Validar as análises com experimentos e com outros métodos numéricos;
- Investigar o efeito de *Bragg* em outras combinações de estruturas e circuitos *shunt*;
- Investigar o efeito de *Band Gap* em combinações de estruturas com circuitos *shunt*;
- Discutir influências relacionadas ao tamanho e propriedades dos piezoelétricos;
- Utilizar o MEE para modelar estruturas flexíveis mais complexas com diferentes combinações de circuitos *shunt*;

6.0.3 Publicações

Durante o desenvolvimento desta dissertação foram publicados os seguintes trabalhos:

- MOURA, B. B.; MACHADO, M. R. Analysis of vibration attenuation in a beam coupled with a piezoelectric in configuration shunt using the spectral element method. 25th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM, Uberlândia, MG, 2019.
- MACHADO, M. R. et al. Flexural waves propagation in piezoelectric metamaterial beam. 15th International Conference Dynamical Systems - Theory and Applications, Lodz, Poland, 2019.
- MACHADO, M. R. et al. Spectral element approach for flexural waves control in smart material beam with single and multiple resonant impedance shunt circuit. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2020.
- MOURA, B. B. et al. Vibration and wave propagation control in a smart metamaterial beam with periodic arrays of shunted piezoelectric pathes. 49th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering, INTER-NOISE, Seoul, Korea, 2020.

Referências

- AIROLDI, L.; RUZZENE, M. Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos. *New Journal of Physics* 13, p. 113010, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 8.
- AIROLDI, L.; RUZZENE, M. Wave propagation control in beams through periodic multi-branch shunts. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, p. 1567–1579, 2011. Citado 4 vezes nas páginas ix, 2, 8 e 42.
- AQUINO, A. S. Controle de vibração de um sistema sob desbalanceamento rotativo utilizando atuador de liga com memória de forma. Tese, Universidade Federal da Paraíba, 2011. Citado na página 6.
- BESKOS, D.; NARAYANAN, G. Use of dynamic influence coefficients in forced vibration problems with the aid of fast fourier transform. *Journal Computers and Structures*, p. 145–150, 1978. Citado na página 9.
- BOEING. 2021. Disponível em: <<https://boeing.mediaroom.com/>>. Citado 2 vezes nas páginas ix e 2.
- CASADEI, F. et al. Broadband vibration control through periodic arrays of resonant shunts: Experimental investigation on plates. *Smart Materials and Structures*, 2010. Citado 3 vezes nas páginas ix, 2 e 6.
- CHEN, Y. Y. et al. Band gap control in an active elastic metamaterial with negative capacitance piezoelectric shunting. *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 136, 2014. Citado na página 8.
- CHENG, C. H. et al. Analysis and experiment for the deflection of a shear-mode pzt actuator. *Smart Materials and Structures*, v. 16, p. 230–236, 2007. Citado na página 5.
- CLARK, W. W. Vibration control with state-switched piezoelectric materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 11, p. 263–271, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 8.
- CONCEICAO, S. M. Estudo de modelos espectrais de vigas para controle ativo de vibrações e monitoramento da integridade estrutural. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2016. Nenhuma citação no texto.
- CORR, L. R. Comparison of low-frequency piezoelectric switching shunt techniques for structural damping. *Smart Materials and Structures*, v. 11, p. 370–376, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 8.

- DAVIS, C. L.; LESIEUTRE, G. A. A modal strain energy approach to the prediction of resistively shunted piezoceramic damping. *Journal of Sound and Vibration*, v. 184, p. 129–139, 1995. Citado na página 8.
- DAVIS, C. L.; LESIEUTRE, G. A. An actively tuned solid-state vibration absorber using capacitive shunting of piezoelectric stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, v. 232, p. 601–617, 2000. Citado na página 8.
- DOYLE, J. F. Wave propagation in structures: a spectral analysis approach. New York: Springer-Verlag, v. 2, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 7, 9 e 11.
- FANG, X. et al. Experimental and theoretical investigation of lowering the band gaps of phononic crystal beams through fluid-solid coupling. *Crystals* 7, no. 12: 366, 2017. Citado na página 9.
- FORWARD, R. L. Electronic damping of vibrations in optical structures. *J. Appl. Opt.* 18(5), p. 690–697, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 7, 39 e 40.
- GANG, W. et al. Vibration attenuations induced by periodic arrays of piezoelectric patches connected by enhanced resonant shunting circuits. *Smart Materials and Structures*, v. 20, n. 12, p. 125019, 2011. Citado na página 8.
- GAUTSCHI, G. Piezoelectric sensor. Ed. Springer, v. 1, 2002. Citado na página 5.
- GRIPP, J. A.; RADE, D. A. Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 112, p. 359–383, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 1, 5, 6, 8 e 40.
- GUYOMAR, D. et al. A new vibration damping method using a semi-passive control. 2ND EAA International Symposium on Hydroacoustics, 1999. Citado na página 8.
- HAGOOD, N. W.; FLOTOW, A. V. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal Sound Vibration*, v. 2, p. 243–268, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 7, 38 e 40.
- HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. 7. ed. São Paulo: Rio de Janeiro, Pearson, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 20.
- HOLLKAMP, J. J.; GORDON, R. W. An experimental comparison of piezoelectric and constrained layer damping. *Smart Materials and Structures*, v. 5, p. 715–722, 1996. Citado na página 7.
- INMAN, D. J. Engineering vibration. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 15.
- JAFFE, B. et al. Engineering vibration. 2. ed. upper saddle river: Prentice-hall. Piezoelectric Ceramics. New York: Academic Press, 1971. Citado na página 38.
- LEE, U. Spectral element method in structural dynamics. v. 1, 2009. Citado 8 vezes nas páginas 7, 9, 11, 15, 17, 23, 28 e 32.
- LEE, U.; KIM, J. Dynamics of elastic-piezoelectric two-layer beams using spectral element method. *International Journal of Solids and Structures*, v. 37, p. 4403–4417, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 9, 23 e 43.

LEE, U.; KIM, J. Spectral element modeling for the beams treated with active constrained layer damping. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, p. 5679–5702, 2001. Citado na página 9.

LEO, D. J. Engineering analysis of smart material systems. John Wiley and Sons, New Jersey, p. 1–7, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 6.

LESIEUTRE, G. A. Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials. *The Shock and Vibration Digest*, v. 30, p. 187–195, 1998. Citado na página 8.

LIMA, J. j. Modelagem de sensores e atuadores piezelétricos com aplicações em controle ativo de estrutura. Tese de Doutorado, Depto. De Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 243p, 1999. Citado na página 1.

MACHADO, M. R. et al. Flexural waves propagation in piezoelectric metamaterial beam. 15th International Conference Dynamical Systems - Theory and Applications, Lodz, Poland, 2019. Citado na página 10.

MACHADO, M. R. et al. Spectral element approach for flexural waves control in smart material beam with single and multiple resonant impedance shunt circuit. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2020. Citado na página 10.

MEIROVITCH, L. Methods of analytical dynamics. Mineola: Dover, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 24.

MIN, J. B. et al. Shunted piezoelectric vibration damping analysis including centrifugal loading effects. Structural Dynamics, and Materials Conference. Orlando, Florida, 2010. Citado 3 vezes nas páginas ix, 1 e 2.

Miranda Jr., E. et al. Wave attenuation in elastic metamaterial thick plates: Analytical, numerical and experimental investigations. *International Journal of Solids and Structures*, v. 204-205, p. 138 – 152, 2020. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768320303012>>. Citado na página 70.

MOURA, B. B. et al. Vibration and wave propagation control in a smart metamaterial beam with periodic arrays of shunted piezoelectric pathes. 49th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering, INTER-NOISE, Seoul, Korea, 2020. Citado na página 10.

MOURA, B. B.; MACHADO, M. R. Analysis of vibration attenuation in a beam coupled with a piezoelectric in configuration shunt using the spectral element method. 25th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM, Uberlândia, MG, 2019. Citado na página 10.

NEUBAUER, M.; WALLASCHEK, J. Vibration damping with shunted piezoceramics: Fundamentals and technical applications. *Mech. Syst. Signal Process.* 36,, p. 36–52, 2013. Citado 3 vezes nas páginas ix, 1 e 2.

PARK, H. W. et al. Spectral element formulation for dynamic analysis of a coupled piezoelectric wafer and beam system. *Computers and Structures*, v. 8, p. 567–580, 2010. Citado na página 10.

PETTYT, M. Finite element vibration analysis. Cambridge University Press, New York, 2010. Citado na página 6.

- RAO, S. Vibrações mecânicas. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2008. Citado na página 15.
- SANTANA, D. C. Modelagem numérica e otimização de shunts piezoelétricos aplicados ao controle de vibrações. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, p. 197, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 8.
- SANTANA, D. C. et al. Estudo de técnicas de controle de vibração empregando piezocerâmicas combinadas com circuitos shunt. 13º POSMEC - Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. FEMEC/UFU, Uberlândia, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 1, 6 e 8.
- SEBA, B. et al. Vibration attenuation using a piezoelectric shunt circuit based on finite element method analysis. *Smart Material and Structures*, 2006. Citado 3 vezes nas páginas ix, 1 e 2.
- SÉNÉCHAL, A. Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques - application aux turbomachines. Ph.D. thesis, CNAM, 2011. Citado 3 vezes nas páginas ix, 1 e 2.
- SUGINO, C. et al. Design and analysis of piezoelectric metamaterial beams with synthetic impedance shunt circuits. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 23, n. 5, p. 2144–2155, 2018. Citado na página 6.
- USIK, L. Vibration analysis of one-dimensional structures using the spectral transfer matrix method. *Engineering Structures*, v. 22, p. 681–690, 2000. Citado na página 21.
- VIANA, F. A.; STEFFEN, J. V. Multimodal vibration damping through piezoelectric patches and optimal resonant shunt circuits. *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. and Eng.*, XXVIII, p. 293–310, 2006. Citado na página 8.
- WU, S.-y. Piezoelectrics shunts with a parallel r-l circuit for structural damping and vibration control. *SPIE 2720*, p. 259–269, 1996. Citado na página 7.
- WU, Z.-J.; LI, F.-M. Dynamic properties of three-dimensional piezoelectric kagome grids. *Waves in Random and Complex Media*, p. 25:3, 361–381,, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 36.
- ZHONG, W.; WILLIAMS, F. On the direct solution of wave propagation for repetitive structures. *Journal of Sound and Vibration*, v. 181, p. 485–501, 1995. Citado na página 23.
- ZHOU, W. et al. Vibration and wave propagation attenuation for metamaterials by periodic piezoelectric arrays with high-order resonant circuit shunts. *Smart Materials and Structures*, v. 24(6), 2015. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 8.