



Universidade de Brasília  
Instituto de Física

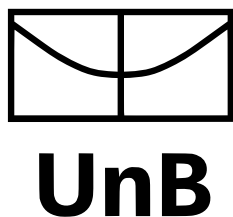
**Interação de Quarks-Antiquarks Pesados  
Não-Relativísticos na Mecânica Quântica Simplética**

Renato Rodrigues Luz

Brasília-DF

2021





Universidade de Brasília  
Instituto de Física

**Interação de Quarks-Antiquarks Pesados  
Não-Relativísticos na Mecânica Quântica Simplética**

Dissertação apresentada ao Instituto de  
Física da Universidade de Brasília, para  
à obtenção do título de Mestre em Física.

Renato Rodrigues Luz

Orientador: Dr. Prof. Ademir Eugênio de Santana

Coorientador: Dr. Prof. Rendisley Aristóteles dos Santos Paiva

Brasília-DF

2021



# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, Senhor eterno, abrigo seguro. O desenvolvimento do presente trabalho escrito nas páginas seguintes foi fruto de intensa pesquisa, muito esforço e dedicação. Mas, a realização só foi possível mediante a imensa contribuição do professor Dr. Ademir Eugênio de Santana pela excelente atenção e orientação. Uma vez que, esteve presente propondo os melhores conselhos e ensinamentos que será constantemente lembrados em minha carreira científica e nesta vida. Um orientador extremamente disciplinado e seguro, sua disponibilidade, apoio e incentivo foram fundamentais, eternamente grato pela confiança.

Ao incansável professor Dr. Rendisley Aristóteles dos Santos Paiva (Meinster der Galaxis), um coorientador extremamente competente, disposto e acessível, que contribuiu exaustivamente na minha formação, me guiando ao longo da pesquisa tornando o sonho deste trabalho possível.

Devo agradecer aos meus amigos do grupo produto estrela, grande amigo Gustavo Petronilo, pelas valiosas discussões e colaboração na concretização deste trabalho, ao professor Ronni, ao professor Eduardo, Kayo Vaz, Roemir, Lucas Rodrigues e o Professor Ademir, que deram contribuições importantes, sempre motivando a todos com muito entusiasmo, alegria, tornando o ambiente de trabalho mais produtivo.

Agradeço em especial, as duas mulheres mais importantes, minha querida mãe Francisca Costa Rodrigues e minha namorada Gabriella Ambrósio pelo apoio incondicional, que sempre estiveram presentes nos momentos mais difíceis, dando motivação para continuar nessa caminhada acadêmica, superando todos os percalços no caminho. Aqui presto grande admiração e amor eterno.

Aos meus irmãos Rafael Rodrigues Luz, Raycilene Luz e a minha tia Raimunda que

estão presentes em minha vida.

Aos meus amigos que foram imprescindíveis para a minha jornada até aqui, destaco Patrícia do Nascimento, Reginaldo Nunes, João Victor, Gabriel Serrão, Raimundo Nazareno, Maria do Socorro Vieira, Francisco Ambrósio, Maria das Graças, aos professores do departamento de Física da UEMA, professor Edvan Moreira, professor José Clete, professor Juca e o professor Fernando Moucherek. Deixo aqui minha profunda gratidão e sinceros agradecimentos a todos.

Aos estimados amigos da pós graduação do Instituto de Física da Universidade de Brasília. Sou grato a todos os professores que colaboraram na minha formação durante o mestrado e os funcionários da secretaria da pós graduação do Instituto de Física da Universidade de Brasília IF-UnB.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo suporte financeiro.

“O segredo da sabedoria, do poder e do conhecimento é a humildade. ”

Ernest Hemingway

“Podemos dizer que a mecânica quântica é uma deformação da mecânica clássica. A constante de Planck  $h$  é o parâmetro de deformação correspondente. Esta é para mim a formulação mais concisa do princípio da correspondência e explica o que se entende por quantização.”

Ludwig Faddeev





# Resumo

Exploramos um sistema de interação forte bidimensional que representa um quark-antiquark pesado de estado ligado, onde consideramos um potencial que possui um termo coulombiano e um termo linear. Primeiro, resolvemos a equação de Schrödinger no espaço de fase com o potencial linear. No segundo caso, para tratar a equação de Schrödinger no espaço de fase, um procedimento baseado na transformação de Bohlin é apresentado e aplicado para o potencial Cornell. Neste caso, o sistema é separado em duas partes, um análogo ao oscilador e outro utilizando teoria de perturbação. Em seguida, quantizamos o hamiltoniano com os operadores estrela na representação do espaço de fase de modo que podemos determinar através do método algébrico as autofunções do hamiltoniano não perturbado (solução do oscilador), sendo que a outra parte do hamiltoniano foi usado o método de perturbação. As autofunções encontradas (perturbada mais não-perturbada) estão associados com a função de Wigner via o produto Weyl utilizando a teoria de representação do grupo de Galilei no espaço de fase. A função de Wigner é analisada, é estudado a não classicalidade dos estados pelo indicador de não classicalidade da função de Wigner.

**Palavras Chaves:** Interação forte, Potencial Cornell, Função de Wigner, Espaço de fase, Transformação de Bohlin.



# Abstract

We explore a bi-dimensional strong interaction system that represent the bound state of heavy quark-antiquark, where we consider a potential which it has coulombian and linear terms. First, we solve the Schrödinger equation in the phase space with the linear potential. In the second case, to treat the Schrödinger equation in the phase space, a procedure based on the Bohlin transformation is presented and applied to the Cornell potential. In this case, the system is separated into two parts, one analogous to the oscillator and the other we treat using perturbation method. Then, we quantizes the Hamiltonian with aid star operators in the phase space representation so that we can determine through the algebraic method the autofunctions of the undisturbed Hamiltonian (oscillator solution), and the other part of the Hamiltonian was the perturbation method. The eigenfunctions found (undisturbed plus disturbed) are associated with the Wigner function via Weyl product using the representation theory of Galilei group in the phase space. The Wigner function is analyzed, the non-classicality of states is studied by the non-classicality indicator of the Wigner function.

**Key words:** Strong interaction, Cornell potential, Wigner function, Phase space, Bohlin transformation.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Função de Wigner e o Produto de Weyl</b>	<b>5</b>
2.1 A Matriz Densidade . . . . .	6
2.2 Função de Wigner e suas propriedades . . . . .	7
2.3 Operadores Equivalentes na Representação de Wigner . . . . .	17
2.4 O Produto de Weyl . . . . .	19
2.5 Evolução Temporal da Função de Wigner . . . . .	21
2.6 Propriedades do Produto de Weyl . . . . .	22
<b>3 Teoria de Representação no Espaço de Fase</b>	<b>27</b>
3.1 Espaço de Hilbert e a Estrutura Simplética . . . . .	27
3.2 Operadores de Bopp . . . . .	29
3.3 Operadores no Espaço de Hilbert sobre $\Gamma$ . . . . .	30
3.3.1 Operadores Unitários . . . . .	31
3.3.2 Operador Translação no Espaço de Hilbert Simplético $\mathcal{H}(\Gamma)$ . . . . .	32
3.3.3 Operador Posição no Espaço de Hilbert Simplético $\mathcal{H}(\Gamma)$ . . . . .	33
3.4 O Grupo de Galilei . . . . .	34
3.5 Equação de Schrödinger no Espaço de Fase . . . . .	40
<b>4 Interação Forte no Espaço de Configurações</b>	<b>45</b>
4.1 Quarks e Léptons . . . . .	46
4.2 Campos de Calibre . . . . .	46
4.3 Campo Escalar de Klein-Gordon para Spin 0 . . . . .	48

---

4.4	Campo Spinorial de Dirac para Spin $\frac{1}{2}$ . . . . .	49
4.5	Transformação de Calibre Local . . . . .	50
4.6	Representação SU(3) do Quark . . . . .	52
4.7	Densidade de Lagrangiana de Campo da QCD . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Interação de Quarks-Antiquarks</b>	
	<b>Pesados Não-Relativísticos</b>	<b>55</b>
5.1	Potencial Linear . . . . .	56
5.2	Potencial Cornell . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Considerações Finais e Perspectivas</b>	<b>77</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo do Sistema Interação Forte</b>	<b>79</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>83</b>

# Lista de Figuras

2.1	Gráfico da função de Wigner versus $q$ e $p$ referente ao estado fundamental ( $n = 0$ ) do oscilador harmônico. . . . .	9
2.2	Gráfico da função de Wigner versus $q$ e $p$ referente ao primeiro estado excitado ( $n = 1$ ) do oscilador harmônico. . . . .	9
5.1	Potencial de Cornell feito no Matlab. . . . .	56
5.2	Função de Wigner para o estado fundamental do méson $c\bar{c}$ . . . . .	59
5.3	As figuras 5.2(a)-(d) representa os gráficos seccionados da figura 5.2 para o nível de energia mínima do méson $c\bar{c}$ de acordo com a variação de energia cinética. . . . .	60
5.4	Gráfico de $f_w(q, p)$ versus $q$ e $p$ para o estado fundamental do méson $b\bar{b}$ . . . . .	62
5.5	As figuras 5.5(a)-(d) representa os gráficos seccionados da figura 5.4 para o nível de energia mínima do méson $b\bar{b}$ de acordo com a variação de energia cinética. . . . .	63
5.6	Gráfico de $f_w(q, p)$ versus $q$ e $p$ para o estado fundamental do méson $b\bar{c}$ . . . . .	64
5.7	As figuras 5.7(a)-(d) representa os gráficos seccionados da figura 5.6 para o nível de energia mínima do méson $b\bar{c}$ de acordo com a variação de energia cinética. . . . .	65
5.8	Gráfico de $f_w(q, p)$ versus $q$ e $p$ para o estado fundamental do méson $c\bar{c}$ . . . . .	73
5.9	Gráfico de $f_w(q, p)$ versus $q$ e $p$ para o primeiro estado excitado do méson $c\bar{c}$ . . . . .	74
5.10	Função de Wigner para o primeiro estado excitado do méson $c\bar{c}$ . . . . .	74





# Lista de Tabelas

5.1	Parâmetro de negatividade $\eta(\psi)$ . . . . .	75
-----	--	----



# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho investigaremos um sistema de interação forte descrito por quarks-antiquarks pesados no espaço de fase. O sistema especificamente é caracterizado por um potencial de Cornell que é a combinação de um potencial linear mais um potencial de Coulomb. O estudo destes potenciais leva em consideração duas características fundamentais da Cromodinâmica Quântica ( $QCD$ ), a liberdade assintótica e o confinamento de quark [86, 20, 25]. Outro interesse é que o potencial de Cornell pode ser utilizado para analisar a transição entre as fases de confinamento e deconfinamento da matéria [21, 22, 25, 27, 26].

Existem vários estudos realizados com o potencial de Cornell na literatura. Como exemplo, tem-se o trabalho de Vega e Flores [24] em que resolveram a equação de Schrödinger com o potencial de Cornell utilizando o método variacional e Mecânica Quântica Supersimétrica ( $SUSYQM$ ), onde encontraram os autovalores, autofunções e função de onda na origem do potencial de Cornell [23]. Rodrigo *et al*, calcularam a energia correspondente para uma dada separação entre um quark-antiquark a partir da ação de Nambu-Goto usando um espaço  $AdS$  deformado [21], e mostraram que a configuração de energia tem a forma de um potencial de Cornell [21]. Khoka *et al* [27, 26] utilizaram o método iterativo exato analítico ( $AEIM$ ) para resolver a equação de Schrödinger  $N$ -dimensional com o potencial de Cornell estendido onde obtiveram a energia e o espectro de massa de quark-antiquark pesado [26]. Leite, Belich e Vitória a procura de soluções de estado ligado, analisaram a interação entre uma partícula escalar e um potencial do tipo Cornell no cenário da teoria de Kaluza-Klein [25]. Apesar desses vários estudos, a análise desses estados no espaço de fase não foi estudado.

A motivação deste trabalho é que não foi observado ainda na literatura um estudo via

função de Wigner para o sistema de quarks-antiquarks pesados no formalismo da Mecânica Quântica Simplética. Nesta direção, uma análise da não-classicalidade no espaço de fase é importante para obter pistas acerca da natureza estatística do estado quântico do méson. Sendo assim, a função de Wigner é fisicamente atraente. A função de Wigner é real e não é positiva definida, então,  $f_w(q, p)$  é identificada como uma quase-distribuição de probabilidade [46, 14, 16, 48]. Todavia, uma característica particular de  $f_w(q, p)$ , é as integrais marginais  $\int dq f_w(q, p) = |\sigma(p)|^2$  e  $\int dp f_w(q, p) = |\sigma(q)|^2$  que são autênticas distribuições de probabilidades [30, 53]. Outro aspecto importante, é que em experimentos recentes, a função de Wigner foi medida para vários estados quânticos de um íon de berílio  ${}^9\text{Be}^+$  aprisionados em uma armadilha de Paul [42, 28].

Como ponto de partida, em 1932 Wigner propôs o primeiro formalismo para a descrição da mecânica quântica no espaço de fase [6, 13, 46, 9, 7, 8, 5, 4, 3, 1, 2]. Ele foi motivado pelo problema de encontrar formas para melhorar a mecânica estatística. Baseado na matriz densidade, trata as equações de transporte para super-fluídos [46]. Na compreensão da teoria cinética o conceito de espaço de fase surge como uma ferramenta natural [30, 3]. Nesta direção, Wigner introduziu seu formalismo utilizando um tipo de transformada de Fourier da matriz densidade [30, 53]  $\rho$ , que por sua vez, resultou na função de Wigner,  $f_w(q, p)$  [30, 53, 46]. No formalismo de Wigner [3, 46, 14, 13] cada operador  $A$ , definido no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , é associado com uma função, chamada de  $a_w(q, p)$ , no espaço de fase  $\Gamma$  [46, 14, 47]. Então, existe uma aplicação dada por  $\Omega_w : A \rightarrow a_w(q, p)$ , tal que a álgebra associativa dos operadores definidos em  $\mathcal{H}$ , leva a uma álgebra associativa (mas não comutativa) em  $\Gamma$ , dada por  $\Omega_w : AB \rightarrow a_w \star b_w$ , onde o produto estrela (produto de Weyl)  $\star$  é definido por [46]

$$a_w \star b_w = a_w(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} b_w(q, p) \quad (1.1)$$

onde  $\Lambda = \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q - \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p$ . Vamos usar no trabalho  $\hbar = c = 1$  as unidades naturais. Observa-se que a Eq. (1.1), pode ser vista como um operador  $\hat{A} = a_w \star$  atuando em funções  $b_w$ , tal que  $\hat{A}(b_w) = a_w \star b_w$  [46]. O produto estrela é interessante para estudos de representações unitárias irredutíveis de grupos cinemáticos considerando operadores do tipo  $a_w \star$  [46]. Consequentemente, existe procedimentos distintos analisados no que diz respeito a natureza não comutativa em  $\mathcal{H}$  que é associada a estrutura não comutativa em  $\Gamma$  [10, 11, 12]. Assim, este formalismo de estrutura simplética e o produto de Weyl tem sido estudado nas representações unitárias do espaço de fase, permitindo a representação simplética da equação de Schrödinger [13]. Esta abordagem de estrutura simplética fornece um procedimento adequado para deduzir a função de Wigner utilizando de modo concreto a invariância

de calibre e efeitos de superposição [13, 12]. Esta representação simplética tem sido aplicado em teorias cinéticas e [13], Amorim *et al* [14] estenderam para o caso relativístico utilizando operadores do tipo  $a_w \star$  e utilizando representações unitárias e irredutíveis. Com isso, levaram à equação de Klein-Gordon e a equação de Dirac no espaço de fase [11, 48, 16, 15, 10].

Utilizamos a mecânica quântica simplética com o objetivo de analisar o comportamento da função de Wigner para o setor da cromodinâmica quântica, interação forte de quarks-antiquarks pesados. Primeiro, considerando o potencial linear que é o modelo mais simples do potencial de Cornell. Neste caso, estudamos a função de Wigner para três tipos de mésons ( $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$ ). A seguir incluímos o termo de Coulomb e o parâmetro de negatividade associado ao estado fundamental e o primeiro estado excitado do méson  $c\bar{c}$  é calculado, resultado até o momento não disponível na literatura.

A dissertação é organizada da seguinte maneira. No capítulo 2, apresentamos um esboço sobre a função de Wigner e o produto de Weyl e suas propriedades. No capítulo 3, uma teoria de representação unitária no espaço de fase é construída. No capítulo 4, é também um capítulo de revisão sobre o modelo padrão de física de partículas, enfatizando a Cromodinâmica Quântica. No capítulo 5, estudamos a interação quarks-antiquarks pesados no espaço de fase analisando o comportamento da função de Wigner. Por fim, no capítulo 6, as considerações finais e perspectivas são apresentadas.



## Capítulo 2

# Função de Wigner e o Produto de Weyl

A Mecânica Quântica utilizando a regra de quantização de Weyl e a quase-distribuição de Wigner, possibilita que sistemas quânticos sejam examinados no espaço de fase [17]. A quase-distribuição de Wigner foi apresentada em 1932 por Wigner [29]. Wigner tinha como propósito efetuar correções quânticas a mecânica estatística, e também tentava resolver o problema da superfluidez do hélio [30]. Apesar disso, antes de Wigner, em 1930, Dirac interessado pelo estudo da distribuição de elétrons em átomos em regimes semi clássico, introduziu uma representação da mecânica quântica no espaço de fase [31]. O estudo em particular de Dirac, era a representação de operadores no espaço de fase e da mesma forma, escreve a equação de evolução temporal para a densidade de elétrons que ficou conhecida como equação de Liouville-von Neumann [32]. Tanto o trabalho de Dirac quanto o de Wigner segue procedimentos semelhantes, sendo o de Wigner com peculiaridades que levam a estrutura da geometria não-comutativa [32, 33].

O mapeamento no espaço de fase da mecânica clássica inserido no espaço de fase quântico ocorre pela troca de variáveis  $q$  e  $p$  por operadores hermitianos  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$ , respeitando a relação  $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar\mathbf{1}$ . Neste sentido, observa-se que é perdida a ideia de ponto, onde  $\hbar$  limita uma área no espaço de fase com valor mínimo [35, 29, 34]. Mas, se recupera a ideia de ponto quando se toma o limite clássico  $\hbar \rightarrow 0$  [37, 57, 38, 35, 40].

A função de Wigner tem se mostrado uma ferramenta poderosa não apenas de cálculo, mas com diversas aplicações no campo da Física, como exemplo, mecânica estatística, óptica quântica, Física de partículas e etc [36, 37, 38, 35, 40]. Neste capítulo, o conteúdo está disposto da seguinte forma. Realizamos brevemente uma revisão da representação da mecânica quântica no espaço de fase e da função de Wigner, dando destaque em suas propriedades, evolução temporal, produto de dois operadores equivalentes em Wigner e propriedades do produto de Weyl, fundamentado nos trabalhos [36, 37, 38, 35, 40, 41, 42, 43, 44, 57, 56].

## 2.1 A Matriz Densidade

Na mecânica quântica representa-se o estado macroscópico de um sistema através do operador densidade

$$\rho = \sum_i \omega_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|,$$

onde  $\{\psi_i\}$  é o ensemble estatístico e  $\omega_i = \frac{N_i}{N}$  é o peso estatístico. A matriz densidade abrange toda a informação física que podemos obter sobre o ensemble em estudo [\[40, 41\]](#). Tomando o estado puro, obtém-se

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (2.1)$$

A média de um operador  $A$  sobre os ensembles enunciada pela mecânica quântica estatística é escrita como

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \text{Tr}(\rho A) = \text{Tr}(A \rho). \quad (2.2)$$

onde  $\rho$  apresenta as propriedades:

- $\rho = \rho^\dagger$ ;
- $\text{Tr}\rho = 1$ ;

A equação de evolução temporal para  $\rho$  é obtida a partir da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle,$$

onde  $H(t)$  é a energia total. Tomando a derivada temporal de  $\rho$  na Eq. (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|) = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \right) \langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi(t)| \right) \right], \\ &= \frac{1}{i\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| + \frac{1}{-i\hbar} |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| H(t). \end{aligned}$$

Ou seja, se obtem uma equação que é governada pela evolução temporal de  $\rho$ , denominada equação de Liouville-von Neumann, dada por

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H(t), \rho(t)]. \quad (2.3)$$



Então, observamos que será viável através da matriz densidade construir mecânica quântica no espaço de fase. Esta representação é denominada de método da função de Wigner [6, 50, 37, 19, 5, 3].

## 2.2 Função de Wigner e suas propriedades

Existem várias formas de representação matricial concedida para o operador estatístico  $\rho$ , podendo ser dada na representação de posição por  $\langle q|\rho|q'\rangle$  e na representação de momentum por  $\langle p|\rho|p'\rangle$ , sendo estas basicamente as mais usuais [50, 36, 37, 38, 35]. Nesta perspectiva, se define a função de Wigner como uma transformada de Fourier dos elementos da matriz densidade [6, 3], isto é,

$$f_w(q, p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \quad (2.4)$$

ou, de forma semelhante

$$f_w(q, p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| \rho \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \quad (2.5)$$

Ou seja, temos o mapeamento linear  $\Omega : \rho \rightarrow f_w(q, p)$ . Assim, para estado puro  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , a função de Wigner fica na forma

$$f_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right). \quad (2.6)$$

Como exemplo, vamos obter a função de Wigner para o oscilador harmônico. Para calcular a função de Wigner de um sistema, devemos ter a solução da equação de Schrödinger do sistema correspondente [44]. A equação de Schrödinger para o oscilador harmônico unidimensional na representação da posição é escrita como

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{m\omega^2}{2} q^2\right) \psi(q) = E\psi(q).$$

A solução desta equação acima é dada por [44]

$$\psi_n(q) = \langle q|n\rangle = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2} H_n(\alpha q) e^{-\frac{\alpha^2 q^2}{2}},$$

onde  $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$  e  $H_n(\alpha q)$  são os polinômios de Hermite. Desse modo, a função de Wigner

do oscilador harmônico pode ser calculada a partir da integral

$$f_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-1} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!} \right) e^{-\alpha^2 q^2} \int dy e^{ipy/\hbar - \alpha^2 y^2/4} H_n[\alpha(q - y/2)] H_n[\alpha(q + y/2)],$$

Utilizando o método de completar quadrado na exponencial dentro da integral, temos

$$\begin{aligned} f_w(q, p) &= (2\pi\hbar)^{-1} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!} \right) e^{-\alpha^2 q^2 - \frac{p^2}{4\alpha^2 \hbar^2}} \times \\ &\times \int dy e^{-\left(-\frac{ip}{2\hbar\alpha} + \alpha y/2\right)^2} H_n[\alpha(q - y/2)] H_n[\alpha(q + y/2)], \end{aligned} \quad (2.7)$$

e realizando uma mudança de variáveis para  $z = -\frac{ip}{2\hbar\alpha} + \alpha y/2$ , obtemos

$$f_w(q, p) = (-1)^n \frac{2}{\alpha} (2\pi\hbar)^{-1} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!} \right) e^{-\alpha^2 q^2 - \frac{p^2}{4\alpha^2 \hbar^2}} \times \quad (2.8)$$

$$\times \int dz e^{-z^2} H_n\left[\alpha\left(z + \frac{ip}{2\hbar\alpha} + q\right)\right] H_n\left[\alpha\left(q + \frac{ip}{2\hbar\alpha} - q\right)\right]. \quad (2.9)$$

Fazendo uso da relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_m(z + a) H_n(z + b) = \sqrt{\pi} 2^n m! b^{n-m} L_m^{n-m}(-2ab),$$

temos

$$f_w(q, p) = 2(-1)^n (2\pi\hbar)^{-1} e^{-\alpha^2 q^2 - \frac{p^2}{4\alpha^2 \hbar^2}} L_n \left( 2\alpha^2 q^2 + \frac{p^2}{2\hbar^2 \alpha^2} \right). \quad (2.10)$$

Onde as soluções para  $n = 0$  e  $n = 1$  são dadas por

$$f_w^0(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)}, \quad (2.11)$$

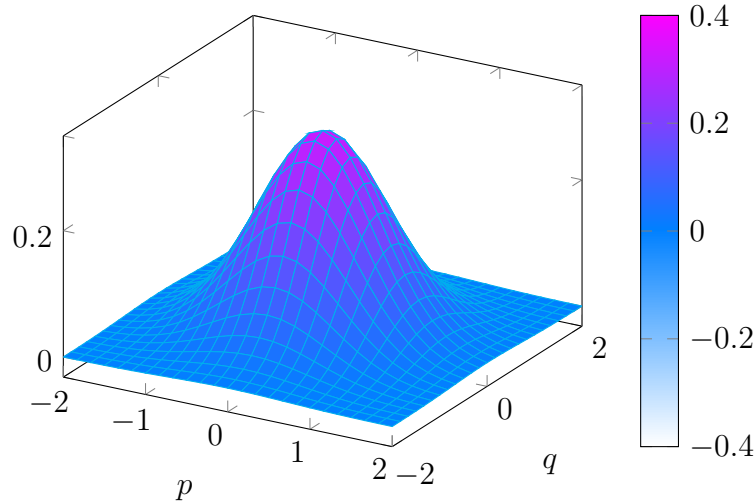
e

$$f_w^1(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)} (2p^2 + 2q^2 - 1). \quad (2.12)$$

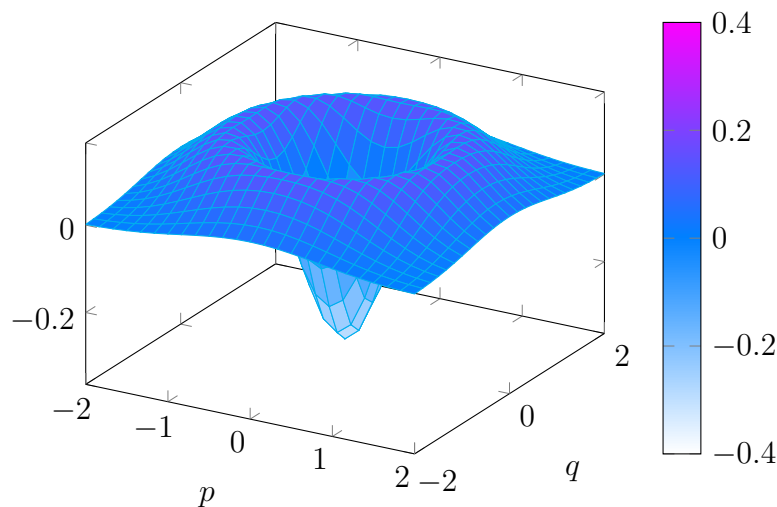
Os gráficos (2.1) e (2.2), mostra o comportamento no espaço de fase da função de Wigner versus as coordenadas  $q$  e  $p$  para o estado fundamental e o primeiro estado excitado de acordo com a Eq. (2.11) e (2.12).

Conseqüentemente, observa-se que a função de Wigner conforme ilustra os gráficos,

apresenta valores negativos no espaço de fase. Portanto, este caráter está relacionado com a caoticidade do sistema [47, 48, 44].



**Figura 2.1:** Gráfico da função de Wigner versus  $q$  e  $p$  referente ao estado fundamental ( $n = 0$ ) do oscilador harmônico.



**Figura 2.2:** Gráfico da função de Wigner versus  $q$  e  $p$  referente ao primeiro estado excitado ( $n = 1$ ) do oscilador harmônico.

A função de Wigner é real, porém, pode ser negativa. Por tal razão, não pode ser considerada como uma distribuição de probabilidade [36, 37]. Tomando o produto das funções

de Wigner  $f_\alpha$  e  $f_\beta$  correlacionadas aos estados  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$ , tem-se

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = (2\pi\hbar)^{-1} \int f_\psi(q, p; t) f_\phi(q, p; t) dq dp, \quad (2.13)$$

onde o lado esquerdo da equação acima pode assumir valores positivos ou nulo se, e somente se, os kets satisfazem a relação de ortogonalidade. Admitindo que seja nulo, isto resulta numa integral de  $f_\psi^\dagger(q, p; t) f_\phi(q, p; t)$  nula [36, 37, 38, 35]. Contudo, observa-se que  $f_\psi(q, p; t)$  e  $f_\phi(q, p; t)$  não são nulas. Isso implica em valores negativos. Em vista disso, a função de Wigner é uma função real normalizada, mas não é positiva definida [36, 37, 38]. A seguir analisamos algumas propriedades da função de Wigner com base nos trabalhos [36, 37, 38].

A função de Wigner é delimitada no certo intervalo.

### Demonstração:

Considere um estado puro, disposto pela Eq. (2.4), isto é

$$f_w(q, p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle.$$

Definimos as funções de onda normalizadas na forma

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right), \\ \varphi_2(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(q - \frac{z}{2}\right). \end{aligned}$$

Neste caso, a função de Wigner é representada como o produto escalar

$$f_w(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dz \varphi_1^\dagger(z) \varphi_2(z) = \frac{1}{\pi\hbar} \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle,$$

e deste modo, temos

$$|f_w(q, p)| = \frac{1}{\pi\hbar} |\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|.$$

Fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$|\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|^2 \leq \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle,$$

e sabendo que as funções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são normalizadas.

$$|\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|^2 \leq 1.$$

Temos que,

$$|f_w(q, p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}. \quad (2.14)$$

Assim a desigualdade  $|f_w(q, p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}$  implica que a função de Wigner é diferente de zero em uma região cuja a área do espaço de fase é menor ou igual a  $2/h$  [29]. Dessa forma, para um estado puro, vemos que a função de Wigner contém informação acerca do princípio de incerteza de Heisenberg, de maneira que, as coordenadas  $q$  e  $p$  nunca devem está posicionado no espaço de fase na forma de um único ponto [36, 37, 29].

Integrando a função de Wigner em  $p$  ou  $q$ , recupera-se as densidades de probabilidades para as funções de onda, isto é,

$$|\psi(q)|^2 = \int f_w dp = \langle q | \rho | q \rangle, \quad (2.15)$$

$$|\psi(p)|^2 = \int f_w dq = \langle p | \rho | p \rangle. \quad (2.16)$$

### Demonstração:

Para provar a Eq. (2.15) introduzimos a Eq. (2.4) em  $\int f_w dp$ , que leva a

$$\int dp f_w = (2\pi\hbar)^{-1} \int dp dz \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right). \quad (2.17)$$

Inicialmente, realizamos a integração em  $p$ , o que nos leva a obter

$$\int dz \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \left( \int dp (2\pi\hbar)^{-1} \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \right), \quad (2.18)$$

onde a expressão dentro do parênteses é a função delta de Dirac,  $\delta(z)$ . Desta maneira, se obtém a densidade de probabilidade de encontrar a partícula numa região entre  $q$  e  $q + dq$ , ou seja,

$$\int dz \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \delta(z) = \langle q | \rho | q \rangle = |\psi(q)|^2. \quad (2.19)$$

Procedendo de forma semelhante para Eq. (2.16), substituindo na Eq. (2.4), tem-se

$$\int dq f_w = (2\pi\hbar)^{-1} \int dk dq \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| \rho \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \quad (2.20)$$

Integrando em  $q$ , obtemos

$$\int dk \left\langle p - \frac{k}{2} \left| \rho \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle \left( \int dq (2\pi\hbar)^{-1} \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \right), \quad (2.21)$$

em que a expressão dentro do parênteses é a função delta de Dirac,  $\delta(k)$ . Logo, a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula entre  $p$  e  $p + dp$  é dada por

$$\int dz \left\langle p - \frac{k}{2} \left| \rho \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle \delta(k) = \langle p | \rho | p \rangle = |\psi(p)|^2. \quad (2.22)$$

A função de Wigner é normalizada, isto é

$$\int f_w(q, p) dq dp = \text{Tr} \rho = 1. \quad (2.23)$$

### Demonstração:

Substituindo a Eq. (2.4) em (2.23), temos

$$\int f_w(q, p) dq dp = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz dp dq \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \quad (2.24)$$

integrando na coordenada  $p$ , temos

$$\int f_w(q, p) dq dp = \int dz dq \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \left( (2\pi\hbar)^{-1} \int dp e^{i\frac{p}{\hbar}z} \right), \quad (2.25)$$

em que a expressão dentro do parênteses é a função delta de Dirac. Dessa forma, obtém-se

$$\int f_w(q, p) dq dp = \int dz dq \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \delta(z). \quad (2.26)$$

$$= \int dq \langle q | \rho | q \rangle = \text{Tr} \rho = 1, \quad (2.27)$$

Integrando o produto de duas funções de Wigner  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , temos

$$\int dqdp f_{w1}(q,p) f_{w2}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Tr}(\rho_1 \rho_2). \quad (2.28)$$

### Demonstração:

Utilizando a Eq. (2.4), temos que

$$\begin{aligned} \int dqdp f_{w1}(q,p) f_{w2}(q,p) &= \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int dqdp dz_1 dz_2 e^{\frac{ip}{\hbar}(z_1+z_2)} \\ &\times \left\langle q - \frac{z_1}{2} \left| \rho_1 \right| q + \frac{z_1}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z_2}{2} \left| \rho_2 \right| q + \frac{z_2}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Integrando em  $p$ , surge uma função delta de Dirac  $\delta(z_1 + z_2)$ , e integrando em  $z_2$ , obtemos

$$\int dqdp f_{w1}(q,p) f_{w2}(q,p) = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right) \int dq dz_1 \left\langle q - \frac{z_1}{2} \left| \rho_1 \right| q + \frac{z_1}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z_1}{2} \left| \rho_2 \right| q + \frac{z_1}{2} \right\rangle.$$

Introduzindo a mudança de variáveis

$$q' = q - \frac{z_1}{2}, \quad q'' = q + \frac{z_1}{2},$$

$$\int dqdp f_{w1}(q,p) f_{w2}(q,p) = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right) \int dq' dq'' \langle q' | \rho_1 | q'' \rangle \langle q'' | \rho_2 | q' \rangle. \quad (2.29)$$

Em seguida, com a propriedade de completeza na equação acima, temos

$$\begin{aligned} \int dqdp f_{w1}(q,p) f_{w2}(q,p) &= \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right) \int dq' \langle q' | \rho_1 \rho_2 | q' \rangle, \\ &= \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right) \text{Tr}(\rho_1 \rho_2). \end{aligned} \quad (2.30)$$

As funções  $A_w(q,p)$  estão associadas ao operador  $A(Q,P)$  na forma

$$A_w(q,p) = \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| A(Q,P) \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \quad (2.31)$$

ou,

$$A_w(q, p) = \int dz \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| A(Q, P) \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \quad (2.32)$$

O equivalente de Wigner para o operador densidade  $\rho$  é dado por

$$f_w = (2\pi\hbar)^{-3} \rho_w. \quad (2.33)$$

Uma vez definido os correspondentes em Wigner para qualquer operador quântico na representação de Wigner <sup>[37]</sup>. O valor médio é

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \int dpdq A_w(q, p) f_w(q, p) = Tr(A\rho). \quad (2.34)$$

**Demonstração:**

Substituindo a Eq. (2.4) e (2.32) na Eq.(2.34) tem-se

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \int dpdq A_w(q, p) f_w(q, p) = Tr(\rho A) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int dqdpdz' dz'' \exp\left(\frac{ipz'}{\hbar}\right) \\ &\quad \times \left\langle q - \frac{z'}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z'}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z''}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z''}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Integrando em  $p$ , surge uma função delta de Dirac  $\delta(z' + z'')$ . Integrando na variável  $z''$ , temos

$$\langle A \rangle = \int dqdz' \left\langle q - \frac{z'}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z'}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z'}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z'}{2} \right\rangle. \quad (2.36)$$

Introduzindo uma mudança de variáveis,

$$q' = q - \frac{z_1}{2}, \quad q'' = q + \frac{z_1}{2},$$

temos

$$\langle A \rangle = \int dq' dq'' \langle q' | A(Q, P) | q'' \rangle \langle q'' | \rho | q' \rangle = Tr(\rho A). \quad (2.37)$$

Um aspecto é estabelecer de modo unívoco o equivalente de um operador quântico  $A(Q, P)$  com o seu recíproco na representação de Wigner  $A_w(q, p)$ . Neste caso, usa-se a



quantização de Weyl [37, 44]. Assim, se define a função de Weyl como, dada uma função no espaço de fase,  $\alpha(\tau, \sigma)$ , há um operador quântico no espaço de Hilbert,  $A(Q, P)$  [44], correlacionado a  $\alpha(\tau, \sigma)$  de modo que

$$A(Q, P) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\tau d\sigma e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}} \alpha(\tau, \sigma), \quad (2.38)$$

onde se associa o  $\tau$  com à coordenada de posição e  $\sigma$  à coordenada de momento no espaço de fase. Escrevendo o operador quântico  $A(Q, P)$  em termos de  $A_w(q, p)$  obtém-se

$$\alpha(\tau, \sigma) = \int dq dp e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}} A_w(q, p). \quad (2.39)$$

Essa equivalência pode ser analisada, demonstrando que o operador  $W(Q, P) = e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}}$ , respeita a condição de ortogonalidade e completeza no espaço dos operadores de classe  $A(Q, P)$  [37, 44]. Usando a relação de Baker-Hausdorff,  $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}$ , se escreve  $W(P, Q)$  na forma

$$W(Q, P) = e^{\frac{i\sigma Q}{\hbar}} e^{\frac{i\tau P}{\hbar}} e^{\frac{i\sigma\tau}{2\hbar}},$$

onde  $[Q, P] = i\hbar$ . Resolvendo a expressão a seguir

$$\langle q' | e^{\pm \frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} | q \rangle = \langle q' | e^{\pm \frac{i\sigma Q}{\hbar}} e^{\pm \frac{i\tau P}{\hbar}} e^{\pm \frac{i\sigma\tau}{2\hbar}} | q \rangle.$$

Onde a equação de autovalor é definida por  $Q | q \rangle = q | q \rangle$ , tal que  $e^{\pm \frac{i}{\hbar}\sigma Q} | q \rangle = e^{\pm \frac{i}{\hbar}\sigma q} | q \rangle$ . O operador de translação possui a propriedade  $e^{\frac{i\tau P}{\hbar}} | q \rangle = | q - \tau \rangle$ , o que resulta em

$$\langle q' | e^{\pm \frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} | q \rangle = e^{\pm \sigma(\frac{i}{\hbar}q' \pm \frac{\tau}{2})} \delta(q' - q \pm \tau).$$

Usando este último resultado podemos escrever

$$\text{Tr} e^{-\frac{i}{2}(\sigma Q - \tau P)} = (2\pi\hbar)^3 \delta(\sigma) \delta(\tau),$$

observe que é válida a propriedade para o traço de um operador  $A$  definido por  $\text{Tr} A =$

$\int dqdp \langle q'|A|q \rangle = (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p)$ . Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Tre}^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} &= (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp \int dz \exp(ipz) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \\ &= (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp \int dz \exp(ipz) \exp(i\sigma(q - z - \tau)) \delta(z + \tau). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Integrando a expressão acima em  $z$  e usando a função delta de Dirac. Obtemos

$$\text{Tre}^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} = (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp e^{\frac{ip\tau}{\hbar}} e^{\frac{iq\sigma}{\hbar}}. \quad (2.41)$$

Logo, verifica-se a presença de duas funções deltas representadas na forma integral, isto é,

$$\text{Tre}^{-i\hbar(\sigma Q + \tau P)} = (2\pi\hbar)^3 \delta(\sigma) \delta(\tau).$$

O resultado obtido aqui revela às relações de ortogonalidade

$$\text{Tre}^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma' Q - \tau' P)} e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} = (2\pi\hbar)^3 \delta(\sigma' - \sigma) \delta(\tau' - \tau). \quad (2.42)$$

Se percebe que há uma equivalência entre a Eq. (2.32) e (2.33) e a Eq. (2.38) e (2.39). O ponto de partida é utilizar a expressão

$$A(Q, P) = \int d\sigma d\tau \alpha(\sigma, \tau) e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')}, \quad (2.43)$$

Assim, usando a propriedade de ortogonalidade tal que

$$\alpha(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Tr} \left\{ A(Q, P) e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')} \right\}.$$

Vamos mostrar que a Eq. (2.43) existe. Neste caso, substituindo a equação

$$\alpha(\sigma, \tau) = \int dqdp e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} A_w(q, p), \quad (2.44)$$

diretamente na Eq. (2.43). Com isso, efetuando os cálculos dos elementos de matriz representados na coordenada de posição. Obtemos

$$\begin{aligned} \langle q|A(Q, P)|q' \rangle &= (2\pi\hbar)^{-3} \int d\sigma d\tau dq'' dq''' \langle q''|A(Q, P)|q''' \rangle \\ &\times \langle q'''|e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')}|q'' \rangle \langle q|e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)}|q' \rangle. \end{aligned}$$

Com o auxílio da Eq. (2.42), encontramos

$$\langle q|A(Q, P)|q'\rangle = \langle q|A(Q, P)|q'\rangle. \quad (2.45)$$

Logo, isso mostra que a expansão (2.43) também existe.

### 2.3 Operadores Equivalentes na Representação de Wigner

Nesta seção, vamos demonstrar as propriedades que trata dos operadores descritos na representação usual da Mecânica Quântica e os seus correspondentes em Wigner de acordo com os trabalhos [13, 11, 37, 44, 36, 32, 16, 15].

Tomando um operador  $A = A(P)$  que depende apenas de  $P$ , ou seja, o correspondente em Wigner  $A_w = A(p)$  terá a mesma forma funcional. Onde  $P$  é substituído por  $p$ .

**Demonstração:**

Dado um operador  $A(P)$ , e expandindo numa série de  $P$ , ou seja

$$A(P) = A(0) + PA'(0) + \dots \quad (2.46)$$

Usando a Eq. (2.31) e substituindo  $A(Q, P)$  pela expansão, obtém-se

$$A_w(q, p) = \int dk \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2!}A''(0) + \dots \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \quad (2.47)$$

Tendo em mente a equação  $P|p\rangle = p|p\rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned} A_w(q, p) &= A(0) \int dk \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| p + \frac{k}{2} \right\rangle \right. \\ &+ A'(0) \int dk \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \left(p + \frac{k}{2}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| p + \frac{k}{2} \right\rangle \right. \\ &+ A(0)'' \int dk \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \frac{\left(p + \frac{k}{2}\right)^2}{2!} \left\langle p - \frac{k}{2} \left| p + \frac{k}{2} \right\rangle \right. + \dots \end{aligned}$$

Considerando  $\langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle = \delta(k)$  calculamos a integral em  $k$ , isto é

$$A_w(p) = A(0) + pA'(0) + \frac{p^2}{2!}A''(0) + \dots = A(p). \quad (2.48)$$

Usando o análogo para a Eq. (2.32), temos para o caso em que o operador  $A = A(Q)$  depende apenas de  $Q$ , isso implica em  $A_w(q, p) = A(q)$ .

Um operador multiplicativo é dado por  $A(Q, P) = 1c$ , onde  $c$  é uma constante.

**Demonstração:**

Utilizando a Eq. (2.31) e colocando uma constante  $c$  na posição do operador  $A(Q, P)$ , onde constantes não atuam em kets. Temos

$$\begin{aligned} A_w(q, p) &= \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| c \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \\ A_w(q, p) &= c \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Usando a propriedade  $\langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle = \delta(k)$  e integrando em  $z$ , temos

$$A_w(q, p) = c. \quad (2.50)$$

O traço é  $\text{Tr}A = (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p)$ .

**Demonstração:**

Tomando a expressão  $(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p)$  e inserindo a mesma na Eq. (2.31), obtemos

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p) = \int dqdp \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle.$$

Observa-se que surge uma delta de Dirac quando é feita uma integração em  $p$ , de tal maneira

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p) = \int dqdp \left\langle q - \frac{z}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right).$$

Assim, temos

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p) = \int dqdz \left\langle q - \frac{z}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \delta(z). \quad (2.51)$$

o que nos conduz a equação,

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p) = \int dq \langle q | A(Q, P) | q \rangle = \text{Tr}A. \quad (2.52)$$

Da relação acima, integrando a função  $A_w(q, p)$  na coordenada de momento, obtém-se o valor esperado de um operador  $A$  projetado na representação da posição posto na forma  $\int dp A_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \langle q|A|q\rangle$ . Ao passo que, é válido a inversa [37].

A propriedade a seguir trata do produto de operadores na formulação de Wigner e fala sobre os elementos não diagonais de um operador. Essa propriedade é dada por

$$\langle q|A(Q, P)|q'\rangle = (2\pi\hbar)^{-6} \int d\sigma e^{i\sigma \frac{q+q'}{2\hbar}} \alpha(\sigma, q - q'), \quad (2.53)$$

onde  $\alpha(\sigma, \tau)$  é a transformada de Fourier de  $A_w(q, p)$ .

**Demonstração:**

Usando a relação para um dado operador genérico  $A(Q, P) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\sigma d\tau e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}} \alpha(\tau, \sigma)$ , obtemos a expressão como segue

$$\langle q|A(Q, P)|q'\rangle = \int d\sigma d\tau \alpha(\sigma, \tau) \langle q|e^{i\frac{\sigma Q + \tau P}{\hbar}}|q'\rangle. \quad (2.54)$$

Utilizando a relação de Baker-Campbell-Hausdorff  $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$  aplicada no bracket dentro da integral e utilizando a (2.42), obtemos

$$\langle q|A(Q, P)|q'\rangle = (2\pi\hbar)^{-6N} \int d\sigma e^{i\sigma \frac{q+q'}{2\hbar}} \alpha(\sigma, q - q'). \quad (2.55)$$

Portanto, o estudo de operadores equivalentes na representação de Wigner passa a ser conhecido [37]. A seguir é estudado os produtos de operadores correspondentes na formulação de Wigner.

## 2.4 O Produto de Weyl

Um ponto característico importante do método de Wigner se refere a transformada de Weyl do produto de dois observáveis,  $AB$  [37, 30]. Na formulação de Wigner, representa-se o produto de dois observáveis  $AB$  em função dos correspondentes em Wigner de  $A$  e  $B$  como [37, 32, 44]

$$(AB)_w = \int dz e^{i\frac{2z}{\hbar}} \left\langle q - \frac{z}{2} \left| AB \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \quad (2.56)$$

Usando a relação de completeza  $\int dq |q\rangle\langle q| = 1$ , temos

$$(AB)_w = \int dzdq e^{i\frac{pz}{\hbar}} \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| A \middle| q \right\rangle \left\langle q \middle| B \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \quad (2.57)$$

Tal expressão pode ser escrita utilizando a Eq. (2.55), ou seja

$$(AB)_w = (2\pi\hbar)^{-12} \int dzdq e^{i\frac{pz}{\hbar}} \int d\sigma d\sigma' e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}(q+q'(q+q'-\frac{z}{2}))} \alpha(\sigma, q' - q + \frac{z}{2}) \\ \times e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}(q+q'(q+q'-\frac{z}{2}))} \beta(\sigma', q - q' + \frac{z}{2}).$$

Fazendo as mudanças de variáveis,  $\tau = q' - q + \frac{z}{2}$  e  $\tau' = q - q' + \frac{z}{2}$ , obtemos

$$(AB)_w = (2\pi\hbar)^{-12} \int d\sigma d\sigma' d\tau d\tau' e^{i\frac{\sigma\tau+\tau q}{\hbar}} \alpha(\sigma, \tau) e^{i\frac{\sigma'\tau+\sigma\tau'}{2\hbar}} \beta(\sigma', \tau') e^{i\frac{\sigma'q+\tau'p}{\hbar}}. \quad (2.58)$$

Onde  $e^{i\frac{\sigma'\tau+\sigma\tau'}{2\hbar}}$  pode ser expandida numa série de potências. Neste caso, é substituída por um fator  $e^{\frac{i\Lambda}{2\hbar}}$ , em que  $\Lambda$  é um operador bidiferencial, isto é [39, 57]

$$\Lambda = \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}}.$$

Onde as flechas indicam o sentido de atuação. Usando as funções  $A_w = \int dqdp e^{i\frac{\sigma q+\tau p}{\hbar}} \alpha(\sigma, \tau)$  e  $B_w = \int dqdp e^{i\frac{\sigma' q+\tau' p}{\hbar}} \beta(\sigma', \tau')$ , obtem-se o produto de operadores na representação de Wigner dado por [44, 50]

$$(AB)_w = A_w(q, p) e^{\frac{i\Lambda}{2\hbar}} B_w(q, p),$$

ou

$$(AB)_w = B_w(q, p) e^{-\frac{i\Lambda}{2\hbar}} A_w(q, p).$$

Assim, o produto deformado entre os equivalentes de Wigner  $A_w$  e  $B_w$ , por meio de  $e^{\frac{i\Lambda}{2\hbar}}$  é o produto estrela de Weyl definido por

$$(AB)_w = A_w(q, p) e^{\frac{i\Lambda}{2\hbar}} B_w(q, p) = A_w(q, p) \star B_w(q, p).$$

O produto de Weyl (produto estrela) gera um novo campo na matemática chamado de geometria não - comutativa [44]. A geometria não - comutativa se originou nas pesquisas

de Weyl e Moyal os quais estudaram regras de quantização no espaço de fase <sup>[44]</sup>. Uma observação a ser feita é que o produto de Weyl não é comutativo. O produto  $\star$  conecta o método de Wigner com o formalismo da quantização de Weyl <sup>[37, 39, 57, 36, 44]</sup>.

## 2.5 Evolução Temporal da Função de Wigner

A equação que descreve a evolução temporal da função de Wigner é uma equação diferencial de primeira ordem no tempo representada no espaço de fase <sup>[37, 39]</sup>. Essa equação é obtida a partir da equação de Liouville-von Neumann escrita como <sup>[50, 57, 44]</sup>

$$i\hbar\partial_t\rho = H\rho - \rho H, \quad (2.59)$$

onde  $H$  é o Hamiltoniano do sistema. O mapeamento linear é  $\Omega : A \rightarrow a_w(q, p)$  onde  $\Omega(A) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | A | q + \frac{z}{2} \rangle$ . Isto é, temos uma álgebra associativa de operadores em  $\mathcal{H}$  que leva uma álgebra associativa não-comutativa em  $\Gamma$  <sup>[50]</sup>. Aplicando o operador  $\Omega$  na equação de Liouville-von Neumann em ambos os lados, isto é

$$i\hbar\Omega(\partial_t\rho) = \Omega(H\rho) - \Omega(\rho H). \quad (2.60)$$

Como resultado, temos

$$i\hbar\frac{\partial f_w}{\partial t} = H_w \star f_w - f_w \star H_w \quad (2.61)$$

em que o parêntesis de Moyal é dado por  $\{H_w, f_w\}_M = H_w \star f_w - f_w \star H_w$ . O parêntesis de Moyal pode ser escrito como

$$\{a, b\}_M = a \star b - b \star a = 2ia(q, p) \operatorname{sen} \left[ \frac{\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right] b(q, p), \quad (2.62)$$

onde nesta expressão a função seno pode ser interpretada como uma série de potência correspondente ao parêntesis de Moyal. Utilizando a identidade  $e^{i\hbar\Lambda/2} - e^{-i\hbar\Lambda/2} = 2i \operatorname{sen} \left( \hbar\frac{\Lambda}{2} \right)$  e expandido  $\operatorname{sen} \left( \hbar\frac{\Lambda}{2} \right)$ , ou seja <sup>[50, 37, 44]</sup>

$$\operatorname{sen} \left( \hbar\frac{\Lambda}{2} \right) = \frac{\hbar\Lambda}{2} - \frac{1}{3!} \left( \hbar\frac{\Lambda}{2} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left( \hbar\frac{\Lambda}{2} \right)^5 + \dots \quad (2.63)$$

No limite clássico ( $\hbar \rightarrow 0$ ), a equação dinâmica para a função de Wigner satisfaz a

equação de Liouville-von Neumann clássica escrita como [57, 37, 50, 32]

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} = \frac{\partial H_w}{\partial q} \frac{\partial f_w}{\partial p} - \frac{\partial H_w}{\partial p} \frac{\partial f_w}{\partial q} = \{H_w, f_w\}, \quad (2.64)$$

com  $H_w$  substituindo a função hamiltoniana. Ou seja, o método de Wigner resgata as equações canônicas da mecânica clássica. Observa-se que há uma conexão do formalismo de Wigner e o princípio de correspondência [37, 39, 36, 35, 13].

O formalismo de Wigner apresentado até agora, está descrito na representação de Schrödinger da mecânica quântica, onde o estado do sistema evoluem no tempo. Contudo, pode ser estudado na representação de Heisenberg [37, 35, 13].

## 2.6 Propriedades do Produto de Weyl

O produto de Weyl ou produto estrela é uma ferramenta matemática que modifica operadores da Mecânica Quântica usual em funções no espaço de fase [36, 44]. O produto de Weyl satisfaz as seguintes propriedades.

O produto  $\star$  entre  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  é definido por [44]

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) \exp \left[ \frac{i\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) \right] g(q, p). \quad (2.65)$$

O produto  $\star$  se trivializa [37, 44].

$$c \star f(q, p) = f(q, p) \star c = cf(q, p). \quad (2.66)$$

### Demonstração:

Expandindo em série o operador  $e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}$ , temos

$$c \star f(q, p) = c \left\{ 1 + \frac{i\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^2 \left( \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right)^2 + \dots \right\} f(q, p).$$

O produto de Weyl não comuta.

$$f(q, p) \star g(q, p) \neq g(q, p) \star f(q, p). \quad (2.67)$$



ou

$$f(q, p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}g(q, p) \neq g(q, p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}f(q, p),$$

**Demonstração:**

1:

$$q \star p = \left( q + \frac{i\hbar}{2} \partial_p \right) p = qp + \frac{i\hbar}{2}.$$

2:

$$p \star q = \left( p - \frac{i\hbar}{2} \partial_q \right) q = pq - \frac{i\hbar}{2}.$$

O produto  $\star$  de duas funções eleva uma à posição de operador, isto é

$$\begin{aligned} f(q, p) \star g(q, p) &= f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) g(q, p) \\ &= f(q, p) g \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \right). \end{aligned}$$

**Demonstração:**

Considere  $a$  e  $b$  definidos como  $a \equiv \frac{\vec{\partial}}{\partial p}$  e  $b \equiv \frac{\vec{\partial}}{\partial q}$ , ou seja

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2} (a \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} - b \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p})} g(q, p).$$

Sabe-se que  $e^{a\partial_x} f(x) = f(x + a)$ . Com isso, temos

$$f(q, p) \star g(q, p) = f \left( q + \frac{i\hbar}{2} a, p - \frac{i\hbar}{2} b \right) g(q, p).$$

Logo, substituindo  $a$  e  $b$ , onde  $a = \frac{\partial}{\partial p}$  e  $b = \frac{\partial}{\partial q}$ , temos

$$f(q, p) \star g(q, p) = f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) g(q, p).$$

Onde

$$\hat{f} = f(q, p) \star.$$

O conjugado complexo muda a ordem do produto estrela.

$$(f \star g)^\dagger = g^\dagger \star f^\dagger. \quad (2.68)$$

**Demonstração:**

Utilizando a Eq. (2.65), e mudando as variáveis por  $q' = q$  e  $p' = p$ , ou seja

$$f(q, p) \star g(q, p) = \exp \left[ \frac{i\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q'} \right) \right] f(q, p) g(q', p') \Big|_{q', p' = q, p} \quad (2.69)$$

Expandindo a função exponencial em série de Taylor, temos

$$\exp \left[ \frac{i\hbar}{2} (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'}) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n.$$

Conseqüentemente, escrevendo o binômio para a expressão  $(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n$ , isto é

$$(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q \partial_{p'}]^{n-m} [\partial_p \partial_{q'}]^m. \quad (2.70)$$

O produto estrela de Weyl é escrito como

$$f(q, p) \star g(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)]. \quad (2.71)$$

Quando realiza-se o complexo conjugado da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} (f(q, p) \star g(q, p))^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^n \left\{ (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f^\dagger(q, p)] \right. \\ &\quad \times \left. [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g^\dagger(q, p)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

em que o termo  $(-1)^n$  surge da conjugação complexa do termo  $(i\hbar/2)^n$ . Associando esse

termo no binômio, tem-se

$$(-1)^n(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'}) = (-\partial_q\partial_{p'} + \partial_p\partial_{q'}) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_p\partial_{q'}]^{n-m} [\partial_q\partial_{p'}]^m.$$

Quando atua estes operadores em duas funções no espaço de fase, encontra-se

$$(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})f(q,p)g(q',p') = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m f(q,p)] [\partial_q^m\partial_p^{m-n}g(q,p)].$$

e

$$(-1)^n(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})f(q,p)g(q',p') = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m g(q,p)] [\partial_q^m\partial_p^{m-n}f(q,p)].$$

Comparando às últimas duas equações, chega-se na expressão

$$\begin{aligned} (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m f(q,p)] [\partial_q^m\partial_p^{m-n}g(q,p)] \\ = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m g(q,p)] [\partial_q^m\partial_p^{m-n}f(q,p)]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Substituindo a Eq. (2.73) em (2.72), obtem-se

$$\begin{aligned} (f(q,p) \star g(q,p))^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n \left\{ (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m g^\dagger(q,p)] \right. \\ &\quad \times \left. [\partial_q^m\partial_p^{n-m} f^\dagger(q,p)] \right\}, \\ &= g^\dagger(q,p) \star f^\dagger(q,p). \end{aligned}$$

O produto estrela é associativo. Considere o produto estrela entre  $f$ ,  $g$  e  $h$  dado por

$$(f(q,p) \star g(q,p)) \star h(q,p) = f(q,p) \star (g(q,p) \star h(q,p)). \quad (2.74)$$

**Demonstração:**

Temos que

$$\begin{aligned}
 (f(q,p) \star g(q,p)) \star h(q,p) &= \left\{ f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) g(q,p) \right\} h \left( q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \right), \\
 &= f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) g \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) h(q,p),
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 f(q,p) \star (g(q,p) \star h(q,p)) &= f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) \left\{ g(q,p) h \left( q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \right) \right\}, \\
 &= f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) g \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) h(q,p).
 \end{aligned}$$

## Capítulo 3

# Teoria de Representação no Espaço de Fase

No presente capítulo, se define uma classe de operadores estrela que será base na representação unitária do grupo de Galilei-Lie estendido [29, 50, 57]. Esse procedimento nos leva a escrever a equação de Schrödinger no espaço de fase [46, 47, 48, 50]. O estudo do espaço de Hilbert simplético na mecânica quântica tem início com G. Torres-Vega e Frederick (1990) [18, 19] que propuseram uma equação do tipo Schrödinger no espaço de fase [50, 30, 18, 19]. Porém, a função de onda foi projetada numa base que não expandia todo o espaço  $\Gamma$  [38, 49]. Posteriormente, Oliveira *et al* (2004) [50], introduziram uma função  $\psi(q, p)$ , que se conectava à função de Wigner e foi obtida uma interpretação física da teoria [57, 30, 50]. Em vista disso, foi utilizado teorias de representação de grupos de simetrias dando origem à Mecânica Quântica Simplética [50, 57]. Sendo assim, tem-se uma estrutura simplética (o espaço de fase)  $\Gamma$ , equipado e composto por funções de quadrado integráveis em que a base será montada. Deste modo, temos a construção do espaço de Hilbert sobre o espaço de fase simplético  $\mathcal{H}(\Gamma)$  [50, 57]. Assim, nesta variedade onde está contida uma função de onda, foi concedido uma interpretação física para esse objeto matemático. Neste espaço de fase construído por meio de uma teoria de representação se tem um formalismo autocontido que se generaliza para outros campos da Física. Como exemplo, a teoria quântica de campos [36]. Neste capítulo, definimos  $\hbar = c = 1$  por motivos práticos. Temos na elaboração desse capítulo às seguintes referências [37, 38, 35, 30, 51, 50, 52, 29]

### 3.1 Espaço de Hilbert e a Estrutura Simplética

Define-se um dado conjunto  $\mathcal{G}$  como sendo uma variedade diferencial  $n$ -dimensional, em que podemos associar a cada ponto  $q \in \mathcal{G}$  e representado pelas coordenadas  $q = (q^1, \dots, q^n)$ , um espaço vetorial real  $T_q\mathcal{G}$   $n$ -dimensional denotado espaço tangente de  $\mathcal{G}$  em  $q$  [57, 50]. Pode-se designar por  $T^*\mathcal{G}$  ou  $T\mathcal{G}^*$  o espaço dual, também conhecido no estudo de geometria

diferencial como espaço cotangente onde as coordenadas de cada ponto são tratadas por  $(q, p) = (q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$  [57]. Então, podemos equipar o espaço cotangente com uma estrutura simplética, dada pela 2-forma [50, 51]

$$\omega = dq \wedge dp. \quad (3.1)$$

A partir dessa forma simplética, em conjunto com a definição do operador

$$\Lambda = \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right), \quad (3.2)$$

obtemos para as funções  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  em  $C^\infty$ , os parênteses de Poisson

$$\omega(f\Lambda, g\Lambda) = f\Lambda g = \{f, g\}, \quad (3.3)$$

em que se define esses colchetes como  $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$ . Segue que o espaço dual  $T^*\mathcal{G}$  caracterizado por uma estrutura simplética é classificado como espaço de fase denotado por  $\Gamma$ , de modo que um dado vetor relacionado é explicitado da seguinte forma  $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n) = (q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$  e  $q = (q^1, \dots, q^n)$  e  $p = (p^1, \dots, p^n)$  são vetores posição e momentum pertencentes a variedade  $\mathcal{G}$  [38]. Observa-se na Eq. (3.3) que, ao fazermos uso dos operadores  $\mathbf{X}_f$  e  $\mathbf{X}_g$ , definidos por

$$\mathbf{X}_f = f\Lambda = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}, \quad (3.4)$$

e

$$\mathbf{X}_g = g\Lambda = \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}, \quad (3.5)$$

esses operadores determinam campos vetoriais em relação à  $\Gamma$  [57, 38, 50]. Com base nessas definições, a partir de  $\Gamma$  inserimos o espaço de Hilbert correlacionado ao espaço de fase  $\Gamma$  [50, 57].

Nesse espaço vetorial complexo, definimos um conjunto de funções complexas de quadrado integráveis,  $\varphi(q, p)$  em  $\Gamma$ , de maneira que

$$\int dpdq \varphi(q, p)^* \varphi(q, p) < \infty,$$

é uma forma bilinear real <sup>[13]</sup>. Nesse caso, podemos escrever  $\varphi(q, p) = \langle q, p | \varphi \rangle$ , com auxílio de

$$\int dq dp |q, p\rangle \langle q, p| = 1,$$

onde  $\langle \varphi |$  o vetor dual de  $|\varphi\rangle$ . Este espaço de *Hilbert simplético* é denotado por  $\mathcal{H}(\Gamma)$  <sup>[13, 39, 38, 29]</sup>.

### 3.2 Operadores de Bopp

Os operadores de Bopp <sup>[51]</sup>, também conhecidos como operadores pseudo-diferenciais, são obtidos de maneira formal pela seguinte regra de quântização <sup>[51]</sup>

$$\hat{q} = q + \frac{1}{2}i\hbar \frac{\partial}{\partial p}, \quad (3.6)$$

e de forma equivalente para a coordenada  $p$

$$\hat{p} = p - \frac{1}{2}i\hbar \frac{\partial}{\partial q}. \quad (3.7)$$

Esses operadores são outra representação para as coordenadas de posição  $\hat{q} \rightarrow q$  e momento  $\hat{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ . Na literatura os operadores  $\hat{q} \rightarrow q + \frac{1}{2}i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$  e  $\hat{p} \rightarrow p - \frac{1}{2}i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$  recebe o nome de "Bopp Shifts" <sup>[51]</sup>. Tais operadores atuam sobre funções ou distribuições definidas no espaço de fase  $\Gamma$  <sup>[54]</sup>. Os operadores de Bopp no espaço de fase foram estudados por de Gosson na teoria de espaços modulados <sup>[55]</sup>.

Como motivação, considere um exemplo, onde o produto estrela é uma ferramenta fundamental na análise de quantização da deformação de funções definidas sobre  $\Gamma$  <sup>[51]</sup>. Temos por definição que

$$c = a \star b$$

de modo que

$$c(q) = \left( \frac{1}{4\pi\hbar} \right)^{2n} \int \int e^{\frac{i}{2\hbar}\sigma(q', q'')} a \left( q + \frac{1}{2}q' \right) b \left( q - \frac{1}{2}q' \right) dq' dq''.$$

Nesta equação a transformada de Fourier simplética para o produto de dois operadores de

Weyl é definido como

$$\widehat{c} = \widehat{a}\widehat{b}.$$

Analogamente, escrevemos para  $c$  a transformada de Fourier simplética dada na forma

$$c_\sigma(q) = \left(\frac{1}{4\pi\hbar}\right)^n \int e^{\frac{i}{2\hbar}\sigma(q',q'')} a_\sigma(q-q') b_\sigma(q') dq',$$

o que nos leva depois de feito alguns cálculos, a obter

$$\begin{aligned} q \star a &= \left(q + \frac{1}{2}i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) a, \\ p \star a &= \left(p - \frac{1}{2}i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) a, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde  $\frac{\partial}{\partial q}$  e  $\frac{\partial}{\partial p}$  são os gradientes das coordenadas de posição e momento [\[51\]](#).

### 3.3 Operadores no Espaço de Hilbert sobre $\Gamma$

Quando se introduz um espaço vetorial estruturado no qual se tem definidas funções sobre  $\Gamma$ , a forma do mapeamento  $\Omega : \mathcal{H}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma)$  [\[13\]](#) pode ser observada através da aplicação de um operador linear, de modo que os vetores  $|\Phi\rangle$  e  $|\Psi\rangle$  pertence ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}(\Gamma)$  [\[39, 38, 36, 50, 57\]](#). Considere a relação

$$\Omega|\Phi\rangle = |\Psi\rangle.$$

$\Omega$  é um operador linear, isto é

$$\Omega(c_1|\Psi\rangle + c_2|\Phi\rangle) = c_1\Omega|\Psi\rangle + c_2\Omega|\Phi\rangle.$$

Considere  $\varepsilon = \{\Omega, \Theta, \dots\}$  um conjunto de operadores lineares sobre  $\mathcal{H}(\Gamma)$ , é um espaço vetorial ordenado e equipado com operações de adição e multiplicação satisfazendo as relações [\[39, 38\]](#)

$$[\Omega + \Theta]|\Psi\rangle = \Omega|\Psi\rangle + \Theta|\Psi\rangle$$

e

$$[c\Omega]|\Psi\rangle = c[\Omega|\Psi\rangle].$$



Nota-se que o ket  $\Omega|\Psi\rangle$  e bra  $\langle\Psi|\Omega$  não são dual, ou seja,  $\Omega|\Psi\rangle \leftrightarrow \langle\Psi|\Omega^\dagger$  [38]. Se  $\Omega^\dagger = \Omega$ , tem-se

$$(\Omega\Theta)^\dagger = \Theta^\dagger\Omega^\dagger.$$

Neste caso, se  $\Omega = \Omega^\dagger$ , obtemos

$$\langle\Psi|\Omega|\Theta\rangle = \langle\Theta|\Omega^\dagger|\Psi\rangle^\dagger.$$

Tomando dois vetores de estado  $|\Psi\rangle$  e  $|\Phi\rangle$ , o produto externo entre eles fica na forma  $B = |\Phi\rangle\langle\Psi|$ . Neste caso é válida a relação  $B = B^\dagger$ . O seu adjunto é  $B^\dagger = |\Psi\rangle\langle\Phi|$  [38, 39].

Se o operador linear  $\Omega$  aplicado em  $|\omega\rangle$ , resulta em

$$\Omega|\omega\rangle = \omega|\omega\rangle,$$

onde  $\omega$  representa um autovalor real, então o operador  $\Omega$  obedece a relação  $\Omega = \Omega^\dagger$ . Esta propriedade classifica os operadores como hermitianos [38, 39, 13].

### 3.3.1 Operadores Unitários

Operadores unitários satisfaz a relação

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1.$$

Neste caso, a condição de adjunto é equivalente ao inverso do operador linear, isto é

$$U^\dagger = U^{-1}.$$

Neste caso,  $|\Psi_1\rangle$  e  $|\Psi_2\rangle$  se transforma na forma

$$U|\Psi_1\rangle = |\Psi'_1\rangle,$$

$$U|\Psi_2\rangle = |\Psi'_2\rangle,$$

podemos escrever o produto escalar

$$\langle\Psi'_1|\Psi'_2\rangle = \langle\Psi_1|U^\dagger U|\Psi_2\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle.$$

logo, temos uma transformação unitária que conserva o produto escalar e sua norma [13, 38, 39].

### 3.3.2 Operador Translação no Espaço de Hilbert Simplético $\mathcal{H}(\Gamma)$

Consideramos a seguir a definição geral de translação espacial, sendo  $t(a_i)$ , escrito da seguinte forma [38]

$$t(a_i)\Psi(q_i, p_i) = e^{i\phi}\Psi\left(q_i + \frac{a_i}{2}, p_i\right), \quad (3.9)$$

em que temos uma fase arbitrária  $e^{i\phi}$ . A seguir, iremos explorar quatro propriedades referentes ao operador de translação com base no trabalho [38].

1. Conservação da probabilidade. Se  $|\Psi\rangle$  encontra-se normalizado, então para  $t(a)|\Psi\rangle$  transladado, a normalização é válida. Para tanto, a translação  $\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi|t^\dagger(a_i)t(a_i)|\Psi\rangle$  precisa ser unitária.
2. Interpreta-se duas translações infinitesimais  $a_i$  e  $b_i$  formando uma translação apenas. Isto é,  $a_i + b_i$ , nos leva a  $t(a_i)t(b_i) = t(a_i + b_i)$ .
3. Existe uma translação  $t(-a_i) = t^{-1}(a_i)$ .
4. Tomando o  $\lim_{a_i \rightarrow 0} t(a_i) = 1$  recupera-se o operador identidade.

Assim escrevemos o operador  $t(a_i) = e^{i\hat{k}_i \hat{a}_i}$ . Isso permite escrever  $\hat{p}_i = \hbar \hat{k}_i$  na representação  $t(a_i) = e^{i\frac{\hat{p}_i a_i}{\hbar}}$ . Considerando a expansão para a Eq. (3.9),  $t(a_i) = 1 + \frac{i\hat{p}_i a_i}{\hbar}$ , tem-se

$$\left(1 + \frac{i\hat{p}_i a_i}{\hbar}\right)\Psi(q_i, p_i) = e^{i\phi}\Psi\left(q_i + \frac{a_i}{2}, p_i\right).$$

Utilizando o operador  $e^{a\partial_r}$  na representação da posição  $e^{a\partial_r}g(r) = g(r + a)$ , obtém-se

$$\hat{p}\Psi(q_i, p_i) = \frac{\hbar\phi}{a_i}\Psi(q_i, p_i) - \frac{i\hbar}{2}\partial_q\Psi(q_i, p_i),$$

em que escrevemos o fator  $\frac{\hbar\phi}{a_i}$  na forma  $\frac{\hbar\phi}{a_i} = c$ , o que resulta em  $\phi = \frac{ac}{\hbar}$ . Logo  $c$  tem dimensão de momentum, ou seja,  $c = p$ , o que leva  $\hat{p}$  a ser escrito na forma [38]

$$\hat{p} = q - \frac{i\hbar}{2}\partial_q. \quad (3.10)$$

Como o operador satisfaz a condição  $\partial_q = -\partial_q^\dagger$ , isto implica que o operador  $\hat{p}$  é um

observável físico [38, 39]. E ainda, escrevemos (3.10) de forma mais compacta  $\hat{p} = p\star$ . A seguir será tratado o operador posição.

### 3.3.3 Operador Posição no Espaço de Hilbert Simplético $\mathcal{H}(\Gamma)$

Como vimos anteriormente o operador  $\hat{p}$  é hermitiano. Isto corresponde a ser um observável. Logo, teremos o análogo para o operador de posição de tal modo que a transformação imposta  $t(a)\hat{q}t^\dagger(a) = \hat{q} + a$  seja válida [38, 39]. Nesse sentido, considere o operador arbitrário dado por

$$\hat{q} = Aq + Bp + C\partial_q + D\partial_p,$$

onde  $A, B, C$  e  $D$  são constantes. Usando a relação de Heisenberg temos

$$[Aq + Bp + C\partial_q + D\partial_p, p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q] = i\hbar.$$

Assim, temos

$$\frac{i\hbar A}{2} + D = i\hbar.$$

Definindo  $A = 1$  e  $D = \frac{i\hbar}{2}$ , encontramos o operador posição escrito como

$$\hat{q} = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, \quad (3.11)$$

ou seja, escreve-se  $\hat{q} = q\star$ .

Recorrendo a transformação

$$t(a)\hat{q}t^\dagger(a) = \hat{q} + a, \quad (3.12)$$

esta relação acima é verificada aplicando o operador  $e^A B e^{-A}$  e utilizando a fórmula de Baker-Hausdorff-Campbell  $e^A B e^{-A} = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, B]_n$ , onde  $n$  indica o número de comutadores repetidos. Isto é

$$\exp\left[i\frac{\hat{p}a_i}{\hbar}\right]\hat{q}\exp\left[-i\frac{\hat{p}a_i}{\hbar}\right] = \hat{q} + a. \quad (3.13)$$

Conseqüentemente, se nota que o operador em (3.13) realiza deslocamentos nas quantidades de movimento, isto é, um gerador de translação. Contudo, também se observa a presença de uma fase. Motivado pelos operadores de Bopp que representam os operadores de posição e momento, um estudo a seguir referente ao grupo de Galilei no espaço de fase é apresentado.

### 3.4 O Grupo de Galilei

O estudo do grupo de Galilei no espaço de fase é construído a partir do grupo de Lie com dez parâmetros especificados [57, 50, 45]. De forma generalizada as transformações de Galilei para dois sistemas de referência  $(\mathbf{x}, t)$  e  $(\mathbf{x}', t')$  associados são definidas pelas equações [57, 45]

$$\begin{aligned}x'_i &= Rx_i + v_i t + a, \\t' &= t + \tau, \\p'_i &= p + mv_i,\end{aligned}\tag{3.14}$$

onde  $x'$  são as coordenadas espaciais,  $R$  é uma matriz de rotação pertencente ao grupo  $O(3)$ ,  $t$  e  $\tau$  é a coordenada temporal e de translação temporal,  $a$  é o deslocamento no espaço,  $m$  e  $v_i$  são a massa da partícula e a velocidade relativa indicando a alteração de sistemas de referência inerciais, isto é, *boost*. Com as transformações unitárias conhecidas  $U : \mathcal{H}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma)$ , e tomando a Eq. (3.10) e (3.11), a relação de comutação adquire o seguinte aspecto

$$\begin{aligned}[\widehat{Q}, \widehat{P}] &= [q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q] \\&= [q, p] + \frac{i\hbar}{2}[\partial_p, p] - \frac{i\hbar}{2}[q, \partial_q] + \frac{i^2\hbar^2}{4}[\partial_p, \partial_q] \\&= i\hbar\delta_{ij}.\end{aligned}$$

com  $\widehat{Q}$  e  $\widehat{P}$  especificando os geradores que levam a obedecer a relação de Heisenberg [39, 38, 30]. Agora, dando ênfase a álgebra de Galilei-Lie inserimos os ingredientes necessários tendo o operador  $\widehat{K}$  definido como

$$\widehat{K} = m\widehat{Q} - t\widehat{P},\tag{3.15}$$

onde  $m$  e  $t$  são parâmetros. Em seguida, se define o operador estrela da seguinte forma

$$\begin{aligned}\widehat{K}_i &= k\star = mq\star - tp\star \\&= m(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p) - t(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q).\end{aligned}$$

Temos que na mecânica clássica o momento angular é definido como  $\mathbf{L} = \mathbf{Q} \times \mathbf{P}$  [38].

No espaço de Hilbert simplético  $\mathcal{H}(\Gamma)$  o operador momento angular fica escrito na forma

$$\widehat{L}_i = \epsilon_{ijk} \widehat{Q}_j \widehat{P}_k, \quad (3.16)$$

onde  $\epsilon_{ijk}$  é um tensor antissimétrico. Utilizando as Eqs. (3.10) e (3.11) na (3.16), obtemos o operador estrela equivalente

$$\widehat{L}_i = L_{i\star} = \epsilon_{ijk} q_j p_k - \frac{i\hbar}{2} \epsilon_{ijk} q_j \partial_{q_k} + \frac{i\hbar}{2} \epsilon_{ijk} q_k \partial_{p_j} + \frac{\hbar^2}{2} \epsilon_{ijk} \partial_{p_j} \partial_{q_k}. \quad (3.17)$$

Um sistema livre de interação é descrito por um gerador de evolução temporal escrito como

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{P_i^2}{2m} = \frac{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}{2m}. \quad (3.18)$$

No formalismo da mecânica simplética, temos o correspondente definido pelo operador estrela dado por

$$\begin{aligned} \widehat{H} = H_{\star} &= \frac{\widehat{P}^2}{2m} = \sum_{i=1}^3 \frac{\widehat{P}_i^2}{2m} \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \left( p_i - \frac{i\hbar}{2} \partial_{q_i} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Deste modo, temos a álgebra de Galilei-Lie estendida de acordo com os comutadores dos geradores do grupo de Galilei [\[45, 30, 57, 50\]](#)

$$\begin{aligned} [\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} \widehat{L}_k, & [\widehat{L}_j, \widehat{H}] &= 0, \\ [\widehat{L}_i, \widehat{K}_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} \widehat{K}_k, & [\widehat{K}_i, \widehat{K}_j] &= 0, \\ [\widehat{L}_i, \widehat{P}_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} \widehat{P}_k, & [\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] &= 0, \\ [\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] &= i\hbar m \delta_{ij} \widehat{1}, & [\widehat{P}_i, \widehat{H}] &= 0, \\ [\widehat{K}_i, \widehat{H}] &= 2mi\hbar \widehat{P}_i, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $m$  é um parâmetro que corresponde a massa, elemento característico da extensão central [\[50, 57\]](#). Em seguida, faremos algumas demonstrações dessas relações de comutação fundamentada nas referências [\[30, 48, 46, 10\]](#).

**Demonstração 1.** Para provar a relação  $[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar m\delta_{ij}\widehat{\mathbf{1}}$ , utilizaremos a seguinte propriedade  $[a + \alpha b, c] = [a, c] + \alpha[b, c]$ , com  $\alpha$  constante complexa e  $a, b, c$  representam operadores, temos que

$$[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = [m\widehat{Q}_i - t\widehat{P}_i, \widehat{P}_j]. \quad (3.21)$$

reescrevendo a relação (3.21), tem-se

$$[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = m[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j] - t[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j].$$

nos leva a obter

$$[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = m\delta_{ij}\widehat{\mathbf{1}}. \quad (3.22)$$

**Demonstração 2.** Para deduzirmos a expressão  $[\widehat{K}_i, \widehat{H}] = 2mi\hbar\widehat{P}_i$ , recorreremos a identidade  $[a + \alpha b, c] = [a, c] + \alpha[b, c]$ , ou seja

$$\begin{aligned} [\widehat{K}_i, \widehat{H}] &= [m\widehat{Q}_i - t\widehat{P}_i, \widehat{P}_j\widehat{P}_j], \\ &= m[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j\widehat{P}_j] - t[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j\widehat{P}_j]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

temos também a propriedade  $[a, bc] = [a, c]b + c[a, b]$ , tal que encontraremos outra forma de escrever (3.23)

$$\begin{aligned} [\widehat{K}_i, \widehat{H}] &= m[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j]\widehat{P}_j + m\widehat{P}_j[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j] \\ &= 2mi\hbar\delta_{ij}\widehat{P}_j \\ &= 2mi\hbar\widehat{P}_i. \end{aligned} \quad (3.24)$$

**Demonstração 3.** Para que a relação de comutação  $[\widehat{L}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k$  seja verificada, usando a expressão  $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$ , temos

$$\begin{aligned} [\widehat{L}_i, \widehat{P}_m] &= [\epsilon_{ijk}\widehat{Q}_j\widehat{P}_k, \widehat{P}_m] \\ &= \epsilon_{ijk}\widehat{Q}_j[\widehat{P}_k, \widehat{P}_m] + \epsilon_{ijk}[\widehat{Q}_j, \widehat{P}_m]\widehat{P}_k \\ &= i\hbar\delta_{jm}\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k \\ &= i\hbar\epsilon_{imk}\widehat{P}_k. \end{aligned} \quad (3.25)$$

**Demonstração 4.** O comutador de  $[\widehat{L}_i, \widehat{K}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k$  é verificado usando as regras de comutação  $[a + \alpha b, c] = [a, c] + \alpha[b, c]$  e  $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$ , ou seja

$$\begin{aligned}
 [\widehat{L}_i, \widehat{K}_m] &= [\epsilon_{ijk}\widehat{Q}_j\widehat{P}_k, m\widehat{Q}_m - t\widehat{P}_m] \\
 &= m\epsilon_{ijk}[\widehat{Q}_j\widehat{P}_k, \widehat{Q}_m] - t\epsilon_{ijk}[\widehat{Q}_j\widehat{P}_k, \widehat{P}_m] \\
 &= -im\hbar\delta_{km}\epsilon_{ijk}\widehat{Q}_j - it\hbar\delta_{jm}\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k \\
 &= i\hbar m\epsilon_{ijm}\widehat{Q}_j - it\hbar\epsilon_{imk}\widehat{P}_k \\
 &= i\hbar m\epsilon_{ijk}\widehat{Q}_k - it\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k \\
 &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

logo, está verificada a álgebra associada aos operadores estrela. Onde  $\widehat{P}$ ,  $\widehat{K}$ ,  $\widehat{L}$ ,  $\widehat{H}$  no cenário da simetria Galileana, correspondem aos geradores de translações, transformações puras de Galilei, rotações e translação temporal [30, 46]. Nesta representação  $\widehat{Q}$  e  $\widehat{P}$  são transformado pelas transformações puras de Galilei de acordo com

$$e^{-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}}\widehat{P}_je^{iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}} = \widehat{P}_j + mv_j\mathbf{1}, \tag{3.27}$$

$$e^{-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}}\widehat{Q}_je^{iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}} = \widehat{Q}_j + v_jt\mathbf{1}. \tag{3.28}$$

Além disso

$$[\widehat{Q}_j, \widehat{P}_k] = i\hbar\delta_{jk}\mathbf{1}. \tag{3.29}$$

Note que as Eqs. (3.27) e (3.28) foram obtidas usando  $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \dots$

Assim,  $\widehat{Q}_j$  e  $\widehat{P}_j$  podem ser interpretados como observáveis físicos de posição e momento, com as Eqs. (3.27) e (3.29) especificando a direção que  $\widehat{Q}$  e  $\widehat{P}$  transforma-se sob transformações puras de Galilei [57, 46, 30]. Nesta representação, temos os invariantes de Casimir da álgebra de Galilei-Lie que são dados por

$$I_1 = \widehat{H} - \frac{\widehat{P}^2}{2m} \tag{3.30}$$

$$I_2 = \widehat{L} - \frac{1}{2m}\widehat{K} \times \widehat{P}. \tag{3.31}$$

onde  $I_1$  é o invariante que descreve a Hamiltoniana de uma partícula livre, ao passo que  $I_2$  corresponde ao invariante relacionado com os graus de liberdade do spin. Neste trabalho, é considerado  $I_2 = 0$ .

Representa-se o observável físico através do gerador de translação temporal  $\hat{H}$ . A evolução temporal desse observável é dada por [30, 46]

$$\hat{A}(t) = e^{-it\frac{\hat{H}}{\hbar}}\hat{A}(0)e^{it\frac{\hat{H}}{\hbar}}, \quad (3.32)$$

em que  $\hat{A}(t)$  é o observável físico no instante  $t$ . Consequentemente, a equação que descreve a dinâmica para o operador  $\hat{A}(t)$  é obtida tomando-se a derivada temporal da Eq. (3.32),

$$\frac{\partial\hat{A}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}] + \frac{\partial\hat{A}(0)}{\partial t}, \quad (3.33)$$

a qual resulta na equação de Heisenberg.

Com os elementos constituintes da Mecânica Quântica no espaço de fase é possível a construção de uma base em  $\mathcal{H}(\Gamma)$  [46, 30]. Para tanto, na construção da base, considere os operadores de posição e momentum definidos por

$$\begin{aligned} \hat{P} = p\star &= p\mathbf{1} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q} \\ &= p\mathbf{1} + \frac{1}{2}\tilde{P}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

De maneira análoga, temos

$$\begin{aligned} \hat{Q} = q\star &= p\mathbf{1} + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \\ &= q\mathbf{1} + \frac{1}{2}\tilde{Q}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Obtemos formalmente operadores multiplicativos (*c-number*) diretamente associados ao operador identidade escritos na forma

$$\bar{P} = 2p\mathbf{1}, \quad (3.36)$$

e

$$\bar{Q} = 2q\mathbf{1}, \quad (3.37)$$

que são  $\bar{Q}$  e  $\bar{P}$  operadores hermitianos. Estes operadores podem ser escritos como

$$\hat{P} = \frac{1}{2}(\bar{P} + \tilde{P}). \quad (3.38)$$



e

$$\widehat{Q} = \frac{1}{2}(\overline{Q} + \widetilde{Q}). \quad (3.39)$$

e quando submetidos a transformação pura de Galilei, os operadores  $\overline{Q}$  e  $\overline{P}$  se transformam como posição e momentum, isto é

$$e^{-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}} 2\overline{Q} e^{iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}} = 2\overline{Q} + vt\mathbf{1}, \quad (3.40)$$

e

$$e^{-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}} 2\overline{P} e^{iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}} = 2\overline{P} + mv\mathbf{1}. \quad (3.41)$$

Em consequência, os operadores  $\overline{Q}$  e  $\overline{P}$  comutam entre si, isto é,  $[\overline{Q}, \overline{P}] = 0$ , isto significa que  $\overline{Q}$  e  $\overline{P}$  não são interpretados como observáveis, uma vez que a relação de Heisenberg não é obedecida [46]. Contudo, o uso desses operadores possibilita a construção de um referencial de espaço de fase no espaço de Hilbert [46, 30]. Então, se define uma base de autovetores normalizados  $|q, p\rangle$  com um conjunto de autovalores  $\{q\}$  e  $\{p\}$  satisfazendo

$$\overline{Q}\Psi(q, p) = q\Psi(q, p), \quad (3.42)$$

e, analogamente,

$$\overline{P}\Psi(q, p) = p\Psi(q, p), \quad (3.43)$$

em que  $\Psi(q, p) = \langle q, p | \Psi \rangle$  é uma função de onda no espaço de fase  $\Gamma$ .

Através da relação de completudeza, obtemos o produto interno

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \Psi_1^*(q, p) \Psi_2(q, p) dq dp. \quad (3.44)$$

De forma semelhante, tem-se

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \Psi_1^*(q, p) \star \Psi_2(q, p) dq dp. \quad (3.45)$$

Um operador  $\widehat{A}$  aplicado em  $\Psi$ , fica dado

$$\langle q, p | \widehat{A}\Psi \rangle = \int \langle q, p | \widehat{A} | q', p' \rangle \langle q', p' | \Psi \rangle dq dp, \quad (3.46)$$

onde  $\int |q', p'\rangle \langle q', p'| dq dp = 1$ . Para o cálculo do valor médio na base  $\{q, p\}$ , toma-se o

correspondente do operador  $\hat{A} = a(q, p) \star$  no espaço de fase, ou seja

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle &= \int \langle \Psi | q, p \rangle \langle q, p | \hat{A} | q', p' \rangle \langle q', p' | \Psi \rangle dq dp dq' dp' \\ &= \int \Psi^*(q, p) a(q, p) \star \Psi(q, p) dq dp \\ &= \int a(q, p) [\Psi(q, p) \star \Psi^*(q, p)] dq dp. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Onde  $\langle q, p | \hat{A} | q', p' \rangle = \hat{A} \delta(p - p') \delta(q - q')$ . O valor esperado de  $\hat{Q}$  é dado por

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle &= \int q [\Psi(q, p) \star \Psi^*(q, p)] dq dp \\ &= \int q \sigma(q) dp, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde  $\sigma(q)$  é a densidade de probabilidade para medir  $\hat{Q}$  na representação da posição  $q$  [56], isto é

$$\sigma(q) = \int [\Psi(q, p) \star \Psi^*(q, p)] dp. \quad (3.49)$$

Analogamente, temos

$$\sigma(p) = \int [\Psi(q, p) \star \Psi^*(q, p)] dq. \quad (3.50)$$

### 3.5 Equação de Schrödinger no Espaço de Fase

Iremos obter nesta seção uma equação responsável pela dinâmica de um sistema quântico. Para tal, se define uma função dependente do tempo  $\Psi(q, p, t)$  representada no espaço de Hilbert simplético  $\mathcal{H}(\Gamma)$ . A função  $\Psi(q, p, t)$  não pode ser interpretada com o mesmo conteúdo fornecido na função de onda da Mecânica Quântica usual, pois os autovalores  $q$  e  $p$  pertencem aos operadores auxiliares  $\bar{Q}$  e  $\bar{P}$  [46, 30, 14, 11, 56].

Consideremos a função de onda que evolui no tempo dada na forma

$$\Psi(q, p, t) = \exp\left(\frac{-itH}{\hbar}\right) \star \Psi(q, p, 0), \quad (3.51)$$

onde  $U(t, 0) = \exp\left(\frac{-itH}{\hbar}\right)$ . Em seguida, a Eq. (3.51) é derivada com relação ao tempo, ou

seja

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(q, p, t)}{\partial t} &= \frac{(-i)}{\hbar} h(q, p) \star \exp\left(\frac{-itH}{\hbar}\right) \star \Psi(q, p, 0) \\ &= \frac{(-i)}{\hbar} h(q, p) \star \Psi(q, p, t).\end{aligned}\quad (3.52)$$

Conseqüentemente, a equação de evolução temporal para  $\Psi(q, p, t)$  é escrita do seguinte modo

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q, p, t)}{\partial t} = H \star \Psi(q, p, t), \quad (3.53)$$

Utilizando o operador Hamiltoniano definido na forma usual

$$\begin{aligned}H &= h + V(q) \\ &= \frac{p^2}{2m} + V(q),\end{aligned}\quad (3.54)$$

então a Eq. (3.53) é escrita como

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q, p, t)}{\partial t} = \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{i\hbar p}{2m} \frac{\partial}{\partial q} \right) \Psi(q, p, t) + V\left(q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) \Psi(q, p, t), \quad (3.55)$$

que é a equação de Schrödinger no espaço de fase. A dedução desta equação somente é verificada se a extensão central (3.20) que rotula a representação for ( $m \neq 0$ ) [11, 57, 46, 56, 90].

A Eq. (3.55) através da densidade Lagrangiana dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{i\hbar}{2} (\Psi^\dagger \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^\dagger) + \frac{i\hbar}{4m} p (\Psi^\dagger \partial_q \Psi - \Psi \partial_q \Psi^\dagger) \\ &\quad - \frac{p^2}{2m} \Psi \Psi^\dagger + V(q) \star (\Psi \Psi^\dagger) - \frac{\hbar^2}{8m} \partial_q \Psi \partial_q \Psi^\dagger.\end{aligned}\quad (3.56)$$

é invariante por transformação de calibre.

Usando a propriedade  $f(q, p) \star c = cf(q, p)$  introduzida no método de separação de variáveis, tem-se

$$\begin{aligned}\Psi(q, p, t) &= \psi(q, p) \star \Phi(t) \\ &= \psi(q, p) \Phi(t),\end{aligned}\quad (3.57)$$

substituindo o produto de funções escrita na Eq. (3.52), obtém-se a equação de autovalor

$$\begin{aligned}\widehat{H}\psi(q, p) &= H \star \psi(q, p) \\ &= E\psi(q, p),\end{aligned}\tag{3.58}$$

em que  $E$  é uma constante. Assim, a solução geral da Eq. (3.52) é escrita como

$$\Psi(q, p, t) = \psi(q, p) \exp\left(\frac{-itE}{\hbar}\right).\tag{3.59}$$

Considerando que existe uma associação com a função de Wigner e a solução da Eq. (3.52), temos a seguinte relação para função  $f_w$ ,

$$f_w(q, p, t) = \Psi(q, p, t) \star \Psi^\dagger(q, p, t).\tag{3.60}$$

Veja que a conexão pode ser verificada usando a equação de Schrödinger simplética e o complexo conjugado da função  $\Psi$ , ou seja

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^\dagger(q, p, t)}{\partial t} = \Psi^\dagger(q, p, t) H.\tag{3.61}$$

Em seguida, multiplicando  $\Psi^\dagger$  pelo lado esquerdo da Eq. (3.52), enquanto que a segunda Eq. (3.61) é feito uma multiplicação por  $\Psi \star$  pelo lado direito, e tomando a diferença entre as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial (\Psi \star \Psi^\dagger)}{\partial t} &= H (\Psi \star \Psi^\dagger) - (\Psi \star \Psi^\dagger) H \\ &= H \star f_w - f_w \star H,\end{aligned}\tag{3.62}$$

que leva ao resultado final

$$i\hbar \frac{\partial f_w(q, p, t)}{\partial t} = \{H, f_w\}_M.\tag{3.63}$$

onde  $\{a, b\}_M = a \star b - b \star a$  representa os parênteses de Moyal. Desse modo, a Eq. (3.63) pode ser encontrada na literatura como equação de Moyal para o formalismo do espaço de fase [90, 91, 50]. E conseqüentemente existe uma analogia com a equação de Heisenberg, ou seja, os operadores evolui no tempo e as funções de onda não possui dependência temporal [56, 90]. Assim, a partir da equação de Moyal, as funções de Wigner apresentam comportamento de permanecerem estacionárias inicialmente enquanto que as transformadas de Weyl dos

operadores são dependentes do tempo. A dinâmica dessa equação é equivalente à equação de Liouville-von Neumann, onde o estado do sistema será descrito pela função de Wigner seguido pelo parênteses de Moyal que substitui o comutador [56].

Além do mais, a função de Wigner satisfaz a condição de normalização, dada por

$$\int f_w(q, p, t) dq dp = \int \Psi(q, p, t) \star \Psi^\dagger(q, p, t) dq dp = 1 \quad (3.64)$$

Também pode-se verificar com base na relação (3.60) que a função de Wigner é real, isto é,

$$\begin{aligned} [\Psi(q, p, t) \star \Psi^\dagger(q, p, t)]^\dagger &= [\Psi^\dagger(q, p, t)]^\dagger \star [\Psi(q, p, t)]^\dagger \\ &= \Psi(q, p, t) \star \Psi^\dagger(q, p, t) \\ &= f_w = f_w^\dagger, \end{aligned} \quad (3.65)$$

na qual a função  $f_w$  não é positiva definida. Outro aspecto importante da função de Wigner, é quando se multiplica por  $\star \psi^\dagger(q, p)$  pelo lado direito na Eq. (3.58), levando-nos assim a escrever a equação da seguinte forma

$$\begin{aligned} H f_w(q, p) &= H \star f_w(q, p) \\ &= E f_w(q, p). \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde  $H$  é o hamiltoniano. A Eq. (3.66) para um sistema físico definido e descrito por uma função que comuta  $H(q, p)$ , possibilita obter as auto-energias e os auto-estados. A função  $H(q, p)$  corresponde a transformada de Weyl para um operador hamiltoniano  $\hat{H}$  [56, 90]. Assim, tem-se a função de Wigner representando o auto-estado que descreve o sistema associado com o autovalor. Logo, conhecida a solução  $\psi$ , encontra-se a função de Wigner no espaço de fase. Tal resultado fornece um significado físico para as funções de onda em  $\mathcal{H}(\Gamma)$ , que são denominadas de quasi-amplitude de probabilidade [56, 57, 50, 48].



## Capítulo 4

# Interação Forte no Espaço de Configurações

Inicialmente, neste capítulo abordaremos uma breve introdução a Física de Partículas Elementares e Cromodinâmica Quântica que governa as interações fortes, alicerces teóricos para o entendimento proposto posteriormente à análise da interação forte na representação da Mecânica Quântica Simplética. Na literatura, a Física de Partículas Elementares ou Física de Altas Energias, vem passando por grandes progressos no âmbito teórico e experimental [58]. Contudo, o termo concedido para Teoria das Partículas Elementares não parece muito viável, pois nem todas as partículas identificadas na natureza é elementar, isto é, tais partículas são dotadas de estruturas internas. Então, se define Física de Partículas como o estudo dos blocos fundamentais da matéria e suas interações, tal que na escala subatômica a matéria é decomposta em blocos ainda menores formando prótons, elétrons, nêutrons, neutrinos, mésons  $\pi$  e etc [59, 60]. O marco inicial para o desenvolvimento da Física de Partículas acontece em 1897 pelo Físico inglês J. J. Thomson na detecção do elétron aliado com a teoria de Maxwell para o campo eletromagnético [61, 62]. É notável nessa linha os trabalhos de Dirac a cerca do pósitron, o neutrino postulado de forma teórica por Wolfgang Pauli e a previsão do méson por Yukawa congrega argumentos fortes [60, 63]. Tal construção utiliza-se os métodos da Teoria Quântica de Campos mais os princípios da invariância de Calibre local, pilares para estabelecer a teoria fundamental das interações fortes, eletromagnética e fraca. Assim, é incorporado no cenário da teoria um rótulo chamado Modelo Padrão da Física de Partículas, devido aos inúmeros testes enfrentados em laboratórios tendo êxito nos resultados. Esta teoria se apoia nos fundamentos dos grupos de simetrias unitários  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  que descreve as interações forte, fraca, eletromagnética [58]. Neste caminho, o grupo  $SU(3)_C$  está associada a interação forte dos quarks e liga estes nos hádrons, mecanismo conhecido como confinamento. O grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  está associada a teoria da interação eletrofraca que foi um modelo formulado por Glashow-

Weinberg-Salam onde foi unificado a interação fraca e a eletromagnética. Neste capítulo seguimos as referências [61, 64, 65, 66, 62, 60, 71, 73, 75, 79].

## 4.1 Quarks e Léptons

As partículas (ou campos) que compõem o que podemos observar estão inseridas em dois grupos denominadas de partículas de matéria (ou campos de matéria) e bósons de calibre. O primeiro grupo forma os blocos constituintes fundamentais da matéria que são representados em duas categorias: quarks e léptons, cujas características consistem em ser todos fermiônicos com spin semi-inteiro [61, 64, 65, 66]. Os léptons (que significa *leve* em grego) são partículas que sentem a interação dos campos eletromagnético e fraco quando estão carregados. Todavia, podem apenas sofrer a interação do campo fraco se estiverem neutros. Para tanto, podemos listar os léptons em grupos, sendo três carregados, o elétron  $e$ , o múon  $\mu$  e o tau  $\tau$ , e três léptons nêutrons, os neutrinos associados a cada um carregado denominados por  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  [67]. A interação dos léptons ocorre apenas com fótons  $\gamma$  e com os bósons intermediários rotulados de  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{Z}$ , com spin inteiro que são os mediadores da interação eletrofraca [68]. O comportamento do elétron e dos neutrinos é sua estabilidade comparado ao  $\mu$  e o  $\tau$ . Consequentemente, para os quarks, o que os diferencia é a interação forte que é mediada pelos glúons que tem spin 1. Os glúons se apresentam em oito tipos diferentes e não possuem massa. Deste modo, as partículas estão agrupadas em pares ou dubletos, também chamados de famílias ou gerações [70, 69].

## 4.2 Campos de Calibre

Nesta seção introduzimos os campos que são os personagens importantes para compreender a estrutura das interações entre as partículas associada com as simetrias. Em particular têm-se um tipo de teoria de campos chamada de teoria de campos de calibre fundamentada nos princípios de calibre, peça chave para deixar a teoria invariante perante as transformações de calibre locais [71, 73, 75]. O caso mais conhecido da teoria de campo de calibre advém da eletrodinâmica baseada no problema de uma partícula carregada. Neste sentido, os campos elétricos  $\mathbf{E}$  e magnéticos  $\mathbf{H}$  se encontram conectados nas equações de



Maxwell na forma [\[71, 75\]](#)

$$\nabla \cdot E = \rho, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot H = 0, \quad (4.2)$$

$$\nabla \times E + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (4.3)$$

$$\nabla \times H - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{c} j. \quad (4.4)$$

onde  $\epsilon = 1$  em unidades naturais.

Usando a notação relativística, as equações de Maxwell podem ser reescritas na forma covariante do seguinte modo:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu, \quad (4.5)$$

onde

- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor de campo eletromagnético,
- $j^\nu = (cp, j)$  é o quadrivetor de corrente eletromagnética,
- $A^\nu = (\phi, A)$  é o quadrivetor potencial eletromagnético.

Os campos elétricos  $\mathbf{E}$  e magnético  $\mathbf{B}$  são escritos em termos dos potenciais por

$$E = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (4.6)$$

$$H = \nabla \times A. \quad (4.7)$$

Como podemos observar, o campo eletromagnético fica invariante perante as transformações dos potenciais, isto é

$$A \rightarrow A - \nabla \Lambda, \quad (4.8)$$

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (4.9)$$

onde  $\Lambda$  é uma função escalar. A Eq. (4.8) e Eq. (4.9) são denominadas de transformações de calibre. Assim, a invariância da teoria eletromagnética mediante as transformações de calibre é de grande relevância, pois com base nos grupos de simetria internos, obtém-se a

teoria eletrofraca e forte [72, 73].

### 4.3 Campo Escalar de Klein-Gordon para Spin 0

Considere a densidade Lagrangiana para uma única variável  $\phi$  de campo escalar que é expressa na forma [75, 60]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^2. \quad (4.10)$$

Neste caso, temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi. \quad (4.11)$$

Ou, de forma mais explícita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi\partial_0\phi - \partial_1\phi\partial_1\phi - \partial_2\phi\partial_2\phi - \partial_3\phi\partial_3\phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^2 \quad (4.12)$$

Da qual,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_1\phi)} = -\partial_1\phi = \partial^1\phi. \quad (4.14)$$

ou,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi, \quad (4.15)$$

Logo, a equação de Euler-Lagrange fornece

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi = 0. \quad (4.16)$$

Esta é a equação de Klein-Gordon que descreve apenas partículas de spin nulo e massa  $m$ , como o méson  $\pi$  interagindo com o campo eletromagnético cujo campo  $\phi$  possui somente uma componente [79, 74, 72]. Para soluções na forma de ondas planas [74], isto é, soluções dada por

$$\Phi = \exp[-(p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})] \quad (4.17)$$

onde

$$p^2 \equiv p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2. \quad (4.18)$$

em que  $p^0$  e  $\vec{p}$ , são a energia e momento do pión, ao passo que  $m$  é a massa de repouso da partícula. Assim, a equação de Klein-Gordon no caso estática é dada por<sup>[74]</sup>

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = g\delta(x). \quad (4.19)$$

cuja solução é o potencial de Yukawa expresso como <sup>[74]</sup>

$$\phi(r) = \frac{ge^{-mr}}{r}. \quad (4.20)$$

#### 4.4 Campo Spinorial de Dirac para Spin $\frac{1}{2}$

Para o caso do campo spinorial  $\psi$ , a densidade Lagrangiana é escrita na forma <sup>[60, 75]</sup>

$$\mathcal{L} = i(\hbar c)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (mc^2)\bar{\psi}\psi \quad (4.21)$$

onde  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  são os spinores que representa as variáveis de campo independentes. Assim, utilizando a equação de Euler-Lagrange para  $\bar{\psi}$ , obtêm-se

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\psi. \quad (4.23)$$

e conseqüentemente,

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0. \quad (4.24)$$

Esta é a equação de Dirac que representa uma partícula fermiônica com massa  $m$  <sup>[60, 79]</sup>.

De forma análoga, utiliza-se a equação de Euler-Lagrange para  $\psi$ , tendo como resultado

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -mc^2\bar{\psi}. \quad (4.25)$$

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\bar{\psi} = 0. \quad (4.26)$$

que é a equação de Dirac adjunta para partículas de spin  $1/2$  <sup>[75, 79]</sup>.

## 4.5 Transformação de Calibre Local

A densidade Lagrangiana de Dirac escrita como

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi, \quad (4.27)$$

fica invariante através da transformação de calibre global, isto é

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi. \quad (4.28)$$

Onde  $\theta$  é um número real. Todavia, se o fator de fase se modificar em cada ponto do espaço-tempo, isto é, se  $\theta(x)$  for uma função de  $x^\mu$  [73, 79, 60], a transformação é dita local, ou seja

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta(x)} \psi. \quad (4.29)$$

Neste caso, a densidade lagrangiana não é invariante sob transformações de calibre local. Para isso, basta tomar a derivada de  $\theta$  na Eq.(4.29), ou seja

$$\partial_\mu (e^{i\theta} \psi) = i(\partial_\mu \theta) e^{i\theta} \psi + e^{i\theta} \partial_\mu \psi. \quad (4.30)$$

consequentemente, tem-se

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \hbar c (\partial_\mu \theta) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (4.31)$$

Por conveniência, introduz-se um fator fora de  $\theta$  dado por  $-\frac{q}{\hbar c}$ , isto é

$$\lambda(x) = -\frac{\hbar c}{q} \theta(x). \quad (4.32)$$

onde  $q$  é a carga da partícula. Assim,  $\mathcal{L}$  é escrito em função de  $\lambda$  da seguinte forma

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + (q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \partial_\mu \lambda \quad (4.33)$$

leva sob transformação de calibre local a

$$\psi \rightarrow e^{-\frac{iq\lambda(x)}{\hbar c}} \psi. \quad (4.34)$$

Portanto, admite-se que a densidade Lagrangiana total seja invariante por uma transformação de calibre local.

Outro ponto observado é que a densidade Lagrangiana livre de Dirac também não é invariante de calibre local <sup>[60, 79]</sup>. Então, é necessário fazer a suposição de que

$$\mathcal{L} = (i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi) - (q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu, \quad (4.35)$$

com  $A_\mu = (A_0, A_i)$  correspondendo ao campo de calibre. Com base na lei de transformação dada por

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda. \quad (4.36)$$

Essa equação respeita a invariância de calibre local. O novo campo vetorial que acopla  $\psi$  no último termo da Eq.(4.35), se torna necessário <sup>[60, 61]</sup>. Devido o campo vetorial, nota-se através da densidade lagrangiana de Proca, isto é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \left( \frac{m_A c^2}{\hbar} \right) A^\nu A_\nu. \quad (4.37)$$

que o tensor de campo eletromagnético  $F^{\mu\nu}$  é invariante pela Eq. (4.36), porém  $A^\nu A_\nu$  não será. Consequentemente, o campo de calibre precisa ter massa nula para a invariância de calibre local não ser eliminada <sup>[75, 60, 61]</sup>. Logo, quando se impõe a invariância de calibre local na Lagrangiana de Dirac, é necessário introduzir o campo vetorial com  $m = 0$ , ou seja

$$\mathcal{L} = (i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi) + \left( -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) - [(q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu]. \quad (4.38)$$

onde  $A^\mu$  é o potencial eletromagnético.

Assim, um ponto crucial entre transformações global e local aparece no momento do cálculo na derivada dos campos visto na Eq. (4.30),

$$\partial_\mu \psi \rightarrow e^{-\frac{iq\lambda}{\hbar c}} \left( \partial_\mu - i \frac{q}{\hbar c} (\partial_\mu \lambda) \right) \psi. \quad (4.39)$$

Se é feita uma substituição da derivada  $\partial_\mu$  pela derivada covariante  $D_\mu$  na densidade Lagrangiana de Dirac

$$D_\mu = \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu. \quad (4.40)$$

Usando a Eq. (4.36), a transformação de  $A_\mu$  elimina o termo na Eq. (4.39), recuperando a invariância da densidade de Lagrangiana. De fato, esta mudança da derivada  $\partial_\mu$  por uma derivada covariante  $D_\mu$  é uma ferramenta que transforma uma Lagrangiana invariante

global em uma local [\[79, 76, 60\]](#).

## 4.6 Representação $SU(3)$ do Quark

Os quarks podem existir em três estados completamente degenerados no qual possui a mesma massa e exatamente a mesma interação sendo denominados de estados de cor [\[64, 72, 69\]](#). Quarks e glúons são os campos da interação forte e o grupo de simetria que representa a interação forte é o  $SU(3)$  [\[77, 78, 79, 80, 69, 82\]](#). O conjunto das matrizes unitárias de dimensão  $3 \times 3$  com determinante igual 1 forma o grupo especial unitário  $SU(3)$ , que está acoplado a oito geradores [\[64, 81, 82\]](#). Os geradores são matrizes  $3 \times 3$  e é comum denotá-los por  $\lambda_i$  onde  $i = 1, 2, \dots, 8$  e expressas como

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Essas são as matrizes de Gell-Mann. As matrizes  $\lambda_i$  satisfazem as condições

$$\lambda_i^\dagger = \lambda_i, \quad (4.44)$$

$$Tr[\lambda_i] = 0. \quad (4.45)$$

O grupo  $SU(3)$  pode ser expressado dos oito geradores hermitianos independentes, tal que a transformação de simetria  $SU(3)$  é escrita como [\[64, 82\]](#)

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{T}} \quad (4.46)$$

o que permite escrever os oito geradores em termos dos  $\lambda_i$ ,

$$\hat{T}_i = \frac{1}{2}\lambda_i \quad (i = 1, \dots, 8). \quad (4.47)$$

As matrizes  $\lambda_i$  atua nas bases canônicas escritas na forma

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Vemos que os operadores  $\hat{T}_i$  correspondem as cargas de cor e obedecem as relações de comutação da álgebra de Lie do  $SU(3)$ , ou seja

$$[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = if_{ijk}\hat{T}_k, \quad (4.49)$$

onde  $f_{ijk}$  são as constantes de estrutura. E são antissimétricos, isto é

$$f_{ijk} = -f_{jik} = f_{jki} \quad (4.50)$$

E, ainda, a relações de anticomutação para  $\hat{T}_i$  são dadas por

$$\{\hat{T}_i, \hat{T}_j\} = \frac{4}{3}\delta_{ij}1 + 2d_{ijk}\hat{T}_k \quad (4.51)$$

onde  $d_{ijk}$  são constantes simétricas [64, 82].

## 4.7 Densidade de Lagrangiana de Campo da QCD

Nesta seção, o objetivo será apresentar a Lagrangiana da  $QCD$  dando uma breve introdução. A teoria da Cromodinâmica Quântica (Quantum Chromodynamics - QCD) representa uma lagrangiana renormalizável da teoria quântica de campos das interações fortes [71]. Os elementos chaves da QCD são os campos fermiônicos de spin 1/2 denominados de quarks que carregam carga elétrica fracionária e os campos de calibre de spin 1 não-abelianos chamados de glúons que correspondem aos bósons de calibre associados a cor [81, 61, 83]. Sendo assim, a densidade de Lagrangiana da QCD que descreve a interação entre quarks e glúons é escrita na forma [84, 71, 85].

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\mathcal{D} - m)q - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} \quad (4.52)$$

onde  $\mathcal{D} = iD_\mu\gamma^\mu$  e ( $i = 1, \dots, 8$ ). O termo  $\bar{q}i\gamma^\mu D_\mu q$  representa as interações de calibre entre quarks e glúons,  $F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$  é o termo cinético do glúon,  $q$  é o campo de quark representado tanto no espaço de Dirac quanto no espaço de cor e são acomodados em três componentes

de cor definidas como <sup>[71]</sup>,

$$q = \begin{pmatrix} q^r \\ q^g \\ q^b \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

onde os índices sobrescritos são rotulados por *red*, *green* e *blue* que corresponde as diferentes cargas da interação forte. A densidade de Lagrangiana da Eq. (4.52) é invariante perante as leis de transformações <sup>[61, 79, 75]</sup>

$$q \rightarrow e^{i\phi_i(x)\frac{\lambda_i}{2}} q, \quad (4.54)$$

$$D_\mu q \rightarrow e^{i\phi_i(x)\frac{\lambda_i}{2}} D_\mu q, \quad (4.55)$$

$$A_\mu^i \rightarrow A_\mu^i - \frac{1}{g_s} \partial_\mu \phi_i(x) + f_{ijk} \phi_j(x) A_{\mu k}. \quad (4.56)$$

A etapa seguinte está relacionado com o estudo de um dado setor de interação forte, a ser tratado no espaço de fase.



## Capítulo 5

# Interação de Quarks-Antiquarks Pesados Não-Relativísticos

Neste capítulo, nosso objetivo é tratar a interação de quarks-antiquarks pesados no regime não-relativístico da Mecânica Quântica Simplética. Existe um grande interesse por tais sistemas quarkônio por apresentarem um boa descrição de forma quantitativa para setores da cromodinâmica quântica baseado no potencial de Cornell. Nosso desenvolvimento consiste no primeiro momento a resolver equação de Schrödinger no espaço de fase com um potencial linear. Nesse caso, estudamos o comportamento da função de Wigner associada ao estado fundamental para os mésons  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$ .

Na sequência, a fim de tratar a equação de Schrödinger no espaço de fase, um procedimento baseado no método da transformação de Bohli é apresentado e aplicado no potencial de Cornell que descreve um estado ligado de quark-antiquark. Com esse procedimento trataremos o problema do potencial de Cornell do espaço de configuração para o espaço de fase de forma separada, tal que a primeira parte do sistema consiste ter oscilador, enquanto que a outra parte é usado métodos perturbativos. Em seguida, analisamos a função de Wigner referente ao estado fundamental do méson  $c\bar{c}$ , primeiro estado excitado, e o parâmetro de negatividade é calculado. No capítulo anterior, foi introduzido o sistema de interação quarks-antiquarks na forma relativística. Porém, neste capítulo o sistema de interação forte será tratado pela aproximação não-relativística no formalismo da mecânica quântica simplética.

A figura 5.1 a seguir mostra a forma do potencial de Cornell, dado por

$$V(r) = ar + \frac{b}{r} \quad (5.1)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes.

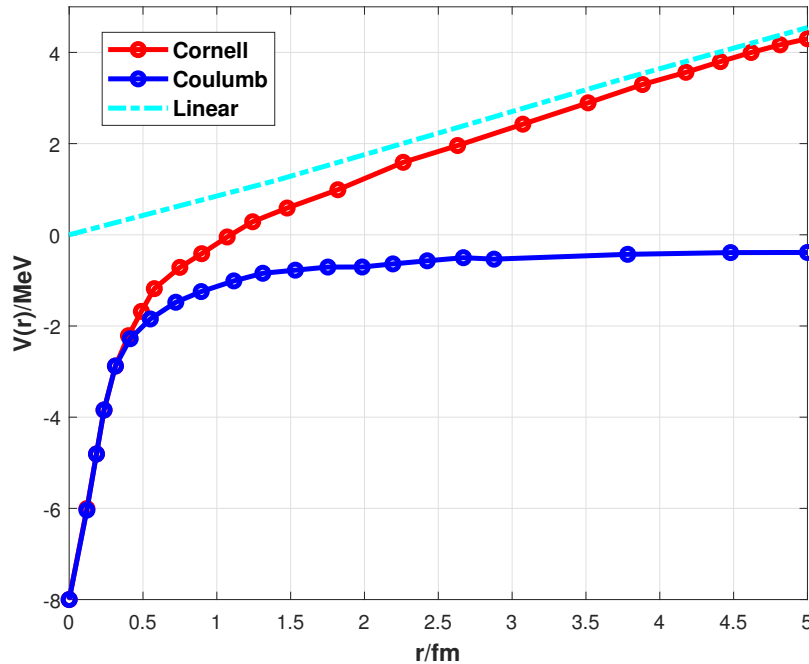


Figura 5.1: Potencial de Cornell feito no Matlab.

Na figura 5.1 o potencial de Cornell possui um termo de Coulomb que decorre da troca de um glúon entre o quark-antiquark dominante para distâncias curtas. O termo linear é dominante para grandes distâncias que é responsável pelo confinamento de quark [86, 24, 26, 27, 23]. Este é um resultado extraído do experimento. Primeiro, será tratado a parte linear do potencial de Cornell.

### 5.1 Potencial Linear

Nesta seção resolveremos a equação de Schrödinger no espaço de fase submetido ao potencial linear considerado o caso mais simples que contém características do problema de interação forte da QCD [86, 27, 23, 20]. No cenário da mecânica quântica simplética, a equação de Schrödinger é escrita na forma

$$\frac{p^2}{2m} \star \psi(q, p) + \lambda q \star \psi(q, p) = E \psi(q, p). \tag{5.2}$$

onde os operadores  $p\star$  e  $q\star$  são definidos como

$$p^\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q, \quad (5.3)$$

$$q^\star = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, \quad (5.4)$$

Se utilizarmos as Eqs. (5.3) e (5.4) na Eq. (5.2), escrevemos a equação de schrödinger

$$\frac{1}{2m} \left( p^2 - i\hbar p \partial_q - \frac{\hbar^2}{4} \partial_q^2 \right) \psi + \lambda \left( q + \frac{i\hbar}{2} \partial_p \right) \psi = E\psi, \quad (5.5)$$

e, conseqüentemente, a Eq. (5.5) pode assumir a forma,

$$\frac{p^2\psi}{2m} - \frac{i\hbar}{2m} p \partial_q \psi - \frac{\hbar^2}{8m} \psi + \lambda q \psi + \frac{i\lambda\hbar}{2} \partial_p \psi = E\psi. \quad (5.6)$$

Utilizando a transformação  $\omega = \frac{p^2}{2m} + \lambda q$ , e por meio da seguinte expressão

$$\frac{\partial\psi}{\partial q} = \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \frac{\partial\omega}{\partial q} = \lambda \frac{\partial\psi}{\partial\omega}, \quad (5.7)$$

temos que a parte complexa da Eq. (5.5) se anula, restando apenas a parte real. Sendo assim, temos

$$\alpha \frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} - \omega\psi = -E\psi, \quad (5.8)$$

onde  $\alpha = \frac{\hbar^2\lambda^2}{8m}$ . Então, a Equação de Schrödinger é reduzida para uma equação de Airy expressa do seguinte modo

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} - \kappa\psi = 0., \quad (5.9)$$

onde definimos  $\kappa = \frac{\omega - E}{\alpha}$ . Assim, a solução geral desta equação é

$$\psi(\omega) = C_1 Ai \left[ \alpha^{2/3} \left( \frac{\omega}{\alpha} - \frac{E}{\alpha} \right) \right] + C_2 Bi \left[ \alpha^{2/3} \left( \frac{\omega}{\alpha} - \frac{E}{\alpha} \right) \right]. \quad (5.10)$$

Onde  $Ai$  e  $Bi$  são as funções homogêneas de Airy. Todavia,  $Bi$  vai ao infinito para  $\omega \rightarrow \infty$ , neste caso a solução não é relevante, e então tomamos  $C_2 = 0$ . Sendo assim, a solução da Eq. (5.9) é reduzida para,

$$\psi(q, p) = C_1 Ai \left[ \alpha^{-1/3} (\omega - E) \right], \quad (5.11)$$

Podemos reescrever a Eq. (5.11) da seguinte forma,

$$\psi(q, p) = C_1 A_i \left[ \left( \frac{\hbar^2 \lambda^2}{8m} \right)^{-1/3} \left( \frac{p^2}{2m} + \lambda q - E \right) \right], \quad (5.12)$$

em que  $\psi(q, p)$  é uma função real. Como consequência, pela virtude da associatividade, dado  $\psi \star \psi \propto \psi$ , escrevemos a solução da função de Wigner em termos da função de Airy

$$f_w(q, p) = N A_i \left[ \left( \frac{\hbar^2 \lambda^2}{8m} \right)^{-1/3} \left( \frac{p^2}{2m} + \lambda q - E \right) \right]. \quad (5.13)$$

onde  $N$  é a constante de normalização.

Pela condição  $f_w(q, p) = 0$ , podemos determinar os níveis de energia, ou seja

$$A_i \left[ \left( \frac{\hbar^2 \lambda^2}{8m} \right)^{-1/3} \left( \frac{p^2}{2m} + \lambda q - E \right) \right] = 0. \quad (5.14)$$

A energia do sistema é determinada pelas raízes da função de Airy

$$E = \frac{p^2}{2m} - \alpha^{-1/3} r_i, \quad (5.15)$$

em que  $r_i$  é a raiz de Airy. No nosso caso, consideramos somente a energia para o estado fundamental referente ao sistema de mésons analisados. Dessa forma, a Eq. (5.15) toma a forma,

$$E = \frac{p^2}{2m} - \left( \frac{\hbar^2 \lambda^2}{8m} \right)^{-1/3} r_0. \quad (5.16)$$

Consequentemente, a condição de normalização para a função de Wigner é dada por

$$\int_0^\infty \int_{-p}^p f_w(q, p) dq dp = 1, \quad (5.17)$$

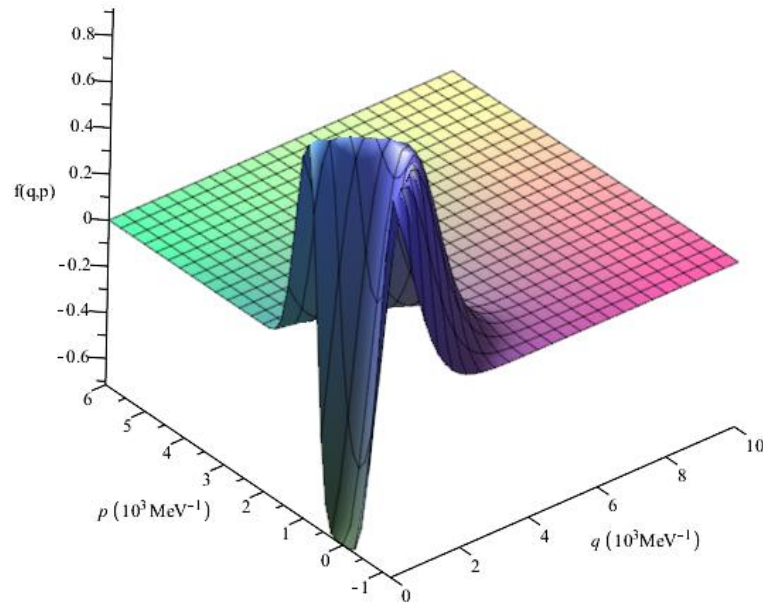
e, portanto,

$$f_w(q, p) = N A_i \left[ \left( \frac{\hbar^2 \lambda^2}{8m} \right)^{-1/3} \left( \frac{p^2}{2m} + \lambda q - E \right) \right]. \quad (5.18)$$

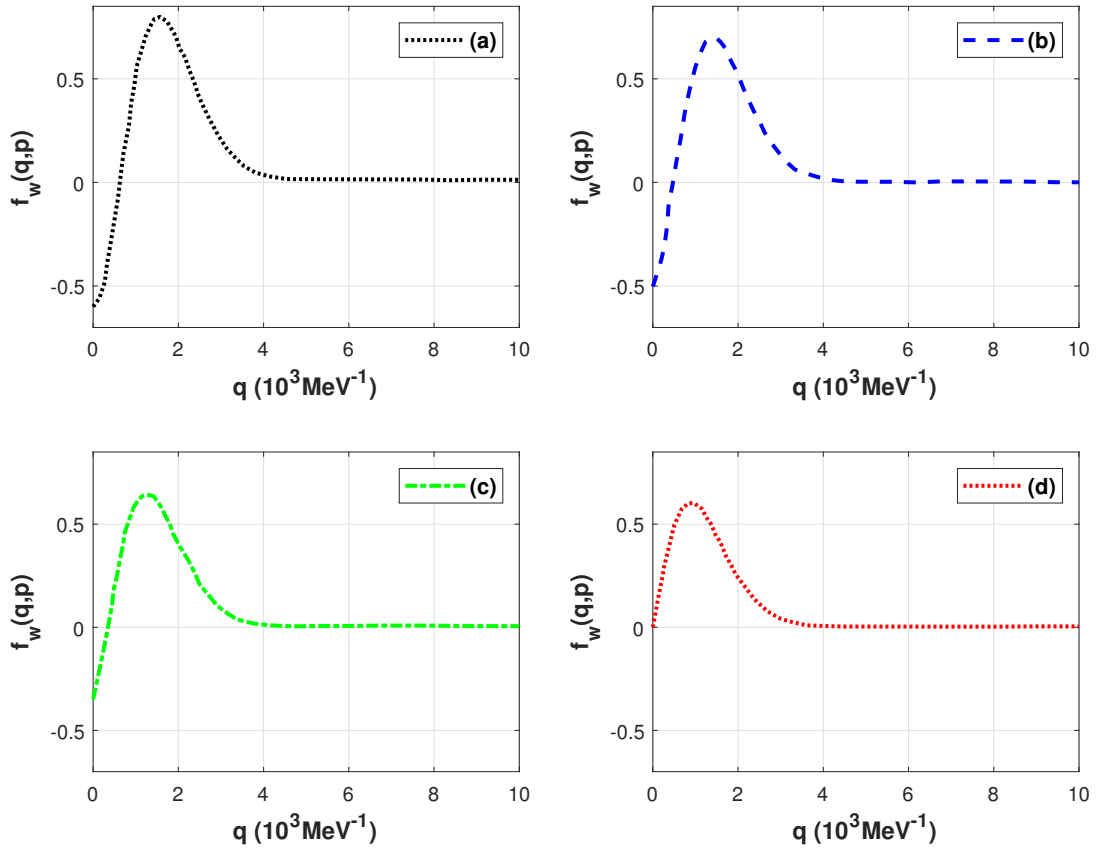
onde  $N = \alpha^{-1/3}$ . Para interpretar fisicamente nosso resultado, consideremos a solução obtida na Eq. (5.18) dada pela função de Wigner.

Em seguida, os gráficos para os resultados encontrados com a função de Wigner asso-

ciada ao sistema de interação  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$  são apresentados. Em consequência, mediante a função de Wigner uma análise foi feita apenas para o estado fundamental de cada sistema de interação quarks-antiquarks pesados na aproximação não-relativística.



**Figura 5.2:** Função de Wigner para o estado fundamental do méson  $c\bar{c}$ .

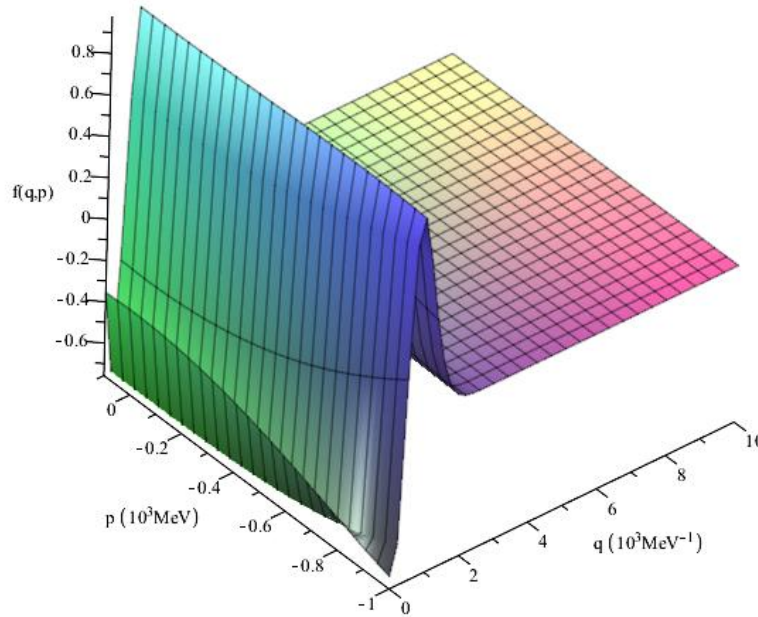


**Figura 5.3:** As figuras 5.2(a)-(d) representa os gráficos seccionados da figura 5.2 para o nível de energia mínima do méson  $c\bar{c}$  de acordo com a variação de energia cinética.

Para o sistema de méson  $c\bar{c}$ , levamos em consideração a Eq. (5.18). O sistema de méson charme-anticharme é mostrado na figura 5.2 representado pela função de Wigner para o estado fundamental. Definimos as unidades de  $MeV$  para a função de Wigner,  $MeV^{-1}$  para  $q$  e  $MeV$  para  $p$ , respectivamente. Os valores experimentais do méson  $c\bar{c}$  é, massa reduzida  $m = 630 MeV$ , parâmetro de confinamento  $\lambda = 600 MeV^2$  e a máxima distância relativa de aproximação entre quark-antiquark,  $q = 4077 MeV^{-1}$  retirados das referências [86, 87]. Do gráfico 3D observa-se que para o estado fundamental do méson  $c\bar{c}$  a função de Wigner assume valores negativos no espaço de fase e este fato está relacionado ao caráter quântico desse estado. Em seguida, são feitos cortes no gráfico 3D visualizados na figura 5.3. Na figura 5.3(a), quando colocamos  $p = 0 MeV$ , tem-se uma função de Wigner que possui valores negativos indicando o caráter não-clássico desse estado do méson  $c\bar{c}$ . observado também nas figuras 5.3(b)-(c).  $p = 0 MeV$  representa um extremo. Quando variamos a

energia cinética para  $p = 100 \text{ MeV}$  ocorre um deslocamento do gráfico da função de Wigner para o lado esquerdo como mostra a figura 5.3(b). Podemos prosseguir aumentando a energia cinética para  $p = 200 \text{ MeV}$ , o que evidencia ainda mais o afastamento para a esquerda do gráfico da função de Wigner ilustrado na figura 5.3(c). Se variarmos a energia cinética para  $p = 400 \text{ MeV}$  observamos que o gráfico da função de Wigner se deslocou visivelmente para à esquerda, isso pode ser observado na figura 5.3(d). Assim, observa-se que existe um limite à direita de existência para a função de Wigner não ser zero. Esse limite se aproxima do valor experimental referente a distância relativa de aproximação entre quark-antiquark charme que é da ordem de  $q = 4077 \text{ MeV}^{-1}$  aproximadamente. Então, uma condição de contorno é imposta no zero e, assim, percebe-se que a existência do quark-antiquark charme é do zero até onde vai a função de Wigner, respectivamente. Notamos que, a análise no espaço de fase está revelando que para a variação da energia cinética se tem um limite máximo de existência do méson charme-anticharme conforme identificado no gráfico acima. Esse sistema observado no espaço de fase, embora seja muito simples no caso da análise do potencial linear para descrever essa situação de quarks, permite observar o confinamento o que não é observado com a solução do espaço de configuração.

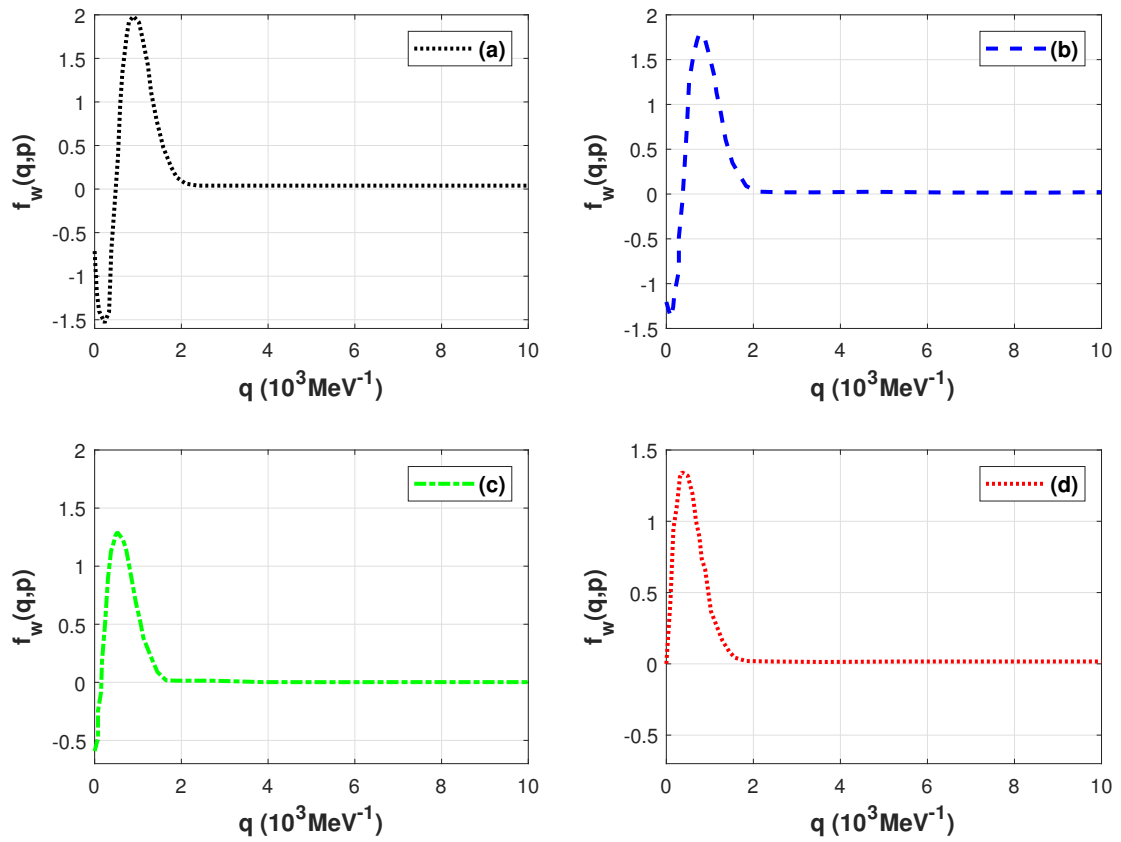
Analogamente ao que foi feito no caso do méson quark-antiquark charme ( $c\bar{c}$ ), podemos proceder para o sistema de méson formado por um quark-antiquark bottom ( $b\bar{b}$ ). Usando a solução dada na Eq. (5.18), esta pode ser graficamente representada na figura 5.4.



**Figura 5.4:** Gráfico de  $f_w(q, p)$  versus  $q$  e  $p$  para o estado fundamental do méson  $b\bar{b}$ .

Para o méson  $b\bar{b}$ , o comportamento da função de Wigner é mostrado na figura 5.4, em que é observado valores negativos para a função de Wigner indicando a não-classicalidade deste estado. Os valores experimentais são,  $m = 2080 \text{ MeV}$ ,  $\lambda = 2100 \text{ MeV}^2$  e  $q = 2382 \text{ MeV}^{-1}$  reportados em [86, 87]. Conseqüentemente, são realizados cortes no gráfico 3D da função de Wigner associada ao estado fundamental do méson bottom-antibottom, o que resulta nos gráficos bidimensionais de  $f_w(q, p)$  observados nas figuras 5.5. Assim, grafamos a função de Wigner para  $p = 0 \text{ MeV}$ , isto nos dar uma função de Wigner que tem uma parte positiva e outra parte negativa mostrado nas figuras 5.5(b)-(c). Na sequência, observamos um afastamento do gráfico da função de Wigner para o lado esquerdo quando variamos a energia cinética para  $p = 250 \text{ MeV}$  e para  $p = 750 \text{ MeV}$ . Quando variamos para  $p = 1000 \text{ MeV}$ , a função de Wigner é deslocada visivelmente para a esquerda, conforme é observado na figura 5.5(d), ou seja, saiu do primeiro gráfico da função de Wigner e está deslocando-se para a esquerda. Observa-se que o sistema de quark-antiquark bottom existe entre o valor zero e um valor próximo do experimental,  $q = 2382 \text{ MeV}^{-1}$ , ilustrado na figura 5.5(a). Então, a medida que aumentamos a energia cinética do sistema de méson bottom-antibottom, significa que para velocidades muito altas, o sistema não existirá o que é fisicamente compatível. Assim, observamos que existe uma distância de confinamento dada pelo sistema de quark-antiquark bottom que é o resultado do primeiro

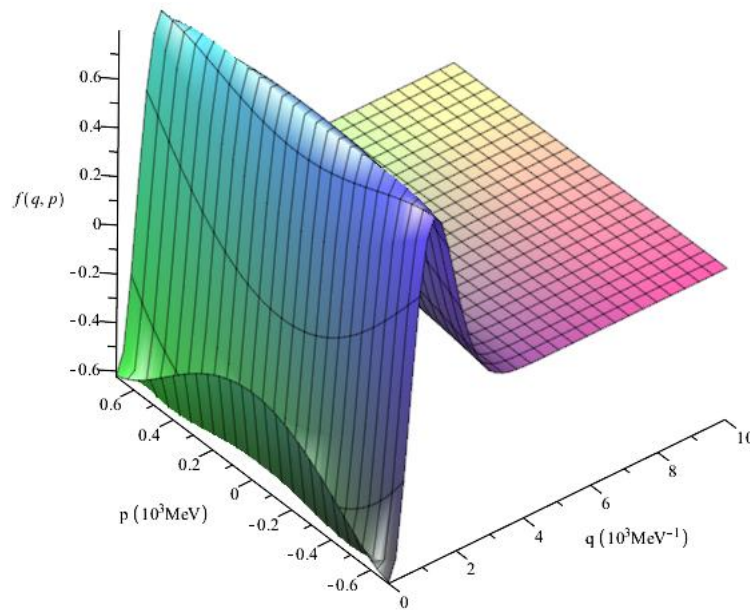




**Figura 5.5:** As figuras 5.5(a)-(d) representa os gráficos seccionados da figura 5.4 para o nível de energia mínima do méson  $b\bar{b}$  de acordo com a variação de energia cinética.

gráfico da função de Wigner analisado. Esta análise mostra que o confinamento é revelado no espaço de fase, ao passo que não se revela com a solução do espaço de configuração.

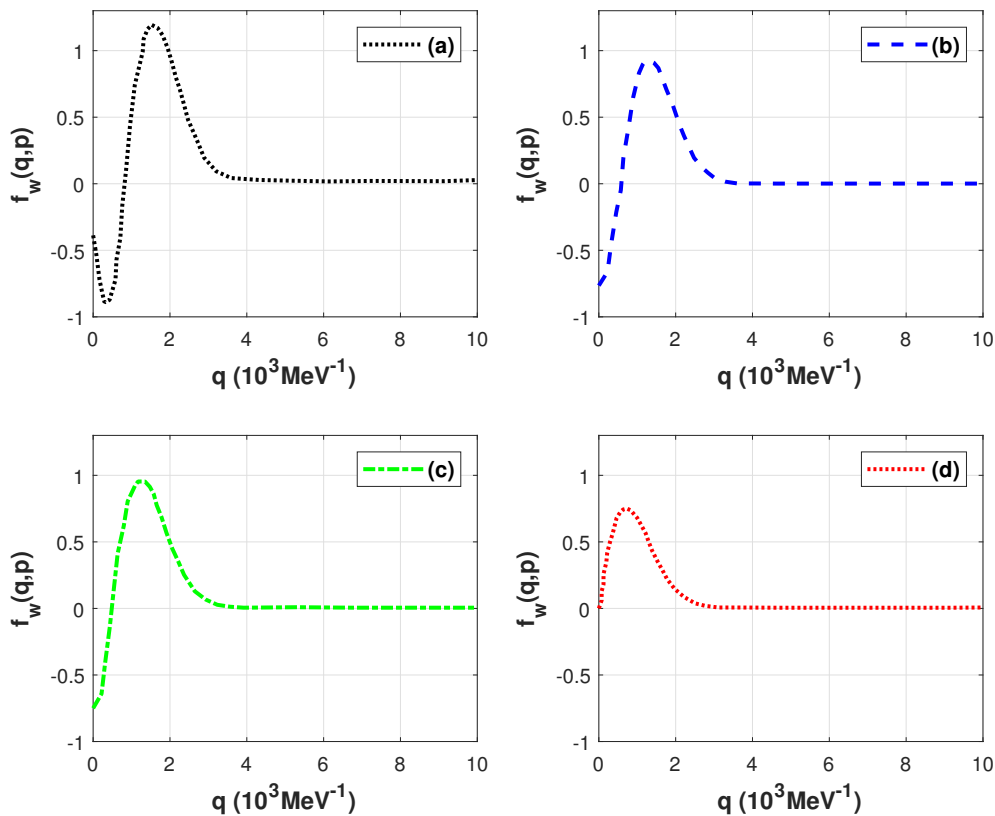
Assim, continuamos fazendo a mesma análise para o sistema formado pelo méson  $b\bar{c}$ . A figura 5.6 corresponde a função de Wigner associado ao estado fundamental do méson bottom-anticharme. Pode-se dizer que, o gráfico 3D de  $f_w(q, p)$  apresenta comportamento similar aos sistemas analisados anteriormente. Observa-se que a função de Wigner possui valores negativos e este fato está associado ao caráter quântico do estado de número do méson em estudo. Baseado nas referências [86, 87] os valores experimentais são,  $m = 976 \text{ MeV}$ , parâmetro de confinamento  $\lambda = 820 \text{ MeV}^2$  e distância relativa de interação  $q = 3300 \text{ MeV}^{-1}$  para o méson bottom-anticharme.



**Figura 5.6:** Gráfico de  $f_w(q, p)$  versus  $q$  e  $p$  para o estado fundamental do méson  $b\bar{c}$ .

É realizado cortes na figura 5.6 da função de Wigner associada ao estado fundamental do méson  $b\bar{c}$  que são mostrados na figura 5.7. Notamos que a função de Wigner é negativa para o estado fundamental, isto significa que esse estado do méson é não-clássico conforme é mostrado nas figuras 5.7(a)-(c). Com isso, grafamos a função de Wigner para  $p = 0 \text{ MeV}$ , o que resulta na função de Wigner com uma parte positiva e outra negativa conforme é ilustrado na figura 5.7(a). Na outra situação, variamos a energia cinética para  $p = 250 \text{ MeV}$ , observa-se que o gráfico da função de Wigner está se deslocando para a esquerda, figura 5.7(b). Na sequência, quando variamos a energia cinética para  $p = 450 \text{ MeV}$  e para  $p = 690 \text{ MeV}$ , percebemos que o gráfico da função de Wigner continua visivelmente se afastando para a esquerda conforme é observado nas figuras 5.7(c)-(d). Novamente, a análise no espaço de fase está informando com a variação da energia cinética, tem-se um

limite máximo de existência do méson  $b\bar{c}$  indicado pelo gráfico. Ou seja, verifica-se que o sistema existe entre um valor zero e um valor que se aproxima do experimental  $q = 3300 \text{ MeV}^{-1}$ . Isso é um gráfico limite porque não existirá sistema estável para energia cinética muito alta, o que é razoável fisicamente. Portanto, nesta análise do potencial linear que descreve o méson  $b\bar{c}$ , observamos que o potencial antever o confinamento, ou seja, só existe méson  $b\bar{c}$  nesta região, sendo que não existe em qualquer outra região do espaço de fase, pois o sistema está confinado por definição. E, observamos que é absolutamente compatível com os resultados da cromodinâmica quântica. Podemos ver que todos os estudos feitos para sistemas de mésons charme-anticharme, bottom-antibottom e bottom-anticharme que foram realizados no espaço de configuração não revela o confinamento. Só é possível observar o confinamento analisando a função de Wigner, por isso que a função de Wigner é importante.



**Figura 5.7:** As figuras 5.7(a)-(d) representa os gráficos seccionados da figura 5.6 para o nível de energia mínima do méson  $b\bar{c}$  de acordo com a variação de energia cinética.

## 5.2 Potencial Cornell

Nesta seção, o objetivo é resolver o problema do potencial de Cornell [25, 88, 89] que descreve o sistema de méson  $c\bar{c}$  no espaço de fase. Para tal, resolveremos a equação de autovalores para esse potencial, procurando por soluções reais. O estudo do potencial de Cornell leva em consideração duas características importantes na interação forte, a primeira chamada de liberdade assintótica e a segunda de confinamento [86, 25]. Neste contexto, para resolver esse problema, propomos o método baseado na transformação de Bohlin [90, 91], o que nos conduz a tratar a hamiltoniana do sistema em duas partes, de modo que a primeira parte se transforma no oscilador harmônico bidimensional enquanto que a segunda parte utilizamos métodos perturbativos da teoria quântica. Em seguida, determinaremos a função de Wigner para o estado fundamental e o primeiro estado excitado do quark-antiquark charme. Na sequência, de posse da função de Wigner associada ao estado do méson  $c\bar{c}$ , calcularemos o parâmetro de negatividade.

Inicialmente, teremos o potencial de Cornell que é dado na forma,

$$V(r) = \frac{b}{r} + ar, \quad (5.19)$$

em que  $|r| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ . O primeiro termo representa o potencial de Coulomb devido os dois quarks que são carregados, o segundo termo é responsável pelo confinamento. A nossa análise será restrita ao caso bidimensional. Nesta direção, a hamiltoniana clássica do sistema é escrita na forma:

$$H = \frac{P_{1x}^2 + P_{1y}^2}{2m} + \frac{P_{2x}^2 + P_{2y}^2}{2m} + V(r), \quad (5.20)$$

onde  $m$  é a massa reduzida do quark-antiquark charme em unidades de  $MeV$ . É difícil encontrar soluções para a equação de Schrödinger no espaço de fase devido ao potencial de coulomb, pois no denominador aparece operadores, o que dificulta o estudo. Nesse sentido, a fim de contornar tal problema, utilizaremos a transformação de Bohlin para o potencial  $V(r)$ . Dessa forma, define-se a transformação de Bohlin como segue,

$$x + iy = (q_1^2 - q_2^2) + i(2q_1q_2), \quad (5.21)$$

onde as coordenadas  $x$  e  $y$  estão associadas com

$$x = q_1^2 - q_2^2, \quad (5.22)$$

$$y = 2q_1q_2, \quad (5.23)$$

e, para as componentes

$$P_x + iP_y = \frac{p_1 + ip_2}{2(q_1 + iq_2)}. \quad (5.24)$$

E assim temos

$$P_x = \frac{p_1q_1 + p_2q_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}, \quad (5.25)$$

$$P_y = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}. \quad (5.26)$$

Essas equações podem ser introduzidas na Eq. (5.20), o que nos conduz a escrever o hamiltoniano na forma,

$$H = \frac{1}{4} \left[ \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{2m(q_1^2 + q_2^2)} \right] + \frac{b}{(q_1^2 + q_2^2)} + a(q_1^2 + q_2^2). \quad (5.27)$$

Podemos, então, fixar a energia, isto significa dizer que é equivalente a definir uma hiper-superfície no espaço de fase, isto é,  $H = E$ , escrevemos

$$\frac{(p_1^2 + p_2^2)}{2m} - 4E(q_1^2 + q_2^2) + 4a(q_1^2 + q_2^2)^2 = -4b, \quad (5.28)$$

Em que temos na Eq. (5.28) o primeiro termo e o segundo formando o oscilador bidimensional. A Eq. (5.28) passa a ser reescrita na forma

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{W^2m}{2}(q_1^2 + q_2^2) = -4b. \quad (5.29)$$

Sendo que definimos

$$-4E = \frac{mW^2}{2} \quad (5.30)$$

Em seguida, escrevemos  $q_1$ ,  $q_2$  e  $p_1$ ,  $p_2$  em termos dos operadores criação e aniquilação

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_1 + \frac{ip_1}{mW} \right), \quad (5.31)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_1 - \frac{ip_1}{mW} \right), \quad (5.32)$$

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_2 + \frac{ip_2}{mW} \right), \quad (5.33)$$

$$\hat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_2 - \frac{ip_2}{mW} \right). \quad (5.34)$$

teremos o seguinte valor de  $b$  a seguir

$$b = \frac{-kW(N_1 + N_2 + 1)}{4} \quad (5.35)$$

Ao substituirmos a Eq. (5.35) na (5.30) obtém-se a energia do sistema

$$E = \frac{-2mb^2}{(N_1 + N_2 + 1)^2 k^2}. \quad (5.36)$$

Consideremos, agora, a teoria de perturbação para solucionar a equação de Schrödinger no espaço de fase sujeito ao potencial de Cornell. Tendo o Hamiltoniano para o sistema proposto, o procedimento de quantização da mecânica quântica simplética considera os operadores de posição e momentum escritos como

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_1 \star + \frac{ip_1 \star}{mW} \right), \quad (5.37)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_1 \star - \frac{ip_1 \star}{mW} \right), \quad (5.38)$$

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_2 \star + \frac{ip_2 \star}{mW} \right), \quad (5.39)$$

$$\hat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_2 \star - \frac{ip_2 \star}{mW} \right). \quad (5.40)$$

Tal que, os operadores estrela  $q_i\star$  e  $p_i\star$  são dados por

$$q_i\star = q_i + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (5.41)$$

$$p_i\star = p_i - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (5.42)$$

Assim, escrevemos a equação de Schrödinger no espaço de fase do seguinte modo

$$\left[ \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{2m} - 4E(q_1^2 + q_2^2) + 4a(q_1^2 + q_2^2)^2 + 4b \right] \star \psi(q_1, p_1, q_2, p_2) = 0. \quad (5.43)$$

Em consequência, façamos o estudo da Eq. (5.43) usando teoria de perturbação. Segue então que

$$\left[ \widehat{H}_0 + \widehat{H}_1 \right] \star \psi(q_1, p_1, q_2, p_2) = -4b\psi(q_1, p_1, q_2, p_2), \quad (5.44)$$

onde,  $\widehat{H}_0$  corresponde a parte do hamiltoniano bidimensional não perturbado dado por

$$\widehat{H}_0 = \frac{(p_1^2\star + p_2^2\star)}{2} - 4E(q_1^2\star + q_2^2\star), \quad (5.45)$$

e, temos o Hamiltoniano perturbativo dado por

$$\widehat{H}_1 = 4a(q_1^2\star + q_2^2\star)^2, \quad (5.46)$$

Assim, escrevemos

$$\widehat{H}_0\psi^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) = b_{n_1, n_2}^{(0)}\psi^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2), \quad (5.47)$$

onde  $\psi^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2)$  corresponde a autofunção do hamiltoniano não perturbado. A solução referente a parte não perturbada do hamiltoniano  $\widehat{H}_0$  é escrita do seguinte modo:

$$\psi_{n_1, n_2}^0(q_1, p_1, q_2, p_2) = \Phi_{n_1}(q_1, p_1)\Gamma_{n_2}(q_2, p_2) \quad (5.48)$$

onde  $\Phi_{n_1}(q_1, p_1)$  e  $\Gamma_{n_2}(q_2, p_2)$  correspondem as soluções para cada direção.

Podemos escrever os operadores atuando nos vetores de estados na forma

$$\widehat{a}\Phi_{n_1} = \sqrt{n_1}\Phi_{n_1-1}, \quad (5.49)$$

$$\widehat{a}^\dagger\Phi_{n_1} = \sqrt{n_1+1}\Phi_{n_1+1}, \quad (5.50)$$

$$\widehat{b}\Gamma_{n_2} = \sqrt{n_2}\Gamma_{n_2-1}, \quad (5.51)$$

$$\widehat{b}^\dagger\Gamma_{n_2} = \sqrt{n_2+1}\Gamma_{n_2+1}. \quad (5.52)$$

Vamos determinar a equação diferencial não-linear baseado no método algébrico mediante métodos perturbativos. Usando as seguintes relações

$$\widehat{a}\Phi_0 = 0, \quad (5.53)$$

$$\widehat{b}\Gamma_0 = 0, \quad (5.54)$$

encontramos a solução para o estado fundamental não-perturbado dado por

$$\psi_{0,0}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) = Ne^{-(q_1^2+p_1^2)}L_{n_1}(q_2^2+p_2^2)e^{-(q_2^2+p_2^2)}L_{n_2}(q_2^2+p_2^2), \quad (5.55)$$

onde  $N$  é a constante de normalização e  $L_{n_1}$ ,  $L_{n_2}$  os polinômios de Laguerre de ordem  $n_1$ ,  $n_2$ . Conseqüentemente, os autovalores da perturbação em primeira ordem para o estado fundamental da Eq. (5.47) são dados por

$$b_{0,0}^{(1)} = \frac{kW}{4}(n_1+n_2+1) + \frac{4ak^2}{mW^2}. \quad (5.56)$$

Consideremos o hamiltoniano da parte perturbativa  $\widehat{H}_1$  escrito em termos dos operadores, isto é

$$\widehat{H}_1 = \frac{a}{W^2} [(a^\dagger + a)^2 + (b^\dagger + b)^2]^2, \quad (5.57)$$

Sendo assim, desenvolveremos a teoria de perturbação no espaço de fase. Neste sentido, temos

$$\widehat{H} \star \psi(q_1, p_1, q_2, p_2) = -4b\psi(q_1, p_1, q_2, p_2). \quad (5.58)$$

Tomaremos, agora, a função de onda  $\psi_{n_1, n_2}^{(1)}$  do sistema perturbado escrita como

$$\psi_{n_1, n_2}^{(1)} = \sum_{\substack{m_1 \neq n_1, \\ m_2 \neq n_2}} \frac{\langle \psi_{m_1, m_2}^{(0)} | H | \psi_{n_1, n_2}^{(0)} \rangle}{b_{n_1, n_2}^{(0)} - b_{m_1, m_2}^{(0)}} \psi_{m_1, m_2}^{(0)}, \quad (5.59)$$



Em consequência, podemos escrever de forma explícita,

$$\begin{aligned} \psi_{n_1, n_2}^{(1)}(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \psi_{n_1, n_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) \\ &+ \sum_{\substack{m_1 \neq n_1, \\ m_2 \neq n_2}} \frac{\langle \psi_{m_1, m_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) | \widehat{H}_1 | \psi_{n_1, n_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) \rangle}{b_{n_1, n_2}^{(0)} - b_{m_1, m_2}^{(0)}} \\ &\times \psi_{m_1, m_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Para efetuar tal cálculo, nosso objetivo, agora, será calcular o estado perturbado mediante a seguinte expressão

$$I = \langle \psi_{m_1, m_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) | \frac{a}{W^2} [(a^\dagger + a)^2 + (b^\dagger + b)^2]^2 | \psi_{n_1, n_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) \rangle, \quad (5.61)$$

Desta relação, teremos,

$$I_1 = \frac{a}{W^2} \left( \langle \phi_{m_1, m_2} | [(a^\dagger + a)^2]^2 | \phi_{n_1, n_2} \rangle \right), \quad (5.62)$$

$$I_2 = \frac{a}{W^2} 2 \left( \langle \phi_{m_1, m_2} | (a^\dagger + a)^2 (b^\dagger + b)^2 | \phi_{n_1, n_2} \rangle \right), \quad (5.63)$$

$$I_3 = \frac{a}{W^2} \left( \langle \phi_{m_1, m_2} | [(b^\dagger + b)^2]^2 | \phi_{n_1, n_2} \rangle \right). \quad (5.64)$$

Em que estabelecemos  $I = I_1 + I_2 + I_3$ . Para a obtenção das Eqs. (5.62), (5.63) e (5.64), fazemos uso da relação de ortonormalidade definida da seguinte forma:

$$\int \Phi_n^*(q_1, p_2) \Phi_m(q_1, p_1) dq_1 dp_1 = \delta_{n, m}, \quad (5.65)$$

$$\int \Gamma_n^*(q_1, p_2) \Gamma_m(q_1, p_1) dq_1 dp_1 = \delta_{n, m}, \quad (5.66)$$

Em consequência, os cálculos para os termos  $I_1, I_2, I_3$  são extensos e serão apresentados no apêndice. Em vista disso, usando a equação dada no apêndice e a Eq. (5.60) obtemos os estados perturbados. Para tal, o estado fundamental perturbado do méson charme-anticharme é dado na forma

$$\psi_{0,0}^{(1)} = \psi_{0,0}^{(0)} + \frac{a}{2W^3} \left[ -4\sqrt{2}\psi_{2,0}^{(0)} - \psi_{2,2}^{(0)} - \frac{7}{2}\sqrt{2}\psi_{0,2}^{(0)} - \frac{\sqrt{6}}{2}\psi_{0,4}^{(0)} \right]. \quad (5.67)$$

De maneira análoga, teremos os primeiros estados excitados para o méson charme-anticharme. Portanto, o resultado encontrado para o primeiro estado excitado é dado por

$$\psi_{1,0}^{(1)} = \psi_{1,0}^{(0)} + \frac{a}{2W^3} \left[ -\frac{\sqrt{30}}{2} \psi_{5,0}^{(0)} + \frac{-1 - 11\sqrt{6}}{2} \psi_{3,0}^{(0)} - 3\psi_{3,2}^{(0)} - 5\sqrt{2}\psi_{1,2}^{(0)} - \frac{\sqrt{6}}{2} \psi_{1,4}^{(0)} \right], \quad (5.68)$$

e

$$\psi_{0,1}^{(1)} = \psi_{0,1}^{(0)} + \frac{a}{2W^3} \left[ -\frac{\sqrt{30}}{2} \psi_{0,5}^{(0)} + \frac{-1 - 11\sqrt{6}}{2} \psi_{0,3}^{(0)} - 3\psi_{2,3}^{(0)} - 5\sqrt{2}\psi_{2,1}^{(0)} - \frac{\sqrt{6}}{2} \psi_{4,1}^{(0)} \right]. \quad (5.69)$$

Para interpretar fisicamente nosso resultado, devemos associar a função de Wigner com as autofunções obtidas. Assim, a função de Wigner para o nosso problema é escrita da seguinte maneira,

$$f_w(q_1, p_1, q_2, p_2) = \psi_{n_1, n_2}^{(1)}(q_1, p_1, q_2, p_2) \star \psi_{n_1, n_2}^{\dagger(1)}(q_1, p_1, q_2, p_2). \quad (5.70)$$

Para obter as correções da energia em primeira ordem para o primeiro estado excitado do méson  $b_{1,0}^{(1)}$  e  $b_{0,1}^{(1)}$  resolvemos a matriz quadrada definida na forma,

$$W = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix},$$

onde  $W_{ij} = \langle \psi_i^{(0)} | H_1 | \psi_j^{(0)} \rangle$ . Assim, efetuando os cálculos, encontramos

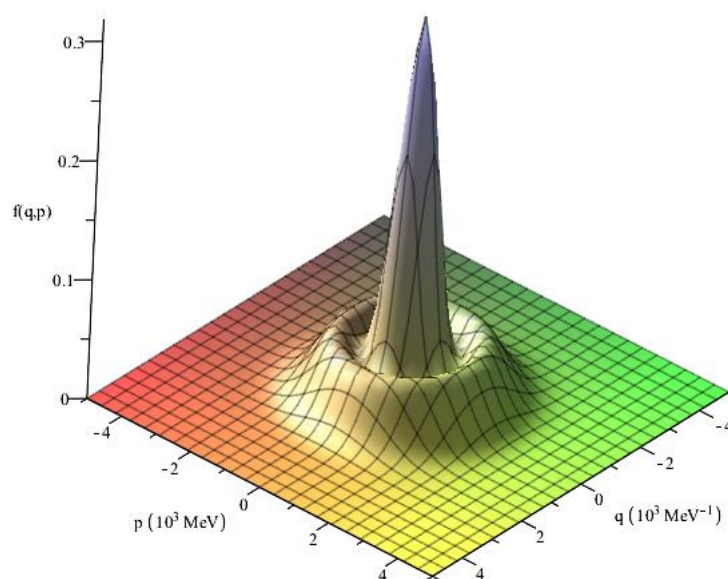
$$W = \begin{pmatrix} \frac{25ak^2}{m^2W^2} & \frac{2ak^2}{m^2W^2} \\ \frac{17ak^2}{m^2W^2} & \frac{25ak^2}{m^2W^2} \end{pmatrix}.$$

Os autovalores obtidos dessa matriz são  $\lambda_1 = 30, 83 \left( \frac{ak^2}{m^2W^2} \right)$  e  $\lambda_2 = 19, 17 \left( \frac{ak^2}{m^2W^2} \right)$ . Neste caso, temos as seguintes equações para a correção da energia do primeiro estado excitado dada por

$$b_{1,0}^{(1)} = \frac{-kW}{4} (n_1 + n_2 + 1) + 30, 83 \left( \frac{ak^2}{m^2W^2} \right), \quad (5.71)$$

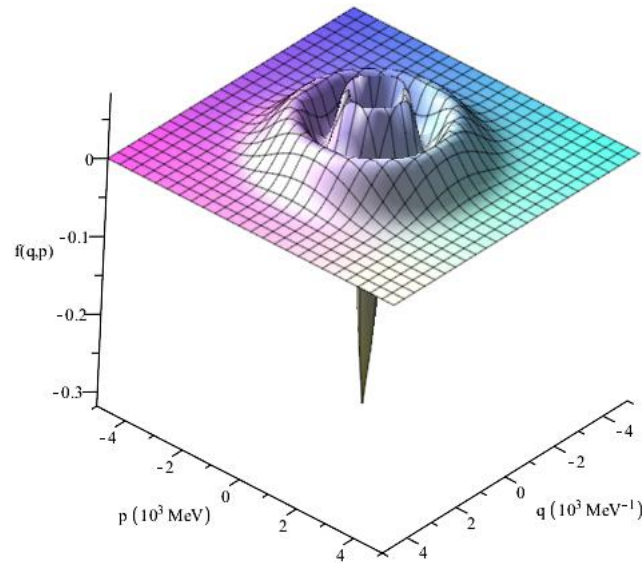
$$b_{0,1}^{(1)} = \frac{-kW}{4} (n_1 + n_2 + 1) + 19, 17 \left( \frac{ak^2}{m^2W^2} \right). \quad (5.72)$$

Sendo assim, os gráficos para os resultados encontrados com a função de Wigner associada ao setor do méson  $c\bar{c}$  são apresentados a seguir. Aqui, levamos em consideração as coordenadas  $q_2$  e  $p_2$  mantidas constantes nos gráficos. Neste caminho, os eixos são dados por  $q$  e  $p$  correspondendo a  $q_1$  e  $p_1$ , respectivamente. A figura 5.8 mostra o comportamento da função de Wigner para o estado fundamental do méson  $c\bar{c}$ . Percebemos que a função de Wigner é toda positiva neste estado. Em seguida, as figuras 5.9 e 5.10, cor-

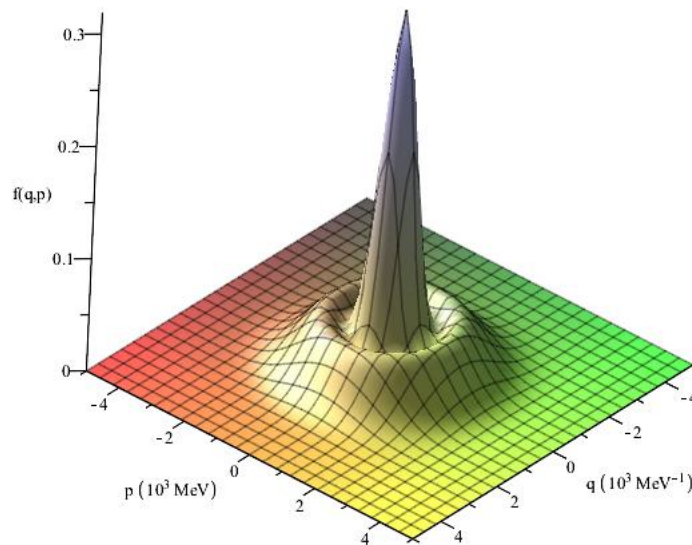


**Figura 5.8:** Gráfico de  $f_w(q,p)$  versus  $q$  e  $p$  para o estado fundamental do méson  $c\bar{c}$ .

respondem aos gráficos da função de Wigner associada ao primeiro estado excitado do quark-antiquark charme. Note que a função de Wigner associada ao primeiro nível excitado possui uma região negativa maior, revelando a não classicalidade do estado do méson charme-anticharme em comparação com o gráfico da figura 5.8.



**Figura 5.9:** Gráfico de  $f_w(q,p)$  versus  $q$  e  $p$  para o primeiro estado excitado do méson  $c\bar{c}$ .



**Figura 5.10:** Função de Wigner para o primeiro estado excitado do méson  $c\bar{c}$ .

Tendo a função de Wigner, podemos determinar o parâmetro de negatividade referente ao sistema de méson em questão. Portanto, os resultados deste cálculo estão mostrados na

tabela 5.1 a seguir.

**Tabela 5.1:** *Parâmetro de negatividade  $\eta(\psi)$ .*

$n_1, n_2$	$\eta(\psi)$
0,0	0
0,1	0
1,0	0.230300420

Conforme é visto na tabela 5.1, observa-se que o parâmetro de negatividade aumenta para o primeiro estado excitado do méson charme-anticharme, evidenciando um aumento do caráter quântico desse sistema. Os resultados estão consistente com os valores observados nos gráficos já destacados anteriormente.



## Capítulo 6

# Considerações Finais e Perspectivas

Realizamos neste trabalho um estudo acerca de um sistema de interação forte descrito por quarks-antiquarks pesados via função de Wigner no formalismo da mecânica quântica simplética. Esse setor é caracterizado de forma específica por um potencial linear responsável pelo confinamento acrescida de uma parte do tipo potencial de Coulomb. Este é chamado de potencial de Cornell, caracterizando experimentalmente este setor da QCD.

Inicialmente, uma revisão sobre a função de Wigner no espaço de fase e o produto de Weyl foi desenvolvida, investigando suas propriedades em detalhes. Mostramos a associação dos operadores estrela no espaço de fase perante a representação da mecânica quântica usual.

Posteriormente, uma teoria de representação no espaço de fase é construída onde definimos uma classe de operadores estrela que foi peça chave para desenvolver a representação unitária do grupo de Galilei-Lie estendido no espaço de Hilbert. Em decorrência disso, escrevemos a equação de Schrödinger no espaço de fase de forma que verificamos a conexão entre a representação de Galilei e o formalismo de Wigner.

Em seguida, uma revisão bibliográfica acerca da Cromodinâmica Quântica foi feita buscando apresentar aspectos da matéria hadrônica formada por quarks e léptons denominados de campos de matéria. Neste contexto, abordamos os campos de calibre ingrediente fundamental ao lado do grupo de simetria  $SU(3)$  que representa a interação forte.

Em consequência, foi estudado o sistema de interação quarks-antiquarks pesados em que foram analisados três diferentes mésons com base na equação de Schrödinger não-relativística no espaço de fase. Primeiramente, foi resolvida a equação de Schrödinger com

potencial linear considerado o caso mais simples onde observamos o comportamento da função de Wigner associada ao estado fundamental dos quark-antiquark charme, quark-antiquark bottom e quark bottom mais antiquark charme no espaço de fase. Observamos que a análise no espaço de fase, permite mesmo para esse modelo simples observar o confinamento de mésons, sendo não visto nos casos usuais. E, ainda, verificamos através da análise no espaço de fase que esta mostrou por meio da variação de energia cinética, tem-se um limite máximo de existência do méson que se dar através dos gráficos obtidos. Na sequência, resolvemos a equação de Schrödinger com o potencial Cornell no formalismo da mecânica quântica simplética para o méson charme-anticharme utilizando o método da transformação de Bohlin, tal que recorremos a teoria de perturbação independente do tempo para esse sistema. Por fim, a função de Wigner associada ao estado fundamental e o primeiro estado excitado do quark-antiquark charme foi encontrada e determinamos o parâmetro de negatividade. Através do parâmetro de negatividade observamos que a medida que aumentamos a ordem de energia do méson para o primeiro estado excitado, o volume da parte negativa da função de Wigner aumenta, o que evidenciou um aumento do caráter quântico do sistema. Resultados esses, até o momento não vistos na literatura.

Neste trabalho não levamos em conta o spin, como perspectivas para futuros desenvolvimentos, iremos utilizar a equação de Pauli-Schrödinger no formalismo da mecânica quântica simplética.



## Apêndice A

### Cálculo do Sistema Interação Forte

Neste apêndice iremos mostrar parte dos cálculos feitos para o sistema de interação no espaço de fase. Neste sentido, com base nas relações de ortogonalidade e equações de autovalores conhecidas, escrevemos

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{a}{W^2} \left[ \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_1 + 3)(n_1 + 4)} \delta_{m_1, n_1+4} \delta_{m_2, n_2} \right. & (A.1) \\ & + (n_1^2 + n_1) \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1 + 1) \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1^2 - n_1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\ & + \sqrt{(n_1^3 + 2)(n_1 + 1)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1^2) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1^2 + n_1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1 - 2) \sqrt{n_1(n_1 - 1)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1 + 3) \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1)(n_1 + 1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1 + 1)^2 \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1 - 1) \sqrt{(n_1^2 - n_1)} \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1 + 1)(n_1 + 2) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1) \sqrt{(n_1^2 - n_1)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2} \\ & + (n_1 + 1) \sqrt{(n_1^2 - n_1)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2} \\ & \left. + \sqrt{n_1(n_1 - 1)(n_1 - 2)(n_1 - 3)} \delta_{m_1, n_1-4} \delta_{m_2, n_2} \right]. \end{aligned}$$

Tendo em conta os mesmos argumentos, escrevemos o segundo termo

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{a}{W^2} 2 \left[ \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_1 + 1)(n_1 + 2)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2+2} \right. & (A.2) \\
 & + n_2 \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_2 + 1) \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_2^2 - n_2)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2-2} \\
 & + n_1 \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)} \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2+2} \\
 & + (n_1)(n_2) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1)(n_2 + 1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + n_1 \sqrt{(n_2^2 - n_2)} \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2-2} \\
 & + (n_1 + 1) \sqrt{(n_2 + 1)(n_2 + 2)} \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2+2} \\
 & + (n_2)(n_1 + 1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1 + 1)(n_2 + 1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1 + 1) \sqrt{(n_2^2 - n_2)} (\delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2-2} \\
 & + \sqrt{n_1(n_1 - 1)(n_2 + 1)(n_2 + 2)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2-2} \\
 & + n_2 \sqrt{n_1(n_1 - 1)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_2 + 1) \sqrt{n_1(n_1 - 1)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & \left. + \sqrt{n_1(n_1 - 1)n_2(n_2 - 1)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2-2} \right]
 \end{aligned}$$

e também, para o terceiro termo

$$\begin{aligned}
 I_3 = & \frac{a}{W^2} \left[ \sqrt{(n_2 + 1)(n_2 + 2)(n_2 + 3)(n_2 + 4)} \delta_{m_2, n_2 + 4} \delta_{m_1, n_1} \right. & (A.3) \\
 & + (n_2^2 + n_2) \delta_{m_2, n_2 + 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 + 1) \sqrt{n_2(n_2 + 1)n_2(n_2 + 2)} \delta_{m_2, n_2 + 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2^2 - n_2) \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + \sqrt{(n_2 + 1)^3(n_2 + 1)} \delta_{m_2, n_2 + 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2^2) \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2^2 + n_2) \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 - 2) \sqrt{(n_2^2 - 2)} \delta_{m_2, n_2 - 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 + 3) \sqrt{(n_2 + 1)(n_2 + 2)} \delta_{m_2, n_2 + 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2^2 + n_2) \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 + 1)^2 \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 - 1) \sqrt{(n_2^2 - n_2)} \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 + 1)(n_2 + 2) \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2) \sqrt{(n_2^2 - n_2)} \delta_{m_2, n_2 - 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 + 1) \sqrt{(n_2^2 - n_2)} \delta_{m_2, n_2 - 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & \left. + \sqrt{(n_2^2 - n_2)(n_2 - 2)(n_2 - 3)} \delta_{m_2, n_2 - 4} \delta_{m_1, n_1} \right]
 \end{aligned}$$



## Referências Bibliográficas

- 1 M. De Gosson, “Schrödinger Equation in Phase Space and Deformation Quantization,” *arXiv: preprint math/0504013*. [2](#)
- 2 D. S. Dean, P. Le Doussal, S. N. Majumdar, and G. Schehr, “Wigner Function of Noninteracting Trapped Fermions,” *Phys. Rev. A*, **97**, 063614 (2018). [2](#)
- 3 M. Hillery, R.F. O’Connell, M.O. Scully, and E.P. Wigner. “Distribution Functions in Physics: Fundamentals,” *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984). [2](#), [7](#)
- 4 K. Kim. “Schrödinger Equation and Phase Space in Quantum Mechanics,” *arXiv preprint quant-ph/9706063*. [2](#)
- 5 W. B. Case, “Wigner Functions and Weyl Transforms for Pedestrians,” *Am. J. Phys.* **76**, 937 (2008). [2](#), [7](#)
- 6 E. Wigner, “On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium,” *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932). [2](#), [7](#)
- 7 U. Leonhardt. *Measuring the Quantum State of Light*, (Cambridge university press, 1997). [2](#)
- 8 T. Tilma, M. J. Everitt, J. H. Samson, W. J. Munro, and K. Nemoto, “Wigner Functions for Arbitrary Quantum Systems,” *Phys. Rev. Lett.* **117**, 180401 (2016). [2](#)
- 9 D. Chruściński and K. Młodawski, “Wigner Function and Schrödinger Equation in Phase-Space Representation,” *Phys. Rev. A* **71**, 052104 (2005). [2](#)
- 10 C. Costa, M. R. Tenser, R. G.G. Amorim, M. C. B. Fernandes, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna, “Symplectic Field Theories: Scalar and Spinor Representations,” *Adv. Applied Clifford Algebras* **28**, 1 (2018). [2](#), [3](#), [35](#)

- 11 R. G. G. Amorim, M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna, “Non-commutative Geometry and Symplectic Field Theory,” *Phys. Lett. A* **361**, 464 (2007). [2](#), [3](#), [17](#), [40](#), [41](#)
- 12 R. G. G. Amorim, F.C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, and A. E. Santana, “Realization of the Noncommutative Seiberg–witten Gauge Theory by Fields in Phase Space,” *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, 1550135 (2015). [2](#), [3](#)
- 13 H. Dessano, R. A. S. Paiva, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhoa, and A. E. Santana, “Wigner Function and Non-Classicality for Oscillator Systems,” *Braz. J. Phys.* **49**, 715 (2019). [2](#), [3](#), [17](#), [22](#), [29](#), [30](#), [31](#), [32](#)
- 14 R. G. G. Amorim, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna. “Perturbative Symplectic Field Theory and Wigner Function,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **388**, 3771 (2009). [2](#), [3](#), [40](#)
- 15 F. C. Khanna. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications* (World Scientific, 2009). [3](#), [17](#)
- 16 J.S. da Cruz Filho, R. G. G. Amorim, S.C. Ulhoa, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna. “Hénon–Heiles Interaction for Hydrogen Atom in Phase Space,” *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 1650046 (2016). [2](#), [3](#), [17](#)
- 17 G. W. Bund, S. S. Mizrahi, and M. C. Tijero, “Collisional Semiclassical Approximations in Phase-Space Representation,” *Phys. Rev. A* **56**, 2825 (1997). [5](#)
- 18 G. Torres-Vega and J. H. Frederick, “A quantum mechanical representation in phase space,” *J. Chem. Phys.* **98**, 3103 (1993). [27](#)
- 19 G. Torres-Vega, “Quantum mechanics in phase space: new approaches to the correspondence principle,” *J. Chem. Phys.* **93**, 8862 (1990). [7](#), [27](#)
- 20 N. R. Soni, B. R. Joshi, R. P. Shah, H. R. Chauhan, and J. N. Pandya, “ $\overline{Q\overline{Q}}$  ( $Q \in \{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ) Spectroscopy Using the Cornell Potential,” *Eur. Phys. J. C* **78**, 1 (2018). [1](#), [56](#)
- 21 R. C. L. Bruni, E. F. Capossoli, and H. Boshi-Filho, “Quark-antiquark Potential from a Deformed AdS/QCD,” *Adv. High Energy Phys.* **2019**, (2019). [1](#)
- 22 C. Gattringer, and C. B. Lang. *Quantum Chromodynamics on the Lattice (Lecture Notes in Physics)* Berlin: Springer [1](#)

- 23 E. P. Inyang, E. P. Inyang, E. S. William, and E. E. Ibekwe, “Study on the Applicability of Varshni Potential to Predict the Mass-spectra of the Quark-antiquark Systems in a Non-relativistic Framework,” *arXiv preprint arXiv:2101.00333*. [1](#), [56](#)
- 24 A. Vega, and J. Flores, “Heavy Quarkonium Properties from Cornell Potential using Variational Method and Supersymmetric Quantum Mechanics,” *Pramana - J. Phys.* **87**, 73 (2016). [1](#), [56](#)
- 25 E. V. B. Leite, H. Belich, and R. L. L. Vitória, “Effects of the Cornell-type potential on a position-dependent mass system in Kaluza-Klein theory,” *Adv. High Energy Phys.* **2019**, (2019). [1](#), [66](#)
- 26 E. Omugbe, “Non-relativistic Eigensolutions of Molecular and Heavy Quarkonia Interacting Potentials via the Nikiforov Uvarov Method,” *Can. J. Phys.* **98**, 1125 (2020). [1](#), [56](#)
- 27 E. M. Khoka, M. Abu-Shady, and T. A. Abdel-Karim, “Quarkonium Masses in the N-dimensional Space Using the Analytical Exact Iteration Method,” *arXiv preprint arXiv:1612.08206*. [1](#), [56](#)
- 28 D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. H. Monroe, W. M. Itano, and D. J. Wineland, “Experimental Determination of the Motional Quantum State of a Trapped Atom,” *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4281 (1996). [2](#)
- 29 G. X. A. Pretronilo, Covariância Galileana e Representações de Spin 1/2 (Dissertação de mestrado, UnB) <https://repositorio.unb.br/handle/10482/37084>. [5](#), [11](#), [27](#), [29](#)
- 30 R. A. S. Paiva, Mecânica Quântica Simplética e Não-classicalidade (Tese de doutorado, UnB) <https://repositorio.unb.br/handle/10482/37300>. [2](#), [5](#), [19](#), [27](#), [34](#), [35](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#)
- 31 P. A. M. Dirac, Note on exchange phenomena in the thomas atom In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Cambridge University Press, 1930). [5](#)
- 32 R. G. G. Amorim, M. C. B. Fernandes, A. R. Queiroz, A. E. Santana, and J. D. M. Viana, “Função de wigner-80 anos e as origens da geometria não-comutativa,” *Rev. Bras. Ens. Fís.* **35**, 1 (2013). [5](#), [17](#), [19](#), [22](#)
- 33 H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* Courier Corporation, (1927). [5](#)

- 34 J. E. Moyal, Quantum Mechanics as a Statistical Theory. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Cambridge University Press, 1949). 5
- 35 J. S. da Cruz Filho, Teoria Quântica no Espaço de Fase: Modelo de Hénon-heiles e Simetrias de Calibre (Tese de doutorado, UnB) <https://repositorio.unb.br/handle/10482/21972>. 5, 7, 10, 22, 27
- 36 R. G. G. Amorim, Formulação de Teorias de Campos via Estruturas Simpléticas e o Produto de Weyl (Dissertação de mestrado, UnB) <https://repositorio.unb.br/handle/10482/3492>. 5, 7, 9, 10, 11, 17, 21, 22, 27, 30
- 37 R. G. G. Amorim, Geometria Não-Comutativa e Teoria de Campos Simplética (Tese de doutorado, UnB) <https://repositorio.unb.br/handle/10482/4561>. 5, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 27
- 38 H. Dessano, Função de Wigner, Quasi-amplitudes de Probabilidades e Sistemas Dissipativos (Dissertação de mestrado, UnB) <https://repositorio.unb.br/handle/10482/17897>. 5, 7, 10, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
- 39 H. Dessano, Mecânica Quântica Simplética e Sistemas Dissipativos (Tese de doutorado, UnB) <https://repositorio.unb.br/handle/10482/38344> 20, 21, 22, 29, 30, 31, 32, 33, 34
- 40 L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics: A Modern Development* (World Scientific Publishing Company, 1998). 5, 6
- 41 L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory* (Elsevier, 2013). 5, 6
- 42 M. A. Marchioli, “Quantum Mechanics in Phase Space: I. The Weyl-Wigner Formalism,” *Rev. Bras. Ens. Fís.* **24**, 421 (2002). 2, 5
- 43 R. Wezeman, *Weyl quantization and Wigner distributions on phase space*, 2014. 5
- 44 R. Amorim, “Teoria Quântica Não-Comutativa: Da Quantização de Weyl ao Método da Função de Wigner,” *eB. Fís.* **8**, (2019). 5, 7, 9, 15, 17, 19, 20, 21, 22



- 45 L. M. Abreu, A. E. Santana, E. E. Santos, Aurino Ribeiro Filho, “Notas sobre o Grupo de Galileu: Aspectos Geométricos e Recentes Desenvolvimentos,” *Sitientibus Série Ciências Físicas* **5**, 26 (2009). [34](#), [35](#)
- 46 R. G. G. Amorim, R. A. S. Paiva, “Quantum Physics in Phase Space: An Analysis of Simple Pendulum,” *Advan. Theor. and Comp. Phys.* **1**, (2018). [2](#), [27](#), [35](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [41](#)
- 47 A. X. Martins, R. A. S. Paiva, G. X. A. Petronilo, R. R. Luz, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhoa, S. C. Ulhoa, and T. M. R. Filho, “Analytical Solution for the Gross-Pitaevskii Equation in Phase Space and Wigner Function,” *Adv. High Energy Phys.* **2020**, (2020). [2](#), [9](#), [27](#)
- 48 R. A. S. Paiva, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhoa, A. E. Santana, and F. C. Khanna, “Zeeman Effect in Phase Space,” *Adv. High Energy Phys.* **2020**, (2020). [2](#), [3](#), [9](#), [27](#), [35](#), [43](#)
- 49 A. X. Martins, T. M. R. Filho, R. G. G. Amorim, R. A. S. Paiva, G. X. A. Petronilo, and S. C. Ulhoa, “Analytical Solution for Quantum Quartic Oscillator in Phase Space,” *Int. J. Mod. Phys. A* **35**, 2050100 (2020). [27](#)
- 50 M.D. Oliveira, M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna, “Symplectic quantum mechanics,” *Annals Phys.* **312**, 492 (2004). [7](#), [20](#), [21](#), [22](#), [27](#), [28](#), [30](#), [34](#), [35](#), [42](#), [43](#)
- 51 M. A. De Gosson, *Symplectic Methods in Harmonic Analysis and in Mathematical Physics* (Springer Science & Business Media, 2011). [27](#), [28](#), [29](#), [30](#)
- 52 T. L. Curtright, D. B. Fairlie, and C. K. Zachos, *A Concise Treatise on Quantum Mechanics in Phase Space* (World Scientific Publishing Company, 2013). [27](#)
- 53 T. L. Curtright, D. B. Fairlie, and C. K. Zachos, “Features of time-independent Wigner functions,” *Phys. Rev. D* **58**, 025002 (1998). [2](#)
- 54 A. Polkovnikov, “Phase space representation of quantum dynamics,” *Annals Phys.* **325**, 1790 (2010). [29](#)
- 55 M. A. De Gosson, *Symplectic Geometry and Quantum Mechanics* (Springer Science & Business Media, 2006). [29](#)

- 56 P. S. C. Filho, Mecânica Quântica Simplética and O Potencial De Coulomb (Tese de doutorado, UFBA) <https://ppgfs.ufba.br/pt-br/teses-dissertacoes?title=Mec>. 5, 40, 41, 42, 43
- 57 M.D. Oliveira, Mecânica Quântica no Espaço de Fase via Representações do Grupo de Galilei (Dissertação de mestrado, UFBA) <https://blog.ufba.br/pgif/files/2016/05/D54-IF-UFBA.pdf> 5, 20, 21, 22, 27, 28, 30, 34, 35, 37, 41, 43
- 58 W. J. Marciano, “Elementary particle theory,” *AIP Conf. Proc.* **127**, 731 (1985). 45
- 59 S. Gasiorowicz, *Elementary particle physics* (Wiley New York, 1966). 45
- 60 D. Griffiths, *Introduction to elementary particles* (John Wiley & Sons, 2008). 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52
- 61 I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction: From Relativistic Quantum Mechanics to QED* (IOP Publishing, 2012). 45, 46, 51, 53, 54
- 62 S. Weinberg, *The Discovery of Subatomic Particles Revised Edition* (Cambridge University Press, 2003). 45, 46
- 63 H. Yukawa, “On the interaction of elementary particles. I.” *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series* **17**, 48 (1935). 45
- 64 M. Thomson, *Modern Particle Physics*, (Cambridge University Press, 2013). 46, 52, 53
- 65 C. Lim, T. Morii, and S. N. Mukherjee, *The Physics of the Standard Model and Beyond* (World Scientific, 2004). 46
- 66 M. Novello, *VII Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Rio de Janeiro (Brazil), August, 1993*. (Atlantica Séguier Frontières, 1994). 46
- 67 A. Bettini, *Introduction to Elementary Particle Physics* (Cambridge University Press, 2014). 46
- 68 S. Weinberg, “A Model of Leptons,” *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967). 46
- 69 A. J. Larkoski, *Elementary Particle Physics: An Intuitive Introduction*, (Cambridge University Press, 2019). 46, 52

- 
- 70 J. B. Neto, *Matemática para Físicos com Aplicações: Vetores, tensores e spinors* (Livraria da Física, 2010). [46](#)
- 71 T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories* (world scientific, 1998). [46](#), [47](#), [53](#), [54](#)
- 72 J. B. Neto, *Teoria de Campos e a Natureza: Parte Quântica*. (Editora Livraria da Física, 2017). [48](#), [52](#)
- 73 L. D. Landau, *The Classical Theory of Fields* (Elsevier, 2013). [46](#), [48](#), [50](#)
- 74 M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. (Edusp, 2002). [48](#), [49](#)
- 75 L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge university press, 1996). [46](#), [47](#), [48](#), [49](#), [51](#), [54](#)
- 76 J. J. Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles*. (Princeton University Press, 2015). [52](#)
- 77 W. Schmitz, *Particles, Fields and Forces* (Springer, 2019). [52](#)
- 78 W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum Chromodynamics* (Springer Science & Business Media, 2007). [52](#)
- 79 J. L. Lopes, *Gauge Field Theories: An Introduction* (Elsevier, 2013). [46](#), [48](#), [49](#), [50](#), [51](#), [52](#), [54](#)
- 80 W. Greiner and J. A. Maruhn, *Nuclear Models* (Springer, 1996). [52](#)
- 81 W. Greiner and B. Müller, *Quantum Mechanics: Symmetries* (Springer Science & Business Media, 2012). [52](#), [53](#)
- 82 J. Furtado and J. A. H. Neto, “Teoria de Grupos e o Papel das Simetrias em Física,” *Rev. Bras. Ens. Fís.* **43**, (2021). [52](#), [53](#)
- 83 C. J. Batty, E. Friedman, and A. Gal, “Strong Interaction Physics from Hadronic Atoms,” *Phys. Rep.* **287**, 385 (1997). [53](#)
- 84 M. Gell-Mann, “The Eightfold Way: A Theory of Strong Interaction Symmetry,” Technical report, California Inst. of Tech. Pasadena. Synchrotron Lab., 1961. [53](#)

- 85 D. J. Gross, “Nobel lecture: The Discovery of Asymptotic Freedom and the Emergence of QCD,” *Rev. Mod. Phys.* **77**, 837 (2005). [53](#)
- 86 H. Mansour and A. Gamal, “Bound State of Heavy Quarks Using a General Polynomial Potential,” *Adv. High Energy Phys.* **2018**, (2018). [1](#), [56](#), [60](#), [62](#), [64](#), [66](#)
- 87 M. Tanabashi, et al, “Review of Particle Physics: Particle Data Groups,” (2018). [60](#), [62](#), [64](#)
- 88 J. M. Richard, “An Introduction to the Quark Model,” *arXiv preprint arXiv:1205.4326*. [66](#)
- 89 S. Godfrey and N. Isgur, “Mesons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics,” *Phys. Rev. D* **32**, 189 (1985). [66](#)
- 90 P. Campos, M. G. R. Martins, M. C. B. Fernandes, and J. D. M. Vianna, “Quantum Mechanics on Phase Space: The Hydrogen Atom and its Wigner Functions,” *Annals Phys.* **390**, 60 (2018). [41](#), [42](#), [43](#), [66](#)
- 91 P. Campos, M. G. R. Martins, and J. D. M. Vianna, “Quantum Mechanics on Phase Space and the Coulomb Potential,” *Phys. Lett. A* **381**, 1129 (2017). [42](#), [66](#)